УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

© Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева
Институт информатики и телекоммуникации
пр-т Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск, 660014, Россия
e-mail: *tursunbay@rambler.ru*

Abstract. It is consider a nonlinear integro-differential equation with nonlinear hyperbolic operator of the higher order with initial value conditions. It is proposed in this paper a technique based on the characteristics method. This technique allows, moving to a new variable, provide a partial differential equation as an ordinary differential equation describing the change of unknown function along the characteristics. The study of the Cauchy problem reduces to the study of nonlinear Volterra integral equation. By the method of successive approximations it is proved the existence and uniqueness of the solution of this problem.

Введение

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высших порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков [1], [2]. Дифференциальные уравнения в частных производных высших порядков решаются и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения [3], [4].

Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, началась сформироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

Основная идея, на которой основан развиваемый в данной работе подход, состоит в том, что *выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка* *позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.*

В области $D \equiv D_T \times \mathbb{R}$ рассматривается нелинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y) u(s,y) dy ds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n u(t,x) = f(t,x,u(t,x)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x), \ \frac{\partial^i u(t,x)}{\partial t^i}\Big|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \ x \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, 2n-1}, \tag{2}$$

где $\quad f(t,x,u) \in C(D \times \mathbb{R}), \quad \varphi_i(x) \in C(\mathbb{R}), \ i = \overline{1, 2n}, \quad 0 < \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(t,x) dx dt < \infty,$ $D_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$, n — произвольное натуральное число.

Изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [5]–[7]).

Как уже отмечалось выше, дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. С физической точки зрения это означает двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц [8]. В работах [9]–[11] разработана методика для интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. По сути, данная методика ближе к методу характеристик и авторы называли её методом дополнительного аргумента.

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени и при этом используется метод характеристик, обоснованный в [12], [13] для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

1. Интегральное представление задачи (1), (2)

Определение 1. Решением задачи Коши (1), (2) называется функция $u(t,x) \in C^{2n,2n}(D)$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям (2).

Теорема 1. *Задача (1), (2) эквивалентна следующему интегральному уравнению*

$$u(t,x) = \Theta(t,x;u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \right) \frac{t^{i-1}}{i-1)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j} \left(x + s \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1!} f(s,x,u(s,x))ds, \tag{3}$$

где x играет роль параметра.

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n u(t,x) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u(t,x) = L_2^n \Big[L_1^n [u(t,x)] \Big],$$

где $$L_2 \Big[L_1^n [u(t,x)] \Big] \equiv \big(L_1^n \big[u(t,x)\big] \big)_t - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \, \big(L_1^n \big[u(t,x)\big] \big)_x,$$

а $L_1 \big[u(t,x)\big] \equiv (u(t,x))_t + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds \, (u(t,x))_x$.

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$L_2^n \Big[L_1^n \big[u(t,x)\big] \Big] = f(t,x,u(t,x)). \tag{4}$$

Из (4) видно, что уравнение (1) имеет две n-кратные характеристики:

1) $x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds=C_1$;

2) $x-t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds=C_2$, где C_i – произвольные постоянные, $i=1,2$.

Тогда, интегрируя n раз уравнения (4) вдоль линии первой характеристики, получаем

$$L_2^{n-1}\Big[L_1^n\big[u(t,x)\big]\Big]=\Phi_1\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+\int\limits_0^t f(s,x,u(s,x)))ds, \quad (5)$$

$$L_2^{n-2}\Big[L_1^n\big[u(t,x)\big]\Big]=\Phi_2\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)+$$

$$+\Phi_1\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)t+\int\limits_0^t(t-s)f(s,x,u(s,x))ds, \quad (6)$$

....

$$L_1^n\big[u(t,x)\big]=\sum_{i=1}^n\Phi_i\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s,x,u(s,x))ds, \quad (7)$$

где $\Phi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (5), в силу начального условия (2), имеем: $\Phi_1(x)=\varphi_{2n}(x)$. Так как вдоль линии первой характеристики справедливы соотношения

$$\frac{dL_1^n\big[u(t,x)\big]}{dt}=\frac{\partial\,L_1^n\big[u(t,x)\big]}{\partial\,t}+\frac{\partial\,L_1^n\big[u(t,x)\big]}{\partial\,x}\frac{\partial\,x}{\partial\,t}=$$

$$=\Big(L_1^n\big[u(t,x)\big]\Big)_t-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\Big(L_1^n\big[u(t,x)\big]\Big)_x,$$

....

$$\frac{d^nL_1^n\big[u(t,x)\big]}{dt^n}=\left(\frac{\partial}{\partial\,t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial\,x}\right)^nL_1^n\big[u(t,x)\big], \quad (8)$$

то, в силу условия (2), из (6) и (7) имеем:

$$\Phi_2(x) = \varphi_{2n-1}(x), \ldots, \Phi_n(x) = \varphi_{n+1}(x).$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (7) приобретает следующий вид

$$L_1^n\big[u(t,x)\big] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{n+i}\left(x + t\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s,x,u(s,x))ds. \tag{9}$$

Аналогично, интегрируя уравнения (9) n раз вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L_1^{n-1}\big[u(t,x)\big] = \Phi_{n+1}\left(x - t\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \varphi_{n+j}\left(x + s\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{n}}{n!} f(s,x,u(s,x))ds, \tag{10}$$

$$L_1^{n-2}\big[u(t,x)\big] = \Phi_{n+2}\left(x - t\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right) +$$

$$+\Phi_{n+1}\left(x - t\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)t +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t (t-s)\varphi_{n+j}\left(x + s\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1!} f(s,x,u(s,x))ds, \tag{11}$$

....

$$u(t,x) = \sum_{i=n+1}^{2n} \Phi_i\left(x - t\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(s,y)u(s,y)dyds\right)\frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{n+j}\left(x+s\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}K(\theta,y)u(\theta,y)dyd\theta\right)\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}ds+$$

$$+\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}f(s,x,u(s,x))ds, \qquad (12)$$

где $\Phi_i(x)$, $i=\overline{n+1,2n}$ — произвольные непрерывные функции, которые поддлежат определению, x играет роль параметра.

Из (12), в силу начального условия (2), имеем: $\Phi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)$. Вдоль линии первой характеристики справедливо (8). А вдоль линии второй характеристики имеем

$$\frac{du(t,x)}{dt}=\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, t}+\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, x}\frac{\partial\, x}{\partial\, t}=$$

$$=\Big(u(t,x)\Big)_t+\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\Big(u(t,x)\Big)_x,\ldots$$

$$\ldots,\frac{d^n u(t,x)}{dt^n}=\left(\frac{\partial}{\partial\, t}+\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial\, x}\right)^n u(t,x). \qquad (13)$$

Тогда, в силу (2), из (11) и (12) получаем, что

$$\Phi_{n+2}(x)=\varphi_{n-1}(x),\ldots,\Phi_{2n}(x)=\varphi_1(x).$$

Отсюда получаем нелинейное интегральное уравнение (3).

В (3) отметим, что функции $\varphi_i\left(x-t\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)$, $i=\overline{1,n}$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial\, t}+\int_{0}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial\, x}\right)^n u(t,x)=0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль второй характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

А функции $\varphi_j\left(x+t\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)$, $j=\overline{n+1,2n}$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_1^n\big[u(t,x)\big]=0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль первой характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

Исходя из этих соображений, покажем, что интегральное уравнение (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1). Путем $2n$-кратного дифференцирования из (3) получаем

$$\frac{d^{2n}u(t,x)}{dt^{2n}}=f(t,x,u(t,x)),\tag{14}$$

где x играет роль параметра.

Так как вдоль линии первой характеристики справедливо (8) и вдоль линии второй характеристики — (13), то имеем

$$\frac{d^{2n}u(t,x)}{dt^{2n}}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t,x)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)u(s,y)dyds\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u(t,x).$$

Отсюда заключаем, что из обыкновенного дифференциального уравнения (14) следует уравнение в частных производных (1). □

2. Теорема существования и единственности решения

Для произвольной непрерывной функции $h(t,x)$ норму вводим следующим образом:

$$\|h(t,x)\|=\max_{(t,x)\in D}|h(t,x)|,$$

где x играет роль параметра.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{2n}\|\varphi_i(x)\|\dfrac{T^{i-1}}{(i-1)!}+\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\dfrac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\|f(s,x,0)\|ds\leq\Delta<\infty$;

2. $\varphi_i(x)\in Lip\{L_{i|x}\}$, $0<L_i=const, i=\overline{1,2n}$;

3. $f(t,x,u)\in Lip\{L_0(t)_{|u}\}$, $0<\int\limits_0^t L_0(s)ds<\infty$;

4. $\rho<1$, $\rho=\sum\limits_{i=1}^{2n}L_i\dfrac{T^i}{(i-1)!}\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)dyds+\max\limits_{t\in D_T}\int\limits_0^t\dfrac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}L_0(s)ds.$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) в области D.

Доказательство. Для нелинейного интегрального уравнения (3) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases}u_0(t,x)=0,\ (t,x)\in D,\\ u_{k+1}(t,x)=\Theta(t,x;u_k),\ k=0,1,2,\ \ldots\ .\end{cases}\tag{15}$$

Тогда, в силу условий теоремы, из (15) получаем, что справедливы следующие оценки

$$\|u_1(t,x)-u_0(t,x)\|\leq\sum_{i=1}^{2n}\|\varphi_i(x)\|\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\|f(s,x,0)\|ds\leq\Delta,\tag{16}$$

$$\|u_{k+1}(t,x)-u_k(t,x)\|\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{2n}L_i\frac{t^i}{(i-1)!}\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,y)\|u_k(s,y)-u_{k-1}(s,y)\|dyds+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}L_0(s)\|u_k(s,x)-u_{k-1}(s,x)\|ds\leq$$

$$\leq\rho\,\|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\|.\tag{17}$$

Из оценок (16) и (17) следует, что оператор в правой части (3) является сжимающим. Следовательно, задача (1), (2) имеет единственное решение в области D. □

Заключение

В работе развит метод характеристик для нелинейного уравнения с гиперболическим оператором высокой степени. Показано, что выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Получено интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши (1), (2). Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши (1), (2).

Список литературы

1. Александров В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. — М.: Наука, 1986. — 336 с.
2. Алгазин С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. — М.: Наука, 2006. — 248 с.
3. Киряков П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / Киряков П. П., Сенашов С. И., А. Н. Яхно. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. — 192 с.
4. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности / С. И. Сенашов // Докл. АН СССР. — 1991. — Том 320-3. — С. 606–608.
5. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева — М.: Наука, 1967. — 736 с.
6. Полянин А. Д. Справочник. Нелинейные уравнения математической физики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. — М.: Наука, 2002. — 432 с.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.
8. Уравнения с частными производными первого порядка / А. Ю. Горицкий, С. Н. Кружков, Г. А. Чечкин. — М.: Мехмат МГУ, 1999. — 95 с.
9. Иманалиев М. И. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом / М. И. Иманалиев, Ю. А. Ведь // Дифференц. уравнения. — 1989. — Том 23. — № 3. — С. 465–477.
10. Иманалиев М. И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Докл. РАН. — 1992. — Том 323. — № 3. — С. 410–411.
11. Иманалиев М. И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко// Докл. РАН. — 1992. — Том 325. — № 6. — С. 1111–1115.

12. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник ТомГУ. Математика и Механика. — 2012. — Том 14. — № 2. — С. 56–62.
13. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Южно-УралГУ. Математика. Механика. Физика. — 2012. — Вып. 6. — № 11 (270). — С. 35–41.

Статья поступила в редакцию 13.03.2013