УДК 515.1

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ m-ФУНКЦИЙ БЕЗ ВНУТРЕННИХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛАХ

© А. О. Пришляк, Е. Н. Вятчанинова

Киевский национальный университет имени Тараса Шевчанко
механико-математический факультет
пр-т академика Глушкова 2, корпус 7, г. Киев, 03127, Украина
e-mail: *prishlyak@yahoo.com*

Abstract. Canonical m-handle decomposition of three-dimensional handlebody was constructed for m-functions. It is obtained a criterion on homotopy equivalence of m-functions without internal critical points on handlebody in terms of the generators of the fundamental group of the surface.

Введение

Пусть M — трёхмерное тело, т.е. замкнутая ограниченная область в трёхмерном евклидовом пространстве, границей которой является гладкая замкнутая поверхность $F = \partial M$. В данной работе мы рассматриваем m-функции без внутренних критических точек на M. Для таких функций ограничение на край является функцией Морса. Для критических точек функции Морса определен индекс — индекс квадратической формы Гессе (матрица Гессе этой формы состоит из вторых частных производных в критической точке). Кроме того, направление поля градиента задает знак (ϵ=$\pm$1) в критической точке. Индекс критической точки m-функции — это пара: (индекс ограничения на край, число ϵ). $\epsilon = -1$, если поле градиента направлено внутрь многообразия и $\epsilon = +1$, если оно направлено наружу. Заметим, что, аналогично функциям Морса на замкнутом многообразии, m-функции существуют и образуют открытое множество в пространстве всех функций.

В. Шарком [1] и С. Максименком [2] было доказано, что две функции Морса можно соединить путем в пространстве функций Морса на замкнутом двумерном многообразия тогда и только тогда, когда функции имеют одинаковое число критических точек каждого индекса.

Топологические свойства m-функций и разложений на m-ручки исследовались в работах [3–8]. В [9] используя m-ручки дан критерий существования пути между двумя m-функциями на трехмерном теле без внутренних критических точек.

Цель работы — построение канонического разложения трехмерного тела на m-ручки по данной m-функции и получение критерия гомотопической эквивалентности функций в терминах образующих фундаментальной группы поверхности.

1. Разложения на м-ручки

Начнем с разложения на ручки замкнутой поверхности F. Ручкой индекса λ называется произведение $H^\lambda = D^\lambda \times D^{2-\lambda}$. Кривую $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda}$ будем называть кривой приклеивания, а $D^\lambda \times \partial D^{2-\lambda}$ — внутренней кривой. Таким образом, у ручки индекса 0 кривая приклеивания это $\emptyset$, у ручки индекса 1 — пара отрезков, а у ручки индекса 2 — окружность. Из теории Морса известно, что если у функции $g : F \to \mathbb{R}$ на отрезке $[y, z]$ имеется одно критическое значение во внутренней точке отрезка и только одна критическая точка индекса λ принимает это значение, то $g^{-1}(z) \cong g^{-1}(y) \cup_\varphi H^\lambda$ получено из $g^{-1}(y)$ с помощью приклейки ручки индекса λ по некоторому вложению $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \to \partial g^{-1}(y)$.

m-ручки могут быть получены из обычных, умножением их на отрезок [0,1]. Будем обозначать их H^λ_+ или H^λ_-. Таким образом, $H^\lambda_+ \cong H^\lambda_- \cong D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times [0, 1]$.

Граница ∂H^λ_- ручки индекса $(\lambda, -1)$ разбивается на три части:

1. внешняя область $D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$,
2. область приклеивания $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times [0, 1]$,
3. внутренняя область $D^\lambda \times \partial D^{2-\lambda} \times [0, 1] \cup\ D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$.

Граница ∂H^λ_+ ручки индекса $(\lambda, +1)$ разбивается на две части:

1. внешняя область $D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$,
2. область приклеивания $\partial(D^\lambda \times D^{2-\lambda}) \times [0, 1] \cup\ D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$.

После приклеивания m-ручек край будет состоять из внутренних и внешних областей. Их общая граница называется углом многообразия. Область приклеивания последующих ручек вкладывается во внутреннюю область. При этом для ручек индекса $(\lambda, -1)$ в угол вкладывается $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$, а для ручек индекса $(\lambda, +1)$ в угол вкладывается $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$. Таким образом, внешние области m-ручек задают разложения на обычные ручки поверхности F. Кроме того, объединение областей приклеивания равно объединению внутренних областей.

Аналогично обычным разложения на ручки, с m-ручками можно осуществлять следующие операции:

1. перестановка ручек — если две ручки не пересекаются их можно приклеивать в произвольном порядке;
2. изотопия приклеивающего отображения ручки, при этом если одна $(1, \pm 1)$-ручка скользит по другой $(1, \pm 1)$-ручке, то говорят, что она складывается с этой ручкой.
3. сокращение пар дополнительных ручек — если ручка индекса $(1, -1)$ пересекает $(0, -1)$ или $(2, -1)$-ручку по двумерному диску, то такую пару ручек

можна сократить (построить другое разложение на ручки без этих двух ручек). Аналогично сокращается пара, состоящая из $(1,+1)$-ручки и $(0,+1)$ или $(2,+1)$-ручки, которые пересекаются по отрезку. Обратная операция к сокращению — введение пар дополнительных ручек.

Заметим, что m-ручки будут дополнительными, если у них одинаковый знак числа ϵ и дополнительными ручками будут их ограничения на край.

В [9] доказан критерий гомотопической эквивалентности функций:

Теорема 1. *Две функции на трехмерном теле будут гомотопически эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые числа ручек для каждого индекса и из разложению на m-ручки одной можно получить разложение другой при помощи изотопии, перестановок, добавлений, сокращений и введения пар дополнительных ручек*

Нашей последующей задачей будет по произвольному разложению на ручки с помощью операций 1)–3) построить каноническое разложение на ручки и исследовать его топологические свойства.

Разложение на ручки, не содержащее пар дополнительных ручек или пар, которые могут быть сделаны дополнительными после изотопии, будем называть минимальным. Из связности трехмерного тела и края следует, что разложение на ручки будет минимальным тогда и только тогда, когда в нем содержится по одной (0, –1)- и (2, +1)-ручке и нет (0, +1)- и (2, –1)-ручек.

2. Каноническое разложение на ручки

Разложение на ручки, не содержащее пар дополнительных ручек или пар, которые могут быть сделаны дополнительными после изотопии, будем называть минимальным. Из связности трехмерного тела и края следует, что разложение на ручки будет минимальным тогда и только тогда, когда в нем содержится по одной (0, –1)- и (2, +1)-ручке и нет (0, +1)- и (2, –1)-ручек.

Вначале опишем каноническое разложение на ручки, а затем покажем, что каждое минимальное разложение на ручки может быть приведено к каноническому.

Рассмотрим минимальное разложение на ручки. В каноническом разложении на ручки будет одинаковое число (1, –1)- и (1, +1)-ручек. Для (1, –1)-ручки пару точек $\partial D^1 \times 0 \times 0$, а для (1, +1)-ручки пару точек $\partial D^1 \times 0 \times 1$ будем называть точками приклеивания. Все (1, ±1)-ручки не пересекаются. Угол (0, –1)-ручки будет окружностью, которая есть границей внутренней области — двухмерного диска. Отметим на ней $4n$ различных точек и занумеруем их, обходя по окружности. Эти точки будут точками приклеивания (1, ±1)-ручек. (1, –1)-ручка, с точностью до изотопии определяется точками приклеивания. (1, +1)-ручка задается своей областью приклеивания, которая определяется как регулярная окрестность хорды, с концами в точках приклеивания. В каноническом разложении на ручки точками приклеиваниями (1, −1)-ручек будут такие пары: $(1,3)$, $(5,7)$,..., $(4n-3, 4n-1)$, а точками приклеиваниями $(1,+1)$-ручек будут такие пары: (2,4), (6,8), ..., $(4n-2, 4n)$ (см. рис. 1).

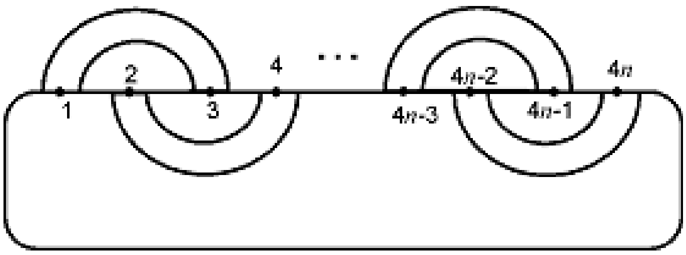

Рис. 1

Здесь изображены «тонкие» ручки, m-ручки получаются из них умножением на $[0,1]$.

Здесь и далее, мы будем задавать разложение на ручки с помощью поверхности G, которая есть внешней областью, полученной после приклейки $(0,-1)$-ручки и всех $(1,-1)$-ручек. Внешние области $(1,-1)$-ручки будут изображаться вне от 2-диска — внешней области $(0,-1)$-ручки. $(1,-1)$-ручки будем называть внешними. Приклеивающие области $(1,+1)$-ручек будем изображать внутри 2-диска и $(1,-1)$-ручки будем называть внутренними.

Пара ручек индексов $(1,-1)$ и $(1,+1)$ называется сопряженной, если существует скольжение $(1,+1)$-ручки такое, что: 1) в результате скольжения приклеивающая область $(1,+1)$-ручки совпадет с внешней областью $(1,--1)$-ручки; 2) при скольжении $(1,+1)$-ручка не пресекает других $(1,\pm1)$-ручек. На рис. 1 пары ручек с концами $(4k-3, 4k-1)$ и $(4k-2, 4k)$, $k = 1, \ldots, n$, будут сопряженными.

Разложение на m-ручки будем называть полуканоническим, если все $(1,\pm1)$-ручки разбиты на пары сопряженных ручек.

Теорема 2. *С помощью сложений (скольжений) ручек минимальное разложение на ручки может быть приведено к каноническому.*

Доказательство. С помощью скольжений (1, −1)-ручек сделаем так, чтобы они не пересекались. На поверхности G имеется два разложения на ручки: в первом 1-ручки есть внутренние области (1, –1)-ручек, во втором 1-ручки будут областями приклеивания (1, +1)-ручек. Заклеим компоненты края поверхности G 2-дисками, которые будем рассматривать как ручки индекса 2. Поскольку на замкнутой поверхности две функции Морса гомотопически эквивалентны, когда они имеют одинаковое число ручек каждого индекса [1], то для построенных разложений на ручки одно из другого получается с помощью операций изотопий приклеивающих отображений ручек (сложения ручек). Это означает, что с помощью сложений (1, +1)-ручек их можно сделать сопряженными с (1, –1)-ручками.

Рассмотрим первую пару сопряженных ручек. Пусть их точки приклеивания занумерованы числами 1–4 как на рис. 1. С помощью скольжения $(1, -1)$-ручек, как для обычного разложения поверхности на ручки, сделаем, чтобы их точки приклеивания были вне дуги, соединяющей точки 1–4 и содержащей точки 2, 3. При этом внутренние ручки могут скользить обоими концами по своей сопряженной ручке.

Далее рассмотрим вторую пару сопряженных ручек. Сделаем с оставшимися ручками то же самое, что и для первой пары. Продолжая этот процесс получим каноническое разложение на ручки. □

3. Схема m-функций

Будем обозначать внешние ручки $a_1, \ldots, a_n$, а внутренние — $b_1, \ldots, b_n$. Они соответствуют образующим фундаментальной группы поверхности. Пусть фиксированной точкой есть внутренняя точка (центр) $(0, -1)$-ручки на поверхности. Петля образуется путем от фиксированной точки до первой точки приклеивания (точки с наименьшим номером) далее средним диском ручки от первой до второй точки приклеивания и далее дугой от второй точки приклеивания до фиксированной точки.

При этом соотношение между образующими задается обходом границы внутренней области $(0, -1)$-ручки и выписывании букв соответствующих точек приклеивания ручек. Начало ручки будем выписывать с положительной степенью, а конец с отрицательной. Для канонического разложения на ручки получим слово $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Так построенный набор образующих фундаментальной группы поверхности и соотношение будем называть схемой функции.

Рассмотрим теперь процесс сложения ручек. Складываться могут только соседние ручки. В соотношении им отвечают соседние буквы (первая и последняя буквы тоже считаются соседними). Если буква a_k складывается с a_m (или b_m), стоящей от нее справа, то вместо образующей a_k будет новая образующая $\tilde{a}_k = a_m a_k$ ($\tilde{a}_k = b_m a_k$).

При этом в соотношении a_k^{-1} заменится на $\tilde{a}_k^{-1}$, а a_k будет вытерто и вставлено $\tilde{a}_k$ после a_m^{-1} (b_m^{-1}). Если бы a_k было бы справа от a_m, то при сложениии было бы все тоже самое, кроме того, что $\tilde{a}_k$ вставлялось бы перед a_m^{-1} (b_m^{-1}). Если складываем не букву a_k, а a_k^{-1}, то новая образующая имеет вид $\tilde{a}_k = a_k a_m$ ($\tilde{a}_k = a_k b_m$), а остальное как и выше.

В отличии от внешних ручек, внутренние ручки могут складываться только с внутренними. При этом правило будет те же, что и выше с заменой a_k на b_k. Если внутренняя ручка сложилась с внешней (проскользила одним концом по ней), то в результате эти ручки будут пересекаться и чтобы избавиться от таких пересечений нужно проскользить этим же концом в обратном направлении или вторым концом внутренней ручки в том же направлении. Последнее возможно, если ручка дополнительная, а первое приводит к обратному скольжению либо нескольким скольжениям по внутренним ручкам и дополнительных ручек по своим внешним. Дополнительная ручка в слове задается одним из четырех фрагментов $b_m a_k b_m^{-1}$, $b_m^{-1} a_k b_m$, $b_m^{-1} a_k^{-1} b_m$, $b_m a_k^{-1} b_m^{-1}$. Для первого из них $\tilde{b}_m = a_k^{-1} b_m^{-1} a_k$. При этом в слове $b_m a_k b_m^{-1}$ заменяется на a_k, а a_k^{-1} на $\tilde{b}_m a_k^{-1} \tilde{b}_m^{-1}$.

Описанные выше преобразования, а также замены букв на обратные и перенумерация букв, будем называть допустимыми преобразованиями схемы.

Из построения схемы и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Две функции на трехмерном теле будут гомотопически эквивалентными тогда и только тогда, когда из схемы одной функции можно получить схему другой допустимыми преобразованиями.*

Поскольку в каноническом разложении дополнительные внутренние ручки полностью задаются внешними, то необходимо лишь следить, чтобы из внешних образующих одной функции допустимыми преобразованиями можно было получить внешние образующие другой.

Заметим, что внешние образующие являются также полной системой образующих трехмерного тела.

Теорема 4. *Если две функции на трехмерном теле имеют одинаковые числа критических точек каждого индекса, то в фундаментальной группе трехмерного тела образующие заданные первой функцией могут быть получены из образующих второй функции допустимыми преобразованиями.*

Доказательство. Пусть у двух функций одинаковое число критических точек каждого индекса. Построим по ним канонические разложения на m-ручки. Средние диски внутренних ручек после стягивания 0-ручки в точку будут образующими фундаментальной группы тела $\pi_1(M)$. Преобразованиями Нильсена 1)–3) из одной системы образующих можно получить другую. Рассмотрим эти преобразования.

1. Поменять местами образующие. Это означает поменять местами ручки. Покажем как поменять две соседние ручки. Пускай их номера будут первая и вторая. Как на рис. 1. Точки приклеивания первой ручки 1 и 3, а второй 5 и 7. Для этого сделаем следующие скольжения: а) точкой 5 по сопряженной к первой ручке, б) обеими концами 2 и 4 по первой ручке, в) точкой 5 по сопряженной к первой ручке (теперь она слева), г) обеими концами 2 и 4 по первой ручке в обратном направлении, д) обеими концами 6 и 8 по второй ручке, е) движения а)–д) для точки 7.

   Поочередно меняя соседние ручки можно поменять местами любые две ручки.
2. Замена образующего на обратный. Соответствует замене ориентации среднего диска ручки.
3. Замена образующего на его произведение с другим образующим. Это соответствует сложению двух внешних ручек, например n-той и k-той. При этом точка приклеивания n-той ручки как в 1) перемещается к k-той ручке, а потом скользит по k-той ручке.

□

Пример. Пусть $n = 2,\ b_1 = a,\ b_2 = b,\ a_1 = c,\ a_2 = d.$ Рассмотрим две образующие $c^{-1}c^{-1}a^{-1}b^{-1}cb$ и $dc^{-1}bacbacbc^{-1}$. Вычеркивая из этих слов все буквы a и b, мы видим, что эти образующие в трехмерном теле гомотопны c и d. Однако они не могут быть получены из стандартной системы образующих поскольку первая из них должна быть получена скольжением ручки c либо сама по себе (что невозможно) либо по сопряженным ее к b или $a^{-1}b^{-1}$. Но эти две ручки не есть двойственными к c и поэтому к ним не допустимо сопряжение ручкой c.

Заключение

Для разложения трехмерного тела на m-ручки построено каноническое разложение. Доказано, что гомотопическая эквивалентность функций равносильна возможности получения из одной канонической системы образующих фундаментальной группы края одной функции такую же систему другой функции путем допустимых преобразований.

Авторы надеются, что полученные критерии гомотопической эквивалентности смогут быть использованы для построения гомотопических инвариантов m-функций.

Список литературы

1. Шарко В. В. Функции на поверхностях I / В. В. Шарко // Некоторые вопросы совр. математики. Праці ін-ту математики НАНУ. — 1998. — Т.25. — С. 408–434.
2. Максименко С. І. Еквівалентність m-функцій на поверхнях / С. І. Максименко // Некоторые вопр. совр. математики. Ин-т математики НАНУ. — 1998. — Т.25. — С. 128–134.
3. Ikegami Kazuichi. Cobordism group of Morse functions on manifolds / Kazuichi Ikegami // Hiroshima Math. J. — 2004. — Vol. 34, No. 2. — P. 211–230.
4. Jankowski A. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary / A. Jankowski, R. Rubinstein // Comm. Math. — 1972. — Vol. XVI. — P. 99–112.
5. Prishlyak A. O. Equivalence of Morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, No.3. — P. 49–53.
6. Лукова-Чуйко Н. В. Пошарова еквівалентність m-функцій загального положення на 3-многовидах з межею / Н. В. Лукова-Чуйко, О. О. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — No.3. — С. 114–123.
7. Пришляк А. О. Эквивалентность m-функций на трехмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАНУ. — 2000. — No.6. — С. 22–26.
8. Пришляк О. О. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанинлва // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — No.2. — С. 113–119.
9. Пришляк О. О. Гомотопічна класифікація некритичних m-функцій на тривимірному диску / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанинова // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — No.4. — С. 113–119.

Статья поступила в редакцию 01.12.2012