**УДК: 517.958:531.32 + 519.635.1**
**MSC2010: 35J55**

# ПРОЕКЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВИХРЕВЫХ 2D ТЕЧЕНИЙ В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

**© В. Г. Лежнев, А. Н. Марковский**

Кубанский государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра математических и компьютерных методов
ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Российская Федерация
e-mail: *lzhnvv@mail.ru, mark@kubsu.ru*

## Projection algorithms for 2D vortex flows in complicated domains.

**Lezhnev V. G., Markovsky A. N.**

**Abstract.** Plane-parallel flows of an incompressible fluid in a bounded domain with minimum mean square vorticity are considered. The flow function is biharmonic function. Such flows include, for example, the stationary solution of 2D Stocks problem with a potential right-hand side. If the velocity on the boundary is specified, then definition of the flow is reduced to the solution of the boundary value problem of the biharmonic equation. The projection algorithm for solving boundary value problems for the biharmonic equation in complicated domains is presented. There are used systems of functions, full on the domain boundary, creating the basis of non-grid method (method of basis potentials) of the hydrodynamic boundary value problems solution. The concept of own domain vortex – attached vortex flow of Roben - is considered. It is also considered an extended formulation of the building a plane-parallel flows problem – definition of flows by the boundary values of the flow function only when it is not necessary to set speed limits (that are, generally speaking, not known, as, for example, for Venturi funnel). The desired density of vortices belongs to the subspace of harmonic functions, obtained complete system of potentials in this subspace allows to construct a convergent projection algorithms; the density of vortices must be orthogonal to its own domain vortex. Numerical flows for the funnel domain with the condition of adhesion on the boundary and in the extended formulation are represented.

Key words: plane-parallel flows, flow function, biharmonic problem, Stocks problem, Roben potential, basis potentials method.

## Введение

Рассматриваются плоскопараллельные течения с минимальной среднеквадратической завихренностью. Функция тока является бигармонической функцией. К таким течениям относятся, например, решения стационарной 2D задачи Стокса с потенциальной правой частью. Рассматривается также расширенная формулировка задачи построения плоскопараллельных течений (только по граничным значениям функции тока), когда не требуется задания граничных скоростей (вообще говоря, не известных как, например, для трубки Вентури). Искомая плотность вихрей принадлежит подпространству гармонических функций, полученная полная система потенциалов в этом подпространстве позволяет строить сходящиеся проекционные алгоритмы для сложных областей; плотность вихрей должна быть ортогональна собственному вихрю области (присоединенному вихрю течения Робена). Представлены численные течения для двух постановок построения течений в области типа раструба – с заданием скорости на границе (с условием прилипания) и в расширенной постановке по граничным значениям функции тока.

## 1. Регулярные течения

Рассмотрим плоскопараллельные течения $\mathbf{w}(x)$, $x = (x_1, x_2)$, несжимаемой жидкости в ограниченной области $Q$ с границей Ляпунова $S = \partial Q$. Для $\mathbf{w}(x)$ существует функция $\psi(x)$ такая, что

$$\mathbf{w}(x) = \left\{ \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1} \right\} =: \nabla_c \psi(x).$$

Произвольные граничные условия на $S$ для соленоидального течения $\mathbf{w}(x)$ могут быть заданы в терминах функции тока,

$$\psi(x)|_S = a(x), \ \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = b(x). \tag{1}$$

Существует бесконечно много соленоидальных в $Q$ векторных полей, совпадающих на границе с заданным векторным полем.

Будем называть *регулярным* соленоидальное поле $\mathbf{w}(x)$, если его среднеквадратичная завихренность (средняя завихренность) $\Omega(\psi)$,

$$\Omega(\psi) = \left[ \iint\limits_Q |\mathrm{rot}\mathbf{w}|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \iint\limits_Q |\Delta\psi(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

является минимальной [1].

**Теорема 1.** *Функция тока $\psi(x)$ соленоидального течения $\mathbf{w}(x)$ с заданными условиями на границе и с минимальной завихренностью $\Omega(\psi)$ является бигармонической функцией,*

$$\Delta^2\psi(x) = 0, \ x \in Q; \tag{2}$$

*регулярное течение $\mathbf{w}(x)$ с заданной скоростью на границе $S$ единственно.*

Для построения течения $\mathbf{w}(x)$ достаточно решить бигармоническую задачу (2) – (1). Мы используем для этого метод базисных потенциалов [2]; в случае неоднородного уравнения можно использовать алгоритм данный в работе [5].

## 2. Собственный вихрь

Рассмотрим задачу Робена, играющую специальную роль в гидродинамике плоскопараллельных течений.

Потенциалом Робена $R(x)$ называется потенциал простого слоя [3]

$$R(x) = \int\limits_S \varphi^*(y)E(x-y)dS_y,$$

такой, что $R(x) \equiv R_0 = \text{const}$, $x \in Q$, где $E(x)$– фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Функция $\varphi^*(y)$ называется плотностью потенциала Робена. В [2] представлены простые проекционные алгоритмы метода базисных потенциалов решения задачи Робена.

Если $R(x)$ принять за функцию тока течения $\mathbf{w}_R(x)$,

$$\mathbf{w}_R(x) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right\} R(x) = \nabla_c R(x),$$

то коградиент $\nabla_c R(x)$ определяет векторное поле $\mathbf{w}_R(x)$, касательное к $S$. Потенциал Робена определяет чисто циркуляционное безвихревое обтекание контура $S$ с нулевой скоростью на бесконечности (течение Робена).

Рассмотрим решение $u(x)$ краевой задачи

$$\Delta^2 u(x)\big|_Q = 0, \;\; u(x)|_S = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = \varphi^*(x),$$

Из интегрального равенства при $x \in Q$ [4]

$$u(x) = \iint\limits_Q \Delta u(y)E(x-y)dy + \int\limits_S \left[u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}(y)}E(x-y)\right] dS_y,$$

получаем следующее равенство на границе:

$$0 = \iint\limits_Q \Delta u(y)E(x-y)dy - \int\limits_S \varphi^*(y)E(x-y)dS_y, \;\; x \in S.$$

Последний интеграл равен потенциалу Робена, следовательно, постоянен на $S$, и выполняется равенство

$$\iint\limits_{Q} \Delta u(y) E(x-y) dy = R_0, \; x \in S.$$

Обозначим $g^*(y) = \Delta u(y)$, эта функция единственна с точностью до постоянного множителя и является плотностью вихрей присоединенного вихря Жуковского для течения Робена; этот вихрь будем называть *собственным вихрем* области $Q$ (рис. 1). Далее, будем предполагать, что для рассматриваемой области $Q$, константа Робена отлична от нуля, то есть $R_0 \neq 0$.

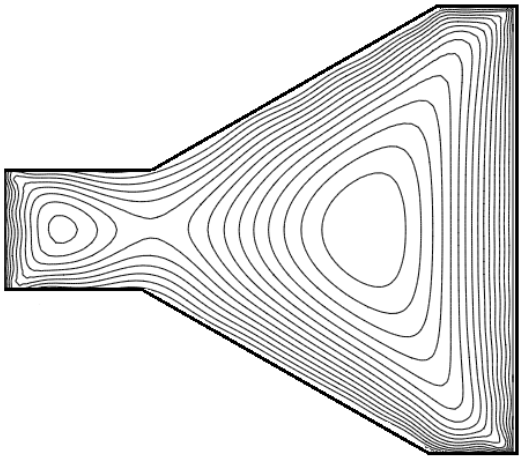

*Рис.* 1. Собственный вихрь раструба

## 3. Алгоритм бигармонической задачи

Рассмотрим два регулярных течения в области, имеющей вид раструба. Область $Q$ (рис. 2) ограничена снизу и сверху кривыми $S_1$ и $S_2$ (линии тока), а слева и справа — вертикальными отрезками $l_1, l_2$ (исток и устье) и тогда $S = S_1 \cup l_1 \cup S_2 \cup l_2$.

Сначала рассмотрим в задаче определения функции тока полные граничные условия вида (1) на $S$, когда на всей границе задается скорость, и дело сводится к решению краевой задачи бигармонического уравнения.

Рассмотрим метод базисных потенциалов для решения задачи:

$$\Delta^2 u(x)\big|_Q = 0, \, u(x)|_S = g_0(x), \, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = g_1(x),$$

где $g_1(x) = 0$ на $S$, $g_0(x)$ равна (-1) и 1 соответственно на $S_1$ и $S_2$ и линейным функциям от $x_2$ на отрезках $l_1, l_2$, таким, что граничная функция $g_0(x)$ непрерывна.

Решение $u(x)$ может трактоваться как функция тока стационарного течения в области $Q$, где на $S_1$ и $S_2$ задано условие прилипания, а на $l_1, l_2$ даны скорости втекания и вытекания.

Для функции $u(x)$ справедливо следующее интегральное представление [4]:

$$\alpha u(x) = \iint\limits_Q g(y)E(x-y)dy + \int\limits_S \left[u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}(y)}E(x-y)\right] dS_y,$$

где $\alpha = 1$ при $x \in Q$, $\alpha = 0$ при $x \in Q^+ = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{Q}$.

Задача состоит в определении функции $g(y)$ из подпространства $G(Q)$ – гармонических функций; она может быть аппроксимирована следующими суммами:

$$g^N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_m \gamma_m(x),$$

где $\gamma_m(x)$ – базисная в $G(Q)$ последовательность потенциалов, построенная по базисной последовательности точек $z^m \in Q^+$.

Обозначим через $W(x)$ интеграл по $S$ в интегральном представлении. При $x = z^k$ имеем

$$\iint\limits_Q g(y)\gamma_k(y)dy = -W(z^k),\ k = 1, 2, ...$$

Разложим функцию $g(x)$ на ортогональные слагаемые

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} c_m \gamma_m(x) + \rho_N(x)$$

и, подставив их в предыдущее равенство, для коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^{N} c_m(\gamma_m, \gamma_k) = -W(z^k),\ k = 1, 2, ..., N,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Подставив полученную аппроксимацию функции $g(x)$, получим приближенное решение, представленное на рисунке 2.

## 4. Расширенная постановка

Рассмотрим задачу построения течения в расширенной постановке — определение регулярного течения по граничным значениям его функции тока. Такое течение единственно. Граничные значения берутся теми же, что и в предыдущей задаче.

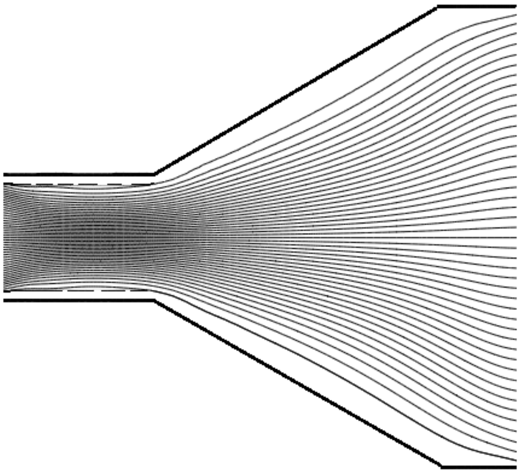

*Рис.* 2. Регулярное течение в раструбе с заданной скоростью на границе (с условием прилипания)

Полученное численное решение представлено на рисунке 3. Видно, что к расширяющимся стенкам раструба прилегают струи, что вполне физично [6] (известно, что нельзя задуть из воронки свечу, поставленную по ее оси).

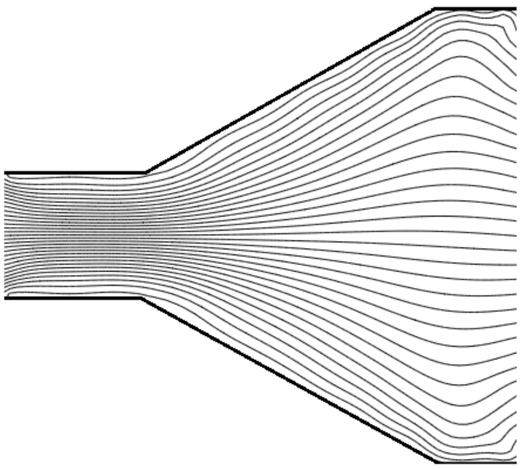

*Рис.* 3. Регулярное течение в раструбе с заданной функцией тока на границе

Рассматривается следующая задача: определить гармоническую функцию $g(y)$ такую, что

$$\psi(x) = \iint\limits_{Q} g(y)E(x-y)dy, \ x \in Q, \ \psi(x)|_S = f(x),$$

где $f(x)$ – заданная функция в $L_2(S)$.

Решение этой задачи единственно, что следует из леммы Новикова о разложении $L_2(Q)$ в прямую сумму [7],

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ – подпространство гармонических функций.

Изложим алгоритм решения этой задачи. Воспользуемся леммой о полноте в пространстве $L_2(S)$ системы функций [2],

$$\mu_m(x) = \iint\limits_Q \gamma_m(y)E(x-y)dy,\ x \in S.$$

Обозначим через $\psi^N(x)$ проекцию функции $\psi(x)$ на подпространство $\{\mu_m(x)\}_{m=1}^N$:

$$\psi(x) = \psi^N(x) + \rho_N(x),\ \psi^N(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m\mu_m(x),$$

где $\rho_N \perp \{\mu_m(x)\}_{m=1}^N$. Умножая последнее равенство скалярно на $\mu_k(x)$, получим для коэффициентов систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} c_m(\mu_m, \mu_k) = (f, \mu_k),\ k = 1, 2, ..., N,$$

с невырожденной матрицей, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(S)$.

Аппроксимация $g^N(y)$ плотности $g(y)$ представляется в виде

$$g^N(y) = \sum_{m=1}^{N} c_m\gamma_m(y),\ x \in Q.$$

Полученную аппроксимацию $g^N(y)$ плотности $g(y)$ необходимо минимизировать, исключая плотность $g^*(y)$ собственного вихря в $Q$. Присутствие такого вихря искажает картину течения, приводит к не физичному результату. Окончательно искомая плотность вихрей должна быть ортогональна плотности $g^*(y)$, то есть иметь вид

$$g_0^N(y) = g^N(y) + C_0 g^*(y),$$

где

$$C_0 = -\iint\limits_Q g^N(y)g^*(y)dy \left(\iint\limits_Q (g^*(y))^2 dy\right)^{-1}.$$

Функция тока теперь не может быть изменена на аддитивную константу (и в граничном условии), что эквивалентно добавлению к искомой плотности слагаемого вида $Cg^*(y)$ с соответствующим множителем $C$, так как это нарушит ортогональность искомой плотности и плотности собственного вихря и увеличит норму.

## Заключение

Рассмотрены плоскопараллельные вихревые течения в ограниченных областях со среднеквадратичной завихренностью. Указан класс единственности таких течений. Предложенная методика построения течений опирается на интегральное представление функции тока. Рассмотрены сходящиеся алгоритмы численного расчета регулярных течений, использующие полные системы потенциалов.

## Список литературы

1. Марковский, А.Н., Лежнев, В.Г. Плоские вихревые течения в каналах со сложной геометрией // Спектральные и эволюционные задачи (КРОМШ-2005). — Севастополь, Ласпи, 2005. — Т. 16. — С. 87–90.

   MARKOVSKY, A.N. and LEZHNEV, V.G. (2005) Planar vortex flow in channels with complex geometry. *Spectral and Evolution Problems (KROMSH-2005).* T. 16 (1). p. 87–90.

2. Лежнев А.В. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики / Лежнев А.В., Лежнев В.Г.. — Краснодар: КубГУ, 2009. — 111 с.

   LEZHNEV, A.V. and LEZHNEV, V.G. (2009) *Method base potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics.* Krasnodar: KubSU.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1985. — 512 с.

   VLADIMIROV, V.S. (1985) *Equations of mathematical physics.* M: Nauka.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983. — 424 с.

   MIHAILOV, V.P. (1983) *Differential equations in partial derivatives.* M: Nauka.

5. Лежнев, В.Г., Марковский, А.Н. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. ун-та. – Естест. науч. сер. — Самара, 2008. — Т. 8/1(67). — С. 127–139.

   LEZHNEV, V.G. and MARKOVSKY, A.N. (2008) Method base potentials for inhomogeneous biharmonic equation. *Vestn. of Samara St. Univ..* 8/1(67). p. 127-139.

6. Санников, Д.И. Структура затопленной прямоточной струи на выходе из сопла Вентури // Вестн. Морского гос. ун-та. – Сер. Судостроение. — Владивосток, 2006. — В. 8. — С. 97–103.

   SANNIKOV D.I. (2006) The structure is submerged direct-flow jet at the outlet of the Venturi nozzle. *Vestn. of Morskogo St. Univ..* 8. p. 97-103.

7. Новиков, П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Доклады Академии наук СССР. — 1938. — Т. XVIII, № 3. — С. 165–168.

   NOVIKOV, P.S. (1938) About the uniqueness of the solution of the inverse problem of potential. *Dokl. Akad. Nauk USSR.* T. XVIII (№ 3). p. 165–168.

***Статья поступила в редакцию 16.06.2015***