УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

© Р. А. Теймуров

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева 9, г. Баку, Азербайджанская Республика
e-mail: *rafiqt@mail.ru*, *rafig.teymurov@gmail.com*

Abstract. The problem of optimal control of processes described by a parabolic type equation with moving sources is investigated in the paper. A theorem on existence and uniqueness of the solution is solved for the optimal control problem. Sufficients conditions of Frechet differentiability of quality test and an expression for its gradient are obtained, necessary conditions of optimality in the form of point wise and integral maximum principles are established for an optimal control problem.

Введение

В настоящее время, ввиду сложности решения задачи оптимального управления подвижными источниками, состояния которого описывается дифференциальным уравнением с частными производными, изучены недостаточно [1, 5]. Для некоторых классов линейных и нелинейных краевых задач, в которых участвует импульсные функции, исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения.

В исследуемой работе рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением параболического типа с управлениями подвижных источников. Для этой задачи доказаны теоремы существования и единственности решения, найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и получены выражение для его градиента, установлено необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума.

1. Постановка задачи

Положим $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. В дальнейшем также понадобятся следующие функциональные пространства $V_2^{1,0}(\Omega)$, $W_2^{1,0}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$, которые введены, например, в [3].

Рассмотрим управляемый процесс, состояние которого определяется функцией $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\delta(x - s_k(t)), (x,t) \in \Omega_T, \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$u_x\,|_{x=0} = 0,\ u_x\,|_{x=l} = 0,\ 0 < t \le T, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x, o) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $a,\ l,\ T > 0$ — заданные числа; $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ — заданная функция; $\delta(\cdot)$ — функция Дирака; $p(t) = (p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t)) \in L_2^n(0, T)$, $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ — управляющие функции.

Пару функций $\vartheta = (p(t), s(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H = L_2^n(0, T) \times L_2^n(0, T)$ — гильбертово пространство пар $\vartheta = (p(t), s(t))$ со скалярным произведением

$$< \vartheta^1, \vartheta^2 >_H = \int\limits_0^T [p^1(t)p^2(t) + s^1(t)s^2(t)]dt$$

и с нормой $\left\|\bar{\vartheta}\right\|_H = \sqrt{(< \bar{\vartheta}, \bar{\vartheta} >_H)} = \sqrt{(\|p\|^2_{L_2} + \|\vartheta\|^2_{L_2})}$, где $\vartheta^k = (p^k, s^k)$, $k = 1, 2$.

Положим

$$V = \left\{(p, s) \in H : 0 \le p_i \le A_i, 0 \le s_i \le B_i \le l, i = \overline{1, n}\right\}, \tag{4}$$

где $A_i > 0$, $B_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ — заданные числа и рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} J(\vartheta) = \textstyle\int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \sum_{k=1}^n \Big\{\alpha_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt + \\ + \alpha_2 \textstyle\int_0^T [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)]^2 dt\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\vartheta = (p(t), s(t)) \in H$; $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ — заданные параметры; $y(x) \in L_2(0, l)$, $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{s}(t)) \in H$, $\tilde{p}(t) = (\tilde{p}_1(t),\ \tilde{p}_2(t),\ \ldots,\ \tilde{p}_n(t)) \in L_2^n(0, T)$, $\tilde{s}(t) = (\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t), ..., \tilde{s}_n(t)) \in L_2^n(0, T))$ — заданные функции.

Требуется найти такое управление $\vartheta = (p(t), s(t))$ из множества V и функцию $u(x, t)$, чтобы функционал (5) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (1)–(3).

2. Существование и единственность решения задачи

Определение 1. Задачу о нахождении функцию $u(x, t) = u(x, t; \vartheta)$ из условий (1)–(3) при заданном управлении $\vartheta \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи (1)–(3), соответствующей управлению

$\vartheta = (p(t), s(t)) \in V$, понимается функция $u(x,t) \in V_2^{1,0}(\Omega)$, где функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [-u\eta_t + a^2 u_x \eta_x] dx dt = \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \sum_{k=1}^n \int_0^T p_k(t)\eta(s_k(t),t)dt, \qquad (6)$$

для $\forall \eta = \eta(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x,T) = 0$.

Из результатов работ [2, 4] следует, что при каждом фиксированном $\vartheta \in V$ редуцированная задача (1)–(3) имеет единственное решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$. Пусть выполнены все условия, принятые при постановке задачи (1)–(5). Тогда задача (1)–(5) имеет хотя бы одно решение. Следует отметить, что задача (1)–(5) при $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1,2}$ некорректна в классическом смысле [8]. Однако имеет место

Теорема 1. *Существует плотное подмножество K пространства H такое, что для любого $\omega \in K$ при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,2}$, задача (1)–(5) имеет единственное решение.*

Доказательства теорем приведены в приложении.

3. Необходимые условия оптимальности

Пусть $\psi = \psi(x,t)$ — решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ сопряженной задачи

$$\psi_t + a^2\psi_{xx} = 0, (x,t) \in \Omega_T, \qquad (7)$$

$$\psi_x|_{x=0} = 0,\ \psi_x|_{x=l} = 0,\ 0 \le t < T, \qquad (8)$$

$$\psi(x,T) = 2[u(x,T) - y(x)], 0 \le x \le l, \qquad (9)$$

где $u(x,T)$ — значение при $t = T$ решение редуцированной задачи (1)–(5).

Интегрируя по частям тождество

$$\int_{\Omega_T} \left(\psi_t + a^2\psi_{xx}\right) \eta_1(x,t) d\Omega_T = 0$$

получим, что функция $\psi = \psi(x,t)$удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [\psi\eta_{1t} + a^2\psi_x\eta_{1x}] dx dt = 2\int_0^l [u(x,T) - y(x)]\eta_1(x,T)dx, \qquad (10)$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x,0) = 0$.

Сопряженная задача (7)–(9) является смешанной задачей для линейного параболического уравнения. Поэтому из фактов, установленных для задачи (1)–(3), следует, что для каждого заданного $\vartheta = (p(t), s(t)) \in V$ задача (7)–(9) имеет единственное решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ [3, 5].

Функцию

$$H(t,\psi,\vartheta) = -\sum_{k=1}^{n}\left\{\psi(s_k(t),t)p_k(t) + \alpha_1[p_k(t)-\tilde{p}_k(t)]^2 + \alpha_2[s_k(t)-\tilde{s}_k(t)]^2\right\} \qquad (11)$$

назовем функцией Гамильтона-Понтрягина задачи (1)–(5).

Теорема 2. *Если $\psi(x,t)$ — решение сопряженной задачи (7)–(9), то функционал (5) дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедливо соотношение*

$$J'(\vartheta) = \left(\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial p}, \frac{\partial J(\vartheta)}{\partial s}\right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial s}\right), \qquad (12)$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right), \quad \frac{\partial H}{\partial s} = \left(\frac{\partial H}{\partial s_1}, \frac{\partial H}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial s_n}\right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = -\psi(s_k(t),t) - 2\alpha_1\left(p_k(t) - \tilde{p}_k(t)\right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_k} = -\psi_x(s_k(t),t)p_k(t) - 2\alpha_2\left(s_k(t) - \tilde{s}_k(t)\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $u^*(x,t)$, $\psi^*(x,t)$ — соответственно решения задачи* (1)–(4) *и* (7)–(9) *при $\vartheta = \vartheta^* \in V$. Тогда для оптимальности управления ϑ^* необходимо выполнение условия*

$$H(t,\psi^*,\vartheta^*) = \max_{\overline{\vartheta}\in V} H(t,\psi^*,\vartheta), \forall (x,t)\in\Omega. \qquad (13)$$

Теорема 4. *Для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение условия*

$$< J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* >_H \; = \; \sum_{k=1}^{n}\int_0^T \left\{\left[\psi^*(s_k^*(t),t) + 2\alpha_1\left(p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)\right)\right]\left(p_k(t) - p_k^*(t)\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\psi_x^*(s_k^*(t),t)p_k^*(t) + 2\alpha_2\left(s_k^*(t) - \tilde{s}_k(t)\right]\left(s_k(t) - s_k^*(t)\right)\right\} dt \ge 0, \; \forall \vartheta \in V, \qquad (14)$$

где $\psi^*(x,t)$ — решение сопряженной задачи (7)–(9) *при $\vartheta = \vartheta^* = (p^*(t), s^*(t))$.*

Заключение

В настоящей работе решена задача оптимального управления подвижными источниками, описываемыми уравнением параболического типа. Найдены необходимые условия оптимальности и достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала. Получены формулы для градиента функционала по управляемым параметрам, которые дают возможность применения эффективных методов оптимизации первого порядка.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Докажем непрерывность функционала

$$J_0(\vartheta) = \|u(x,T) - y(x)\|^2_{L_2[0,l]}\,.$$

Пусть $\Delta\vartheta = (\Delta p, \Delta s) \in V$ приращение управления на элементе $\vartheta = (p,s) \in V$ такое, что $\vartheta + \Delta\vartheta \in V$. Обозначим

$$\Delta u \equiv \Delta u(x,t) = u(x,t;\vartheta+\Delta\vartheta) - u(x,t,\vartheta), \Delta s_k \equiv \Delta s_k(t).$$

Из (1)–(3) следует, что $\Delta u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$\Delta u_t = a^2\Delta u_{xx} + \sum_{k=1}^{n}[(p_k+\Delta p_k)\delta(x-(s_k+\Delta s_k)) - p_k\delta(x-s_k)],\ (x,t)\in\Omega_T, \qquad (\text{П}.1)$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=l} = 0,\ \ t\in[0,T], \qquad (\text{П}.2)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0,\ x\in[0,l], \qquad (\text{П}.3)$$

Докажем, что для функции $\Delta u(x,t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \le c_1\|\Delta\vartheta\|_H\,, \qquad (\text{П}.4)$$

где $c_1 \ge 0$ — некоторая постоянная.

Домножая обе части уравнения (П.1) на $\eta = \eta(x,t)$ и интегрируя по частям полученной равенство, получим соотношение:

$$\int_0^l\int_0^T[\Delta u_t\eta + a^2\Delta u_x\eta_x]dxdt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^T[p_k+\Delta p_k)\eta(s_k+\Delta s_k,t) - p_k\eta(s_k,t)]\,dt. \qquad (\text{П}.5)$$

Пусть $t_1, t_2 \in [0,T]$ такие, что $t_1 \le t_2$. В тождестве (П.5) положим

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \Delta u(x,t), t\in(t_1,t_2], \\ 0 \qquad\quad , t\in[0,t_1]\bigcup(t_2,T], \end{cases}$$

и применяя формулы конечных приращений для функции $\Delta u(s_k(t)+\Delta s_k, t)$ в виде

$$\Delta u(s_k+\Delta s_k,t) = \Delta u(s_k,t) + \Delta u_{s_k}(\bar{s}_k,t)\cdot\Delta s_k,\ \ \bar{s}_k = s_k+\theta\Delta s_k,\ \theta\in[0,1],$$

получим уравнение энергетического баланса для задачи (П.1)-(П.3):

$$\frac{1}{2}\left\|\Delta u(x,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2\left\|\Delta u_x(x,t)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_1}^{t_2}[(p_k+\Delta p_k)\Delta s_k\times$$

$$\times\Delta u_x(\bar{s}_k,t)+\Delta p_k\Delta u(s_k,t)]dt,\ \ 345\ \ \bar{s}_k = s_k+\theta\Delta s_k,\ \ \theta\in[0,1]. \qquad (\text{П.6})$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к правой части уравнения (П.6), получим

$$\frac{1}{2}\left\|\Delta u(x,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2\left\|\Delta u_x(x,t)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\left\|p_k\right\|_{L_2(t_1,t_2)}+\left\|\Delta p_k\right\|_{L_2(t_1,t_2)}\Big)\max_{t_1\le t\le t_2}\left|\Delta s_k(t)\right|\left\|\Delta u_{s_k}(\bar{s}_k,t)\right\|_{L_2(t_1,t_2)}+$$

$$+\left\|\Delta p_k\right\|_{L_2(t_1,t_2)}\left\|\Delta u(s_k,t)\right\|_{L_2(t_1,t_2)}\Big]. \qquad (\text{П.7})$$

Несложно показать, что верны неравенства:

$$\left\|\Delta u(s_k,t)\right\|_{L_2(t_1,t_2)} \le c_2\left\|\Delta u\right\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},\ \left\|\Delta u_x(\bar{s}_k,t)\right\|_{L_2(t_1,t_2)} \le c_3\left\|\Delta u\right\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

где $c_2\ge 0, c_3\ge 0$ -некоторые постоянные.

Но, тогда правую часть неравенства (П.7) можно ограничить сверху следующим образом

$$\frac{1}{2}\left\|\Delta u(x,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\Big|_{t_1}^{t_2} + a^2\left\|\Delta u_x(x,t)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\Big|_{t_1}^{t_2} \le c_4\left\|\Delta\vartheta\right\|_{L_2(t_1,t_2)}\left\|\Delta u\right\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \qquad (\text{П.8})$$

при $\left\|\Delta\overline{\vartheta}\right\|_{L_2(t_1,t_2)}\to 0$,где $c_4>0$-некоторая константа. Как и в работе [4, стр.166–168], для произвольного $t\in[0,T]$ разобьем отрезок $[0,t]$ на конечное число подотрезков, на каждом из которых выполняется неравенство (П.8). Затем, сложив полученные неравенства для каждого подотрезка, получим

$$\frac{1}{2}\left\|\Delta u(x,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + a^2\left\|\Delta u_x(x,t)\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} \le c_4\left\|\Delta\vartheta\right\|_H\left\|\Delta u\right\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

откуда вытекает неравенство (П.4). Тогда $\left\|\Delta u\right\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}\to 0$при $\left\|\Delta\vartheta\right\|_H\to 0$. Отсюда и из теоремы о следах [6] получим, что $\left\|\Delta u(x,T)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0$ при $\left\|\Delta\vartheta\right\|_H\to 0$.

Приращение функционала $J_0(\vartheta)$ представимо в виде

$$J_0(\vartheta+\Delta\vartheta)-J_0(\vartheta) = 2\int\limits_0^T[u(x,T)-y(x)]\Delta u(x,T)dx+\left\|\Delta u(x,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Отсюда и из того, что $\left\|\Delta u(x,T)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0$ при $\left\|\Delta\vartheta\right\|_H\to 0$, следует непрерывность функционала $J_0(\vartheta)$.

Функционал $J_0(\vartheta)$снизу ограничен и в силу доказанного является непрерывным в V. Кроме того, H — равномерно выпуклое и рефлексивно банахово пространство [7].

Тогда из теоремы Бидо, приведенной в работе [9], следует существование плотного подмножества K пространства H такого, что для любого $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{s}(t)) \in H$ при $\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,2}$ задача (1)–(5) имеет единственное решение. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J \equiv J(\vartheta + \Delta\vartheta) - J(\vartheta) = 2\int_0^T [u(x,T) - y(x)]\Delta u(x,T)dx + \int_0^T |\Delta u(x,T)|^2 dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{2\alpha_1\int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]\,\Delta p_k(t)dt + \alpha_1\int_0^T |\Delta p_k|^2 dt + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_2\int_0^T [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)]\cdot\Delta s_k(t)dt + \alpha_2\int_0^T |\Delta s_k|^2 dt\right\} \tag{П.9}$$

где $\vartheta = (p,s) \in V$, $\vartheta + \Delta\vartheta \in V$, $\Delta u(x,T) \equiv u(x,T;\vartheta + \Delta\vartheta) - u(x,T;\vartheta)$, $u \equiv u(x,T;\vartheta)$.

Если в (10) положим $\eta_1 = \Delta u(x,t)$, в (П.5) положим $\eta = \psi(x,t)$ и вычтем полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^\ell 2[u(x,T) - y(x)]\Delta u(x,T)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_0^T [(p_k + \Delta p_k)\psi(s_k + \Delta s_k, t) - p_k\psi(s_k,t)]dt. \tag{П.10}$$

Ясно, что при сделанных выше предположениях по формуле Тейлора справедливо разложения:

$$\psi(s_k + \Delta s_k, t) = \psi(s_k,t) + \psi_x(s_k,t)\Delta s_k + o(\Delta s_k).$$

Учитывая это, из (П.10) получим

$$\int_0^\ell 2[u(x,T) - y(x)]\Delta u(x,T)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_0^T [p_k(t)\psi_x(s_k(t),t)\Delta s_k + \psi(s_k(t),t)\Delta p_k(t)]dt + R_1, \tag{П.11}$$

где $R_1 = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^T \psi_x(s_k(t),t)\Delta p_k(t)\Delta s_k(t)dt + o(\Delta s_k)\right)$.

Ясно, что $R_1 = o(\|\Delta\vartheta\|_H)$. С другой стороны из оценки (П.4) следует, что

$$\|\Delta u(x,T)\|_{L_2(0,l)} = O\left(\|\Delta\vartheta\|_H\right).$$

Подставляя полученные соотношения в (П.9) имеем:

$$\Delta J = \sum_{k=1}^{n} \left(J_1(k) + J_2(k)\right) + o(\|\Delta\vartheta\|_H),$$

где

$$J_1(k) = \int\limits_0^T \left[\psi(s_k(t),t) + 2\alpha_1\left(p_k(t) - \tilde{p}_k(t)\right)\right]\Delta p_k(t)dt,$$

$$J_2(k) = \int\limits_0^T \left[\psi_x(s_k(t),t)p_k(t) + 2\alpha_2\left(s_k(t) - \tilde{s}_k(t)\right)\right]\Delta s_k(t)dt.$$

Отсюда с учетом выражения функции Гамильтона-Понтрягина получим

$$\Delta J = \left(-\frac{\partial H}{\partial\vartheta}, \Delta\vartheta\right)_H + o\left(\|\Delta\vartheta\|_H\right),$$

что показывает дифференцируемость по Фреше функционала (1) и справедливость формулы (12). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем внутри области Ω точку Лебега (σ,θ) всех функций, входящих в условию задач (1)–(3) и (7)–(9). Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и $_\varepsilon \equiv \left\{(x,t) : \sigma - \frac{\varepsilon}{2} < x < \sigma + \frac{\varepsilon}{2}, \theta - \frac{\varepsilon}{2} < t < \theta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \Omega$.

Построим импульсную вариацию управления

$$\vartheta^\varepsilon \equiv (p^\varepsilon, s^\varepsilon) = \begin{cases} \vartheta, \quad 5A;8 \quad (x,t) \in_\varepsilon, \\ \\ \vartheta^*, \quad 5A;8 \quad (x,t) \notin_\varepsilon. \end{cases}$$

где ϑ — некоторый постоянный вектор. Обозначим $\Delta u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon(x,t) - u^*(x,t)$, где $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t;\vartheta^\varepsilon)$. Тогда функция Δu_ε удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T \left[-\Delta u_\varepsilon \eta_t + a^2 \Delta u_{\varepsilon x}\eta_x\right] dxdt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^T \left[p_k^\varepsilon + \Delta p_k^\varepsilon)\eta(s_k^\varepsilon + \Delta s_k^\varepsilon, t) - p_k^\varepsilon \eta(s_k^\varepsilon, t)\right] dt, \tag{П.12}$$

для $\forall\eta = \eta(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x,T) = 0$.

Рассуждая аналогично тому, как доказана оценка (П.4), устанавливаем, что для функции $\Delta u_\varepsilon(x,t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{V_2^{1,0}(\Omega_T)} \le c_6 \|\Delta \vartheta^\varepsilon\|_{L_2(\varepsilon)},$$

где $c_6 > 0$ — некоторая константа. Отсюда и из того, что $(\sigma,\theta) \in \Omega$ является точкой Лебега, получим сходимость Δu_ε в $V_2^{1,0}(\Omega)$ к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x,t) \in V_2^{1,0}(\Omega)$ является решением следующего интегрального тождества

$$\int_0^l \int_0^T \left[\psi_\varepsilon \eta_{1t} + a^2 \psi_{\varepsilon x} \eta_{1x}\right] dxdt = 2\int_0^l \left[u_\varepsilon(x,T) - y(x) + \frac{1}{2}\Delta u_\varepsilon(x,T)\right] \eta_1(x,T)dx, \quad (\text{П}.13)$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x,T) = 0$. Разность $\psi_\varepsilon - \psi^*$ удовлетворяет интегральному тождеству, аналогичному (П.13). Отсюда и из того, что $\Delta u_\varepsilon \to 0$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, получим $\psi_\varepsilon \to \psi^*$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Вычислим приращение функционала (5):

$$\Delta J(\vartheta^*) \equiv J(\vartheta^\varepsilon) - J(\vartheta^*) = 2\int_0^T \left[u^*(x,T) - y(x) + \frac{1}{2}\Delta u_\varepsilon(x,T)\right] \Delta u_\varepsilon(x,T)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T \left[p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)\right]\left[p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)\right] dt + \alpha_1 \int_0^T \left[p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)\right]^2 dt + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_2 \int_0^T \left[s_k^*(t) - \tilde{s}_k^*(t)\right]\left[s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)\right] dt + \alpha_2 \int_0^T \left[s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)\right]^2 dt \right\}. \quad (\text{П}.14)$$

Рассуждая аналогично тому, как доказано соотношение (П.11), и используя тождество (П.13), получим

$$2\int_0^T \left[u^*(x,T) - y(x) + \frac{1}{2}\Delta u_\varepsilon(x,T)\right] \Delta u_\varepsilon(x,T)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_\varepsilon \left[\psi_{\varepsilon x}(s_k^\varepsilon(t),t) p_k^\varepsilon(t) \Delta s_k^\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(s_k^\varepsilon, t)\Delta p_k^\varepsilon\right] dt.$$

Учитывая это соотношение в (П.14), имеем

$$\Delta J(\vartheta^*) \equiv J(\vartheta^\varepsilon) - J(\vartheta^*) = \textstyle\sum_{k=1}^n \int_\varepsilon \left[\psi_{\varepsilon x}(s_k^\varepsilon(t),t) p_k^\varepsilon(t) \Delta s_k^\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(s_k^\varepsilon, t)\Delta p_k^\varepsilon\right] dt +$$
$$+ \textstyle\sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T \left[p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)\right]\left[p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)\right] dt + \alpha_1 \int_0^T \left[p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)\right]^2 dt + \right.$$
$$\left. + 2\alpha_2 \int_0^T \left[s_k^*(t) - \tilde{s}_k^*(t)\right]\left[s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)\right] dt + \alpha_2 \int_0^T \left[s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)\right]^2 dt \right\}.$$

Тогда из вида функции Гамильтона-Понтрягина (11) имеем

$$\Delta J(\vartheta^*) = -\int\limits_{\varepsilon} \left[H(t, \psi_\varepsilon, \vartheta^\varepsilon) - H(t, \psi_\varepsilon, \vartheta^* \right] dt.$$

В силу того, что $\psi_\varepsilon \to \psi^*$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$, отсюда получим формулу для вариации функционала (5):

$$\delta J(\vartheta^*) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta J(\vartheta^*)}{\varepsilon} = -\left[H(\theta, \psi^*, \vartheta) - H(\theta, \psi^*, \vartheta^* \right] .$$

Из оптимальности управления $\vartheta \in V$ следует, что $\delta J(\vartheta^*) \geq 0$. Отсюда и из плотности всюду в Ω точек Лебега имеем справедливость соотношения (13). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4. В силу известной теоремы [2, с. 28] для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение неравенства:

$$< J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* >_H \geq 0, \forall \vartheta \in V. \qquad (\Pi.15)$$

Используя выражение (12) градиента функционала, поставим его в (П.15), получим неравенство (14). □

Список литературы

1. Бутковский А. Г. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский, Л. М. Пустыльников. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
3. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1976. — 736 с.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж. Л. Лионс. М.: Мир, 1972. — 416 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 406 с.
8. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин — М.: Наука, 1974. — 286 с.
9. Goebel M. On existence of optimal control / M. Goebel. — Math. Nuchr., 1979. — Vol. 93. — P. 67–93.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012