

## НЕЧЕТКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ: ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

© А. О. Емец

ПОЛТАВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ТОРГОВЛИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И СОЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ  
УЛ. КОВАЛЯ, 3, Г. ПОЛТАВА, 36014, УКРАИНА  
E-MAIL: yemets2008@ukr.net

### FUZZY LINEAR EQUATIONS SYSTEMS.

Yemets, A. O.

**Abstract.** Necessary familiar concepts from fuzzy numbers theory and interval systems are presented in the article, namely, concepts of: a fuzzy number; the carrier and the membership function of fuzzy number; a discrete and continual fuzzy number; an interval matrix; low and upper bounds of an interval matrix; a middle matrix; a matrix of radiuses; an interval vector; low and upper bounds of an interval vector; a middle vector; the vector of radiuses.

New concepts such as concepts of a one-peak fuzzy number (discrete and continual); an acute and not acute peak; a normal fuzzy number; a standard fuzzy number; a standardized fuzzy number are introduced in the work.

The concepts of a fuzzy matrix, which connects interval apparatus and fuzzy numbers apparatus; interval linear systems of equations; the fuzzy linear system of equations are introduced in the work.

The concept of admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of an uncertain linear system of equations is introduced in the work. Characterization of a solution is given.

It is proved the lemma that if  $I_A^t$  is an interval matrix, presented through its low  $\underline{A}^t$  and upper  $\bar{A}^t$  bounds  $[\underline{A}^t, \bar{A}^t]$ , where  $\underline{A}^t, \bar{A}^t \in R^{m \times n}$ , and  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution,  $x \in R^n$ , then the family with the number  $t$  of right parts of systems of linear equations  $A^t x$  can be presented through the matrix of radiuses  $\Delta^t$ :  $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]$ .

It is proved for the family with the number  $t$   $A^t x$  of right parts of systems of linear equations, that next statements are equivalent: 1)  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of uncertain linear system of equations of the form  $F_A x = F_b$ ; 2)  $x$  satisfies the inequality  $|A_c^t x - b_c^\tau| \leq -\Delta^t |x| + \delta^\tau$ , where  $A_c^t$  is the middle matrix of the interval matrix,  $b_c^\tau$  is the middle vector of the interval vector,  $\Delta^t$  is the matrix of radiuses of the interval matrix,  $\delta^\tau$  is the vector of radiuses of the interval vector.

3)  $x = x_1 - x_2$ , where  $x_1, x_2$  satisfy conditions:  $\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau$ ;  $\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau$ ;  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ , where  $\underline{A}^t, \bar{A}^t$  are low and upper bounds of the interval matrix;  $\underline{b}^\tau, \bar{b}^\tau$  are low and upper bounds of the interval vector.

It is substantiated that the check that  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of the uncertain system can be executed for the polynomial time.

## ВВЕДЕНИЕ

*Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами.* Исследование систем уравнений, содержащих нечеткие данные [1, 2], весьма актуальная проблема, в частности в задачах оптимизации и принятия решений [3-11].

*Анализ последних исследований и публикаций, в которых предложено решения данной проблемы и на которые опирается автор.* В работе [12] начат анализ таких систем с использованием аппарата интервальных систем [13].

*Нерешенные прежде задачи общей проблемы, которым посвящается указанная статья. Формулирование целей статьи (постановка задачи).* В данной работе вводится понятие допускковых решений таких систем разных типов и дается их характеристика.

### 1. НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Нечетким число называют множество пар  $A = \{ a | \mu(a) \mid a \in [a_L, a_R] \subset R^1, \mu \in [0, 1] \}$ .

Носителем нечеткого числа  $A$  называют множество  $\{a\}$  чисел  $a \in R^1$  в множестве пар, образующих нечеткое число  $A$ . Функцией принадлежности называют функцию, ставящую в соответствие  $\forall a$  число  $\mu(a)$ .

Нечеткое число называют дискретным, если мощность носителя  $\{a\}$  конечна (синоним - нечеткое число с дискретным носителем). Нечеткое число называют континуальным, если носитель  $\{a\}$  имеет мощность континуума (синоним нечеткое число с континуальным носителем). Точки  $a$  носителя нечеткого числа  $A$  называют пиковыми, если  $\mu(a) = 1$ .

Пусть элементы носителя дискретного нечеткого числа  $A$  пронумерованы так, что  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

Дискретное число называют однопиковым, если набор подряд идущих чисел носителя  $\alpha_L = a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p} = \alpha_R$ , для которых функция принадлежности равна единице, единственен. Точки  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p}$  называют пиком числа  $A$ . Если  $p = 1$ , то такой пик называют острым, иначе - не острым.

Континуальное нечеткое число  $A$  называют однопиковым, если отрезок  $[\alpha_L, \alpha_R] \subset (a_L, a_R)$ , для всех чисел  $a$  которого  $\mu(a) = 1$ , единственный. Отрезок

$[\alpha_L, \alpha_R]$  называют пиком числа  $A$ . Если  $\alpha_L = \alpha_R$ , то пик называют острым, иначе - не острым.

Нечеткое число называют нормальным, если функция принадлежности слева от первого (левого) пика не убывающая, а справа от последнего (правого) пика не возрастающая.

Нормальное однопиковое число называют стандартным. Оно может быть как дискретным, так и континуальным.

Стандартизированным нечетким числом называют дискретное нечеткое число вида  $A = \{\underline{a}_0|0; \underline{a}_1|0, 25; \underline{a}_2|0, 5; \underline{a}_3|0, 75; \underline{a}_4|1; \bar{a}_4|1; \bar{a}_3|0, 75; \bar{a}_2|0, 5; \bar{a}_1|0, 25; \bar{a}_0|0\}$ , где  $\underline{a}_0 < \underline{a}_1 < \underline{a}_2 < \underline{a}_3 < \underline{a}_4 \leq \bar{a}_4 < \bar{a}_3 < \bar{a}_2 < \bar{a}_1 < \bar{a}_0$ . Число  $A$  удобно задавать упорядоченной десяткой  $A = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \bar{a}_4, \bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0)$ . Если пик острый, то  $\underline{a}_4 = \bar{a}_4$ .

Из стандартного нечеткого континуального числа стандартизированное можно получить дискретизацией носителя по значениям  $0, 25i$  функции принадлежности,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = J_4^0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . При этом концы  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  интервалов  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  определяются условиями:  $\forall a \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \mu(a) \in [0, 25i, 1], \forall \varepsilon > 0 \mu(\underline{a}_i - \varepsilon) < 0, 25i; \mu(\bar{a}_i + \varepsilon) < 0, 25i, \underline{a}_0 = a_L; \bar{a}_0 = a_R$ .

Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного дискретного осуществимо по алгоритмам из [14, 15].

Далее будем рассматривать только стандартизированные нечеткие числа, поэтому слово "стандартизированное" будем опускать.

Введем в соответствии с [13] необходимую терминологию интервальных матриц.

Пусть  $\underline{A}, \bar{A}$  - две  $m \times n$  матрицы с действительными элементами, т. е.  $\underline{A}, \bar{A} \in R^{m \times n}$ . При  $n = 1$  такая матрица - это вектор-столбец. Пусть  $\underline{A}$  поэлементно не больше  $\bar{A}$ , обозначим это  $\underline{A} \leq \bar{A}$ .

Множество матриц  $A$ , удовлетворяющих условию  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ , называют интервальной матрицей. Обозначим ее  $I_A$ , т. е.  $I_A = \{A \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$ . Матрицу  $\underline{A}$  называют нижней, а матрицу  $\bar{A}$  - верхней границами интервальной матрицы  $I_A$ , которую также обозначают так:  $I_A = [\underline{A}, \bar{A}]$ . Матрицу  $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \bar{A})$  называют средней матрицей для  $I_A$ , а матрицу  $\Delta = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  называют матрицей радиусов для  $I_A$ . Очевидно, что элементы  $\Delta_{ij}$  - матрицы радиусов неотрицательны:  $\Delta_{ij} \geq 0 \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ .

Согласно определений  $A_c$  и  $\Delta$  имеем:  $\underline{A} = A_c - \Delta; \bar{A} = A_c + \Delta$ . Поэтому,  $I_A$  можно представить и так:  $I_A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  или  $I_A = \{A \mid |A - A_c| \leq \Delta\}$ , где модуль (абсолютная величина)  $|B|$  матрицы  $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$  определяется как матрица  $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m \times n}$ .

Интервальным вектором-столбцом  $I_b$  называют интервальную матрицу с одним столбцом. Будем  $I_b$  с использованием  $\bar{b}$  - верхней и  $\underline{b}$  - нижней границ для  $I_b$  обозначать так:  $I_b = \{ b \mid \underline{b} \leq b \leq \bar{b} \}$ , где  $\underline{b}, \bar{b} \in R^m$ . Вектор  $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \bar{b})$  называют средним вектором интервального вектора  $I_b$ , а вектор  $\delta = \frac{1}{2}(\bar{b} - \underline{b})$  - вектором радиусов для  $I_b$ . Таким образом,  $I_b = [ \underline{b}, \bar{b} ] = [ b_c - \delta; b_c + \delta ]$ .

Используя понятие интервальной матрицы, введем понятие нечеткой матрицы.

**Определение 1.** Нечеткой матрицей  $F_A$  назовем пятислойную таблицу (матрицу, массив), состоящую на каждом слое  $t, t \in J_4^0$ , из интервальных матриц  $I_A^t = [ \underline{A}^t, \bar{A}^t ]$ , где матрицы  $\underline{A}^t = (a_{ijt}) \in R^{m \times n}$ ,  $\bar{A}^t = (\bar{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$ , а числа  $\bar{a}_{ijt}, \underline{a}_{ijt}$  - это элементы стандартизированного нечеткого числа  $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, \underline{a}_{ij4}, \bar{a}_{ij4}, \bar{a}_{ij3}, \bar{a}_{ij2}, \bar{a}_{ij1}, \bar{a}_{ij0})$ .

Число  $t$  будем называть номером слоя матрицы  $F_A$ , матрицу  $I_A^t$  - слоем  $t$  матрицы  $F_A$ , а нечеткую матрицу  $F_A$  обозначать  $(a_{ij})$  или  $(a_{ijt}) i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; t \in J_4^0$ .

Если  $n = 1$ , то нечеткую матрицу назовем нечетким вектором-столбцом с  $m$  нечеткими координатами  $b_i = (\underline{b}_{i0}, \underline{b}_{i1}, \underline{b}_{i2}, \underline{b}_{i3}, \underline{b}_{i4}, \bar{b}_{i4}, \bar{b}_{i3}, \bar{b}_{i2}, \bar{b}_{i1}, \bar{b}_{i0})$  и обозначим  $F_b = (b_i)$  или  $F_b = (b_{it}) i = \overline{1, m}, t \in J_4^0$ .

Вектор  $I_b^t = [ \underline{b}^t, \bar{b}^t ]$ , где  $\underline{b}^t = (\underline{b}_{1t}, \underline{b}_{2t}, \dots, \underline{b}_{mt})$ ,  $\bar{b}^t = (\bar{b}_{1t}, \bar{b}_{2t}, \dots, \bar{b}_{mt})$ , назовем  $t$ -ым слоем вектора  $F_b$ , а вектор  $F_b$  - пятислойным.

Интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \tag{1}$$

называют семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{2}$$

где

$$A \in I_A; b \in I_b. \tag{3}$$

**Определение 2.** Нечеткой линейной системой уравнений

$$F_A x = F_b \tag{4}$$

назовем совокупность пяти интервальных линейных систем уравнений

$$\begin{cases} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0; \end{cases} \tag{5}$$

где  $F_A$  и  $I_A^t$ ,  $F_b$  и  $I_b^t$ ,  $t \in J_4^0$  соотносятся между собой согласно определения 1, то есть  $I_A^t$  есть срез  $t$  матрицы  $F_A$ , а  $I_b^t$  есть срез  $t$  вектора  $F_b$

Имеет место включения (см. теорему 1 из [12]):  $I_A^t \subset I_A^{t-1}$ ,  $I_b^t \subset I_b^{t-1}$   $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\} = J_3^0$ , где знак  $\subset$  может означать и равенство.

## 2. ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Поставим в соответствие каждой интервальной линейной системе уравнений из (5)  $I_A^t x = I_b^t$ ,  $t \in J_4^0$ , семейство с номером  $t$  систем линейных уравнений вида (2) с данными вида (3) соответственно:

$$A^t x = b^t; \quad (6)$$

$$A^t \in I_A^t; b^t \in I_b^t. \quad (7)$$

**Определение 3.** Назовем вектор  $x \in R^n$  допусковым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой линейной системы вида (4)  $F_A x = F_b$ , если для него выполняется условие:

$$A^t x = I_b^\tau \forall A^t \in I_A^t, t, \tau \in J_4^0. \quad (8)$$

Название решения объясняется тем, что вектор  $A^t x$ , определяемый данными со значениями принадлежности не меньше  $0, 25t$ , остается внутри интервала (интервала "допусков")  $I_b^\tau$ , определяемого данными со значением функций принадлежности не меньше  $0, 25\tau$ , независимо от выбора матрицы  $A^t \in I_A^t$ .

Определение 3 может быть представлено в виде: вектор  $x$ , называемый допусковым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой системы (4), должен удовлетворять условию

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset I_b^\tau. \quad (9)$$

Заметим, что определение 3 вводит в рассмотрение 25 допусковых решений, соответствующих разным значениям  $t, \tau \in J_4^0$ . В работе [12] числовым значениям  $t$  ( $\tau$ ) приписывается определенный смысл, который мы будем иметь в виду и в этой работе. Тип  $t = 0$  ( $\tau = 0$ ) будем называть нечетким,  $t = 1$  ( $\tau = 1$ ) будем называть квазинечетким,  $t = 2$  ( $\tau = 2$ ) - полунечетким (синоним - получетким),  $t = 3$  ( $\tau = 3$ ) тип назовем квазичетким, а при  $t = 4$  ( $\tau = 4$ ) - четким. Такие названия определяются соответствующим значением функций принадлежности - не меньше  $0, 25t$  ( $0, 25\tau$  соответственно) - согласно определению стандартизированного нечеткого числа (см. табл. 1-2).

Таблица 1. Типы принадлежности допусковых решений ( $\tau = 0, \tau = 1$ )

|         | $\tau = 0$            | $\tau = 1$                 |
|---------|-----------------------|----------------------------|
| $t = 0$ | нечетко-нечеткий      | нечетко-квазинечеткий      |
| $t = 1$ | квазинечетко-нечеткий | квазинечетко-квазинечеткий |
| $t = 2$ | полунечетко-нечеткий  | полунечетко-квазинечеткий  |
| $t = 3$ | квазинечетко-нечеткий | квазинечетко-квазинечеткий |
| $t = 4$ | четко-нечеткий        | четко-квазинечеткий        |

Таблица 2. Типы принадлежности допусковых решений ( $\tau = 2, \tau = 3, \tau = 4$ )

|         | $\tau = 2$                | $\tau = 3$               | $\tau = 4$          |
|---------|---------------------------|--------------------------|---------------------|
| $t = 0$ | нечетко-полунечеткий      | нечетко-квазичеткий      | нечетко-четкий      |
| $t = 1$ | квазинечетко-полунечеткий | квазинечетко-квазичеткий | квазинечетко-четкий |
| $t = 2$ | полунечетко-полунечеткий  | полунечетко-квазичеткий  | полунечетко-четкий  |
| $t = 3$ | квазинечетко-полунечеткий | квазинечетко-квазичеткий | квазинечетко-четкий |
| $t = 4$ | четко-полунечеткий        | четко-квазичеткий        | четко-четкий        |

Напомним определение слабого решения [13] интервальной линейной системы уравнений

$$I_A^t x = I_b^t, \tag{10}$$

где

$$I_A^t = \{ \underline{A}^t \leq A^t \leq \bar{A}^t \}, I_b^t = \{ \underline{b}^t \leq b^t \leq \bar{b}^t \}.$$

Вектор  $x \in R^n$  называется слабым решением системы (10), если он удовлетворяет для некоторых  $A^t \in I_A^t; b^t \in I_b^t$  системе  $A^t x = b^t$ .

Для множества, стоящего в левой части соотношения (9), справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Если  $I_A^t$  - интервальная матрица  $[ \underline{A}^t, \bar{A}^t ]$ , где  $\underline{A}^t, \bar{A}^t \in R^{m \times n}$ , а  $x \in R^n$ , тогда

$$\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]. \tag{11}$$

*Доказательство.* Пусть  $b^t \in \{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \}$ . Тогда существует  $A^t \in I_A^t$ , что  $A^t x = b^t$ , т. е. вектор  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений

$$A^t x = [b^t, b^t]. \tag{12}$$

Воспользуемся теоремой Оеттли-Прагера [13, с. 79]. Согласно этой теоремы, вектор  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений  $I_A^t x = I_b^t$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству

$$| A_c^t x - b_c^t | \leq \Delta^t |x| + \delta^t, \tag{13}$$

что для системы (12), поскольку  $I_b^t = [b^t, b^t]$ , а следовательно,  $\delta^t = 0$ , и  $b_c^t = b^t$ , дает:

$$|A_c^t x - b^t| \leq \Delta^t |x|. \quad (14)$$

Перепишем неравенство (14) в виде:

$$-\Delta^t |x| \leq A_c^t x - b^t \leq \Delta^t |x|,$$

которое разрешим относительно  $b^t$ :

$$A_c^t x - \Delta^t |x| \leq b^t \leq A_c^t x + \Delta^t |x|. \quad (15)$$

В силу произвольности выбора  $b^t \in \{A^t x \mid A^t \in I_A^t\}$ , неравенство (15) означает, что  $\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$ , где знак  $\subset$  принадлежности подмножества означает и равенство тоже. Для справедливости (11) покажем и обратное включение.

Пусть  $b^t \in [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$ , тогда для него выполняется (15), (14) и (13), т. е.  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений (12). Но это означает, что  $b^t \in \{A^t x \mid A^t \in I_A^t\}$ , т. е. справедливо обратное включение. Это означает, что доказательство леммы закончено.

Эту лемму используем для доказательства эквивалентности разных описаний допусковых решений нечеткой линейной системы уравнений.

**Теорема 2.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1)  $x$  - допусковое с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  нечеткой линейной системы вида (4)  $F_A x = F_b$ ;

2)  $x$  - удовлетворяет неравенству  $|A_c^t x - b_c^\tau| \leq -\Delta^t |x| + \delta^\tau$ ;

3)

$$x = x_1 - x_2, \quad (16)$$

где  $x_1, x_2$  удовлетворяют условиям:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau; \quad (17)$$

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau; \quad (18)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \quad (19)$$

*Доказательство.* Доказательство построим по схеме доказательства: из 1) вытекает 2); из 2) следует 3); из 3) получаем 1).

Докажем, что из 1) вытекает 2). В соответствии с леммой 1.

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]. \quad (20)$$

Пусть  $x$  - допусковое с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решение нечеткой системы (4), тогда по (9) и по (20):

$$[ A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x| ] \subset [ b_c^\tau - \delta^\tau; b_c^\tau + \delta^\tau ]. \quad (21)$$

Включение (21) дает неравенство:

$$b_c^\tau - \delta^\tau \leq A_c^t x - \Delta^t |x| \leq A_c^t x + \Delta^t |x| \leq b_c^\tau + \delta^\tau. \quad (22)$$

Отнимем в (22) от всех частей  $b_c^\tau$ :

$$-\delta^\tau \leq A_c^t x - \Delta^t |x| - b_c^\tau \leq A_c^t x + \Delta^t |x| - b_c^\tau \leq \delta^\tau. \quad (23)$$

Из правого неравенства в (23), перенеся  $\Delta^t |x|$  вправо, имеем:

$$A_c^t x - b_c^\tau \leq \delta^\tau - \Delta^t |x|. \quad (24)$$

Из левого неравенства в (23), перенеся  $\Delta^t |x|$  влево, имеем:

$$\Delta^t |x| - \delta^\tau \leq A_c^t x - b_c^\tau. \quad (25)$$

Объединяя (24) и (25), получаем неравенство из условия «2)» теоремы. Т. е., доказано следование из условия «1)» утверждения «2)».

Докажем, что из утверждения «2)» вытекает условие «3)». Пусть  $x$  - удовлетворяет неравенству из условия «2)» теоремы. Обозначим  $x_1 = \max\{ x, 0 \}$ ,  $x_2 = \max\{ -x, 0 \}$ , где знаки  $\max$  обозначают взятие покомпонентного максимума. Легко видеть, что  $x = x_1 - x_2$ , а  $x_1 + x_2 = |x|$ .

Справедливое неравенство из условия «2)» теоремы приобретает в этих обозначениях вид:

$$\Delta^t(x_1 + x_2) - \delta^\tau \leq A_c^t(x_1 - x_2) - b_c^\tau \leq -\Delta^t(x_1 + x_2) + \delta^\tau. \quad (26)$$

Вспомнив, что  $\bar{A}^t = A_c^t + \Delta^t$ ;  $\underline{A}^t = A_c^t - \Delta^t$ , помножив  $\bar{A}^t$  на  $x_1$ , а  $\underline{A}^t$  на  $x_2$ :  $\bar{A}^t x_1 = A_c^t x_1 + \Delta^t x_1$ ,  $\underline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 - \Delta^t x_2$ , и вычтя из первого равенства второе, получаем:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 = A_c^t(x_1 - x_2) + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2. \quad (27)$$

Выразим из (27)

$$A_c^t(x_1 - x_2) = \bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2$$

и подставим в правую часть (26), перенеся слагаемые с  $\Delta^t$  и  $b_c^\tau$  в правую часть получаемого неравенства:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \delta^\tau + b_c^\tau. \quad (28)$$

Учтя, что  $b_c^\tau + \delta^\tau = \bar{b}^\tau$ , из (28) получаем (17).

Для получения (18)  $\bar{A}^t$  умножим на  $x_2$ , а  $\underline{A}^t$  - на  $x_1$ :  $\bar{A}^t x_2 = A_c^t x_2 + \Delta^t x_2$ ;  $\underline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 - \Delta^t x_1$ , и вычтем из второго равенства первое:

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 = A_c^t (x_1 - x_2) - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2. \quad (29)$$

Выразив из (29)  $A_c^t (x_1 - x_2) = \underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2$  и подставив в левую часть (26), получаем:

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq b_c^\tau - \delta^\tau,$$

что с учетом равенства  $\underline{b}^\tau = b_c^\tau - \delta^\tau$  дает (18).

Справедливость (19) следует из определения  $x_1$  и  $x_2$ . Таким образом, доказано, что из «2)» следует утверждение «3)».

Завершает доказательство теоремы обоснование того факта, что из утверждения «3)» следует условие «1)».

Пусть  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  - решения неравенств (17), (18). Для произвольной матрицы  $A^t \in I_A^t$  и для вектора  $x = x_1 - x_2$  выполняется:

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \leq \bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau;$$

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \geq \underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau,$$

или

$$\underline{b}^\tau \leq A^t x \leq \bar{b}^\tau,$$

т. е.

$$A^t x \in I_b^\tau \quad \forall A^t \in I_A^t,$$

последнее означает, согласно определения 3, что  $x$  - допустовое решение нечеткой линейной системы (4).

Таким образом, теорема доказана.

**Замечание.** Проверка того, что  $x$  является допустовым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой системы (4), может быть осуществима за полиномиальное время, поскольку это простая проверка разрешимости системы (17)-(19).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*Результаты исследования:* в работе введено понятие допустового с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решения нечеткой линейной системы уравнений и дана его характеристика.

*Перспективы дальнейших исследований в этом направлении:* далее целесообразно провести числовые эксперименты по проверке решения нечеткой системы на допустовость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. - М: Мир, 1976 - 165 с.  
*Zadeh, L. A.* 1975. The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning, Part I: Inf. Sci., 8, pp. 199-249; Part II: Inf. Sci., 8, pp. 301-357; Part III: Inf. Sci., 9, pp. 43-80.
2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.  
*Kaufmann, A.* 1982. Introduction to Fuzzy Sets Theory. M.: Radyo u svyaz. (in Russian).
3. *Сергиенко И. В.* Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспицкая // Кибернетика и системный анализ. - 1995. - №2. - С. 158-162.  
*Sergienko, I. V. and Kaspshitskaya, M. F.* 1995. Using Concepts of Fuzzy Mathematics for Formalization and Solution of Combinatorial Optimization Problems. Cybernetics and Systems Analysis, 31 (2), pp. 293-296.
4. *Сергиенко И. В.* Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспицкая // Кибернетика и системный анализ. - 2003. - №2. - С. 3-15.  
*Sergienko, I. V., Parasyuk, I. N. and Kaspshitskaya, M. F.* 2003. A Fuzzy Problem of Multiparametric Choice of Optimal Solutions. Cybernetics and Systems Analysis, 39 (2), pp. 163-173.
5. *Ємець О. О.* Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. - Полтава: ПУЕТ, 2011. - 239 с.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2011. Solving of Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets: Monograph. Poltava: PUET. (in Ukrainian).
6. *Ємець О. О.* Операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2008 - №5. - С. 39-46.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2008. Operations and rRelations on Fuzzy Numbers. Naukovi Visti of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute 5, pp. 39-46. (in Ukrainian).
7. *Ємець О. О.* Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2008 - №6. - С. 25-33.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2008. The Construction of the Mathematical mModel of the One Combinatorial Problem of Rectangles Packing with Fuzzy sizes. Naukovi Visti of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute 6, pp. 25-33. (in Ukrainian).
8. *Донец Г. А.* Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г. А. Донец, А. О. Емец // Проблемы управления и информатики - 2009. - №5. - С. 65-76.  
*Donets, G. A. and Yemets, A. O.* 2009. The Statement and Solution of the Knapsack Problem with Fuzzy Data. Journal of Automation and Information Science, 41 (9), pp. 1-13.
9. *Емец О. А.* Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. - 2010. - №2. - С. 86-101.

- Iemets, O. A. and Parfonova, T. A.* 2010. Operations on Fuzzy Numbers with Bearer of the Cardinality of Continuum for Modeling in Combinatorial Optimization. *J. of Automation and Information Sciences*, 42 (4), p. 19-36.
10. *Емец О. А.* Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах / О. А. Емец, А. О. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. - 2013. - №2. - С. 55-60.
- Iemets, O. A., Yemets, A. O. and Parfonova, T. A.* 2014. Branch and Bound Method for Optimization Problems on Fuzzy Sets. *Journal of Automation and Information Sciences*, 45 (4), pp. 23-29.
11. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. - К.: Выща шк., 1991. - 191 с.
- Zaychenko, Y. P.* 1991. Operations Research: Fuzzy Optimization. Kyiv: Vyscha shkola. (in Russian).
12. *Емец О. А.* О слабой разрешимости и слабой допустимости нечетких линейных систем уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару "Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНЕМ-2013) (Полтава, 30-31 серпня 2013 р.): тези доп. - Полтава: ПУЕТ, 2013. - С. 27-35.
- Iemets, O. and Yemets', O.* 2013. "About Weak Feasibility and Weak Solvability of Fuzzy Linear Systems of Equations paper presented at III All-Ukrainian Scientific Seminar "Combinatorial Optimization and Fuzzy Sets 2013, Poltava, 30-31 August. Poltava: PUET, pp. 27-35. (in Russian).
13. *Фидлер М.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Инт компьютерных исследований, 2008. - 288 с.
- Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Rohn, J. and Zimmermann, K.* 2006. Linear Optimization Problems with Inexact Data. Springer Science+usiness Media, Inc.
14. *Емец О. А.* Редукция нечетких чисел с дискретным носителем / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали Міжнародної наукової конференції "Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми висвітлювального інтелекту (ISDMCI '2012) (Євпаторія, 27-31 травня 2012 г.): тез. докл. - Херсон: ХНТУ, 2012. - С. 361-362.
- Iemets, O. and Yemets', O.* 2012. "Reduction of Fuzzy Numbers with a Discrete Carrier paper presented at International Scientific Conference "Intellectual Systems of Decision-making and Problems of Computational Intelligence"(ISDMCI '2012), Yevpatoriya, 27-31 May. Kherson: Kherson National Technical University, pp. 361-362. (in Russian).
15. *Iemets O. O.* About the Problem of Growing of a Discrete Fuzzy Number Carrier during Algebraic Operations. / O. O. Iemets, O. O. Yemets' // XX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties, (Brno, Czech Republic, September 17-21, 2012). - Kyiv. - P. 117-124.

Статья поступила в редакцию 14.01.2014