**УДК: 517.983**

**MSC2010: 47A06, 47A10, 34B27**

# О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ[1]

**© В. М. Брук**

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Политехническая, 77, Саратов, 410054, Российская Федерация
e-mail: *vladislavbruk@mail.ru*

## On the convergence of solutions of boundary value problems for integral equations with operator measures.

**Bruk V. M.**

**Abstract.** On a segment $[a,b]$, we consider integral equations

$$y_k(t) = y_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_k)y_k(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \quad k = 0,1,2,\ldots\, ,$$

where $\int_{t_0}^{t}$ stands for $\int_{[t_0,t)}$ if $t_0 < t$; for $-\int_{[t,t_0)}$ if $t_0 > t$; and for 0 if $t_0 = t$. Here $\mathbf{p}_k$ are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta \subset [a,b]$ and taking values in the set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space $H$; $f_k \in L_1(H;a,b)$; $y_k$ are unknown functions. Measures $\mathbf{p}_k$ are assumed to have bounded variations on $[a,b]$. For these equations we consider the boundary conditions

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0,1,2\ldots\, ,$$

where $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ are linear continuous mappings; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ is a space of functions continuous from the left on $[a,b]$ and taking values in $H$; $B$ is a Banach space; $k = 0,1,2,\ldots$ .

We obtain sufficient conditions under which $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ uniformly with respect to $t \in [a,b]$. The main assumptions are as follows: the solution of the homogeneous equation is only for $k = 0$; $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, where $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)$ is a variation of $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ on $[a,b]$; $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$ as $n \to \infty$; the operator $\Gamma_0$ maps bijectively a set of solutions of the homogeneous boundary problem for $k = 0$ onto the space $B$.

Key words: integral equation, operator measure, boundary value problem, Hilbert space, linear operator, linear relation.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00378)

## Введение

В данной работе на отрезке $[a,b]$ рассматриваются интегральные уравнения

$$y_0(t) = y_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_0) y_0(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_0(s)ds, \tag{1}$$

$$y_n(t) = y_n(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_n) y_n(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_n(s)ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Здесь $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ – операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$; $y_k$ – неизвестные функции, $f_k \in L_1(H; a, b)$. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_k$ имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Для уравнений (1), (2) рассматриваются следующие граничные условия

$$\Gamma_0 y_0 = c_0, \tag{3}$$

$$\Gamma_n y_n = c_n, \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{4}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ – линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ – пространство функций, непрерывных слева на $[a,b]$ и принимающих значения в $H$; $B$ – банахово пространство; $k = 0, 1, 2, \ldots$ .

В статье получены достаточные условия равномерной сходимости решений задач (2), (4) к решению задачи (1), (3) при следующих основных предположениях: решение однородного уравнения (1) единственно; вариация $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$; $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$ при $n \to \infty$; оператор $\Gamma_0$ осуществляет биективное отображение между решениями однородной задачи (1), (3) и пространством$B$.

Пусть операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ абсолютно непрерывны, т.е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a,b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в $H$, что $\|p_k\| \in L_1(a,b)$ и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$. Тогда уравнения (1), (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась в [1], [2], [3] (см. также библиографию в этих работах). Наиболее общие результаты получены в недавней статье [3].

Кроме граничных условий (3), (4) в данной работе для уравнений (1), (2) рассматриваются также следующие граничные условия

$$(\gamma_0^{(1)}y_0, \gamma_0^{(2)}y_0) \in \theta_0, \tag{5}$$

$$(\gamma_n^{(1)}y_n, \gamma_n^{(2)}y_n) \in \theta_n, \quad n = 1, 2... , \tag{6}$$

где $\gamma_k^{(1)}, \gamma_k^{(2)} : \widetilde{C} \to B_1 \times B_2$ – линейные непрерывные отображения; $B_1, B_2$ – банаховы пространства; $\theta_k \subset B_1 \times B_2$ – линейные отношения, $k = 0, 1, 2, ...$ . Достаточные условия равномерной сходимости решений устанавливаются в предположении, что для (5), (6) выполняются требования, которые подобны соответствующим требованиям, наложенным на (3), (4), и, кроме того, последовательность линейных отношений $\{\theta_n\}$ сходится в обобщенном смысле к $\theta$.

## 1. Решение интегральных уравнений

Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в $H$. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a, b]$ (см., например, [4, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств $\Delta_n$ справедливо равенство

$$\mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}(\Delta_n)$$

со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ (включая "обычную" меру Лебега $\mu$, для которой $\mu[\alpha, \beta) = \beta - \alpha$), продолжаем на некоторый отрезок $[a_0, b_0] \supset (a_0, b_0) \supset [a, b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a_0, b_0] \backslash [a, b]$.

Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ обозначим

$$\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_j \|\mathbf{p}(\Delta_j)\| ,$$

где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве $\Delta$. Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Тогда для $\rho$-почти всех $\xi \in [a, b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в $H$, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$ справедливо равенство

$$\mathbf{p}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) d\rho. \tag{7}$$

Функция $\Psi$ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой $\rho$-меры. Интеграл (7) сходится в смысле обычной нормы операторов ([4, гл. 5, с. 325]). Очевидно, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}) = \rho([a, b])$

Функция $h$ интегрируема по мере $\mathbf{p}$, если существует интеграл (в смысле Бохнера)

$$\int\limits_{\Delta} \Psi(t)h(t)d\rho = \int\limits_{\Delta}(d\mathbf{p})h(t). \tag{8}$$

Из (8) следует, что если измеримая по Борелю функция $h$ ограничена, то

$$\left\| \int\limits_{\Delta}(d\mathbf{p})h(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in\Delta} \|h(t)\| \, \rho(\Delta). \tag{9}$$

Предположим, что функция $h$ интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на $(a_0, b_0)$. Тогда функция $y(t) = \int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле (здесь $t_0, t \in (a_0, b_0)$). Действительно, если $t < t_1$, то $y(t_1) - y(t) = \int\limits_{[t,t_1)} (d\mathbf{p})h(s)$. Из (8) получаем

$$\|y(t_1) - y(t)\| \leqslant \int\limits_{[t,t_1)} \|\Psi(\xi)f(\xi)\| \, d\rho.$$

Требуемое утверждение следует из равенства $\bigcap_t [t, t_1) = \varnothing$.

Пусть $[l_1, l_2] \subset [a_0, b_0]$. Рассмотрим множество функций, измеримых по Борелю, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева (в сильном смысле) на $(l_1, l_2]$ и принимающих значения в $H$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

**Теорема 1.** *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$*, функция* $g \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$ *и* $g(t_0) = 0$*. Тогда для всех* $x_0 \in H$ *существует решение уравнения*

$$y(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})y(s) + g(t) \quad (a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0,\ \ a_0 \leqslant t \leqslant b_0), \tag{10}$$

*принадлежащее пространству* $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.

*Доказательство.* Сначала докажем существование такого отрезка $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, что уравнение (10) имеет единственное решение в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$ $(\delta > 0)$ для любого $x_0 \in H$. (Если $t_0 = a_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0, t_0 + \delta]$, а если $t_0 = b_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0]$.)

Пусть $t \to \rho(t)$ – какая-либо непрерывная слева функция, порождающая меру $\rho$. Через $\rho_s(t_0)$ обозначим скачок функции $t \to \rho(t)$ в точке $t_0$ (возможно, что $\rho_s(t_0) = 0$). Положим $\widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 = 0$, если $t \leqslant t_0$, и $\widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 = \mathbf{p}(\{t_0\})x_0$, если $t > t_0$. Кроме того, обозначим $r(t) = \rho(t)$ при $t \leqslant t_0$ и $r(t) = \rho(t) - \rho_s(t_0)$ при $t > t_0$. Функция $r$ непрерывна в $t_0$. Определим операторную меру $\mathbf{r}$ равенством

$$\mathbf{r}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) dr(\xi).$$

В этих обозначениях уравнение (10) примет вид $y = Ay + z$, где

$$(Ay)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{r}) y(s) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\xi) y(\xi) dr(\xi), \;\; z(t) = x_0 + \widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 + g(t). \tag{11}$$

Учитывая (9), (11) и непрерывность $r$, получим

$$\|(Ay)(t)\| \leqslant \sup_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\| \, |r(t) - r(t_0)| < \varepsilon \sup_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\| \, .$$

Следовательно, $\sup\limits_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|(Ay)(t)\| \leqslant \varepsilon \sup\limits_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|$. Используя непрерывность $r$, выберем такое $\delta > 0$, при котором $\varepsilon < 1$. Тогда $\|A\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} < 1$. Поэтому оператор $E - A$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$. Функция $z$ тогда и только тогда равна нулю при всех $t$, когда $x_0 = 0$ и $g = 0$. Следовательно, существует единственное решение уравнения (10) на интервале $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Это решение находится по формуле $y = (E - A)^{-1} z$.

Докажем существование решения на всем интервале $[a_0, b_0]$. Для этого достаточно установить, что решение $u$, определенное на интервале $(c, d)$, можно продолжить за пределы этого интервала, если $c \neq a_0$ или $d \neq b_0$. Предположим, что $d \neq b_0$. Сохраняем обозначения из приведенного выше доказательства, заменив $t_0$ на $t'_0$ и $x_0$ на $x'_0$. Положим $t'_0 = d$. Фиксируем $\varepsilon < 1/4$ и берем соответствующее $\delta > 0$ так, чтобы $t'_0 + \delta \leqslant b_0$. Фиксируем точку $t_1 = t'_0 - \delta/8$. Тогда для всех $t$ со свойством $|t - t_1| < \delta/2$ выполняется неравенство

$$|r(t) - r(t_1)| \leqslant |r(t) - r(t'_0)| + |r(t'_0) - r(t_1)| < 2\varepsilon < 1/2. \tag{12}$$

Рассмотрим оператор

$$(By)(t) = \int_{t_1}^{t} (d\mathbf{r})y(s) = \int_{t_1}^{t} \Psi(\xi)y(\xi)dr(\xi).$$

Из (12) следует, что $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}} \|(By)(t)\| \leqslant (1/2) \sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}} \|y(t)\|$. Поэтому оператор $E-B$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta/2,t_1})$. Положим $z_1 = u(t_1) - g(t_1) + g(t) + \widetilde{r}_{t'_0}(t)x'_0$, $\quad v = (E-B)^{-1}z_1$,

$$w(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Psi(\xi)v(\xi)dr(\xi) + g(t). \tag{13}$$

Тогда $v(t) = w(t)$ при $t \leqslant t'_0$. Поэтому в правой части равенства (13) можно при $t \leqslant t'_0$ заменить $v$ на $w$, т.е.

$$w(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Psi(\xi)w(\xi)dr(\xi) + g(t). \tag{14}$$

Функция $u$ также удовлетворяет интегральному уравнению (14), так как $r(t) = \rho(t)$ при $t \leqslant t'_0$. Следовательно, функции $u$, $w$, $v$ совпадают на интервале $(t_1 - (\delta/2), t'_0]$ при любом $x'_0$. Из (13) вытекает, что существует предел $\lim_{t\to t_0-0} w(t) = w(t_0)$. Положим $x'_0 = v(t_0) = w(t_0) = u(t_0)$. Функция $v$ определена на интервале $(t_1 - (\delta/2), t'_0 + (3/8)\delta)$. Таким образом, функция $u$ продолжена за точку $t'_0$, причем продолженная функция удовлетворяет уравнению (10). Теорема доказана. □

**Следствие 1.** *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a,b]$, *функция* $g \in \widetilde{C}[a_0,b_0]$. *Тогда существует решение уравнения*

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + g(t) \quad (a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0,\ a_0 \leqslant t \leqslant b_0), \tag{15}$$

*принадлежащее пространству* $\widetilde{C}[a_0,b_0]$.

*Доказательство.* Положим $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(t_0)$. Тогда $\widetilde{g}(t_0) = 0$ и уравнение (15) примет вид (10), где $x_0 = g(t_0)$, а $g(t)$ заменено на $\widetilde{g}(t)$. □

**Замечание 1.** Если $y$ – решение уравнения (10) и $g(t_0) = 0$, то $y(t_0) = x_0$; если же $y$ – решение уравнения (15), то $y(t_0) = g(t_0)$.

**Замечание 2.** Вообще говоря, уравнение (10) имеет не единственное решение. Например, пусть на отрезке $[0,2]$ мера $\mathbf{p}$ задана в одномерном случае производящей функцией $p(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и $-1$ при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int_2^t y d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $w(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и 0, если $t > 1$. Отметим что уравнение $y = \int_0^t y d\mathbf{p}$ имеет единственное решение.

В пространстве $\widetilde{C}[a_0, b_0]$ определим оператор $\mathscr{P}$ равенством

$$\mathscr{P}u = \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})u(s), \quad u \in \widetilde{C}[a_0, b_0], \tag{16}$$

где $a_0 \leqslant t \leqslant b_0$, $a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0$ и точка $t_0$ фиксирована. Из неравенства (9) получаем $\|\mathscr{P}u\| \leqslant \mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) \sup_{t\in[a_0,b_0]} \|u(t)\|$. Отсюда следует, что оператор $\mathscr{P}$ ограничен. Из следствия 1 вытекает, что оператор $E - \mathscr{P}$ сюръективен. Кроме того, оператор $E - \mathscr{P}$ обратим тогда и только тогда, когда решение уравнения (15) (или (10)) единственно. В этом случае решения уравнений (15), (10) имеют соответственно вид $y = (E - \mathscr{P})^{-1} g$ и $y = (E - \mathscr{P})^{-1}(x_0 + g)$ (в (10) $g(t_0) = 0$).

Обозначим через $W$ операторное решение уравнения

$$W(t)x_0 = x_0 + \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})W(s)x_0, \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \ a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{17}$$

где $x_0 \in H$. Функция $W(\cdot)x_0$ непрерывна слева и $W(t_0)x_0 = x_0$. Решение (17) при заданном $x_0$ единственно тогда и только тогда, когда решение уравнения (15) (или (10)) единственно. В этом случае

$$W(\cdot)x_0 = (E - \mathscr{P})^{-1}x_0, \quad x_0 \in H, \tag{18}$$

и через $\mathscr{W}$ обозначим оператор $x_0 \to W(\cdot)x_0$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \ a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{19}$$

где $x_0 \in H$, $f \in L_1(H; a, b)$. Отметим, что решение этого уравнения при заданных $f$, $x_0$ единственно тогда и только тогда, когда оператор $E - \mathscr{P}$ обратим. Определим максимальный оператор $L$, порожденный уравнением (19). Область определения $\mathscr{D}(L)$ оператора $L$ состоит из функций $y \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$, для которых существует такой элемент $x_0 \in H$ и такая функция $f \in L_1(H; a, b)$, что выполняется (19). На $\mathscr{D}(L)$ оператор $L$

действует согласно формуле $Ly = f$. Таким образом, $L \subset \widetilde{C}[a_0, b_0] \times L_1(H; a, b)$. Оператор $L$ замкнут. Это следует из (19) и непрерывности оператора $\mathscr{P}$ в пространстве $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.

**Замечание 3.** Из способа продолжения меры $\mathbf{p}$ и "обычной" меры Лебега $\mu$ с отрезка $[a, b]$ на $[a_0, b_0]$ следует, что оператор $L$ не зависит от выбора $[a_0, b_0]$ в следующем смысле. Если отрезок $[a_0, b_0]$ заменить на $[a_0', b_0']$ так, что $[a, b] \subset (a_0', b_0') \subset [a_0', b_0']$, то функции $y_k$ совпадают на общей части отрезков $[a_0, b_0]$ и $[a_0', b_0']$. Кроме того, $L_1(H, d\mu; a, b) = L_1(H, d\mu; a_0, b_0)$ (в этом равенстве учтено, что мера $\mu$ продолжена нулем вне $[a, b]$). Кроме того, оператор $L$ не зависит от выбора точки $t_0$. Действительно, заменим в (19) $t_0$ на $t_1$. Тогда элемент $x_0$ может измениться на другой. Соответствующая функция $y$ по-прежнему принадлежит $\mathscr{D}(L)$ и $Ly = f$.

**Теорема 2.** *Пусть решение уравнения* (19) *единственно. Функция* $y \in \mathscr{D}(L)$ *и* $Ly = f$ *тогда и только тогда, когда существует такой элемент* $x \in H$*, что выполняется равенство*

$$y(\cdot) = W(\cdot)x + (E - \mathscr{P})^{-1}g, \quad g(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{20}$$

*Доказательство.* Требуемое утверждение вытекает из того, что равенство (19) можно записать в виде

$$y = (E - \mathscr{P})^{-1}(x + g) = (E - \mathscr{P})^{-1}x + (E - \mathscr{P})^{-1}g = W(\cdot)x + (E - \mathscr{P})^{-1}g.$$ □

**Следствие 2.** *При выполнении условий теоремы 2 оператор* $\mathscr{W}$ *непрерывно и взаимно однозначно отображает* $H$ *на* $\ker L$*.*

Пусть $B$ – банахово пространство; $\Gamma : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B$ – линейное непрерывное отображение. Сужение оператора $L$ на множество функций $y \in \mathscr{D}(L)$, удовлетворяющих условию $\Gamma y = 0$, обозначим $L_\Gamma$, а сужение оператора $\Gamma$ на $\ker L$ обозначим $\widetilde{\Gamma}$. Оператор $L_\Gamma$ замкнут. Далее оператор называется непрерывно обратимым, если он имеет ограниченный всюду определенный обратный.

**Лемма 1.** *Пусть решение уравнения* (19) *единственно и оператор* $\widetilde{\Gamma}$ *взаимно однозначно отображает* $\ker L$ *на* $B$*. Тогда оператор* $L_\Gamma$ *непрерывно обратим.*

*Доказательство.* Из условия леммы сразу же следует, что оператор $L_\Gamma$ обратим. В (20) обозначим $z = (E - \mathscr{P})^{-1}g$. Если $y \in \mathscr{D}(L_\Gamma)$, то $\Gamma y = \widetilde{\Gamma} W(\cdot)x + \Gamma z = 0$. Отсюда следует, что $\widetilde{\Gamma}\mathscr{W}x = -\Gamma z$. По следствию 2 оператор $\widetilde{\Gamma}\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H$ на $B$. Поэтому $x = -(\widetilde{\Gamma}\mathscr{W})^{-1}\Gamma z$. Из (20) получим, что $y \in \mathscr{D}(L_\Gamma)$

тогда и только тогда, когда

$$y(\cdot)=-W(\cdot)(\widetilde{\Gamma}\mathscr{W})^{-1}\Gamma z+z(\cdot), \quad z=(E-\mathscr{P})^{-1}g, \quad g(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{21}$$

Равенства (21) влекут сюръективность оператора $L_\Gamma$. Лемма доказана. □

## 2. Сходимость решений граничных задач

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t)=x_{0,k}+\int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_k)y_k(s)+\int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \quad a_0\leqslant t\leqslant b_0, \ a_0\leqslant t_0\leqslant b_0, \ k=0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

где операторные меры $\mathbf{p}_k$ имеют ограниченную вариацию, $x_{0,k}\in H$, $f_k\in L_1(H;a,b)$. Максимальные операторы $L_k$, порожденные уравнениями (22) определяются так же, как оператор $L$ по уравнению (19). Операторы $\mathscr{P}_k$, $W_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ определяются соответственно по формулам (16), (17), в которых мера $\mathbf{p}$ заменена на $\mathbf{p}_k$, $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}_k$, $W$ на $W_k$. Через $\mathscr{W}_k$ обозначается оператор $x_0\to W_k(\cdot)x_0$ $(x_0\in H)$.

Пусть $B$ – банахово пространство; $\Gamma_k:\widetilde{C}[a_0,b_0]\to B$ – линейные непрерывные отображения; $k=0,1,2,\ldots$. Сужение оператора $L_k$ на множество функций $y\in\mathscr{D}(L_k)$, удовлетворяющих условию $\Gamma_k y=0$, обозначим $L_{\Gamma_k}$, а сужение оператора $\Gamma_k$ на $\ker L_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

**Теорема 3.** *Пусть решение уравнения* (22) *при* $k=0$ *единственно; оператор* $\widetilde{\Gamma}_0$ *взаимно однозначно отображает* $\ker L_0$ *на* $B$ *и* $\|\Gamma_n-\Gamma_0\|\to 0$, $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n-\mathbf{p}_0)\to 0$ *при* $n\to\infty$*. Тогда при достаточно больших* $n$ *операторы* $L_{\Gamma_n}$ *непрерывно обратимы и последовательность* $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ *сходится к* $L_{\Gamma_0}^{-1}$ *в равномерной операторной топологии.*

*Доказательство.* Из единственности решения (22) при $k=0$ следует, что оператор $E-\mathscr{P}_0$ непрерывно обратим. Неравенство (9) влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\mathscr{P}_n\}$ к $\mathscr{P}_0$. Поэтому при достаточно больших $n$ операторы $E-\mathscr{P}_n$ непрерывно обратимы. Следовательно, при достаточно больших $n$ уравнения (22) имеют единственные решения. Отсюда и из (18) вытекает, что $\|W_n(t)-W_0(t)\|\to 0$ равномерно по $t$. Поэтому последовательность $\{\mathscr{W}_n\}$ сходится к $\mathscr{W}_0$ при $n\to\infty$. Это влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\widetilde{\Gamma}_n\mathscr{W}_n\}$ к $\widetilde{\Gamma}_0\mathscr{W}_0$.

По следствию 2 операторы $\mathscr{W}_n$ (при достаточно больших $n$) непрерывно и взаимно однозначно отображают $H$ на $\ker L_n$. Отсюда получаем, что при достаточно больших $n$ операторы $\widetilde{\Gamma}_n$ взаимно однозначно отображают $\ker L_n$ на $B$. По лемме 1 операторы

$L_{\Gamma_n}$ (а также $L_{\Gamma_0}$) непрерывно обратимы. Из теоремы 2, примененной к операторам $L_0$ и $L_k$ (при достаточно больших $k$), получаем

$$y_k(\cdot) = W_k(\cdot)x_{0,k} + (E - \mathscr{P}_k)^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \tag{23}$$

где $x_{0,k} \in H$, $f_k \in L_1(H;a,b)$, $y_k \in \mathscr{D}(L_k)$, $L_k y_k = f_k$. Из (21) следует

$$y_k(\cdot) = -W_k(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_k \mathscr{W}_k)^{-1}\Gamma_k z_k + z_k(\cdot), \quad z_k = (E - \mathscr{P})^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds.$$

Отсюда получаем, что последовательность $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ сходится при $n \to \infty$ к $L_{\Gamma_0}^{-1}$ в равномерной операторной топологии. □

**Следствие 3.** *Пусть выполняются условия теоремы 3, $f_n \to f$ в $L_1(H;a,b)$ и в граничных условиях (4) $c_n \to c_0$. Тогда при достаточно больших $n$ задача (2), (4) имеет единственное решение $y_n$ и $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ равномерно по $t$.*

*Доказательство.* Если в граничных условиях (4) $c_n = 0$, то утверждение следствия вытекает непосредственно из теоремы 3. При произвольных $c_n \in B$ требуемое утверждение получается из следующего равенства

$$y_k(\cdot) = -W_k(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_k \mathscr{W}_k)^{-1}(\Gamma_k z_k - c_k) + z_k(\cdot), \quad z_k = (E - \mathscr{P}_k)^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \tag{24}$$

справедливого для $k = 0$ и для достаточно больших $k$. Равенство (24) доказывается так же, как равенство (21). □

Переходим к рассмотрению задач с граничными условиями (5), (6).

Далее будут использованы некоторые понятия из теории линейных отношений. Пусть $B_1$, $B_2$ – банаховы пространства. Линейным отношением $\vartheta$ называется любое линейное многообразие $\vartheta \subset B_1 \times B_2$. Упорядоченная пара обозначается символом $(\cdot,\cdot)$. Обратное к $\vartheta$ отношение $\vartheta^{-1}$ определяется как отношение, состоящее из таких пар $(x_2, x_1)$, что $(x_1, x_2) \in \vartheta$. Отношение $\vartheta$ называется обратимым, если $\vartheta^{-1}$ является оператором, и непрерывно обратимым, если $\vartheta^{-1}$ – ограниченный всюду определенный оператор. Линейные операторы считаются линейными отношениями. Более подробная терминология по линейным отношениям имеется, например, в [5].

Последовательность замкнутых линейных отношений $\vartheta_n \subset B_1 \times B_2$ $(n = 1, 2, ...)$ называется сходящейся в обобщенном смысле к отношению $\vartheta_0 \subset B_1 \times B_2$ (ср. [6, гл. 4, с. 263]), если существуют такое банахово пространство $B_0$ и такая последовательность $\{K_m\}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ ограниченных линейных операторов $K_m : B_0 \to B_1 \times B_2$, что $K_m$ взаимно однозначно отображает $B_0$ на $\vartheta_m$ и последовательность $\{K_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ сходится к $K_0$ в равномерной операторной топологии.

Далее нам потребуется понятие *пространства граничных значений* (ПГЗ). Пусть $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $B_1$, $B_2$ – банаховы пространства, $T \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ – замкнутый линейный оператор, $\delta : \mathscr{D}(T) \to B_1 \times B_2$ – линейный оператор, $\delta^{(j)} = P_j\delta$, $j = 1, 2$ ($P_j$ обозначает естественную проекцию на множество $G_j$ в декартовом произведении $G = G_1 \times G_2$). Тройка $(B_1, B_2, \delta)$ называется ПГЗ для оператора $T$ (см. [7] и библиографию там), если $\delta$ непрерывно отображает область определения $\mathscr{D}(T)$ (с нормой графика $T$) на $B_1 \times B_2$ и сужение $\delta^{(1)}$ на $\ker T$ является взаимно однозначным отображением $\ker T$ на $B_1$ (в [7] четверка $(B_1, B_2, \delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ называлась ПГЗ). Через $\widehat{\mathscr{T}}$, $\widehat{\mathscr{T}_0}$ обозначим сужения $T$ на $\ker \delta^{(1)}$ и $\ker \delta$ соответственно, $\widehat{\mathscr{T}} = T|_{\ker \delta^{(1)}}$, $\widehat{\mathscr{T}_0} = T|_{\ker \delta}$. Определим оператор $\Phi_\delta : B_1 \to B_2$ равенством $\Phi_\delta = \delta^{(2)}(\delta^{(1)}|_{\ker T})^{-1}$. Отметим, что оператор $\Phi_\delta$ ограничен, а оператор $\widehat{\mathscr{T}}$ в случае, когда $\mathscr{R}(T) = \mathbf{B}_2$, непрерывно обратим. Из определения ПГЗ следует, что между операторами $\mathscr{T}$ со свойством $\widehat{\mathscr{T}_0} \subset \mathscr{T} \subset T$ и линейными отношениями $\theta \subset B_1 \times B_2$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое условием: $y \in \mathscr{D}(\mathscr{T})$ тогда и только тогда, когда $\delta y \in \theta$. В этом случае обозначаем $\mathscr{T} = T_\theta$. Оператор $T_\theta$ и отношение $\theta$ одновременно замкнуты или нет.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathscr{R}(T) = \mathbf{B}_2$. Оператор $T_\theta$ тогда и только тогда непрерывно обратим, когда непрерывно обратимо отношение $\theta - \Phi_\delta$. Элемент $y \in \mathscr{D}(T)$ тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{D}(T_\theta)$, когда $y$ имеет вид*

$$y = (\delta^{(1)}|_{\ker T})^{-1}(\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u + \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h, \tag{25}$$

*где $u = \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h$, $h \in \mathbf{B}_2$. При этом $T_\theta y = h$.*

*Доказательство.* Первая часть теоремы доказана в [7]. Докажем, что $y$ принадлежит $\mathscr{D}(T_\theta)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство (25). Из (25) следует $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u$, $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta(\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u + \delta^{(2)}u$. Отсюда $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta\delta^{(1)}y + \delta^{(2)}u$. Умножая это равенство на $(\theta - \Phi_\delta)^{-1}$, получим $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}(\delta^{(2)}y - \Phi_\delta\delta^{(1)}y)$. Поэтому пара $(\delta^{(1)}y, \delta^{(2)}y) \in \theta$, т.е. $y \in \mathscr{D}(T_\theta)$.

Обратно, пусть $y \in \mathscr{D}(T_\theta)$. Это означает, что пара $(\delta^{(1)}y, \delta^{(2)}y) \in \theta$. Элемент $y$ представим в виде $y = v + u$, где $v \in \ker T$, $u = \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h$. Отсюда получаем $\delta^{(1)}y = \delta^{(1)}v$ и $\delta^{(2)}y = \delta^{(2)}v + \delta^{(2)}u$. Поэтому $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta\delta^{(1)}y + \delta^{(2)}u$. Это влечет $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u$. Отсюда следует (25). Теорема доказана. □

В случае, когда тройка $(B_1, B_2, \delta_k)$ является ПГЗ для оператора $L_k$, используем обозначения, аналогичные приведенным выше, а именно $\widehat{\mathscr{L}_k} = L_k \mid_{\ker \delta_k^{(1)}}$, $\widehat{\mathscr{L}_{k,0}} = L_k \mid_{\ker \delta_k}$, $L_{k,\theta}$ – оператор, определяемый условием: $y \in \mathscr{D}(L_{k,\theta})$ тогда и только тогда, когда $\delta y \in \theta$.

Из теоремы 4 получаем

**Следствие 4.** *Пусть тройка $(B_1, B_2, \delta_k)$ является ПГЗ для оператора $L_k$ и оператор $L_{k,\theta_k}$ непрерывно обратим. Тогда $\mathscr{D}(L_{k,\theta_k})$ состоит из функций вида*

$$y_k = (\delta_k^{(1)}|_{\ker L_k})^{-1}(\theta_k - \Phi_{\delta_k})^{-1}\delta_k^{(2)}u_k + \widehat{\mathscr{L}_k^{-1}} f_k, \quad u_k = \widehat{\mathscr{L}_k^{-1}} f_k, \quad f_k \in L_1(H; a, b). \tag{26}$$

Пусть $\gamma_k : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B_1 \times B_2$ – непрерывные линейные отображения $(k = 0, 1, 2, ...)$. Тогда сужения $\delta_k = \gamma_k \mid_{\mathscr{D}(L_k)}$ непрерывно отображают пространство $\mathscr{D}(L_k)$ (с нормой графика) в $B_1 \times B_2$. Относительно отображения $\delta_0$ дополнительно предположим, что тройка $(B_1, B_2, \delta_0)$ является ПГЗ для оператора $L_0$, т.е. отображение $\delta_0 : \mathscr{D}(L_0) \to B_1 \times B_2$ сюръективно и сужение $\delta_0^{(1)}|_{\ker L_0} : \ker L_0 \to B_1$ является биекцией.

**Теорема 5.** *Пусть решение уравнения* (22) *при* $k = 0$ *единственно, тройка* $(B_1, B_2, \delta_0)$ *является ПГЗ для оператора* $L_0$ *и оператор* $L_{0,\theta}$ *непрерывно обратим; пусть далее* $\|\gamma_n - \gamma_0\| \to 0$ , $\theta_n \to \theta_0$ *(в обобщенном смысле),* $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при достаточно больших* $n$ *тройка* $(B_1, B_2, \delta_n)$ *является ПГЗ для оператора* $L_n$, *оператор* $L_{n,\theta_n}$ *непрерывно обратим и последовательность* $\{L_{n,\theta_n}^{-1}\}$ *сходится при* $n \to \infty$ *к* $L_{0,\theta_0}^{-1}$ *в равномерной операторной топологии.*

*Доказательство.* Как установлено в доказательстве теоремы 3, при достаточно больших $k$ уравнения (22) имеют единственные решения. Теорема 2 влечет справедливость равенства (23) при $k = 0$ и при достаточно больших $k$.

Рассмотрим пространство $\widetilde{\mathscr{C}} = H \times L_1(H; a, b)$ и линейные операторы $U_k : \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}(L_k)$ (на $\mathscr{D}(L_k)$ норма графика), сопоставляющие каждой паре $(x, f) \in \widetilde{\mathscr{C}}$ функцию $y \in \mathscr{D}(L_k)$ по формуле (23), в которой $x_{0,k}$ заменено на $x$, а $f_k$ на $f$. Оператор $U_k$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\widetilde{\mathscr{C}}$ на $\mathscr{D}(L_k)$. В доказательстве теоремы 3 установлено, что последовательность $\{\mathscr{W}_n\}$ сходится к $\mathscr{W}_0$ при $n \to \infty$. Из сходимости $\{(E - \mathscr{P}_n)^{-1}\}$ к $(E - \mathscr{P}_0)^{-1}$ получаем, что последовательность $\{U_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к $U_0$ в равномерной операторной топологии. Отсюда и из сходимости $\|\gamma_n - \gamma_0\| \to 0$ вытекает, что последовательность $\{\delta_n U_n\}$ сходится к $\delta_0 U_0$ в равномерной операторной топологии. По условию теоремы, $\delta_0 : \mathscr{D}(L_0) \to B_1 \times B_2$ – сюръективное отображение. Следовательно, отображение $\delta_0 U_0$ сюръективно. Поэтому при больших $n$ таким же отображением является $\delta_n U_n$. Таким образом, при больших $n$ оператор $\delta_n$ отображает $\mathscr{D}(L_n)$ на $B_1 \times B_2$.

Из сходимости $\|\gamma_n-\gamma_0\|\to 0$ вытекает, что последовательность $\{\delta_n^{(1)}\mathscr{W}_n\}$ сходится в равномерной операторной топологии к $\delta_0^{(1)}\mathscr{W}_0$. Следовательно, при больших $n$ сужение $\delta_n^{(1)}$ на $\ker L_n$ является взаимно однозначным отображением на $B_1$. Итак, доказано, что при достаточно больших $n$ тройка $(B_1,B_2,\delta_n)$ является ПГЗ для оператора $L_n$.

При $k=0$ и при достаточно больших $k$ выполняется $(\delta_k^{(1)}|_{\ker L_k})^{-1}=\mathscr{W}_k(\delta_k^{(1)}\mathscr{W}_k)^{-1}$. Отсюда и из следствия 2 получаем, что последовательности $\{(\delta_n^{(1)}|_{\ker L_n})^{-1}\}$, $\{\Phi_{\delta_n}\}$ сходятся в равномерной операторной топологии к $(\delta_0^{(1)}|_{\ker L_0})^{-1}$, $\Phi_{\delta_0}$ соответственно.

По условию, последовательность $\{\theta_n\}$ сходится в обобщенном смысле к $\theta_0$. Это эквивалентно тому, что $\{(\theta_n-\Phi_{\delta_n})^{-1}\}$ сходится в обобщенном смысле к $(\theta_0-\Phi_{\delta_0})^{-1}$. Поэтому при достаточно больших $n$ отношения $\theta_n-\Phi_{\delta_n}$ и, следовательно, операторы $L_{n,\theta_n}$ непрерывно обратимы. Поэтому при достаточно больших $k$ справедливо (26).

Докажем, что в равномерной операторной топологии последовательность $\{\widehat{\mathscr{L}}_n^{-1}\}$ сходится при $n\to\infty$ к $\widehat{\mathscr{L}}_0^{-1}$. С этой целью обозначим

$$\mathscr{Q}_k f=(E-\mathscr{P}_k)^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds,\quad f\in L_1(H;a,b).$$

Тогда последовательность $\{\mathscr{Q}_n\}$ сходится к $\mathscr{Q}_0$ в равномерной операторной топологии. Из следствия 2 вытекает существование такого линейного ограниченного оператора $G_k:L_1(H;a,b)\to H$, что $\widehat{\mathscr{L}}_k^{-1}f-\mathscr{Q}_kf=\mathscr{W}_kG_kf$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $\delta_k^{(1)}$ и учитывая, что $\delta_k^{(1)}\widehat{\mathscr{L}}_k^{-1}f=0$, получим $G_kf=(\delta_k^{(1)}\mathscr{W}_k)^{-1}\delta_k^{(1)}\mathscr{Q}_kf$. Отсюда следует, что в равномерной операторной топологии при $n\to\infty$ последовательность $\{G_k\}$ сходится к $G_0=(\delta_0^{(1)}\mathscr{W}_0)^{-1}\delta_0^{(1)}\mathscr{Q}_0$. Поэтому последовательность $\{\widehat{\mathscr{L}}_n^{-1}-\mathscr{Q}_n\}$ сходится к $\widehat{\mathscr{L}}_0^{-1}-\mathscr{Q}_0$. Из равенства $\widehat{\mathscr{L}}_k^{-1}=\mathscr{Q}_k-(\mathscr{Q}_k-\widehat{\mathscr{L}}_k^{-1})$ вытекает сходимость последовательности $\{\widehat{\mathscr{L}}_n^{-1}\}$ к $\widehat{\mathscr{L}}_0^{-1}$. Теперь из (26) получаем, что последовательность $\{L_{n,\theta_n}^{-1}\}$ сходится к $L_{0,\theta_0}^{-1}$. Теорема доказана. □

**Следствие 5.** *Пусть выполняются условия теоремы 5, последовательность функций $\{f_n\}$ сходится к $f_0$ в $L_1(H;a,b)$ и $y_0$ – решение задачи* (1), (5). *Тогда при достаточно больших $n$ задача* (2), (6) *имеет единственное решение и $\|y_n(t)-y_0(t)\|\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по $t$.*

**Замечание 4.** Граничные условия (5), (6) могут быть сведены к условиям (3), (4) при условии, что $(\theta_k-\Phi_{\delta_k})^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором. В этом случае положим $B=B_1$, $\Gamma_ky_k=\gamma_k^{(1)}y_k-(\theta_k-\Phi_{\delta_k})^{-1}(\gamma_k^{(2)}y_k-\Phi_{\delta_k}\gamma_k^{(1)}y_k)$ $(k=0,1,2,...)$. Из [7] следует, что $y_k\in\mathscr{D}(L_{k,\theta_k})$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_ky_k=0$.

## Список литературы

1. Левин, А. Ю. Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Монография / А. Ю. Левин. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 228 с.

   LEVIN, A. Yu. (2011) *Problems of the qualitative theory of an ordinary differential equation.* Yaroslavl: Yar. St. Univer.

2. Кигурадзе, И. Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНИТИ, 1987. — Т. 30. — С. 3–103.

   KIGURADZE, I. T. (1987) Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *VINITI, Contemporary Problems of Mathematics. Latest Achievements.* 30. p. 3–103.

3. Кодлюк, Т. И., Михайлец, В. А., Рева, Н. В. Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журнал. — Киев, 2013. — Т. 65, № 1. — С. 70–81.

   KODLYUK, T. I. & MIKHAILETS, V. A. & REVA, N. V. (2013) Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 65 (No 1). p. 77–90.

4. Березанский, Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова Думка, 1965. — 798 с.

   BEREZANSKI, Yu. M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

5. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи матем. наук. — М.: Наука, 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

   BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys.* 68 (No 1). p. 69–116.

6. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

   KATO T. (1966) *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

7. Брук, В. М. О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами // Дифференциальные уравнения. — М.: МАИК Наука/Interperiodica, 2007. — Т. 43, №1. — С. 21–27.

   BRUK, V. M (2007) On the spectrum of linear relations associated with uniformly well-posed problems. *Differential Equations.* 43 (No 1). p. 21–27.

***Статья поступила в редакцию 13.07.2015***