УДК: 517.518.23
MSC2010: 26A

О КЛАССАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© Г. С. Балашова

Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт"
кафедра высшей математики
ул. Красноказарменная, 17, Москва, 111250, Российская Федерация
e-mail: *balashovags@yandex.ru*

On classes of infinitely differentiable functions.

Balashova G. S.

Abstract. The paper discusses the classes of infinitely differentiable functions, the growth of derivatives are limited given the positive sequence. This sequence can behave arbitrarily, ie be a regular, but non-zero it should be the members of an infinite number. It offers a variety of regularization of these sequences, depending on the type of area in which we study classes of infinitely differentiable functions. The class of infinitely differentiable functions, which limited the growth of the derivatives obtained regularized sequence identical to the original item by item class. It is possible to establish easily verifiable algebraic conditions for imbedding Sobolev spaces of infinite order, considered in various fields, expressed in terms of the parameters space.

Key words: regularization, the sequence space, the terms of attachment.

Пусть имеется последовательность положительных чисел $\{M_n\}$, некоторые из них могут быть равны $+\infty$, но предполагается , что существует бесконечная последовательность конечных M_n. Для изучения свойств такой последовательности естественно попытаться заменить ее другой, более "регулярной" последовательностью. Известно, что большую пользу приносит регуляризация последовательности с помощью ломаной Ньютона, построенной для точек P_n с координатами (n, M_n).

В некоторых вопросах (например, в вопросе эквивалентности классов бесконечно дифференцируемых функций) приходится рассматривать регуляризованные последовательности, связанные с первоначальной более глубоко, чем последовательность, полученная с помощью ломаной Ньютона. Для этого будем рассматривать регуляризацию последовательности относительно некоторой функции $\omega(t)$. Эта функция задана при $t \geq 0$: $\omega(0) \geq 1$, непрерывна и возрастает до бесконечности.

Приведем примеры таких регуляризаций последовательностей положительных чисел $\{M_n\}$, используемых при сравнении классов бесконечно дифференцируемых функций.

Определим класс $C_{(a,b)}(M_n)$ как множество бесконечно дифференцируемых на (a,b) функций $u(x)$, для каждой из которых существует константа $K = K(u) > 0$ такая , что
$$\max_{x\in(a,b)} |u^{(n)}(x)| \leq K^n M_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |u(x)| \leq K(u).$$
Интервал (a,b) может быть как конечным, так и бесконечным.

Введем следующие обозначения таких классов:

1) $C_0\{M_n\}$ на открытом ограниченном интервале;

2) $C_f\{M_n\}$ на ограниченном замкнутом или полуоткрытом фиксированном интервале;

3) $C_R\{M_n\}$ на всей числовой прямой;

4) $C_{dR}\{M_n\}$ на полупрямой.

В 1) и 2) случаях используется экспоненциальная регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = e^t$.

В 3) и 4) случаях используется выпуклая регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = \infty$. В результате получаются регулярные последовательности, определяющие классы, совпадающие с исходными.

Указанные регуляризации и некоторые их модификации позволили установить легко проверяемые алгебраические условия вложения пространств Соболева бесконечного порядка:
$$W^\infty_{(a,b)}\{a_n, p\} = \left\{u(x) \in C^\infty_{(a,b)} : \quad \rho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ||u^{(n)}||_p^p < \infty\right\},$$
где $a_n \geq 0$ — числовая последовательность, $1 \leq p < \infty$ — некоторое число, $||\cdot||_p$ — норма в пространстве Лебега $L_p(a,b)$.

Итак, изучим условия вложения
$$W^\infty_{(a,b)}\{a_n, p\} \subset W^\infty_{(a,b)}\{c_n, p\} \tag{1}$$
для пространств Соболева бесконечного порядка, выраженные через последовательности $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ при фиксированных $1 \leq p < \infty$.

1°. Рассмотрим пространства
$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty}_{(a,b)}\{a_n, p\} = \{u(x) \in C^\infty_0, \text{ т.е. } u^{(n)}_{(a)} = u^{(n)}_{(b)} = 0, \ n = 0, 1, 2, \dots :$$
$$\rho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ||u^{(n)}(x)||_p^p < \infty\}, \quad -\infty < a < b < \infty, \tag{2}$$
$$W^\infty_R\{a_n, p\} = \left\{u(x) \in C^\infty, \quad \rho(u) < \infty\right\}, \quad R = (-\infty, +\infty). \tag{3}$$

Если функции пространства (2) продолжить нулем на всю числовую ось, то (2) является подпространством (3).

Для вложения (1) в произвольной области достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} c_n a_n^{-1} = K < \infty \tag{4}$$

(если $a_n = c_n = 0$, то их отношение полагаем равным нулю). Условие (4) очевидно, однако, оно слишком ограничительно, ибо требует обращения в нуль коэффициентов c_n, по крайней мере, с номерами n, для которых $a_n = 0$. Отметим, что если последовательность $\{a_n\}$ быстро убывающая, т.е. удовлетворяет условию

$$a_{n+1} \leq a_n^q < 1, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

с некоторым числом $q > 1$, и последовательность $\{a_n^{-1}\}$ логарифмически выпукла, при этом последовательность $\{c_n\}$ не обязана удовлетворять условию (5), то соотношение (4) является необходимым и достаточным для вложения (1). Промежуток (a, b) может быть как конечным, в частности, окружностью, так и полубесконечным или всей прямой.

Более того, в случае ограниченной области (a, b) для компактности вложения (1) условие

$$\lim_{n\to\infty} c_n a_n^{-1} = 0 \tag{6}$$

является необходимым и достаточным.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}$ не является быстро убывающей, но для нее естественно потребовать выполнения условия нетривиальности пространства, установленного Ю.А. Дубинским [1], т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n < \infty, \tag{7}$$

где q — некоторое положительное число.

Радиус сходимости R_a ряда слева в (7) может быть как конечным, так и бесконечным. Следует рассмотреть эти случаи отдельно.

1. Пусть $R_a < \infty$, т.е.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = K < \infty, \tag{8}$$

где $M_n = a_n^{-1}$, если $a_n \neq 0$, и $M_n = \infty$, если $a_n = 0$.

Определим следующую регуляризацию этой последовательности:

$$\{M_n^d\} = \{(n^n M_n)^c n^{-n}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\{(n^n M_n)^c\}$ — выпуклая регуляризация посредством логарифмов (в.р.п.л.) последовательности $\{n^n M_n\}$. Возможность такой регуляризации обеспечивает условие (8). Пусть $\{n_i\}$ — последовательность основных индексов, т.е. индексов, в которых члены исходной и регуляризованной последовательностей совпадают.

Определим последовательность

$$a_n^{(1)} = \max\{a_n,\ (M_n^d)^{-1} v_n(i)\}, \quad n_i \leq n \leq n_{i+1}, \tag{10}$$

здесь $v_n(i)$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} v_n(i) \le K, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Например,

$$v_n(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1-n_i)^2}, & n_i \le n \le \dfrac{n_{i+1}+n_i}{2} \\ \dfrac{1}{(n_{i+1}+1-n)^2}, & \dfrac{n_{i+1}+n_i}{2} < n \le n_{i+1}. \end{cases}$$

Пространство с полученной последовательностью $\{a_n^{(1)} > 0\}$ эквивалентно исходному, т.е. поэлементно совпадает с исходным пространством, и условия (4) и (6) вполне применимы, если заменить в них a_n на $a_n^{(1)}$.

2. Если $R_a = \infty$, т.е. выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \tag{12}$$

которое обеспечивает существование в.р.п.л. последовательности $\{M_n\}$, то, полагая

$$a_n^{(1)} = \max\{a_n,\ (M_n^c)^{-1} v_n(i)\} \tag{13}$$

с выше определенной последовательностью $\{v_n(i)\}$, получаем $a_n^{(1)} > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, и пространство $W^\infty\{a_n^{(1)}, p\}$ эквивалентно исходному. В результате условия (4) и (6), если заменить в них a_n на $a_n^{(1)}$, применимы.

Замечание 1. Если выполнено условие (12) и последовательность $\{a_n^{-1}\}$ почти логарифмически выпукла, т.е.

$$\sup_i (n_{i+1} - n_i) \le K < \infty, \tag{14}$$

то достаточно положить $\{a_n^{(1)}\} = \{(M_n^c)^{-1}\}$.

Замечание 2. Множитель $v_n(i)$ в формулах (10) и (13) существенен, так при его отсутствии имеются примеры несовпадающих пространств.

Замечание 3. При изучении условий вложения для пространств периодических функций предполагаем выполненным условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{15}$$

которое, как показал Ю.А. Дубинский [1], является необходимым и достаточным для нетривиальности таких пространств. Условие (15) влечет выполнение условия (12) и потому применима регуляризация, рассмотренная выше. Причем для компактности вложения (1), помимо условия

$$\lim_{n\to\infty} c_n (a_n^{(1)})^{-1} = 0,$$

можно использовать условие

$$\sum_{n=0}^{a} c_n \sup_{\xi>0} (\xi^n a^{-1}(\xi)) < \infty, \text{ где } a(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k.$$

При изучении условий вложения пространств Соболева бесконечного порядка, заданных на полуоси R^+, существенную роль играет аналог неравенства Колмогорова — Стейпа

$$||u^{(k)}(x)||_p \leq C_{nk}||u(x)||_p^{1-\frac{k}{n}}\,||u^{(n)}(x)||_p^{\frac{k}{n}},\ 0 \leq k \leq n,\ n = 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Следует отметить, что нами получена [2] более точная по сравнению с ранее известными (С. Мандельбройт [3], Ю.И. Любич [4], В.И. Буренков [5]) оценка $C_{nk} = K\left(2\frac{n}{k}\right)^k$ в неравенстве (16). Естественно предполагать условие (12) выполненным, так как оно необходимо и достаточно для нетривиальности пространств $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n, p\}$ ([4]). Тогда, вычисляя $a_n^{(1)}$ по формуле (10), где последовательность $v_n(i) = 3^{-k(n,i)}$, $k(n,i) = \min(n - n_i + 1,\ n_{i+1} - n + 1)$, получим регуляризованную последовательность $a_n^{(1)} > 0$. Пространства $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n, p\}$ и $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n^{(1)}, p\}$ поэлементно совпадают и для вложения (1) можно использовать условие (4), заменив в нем a_n на $a_n^{(1)}$.

Отметим, что и в случае пространства $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}$ также справедливо замечание 1.

Список литературы

1. Julij A. Dubinskij. Sobolev Spaces of infinite Order and Differential Equations. // Teubner-Texte sur Mathematik. Band 87. Leipzing: BSB Teubner, 1986.
2. Г.С. Балашова. Теоремы продолжения и вложения для пространств Соболева бесконечного порядка. // ДАН СССР, 1991, т. 319, № 2.

   BALASHOVA G. Extension theorems and attachments for Sobolev spaces of infinite order. // DAN SSSR, 1991, t. 319, № 2.
3. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. ——М., ИЛ, 1955.

   MANDELBROJT C. Adjacent rows. Regularization sequences. Applications. — M., IL, 1955.
4. Ю.И. Любич. О неравенствах между степенями линейного оператора. // Изв. АН СССР, сер. Матем., 1960, т. 24, № 6.

   LUBICH Y. On inequalities between powers of a linear operator. // Math. AN SSSR, Ser. Mat., 1960, no. 24, № 6.
5. В.И. Буренков. О точности постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. // Труды МИАН СССР, 1980, т. 156.

   BOURENKOV V. On the accuracy of the constants in inequalities for norms of intermediate derivatives on a finite interval. // Trudy, 1980, t. 156.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015