УДК 519.658

СРЕДНЯЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА НА КЛАССЕ ВСЕХ БЛОЧНО-ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© О. А. Щербина

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *oshcherbina@gmail.com*

Abstract. It is found asymptotical average computational complexity of local algorithm for solving block-tree discrete optimization problems with additional constraints of univariate multiple choice in more general case.

Введение

Задачи дискретной оптимизации (ДО), возникаюшие на практике, обычно имеют специальную структуру, причем матрицы ограничений в задачах большой размерности, как правило, содержат большое количество нулевых элементов (сильно «разрежены»), а ненулевые матричные элементы в большинстве случаев группируются в блоки (чаще всего вдоль главной диагонали). Блочность многих прикладных задач ДО обусловлена слабой связностью подсистем моделируемых реальных сложных систем. Задачи ДО и, в частности, задачи целочисленного программирования (ЦП) с блочной структурой возникают естественным образом во многих приложениях. Перспективными декомпозиционными методами, использующими разреженность матрицы ограничений задач ДО, представляются локальные алгоритмы (ЛА), общая теория которых предложена Ю. И. Журавлевым [3]. ЛА имеют декомпозиционный характер, т.е. сводят решение исходной задачи ДО большой размерности к решению ряда задач меньших размерностей, которые уже можно решить известными методами, т.е. с помощью имеющихся решателей.

Проблема оценки сложности алгоритмов и задач оптимизации в зависимости от размерности задачи представляет большой теоретический и практический интерес и позволяет получить представление о трудоемкости решения задач дискретной оптимизации.

Под *вычислительной сложностью алгоритма* понимают количество условных шагов или операций, необходимых для решения задачи. Важной характеристикой алгоритма является *асимптотическая оценка сложности* — порядок скорости роста сложности алгоритма при увеличении размерности задачи. Асимптотические оценки вычислительной сложности алгоритмов позволяют судить об их поведении при решении задач большой размерности и определить границы применимости алгоритма, более того, «...именно асимптотическая сложность алгоритма определяет в итоге размер задач, которые можно решить этим алгоритмом» [1], с. 12. Важность изучения асимптотических оценок вычислительной сложности алгоритмов обусловлена также ускоренным ростом быстродействия современной вычислительной техники и необходимостью решения задач большой размерности. Сравнивая алгоритмы по асимптотическим оценкам сложности, следует иметь в виду, что вычислительная сложность алгоритма может характеризоваться большим порядком скорости роста, но характеризоваться меньшей мультипликативной константой, чем другой алгоритм. В этом случае, алгоритм, характеризующийся большой скоростью роста сложности, может оказаться эффективнее других алгоритмов для решения задач небольшой размерности.

Изложенное выше обосновывает *необходимость дальнейшего исследования* оценки вычислительной сложности локальных алгоритмов, в частности, представляет интерес нахождение асимптотики среднего значения вычислительной сложности, чему и посвящена данная статья.

1. О локальных алгоритмах для разреженных задач дискретной оптимизации и оценка их сложности

1.1. О локальных алгоритмах для разреженных задач дискретной оптимизации. Рассмотрим задачу Z целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с бинарными переменными:

$$CX = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{2}$$

$$x_j = 0,\ 1, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Рассмотрим решение разреженной дискретной задачи оптимизации (1)–(3). Для решения блочно-древовидных задач ДО может быть использован локальный алгоритм (ЛА) $\mathfrak{A}_{BT}$. В блочно-древовидных задачах ДО возможно выделить систему окрестностей различных переменных такую, что одна переменная может быть общей самое большее лишь для двух окрестностей и граф пересечений этих окрестностей представляет собой дерево. С помощью ЛА $\mathfrak{A}_{BT}$ можно решить подобную задачу ДО, двигаясь от окрестностей, соответствующих листьям дерева, к окрестности, соответствующей корню дерева. Изложим ЛА $\mathfrak{A}_{BT}$ решения БД задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) вида (1)–(3), где матрица A имеет БД структуру, содержащую k блоков, и этой структуре соответствует дерево D инцидентности блоков. Рассмотрим вершину r дерева D и дерево D_r, состоящее из вершины r и всех ее потомков. Введем необходимые обозначения: S_r — множество индексов переменных, принадлежащих блоку B_r; $S_{rr'}$ — множество индексов переменных, принадлежащих одновременно блокам B_r и $B_{r'}$; если $S = \{j_1, \ldots, j_q\}$, то $X_S = \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\right)$; $X_{S_{rr'}}$ — вектор переменных, общих для блоков B_r и $B_{r'}$. Критическим местом ЛА $\mathfrak{A}_{BT}$ является перебор по сепараторам $X_{S_{rr'}}$, так как если сепараторы (граничные кольца) окрестностей содержат большое число переменных, то объем полного перебора по кольцам будет большим и ЛА $\mathfrak{A}_{BT}$ будет работать недостаточно эффективно. Возникает проблема снижения объема перебора по сепараторам $X_{S_{rr'}}$. В частности, если дополнительные ограничения, связывающие переменные из различных окрестностей, являются ограничениями многократного выбора SOS [7], т.е.

$$\sum_{j \in J'_p} x_j \leq 1,\ p = 1, \ldots,\ N, \tag{4}$$

то перебор по кольцу для таких переменных существенно снижается. В принципе, учет подобных ограничений должен осуществлять селектор ЛА $\mathfrak{A}$, указывающий подмножества множества переменных кольца, по которым нужно производить перебор.

Таким образом, ЛА решения задач дискретной оптимизации является ЛА, характеризующимся окрестностями с переменными параметрами и индикаторной информацией, и может быть задан следующими параметрами: $\{Z,\ \mathfrak{M},\ \Gamma,\ \mathfrak{C}\}$, где Z — задача ЦЛП, $\mathfrak{M}$ — система окрестностей переменных, Γ — граф пересечений окрестностей, $\mathfrak{C}$ — селектор.

1.2. **Оценки сложности локальных алгоритмов для блочно-древовидных задач дискретной оптимизации.** При введении оценок сложности алгоритмов решения комбинаторных задач обычно различаются индивидуальная задача и массовая задача (или просто задача), последняя представляет собой множество индивидуальных задач. При этом для оценки трудоемкости алгоритмов используются следующие характеристики: временная вычислительная сложность алгоритма — время, затрачиваемое алгоритмом для решения задачи, емкостная сложность алгоритма — объем памяти, необходимый для реализации алгоритма. Для сглаживания резких различий в поведении алгоритма при переходе от одной индивидуальной задачи к другой, можно рассматривать все индивидуальные задачи одной размерности вместе и определить сложность алгоритма для этой размерности задачи как число шагов (или условных операций) алгоритма в худшем случае [5], т. е. находится временная вычислительная сложность в предположении, что для данного алгоритма входные данные задачи являются наихудшими из возможных.

Ориентация на худший случай иногда приводит к пессимистическим прогнозам поведения алгоритмов, так, хорошо известный симплекс-алгоритм на практике работает как полиномиальный алгоритм (это же показывает и теоретический анализ его поведения «в среднем» [8]), хотя оценка сложности в худшем случае для него является экспоненциальной [6]. В связи с этим с практической точки зрения часто больший интерес представляет средняя оценка вычислительной сложности [5], позволяющая судить о поведении алгоритма в среднем на некотором классе задач, однако средняя оценка вычислительной сложности тоже не дает полной характеристики эффективности алгоритма, так как возможны задачи, при решении которых сложность алгоритма превысит эту оценку.

Введем оценку сложности алгоритма ДО согласно [2]. Известно, что множество решений задачи p булева программирования образует множество вершин n-мерного единичного куба E^n. Пусть $\varphi_A\left(p\right)$ — число просмотренных вершин куба E^n после того, как индивидуальная задача ДО p решена с помощью алгоритма A.

Определение 1. Оценкой эффективности (сложностью) алгоритма A на классе задач P называется величина

$$\varphi_A\left(P\right) = \sup_{p \in P} \varphi\left(p\right)$$

Таким образом, введенная оценка сложности является оценкой «в худшем случае», в дальнейшем вычислительную временную сложность алгоритмов ДО будем называть *оценкой эффективности* алгоритмов.

Рассмотрим БД структуру, состоящую из k блоков, и содержащую n бинарных переменных и N дополнительных ограничений одновариантного типа (4). Рассмотрим вопрос об оценке эффективности ЛА с селектором $\mathfrak{C}\left(\tilde{1}\right)$ для решения задач ДО с БД структурой и дополнительными ограничениями одновариантного выбора, здесь в сочетании с ЛА рассматривается лишь алгоритм полного перебора, перебирающий допустимые решения дополнительных ограничений (обозначим этот алгоритм $\mathrm{A}_0^S\left(\tilde{1}\right)$.

Введем необходимые обозначения:

$l_r^{(p)}$ — число переменных, входящих только в окрестность Ω_r и p-е дополнительное ограничение многократного выбора (4);

$l^{(p)}_{r_1 r_2}$ — число переменных, входящих в пересечение окрестностей $\Omega_{r_1} \cap \Omega_{r_2}$ и в p-е дополнительное ограничение вида (4) (здесь $p = 1, \ldots, N$). Тогда оценка вычислительной сложности ЛА имеет вид:

$$E_{\mathfrak{A}_{BT}}\left(n,\ k,\ Z,\ N_l,\ D,\ \mathfrak{C}\left(\tilde{1}\right),\ A^s_o\left(\tilde{1}\right)\right) = \sum_{r=1}^{k} \prod_{p=1}^{N} \left(1 + l^{(p)}_r + \sum_{r' \in J_r} l^{(p)}_{rr'} + l^{(p)}_{p_r r}\right).$$

Для случая, когда число переменных в каждом дополнительном ограничении одно и то же — l, то есть

$$\sum_{r=1}^{k} l^{(p)}_r + \sum_{(r,\ r') \in R_D} l^{(p)}_{rr'} = l, \quad p = 1, \ldots, N \tag{5}$$

ранее в [4] было доказано, что

$$\overline{E_{\mathfrak{A}_{\text{BT}}}} \sim \frac{(2k-2)! \cdot R^*}{d_{r*}!} \cdot \frac{(1+l)^{N+2k-2-d_{r*}}}{(N \cdot l)^{2k-2-d_{r*}}},\ N \to \infty.$$

2. Асимптотическая средняя оценка вычислительной сложности локального алгоритма с селектором

Представляет интерес нахождение асимптотики среднего значения в более общем случае, без ограничения (5). Сумма всевозможных значений ОЭ ЛА $\mathfrak{A}_{BT}$ для всех БД структур имеет вид:

$$E_{\Sigma} = \sum_{\sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r + \sum\limits_{(r,r') \in R_D} \sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'} = n} \prod_{r=1}^{k} \frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r!} \cdot \prod_{(r,\ r') \in R_D} \frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'}\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'}!} \cdot$$
$$\cdot \sum_{r=1}^{k} \prod_{p=1}^{N} \left(1 + l^{(p)}_r + \sum_{r' \in J_r} l^{(p)}_{rr'} + l^{(p)}_{p_r r}\right).$$

Для вычисления E_{Σ} достаточно найти величину:

$$E^{(r^*)}_{\Sigma} = \sum_{\sum\limits_{r=1}^{k} \sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r + \sum\limits_{(r,r') \in R_D} \sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'} = n} \prod_{r=1}^{k} \frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_r!} \cdot \prod_{(r,\ r') \in R_D} \frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'}\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l^{(p)}_{rr'}!} \cdot$$
$$\cdot \prod_{p=1}^{N} \left(1 + l^{(p)}_{r*} + \sum_{r' \in J_{r*}} l^{(p)}_{r*r'} + l^{(p)}_{p_{r*} r*}\right).$$

Распишем произведение

$$\prod_{p=1}^{N}\left(1+l_{r^*}^{(p)}+\sum_{r'\in J_{r^*}} l_{r^*r'}^{(p)}+l_{p_{r^*}r^*}^{(p)}\right)=\sum_{t+\sum\limits_{r'\in J_{r^*}} S_{r'}\le N}\ \sum_{\left(p_1,\ldots,p_t,\ \left\{q_1^{(r^*,r')},\ldots,q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}\right\}_{r'\in\tilde{J}_{r^*}}\right)} l_{r^*}^{(p_1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*}^{(p_t)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{r'\in\tilde{J}_{r^*}} l_{r^*r'}^{q_1^{(r^*,r')}}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}}, \qquad (6)$$

где суммирование во второй сумме ведется по неупорядоченным наборам $\left(p_1,\ldots,p_t,\ \left\{q_1^{(r^*,r')},\ldots,q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}\right\}_{r'\in\tilde{J}_{r^*}}\right)$ различных элементов множества $\{1,\ 2,\ldots,\ N\}$.

Итак,

$$E_{\Sigma}^{(r*)}=\sum_{\sum\limits_{r=1}^{k}\sum\limits_{p=1}^{N} l_r^{(p)}+\sum\limits_{(r,r')\in R_D}\sum\limits_{p=1}^{N} l_{rr'}^{(p)}=n}\ \prod_{r=1}^{k}\frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l_r^{(p)}\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l_r^{(p)}!}\cdot\prod_{(r,\ r')\in R_D}\frac{\left(\sum\limits_{p=1}^{N} l_{rr'}^{(p)}\right)!}{\prod\limits_{p=1}^{N} l_{rr'}^{(p)}!}\cdot$$

$$\sum_{t+\sum\limits_{r'\in J_{r^*}} S_{r'}\le N}\ \sum_{\left(p_1,\ldots,p_t,\ \left\{q_1^{(r^*,r')},\ldots,q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}\right\}_{r'\in\tilde{J}_{r^*}}\right)} l_{r^*}^{(p_1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*}^{(p_t)}\cdot\prod_{r'\in\tilde{J}_{r^*}} l_{r^*r'}^{q_1^{(r^*,r')}}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}}.$$

Введем обозначения:

$$L_r=\sum_{p=1}^{N} l_r^{(p)},\quad r=1,\ldots,\ k,\quad L_{rr'}=\sum_{p=1}^{N} l_{rr'}^{(p)},\quad (r,\ r')\in R_D.$$

Имеется $C_N^t\cdot C_{N-t}^{s_1}\cdot C_{N-t-s_1}^{s_2}\cdot\ldots\cdot C_{N-t-s_1-\ldots-s_{dr*-1}}^{s_{dr*}}$ членов вида $l_{r^*}^{(p_1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*}^{(p_t)}\cdot\prod\limits_{r'\in\tilde{J}_{r^*}} l_{r^*r'}^{q_1^{(r^*,r')}}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*,r')}}$. Без потери общности можно рассмотреть член суммы (6) вида

$$l_{r^*}^{(1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*}^{(t)}\cdot l_{r^*r'}^{(t+1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r'}^{(t+s_1)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r_{d_{r^*}}}^{\left(t+s_1+\ldots+s_{d_{r^*}-1}+1\right)}\cdot\ldots\cdot l_{r^*r_{d_{r^*}}}^{\left(t+s_1+\ldots+s_{d_{r^*}}\right)}.$$

Тогда

$$E_{\Sigma}^{(r*)}=\sum_{\substack{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}\le N\\ t,\ s_j\ge 0}} C_N^t\cdot C_{N-t}^{s_1}\cdot C_{N-t-s_1}^{s_2}\cdot\ldots\cdot C_{N-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}-1}}^{s_{d_{r*}}}$$

Используя полиномиальную формулу

$$\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_k=n\\ n_i\geq 0}} \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}=k^n, \tag{7}$$

получим

$$E_\Sigma^{(r^*)} = \sum_{\substack{t+s_1+\ldots+s_{d_{r^*}}\leq N\\ t,\, s_j\geq 0}} C_N^t\cdot C_{N-t}^{s_1}\cdot C_{N-t-s_1}^{s_2}\cdot\ldots\cdot C_{N-t-s_1-\ldots-s_{d_{r^*}}-1}^{s_{d_{r^*}}}$$

$$\cdot \sum_{\substack{L_{r^*}+L_{r^*r_1}+\ldots+L_{r^*r_{d_{r^*}}}\leq n-2k+2+d_{r^*}\\ L_{r^*}\geq t,\, L_{r^*r_1}\geq s_1\ldots,\, L_{r^*r_{d_{r^*}}}\geq s_{d_{r^*}}}} \quad \sum_{\sum\limits_{r\neq r^*} L_r+\sum\limits_{\substack{r\neq r^*\\ r_1\in J_r}} L_{rr_1}=n-L_{r^*}-L_{r^*r_1}-\ldots-L_{r^*r_{d_{r^*}}}}$$

$$\cdot \sum_{\sum\limits_{p=1}^{N} l'^{(p)}_{r^*}=L_{r^*}-t} \frac{(L_{r^*}-t)!}{\prod\limits_{p=1}^{t} l'^{(p)}_{r^*}!\ \prod\limits_{p=t+1}^{N} l^{(p)}_{r^*}!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{L_{r*}+L_{r*r_1}+\ldots+L_{r*r_{dr*}}\leq n-2k+2+d_{r*}\\ L_{r*}\geq t,\, L_{r*r_1}\geq s_1\ldots,\, L_{r*r_{dr*}}\geq s_{dr*}}} \quad \sum_{\sum\limits_{r\neq r*} L_r+\sum\limits_{\substack{r\neq r*\\ r_1\in J_r}} L_{rr_1}=n-L_{r*}-L_{r*r_1}-\ldots-L_{r*r_{dr*}}} N^{L_{r*}-t}\cdot$$

$$\cdot\ N^{L_{r*r_1}-s_1}\cdot\ldots\cdot N^{L_{r*r_{dr*}}-s_{dr*}}\cdot N^{\sum\limits_{r\neq r*} L_r+\sum\limits_{\substack{r\neq r*\\ r'\in J_r}} L_{rr'}}\cdot[(L_{r*}-t+1)\cdot\ldots\cdot L_{r*}]$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d_{r^*}}\left[\left(L_{r*r_j}-s_j+1\right)\cdot\ldots\cdot L_{r*r_j}\right]$$

$$= \sum_{\substack{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}\leq N\\ t,\, s_j\geq 0}} C_N^t\cdot C_{N-t}^{s_1}\cdot C_{N-t-s_1}^{s_2}\cdot\ldots\cdot C_{N-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}-1}^{s_{d_{r*}}} \sum_{\substack{L_{r*}+L_{r*r_1}+\ldots+L_{r*r_{dr*}}\leq n-2k+2+d_{r*}\\ L_{r*}\geq t,\, L_{r*r_1}\geq s_1\ldots,\, L_{r*r_{dr*}}\geq s_{dr*}}}$$

$$\cdot \sum_{\sum\limits_{r\neq r*} L_r+\sum\limits_{\substack{r\neq r*\\ r_1\in J_r}} L_{rr_1}=n-L_{r*}-L_{r*r_1}-\ldots-L_{r*r_{dr*}}} N^{n-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}}\cdot[(L_{r*}-t+1)\cdot\ldots\cdot L_{r*}]$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{d_{r^*}}\left[\left(L_{r*r_j}-s_j+1\right)\cdot\ldots\cdot L_{r*r_j}\right]$$

$$= \sum_{\substack{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}\leq N\\ t,\, s_j\geq 0}} N^{n-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}}\cdot\frac{N!}{(N-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}})!}$$

$$\cdot \sum_{\substack{L_{r*}+L_{r*r_1}+\ldots+L_{r*r_{d_{r*}}}\le n-2k+2+d_{r*}\\ L_{r*}\ge t,\ L_{r*r_1}\ge s_1\ldots,\ L_{r*r_{d_{r*}}}\ge s_{d_{r*}}}} C^t_{L_{r*}}\cdot C^{s_1}_{L_{r*r_1}}\cdot\ldots\cdot C^{s_{d_{r*}}}_{L_{r*r_{d_{r*}}}}$$

$$\cdot \sum_{\sum\limits_{r\ne r*} L_r+\sum\limits_{\substack{r\ne r*\\ r_1\in J_r}} L_{rr_1}=n-L_{r*}-L_{r*r_1}-\ldots-L_{r*r_{d_{r*}}}} 1.$$

Используем подстановку $i_0+t=L_{r*},\quad i_j+s_j=L_{r*r_j},\quad j=1,\ldots,\ d_{r*}$ для вычисления суммы

$$S_L=\sum_{\substack{L_{r*}+L_{r*r_1}+\ldots+L_{r*r_{d_{r*}}}\le n-2k+2+d_{r*}\\ L_{r*}\ge t,\ L_{r*r_1}\ge s_1\ldots,\ L_{r*r_{d_{r*}}}\ge s_{d_{r*}}}} C^t_{L_{r*}}\cdot C^{s_1}_{L_{r*r_1}}\cdot\ldots\cdot C^{s_{d_{r*}}}_{n-L_{r*}-L_{r*r_1}-\ldots-L_{r*r_{d_{r*}}}-1}.$$

Используя тождество

$$\sum_{m_1,\ldots,m_q} C^{m_1}_{n_1+m_1}\cdot C^{m_2}_{n_2+m_2}\cdot\ldots\cdot C^{m_q}_{n_q+m_q}=C^m_{n+m+q-1}, \tag{8}$$

получим

$$S_L=\sum_{m=0}^{n-2k+2+d_{r*}-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}} C^{2k-3-d_{r*}}_{n-i_0-i_1-\ldots-i_{d_{r*}}-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}-1}\cdot C^{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}+d_{r*}}_{m+t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}+d_{r*}}.$$

Используя формулу

$$\sum_{m=0}^{M} C^{n_1}_{m+n_1}\cdot C^{n_2}_{M-m+n_2}=C^{n_1+n_2+1}_{n_1+n_2+M+1}, \tag{9}$$

получим

$$S_L=C^{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}+d_{r*}+2k-2}_{n+d_{r*}+1}.$$

Возвращаясь к ранее записанным суммам, получим

$$E^{(r*)}_{\Sigma}=\sum_{\substack{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}\le N\\ t,\ s_j\ge 0}} N^{n-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}}}\cdot\frac{N!}{(N-t-s_1-\ldots-s_{d_{r*}})!}\cdot C^{t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}+d_{r*}+2k-2}_{n+d_{r*}+1}.$$

Полагая $\alpha=t+s_1+\ldots+s_{d_{r*}}$ и учитывая, что $C^{d_{r*}}_{\alpha+d_{r*}}$ наборов $t,\ s_1,\ldots,\ s_{d_{r*}}$ образуют в сумме α, получим

$$E^{(r*)}_{\Sigma}=\sum_{\alpha=0}^{N}\frac{N!}{(N-\alpha)!}\cdot C^{d_{r*}}_{\alpha+d_{r*}}\cdot C^{\alpha+2k-2}_{n+d_{r*}+1}\cdot N^{n-\alpha}=\frac{N^n}{d_{r*}!}\cdot\sum_{\alpha=0}^{N} C^{\alpha}_{N}\cdot(\alpha+d_{r*})!\cdot C^{\alpha+2k-2}_{n+d_{r*}+1}\cdot N^{-\alpha}.$$

Поскольку порядок роста последнего выражения возрастает с ростом d_{r*}, достаточно рассмотреть сумму $E^{(r*)}_{\Sigma}$, соответствующую $\max\ d_r$.

Для нахождения числа M таких структур достаточно положить $\alpha = 0$ в последней формуле. Тогда:

$$M = N^n \cdot C^{2k-2}_{n+d_{r*}+1} = \frac{N^n}{(2k-2)!} \cdot (n + d_{r*} - 2k + 4) \cdot \ldots \cdot (n + d_{r*} + 1) \sim N^n \frac{N^n}{(2k-2)!} \cdot n^{2k-2}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, средняя ОЭ ЛА с селектором на множестве всех БД структур с дополнительными ограничениями одновариантного типа удовлетворяет асимптотическому равенству:

$$\overline{E_{\mathfrak{A}_{\text{вт}}}} \sim \frac{(2k-2)!}{d_{r*}!} \cdot \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{N} C^{\alpha}_{N} \cdot (\alpha + d_{r*})! \cdot C^{\alpha+2k-2}_{n+d_{r*}+1} \cdot N^{-\alpha}}{n^{2k-2}}, \quad \text{при } n, N \to \infty.$$

Заключение

В работе найдена асимптотика среднего значения вычислительной сложности локального алгоритма для решения блочно-древовидных задач дискретной оптимизации с дополнительными ограничениями многократного выбора одновариантного типа в более общем случае. *Перспективными направлениями* дальнейших исследований являются построение и анализ эффективных вычислительных схем локальных алгоритмов для разреженных задач дискретной оптимизации.

Список литературы

1. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1975. — 535 с.
2. Гришухин В. П. Алгоритмы ветвей и границ в задачах с булевыми переменными, оценка их эффективности / В. П. Гришухин // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12, № 4. — С. 757–766.
3. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды / Ю. И. Журавлев. — М.: Магистр, 1998. — 420 с.
4. Щербина О. А. Локальные алгоритмы для блочно-древовидных задач дискретного программирования / О. А. Щербина // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1143–1154.
5. Dempe S. Worst-case and average-case analysis of an algorithm solving a generalized knapsack problem / S. Dempe // Mathematische Operationsforschung und Statistik. — 1983. — V. 14. — P. 551–564.
6. Klee V. How good is the simplex algorithm? / V. Klee, G. J. Minty // Inequalities, III / O. Shisha (ed.). — New York: Academic Press, 1972. — P. 159–175.
7. Nauss R. M. 0-1 knapsack problem with multiple choice constraints / R. M. Nauss // European Journal of Operational Research. — 1978. — V. 2. — P. 125–131.
8. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования / А. Схрейвер. — М.: Мир, 1991. — Т. 1. — 360 с.; — Т. 2. — 342 с.

Статья поступила в редакцию 25.03.2013