УДК 519.7

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА[1]

© С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев

Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
пр-т Независимости, 4, г. Минск, 220050, Беларусь
e-mail: *emelichev@tut.by*

On stability of vector investment problem with extreme optimism criteria.

Bukhtoyarov, S. E. and Emelichev, V. A.

Abstract. The multicriteria investment boolean problem with profit extreme optimism criteria (MAXMAX) and Pareto optimality principle is considered. Upper and lower bounds of stability radius of this problem are given in the case of an arbitrary Hölder metric $l_p, 1 \le p \le \infty$, in space of financial market states and Chebyshev metric l_∞ in portfolio space and in space of project economical efficiency.

Введение

Векторные (многокритериальные) дискретные модели принятия решений находят широкое применение в экономике, управлении, проектировании и многих других областях прикладных исследований. В последние годы резко вырос интерес к процессам принятия многоцелевых решений в условиях неопределённости и риска (задачи теории игр, математической экономики, инвестиционного анализа, банковской сферы, страхового бизнеса и т.п.). В этих условиях качество принятых решений и их последствий существенно зависит от полноты учета всех неопределённых и случайных факторов: неточности входной информации, неадекватности математических моделей реальным процессам, ошибок округления, погрешностей вычислений и др. Порой сколь угодно малые погрешности в исходной информации влекут значительные искажения искомых решений. Такие задачи обычно называются некорректно поставленными, т.е. являются неустойчивыми к малым изменениям исходных данных, их решение может быть лишено смысла [1]. При этом естественно возникает вопрос: в каких пределах можно варьировать (возмущать) начальные данные задачи, чтобы множество ее оптимальных решений обладало некоторым заданным свойством инвариантности? Этой проблематике и посвящена настоящая статья, где для

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К-078)

векторной инвестиционной задачи формирования оптимального портфеля с критериями крайнего оптимизма по доходности получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка задана произвольная метрика Гёльдера $l_p, 1 \leq p \leq \infty$, а в пространстве инвестиционных проектов и критериальном пространстве экономической эффективности проектов — метрика Чебышева l_∞. Отметим, что ранее в [2–4] подобные оценки радиуса устойчивости были известны лишь в частных случаях, когда во всех трех пространствах параметров векторной инвестиционной задачи задавались метрики l_1 и l_∞ в определенных комбинациях. В [5] приведен обзор результатов, связанных с оценками радиуса устойчивости любого фиксированного Парето-оптимального портфеля векторных инвестиционных задач с критериями Сэвиджа и Вальда.

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим векторный (s-критериальный) вариант булевой задачи управления инвестициями, основанный на теории Марковица принятия решений в области капиталовложений [6].

Пусть n — количество альтернативных инвестиционных проектов (активов); m — количество возможных (прогнозных) состояний финансового рынка, т.е. число вариантов сценариев развития; s — количество видов (показателей) эффективности (доходности) инвестиционного проекта (таких, как NPV, NFV, PI и др. [7,8]); e_{ijk} — ожидаемая оценка экономической эффективности вида $k \in N_s = \{1, 2, \dots, s\}$ инвестиционного проекта с номером $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $E = [e_{ijk}]$ — трёхмерная матрица размера $m \times n \times s$ с элементами из $\mathbb{R}$. Пусть $x_j = 1$, если проект $j \in N_n$ реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Инвестиционным портфелем назовём булевый вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Через $X \subset \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E} = \{0, 1\}$, $n \geq 2$, будем обозначать множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т.е. тех, реализация которых не превосходит начальный капитал инвестора и допустимого уровня риска.

На множестве портфелей X зададим векторную целевую функцию $f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s))$, компонентами которой являются широко известные в теории принятия решений критерии крайнего оптимизма (MAXMAX)

$$f_k(x, E_k) = \max_{i \in N_m} e_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \to \max_{x \in X}, k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — k-е сечение матрицы $E \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$, $e_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ — i-я строка этого сечения. С помощью такого критерия азартный инвестор оптимизирует эффективность портфеля в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно, когда доходность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимиста ("или пан или пропал", "кто не рискует, тот не выигрывает" и т. п.).

Под векторной (s-критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$ будем понимать задачу поиска множества Парето (множество Парето-оптимальных портфелей)

$$P^s(E) = \{x \in X : X(x,E) = \emptyset\},$$
$$X(x,E) = \{x' \in X : f(x,E) \le f(x',E) \ \&\ f(x,E) \ne f(x',E)\}.$$

Для всякого натурального числа d в действительном пространстве $\mathbb{R}^d$ определим метрику Гёльдера l_p, $1 \le p < \infty$, т.е. нормой вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ считаем число

$$\|a\|_p = \left(\sum_{j \in N_d} |a|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем также использовать метрику Чебышева l_∞

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_j| : j \in N_d\}.$$

Легко убедиться, что при любом числе $p \in [1,\infty]$ справедливо равенство

$$\|a\|_p = m^{\frac{1}{p}}\alpha, \tag{1}$$

если каждой компонентой вектора $a \in \mathbb{R}^m$ является число $\alpha > 0$ и $\frac{1}{p} = 0$ при $p = \infty$.

Далее, в пространстве состояний рынка $\mathbb{R}^m$ зададим метрику l_p, $p \in [1,\infty]$, а в пространстве инвестиционных проектов $\mathbb{R}^n$ и критериальном пространстве эффективности $\mathbb{R}^s$ — чебышевскую метрику l_∞. Тем самым полагаем

$$\|E_k\|_{\infty p} = \|(\|e_{1k}\|_\infty, \|e_{2k}\|_\infty, \dots, \|e_{mk}\|_\infty)\|_p,\ k \in N_s,$$
$$\|E\|_{\infty p \infty} = \|(\|E_1\|_{\infty p}, \|E_2\|_{\infty p}, \dots, \|E_s\|_{\infty p})\|_\infty.$$

Очевидно, что справедливы неравенства

$$\|e_{ik}\|_\infty \le \|E_k\|_{\infty p} \le \|E\|_{\infty p \infty},\ i \in N_m,\ k \in N_s. \tag{2}$$

Отсюда получаем, что для любых портфелей x и x' верны неравенства

$$e_{ik}x - e_{i'k}x' \ge -(\|e_{ik}\|_\infty \|x\|_1 + \|e_{i'k}\|_\infty \|x'\|_1) \ge -\|E_k\|_{\infty p}\|x + x'\|_1,\ i, i' \in N_m,\ k \in N_s. \tag{3}$$

По аналогии с [2–4] радиусом устойчивости задачи $Z^s(E)$, $s \in \mathbb{N}$, назовём число

$$\rho = \rho^s(m,p) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \ \ (P^s(E+E') \subseteq (P^s(E))\},$$

$\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} : \|E'\|_{\infty p \infty} < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $P^s(E+E')$ — множество Парето возмущенной задачи $Z^s(E+E')$. Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ — это предельный уровень возмущений элементов матрицы E в нормированном пространстве $\mathbb{R}^{m\times n\times s}$, которые не приводят к появлению новых Парето-оптимальных портфелей.

В дальнейшем будем считать, что $X \neq P^s(E)$, ибо в противном случае радиус устойчивости следует полагать равным бесконечности.

2. Оценки радиуса устойчивости

При выполнении неравенства $P^s(E) \neq \emptyset$ положим

$$\varphi = \varphi^s(m) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in X(x,E)} \min_{k\in N_s} \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} \frac{e_{i'k}x' - e_{ik}x}{\|x' + x\|_1},$$

$$\psi = \psi^s(m) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in X(x,E)} \min_{k\in N_s} \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} \frac{e_{i'k}x' - e_{ik}x}{\|x' - x\|_1}.$$

Очевидно, что φ и ψ — неотрицательные числа.

Теорема. *При любых $m \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,\infty]$ для радиуса устойчивости $\rho^s(m,p)$ справедливы следующие оценки*

$$\varphi^s(m) \leq \rho^s(m,p) \leq m^{\frac{1}{p}} \psi^s(m).$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость неравенства $\rho \geq \varphi$, которое очевидно, если $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$ и пусть возмущающая матрица $E' = [e'_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ с сечениями E'_k, $k \in N_s$, принадлежит множеству $\Omega_p(\varphi)$. Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ найдётся такой портфель $x^0 \in X(x,E)$, что ввиду (2) имеем

$$\frac{f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k)}{\|x^0 - x\|_1} \geq \varphi > \|E'\|_{\infty p \infty} \geq \|E'_k\|_{\infty p}, \ \ k \in N_s.$$

Поэтому, применяя (3), для всякого индекса $k \in N_s$ выводим

$$f_k(x^0, E_k + E'_k) - f_k(x, E_k + E'_k) = \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x =$$

$$= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} (e_{i'k}x^0 + e'_{i'k}x^0 - e_{ik}x - e'_{ik}x) \geq$$

$$\geq f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) - \|E'_k\|_{\infty p}\|x^0 - x\|_1 > 0,$$

т.е. x не является Парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи $Z^s(E+E')$. Резюмируя и учитывая $x \notin P^s(E)$, заключаем, что

$$\forall E' \in \Omega_p(\varphi) \ \ (P^s(E+E') \subseteq P^s(E)).$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho \geq \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho \leq m^{\frac{1}{p}}\psi$. В соответствии с определением числа ψ найдётся такой портфель $x^* \notin P^s(E)$, что для каждого портфеля $x \in X(x^*, E)$ существует индекс $l = l(x) \in N_s$, для которого справедливо неравенство

$$\psi\|x - x^*\|_1 \geq f_l(x, E_l) - f_l(x^*, E_l). \tag{4}$$

Полагая $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$, рассмотрим возмущающую матрицу $E^0 = [e^0_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m\times n\times s}$ с элементами

$$e^0_{ijk} = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 1,\ k \in N_s, \\ -\delta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\varepsilon/m^{\frac{1}{p}} > \delta > \psi$. Тогда, принимая во внимание (1), имеем

$$\|e^0_{ik}\|_\infty = \delta, \ \ \|E^0_k\|_{\infty p} = \|E^0\|_{\infty p \infty} = m^{\frac{1}{p}}\delta, \ \ i \in N_m,\ k \in N_s.$$

Поэтому $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$. Кроме того, все строки e^0_{ik}, $i \in N_m$, любого сечения E^0_k, $k \in N_s$, одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Обозначив такую строку через A, получаем

$$A(x - x^*) = -\delta\|x - x^*\|_1 \leq -\delta < 0. \tag{5}$$

Отсюда, учитывая (4) и строение возмущающей матрицы E^0, выводим, что для любого портфеля $x \in X(x^*, E)$ справедливы соотношения

$$f_l(x, E_l + E^0_l) - f_l(x^*, E_l + E^0_l) = \max_{i\in N_m}(e_{il} + A)x - \max_{i\in N_m}(e_{il} + A)x^* =$$
$$= \min_{i\in N_m}\max_{i'\in N_m}(e_{i'l}x - e_{il}x^*) + A(x - x^*) = f_l(x, E_l) - f_l(x^*, E_l) +$$
$$+ A(x - x^*) \leq (\psi - \delta)\|x - x^*\|_1 < 0.$$

Таким образом, справедлива формула

$$x \in X(x^*, E) \ \Rightarrow \ x \notin X(x^*, E + E^0). \tag{6}$$

Допустим теперь, что $x \notin X(x^*, E)$. Тогда возможны лишь следующие два случая.

Случай 1: $f(x,E) = f(x^*,E)$. Тогда для любого индекса $k \in N_s$ соотношения (5) влекут

$$f_k(x, E+E^0) - f_k(x^*, E+E^0) = \max_{i \in N_m}(e_{ik}+A)x + \max_{i \in N_m}(e_{ik}+A)x^* =$$
$$= f_k(x,E) - f_k(x^*,E) + A(x - x^*) < 0.$$

Случай 2: Существует такой индекс q, что $f_q(x,E) < f_q(x^*,E)$. Тогда вновь используя (5), имеем $f_q(x, E_q + E_q^0) < f_q(x^*, E_q + E_q^0)$.

Итак, $x \notin X(x^*, E+E^0)$, если $x \notin X(x^*,E)$. Этот факт вместе с (6) даёт $X(x^*, E+E^0) = \emptyset$, т. е. x^* является Парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи $Z^s(E+E^0)$. Отсюда, так как $x^* \notin P^s(E)$, заключаем, что при любом числе $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$ гарантируется существование такой возмущенной матрицы $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $P^s(E+E^0) \not\subseteq P^s(E)$. Следовательно, $\rho < \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$, тем самым $\rho \leq m^{\frac{1}{p}}\psi$.

□

Из теоремы вытекает следущий известный результат.

Следствие [3]. $\varphi^s(m) \leq \rho^s(m,\infty) \leq \psi^s(m)$.

О достижимости этих оценок свидетельствует следующее очевидное утверждение: если для любой пары портфелей $x \notin P^s(E)$ и $x' \in X(x,E)$ множество $\{k \in N_n \ : \ x_j = x'_j = 1\}$ пусто, то справедлива формула

$$\rho^s(m,\infty) = \varphi^s(m) = \psi^s(m), \ m,s \in \mathbb{N}.$$

Заключение

В работе на базе портфельной теории Марковица сформулирована векторная инвестиционная булева задача с паретовским принципом оптимальности, в которой доходность выбираемого инвестором портфеля оценивается векторной целевой функцией, состоящей из критериев крайнего оптимизма, присущего безоглядному игроку. Фактор неопределенности и неточности входной информации предлагается учитывать путем указания пределов надежности принимаемых инвестором решений, т.е. с помощью оценок радиуса устойчивости множества Парето. В результате проведенного параметрического анализа получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка задана произвольная метрика Гёльдера $l_p, 1 \leq p \leq \infty$, в пространстве инвестиционных проектов и критериальном пространстве экономической эффективности проектов — метрика

Чебышева l_∞. Оказалось, что нижняя оценка не зависит от величины p, а верхняя уменьшается в m раз при возрастании числа p от 1 до ∞.

Список литературы

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 286 с.
   Tihonov A. N. Solution methods of incorrect problems / A. N. Tihonov, V. Ya. Arsenin. — M.: Nauka, 1986. — 286 p.
2. Emelichev V. On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem / V. Emelichev, V. Korotkov // Bulletin of the Academy of Science of Moldova. Mathematics. — 2011. — № 1. — С. 83–94.
3. Emelichev V. A. Stability radius of a vector investment problem with Savage's minimax risk criteria / V. A. Emelichev, V. V. Korotkov // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — V. 48, No. 3. — P. 378–386.
4. Emelichev V. A. On stability of a vector Boolean investment problem with Wald's criteria / V. A. Emelichev, V. V. Korotkov // Discrete Math. Appl. — 2012. — V. 22, No. 4. – P. 367—381.
5. Emelichev V. A. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information / V. A Emelichev, V. M Kotov, K. G. Kuzmin, T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko // Journal Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 26, No. 2. — P. 27–41.
6. Markowtz H. M. Porfolio selection: efficient diversification of investments / H. M. Markowitz. — New York: Willey, 1991. — 400 c.
7. Виленский П.Л. Оценки эффективности инвестиционных проектов: теория и практика / П. Л. Виленский, В. Н. Лившиц, С. А. Смоляк. — М.: Дело, 2008. — 1104 с.
   Vilenskii P. L. Investment projects efficiency estimation: theory and practice / P. L. Vilenskii, V. N. Livshits, S. A. Smolyak. — M.: Delo, 2008. — 1104 p.
8. Царев В. В. Оценка экономической эффективнсоти инвестиций / В. В. Царев. — СПб.: Питер, 2004. — 464 с.
   Tsarev V. V. Economic efficiency estimation of investments / V. V. Tsarev. — SPb.: Piter, 2004. — 464 p.

Статья поступила в редакцию 23.07.2014