УДК: 517.9

MSC2010: 15A24, 34B15, 34C25

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

© С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет
ул. Лозановича, д. 14, кв. 31, г. Славянск, Донецкая обл., Украина, 84 112
e-mail: *chujko-slav@inbox.ru*

Generalized Green operator Noetherian linear boundary value problem for the matrix difference equation.

Chuiko S. M.

Abstract. Lyapunov matrix equations and their generalizations — linear matrix Sylvester equation widely used in the theory of stability of motion, control theory, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations, partial differential equations and signal processing. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome.

By using the theory of generalized inverse operators, A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya establish a criterion of the solvability of the Lyapunov-type matrix equations $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$ and investigate the structure of the set of their solutions. The article A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya based on pseudo-inverse linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov type equation. The article suggests the solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous generalized equation Sylvester based on pseudo-inverse linear matrix operator corresponding to the homogeneous part of the linear matrix generalized Sylvester equation.

Using the technique of Moore-Penrose pseudo inverse matrices, we suggest an algorithm for finding a family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in general case when the linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix Sylvester equation, has no inverse. We find an expression for family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in terms of projectors and Moore-Penrose pseudo inverse matrices. This result is a generalization of the result article A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya to the case of linear generalized matrix Sylvester equation.

Found solvability conditions and construction of the generalized Green operator for Noetherian linear boundary value problem for the matrix difference equations. We show that the principal results in the theory of linear periodic oscillations remain valid for linear Noetherian boundary value problem for matrix difference equation. Efficiency of the proposed solvability conditions and the scheme for constructing solutions of linear Noetherian boundary value problem for matrix difference equation is illustrated by an example of a multipoint problem for difference equation.

Key words: Generalized Green operator, boundary value problem, matrix difference equation, pseudo inverse matrices.

Введение

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейного матричного разностного уравнения. Предложен оператор, который приводит линейное матричное алгебраическое уравнение к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о нахождении решений

$$Z(k)=\Big(z^{(i,j)}(k)\Big),\ k\in[0,N]\subset\mathbb{N},\ i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \alpha,\ j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \beta$$

линейной нетеровой ($\alpha\neq\beta\neq\lambda\neq\mu$) краевой задачи

$$Z(k+1)=AZ(k)+Z(k)B+F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot)=\mathscr{A}. \tag{1}$$

Компоненты $Z^{(i,j)}(k),\ F^{(i,j)}(k):[0,N]\to\mathbb{R}^1$ матриц $Z(k)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и $F(k)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ предполагаем ограниченными на отрезке $[0,N]$ функциями. Здесь $A\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$, $B\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ и $\mathbb{A}\in\mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$ — постоянные матрицы; $\mathscr{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathscr{L}Z(\cdot):\ \Big\{Z(k):[0,N]\to\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\Big\}\to\mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

Конструктивные условия разрешимости и структура решения общей нетеровой краевой задачи были получены в монографии [29]. Условия разрешимости, а также конструкция оператора Грина нетеровой краевой задачи (1) для традиционного ($\beta=\mu=1$) разностного уравнения были получены в статье [2], как обобщение классических результатов для систем разностных уравнений [3, 4]. В свою очередь, условия разрешимости и структура периодического решения систем матричного дифференциального уравнения были получены в статье [27] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [28]. Общее решение полуоднородной задачи Коши

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k), \ Z(0) = \Theta \tag{2}$$

представимо в виде

$$Z(k) = W(k, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](k),$$

где

$$W(k, \Theta) := \sum_{j=0}^{k} C_k^{k-j} A^{k-j} \Theta B^j$$

— общее решение однородной части матричного разностного уравнения (1) и

$$K\Big[\Phi(s)\Big](k) := \sum_{j=0}^{k-1} W\Big[j, F(k-1-j)\Big]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Теорема 1. *Общее решение линейной полуоднородной задачи Коши (2)*

$$Z(k) = W(k, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](k), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить общее решение в матричное разностное уравнение (1). □

Подставляя общее решение задачи Коши (2) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{L} W(\cdot, \Theta) = \mathscr{A} - \mathscr{L} K\Big[F(s)\Big](\cdot) \tag{3}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$ — базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и $c_j, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$ — константы, определяющие разложение матрицы

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j, \ c_j \in \mathbb{R}^1, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при этом

$$\mathscr{L} W(\cdot, \Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \mathscr{L} W\Big[\cdot, \Xi^{(j)}\Big] c_j.$$

Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathscr{L}W\Big[\cdot, \Xi^{(j)}\Big]c_j = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)$$

относительно $\alpha \cdot \beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha \cdot \beta$. Определим оператор [17, 16]

$$\mathscr{M}[\mathscr{B}] :\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathscr{B}$, а также обратный оператор

$$\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{M}[\mathscr{B}]\Big\} :\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Заметим, что оператор $\mathscr{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1},\ \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},\ \Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},$$

$$\Upsilon_4 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{16\times 1},\ \dots\ .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида

$$(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \dots\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathscr{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathscr{M}[A] = \Big(I_n \otimes A\Big) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Определим также матрицы

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n},\ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^{m} \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1,\ j = i, \\ 0,\ j \neq i \end{cases},\ i = 1,\ 2,\ \dots\ m.$$

Таким образом, обратный оператор $\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}] = \sum_{k=1}^{n} \Big[E_n^m\Big]_k \cdot \mathscr{B} \cdot \Big[E_1^m\Big]_k.$$

В новых приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{Q}c = \mathscr{M}\Big[\mathscr{A}\Big] - \mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$; здесь

$$\mathscr{Q} := \Big[\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(1)}\Big]\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(2)}\Big]\ \dots\ \mathscr{M}\Big[\mathscr{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}\Big]\ \Big],$$

где

$$\mathscr{Q} \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times\alpha\cdot\beta},\ \mathscr{Q}^{(j)} := \mathscr{L}W\Big[\cdot, \Xi^{(j)}\Big] \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu},\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta.$$

Как известно [29, 17, 16], последнее уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q}^*)$; матрица $P_{\mathscr{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathscr{Q}^*}$.

2. Условия разрешимости

При условии (4) и только при нем общее решение уравнения (3)

$$c = \mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathscr{Q}_r}c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение нетеровой краевой задачи (1)

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](k),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big];$$

здесь

$$\Theta = \mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],$$

$P_{\mathscr{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q})$; матрица $P_{\mathscr{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$,

$$G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](k) := W\Big\{k, \mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big[\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\} + K\Big[F(s)\Big](k)$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1), $\mathscr{Q}^+$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [9]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При условии (4) и только при нем общее решение линейной нетеровой краевой задачи (1)*

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](k),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r} c_r\Big],\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1).

При условии $P_{\mathscr{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место критический случай, при этом задача (1) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$, для которых выполнено условие (4). При условии $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место некритический случай, при этом задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$.

Утверждение доказанной теоремы 2 является обобщением соответствующих утверждений [2] на случай матричной краевой задачи (1).

Пример 1. *Условия теоремы 2 выполнены для матричной трехточечной разностной краевой задачи*

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot) = \mathscr{A}, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix},\ \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также

$$\mathscr{L}Z(\cdot) := \sum_{i=1}^{3} M_i Z(\tau_i) N_i,\ M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (5) определяют матрицы

$$W(0,\Theta):=\Theta:=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(1,\Theta):=\begin{pmatrix} c_{11}+c_{12}+c_{21} & c_{12}+c_{22} & c_{11}+2c_{13}+c_{23} \\ c_{21}+c_{22} & c_{22} & c_{21}+2c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta):=\begin{pmatrix} c_{11}+2(c_{12}+c_{21}+c_{22}) & c_{12}+2c_{22} & 3c_{11}+c_{12}+4c_{13}+2c_{21}+4c_{23} \\ c_{21}+2c_{22} & c_{22} & 3c_{21}+c_{22}+4c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(3,\Theta):=$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11}+3(c_{12}+c_{21}+2c_{22}) & c_{12}+3c_{22} & 7c_{11}+4c_{12}+8c_{13}+9c_{21}+3c_{22}+12c_{23} \\ c_{21}+3c_{22} & c_{22} & 7c_{21}+4c_{22}+8c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta):=$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11}+4(c_{12}+c_{21}+3c_{22}) & c_{12}+4c_{22} & 15c_{11}+11c_{12}+4(4c_{13}+7c_{21}+4c_{22}+8c_{23}) \\ c_{21}+4c_{22} & c_{22} & 15c_{21}+11c_{22}+16c_{23} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi^{(6)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ и $c_j,\ j=1,2,\ \dots 6$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Поскольку

$$P_{\mathscr{Q}^*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\neq 0,$$

постольку для краевой задачи (5) имеет место критический случай. Общее решение

$$W(k,\Theta_r),\ \Theta_r:=\mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],\ c_r\in\mathbb{R}^4$$

однородной части задачи (5) определяет матрица

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 37 & 14 & 21 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее ортопроектор

$$P_{\mathscr{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{741\ 273}{819\ 892} & -\frac{34\ 744}{204\ 973} & -\frac{28\ 595}{819\ 892} & \frac{8\ 715}{819\ 892} & -\frac{22\ 500}{204\ 973} & -\frac{173\ 119}{819\ 892} \\ -\frac{34\ 744}{204\ 973} & \frac{139\ 590}{204\ 973} & -\frac{20\ 873}{204\ 973} & -\frac{22\ 992}{204\ 973} & -\frac{37\ 740}{204\ 973} & -\frac{74\ 371}{204\ 973} \\ -\frac{28\ 595}{819\ 892} & -\frac{20873}{204\ 973} & \frac{741\ 069}{819\ 892} & -\frac{219\ 837}{819\ 892} & -\frac{3\ 960}{204\ 973} & -\frac{45\ 227}{819\ 892} \\ \frac{8715}{819\ 892} & -\frac{22\ 992}{204\ 973} & -\frac{219\ 837}{819\ 892} & \frac{92\ 089}{819\ 892} & \frac{16\ 260}{204\ 973} & \frac{77\ 007}{819\ 892} \\ -\frac{22\ 500}{204\ 973} & -\frac{37\ 740}{204\ 973} & -\frac{3\ 960}{204\ 973} & \frac{16\ 260}{204\ 973} & \frac{178\ 173}{204\ 973} & -\frac{50\ 640}{204\ 973} \\ -\frac{173\ 119}{819\ 892} & -\frac{74\ 371}{204\ 973} & -\frac{45\ 227}{819\ 892} & \frac{77\ 007}{819\ 892} & -\frac{50\ 640}{204\ 973} & \frac{434\ 085}{819\ 892} \end{pmatrix};$$

матрица

$$P_{\mathscr{Q}_r} = \begin{pmatrix} \frac{741273}{819892} & -\frac{34744}{204973} & -\frac{28595}{819892} & \frac{8715}{819892} \\ -\frac{34744}{204973} & \frac{139590}{204973} & -\frac{20873}{204973} & -\frac{22992}{204973} \\ -\frac{28595}{819892} & -\frac{20873}{204973} & \frac{741069}{819892} & -\frac{219837}{819892} \\ \frac{8715}{819892} & -\frac{22992}{204973} & -\frac{219837}{819892} & \frac{92089}{819892} \\ -\frac{22500}{204973} & -\frac{37740}{204973} & -\frac{3960}{204973} & \frac{16260}{204973} \\ -\frac{173119}{819892} & -\frac{74371}{204973} & -\frac{45227}{819892} & \frac{77007}{819892} \end{pmatrix}$$

составлена из $r = 4$ линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (5) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0) = 0,\ K\Big[\Phi(s)\Big](1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 37 \\ 4 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Условие (4) в случае неоднородной задачи (5) выполнено, поэтому общее решение

$$Z(k,\Theta_r) = W(k,\Theta_r) + G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k)],\ c_r \in \mathbb{R}^4$$

неоднородной задачи (5) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k) := W\Big\{k, \mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^{+}\mathscr{M}\Big[\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\} + K\Big[F(s)\Big](k)$$

краевой задачи (5); здесь

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0) = -\frac{1}{204\ 973}\begin{pmatrix} 29\ 982 & 49\ 551 & 24\ 780 \\ 71\ 607 & 122\ 634 & 56\ 001 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](1) = \frac{1}{204\ 973}\begin{pmatrix} -151\ 140 & -172\ 185 & 69\ 430 \\ 10\ 732 & -122\ 634 & 183\ 609 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](2) = \frac{1}{204\ 973}\begin{pmatrix} -107\ 620 & -294\ 819 & 9\ 084 \\ 93\ 071 & -122\ 634 & -151513 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](3) = \frac{1}{204\ 973}\begin{pmatrix} 100\ 578 & -417\ 453 & -35\ 992 \\ 175\ 410 & -122\ 634 & 199\ 991 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](4) = \frac{1}{204\ 973}\begin{pmatrix} 473\ 454 & -540\ 087 & 433\ 558 \\ 257\ 749 & -122\ 634 & 1\ 190\ 311 \end{pmatrix}.$$

В некритическом случае, при условии $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$, задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$.

Следствие 1. *В некритическом случае, при условии $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$, общее решение линейной нетеровой краевой задачи (1)*

$$Z(k,\Theta_r) = W(k,\Theta_r) + G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (1).

Пример 2. *Условия следствия выполнены для периодической краевой задачи*

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot) = Z(0) - Z(4) = 0, \tag{6}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ F(k) := \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix},\ k \in \Big\{\ 0,\ 1,\ \dots\ 4\ \Big\}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (6) определяют матрицы

$$W(0,\Theta) := \Theta := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \; W(1,\Theta) := \begin{pmatrix} 2c_{11}+c_{12}+c_{21} & 2c_{12}+c_{22} \\ 2c_{21}+c_{22} & 2c_{22} \end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta) := \begin{pmatrix} 4(c_{11}+c_{12}+c_{21})+2c_{22} & 4(c_{12}+c_{22}) \\ 4(c_{21}+c_{22}) & 4c_{22} \end{pmatrix},$$

$$W(3,\Theta) := \begin{pmatrix} 4(2c_{11}+3(c_{12}+c_{21}+c_{22})) & 8c_{12}+12c_{22} \\ 8c_{21}+12c_{22} & 8c_{22} \end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta) := \begin{pmatrix} 16(c_{11}+2(c_{12}+c_{21})+3c_{22}) & 16(c_{12}+2c_{22}) \\ 16(c_{21}+2c_{22}) & 16c_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j, \; j = 1, 2, \; \dots \; 4$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Поскольку

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} -15 & -32 & -32 & -48 \\ 0 & -15 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix},$$

постольку $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$, следовательно для краевой задачи (6) имеет место некритический случай. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (6) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0) = 0, \; K\Big[\Phi(s)\Big](1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; K\Big[\Phi(s)\Big](2) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3) = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \; K\Big[\Phi(s)\Big](4) = \begin{pmatrix} 47 & 21 \\ 21 & 11 \end{pmatrix}.$$

Единственное ($P_{\mathscr{Q}} = 0$) решение неоднородной задачи (6) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k) := K\Big[F(s)\Big](k) - W\Big\{k, \mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^{-1}M\Big[\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\}$$

краевой задачи (6); здесь

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0)=\begin{pmatrix} -\frac{5023}{3375} & \frac{37}{225} \\ \frac{37}{225} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](1)=\begin{pmatrix} -\frac{8936}{3375} & \frac{134}{225} \\ \frac{134}{225} & -\frac{22}{15} \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](2)=\begin{pmatrix} -\frac{10477}{3375} & \frac{163}{225} \\ \frac{163}{225} & -\frac{29}{15} \end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](3)=\begin{pmatrix} -\frac{9314}{3375} & \frac{116}{225} \\ \frac{116}{225} & -\frac{28}{15} \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](4)=G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0)=\begin{pmatrix} -\frac{5023}{3375} & \frac{37}{225} \\ \frac{37}{225} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix}.$$

Утверждение доказанных теорем и следствия 1 является обобщением соответствующих утверждений [2] на случай матричной краевой задачи (1).

Пример 3. *Условия следствия выполнены для неоднородной периодической задачи для уравнения Трибоначчи* [10]

$$y(k+3)=y(k+2)+y(k+1)+y(k)+f(k),\ y(0)-y(4)=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) приводится к виду (1) посредством матриц

$$A:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ F(k):=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(k) \end{pmatrix},\ Z(k):=\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (7) определяют матрицы

$$W(0,\Theta):=\Theta:=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\ W(1,\Theta):=\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta):=\begin{pmatrix} c_3 \\ c_1+c_2+c_3 \\ c_1+2c_2+2c_3 \end{pmatrix},\ W(3,\Theta):=\begin{pmatrix} c_1+c_2+c_3 \\ c_1+2c_2+2c_3 \\ 2c_1+3c_2+4c_3 \end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta):=\begin{pmatrix} c_1+2c_2+2c_3 \\ 2c_1+3c_2+4c_3 \\ 4c_1+6c_2+7c_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{3\times 1}$ и $c_j,\ j = 1, 2,\ 3$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам базиса пространства $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Поскольку

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -4 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

постольку $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$, следовательно для краевой задачи (7) имеет место некритический случай. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (7) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0) = 0,\ K\Big[\Phi(s)\Big](1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Единственное ($P_{\mathscr{Q}} = 0$) решение неоднородной задачи (7) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](0) = G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейного матричного разностного уравнения, обобщающие соответствующие результаты А.А. Бойчука [2] на случай матричной краевой задачи (1). Предложен оператор $\mathscr{M}$ [17, 16], который приводит линейное матричное алгебраическое уравнение к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей. Предложена формула построения частного решения уравнения, обобщающее известные матричные уравнения Ляпунова и Сильвестра, которые широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [27].

Список литературы

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht; Boston. VSP.

2. Бойчук, А.А. Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. — № 6, 1997. — Т. 49. — С. 832 — 835.

   BOICHUK, A. (1997) Boundary-value problems for systems of difference equations. *Ukrainian Math. Zhurn.* 49 (№ 6). p. 930-934.

3. Мартынюк, Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. — Киев: Наук. думка, 1972. — 246 с.

   MARTYNYUK, D.I. (1972) *Lectures on the qualitative theory of difference equations*. Kiev. Naukova Dumka.

4. Шарковский, А.Н., Майстренко, Ю.Л., Романенко, Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.

   SHARKOVSKII, A.N., MAISTRENKO, Yu.L., ROMANENKO, E.Yu. (1986) *Difference Equations and Their Applications*. Kiev. Naukova Dumka.

5. BOICHUK, A., KRIVOSHEYA, S. (2001) A Critical Periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations. *Differential Equations*. № 4 (37). p. 464-471.

6. BOICHUK, A., KRIVOSHEYA, S. (1998) Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal*. № 8 (50). p. 1162-1169.

7. Чуйко, С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика / С.М. Чуйко. — 2014, Т. 19, Вып. 1 (21). — С. 49 — 57.

   CHUIKO, S. (2014) On the solution of the matrix Sylvester equation. *Visn. Odesskogo Univ. Ser. Mat. Mech.*. № 1 (21) (19). p. 49-57.

8. Чуйко, С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Веснтик Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика / С.М. Чуйко. — 2014, № 1120. — С. 85 – 94.

   CHUIKO, S. (2014) On the solution of the matrix Lyapunov equation. *Visn. Kharkovskogo Univ. Ser. Mat. Mech.*. № 1120. p. 85-94.

9. Воеводин, В.В., Кузнецов, Ю.А. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М: Наука, 1984. — 318 с.

   VOEVODIN, V.V., KUZNETSOV, Yu.A. (1984) *Matritsy i vychisleniya (Matrices and Calculations)*. Moscow. Nauka.

10. IRMAK, N., MURAT, A. (2013) Tribonacci numbers with indices in arithmetic progression and their sums. *Miskolc Mathematical Notes*. 14 (№ 1). p. 125-133.

Статья поступила в редакцию 25.05.2015