

УДК: 517.95

MSC2010: 35A20

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© Ж.-П. Лозак, Т. О. Капустина

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, 1, МОСКВА, ГСП-1, 119991, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *kapustina-tatiana@yandex.ru*

ASYMPTOTIC AND NUMERICAL ANALYSIS OF ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATION.

Loheac J.-P., Kapustina T. O.

Abstract. This article is devoted to the boundary value problem for elliptic-parabolic equation with small parameters by the second-order derivatives. The aim of our work is to construct an effective numerical algorithm based on asymptotic approximation for the solution.

We consider the rectangle $\Omega = (0, 1) \times (-1, 1)$ in (x, y) plain, and denote its upper part as $\Omega_p = (0, 1) \times (0, 1)$, and its lower part as $\Omega_e = (0, 1) \times (-1, 0)$. We introduce the interface $\gamma = (0, 1) \times \{0\}$ between these two domains, as well as boundary parts: $\Gamma_p = \{0\} \times (0, 1) \cup \{1\} \times (0, 1)$; $\Gamma_e = \{0\} \times (-1, 0) \cup \{1\} \times (-1, 0)$; $\Gamma_D = (0, 1) \times \{-1\}$.

We consider the mixed type equation which has parabolic type in Ω_p and elliptic in Ω_e . We pose Dirichlet boundary condition on $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_p \cup \Gamma_D$ and transmission conditions on γ :

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p, & \text{in } \Omega_p, \\ Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e, & \text{in } \Omega_e, \\ u = 0, & \text{on } \Gamma, \\ u \text{ and } u_y \text{ are continuous} & \text{through } \gamma. \end{cases}$$

Here ε is a small positive parameter, and $a_p, b_p, f_p, a_e, b_e, f_e$ are smooth functions depending on (x, y) .

Our work consists of two parts: asymptotic analysis of the problem and creation of effective numerical algorithm based on asymptotic approximation.

In the first part, we apply modification of boundary functions method for mixed type equations, in order to obtain asymptotic representation for our solution with respect to the small parameter.

The main idea of the second part is that numerical calculation of parabolic equation is much easier and requires less operations than the elliptic one. Using again the fact that parameter ε is small, we construct approximate factorization of elliptic operator, replacing it by the product of two parabolic operators. Instead of one elliptic problem, we calculate numerically two successive parabolic problems: the first problem for inverse parabolic operator in decreasing direction, the second problem for direct parabolic operator in increasing direction. To begin numeric algorithm,

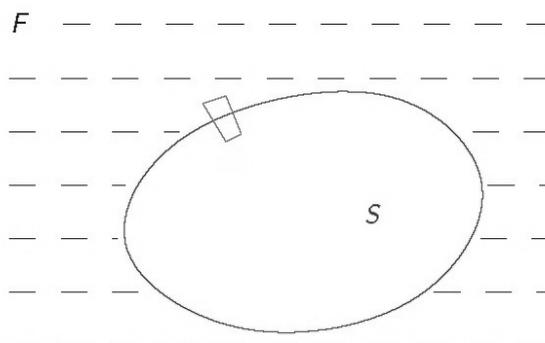
we need to calculate initial condition for the first parabolic equation. As it cannot be obtained explicitly, we use its asymptotic representation from the first part. Factorization idea allows us to gain $O(n^2)$ computer operations compared to $O(n^3)$, where n is a number of points of discretization.

The main advantage of this numerical algorithm is that the problem can be solved faster and demands less computer resources than classical numerical scheme.

Key words: mixed type equation, boundary value problem, singular perturbations, method of small parameter, operator factorization, numerical algorithm.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим стационарное распределение температуры в системе, состоящей из нагретого твердого тела, помещенного в движущуюся холодную жидкость. Нас будет интересовать температура в окрестности границы между твердым телом и жидкостью.



Модель стационарного распределения температуры из книги [1] — это уравнение смешанного эллиптико-параболического типа, в котором эллиптическое уравнение описывает температуру в твердом теле, а параболическое — в жидкости. Параболическое уравнение содержит первую производную по той из пространственных координат, которая отвечает за расстояние от рассматриваемой точки до границы между твердым телом и жидкостью. При определенных условиях как эллиптическое, так и параболическое уравнение могут содержать малые параметры при старших производных. Далее, температура и тепловой поток должны быть непрерывны при переходе через границу раздела сред. Это требование ведет к условиям склейки: непрерывности решения и его нормальной производной. Таким образом, получается следующая модельная задача.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

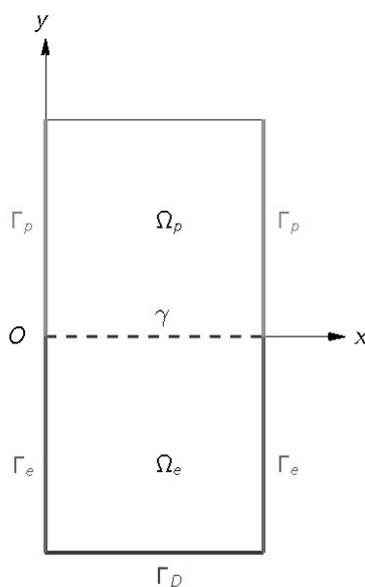
Рассмотрим прямоугольник $\Omega = (0, 1) \times (-1, 1)$ на плоскости (x, y) . Обозначим $\Omega_p = (0, 1) \times (0, 1)$ верхнюю часть прямоугольника, соответствующую жидкости из нашей модели, а $\Omega_e = (0, 1) \times (-1, 0)$ — нижнюю часть прямоугольника, соответствующую твердому телу. Обозначим части внешней границы прямоугольника:

$$\Gamma_p = \{0\} \times (0, 1) \cup \{1\} \times (0, 1);$$

$$\Gamma_e = \{0\} \times (-1, 0) \cup \{1\} \times (-1, 0);$$

$$\Gamma_D = (0, 1) \times \{-1\},$$

а границу раздела сред $\gamma = (0, 1) \times \{0\}$.



Рассмотрим уравнение смешанного типа, эллиптическое в Ω_e и параболическое в Ω_p . Искомой функцией в этом уравнении будет стационарная температура в точке (x, y) . Зададим граничное условие Дирихле на части внешней границы $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_p \cup \Gamma_D$, а также условия склейки, то есть условия непрерывности решения и его нормальной производной, на линии изменения типа γ :

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p, & (x, y) \in \Omega_p, \\ Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e, & (x, y) \in \Omega_e, \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u, u_y \text{ непрерывны на } \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ε — малый положительный параметр, $a_p, b_p, f_p, a_e, b_e, f_e$ — гладкие функции переменных (x, y) . В книге [1] доказано, что при положительных коэффициентах a_p, b_p и a_e решение задачи (1) существует и единственно.

Цель работы — используя малость параметра ε , на основе асимптотических методов построить численный алгоритм, позволяющий посчитать приближенное решение быстрее и с меньшими затратами компьютерных ресурсов, чем стандартный численный метод. Мы рассмотрим два случая: положительного и отрицательного коэффициента b_e .

3. ПЕРВАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

В первом численном алгоритме вместо задачи (1) запишем две последовательные задачи.

1. Эллиптическая задача

$$\begin{cases} Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e, & (x, y) \in \Omega_e, \\ u|_{\Gamma_e \cup \Gamma_D} = 0, \\ (a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx})|_{\gamma} = f_p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь граничное условие на линии γ получается из параболического уравнения в верхней области и условий склейки.

2. Параболическая задача

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p, & (x, y) \in \Omega_p, \\ u|_{\Gamma_p} = 0, \\ u|_{\gamma} = u \text{ из (2)}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь в качестве начального условия параболического уравнения на линии γ , в силу первого условия склейки, берем значение u из эллиптической задачи (2).

Численное решение нашего уравнения смешанного типа получаем, последовательно считая задачи (2) и (3) стандартным методом конечных разностей. Если шаг сетки $h = \frac{1}{n}$, то число операций будет $O(n^3)$ для эллиптической задачи и $O(n^2)$ для параболической, то есть параболическая задача требует намного меньше операций, чем эллиптическая.

4. ВТОРАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

4.1. Факторизация эллиптического оператора. Для создания более эффективного численного алгоритма воспользуемся идеей из статей [2], [3], [4]: приближенное

разложение эллиптического оператора на произведение двух параболических. Начнем со случая постоянных коэффициентов a_e, b_e .

Запишем разложение решения u задачи (2) в ряд Фурье по переменной x

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin(k\pi x).$$

Применение к u эллиптического оператора L дает для каждого k коэффициент

$$\left(-\varepsilon \frac{d^2}{dy^2} + b_e \frac{d}{dy} + (a_e + \varepsilon(k\pi)^2) \right) u_k(y).$$

Обозначив $\xi = k\pi$, получим обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка по переменной y с символом

$$A(\lambda) = -\varepsilon\lambda^2 + b_e\lambda + (a_e + \varepsilon\xi^2).$$

Далее, разложим корни многочлена P до первого порядка по степеням ε :

$$\lambda^+ \approx -\frac{1}{b} \left(a - \varepsilon \frac{a^2}{b^2} - \varepsilon\xi^2 \right), \quad \lambda^- \approx -\frac{1}{b} \left(-\frac{b^2}{\varepsilon} - a + \varepsilon \frac{a^2}{b^2} + \varepsilon\xi^2 \right).$$

Получим следующее приближенное соотношение:

$$A(\lambda) = -\varepsilon(\lambda - \lambda^+)(\lambda - \lambda^-) + O(\varepsilon^2).$$

Теперь применим обратное преобразование Фурье и получим следующее приближенное разложение эллиптического оператора L задачи (2) на произведение параболических операторов:

$$L \approx -\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^- P^+ \quad \text{или} \quad L \approx -\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ P^-, \quad (4)$$

где

$$P^+ = \left(a_e - \varepsilon \frac{a_e^2}{b_e^2} \right) + b_e \frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$P^- = \left(\frac{b_e}{\varepsilon} - a_e + \varepsilon \frac{a_e^2}{b_e^2} \right) + b_e \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Выбор между формулами (4) зависит от знака коэффициента b_e .

Если $b_e > 0$, то P^+ — это прямой параболический оператор, который мы используем в задаче для y возрастающего от -1 до 0 ; P^- — обратный параболический оператор, его мы используем для y убывающего от 0 до -1 . Если $b_e < 0$, то P^+ и P^- надо поменять ролями.

Таким образом, мы будем строить эффективный численный алгоритм, заменив дорогую для численного счета эллиптическую задачу (2) двумя последовательными более дешевыми параболическими задачами: первая — для y убывающего от 0 до

–1; вторая — для y возрастающего от –1 до 0.

4.2. Асимптотическое приближение. Для того, чтобы начать численный счет, нам нужно знать начальное значение для первой параболической задачи с убывающим y . Для этого нам нужны значения $u|_{\gamma}$ и $u_y|_{\gamma}$. Так как они неизвестны, заменим их точные значения асимптотическими приближениями $\tilde{u}|_{\gamma}$ и $\tilde{u}_y|_{\gamma}$. Асимптотическое представление решения задачи (1) будем строить с помощью метода пограничных функций [5], а также воспользуемся идеями применения асимптотических методов к сингулярно возмущенным уравнениям смешанного типа из [6] и [7].

Асимптотическое представление \tilde{u} решения u задачи (1) состоит из регулярной части и нескольких пограничных функций. Нулевое слагаемое регулярной части удовлетворяет вырожденному уравнению (полученному из (1) при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{cases} a_p u^0 + b_p u_y^0 = f_p, & (x, y) \in \Omega_p, \\ a_e u^0 + b_e u_y^0 = f_e, & (x, y) \in \Omega_e \end{cases}$$

с определенными дополнительными условиями, которые выбираются в зависимости от знака коэффициента b_e . Пограничные функции служат для описания внутреннего и пограничных слоев. Они обеспечивают выполнение тех из граничных условий и условий склейки, которым не удовлетворяет регулярная часть.

Главное слагаемое асимптотики на линии γ имеет вид (см. [8]):

$$\tilde{u}|_{\gamma} = u^0|_{\gamma} + q \left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + z \left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (5)$$

причем пограничные функции q и z удовлетворяют оценкам

$$|q| \leq C e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}, \quad |z| \leq C e^{-\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}},$$

то есть экспоненциально убывают при удалении от своего пограничного слоя. Все функции в этих формулах могут быть вычислены в явном виде. Нормальная производная $\tilde{u}_y|_{\gamma}$ записывается аналогичной формулой и удовлетворяет аналогичным оценкам. Тем же способом можно посчитать столько слагаемых асимптотического разложения, сколько нужно для достижения требуемой точности.

Таким образом, мы посчитали все, что нужно для начального условия численного метода.

4.3. Дискретная задача. Теперь дадим описание численного алгоритма, основанного на приближенной факторизации эллиптического оператора на параболические

множители, и на асимптотическом представлении решения. Алгоритм состоит из трех шагов:

1. Вычисление начального значения на линии γ с помощью асимптотического приближения.
2. Приближение эллиптической части (2) с помощью двух последовательных параболических задач.
3. Численное решение параболической части (3).

Обозначим v дискретное приближение искомого решения u задачи (2)–(3). Рассмотрим два случая в зависимости от знака коэффициента b_e .

1. Случай $b_e < 0$. В этом случае возьмем первый вариант $L \approx -\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ P^-$ разложения (4) эллиптического оператора L на произведение двух параболических операторов. Заменяем уравнение $Lv = f_e$ приближенным уравнением $-\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ (P^- v) = f_e$. Обозначая $w = P^- v$, получим два параболических уравнения:

$$-\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ w = f_e, \quad P^- v = w.$$

Их надо решить последовательно. Для того, чтобы начать счет, нам нужно вычислить начальное значение w на линии γ .

Шаг 1. Начальное условие на линии γ . С помощью асимптотического решения \tilde{u} , заданного формулой (5), получаем

$$w|_{\gamma} = (P^- \tilde{u})|_{\gamma}. \quad (6)$$

Шаг 2. Две последовательные параболические задачи.

В первой задаче вычисляем промежуточную функцию w в нижней области Ω_e . Эта функция удовлетворяет обратному параболическому уравнению с оператором P^+ , где переменная y убывает от 0 до -1 , с заданными граничными условиями, и с начальным условием (6), найденным на шаге 1.

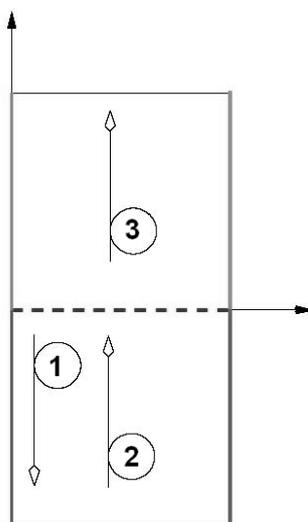
$$\begin{cases} P^+ w = -\frac{b_e^2}{\varepsilon} f_e, & (x, y) \in \Omega_e, \quad y \in (0, -1), \\ w|_{\Gamma_e} = -f_e, \\ w|_{\gamma} = w \text{ из (6)}. \end{cases} \quad (7)$$

Вторая задача — это вычисление функции v в нижней области Ω_e . Функция v удовлетворяет прямому параболическому уравнению с оператором P^- , где переменная y возрастает от -1 до 0, с правой частью w , уже найденной в первой параболической задаче (7), и с заданными начальным и граничными условиями.

$$\begin{cases} P^-v = w, & (x, y) \in \Omega_e, \quad y \in (-1, 0), \\ v|_{\Gamma_e} = 0, \\ v|_{\Gamma_D} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Шаг 3. Параболическая задача в верхней области. Нам осталось вычислить функцию v в верхней области Ω_p . Функция v удовлетворяет прямому параболическому уравнению с оператором M , где переменная y возрастает от 0 до 1, с заданными граничными условиями, и начальным условием на γ , уже найденным во второй параболической задаче (8) на шаге 2.

$$\begin{cases} Mv = f_p, & (x, y) \in \Omega_p, \quad y \in (0, 1), \\ v|_{\Gamma_p} = 0, \\ v|_{\gamma} = v \text{ из (8)}. \end{cases} \quad (9)$$



2. Случай $b_e > 0$. В этом случае действуем аналогично, меняя ролями операторы P^+ и P^- .

Шаг 1. Начальное условие:

$$w|_{\gamma} = (P^+\tilde{u})|_{\gamma}. \quad (10)$$

Шаг 2. Две параболические задачи, заменяющие эллиптическую в нижней области Ω_e . Сначала решаем обратное параболическое уравнение для y убывающего от

0 до -1 :

$$\begin{cases} P^- w = -\frac{b_e^2}{\varepsilon} f_e, & (x, y) \in \Omega_e, \quad y \in (0, -1), \\ w|_{\Gamma_e} = f_e, \\ w|_{\gamma} = w \text{ из (10)}. \end{cases} \quad (11)$$

Затем считаем прямое параболическое уравнение для y возрастающего от -1 до 0 :

$$\begin{cases} P^+ v = w, & (x, y) \in \Omega_e, \quad y \in (-1, 0), \\ v|_{\Gamma_e} = 0, \\ v|_{\Gamma_D} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Шаг 3. Параболическая задача в верхней области Ω_p , для y возрастающего от 0 до 1 :

$$\begin{cases} Mv = f_p, & (x, y) \in \Omega_p, \quad y \in (0, 1), \\ v|_{\Gamma_p} = 0, \\ v|_{\gamma} = v \text{ из (12)}. \end{cases} \quad (13)$$

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

5.1. Поведение численного решения. Для заданных $a_e, b_e, f_e, a_p, b_p, f_p$, мы посчитали на сетке с постоянным шагом u — точное решение (2)–(3), и v — решение дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9) для $b_e < 0$, или дискретной задачи (10)–(11)–(12)–(13) для $b_e > 0$.

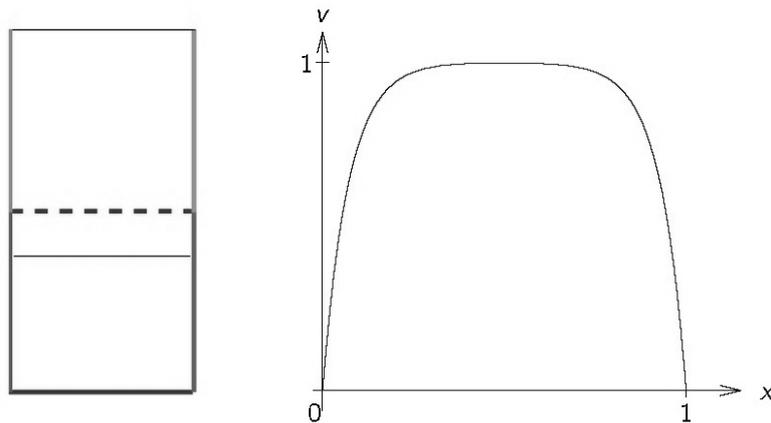


Рис. 1. График $v(x, y)$ при фиксированном отрицательном y

Мы приводим графики решения v дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9) для случая отрицательного b_e . Рисунки 1, 2 показывают горизонтальные срезы решения: $v(x, y)$

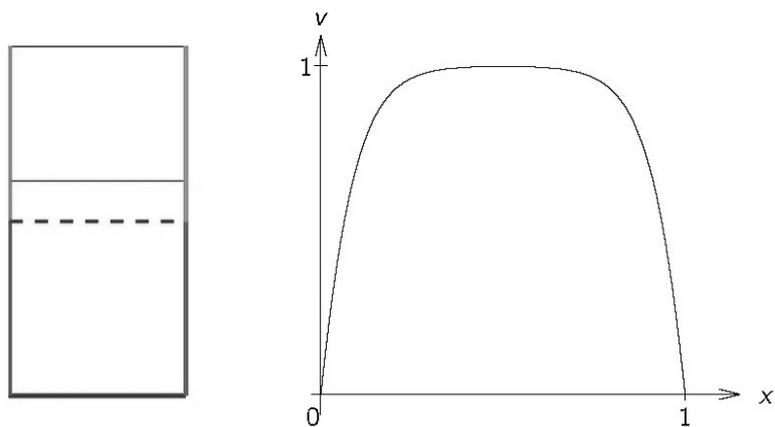
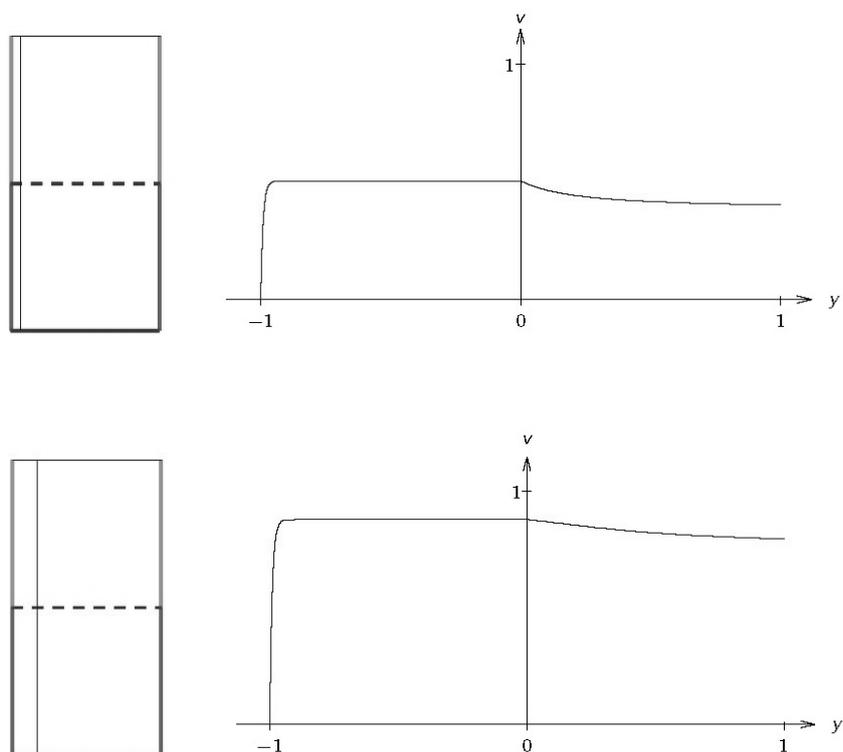
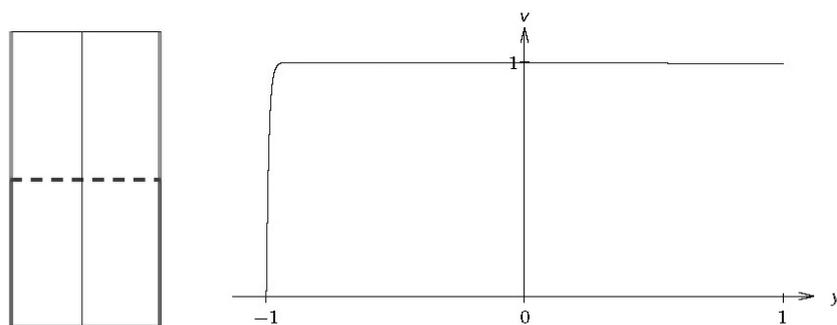


Рис. 2. График $v(x, y)$ при фиксированном положительном y

Рис. 3. Графики $v(x, y)$ при фиксированных x



при фиксированных отрицательных и положительных y . Рисунки 3 показывают вертикальные срезы решения: $v(x, y)$ при нескольких фиксированных x .



5.2. **Оценка погрешности.** Обозначим $e = u - v$ разность между u , точным решением (2)–(3), и v , решением дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9). Обозначим

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} |u - v|^2 dx dy.$$

Рисунок 4 показывает зависимость нормы погрешности от ε в случае $b_e < 0$. Норма погрешности убывает при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для достаточно малых ε $\|e\| = O(\varepsilon^2)$.

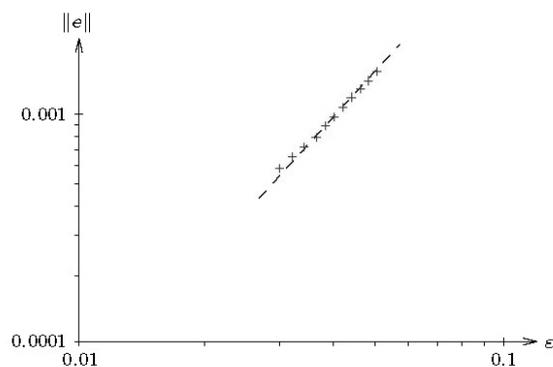


Рис. 4. Зависимость погрешности от ε

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д.Джураев. — Ташкент: Фан, 1979. — 238 с.
DZHURAEV, T. (1979) *Boundary value problems for mixed type equations*. Tashkent: Fan.
2. LOHEAS, J.-P. & NATAF, F. & SCHATZMAN, M. (1993) Parabolic approximations of the convection-diffusion equation. *Mathematics of Computations*. 60(202). p. 515-530.

3. LOHEAC, J.-P. (2010) Some numerical applications of pseudo-differential computation. *Proceedings of International Miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications"*. Moscow: MESI. p. 132-140.
4. LOHEAC, J.-P. & KAPUSTINA, T. (2013) Asymptotic and numerical analysis of mixed type equation. *Proceedings of International Miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications"*. Moscow: MESI. p. 179-189.
5. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов. — М: Высшая школа, 1990. — 208 с.
VASILIEVA, A. and BUTUZOV, V. (1990) *Asymptotic methods in singular perturbation theory*. Moscow: Vysshaya Shkola.
6. SUSHKO, V. (1999) Asymptotic representations for solutions of bisingular problems. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. Tbilisi. 18. p. 51-151.
7. Розов Н.Х., Капустина Т.О. Одна краевая задача для эллипτικο-параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37. — № 6. — С. 847-848.
ROZOV, N. & KAPUSTINA, T. (2001) One boundary problem for elliptic-parabolic equation. *Differential Equations*. 6(37). p. 847-848.
8. Капустина, Т.О. Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Ученые записки Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — Т. 19(58). — № 2. С. 31-34.
KAPUSTINA, T. (2006) On asymptotic solution to singularly perturbed boundary value problem for mixed type equation. *Scientific Notes of Taurida National V.I.Vernadsky University. Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics*. 2(19). p. 31-34.

Статья поступила в редакцию 10.06.2015