УДК: 517.9
MSC2010: 34B15

МАТРИЧНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

© С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев

Донбасский государственный педагогический университет
кафедра математики
ул. Г. Батюка, 19, Славянск, Донецкая обл., 84116, Украина
e-mail: *chujko-slav@inbox.ru*

Matrix boundary value problem in the case of parametric resonance.

Chuiko S. M., Nesmelova (Starkova) O. V., Sysoev D. V.

Abstract.

The study of nonlinear Noetherian matrix boundary value problems for ordinary differential equations is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations in mechanics, biology, electrical engineering, theory of management, theory of motion stability, particularly in problems associated with different cases of the parametric resonance. Research papers of Yu.A Mitropolskii, A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk, A.A. Boichuk, M.I. Ronto, I.G. Malkin, P.A. Proskuryakov, V.A. Yakubovich, V.M. Starzhinsky, D.I. Martynyuk, E.A. Grebenikov, Y.A. Ryabov and other scientists are dedicated to various aspects of the theory of boundary value problems. Research papers of such foreign scientists as G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, S. Schwabik, O. Veivoda, D. Wexler, and others are also dedicated to the theory of boundary value problems.

These methods are used in the analysis of boundary value problems for various classes of systems: boundary value problems for systems of ordinary differential equations, matrix, boundary value problems for systems of ordinary differential equations, autonomous differential systems, for operator equations in functional spaces.

In recent years, considerable attention is paid to the research of boundary value problems, which linear part is not reversible operator, and, in particular, in the case where the number of boundary conditions does not coincide with the dimensionality of solution. Note that in scientific literature this class of boundary value problems has been called Noetherian.

The aim of this article is to obtain solvability conditions and solution constructions of Noetherian weakly nonlinear matrix boundary value problems for systems of ordinary differential equations in the case of parametric resonance, in this case they use original techniques for solving generalized matrix equations of Sylvester with usage of projectors and pseudo inverse (by Moore-Penrose) matrixes and the operator, which leads to a linear algebraic matrix equation of Sylvester to traditional linear algebra system with a rectangular matrix. A generalized method of Green's operator built for traditional Noetherian boundary value problems for systems of ordinary differential equations in the works of A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk are also used. As opposed to researches of periodic boundary value problems in the case of parametric resonance of V.A. Yakubovich and V. M. Starzhinsky, this article is devoted to the investigation of more general Noetherian matrix boundary value problems for systems of ordinary differential equations.

Obtained solvability conditions and a scheme for constructing solutions of nonlinear Noetherian matrix boundary value problems for systems of differential equations in the case of parametric resonance generalize similar results, which are presented in papers of A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya for periodic matrix boundary value problems for Riccati equation in the absence thereof parametric resonance. In addition, received solvability conditions and a scheme of constructing solutions stipulate the inhomogeneity dependence of the linear part of the matrix boundary value problem, and hence the solutions of the equation for generating constants from a small parameter too.

Obtained results are illustrated by the example of a matrix periodic boundary value problem for Riccati equation in the case of parametric resonance.

Key words: matrix boundary value problem, matrix differential equations, generalized Green's operator, parametric excitation, Riccati equation.

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [27]

$$Z(t,\varepsilon):\ Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a;b],\ Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0],\ Z(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t,\varepsilon)=AZ(t,\varepsilon)+Z(t,\varepsilon)B+F(t,\varepsilon)+\varepsilon\,\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon)=\mathscr{A},\ \mathscr{A}\in\mathbb{R}^{\delta\times\gamma}. \tag{2}$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_0'(t,\varepsilon)=AZ_0(t,\varepsilon)+Z_0(t,\varepsilon)B+F(t,\varepsilon),\ \mathscr{L}Z_0(\cdot,\varepsilon)=\mathscr{A}. \tag{3}$$

Здесь $A\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — постоянные матрицы. Нелинейный матричный оператор

$$\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon):\ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\to\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

предполагаем дифференцируемым в смысле Фреше [9, с. 636] по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Нелинейность $\Phi(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $F(t, \varepsilon)$ считаем непрерывными по t на отрезке $[a, b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathscr{L}Z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathscr{L}Z(\cdot, \varepsilon) : \ \mathbb{C}^1[a; b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) были приведены в монографии [1]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной дифференциальной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [27] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [28]. Таким образом, задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (1), подчиненного краевому условию (2), является обобщением периодической задачи для матричного уравнения Риккати [27], нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3, 29], а также задачи Коши для матричного уравнения Бернулли [7, 8].

Как известно [1, с. 211], общее решение

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \ Z(a) = \Theta$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \ U(a) = I_\alpha, \ V'(t) = BV(t), \ V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ задачи Коши [27]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \ Z(a) = \Theta \tag{4}$$

имеет вид

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](t), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

где

$$K\Big[F(s)\Big](t) := \int\limits_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (4). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (4) в краевое условие (2), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{L}Z(\cdot,\Theta) = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot) \tag{5}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [5] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и c_j — константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathscr{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j,\ \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}c_j,\ c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)$$

относительно констант $c_j \in \mathbb{R}^1$. Определим оператор $\mathscr{M}[\mathscr{B}]\ :\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathscr{B}$, а также обратный оператор

$$\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{M}[\mathscr{B}]\Big\}:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению [16, 17]

$$\mathscr{Q}\cdot c = \mathscr{M}\Big[\mathscr{A}\Big] - \mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} \tag{6}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, равносильному уравнению (5); здесь

$$\mathscr{Q} := \Big[\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(1)}\Big]\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(2)}\Big]\ \dots\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}\Big]\ \Big],\ \mathscr{Q}^{(j)} := \mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}.$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [17, 16, 29]

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma}\to\mathbb{N}(\mathscr{Q}^*)$; матрица $P_{\mathscr{Q}^*_d}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathscr{Q}^*}$ матрицы $\mathscr{Q}\in\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. При условии (7) и только при нем общее решение уравнения (6)

$$c=\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A}-\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}+P_{\mathscr{Q}_r}c_r,\ c_r\in\mathbb{R}^r$$

определяет общее решение [16, 17] матричного уравнения (5)

$$\Theta=\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A}-\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}\Big\}+\mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2)

$$Z(t,\Theta_r)=W(t,\Theta_r)+G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](t),\ \Theta_r:=\mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big].$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}\to\mathbb{N}(\mathscr{Q})$; матрица $P_{\mathscr{Q}_r}\in\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$,

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](t):=W\Big\{t,\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big[\mathscr{A}-\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\}+K\Big[F(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина [19] матричной краевой задачи (2), (4), $\mathscr{Q}^+$ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [5, 29]. Обозначим индексы

$$\Big\{j_1,\ j_2,\ \ldots\ j_r\Big\}\subseteq\Big\{1,\ 2,\ \ldots\ m\cdot n\Big\}$$

линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$, при этом

$$W(t,\Theta_r):=\sum_{k=1}^{r}U(t)\cdot\Xi^{(j_k)}V(t)\cdot c_{j_k},\ \Theta_r\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2). При условии $P_{\mathscr{Q}^*}\neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом задача (3) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A}$, для которых выполнено условие (7). В свою очередь, при условии $P_{\mathscr{Q}^*}=0$ для краевой задачи (3) имеет место некритический случай, при этом задача (3) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A}$. Условие разрешимости (7) является обобщением соответствующих условий [2, 3, 11, 29] на случай матричной краевой задачи (3) и может быть использовано в теории краевых задач [29], а также в теории управления [10].

Условия разрешимости

Предположим, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом условие (7) выполнено и задача (1), (2) в малой окрестности решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

порождающей задачи (3) имеет решение

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),\ \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t,\varepsilon):\ X(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ X(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ X(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной матричной краевой задачи

$$X'(t,\varepsilon) = AX(t,\varepsilon) + X(t,\varepsilon)B + \varepsilon\,\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon),\ \mathscr{L}X(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (8)$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\left\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} = 0. \qquad (9)$$

В силу непрерывности по Z и по μ нелинейной функцию $\Phi(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$ приходим к следующему уравнению

$$\mathscr{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\left\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} = 0.$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующих утверждений [22, 23, 24].

Лемма. *Предположим, что для краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости:*

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\right\} = 0.$$

Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

задача (1), (2) *имеет решение*

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ \ \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ *существует непрерывная собственная функция*

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),\ \ \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathscr{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (10)$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [29], а также периодическими краевыми задачами [6], уравнение (10) будем называть уравнением для порождающих констант матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Корни уравнения для порождающих порождающих констант (10), в данном случае — матрицы $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а также собственные функции $\mu_0(\varepsilon)$ определяют порождающее решение $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Если же уравнение (10) не имеет корней

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,\ \ \Theta_0(\varepsilon),\ \ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

то исходная матричная краевая задача (1), (2) в случае параметрического резонанса не имеет искомых решений. Фиксируя одно из решений $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, уравнения для порождающих порождающих констант (10), а также собственную функцию $\mu_0(\varepsilon)$, приходим к задаче об отыскании решения матричной краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$; в этой окрестности имеет место разложение [9, с. 636]

$$\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] = \Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] +$$

$$+D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big] + A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon) + R\Big[Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon\Big],$$

при этом в малой окрестности порождающего решения $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, уравнения для порождающих порождающих констант (10), а также собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$,

$$A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big] := \frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\alpha\times\beta)$ – матрица и $R(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ — остаток этого разложения. Дифференциал

$$D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big] \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

представляет собой линейный по $X(t,\varepsilon)$ оператор. С учетом последнего разложения, а также равенства (10), необходимое и достаточное условие (9) существования решения

$$X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon)$$

нелинейной матричной краевой задачи (8) является уравнением

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}M\Bigg\{\mathscr{L}K\Bigg\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(s,\varepsilon)\Big]+$$

$$+A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)+R\Big[Z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}=0$$

относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$ и скалярной функции $\zeta(\varepsilon)$. Здесь $W(t,\Theta_r(\varepsilon))$ — общее решение однородной части краевой задачи (8) и

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon);\ 0\Big](t)$$

— частное решение неоднородной матричной краевой задачи (8). Обозначим $\xi_j(\varepsilon)$ скалярные функции, определяющие разложение матрицы

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon),\ \xi_j(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ j=1,2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix}\xi(\varepsilon)\\ \zeta(\varepsilon)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+\alpha\beta},\ \xi(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\beta}$$

и матрицу

$$\mathscr{B}_0(\varepsilon) := \left[\ \mathscr{B}_0^{(1)}(\varepsilon)\ \mathscr{B}_0^{(2)}(\varepsilon)\ ...\ \mathscr{B}_0^{(\alpha\beta)}(\varepsilon)\ \mathscr{B}_0^{(1+\alpha\beta)}(\varepsilon)\ \right] \in \mathbb{R}^{d\times(1+\alpha\beta)},$$

где

$$\mathscr{B}_0^{(j)}(\varepsilon) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\ U(s)\cdot\Xi^{(j)}\cdot V(s)\Big]\Big\}(\cdot) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\mathscr{B}_0^{(1+\alpha\beta)}(\varepsilon) := P_{\mathscr{Q}_d^*}M\Big\{\mathscr{L}K\Big\{A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\},\ j=1,2,\ ...\ \alpha\beta.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие (9) разрешимости нелинейной матричной краевой задачи (8) преобразуется к виду

$$\mathscr{B}_0(\varepsilon)\cdot\check{c}(\varepsilon) = -P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}. \quad (11)$$

Уравнение (11) разрешимо относительно вектора $\check{c}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{1+\alpha\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{B}_0^*}P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0.$$

В частности, уравнение (11) разрешимо при условии

$$P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon)P_{\mathscr{Q}_d^*}=0,\ \mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]; \quad (12)$$

в этом случае уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\};$$

здесь $P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{d\times d}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon):\ \mathbb{R}^{d\times d}\to\mathbb{N}(\mathscr{B}_0^*(\varepsilon)).$$

Таким образом, при условии (11) по меньшей мере одно решение нелинейной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая операторная система

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon);\ 0\Big](t),$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\ \Theta_r(\varepsilon) = \mathscr{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}(\varepsilon)\Big],\ \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}(\varepsilon),$$

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}; \qquad (13)$$

здесь

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times(1+\alpha\beta)},\ \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(1+\alpha\beta)}$$

— постоянные матрицы. Для нахождения приближенного решения операторной системы (2) применим метод последовательных приближений [9]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для традиционных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [20, 23, 24, 25, 26].

Теорема. *Предположим, что для порождающей матричной краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом условие выполнено разрешимости:*

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Предположим также, что уравнение (10) *имеет корни*

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,\ \Theta_0(\varepsilon),\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

тогда при условии (11) *в малой окрестности решения порождающей задачи* (3)

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

и в достаточно малой окрестности начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ *собственной функции* $\mu(\varepsilon)$ *по меньшей мере одно решение матричной краевой задачи* (1), (2)

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon)$$

и непрерывную собственную функцию $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ *определяет операторная система* (2)*; для нахождения этого решения применима итерационная схема*

$$Z_{k+1}(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t,\varepsilon),\ X_{k+1}(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon)) + X_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$X_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\ G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon;\ 0\Big](t),$$

$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon),\ \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathscr{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}_{k+1}(\varepsilon)\Big],\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) +$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},\ k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ . \qquad (14)$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [6, 29], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого последней системой аналогично [15, 18].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Риккати

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t) + \varepsilon\ \Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon),\ \mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (15)$$

где

$$\Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) := \mu S_1 Z(t,\varepsilon) S_2 + S_3 Z(t,\varepsilon) S_4 Z^*(t,\varepsilon) S_5,$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_4 := S_1,\ S_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ 0 & \sin 2t \end{pmatrix},\ \mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon) := Z(0,\varepsilon) - Z(2\pi,\varepsilon).$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B,\ Z(0) = \Theta$$

имеет вид

$$W(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t),\ \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix},\ V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j,\ j = 1, 2,\ \dots\ 4$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Общее решение однородной матричной задачи (15) определяет матрица $\mathscr{Q} = 0$ и ее ортопроекторы $P_{\mathscr{Q}} = P_{\mathscr{Q}^*} = I_4$. Таким образом, для матричной краевой задачи (15) имеет место критический случай. Поскольку для 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) условие (7) выполнено, постольку порождающая 2π-периодическая задача для матричного дифференциального уравнения (15) разрешима для данных неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A} = 0$. Общее решение порождающей 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](t),\ \Theta_r = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](t) = K\Big[F(s)\Big](t),$$

где

$$\mathscr{M}K\Big[F(s)\Big](t) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2(-25\cos t + 37\cos 2t - 12\cos 3t - 6\sin 2t + 9\sin 3t) \\ -25\cos t + 46\cos 2t - 21\cos 3t + 25\sin t - 8\sin 2t - 3\sin 3t \\ -25\cos t + 28\cos 2t - 3\cos 3t + 25\sin t - 44\sin 2t + 21\sin 3t \\ 12\cos 2t - 12\cos 3t + 25\sin t - 26\sin 2t + 9\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Уравнение (10) для порождающих констант 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) имеет действительный корень

$$\mu = 1,\ \xi = \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{23}{15} & \frac{14}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^*,$$

которому соответствует матрица полного ранга

$$\mathscr{B}_0 = -120\,\pi \begin{pmatrix} 34 & -158 & 38 & 300 & 0 \\ 15 & -34 & 68 & -38 & 0 \\ 3 & -208 & 14 & 214 & 0 \\ -41 & -3 & 61 & -14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае 2π-периодической задачи для уравнения (15) выполнены условия теоремы, следовательно 2π-периодическая задача (15) в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t) = \begin{pmatrix} 37\cos 2t - 6\sin 2t & 2(7\cos 2t - 11\sin 2t) \\ -4\sin 2t + 23\cos 2t & 6\cos 2t - 13\sin 2t \end{pmatrix}$$

разрешима, причем $\mu(0) = 1$. Итерационная схема (14) определяет первое приближение от порождающего решения $X_1^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$\mathscr{M} X_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \left\{ X_{1,i}^{(1)}(t,\varepsilon) \right\}_{i=1}^{4},$$

для которого

$$X_{1,1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -31\ 500 + 24\ 192\cos t - 10\ 080\cos 2t - 14\ 640\cos 3t +$$

$$+32\ 028\cos 4t + 41\ 776\sin t - 21\ 210\sin 2t + 15\ 360\sin 3t + 5\ 021\sin 4t \Big\},$$

$$X_{1,2}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -10\ 500 + 32\ 984\cos t - 13\ 020\cos 2t - 15\ 000\cos 3t +$$

$$+5\ 536\cos 4t + 8\ 792\sin t - 29\ 190\sin 2t + 360\sin 3t + 12\ 127\sin 4t \Big\},$$

$$X_{1,3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -10\ 500 + 16\ 492\cos t - 12\ 180\cos 2t + 180\cos 3t +$$

$$+6\ 008\cos 4t + 4\ 396\sin t - 2\ 310\sin 2t + 7\ 500\sin 3t - 5\ 569\sin 4t \Big\},$$

$$X_{1,4}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ 2\ 611\cos t - 2\ 730\cos 2t - 915\cos 3t +$$

$$+1\ 034\cos 4t - 1\ 512\sin t - 1\ 260\sin 2t\sin 2t + 960\sin 3t + 288\sin 4t \Big\}.$$

Для оценки точности найденного порождающего и первого приближения к 2π-периодическому решению уравнения типа Риккати (2) определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \Bigg|\Bigg| \, \Bigg|\Bigg| \mathscr{M}\Bigg[Z_1'(t,\varepsilon) - AZ_1(t,\varepsilon) - Z_1(t,\varepsilon)B - F(t) -$$

$$-\varepsilon \; \Phi(Z_k(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon)\Bigg]\Bigg|\Bigg|_{\mathbb{R}^4}\Bigg|\Bigg|_{L^2[0;2\pi]}, \; k = 0, \; 1 \; .$$

В частности, при $\varepsilon = 0,1$ имеем:

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,318\ 171, \;\; \Delta_1(0,1) \approx 0,030\ 770.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0318\ 171, \;\; \Delta_1(0,01) \approx 0,00307\ 697.$$

Заметим, что матрица $\mathscr{B}_0$, ключевая при исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть найдена непосредственно из уравнения для порождающих констант (10). Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathscr{Q}_d^*} \mathscr{M}\Bigg\{\mathscr{L}K\Bigg[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Bigg](\cdot)\Bigg\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\xi, \zeta)} P_{\mathscr{Q}_d^*} \mathscr{M}\Bigg\{\mathscr{L}K\Bigg\{D\Bigg[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), W(s, \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon)) + X^{(1)}(s,\varepsilon)\Bigg] +$$

$$+A\Bigg[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Bigg]\zeta(\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0 \\ \zeta(\varepsilon)=0}} = \mathscr{B}_0.$$

Предложенная в статье схема исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогично [29, 32] может быть перенесена на матричные краевые задачи с запаздыванием, а также — аналогично [18, 29, 30, 31] на автономные матричные краевые задачи. И, наконец, аналогично [21, 29] предложенная схема исследовании матричных краевых задач может быть перенесена на матричные краевые задачи со слабонелинейным функционалом в краевом условии.

Список литературы

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р.Беллман. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

BELLMAN, R. (1969) *Introduction to matrix analysis.* Moscow: Nauka.

2. Бойчук, А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А.Бойчук. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.

   BOICHUK, A.A. (1990) *Constructive methods of analysis of the boundary value problems.* Kiev: Naukova dumka.

3. Бойчук, А.А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1988. — №. 7. — С. 3–6.

   BOICHUK, A.A. (1988) The Green's function of the linear inhomogeneous boundary value problem. *Reports of the Academy of Sciences of Ukrainian SSR. Ser. A.* 7. p. 3-6.

4. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.

   BOLOTIN, V.V. (1956) *Dynamic stability of elastic systems.* Moscow: Gostehizdat.

5. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 318 с.

   VOEVODIN, V.V. and KUZNETZOV Yu.A. (1984) *Matrix and computing.* Moscow: Nauka.

6. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А.Гребеников, Ю.А.Рябов. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

   GREBENIKOV, E.A. and RYABOV, Yu.A. (1979) *Constructive Methods in the Analysis of Nonlinear Systems.* Moscow: Nauka.

7. Деревенский, В.П. Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Математика. — 2008. — №. 2. — С. 14–23.

   DEREVENSKII, V.P. (2008) Matrix Bernoulli equations. I. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* Volume 52 (Issue 2). p. 12-21.

8. Деревенский, В.П. Матричные уравнения Бернулли. II // Известия вузов. Математика. — 2008. — №. 7. — С. 3–10.

   DEREVENSKII, V.P. (2008) Matrix Bernoulli equations. I. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* Volume 52 (Issue 7). p. 1-7.

9. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

   KANTOROVICH, L.V. and AKILOV, G.P. (1977) *Functional analysis.* Moscow: Nauka.

10. Коробов, В.И., Бебия, М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, управляемых по первому приближению // Доповіді НАН України. — 2014. — №. 2. — С. 20–25.

    KOROBOV, V.I. & BEBIYA, M.O. (2014) Stabilization of some class of nonlinear systems that are uncontrollable in the first approximation. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukrainian.* 2. p. 20-25.

11. Лаптинский, В.Н., Маковецкий, И.И. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41. — № 7. — С. 994–996.

    LAPTINSKY, V.N. & MAKOVETSKY, I.I. (2005) On the Constructive Analysis of a Two-Point Boundary Value Problem for a Nonlinear Lyapunov Equation. *Differential Equations.* Volume 41 (Issue 7). p. 1045-1048.

12. Люлько, Н.А. Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осциляторов / Н.А. Люлько. — Новосибирск, 2012. — 33 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281)

    LULKO, N.A. (2012) *Basic and combinational resonance in a nonlinear system of two oscillators.* Novosibirsk. Preprint.

13. Мандельштам, Л.И., Папалекси, Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. — 1934. — №. 3. — С. 5–29.

    MANDELSHTAM, L.I. & PAPALEXY, N.D. (1934) About the parametric excitation of electric oscillations. *Technical Physics.* 3. p. 5-29.

14. Силин, В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму / В.П.Силин. — М.: Наука, 1973. — 287 с.

    SILIN, V.P. (1973) *A parametric effects of high power radiation to the plasma.* Moscow: Nauka.

15. Чуйко, А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — Т. 8. — № 7. — С. 278–288.

    CHUIKO, A.S. (2005) Domain of Convergence of an Iteration Procedure for a Weakly Nonlinear Boundary-Value Problem. *Nonlinear Oscillations.* Volume 8 (Issue 2). p. 278-288.

16. Чуйко, С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — 2014. — №. 1120. — С. 85–94.

    CHUIKO, S.M. (2014) About the solution of Lyapunov matrix equations. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: mathematics, applied mathematics and mechanics.* 1120. p. 85-94.

17. Чуйко, С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014. — Т. 19. — Вып. 1 (21). — С. 49–57.

    CHUIKO, S.M. (2014) About the solution of Silvestr equation. *Bulletin of Odessa National University. Series: mathematics and mechanics.* Volume 19 (Issue 1(21)). p. 49-57.

18. Чуйко, С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9. — № 3. — С. 416–432.

    CHUIKO, S.M. (2006) Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem. *Nonlinear Oscillations.* Volume 9 (Issue 3). p. 405-422.

19. Чуйко, С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32). — № 1–2. — С. 101–107.

    CHUIKO, S.M. (2014) The Green's operator for the linear Noetherian boundary value problem for the matrix differential equation. *Dynamic systems* . Volume 4(32) (Issue 1-2). p. 101-107.

20. Чуйко, С.М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014. — Т. 17. — № 1. — С. 137–148.

    CHUIKO, S.M. (2015) Nonlinear Noetherian Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance. *Journal of Mathematical Sciences.* Volume 205 (Issue 6). p. 859-870.

21. Чуйко, С.М. Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доповіді НАН України. — 2007. — № 2. — С. 26–30.

    CHUIKO, S.M. (2007) Noetherian boundary value problem in special critical case. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukrainian.* 2. p. 26-30.

22. Чуйко, С.М., Кулиш, П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — Т. 24. — С. 243–252.

    CHUIKO, S.M. & KULISH, P.V. (2012) Linear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance. *Works of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine.* 24. p. 243-252.

23. Чуйко, С.М., Кулиш, П.В. Слабонелинейная периодическая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. — Т. 27. — С. 240–249.

    CHUIKO, S.M. & KULISH, P.V. (2013) Seminonlinear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance. *Works of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine.* 27. p. 240-249.

24. Чуйко, С.М., Старкова, О.В., Кулиш, П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса // Комп. исследов. и модел. — 2014. — Т. 6. — № 1. — С. 27–43.

    CHUIKO, S.M. & STARKOVA, O.V.& KULISH, P.V. (2014) Periodic boudary value problem in the case of parametric resonance for Hill equation. *Computer research and modeling.* Volume 6 (Issue 1). p. 27-43.

25. Шмидт, Г. Параметрические колебания / Г. Шмидт. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

    SHMIDT, G. (1978) *Parametric oscillations.* Moscow: Mir.

26. Якубович, В.А. Параметрический резонанс в линейных системах / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1987. — 328 с.

    YAKUBOVICH, A.A. and STARZHINSKII, V.M. (1987) *Parametric resonance in linear systems.* Moscow: Nauka.

27. BOICHUK, A.A. & KRIVOSHEYA, S.A. (2001) A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equation.* Volume 37 (Issue 4). p. 464–471.

28. BOICHUK, A.A. & KRIVOSHEYA, S.A. (1998) Criterion of the solvability of matrix equation of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal.* Volume 50 (Issue 8). p. 1162–1169.
29. BOICHUK, A.A. and SAMOILENKO, A.M. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Utrecht; Boston: VSP. XIV + 317 p.
30. BOICHUK, A.A. & CHUIKO, S.M. (1992) Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Differential equation.* 10. p. 1353–1358.
31. CHUIKO, S.M. & BOICHUK, I.A. (2009) An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* Volume 12 (Issue 3). p. 405–416.
32. CHUIKO, S.M. & CHUIKO, A.S. (2012) On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.).* Volume 14 (Issue 3). p. 445–460.

Статья поступила в редакцию 24.05.2015