УДК 511.41:511.528:511.55

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ t-ДИСКРИМИНАНТОВ И t-УРАВНЕНИЯХ ПЕЛЛЯ

© Д. В. Третьяков, З. И. Халилова

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, Республика Крым, Россия
e-mail: *dvttvd@mail.ru*

On some class of t-discriminants and t-Pell equations.

Tretyakov, D V. and Khalylova, Z. I

Abstract. A special class of quadratic irrationalities is described in article. This class consists of irrationalities, which has next decomposition in periodic continues fraction

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, ...q_2, q_1, tq_0}], \quad t \geq 2$$

Part of period is palindrome. This numbers we will call the negative t-discriminants.

In first time positive t-discriminants considered in 2007.

Theorem of negative t-discriminants characterization is proved. The necessary and sufficient conditions of indicated decomposition are

$$2b = (t+2)aq_0, \quad q_0 = [\alpha].$$

For example, a number

$$\alpha = \frac{\sqrt{5689}-91}{26} = [-1, \overline{2, 1, 1, 2, 5}]$$

is negative 5-discriminant.

Formulas for calculate of a, b, and D proved too:

$$a = 2P_{n-1}, \quad b = (t+2)q_0P_{n-1}, \quad D = (tq_0P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n,$$

where

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, ..., q_2, q_1].$$

One of negative t-discriminants application are solutions of Diophantine equations

$$(ax+by)^2 - Dy^2 = \pm a^2.$$

This equations we will call t-Pell equation and minus-t-Pell equation respectively.

Descriptions of solutions structure are obtain in article. The structure of solutions is closely connected with some cyclic group in every case. Cyclicity of this groups proofs with help from parametrization respective Pell equations. Be introduces the binary operation on the sets of t-Pell equations solutions too.

Minus-t-Pell equation is solvable iff period length of continues fraction decomposition is odd.

Examples are considered.

Введение

Пусть $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ - целочисленная квадратичная форма и $D := B^2 - 4AC > 0$. Уравнение $f(x,y) = G \in \mathbb{Z}$ легко приводится к виду:

$$(ax+by)^2 - Dy^2 = h \quad .$$

Рассмотрим естественно возникающее здесь отображение

$$\beta((ax+by)^2 - Dy^2) := \frac{\sqrt{D}-b}{a} \quad .$$

В частности, $\beta(x^2 - Dy^2) := \sqrt{D} \quad .$

В [4],[5] решения уравнений

$$(ax+by)^2 - Dy^2 = \pm a^2 \tag{1}$$

были получены с помощью разложения в бесконечную цепную дробь (ЦД) специального вида так называемых t-дискриминантов (в дальнейшем положительных t-дискриминантов):

$$\frac{\sqrt{D}-b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2 ..., q_2, q_1, tq_0}] \quad , \quad t \geq 2$$

с симметричной частью периода (палиндромом).

Такой подход к решению диофантовых уравнений второго порядка является новым, поскольку не использует унимодулярных линейных преобразований уравнения (1) для его упрощения, затем - решения упрощённого уравнения (см., напр., [3]), а позволяет сразу записывать решения данного уравнения по разложению в ЦД с помощью подходящих дробей, как и в случае классического уравнения Пелля.

Возникает задача исследования отрицательных дискриминантов, то есть, квадратичных иррациональностей (КИ), допускающих следующее разложение в бесконечную ЦД:

$$\frac{\sqrt{D}-b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, , q_2 ..., q_2, q_1, tq_0}] \quad , \quad t \in \mathbb{N},$$

а, также, исследования порождаемых этими дискриминантами диофантовых уравнений вида (1). Впервые t-дискриминанты были введены в работах [4], [5], как обобщение известного разложения

$$\frac{\sqrt{D}}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, 2q_0}],$$

где $D > a^2$. А, именно, t-дискриминантом называется квадратичная иррациональность α, которая представима следующими двумя способами:

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, tq_0}], \ t \geq 2.$$

В этих же работах рассмотрены некоторые приложения t-дискриминантов при решениях диофантовых уравнений второго порядка. В настоящей работе изучаются так называемые отрицательные t-дискриминанты, а также возникающие здесь естественным образом диофантовы уравнения второго порядка (t-уравнения Пелля). Получено описание t-дискриминантов и доказаны теоремы об описании всех решений этих уравнений.

1. Теорема об описании отрицательных t-дискриминантов

Определение 1. Квадратичная иррациональность α называется отрицательным t-дискриминантом, если

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, tq_0}], \ t \geq 2.$$

Пусть D-натуральное число, не являющееся точным квадратом. Имеет место слеующая

Теорема 1. *Равенство*

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2 \dots, q_2, q_1, tq_0}], \tag{2}$$

где $t \geq 2$- натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда

$$2b = (t+2)q_0 a, \quad [\alpha] = -q_0 < 0. \tag{3}$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (t+2)q_0 P_{n-1}, \quad a = 2P_{n-1}, \quad D = (tq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n, \tag{4}$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2 \dots, q_2, q_1]. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2 \dots, q_2, q_1, tq_0}]$, $\alpha' = -\dfrac{\sqrt{D}+b}{a}$ — сопряжённая КИ. Тогда в силу 2-й теоремы Галуа

$$\alpha + (t+1)q_0 = [\overline{tq_0, q_1, q_2 \dots, q_2, q_1}] = -\alpha' - q_0.$$

Отсюда,
$$\frac{\sqrt{D}-b}{a}+(t+1)q_0 \;=\; \frac{\sqrt{D}+b}{a}-q_0.$$
После приведения подобных получаем условие (3).

Обратно, если выполнено условие (3), то $\omega=\alpha+(t+1)q_0>1$, и

$$-\omega'=\frac{(\sqrt{D}-b)+2b-(t+1)q_0a}{a}=\alpha+q_0\in(0,1).$$
Следовательно, по 1-й теореме Галуа число ω раскладывается в чистую периодическую дробь вида $[\,\overline{tq_0,q_1\ldots,q_n}\,]$. Так как по 2-й теореме Галуа

$$-(\omega\,')^{-1}=[\,\overline{q_n,q_{n-1}\ldots,q_1,tq_0}\,]=(\,\alpha+q_0)^{-1}=[\,\overline{q_1,q_2\ldots,q_{n-1},q_n,tq_0}\,],$$

то из единственности разложения в ЦД следуют равенства: $q_n=q_1,q_{n-1}=q_2,\ldots$. Поскольку

$$(\omega-tq_0)^{-1}=[\,\overline{q_1,q_2,\ldots q_2,q_1,tq_0}\,]=[\,q_1,q_2,\ldots,q_2,q_1,\omega\,]=\frac{\omega P_{n-1}+P_{n-2}}{\omega Q_{n-1}+Q_{n-2}},$$

то
$$\omega-tq_0=\frac{\omega Q_{n-1}+Q_{n-2}}{\omega P_{n-1}+P_{n-2}},\ \omega^2P_{n-1}-\omega tq_0P_{n-1}-(tq_0P_{n-2}+Q_{n-2})=0.$$
Дискриминант этого уравнения

$$D=t^2q_0^2P_{n-1}^2+4P_{n-1}(tq_0P_{n-2}+Q_{n-2})=(tq_0P_{n-1}+2Q_{n-1})^2+4(-1)^n.$$

Отсюда
$$\alpha=\omega-(t+1)q_0=\frac{\sqrt{D}-(t+2)q_0P_{n-1}}{2P_{n-1}}.$$
Теорема доказана. □

Частным случаем этой теоремы является предложение о 2-отрицательных дискриминантах.

Следствие 1. *Равенство*
$$\alpha=\frac{\sqrt{D}-b}{a}=[-q_0,\overline{q_1,q_2\ldots,q_2,q_1,2q_0}]$$
возможно в том и только в том случае, когда

$$b=2q_0a.$$

Если это условие выполнено, то справедливы формулы:

$$b=4q_0P_{n-1},\quad a=2P_{n-1},\quad D=4[(q_0P_{n-1}+Q_{n-1})^2+(-1)^n].$$

Иррациональность α, как легко проверить, удовлетворяет уравнению:

$$P_{n-1}x^2 + (t+2)q_0P_{n-1}x - c = 0, \quad c = -(t+1)q_0^2P_{n-1} + tq_0Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Следствие 2. *Если α — отрицательный t-дискриминант, то*

$$D - b^2 = 2ac < 0, \quad D - (aq_0 + b)^2 \vdots a.$$

Доказательство. Используем равенства (4):

$$D - b^2 = -4(t+1)q_0^2P_{n-1}^2 + 4tq_0P_{n-1}Q_{n-1} + 4P_{n-1}Q_{n-2} =$$

$$= 4P_{n-1}(-(t{+}1)q_0^2P_{n-1}{+}tq_0Q_{n-1}{+}Q_{n-2}) = 2ac = 2a(-tq_0(q_0P_{n-1}{-}Q_{n-1}){-}q_0^2P_{n-1}{+}Q_{n-2}) < 0.$$

Аналогично доказывается второе соотношение. □

Приведём теперь несколько примеров.

Пример 1.

По следствию 2 КИ $\alpha = \dfrac{\sqrt{2808} - 78}{39}$ является отрицательным 2-дискриминантом. Имеет место разложение $\alpha = [-1, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 2}]$.

Пример 2. Рассмотрим отрицательный 5-дискриминант $\gamma = [\,-1, \overline{2, 1, 1, 2, 5}\,]$ Используя формулы (4), (5), получаем

$$t = 5, \quad q_0 = 1, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [\,2, 1, 1, 2\,] = \frac{13}{5}, \quad a = 26, \quad b = 91, \quad D = 5629.$$

Таким образом, $\gamma = \dfrac{\sqrt{5629} - 91}{26}$.

2. t-уравнения Пелля

Пусть D-натуральное число, не являющееся точным квадратом. Рассмотрим диофантово уравнение

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = a^2, \tag{6}$$

где $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a}$ — отрицательный t-дискриминант, $a \neq 1$. В дальнейшем это уравнение будем называть t-уравнением Пелля.

Отметим, что при $a = 1$ уравнение (6) эквивалентно уравнению Пелля. При $a \neq 1$ эти уравнения неэквивалентны.

Лемма 1. *Если D — число, не являющееся точным квадратом, $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a}$ — отрицательный t-дискриминант, то существует константа $M > a^2 > 0$, что* *неравенство*

$$|\,(ax+by)^2 - Dy^2\,| < M$$

имеет бесконечное множество взаимно простых целых решений $\langle x, y\rangle$, таких что $x < 0$, $y > 0$.

Доказательство. Так как $(ax+by)^2 - Dy^2 = (ax - (\sqrt{D}-b)y)(ax + (\sqrt{D}+b)y)$ и существует бесконечное множество пар взаимно простых целых чисел x, y, таких что $x < 0$, $y > 0$, и $|\,xy^{-1} - \alpha\,| < y^{-2}$, то $|\,ax - (\sqrt{D}-b)y\,| < ay^{-1}$, и

$$|\,ax + (\sqrt{D}+b)y\,| < |\,ax - (\sqrt{D}-b)y\,| + 2\sqrt{D}y < ay^{-1} + 2\sqrt{D}y.$$

Отсюда

$$|\,(ax+by)^2 - Dy^2\,| \, < \, \frac{a}{y}\left(\frac{a}{y} + 2\sqrt{D}y\right) = \frac{a^2}{y^2} + 2\sqrt{D}a < a^2 + 2\sqrt{D}a.$$

Лемма доказана. □

Из доказанного предложения следует бесконечность множества решений уравнения (6) с $x\,<\,0\,,\;y\,>\,0$.

На множестве всех решений указанного уравнения введём отношение частичного порядка $\prec$, считая, что

$$\langle\, x, y\,\rangle \prec \langle\, u, v\,\rangle \;\Leftrightarrow\; ax + (\sqrt{D}+b)y \le au + (\sqrt{D}+b)v\,.$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ — отрицательный t-дискриминант. Тогда:*

а) *если $\langle x_*, y_*\rangle$ — отрицательное решение уравнения (6) (с $x_* \,<\, 0\,,\; y_* \,>\, 0$), то $\dfrac{x_*}{y_*}$ — одна из ПД к числу α;*

б) *если $\langle x', y'\rangle$ — отрицательное решение уравнения (6), то $x' = P_{kn-1}$, $y' = Q_{kn-1}$, где k — период разложения α в ЦД, $n \in \mathbb{N}$;*

в) *все отрицательные решения t - уравнения Пелля исчерпываются формулами $\langle P_{km-1}\,,\, Q_{km-1}\rangle$, где $m \in \mathbb{N}$ таково, что km - чётное число.*

Доказательство. (а) Пусть α — отрицательный t-дискриминант, отвечающий этому уравнению. Необходимо рассмотреть разные случаи.

Пусть вначале $t > 2$.

Перейдём к положительному t-дискриминанту $\alpha + 2q_0 = \dfrac{\sqrt{D} - (b - 2q_0 a)}{a} = [\,q_0, \overline{q_1, q_2 \ldots, q_2, q_1, tq_0}\,]$ и соответствующему ему t-уравнению Пелля

$$(a(u - 2q_0 v) + bv)^2 - Dv^2 = a^2. \tag{7}$$

Переменные в уравнениях (6) и (7) связаны между собой равенствами:

$$\begin{cases} u - 2q_0 v = x \\ \qquad v = y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2q_0 y = u \\ \qquad y = v\,, \end{cases}$$

и, если $\langle u_*, v_* \rangle$ — положительное решение уравнения (7), то $\dfrac{u_*}{v_*} > \dfrac{\sqrt{D} - (b - 2q_0 a)}{a}$.

Пусть $\langle x_*, y_* \rangle$ — отрицательное решение уравнения (6). Применяя результаты работы [5], получим:

$$\left| \frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D} - b}{a} \right| = \left| \frac{u_* - 2q_0 v_*}{v_*} - \frac{\sqrt{D} - b}{a} \right| = \left| \frac{u_*}{v_*} - \frac{\sqrt{D} - (b - 2q_0 a)}{a} \right| < \frac{1}{2v_*^2}.$$

Таким образом, $\dfrac{x_*}{y_*}$ — ПД к числу α.

Если $t = 2$, то переходя к положительному 2-дискриминанту, используем известные факты из теории уравнения Пелля (см., напр., [2]) и аналогичные рассуждения из доказательства случая $t > 2$.

(б) пусть k — период разложения α в ЦД и $\dfrac{P_j}{Q_j}$ — ПД к этому числу, числитель и знаменатель которой образуют решение $\langle P_j\,, Q_j \rangle$ уравнения (6). Число α является корнем квадратного уравнения $a^2x^2 + 2abx - (D - b^2) = 0$. Остаток r_{j+1} порядка $j+1$ разложения α в ЦД является корнем квадратного уравнения $A_{j+1}x^2 + B_{j+1}x + C_{j+1} = 0$, где [1]

$$A_{j+1} = a^2 P_j^2 + 2abP_jQ_j - (D - b^2)Q_j^2 = a^2,$$

$$B_{j+1} = 2a^2 P_j P_{j-1} + 2ab(P_jQ_{j-1} + P_{j-1}Q_j) - 2(D - b^2)Q_jQ_{j-1} = -2la$$

чётное число. Отсюда $r_{j+1} = \dfrac{\sqrt{D} + l}{a}$. Однако r_{j+1} раскладывается в чисто периодическую ЦД с тем же периодом, что и α. При этом

$$r_{j+1} = \frac{\sqrt{D} + l}{a} = \alpha + (t+1)q_0 + \frac{l - b}{a} + q_0\,,$$

откуда следует, что $l = b - aq_0$, $r_{j+1} = \alpha + (t+1)q_0$. Следовательно, $j + 1 = kn$, $n \in \mathbb{N}$ и $j = kn - 1$.

(в) пусть $\omega = [\,\overline{tq_0, q_1, \ldots, q_1}\,] = \alpha + (t+1)q_0$ и $m \in \mathbb{N}$. Запишем число α в виде:

$$\alpha = [\,-q_0, q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, tq_0, q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, tq_0, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, \underbrace{\omega}_{mk}].$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\omega P_{mk-1} + P_{mk-2}}{\omega Q_{mk-1} + Q_{mk-2}} = \frac{(\alpha + (t+1)q_0)P_{mk-1} + P_{mk-2}}{(\alpha + (t+1)q_0)Q_{mk-1} + Q_{mk-2}}$$

или

$$(\sqrt{D} - b)(Q_{mk-1}a(\sqrt{D} - b + (t+1)q_0 a) + a^2 Q_{mk-2}) =$$
$$= P_{mk-1}a(\sqrt{D} - b + (t+1)q_0 a) + a^2 P_{mk-2}\,.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} -q_0 Q_{km-1} + Q_{km-2} = \ P_{km-1} \\ (D - b(b - aq_0))Q_{km-1} - abQ_{km-2} = \ (2b - aq_0)aP_{km-1} + a^2 P_{km-2}\,, \end{cases}$$

Подставляя первое уравнение системы в её второе уравнение, получим:

$$(-1)^{km}a^2 = a^2(P_{km-1}Q_{km-2} - P_{km-2}Q_{km-1}) =$$
$$= a^2 P_{km-1}(P_{km-1} + q_0 Q_{km-1}) - ((D - b^2)Q_{km-1} + (a^2 q_0 - 2ab)P_{km-1})Q_{km-1} =$$
$$= a^2 P_{km-1}^2 + (a^2 q_0 - a^2 q_0 + 2ab)P_{km-1}Q_{km-1} - (D - b^2)Q_{km-1}^2 =$$
$$= (aP_{km-1} + bQ_{km-1})^2 - DQ_{km-1}^2. \tag{8}$$

Таким образом, пара чисел $\langle\, P_{km-1}\,,\, Q_{km-1}\rangle$ удовлетворяет t-уравнению Пелля (6) тогда и только тогда, когда km — чётное. Лемма доказана.

□

Отметим, что любое решение $\langle\, x\,,\, y\,\rangle$ t — уравнения Пелля с $ax + by > 0$ параметризуется следующим образом:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} s - \dfrac{b \operatorname{sh} s}{\sqrt{D}} \\ y = \dfrac{a \operatorname{sh} s}{\sqrt{D}}\,, \end{cases} \tag{9}$$

где $s \in \mathbb{R}$ таково, что пара $\langle x\,,\, y\rangle$ определяет целочисленное решение уравнения (6) с $ax + by > 0$. Используя следствие 2 из теоремы 1, легко убедиться в том , что обе части уравнения (6) можно разделить на a:

$$ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a. \tag{10}$$

Обозначим через $\mathfrak{P}_t$ — множество всех целочисленных решений t — уравнения Пелля с $ax + by > 0$. На этом множестве определим бинарную операцию $\divideontimes$ следующим образом:

$$\langle\, x\,, y\,\rangle \divideontimes \langle\, u\,,\, v\,\rangle := \left\langle\, xu + \frac{(D-b^2)yv}{a^2}\,,\, xv + yu + (t+2)q_0 yv \,\right\rangle. \tag{11}$$

Отметим, что $\dfrac{(D-b^2)yv}{a^2} = \dfrac{2cyv}{a} \in \mathbb{Z}$. В самом деле, если, в силу (10), $ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a$ и $au^2 + 2buv - 2cv^2 = a$, то $2cy^2 \,\vdots\, a$ и $2cv^2 \,\vdots\, a$, откуда $2cyv \,\vdots\, a$.

Правая часть равенства (11), как легко видеть, определяет также некоторое решение $t-$ уравнения Пелля. Операция $\divideontimes$ коммутативна и ассоциативна.

Пусть Θ_t (Θ_t^+) — множество всех вещественных (положительных) чисел s, для которых формулы (9) определяют целочисленные (положительные) решения t - уравнения Пелля. Рассмотрим биективное отбражение $f : \mathfrak{P}_t \to \Theta_t$, где $f(\langle\, x\,,\, y\,\rangle) := s$. Здесь s определяет x и y по формулам (9). Из определения f и (9) вытекает, что Θ_t - абелева группа относительно сложения, а также, что группы $\mathfrak{P}_t$ и Θ_t изоморфны. Так как в силу равенства $(ax + by) + \sqrt{D}y = ae^s$ отображение f индуцирует порядок в Θ_t^+, то в Θ_t^+ есть наименьший элемент s_{min}. Положим $\phi := f^{-1}(s_{min})$ и будем называть минимальным решением уравнения (6) или фундаментальной единицей.

Имеет место

Лемма 3. $\langle\, \mathfrak{P}_t\,;\, \divideontimes\,\rangle -$ *циклическая абелева группа с порождающим элементом* ϕ.

Доказательство. Пара $\phi^0 := \varepsilon = \langle\, 1\,, 0\,\rangle$, удовлетворяя уравнению (6), является единицей в $\mathfrak{P}_t$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\phi^n \in \mathfrak{P}_t$. Кроме того операция $\divideontimes$ обратима, так как

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle^{-1} = \langle\, x + (t+2)q_0 y\,,\, -y\,\rangle \in \mathfrak{P}_t \quad \forall\, \langle\, x\,,\, y\,\rangle \in \mathfrak{P}_t.$$

Следовательно, $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \phi^{-n} \in \mathfrak{P}_t$.

Группа Θ_t - циклическая. В самом деле, если, существует $\tilde{s} \in \Theta_t$, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{s} \neq ns_\phi$, то $s_\phi > s_1 = \tilde{s} - \left[\dfrac{\tilde{s}}{s_\phi}\right] s_\phi > 0$. Отсюда $s_1 \in \Theta_t$, вопреки определению s_ϕ. Лемма доказана. □

Положим $\mathfrak{P}_t^* = \{\,\langle\, -x\,,\, -y\,\rangle \,|\, \langle\, x\,,\, y\,\rangle \in \mathfrak{P}_t\}$ и сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2. *Пусть $\alpha-$ отрицательный $t-$ дискриминант, $k-$ длина периода разложения α в ЦД. Соответствующее α $t-$ уравнение Пелля (6) имеет бесконечное множество $\mathfrak{P}_t \cup \mathfrak{P}_t^*$ целочисленных решений. Любое решение из $\mathfrak{P}_t$ - это целая степень основной единицы $\phi = \langle\, P_{kn_0-1}\,,\, Q_{kn_0-1}\,\rangle$, где $n_0 \in \mathbb{N}-$ наименьшее число, для которого kn_0 чётное, $\dfrac{P_{kn_0-1}}{Q_{kn_0-1}}-$ ПД к α. Степень единицы понимается в смысле равенства (11).*

Пример 3. Рассмотрим диофантово уравнение

$$2x^2 + 40xy + 109y^2 = 2.$$

Умножив обе части уравнения на 2, приведём его к виду (6):

$$(2x + 20y)^2 - 182y^2 = 4.$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sqrt{182} - 20}{2} = [\,-4, \overline{1, 2, 1, 12}\,], t = 3,\ k = 4.$$

Минимальным решением данного уравнения является пара

$$\omega\ =\ \langle\, P_3\,,\, Q_3\,\rangle\ =\ \langle\, -13\,,\, 4\,\rangle.$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$(39x + 78y)^2 - 2808y^2\ =\ 1521\,.$$

Левой части уравнения соответствует отрицательный 2-дискриминант

$$\alpha = \frac{\sqrt{2808} - 78}{39} = [\,-1, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 2}\,]\ k = 6.$$

Фундаментальная единица данного уравнения

$$\omega\ =\ \langle\, P_5\,,\, Q_5\,\rangle\ =\ \langle\, -25\,,\, 39\,\rangle.$$

Пример 5. Рассмотрим 5-дискриминант

$$\alpha = [\,-3, \overline{2, 1, 2, 15}\,].$$

Применение формул (4) позволяет вычислить заданную иррациональность:

$$\alpha = \frac{\sqrt{248} - 21}{2} = \frac{2\sqrt{62} - 21}{2}.$$

Минус-t - уравнение Пелля.

Рассмотрим теперь минус-t - уравнение Пелля:

$$(ax+by)^2 - Dy^2 = -a^2, \tag{12}$$

где α - отрицательный t-дискриминант.

Имеет место следующая

Лемма 4. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ *— отрицательный* $t-$ *дискриминант. Тогда:*

а) *если* $\langle\, x_* \,,\, y_* \,\rangle$ *— отрицательное решение уравнения (12)* $\langle x_* < 0 \,,\, y_* > 0\rangle$, *то* $\dfrac{x_*}{y_*}$ *- одна из ПД к числу* α*;*

б) *если* $\langle\, x' \,,\, y' \,\rangle$*- отрицательное решение уравнения (12), то* $x' = P_{kn-1}$, $y' = Q_{kn-1}$, *где* k *— период разложения* α *в ЦД,* $n \in \mathbb{N}$*;*

в) *все отрицательные решения минус-*$t-$ *уравнения Пелля исчерпываются формулами* $\langle\, P_{km-1} \,,\, Q_{km-1} \,\rangle$, *где* $m \in \mathbb{N}$ *— таково, что* km *— нечётное число;*

г) *уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда период разложения* α *в ЦД есть нечётное число.*

Доказательство. Пусть вначале α – положительный t-дискриминант и $t \geq 3$. Если $\langle\, x_* \,,\, y_* \,\rangle$ — положительное решение уравнения (12), то

$$\left(\frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D}-b}{a}\right)\left(\frac{x_*}{y_*} + \frac{\sqrt{D}+b}{a}\right) = -1.$$

Отсюда получаем, что $\dfrac{x_*}{y_*} < \dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ и

$$\frac{\sqrt{D}-b}{a} - \frac{x_*}{y_*} = \frac{1}{y_*^2\left(\dfrac{x_*}{y_*} + \dfrac{\sqrt{D}+b}{a}\right)} < \frac{1}{y_*^2\left(\dfrac{\sqrt{D}-b}{a} + (t-2)q_0\right)} < \frac{1}{2y_*^2}.$$

Таким образом, $\dfrac{x_*}{y_*}$ — одна из ПД к числу α.

Случай $t = 2$ хорошо известен из классической теории уравнения Пелля (см., напр. [1], [2]).

Пусть теперь α — отрицательный t-дискриминант и $t > 1$. Тогда мы должны перейти к положительному t-дискриминанту $\alpha + 2q_0$ и провести те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 2.

Оставшиеся две части леммы доказываются также как и в лемме 2 с использованием равенства (8). $\square$

На множестве $\mathfrak{M}_t$ всех решений данного уравнения $\langle x, y\rangle$ с $x < 0$ и $y > 0$ определим бинарную операцию $\circledast$ равенством (11). Все такие решения параметризуются равенствами:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} w - \dfrac{b \operatorname{ch} w}{\sqrt{D}} \\ y = \dfrac{a \operatorname{ch} w}{\sqrt{D}}, \end{cases} \tag{13}$$

Лемма 5. *Для любых элементов $\langle u_i, v_i\rangle, i = \overline{1,3}$ из $\mathfrak{M}_t$ справедливы включения:*

(а) $\langle u_1, v_1\rangle \circledast \langle u_2, v_2\rangle \in \mathfrak{P}_t$;

(б) $\langle u_1, v_1\rangle \circledast \langle u_2, v_2\rangle \circledast \langle u_3, v_3\rangle \in \mathfrak{M}_t$.

Доказательство. Достаточно проверить первое включение и включение вида:

$$\forall \langle g, h\rangle \in \mathfrak{P}_t, \forall \langle u, v\rangle \in \mathfrak{M}_t : \langle g, h\rangle \circledast \langle u, v\rangle \in \mathfrak{M}_t$$

Проверим с помощью параметризации (13) первое включение. Второе в силу (9) и (13) устанавливается аналогично. По формуле (11)

$$\left\langle \operatorname{sh} \xi - \frac{b \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{D}} \right\rangle \circledast \left\langle \operatorname{sh} \omega - \frac{b \operatorname{ch} \omega}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{ch} \omega}{\sqrt{D}} \right\rangle = \left\langle \operatorname{ch}(\xi + \omega) - \frac{b \operatorname{sh}(\xi + \omega)}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{sh}(\xi + \omega)}{\sqrt{D}} \right\rangle.$$

$\square$

Обозначим через $\Phi_t(\Phi_t^+)$ множество всех вещественных (положительных) чисел w, которые по формулам (13) определяют целочисленные (положительные) решения минус-t-уравнения Пелля. Рассмотрим биекцию $F : \mathfrak{M}_t \to \Phi_t$, где $F(x, y) = w$ (w определяет пару $\langle x, y\rangle$ по формулам (13)). Так же как и в случае множества Θ_t^+ отображение F индуцирует на Φ_t^+ порядок, следовательно,в этом множестве существует минимальный элемент ξ_{min}. Обозначим через $\psi := F^{-1}(\xi_{min})$ – решение уравнения (12), которое будем наывать минимальным решением этого уравнения или фундаментальной еденицей.

Имеет место

Лемма 6. $\langle \mathfrak{M}_t; \circledast\rangle$ *— циклическая абелева группа с порождающим элементом ψ.*

Из леммы 5 следует, что

$$\mathfrak{M}_t = \{\psi^{2n+1} | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Введём следующее обозначение:

$$\mathfrak{M}_t^* := \{\langle -x, -y\rangle | \langle x, y\rangle \ \in \mathfrak{M}_t\}.$$

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Пусть α — отрицательный t-дискриминант, k-длина периода разложения α в ЦД. Тогда:*

(а) *уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда длина периода k разложения числа α в ЦД — число чётное;*

(б) *если уравнение (12) разрешимо, то оно имеет бесконечное множество решений $\mathfrak{M}_t \cup \mathfrak{M}_t^*$. Произвольное решение из $\mathfrak{M}_t$ - целая степень основной единицы $\psi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1}\rangle$. Здесь $n_0 \in \mathbb{N}$ — наименьшее число, для которого kn_0 — нечётное.*

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. Уравнению

$$(58x + 145y)^2 - 12325y^2 = -3364$$

соответствует квадратичная иррациональность вида

$$\alpha = \frac{\sqrt{12325} - 145}{58} = [-1, \overline{2, 2, 2, 2, 3}].$$

Длина периода разложения в ЦД число нечётное. Следовательно, на основании теоремы 3 данное уравнение разрешимо и имеет бесконечное число решений. Фундаментальным решением этого уравнения является, как легко проверить, пара $\langle -17, 29\rangle$.

Пример 7. Уравнение

$$(4x + 24y)^2 - 333y^2 = -16$$

не разрешимо, так как длина периода разложения в ЦД числа $\alpha = \dfrac{\sqrt{333} - 24}{4}$ чётное число:

$$\alpha = [-2, \overline{1, 1, 3, 1, 1, 8}].$$

Заключение

В работе получены следующие результаты: 1) доказана теорема об описании отрицательных t-дискриминантов; 2) исследованы на разрешимость t-уравнения и минус-t-уравнения Пелля; 3) доказаны теоремы об описаниях множеств решений указанных уравнений (в случае их разрешимости) с помощью циклических групп.

Список литературы

1. Бухштаб А. А. *Теория чисел.* – Москва: Просвещение, 1966. –375 с.

   Bukhshtab, A. A. (1966). Number theory — Moscow: Prosvestshenye.

2. Дэвенпорт Г. *Высшая арифметика.* — Москва: Наука, 1965. –175 С.

   Devenport G. High arithmatic. (1965). — Moscow: Nauka.

3. Matthews, K. (2002). The diophantine equation $ax^2 + bxy + cy^2 = N$, $D = b^2 - 4ac > 0$. *J.Théor. Nombres Bordeaux*, Vol. 14, pp. 257–270.

4. Исмаилова А. С., Третьяков Д. В. *s-дискриминанты и s-уравнения Пелля* // ТВИМ. — 2007, № 2 — С. 47–60.

   Ismailova, A. S., Tretyakov, D. V. (2007). s-discriminants and s-Pell equation. *TJCSTM*, 2, pp. 47–60.

5. Третьяков Д.В. *Об одном обобщении уравнения Пелля.* // Spectral and Evolution Problems. Inernational Scintific Journal, 2008. — vol. 18, P. 141–147.

   Tretyakov, D. V. (2008). On some generalization of Pell equation. *Spectral and Evolution Problems. Inernational Scintific Journal*, Vol. 18, pp. 141–147.

Статья поступила в редакцию 15.11.2014