УДК: 517.927.25

MSC2010: 34L10, 34B07, 47E05

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

© В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Российская Федерация
e-mail: *RykhlovVS@yandex.ru*

On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients.

Rykhlov V. S.

Abstract. This article discusses the pencil of ordinary differential operators generated on $[0,1]$ by a linear differential expression of n-th order with constant coefficients, polynomially depending on spectral parameter λ, and the two-point boundary conditions of a general form with coefficients which are polynomials of the spectral parameter λ.

It is assumed that the differential expression is homogeneous, the roots of its characteristic equation are distinct and different from zero, that is a fundamental system of solutions of the corresponding differential equation are pure exponent.

Provides definitions of m-fold completeness of the system of derived m-chains in the space of square integrable functions on the interval $[0,1]$.

The problem of finding sufficient conditions on the coefficients of the pencil, when there is an m-fold completeness of the system of the derived m-chains, is solved. A detailed history overview of the problem is given. It shows the urgency of solving this problem.

Then a characteristic polygon of the characteristic determinant of the pencil is introduce and on its basis the geometric classification of the pencils is given. Regular, almost regular, weakly and strongly irregular pencils are defined.

The method of obtaining sufficient conditions for multiple completeness of the root functions is to use a special solution of basic differential equation depending on an arbitrary parameter vector. We investigate important for the further features of this special solution, namely: Lemma of linear independence of a set of such solutions depends on linearly independent set of parameter vectors; Lemma of the characteristic polygons of special solutions when as vectors parameters are taken vectors constructed on the basis of the coefficients of the boundary conditions and the roots of the characteristic polynomial.

---

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K)

Sufficient conditions for multiple completeness formulated in terms of the existence of a sufficiently rich set of parameter vectors, which enables the scheme of the proof of multiple completeness, dating back to the famous work of Keldysh M.V. in 1951.

Key words: pencil of ordinary differential operators, root functions, eigen- and associated functions, multiple completeness, sufficient conditions of completeness, constant coefficients of differential expression, arbitrary location the roots of the characteristic polynomial, arbitrary two-point boundary conditions, nonregular pencil.

1. Постановка задачи и краткая история вопроса

Рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0, 1]$ дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y, \lambda) := p_0(x, \lambda)y^{(n)} + p_1(x, \lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x, \lambda)y \equiv \sum_{0 \le j+s \le n} p_{js}(x)\lambda^s y^{(j)}, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначает спектральный параметр, $p_j(x, \lambda) = \sum_{s=0}^{j} p_{n-j,s}(x)\lambda^s$, $j = \overline{0, n}$, $p_{js}(x) \in L_1[0, 1]$, а $a_{ij}(\lambda), b_{ij}(\lambda)$ есть произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2), будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}y^{(j)}(0) + b_{ij}y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

не содержащие параметра λ.

Многие проблемы современного естествознания приводят к задаче разложения функций в биортогональные ряды Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) или, кратко, корневым функциям (к.ф.) несамосопряженного пучка $L(\lambda)$.

Далее будут использоваться известные определения собственных значений (с.з.) пучка, собственных и присоединенных функций (с.п.ф) или, кратко, корневых функций (к.ф.), производных m-цепочек, построенных по системе к.ф., которые можно найти, например, в [1], [2].

Определение 1. Система Y к.ф. пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0, 1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности в.-ф. $h \in L_2^m[0, 1] :=$

$\underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$.

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$.

Основополагающей по этой проблеме является работа М.В. Келдыша [1] 1951 г., в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3). Эта теорема в случае аналитических коэффициентов д.в. была доказана в 1973 г. А.П. Хромовым [3] и в 1976 г., независимо, W. Eberhard'ом [4]. В 1976 г. А.А. Шкаликов [5] доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов. В 1977 г. А.П. Хромовым [6] обобщил эту теорему на случай конечномерных возмущений вольтерровых операторов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен G. Freiling'ом [7] и С.А. Тихомировым [8] в конце 80-х годов прошлого века.

В работах [9] и [10], относящихся к общему виду (1)–(2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка на некоторых лучах.

Исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, провел А.И. Вагабов в работах 1981–1987 гг. (см. [11, 12]).

Но вплоть до настоящего времени вопрос об n- и m-кратной полноте к.ф. до конца не решен даже в случае более простого пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell_0(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)} \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\sum_{0 \le j+s \le n-1} \lambda^s (a_{ijs} y^{(j)}(0) + b_{ijs} y^{(j)}(1)) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $p_{js}, a_{ijs}, b_{ijs} \in \mathbb{C}$.

В работах автора [13, 14, 15] был предложен метод, который позволяет исследовать вопрос о полноте к.ф. для пучка (4)–(5) самого общего вида. В частности, в этих кратких без подробных доказательств работах анонсированы достаточные условия кратной полноты к.ф. для этого пучка. Исследованы некоторые частные случаи.

Данная статья посвящена подробному изложениею этого метода и доказательству отмеченных результатов о полноте к.ф. пучка (4)–(5).

Будем считать далее, что краевые условия (5) нормированны и порядок i-го краевого условия есть $\varkappa_i$ $(0 \le \varkappa_i \le n-1)$, то есть будем рассматривать краевые условия вида

$$U_i^0(y,\lambda) \equiv U_{i0}^0(y,\lambda) + U_{i1}^0(y,\lambda) := \sum_{j+s\le\varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, i = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Суммарный порядок краевых условий (6) обозначим буквой $\varkappa$, то есть по определению $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$.

Пучок (4), (6) будем обозначать $L_0(\lambda)$.

2. Вспомогательные обозначения и определения

Рассмотрим уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Система функций $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, как известно, является фундаментальной системой решений (ф.с.р.) уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \ne 0$.

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,n}$

$$H_j(\lambda) \equiv (h_{1j}(\lambda), h_{2j}(\lambda), \ldots, h_{nj}(\lambda))^T := \left(U_1^0(y_j,\lambda), U_2^0(y_j,\lambda), \ldots, U_n^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$
$$V_j(\lambda) \equiv (v_{1j}(\lambda), v_{2j}(\lambda), \ldots, v_{nj}(\lambda))^T := \left(U_{10}^0(y_j,\lambda), U_{20}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n0}^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$
$$W_j(\lambda) \equiv (w_{1j}(\lambda), w_{2j}(\lambda), \ldots, w_{nj}(\lambda))^T := e^{-\lambda\omega_j}\left(U_{11}^0(y_j,\lambda), U_{21}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n1}^0(y_j,\lambda)\right)^T.$$

С использованием этих обозначений характеристический определитель (х.о.) пучка $L_0(\lambda)$ будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_i^0(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n = |H_1(\lambda)H_2(\lambda)\ldots H_n(\lambda)| =$$
$$= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1}W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2}W_2(\lambda), \ldots, V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n}W_n(\lambda)\right|. \quad (7)$$

Известно, что отличные от нуля с.з. пучка $L_0(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

Обозначим через Ω множество, состоящее из 0 и всевозможных сумм различных чисел ω_j, $j = \overline{1,n}$ по одному, по два и так далее до n слагаемых. Далее совпадающие точки $\omega \in \Omega$, полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω. Тогда, раскладывая определитель (7) на сумму определителей, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{\omega \in \Omega} F^{\omega}(\lambda) e^{\lambda\omega},$$

где

$$F^{\omega}(\lambda) = F_0^{\omega} + \frac{1}{\lambda} F_1^{\omega} + \dots + \frac{1}{\lambda^{\varkappa}} F_{\varkappa}^{\omega}.$$

Очевидно, если $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_k}$, то

$$F^{\omega}(\lambda) = \left| \hat{V}_1(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_1-1}(\lambda), \hat{W}_{j_1}(\lambda), \hat{V}_{j_1+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_k-1}(\lambda), \hat{W}_{j_k}(\lambda), \hat{V}_{j_k+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_n(\lambda) \right|,$$

где векторы с крышками имеют следующий вид при $j = \overline{1, n}$

$$\hat{V}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} v_{1j}(\lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} v_{nj}(\lambda) \right)^T, \ \hat{W}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} w_{1j}(\lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} w_{nj}(\lambda) \right)^T.$$

Положим $M = \operatorname{conv}\{\Omega\}$ (может случиться, что M — отрезок).

В дальнейшем будет использоваться следующее обозначение при $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$[\eta(x,\lambda)]_r = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r},$$

для функции

$$\eta(x,\lambda) = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r} + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^{r+1}} + \ldots.$$

Для $r \in \{0, 1, \ldots, \varkappa\}$ через $(M_{\Delta})_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω, для которых $[F^{\omega}(\lambda)]_r \not\equiv 0$. Ясно, что

$$(M_{\Delta})_0 \subset (M_{\Delta})_1 \subset \ldots \subset (M_{\Delta})_{\varkappa} \subset M.$$

По аналогии с [10] дадим следующие определения.

Определение 2. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *регулярным*, если $(M_{\Delta})_0 = M$.

Определение 3. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *почти регулярным*, если $(M_{\Delta})_{\varkappa} = M$.

Определение 4. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *слабо нерегулярным* (или *нормальным* по терминологии [10]), если многоугольник $(M_{\Delta})_{\varkappa}$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутреней точки к сторонам M, на которых лежат точки касания (если точка касания — вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то пучок $L_0(\lambda)$ называем *слабо нерегулярным*, когда $(M_{\Delta})_{\varkappa} = M$.

Из определений следует, что регулярный и почти регулярный пучок является в то же время слабо нерегулярным.

Определение 5. Пучок $L_0(\lambda)$, который не удовлетворяет предыдущему определению, назовем *сильно нерегулярным.*

Из результатов [10] следует, что если пучок $L_0(\lambda)$ слабо нерегулярен (или, по-другому, нормален), то система его к.ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ будем кратко обозначать M_Δ и называть характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

3. Определение и свойства одного специального решения основного дифференциального уравнения

Введем в рассмотрение следующее решение уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Gamma(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \dots & H_n(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma(\lambda)=(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\dots,\gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром. Функции вида (8) играет важную роль при доказательстве полноты системы к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

В частности, из формулы (8) следует

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y(x,\lambda,E_i),$$

где $E_i=(\delta_{i1},\dots,\delta_{in})^T$, $i=\overline{1,n}$, — есть единичные орты. Здесь через δ_{ij} обозначен символ Кронекера. Очевидно,

$$y(x,\lambda,E_i) := \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & \dots & U_1(y_n,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{i-1}(y_1,\lambda) & \dots & U_{i-1}(y_n,\lambda) \\ y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ U_{i+1}(y_1,\lambda) & \dots & U_{i+1}(y_n,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1,\lambda) & \dots & U_n(y_n,\lambda) \end{vmatrix}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 1. *При $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda_0$ функции $y(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,n}$, линейно независимы по $x\in[0,1]$ тогда и только тогда, когда линейно-независимы в.-ф. $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$.*

Далее потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Через Ω_j обозначим подмножество тех точек из Ω, которые представляются в виде $\omega_j + \dots$, то есть содержат в качестве слагаемого число ω_j. Через Ω^j обозначим множество $\Omega \setminus \Omega_j$, то есть те точки из Ω, которые не содержат в качестве слагаемого число ω_j.

Далее будем считать, что $\Gamma(\lambda)$ есть векторы-полиномы по λ вида $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_n(\lambda))^T$, где

$$\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j\varkappa_j}\lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j,\varkappa_j-1}\lambda^{\varkappa_j-1} + \dots + \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Раскрывая определитель (8) по первой строке, получим (ради экономии места аргумент λ у векторов $V_j(\lambda)$, $W_j(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda)$ здесь и далее не пишем)

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x,\lambda)\Big|H_1(\lambda),\dots,H_{k-1}(\lambda),\Gamma(\lambda),H_{k+1}(\lambda),\dots,H_n(\lambda)\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda\omega_k x}\Big|V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1,\dots,V_{k-1}+e^{\lambda\omega_{k-1}}W_{k-1},\Gamma,V_{k+1}+e^{\lambda\omega_{k+1}}W_{k+1},\dots,V_n+e^{\lambda\omega_1}W_n\Big| =$$

$$= \lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\omega\in\Omega^k} G_k^{\omega}(\lambda)e^{\lambda(\omega_k x+\omega)}, \quad (9)$$

где $G_k^{\omega}(\lambda) = O(1)$ при $|\lambda| >> 1$.

По аналогии с $(M_\Delta)_r$ назовем х.м. порядка r $(0 \le r \le \varkappa)$ функции $y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ выпуклую оболочку тех точек $\{\omega_k x + \omega\}$, $k = \overline{1,n}$, $\omega \in \Omega^k$, для которых $[G_k^{\omega}]_r \not\equiv 0$. Обозначим этот х.м. как $\big(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\big)_r$. Многоугольник $\big(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\big)_\varkappa$ кратко обозначим как $M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}$.

Будем называть $\mathrm{conv}_{x\in[0,1]}\{M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}$ х.м. вектора $\Gamma(\lambda)$ и обозначать $M(\Gamma)$. Так как, очевидно,

$$M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} \subset \mathrm{conv}\{M_{y(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{y(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\},$$

то имеет место равенство

$$M(\Gamma) = \mathrm{conv}\{M_{y(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{y(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}. \quad (10)$$

Лемма 2. *Для фиксированного индекса j $(1 \le j \le n)$ имеет место включение* $M(V_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$.

Доказательство. Из формулы (9) следует, что

$$y(x,\lambda,V_j) =$$

$$= \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x}\Big|\hat V_1+e^{\lambda\omega_1}\hat W_1,\dots,\hat V_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1},\hat V_j,\hat V_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1},\dots,\hat V_n+e^{\lambda\omega_1}\hat W_n\Big|.$$

С учетом (10) для доказательства леммы достаточно рассмотреть $y(0,\lambda,V_j)$ и $y(1,\lambda,V_j)$.

1. Рассмотрим

$$y(0,\lambda,V_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n}\Big|\hat V_1+e^{\lambda\omega_1}\hat W_1,\dots,\hat V_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1},\hat V_j,\hat V_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1},\dots,\hat V_n+e^{\lambda\omega_1}\hat W_n\Big|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $y(0,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat V_1,\dots,\hat V_{s-1},\hat V_j,\hat V_{s+1}\dots,\hat V_n|$, $s=\overline{1,n}$. Только в случае $s=j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае этот определитель формально входит слагаемым в $\Delta(\lambda)$ (здесь и далее — с точностью до множителя, являющегося степенью λ).

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat V_j,\hat W_m,\hat V_{s_1},\hat V_{s_2}\dots,\hat V_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $j\neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

1.1a) $j\neq m$;

1.1b) $j=m$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,s_1,\dots,s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемый член формально является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat V_j,\hat W_m,\hat W_k,\hat V_{s_1},\hat V_{s_2}\dots,\hat V_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одиноковых столбца). Мы имеем два возможных случая:

1.2a) $j\neq m$ и $j\neq k$;

1.2b) $j=m$ или $j=k$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,k,s_1,\dots,s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемый член формально является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

1.3) …

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут либо, формально, слагаемыми из $\Delta(\lambda)$, либо им будет соответствовать точки ω, входящие в Ω_j.

2. Рассмотрим теперь

$$y(1,\lambda,V_j)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s}\left|\hat{V}_1+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1},\ldots,\hat{V}_n+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Аналогично предыдущему разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $y(1,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat{V}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1}\ldots,\hat{V}_n|$, $s=\overline{1,n}$. Только в случае $s=j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае этому слагаемому, формально, соответствует число $\omega\in\Omega_j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одиноковых столбца), $s\neq m$, $s\neq s_l$. Возможны следующие два случая:

2.1a) $j\neq m$;

2.1b) $j=m$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,s_1,\ldots,s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s\neq s_l$ и $s\neq m$, то $s=j$. Таким образом, и здесь получим слагаемое, которому, формально, соответствует число $\omega\in\Omega_j$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одинаковых столбца), $s\neq m$, $s\neq k$, $s\neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

2.2a) $j\neq m$ и $j\neq k$;

2.2b) $j=m$ или $j=k$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,k,s_1,\ldots,s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s\neq m$, $s\neq k$, $s\neq s_l$, то $s=j$. Таким образом, и здесь мы получаем слагаемое, которому, формально, соответствует число $\omega\in\Omega_j$

2.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать числа ω, входящие в Ω_j.

Лемма доказана.

□

Лемма 3. *Для фиксированного индекса j $(1 \le j \le n)$ имеет место включение* $M(W_j) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$.

Доказательство. Из формиулы (9) следует, что

$$y(x,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x} \Big| \hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \ldots, \hat V_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1}, \hat W_j, \hat V_{k+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1}, \ldots, \hat V_n + e^{\lambda\omega_1}\hat W_n \Big|.$$

С учетом (10) для доказательства леммы достаточно рассмотреть $y(0,\lambda,W_j)$ и $y(1,\lambda,W_j)$.

1. Рассмотрим

$$y(0,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} \Big| \hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \ldots, \hat V_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1}, \hat W_j, \hat V_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1}, \ldots, \hat V_n + e^{\lambda\omega_1}\hat W_n \Big|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $y(0,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat V_1, \ldots, \hat V_{s-1}, \hat W_j, \hat V_{s+1} \ldots, \hat V_n|$, $s = \overline{1,n}$. Этому слагаемому соответствует точка $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat W_j, \hat W_m, \hat V_{s_1}, \hat V_{s_2} \ldots, \hat V_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \ne s_l$. Мы имеем два возможных случая:

1.1a) $j \ne m$;

1.1b) $j = m$.

В случае b) получаем определитель, имеющий два одиноковых столбца, и, таким образом, это слагаемое равно нулю. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega \in \Omega^j$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat W_j, \hat W_m, \hat W_k, \hat V_{s_1}, \hat V_{s_2} \ldots, \hat V_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \ne s_l$, $k \ne s_l$, $m \ne k$. Мы имеем два возможных случая:

1.2a) $j \ne m$ и $j \ne k$;

1.2b) $j = m$ или $j = k$.

В случае b) получаем слагаемое равное нулю, так как в этом определителе будут два одинаковых столбца. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать точки ω, входящие в Ω^j.

2. Рассмотрим теперь

$$y(1,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s}\left|\hat{V}_1+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\dots,\hat{V}_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1},\hat{W}_j,\hat{V}_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1},\dots,\hat{V}_n+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Аналогично предыдущему разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $y(1,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat{V}_1,\dots,\hat{V}_{s-1},\hat{W}_j,\hat{V}_{s+1}\dots,\hat{V}_n|$, $s=\overline{1,n}$. Мы имеем два возможных случая:

2.0a) $j\neq s$;

2.0b) $j=s$.

В случае b) получим слагаемое, которое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega\in\Omega^j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat{W}_j,\hat{W}_m,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\dots,\hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $s\neq m$, $s\neq s_l$. Мы имеем только два возможных случая:

2.1.1) $j\neq m$;

2.1.2) $j=m$.

В случае 2.1.2) получим слагаемое равное нулю, так как в определителе будут два одинаковых столбца. Случай 2.1.1) разобъем еще на два возможных случая:

2.1.1a $j=s_l$ при некотором l;

2.1.1b $j\neq s_l$.

В случае a) будем иметь $s\neq j$, $m\neq j$ и, таким образом, данному слагаемому соответствует число $\omega\in\Omega^j$. В случае b) получим, что числа $j,m,s_1,\dots,s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s\neq m$, $s\neq s_l$, то $s=j$ и рассматриваемое слагаемое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat{W}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\dots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $s\neq m$, $s\neq k$, $s\neq s_l$. Возможны только следующие два случая:

2.2.1) $j \neq m$;

2.2.2) $j = m$.

В случае 2.2.2) получим слагаемое равное нулю, так как в определителе будут два одинаковых столбца. Случай 2.2.1) разобъем еще на два возможных случая:

2.2.1a) $j = s_l$ при некотором l;

2.2.1b) $j \neq s_l$.

В случае a) будем иметь $s \neq j$, $m \neq j$, $k \neq j$ и, таким образом, данному слагаемому соответствует число $\omega \in \Omega^j$. В случае b) получим, что числа $j, m, k, s_1, \dots, s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq k$ $s \neq s_l$, то $s = j$ и рассматриваемое слагаемое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

2.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут, формально, соответствовать либо слагаемым, входящим в функцию $\Delta(\lambda)$, либо числам ω, входящим в Ω^j.

Лемма доказана.

□

4. Достаточные условия полноты

По-прежнему считаем, что в.-ф. $\Gamma(\lambda)$ есть полином по λ указаного выше типа. Непосредственно можно убедиться, что векторы

$$\left(\frac{\partial^k y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}{\partial\lambda^k}, \frac{\partial^k(\lambda y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k(\lambda^{m-1}y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{11}$$

где $k \in \overline{0, s_\nu}$ и $\lambda_\nu \in \Lambda$, являются производными m-цепочками для к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующих с.з. λ_ν кратности $s_\nu + 1$.

Предположим, что система $Y = \{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m-кратно $(0 < m \leq n)$ не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = \left(\bar{h_1}(x), \bar{h_2}(x), \dots, \bar{h_m}(x)\right)^T \in L_2^m[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m–цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$. В частности, h ортогональна векторам (11). Из этой ортогональности следует, что с.з. λ_ν, имеющее кратность s_ν+1, является нулем кратности не меньше $s_\nu + 1$ функции

$$H(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) h_m(x, \lambda)\, dx,$$

где обозначено $h_m(x,\lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x) + \ldots + \lambda^{m-1} h_m(x)$. Ясно, что функция $H(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) по λ.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \frac{H(\lambda, \Gamma(\lambda))}{\Delta(\lambda)},$$

которая формально имеет полюса в точках $\lambda \in \Lambda$, но, как это было отмечено выше, все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda = 0$ является нулем $\Delta(\lambda)$, но не является с.з. или является с.з. меньшей кратности. Такая ситуация может быть, так как используемая ф.с.р. не является таковой при $\lambda = 0$. В этом случае дополнительное предположение об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ конечному набору в.-ф. из $L_2^m[0,1]$, позволяет сделать вывод о том, что $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т.

Определение 6. Будем говорить, что вектор–функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначаем $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$), если в λ-плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол меньше π и на которых функция $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ имеет не более чем степенной рост.

Если $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то используя принцип Фрагмена-Линделёфа, получим, что

$$\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ есть полином по λ. Требуя дополнительную ортогональность $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., устанавливаем, что $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv 0$, откуда следует, что $H(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv 0$.

Если имеется несколько линейно-независимых в.-ф. $\Gamma_j(\lambda) \in (\alpha)$, $j = \overline{1,r}$, то получим r тождеств

$$H(\lambda, \Gamma_j(\lambda)) \equiv 0, \quad j = \overline{1,r}, \tag{12}$$

при условии, что в.-ф. $h(x)$ ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.. Если набор тождеств (12) достаточно "богат" , то из него можно заключить, что

$$h_1(x) = h_2(x) = \ldots = h_m(x) = 0, \quad \text{п.в. } x \in [0,1],$$

и тем самым получить противоречие с исходным предположением о том, что $h \neq 0$.

Важную роль далее играет следующая лемма (см., например, [12]).

Лемма 4. *Либо система к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$, либо соответствующая система производных n-цепочек $\tilde{y}_k$, построенная по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, имеет бесконечный дефект в $L_2[0,1]$.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если существуют n линейно независимых в.-ф. $\Gamma_1(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)$, $\ldots$, $\Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$, то система к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Предположим, что система $Y = \{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = \left(\bar{h_1}(x), \ldots, \bar{h_n}(x)\right)^T \in L_2^n[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^n[0,1]$ всем производным n-цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предпложении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^n[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., получим (12) при $r = n$, то есть

$$H(\lambda, \Gamma_j(\lambda)) := \int_0^1 y(x, \lambda, \Gamma_j(\lambda)) h_n(x, \lambda)\, dx \equiv 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Но на основании Леммы 1 функции $y(x, \lambda, \Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1, n}$ есть ф.с.р. уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ при $\in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$, так как по условию в.-ф. $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1, n}$ линейно независимы. Таким образом, из (13) получим $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$

$$\int_0^1 y_j(x, \lambda) h_n(x, \lambda)\, dx \equiv 0,\ j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\ell_0^*(z, \lambda) = \sum_{j=n}^{n} \bar{h_j}(x) \bar{\lambda}^{j-1}, \quad z(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0, \tag{15}$$

где $\ell_0^*(z, \lambda)$ есть сопряженное, по Лагранжу, д.в. к $\ell_0(y, \lambda)$.

Известно, что если $z(x, \lambda)$ есть решение задачи (15), то $\bar{z}(x, \lambda)$ есть целая функция по λ, для которой имеет место следующее представление при $\lambda \neq 0$

$$\bar{z}(x, \lambda) = \int_0^x \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_i(x, \lambda) y_i(\xi, \lambda) h_n(\xi, \lambda)\, d\xi, \tag{16}$$

где
$$\bar{z}_i(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^{n-1}}\frac{W_{ni}}{W}e^{-\lambda\omega_i x}, \quad i=\overline{1,n} \tag{17}$$
есть решения уравнения $\bar{\ell_0}^*(z,\lambda)=0$; здесь обозначено $W=\det(\omega_j^{i-1})_{i,j=1}^n$, а W_{ni} есть алгебраические дополнения к элементам (n,i) в определителе W.

Тогда для любого $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>>1$ из (16) получим
$$\bar{z}(x,\lambda)=\int\limits_0^1\sum_{\Re\lambda\omega_i<0}\bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi+\int\limits_0^x\sum_{\Re\lambda\omega_i\geq 0}\bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_x^1\sum_{\Re\lambda\omega_i<0}\bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Отсюда с учетом тождеств (14) и формул (17) получим при $|\lambda|>>1$ оценку $\bar{z}(x,\lambda)=O(1)$. Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $\bar{z}(x,\lambda)\equiv C$. Отсюда, в силу нулевых начальных условий задачи (15), следует, что $\bar{z}(x,\lambda)\equiv 0$, а тогда из дифференциального уравнения (15) получим $h_n(x,\lambda)\equiv 0$ по λ для п.в. $x\in[0,1]$, а, следовательно,
$$h_j(x)=0 \text{ для п.в. } x\in[0,1], \quad j=\overline{1,n}.$$

Тем самым установлено, что система к.ф. рассматриваемого пучка n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Но, в силу Леммы 4 этот дефект равен нулю. Следовательно, Теорема 1 полность доказана.

□

С учетом Лемм 2 и 3 очень удобно в качестве $\Gamma_j(\lambda)$ брать векторы $V_i(\lambda)$ и $W_i(\lambda)$.

Следствие 1. *Если* $V_{i_s}(\lambda)\in(\alpha)$, $s=\overline{1,k}$, $W_{j_t}(\lambda)\in(\alpha)$, $t=\overline{1,l}$, $k+l\geq n$ *и*
$$\operatorname{rank}\left(V_{i_1}(\lambda),V_{i_2}(\lambda),\ldots,V_{i_k}(\lambda),W_{j_1}(\lambda),W_{j_2}(\lambda),\ldots,W_{j_l}(\lambda)\right)=n,$$
то система к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

Ввиду специфической структуры функции $y(x,\lambda,\Gamma(x))$, определяемой формулой (8), удалось доказать, в частности, следующую теорему.

Теорема 2. *Если существуют* m *пар векторов* $\{V_{j_s}(\lambda),W_{j_s}(\lambda)\}$, $s=\overline{1,m}$ *таких, что* $V_{j_s}(\lambda)\in(\alpha)$, $W_{j_s}(\lambda)\in(\alpha)$, *то имеет место* m*–кратная полнота в* $L_2[0,1]$ *системы к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ *с возможным конечным дефектом.*

Доказательство. Предположим, что система $Y=\{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x)=\left(\bar{h_1}(x),\ldots,\bar{h_m}(x)\right)^T\in L_2^m[0,1]$,

$h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предпложении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., получим (12) для $\Gamma_s(\lambda) = V_{j_s}(\lambda)$ и $\Gamma_{m+s}(\lambda) = W_{j_s}(\lambda)$, $s = \overline{1,m}$, то есть при $s = \overline{1,m}$

$$H(\lambda, V_{j_s}(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda))h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0,$$

$$H(\lambda, W_{j_s}(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda))h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0.$$

Отсюда сразу следует

$$H(\lambda, V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{j_s}} H(\lambda, W_{j_s}(\lambda)) \equiv \\ \equiv \int\limits_0^1 \left(y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{j_s}} y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda))\right) h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad s = \overline{1,m}. \tag{18}$$

Но из (8) следует на основании свойств определителей при $s = \overline{1,m}$

$$y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{j_s}} y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda)) = \\ = \begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -H_{j_s}(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \dots & H_n(\lambda) \end{vmatrix} = \\ = y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3} \left| H_{j_s}(\lambda), H_1\lambda, \dots, H_{j_s-1}(\lambda) H_{j_s+1}(\lambda), \dots, H_n(\lambda) \right| = \\ = y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3}(-1)^{j_s-1}\Delta(\lambda) = y_{j_s}(x,\lambda)\Delta(\lambda).$$

Таким образом, из (18) получим

$$\int\limits_0^1 y_{j_s}(x,\lambda)h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad s = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Далее рассуждаем по схеме работы [12, с. 63–64]. Если кратко, то схема доказательства такова. Так как $y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}$, то раскладывая эти экспоненты в ряды Тейлора по λ, подставляя эти ряды в (19), получим равные нулю ряды по степеням λ. Приравнивая нулю коэффициенты рядов, получим однородные системы m-го порядка с m неизвестными, являющимися текущими последовательными моментами функций $h_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, и с отличными от нуля определителями при больших номерах коэффициентов ряда. Отсюда следует, что все достаточные большие по номеру моменты функций $h_j(x)$, $j = \overline{1, m}$ равны нулю, а, следовательно, и сами эти функци равны нулю п.в. на $[0, 1]$.

Тем самым, Теорема 2 полностью доказана.

$\square$

Имеются простые примеры пучков $L_0(\lambda)$ (см., в частности, пример из [13]), которые являются сильно нерегулярными (то есть теорема о полноте системы их к.ф. в пространстве $L_2[0, 1]$ из [10] здесь не работает), но, тем не менее, из сформулированных теорем вытекает кратная полнота в $L_2[0, 1]$ систем их к.ф..

Список литературы

1. Келдыш, М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 1. — С. 11–14.

   KELDYSH, M.V. (1951) On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. AN SSSR.* 77 (1). p. 11–14.
2. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

   NAIMARK, M.A. (1969) *Linear differential operators.* Moscow: Nauka.
3. Хромов, А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1973. — 242 с.

   KHROMOV, A.P. (1973) *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators: Dr. phys. and math. sci. diss.*. Novosibirsk.
4. Eberhard, W. Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme // Math. Z.. — 1976. — Bd. 146. — H. 3. — С. 213–221.

   EBERHARD, W. (1976) To completeness of the biorthogonal systems from eigenfunctions of irregular boundary values problems. *Math. Z.*. 146 (3). p. 213–221.
5. Шкаликов, А.А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прил.. — 1976. — Т. 10. — № 4. — С. 69–80.

   SHKALIKOV, A.A. (1976) On completenes of the eigen- and associated functions of an ordinary differential operator with nonregular splitting boundary conditions. *Functional analysis and applications.* 10 (4). p. 69–80.
6. Хромов, А.П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сборник. — 1977. — Т. 102(104). — № 3. — С. 457–472.

   KHROMOV, A.P. (1977) On generating functions of Volterra operators. *Mathematics of the USSR – Sbornik.* 31 (3). p. 409–423.
7. Freiling, G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z.. — 1984. — Bd. 188. — H. 1. — С. 55–68.

FREILING, G. (1984) To completeness of the systems of the eigenfuncions and the main functions of irregular operator pencils. *Math. Z.*. 188 (1). p. 55–68.

8. Тихомиров, С.А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1987. — 126 с.

   TIKHOMIROV, S.A. (1987) *Finite-dimensional perturbations of integral Volterra operators in the space of vector-functions: Cand. phys. and math. sci. diss.*. Saratov.

9. Гасымов, М.Г., Магеррамов, А.М. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР.. — 1974. — Т. 30. — № 12. — С. 9–12.

   GASYMOV, M.G. & MAGERRAMOV A.M (1974) On fold-completeness of the system of eigen- and associated functions of a class of differential operators. *Dokl. AN Azerb. SSR.* 30 (12). p. 9–12.

10. Шкаликов, А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И.Г.Петровского. – м.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — № 9. — С. 190–229.

    SHKALIKOV, A.A. (1986) Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*. 33 (6). p. 1311–1342.

11. Вагабов, А.И. Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Москва, 1988. — 201 с.

    VAGABOV, A.I. (1988) *Expansions in Fourier series with respect to the main functions of differential operators and their applications.: Dr. phys. and math. sci. diss.*. Moscow.

12. Вагабов, А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994. — 160 с.

    VAGABOV, A.I. (1994) *Introduction to the spectral theory of differential operators.* Rostov-na-Donu: Rostov University Publishing.

13. RYKHLOV, V.S. (1996) Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators (Transactions of the international conference "Algebraic and Topological Methods in Mathematical Physics. 1–14 Sept. 1993. Katziveli. Ukraine). *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya.* 3 (3/4). p. 406–411.

14. Rykhlov, V.S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. — Simferopol: Simferopol State University, 1997. — V. 7. — C. 70–73.

15. Рыхлов, В.С. О полноте собственных функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2004). — Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2005. — Т. 15. — С. 47–54.

    RYKHLOV, V.S. (2005) On completeness of the eigenfunctions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Spectral and evolution problems: Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2004).* 15. p. 47–54.

Статья поступила в редакцию 01.06.2015