УДК 519.873

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

© А. И. Песчанский, А. И. Коваленко

Севастопольский национальный технический университет
кафедра высшей математики
ул. Университетская, 33, г. Севастополь, 99053, Украина
e-mail: *annushka199@bk.ru*

Abstract. Semi-Markov model of operation of a single-server queue system with losses and unreliable server has been built. All the random values appearing in the problem definition are supposed to have general distribution functions. An explicit form of system stationary characteristics has been defined.

Введение

При моделировании систем обслуживания естественным с практической точки зрения является предположение о наличии случайных отказов элементов систем. Впервые на необходимость учета возможности отказа и восстановления обслуживающих приборов указал Б. В. Гнеденко [1]. Его учеником Т. П. Марьяновичем была рассмотрена однолинейная система с бесконечной очередью и ненадежным прибором [2]. Дальнейшие исследования как однолинейных, так и многоканальных ненадежных систем содержатся, например, в [3]–[6]. Однако фигурирующие в рассмотренных задачах случайные величины (в частности, времена между моментами поступления заявок), как правило, распределены по экспоненциальным законам. Отличием данной работы является предположение об общем законе распределения случайных величин, в терминах которых описывается функционирование системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему обслуживания $GI/G/1/0$ (в классификации Д. Кендалла) с потерями и ненадежным обслуживающим прибором. Поступающий в систему рекуррентный поток заявок порождается случайной величиной (СВ) β с произвольной функцией распределения (ФР) $G(t) = P\{\beta \le t\}$. Если прибор свободен, то поступившая в систему заявка начинает обслуживаться, в противном случае заявка теряется. Длительность обслуживания заявки — СВ α с произвольной ФР $F(t) = P\{\alpha \le t\}$. После достижения прибором суммарной наработки, реализуемой как СВ γ с ФР $\Phi(t) = P\{\gamma \le t\}$ общего вида, происходит его отказ, и сразу же начинается восстановление прибора. При этом обслуживаемая заявка теряется. Длительность проведения восстановления прибора — СВ σ с произвольной ФР $\Psi(t) = P\{\sigma \leq t\}$. После окончания восстановительной работы прибор переходит в режим ожидания заявки. Заявки, поступающие в систему во время восстановления прибора, теряются. Предполагается, что СВ α, β, γ и σ независимы, имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ и конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ и $M\sigma$ соответственно.

Целью работы является построение полумарковской модели функционирования описанной выше системы обслуживания и нахождение ее стационарных характеристик: финальных вероятностей и средних времен пребывания в состояниях ожидания и обслуживания заявки, а также восстановления обслуживающего прибора.

2. Построение полумарковской модели

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [7]. Обслуживающий прибор может находиться в следующих физических состояниях:

0 — прибор в работоспособном состоянии и ожидает заявку;

1 — прибор в работоспособном состоянии и обслуживает заявку;

2 — прибор восстанавливается.

Расширим фазовое пространство физических состояний системы до фазового пространства полумарковских состояний, добавляя к кодам физических состояний координаты, обеспечивающие марковское свойство фазовых состояний в моменты их изменений. В итоге фазовое пространство полумарковских состояний системы имеет вид:

$$E = \{21, 210u, 21xu, 22x0, 32x, 10x0, 10xu; x > 0, u > 0\}.$$

Расшифруем коды состояний системы:

21 — в систему поступила заявка, начинается ее обслуживание; наработка прибора отсутствует;

210u — поступившая в систему заявка начала обслуживаться; величина наработки прибора до отказа равна u;

21xu — поступившая в систему заявка теряется, так как прибор занят обслуживанием, до конца которого осталось время x; величина наработки прибора до отказа равна u;

22x0 — поступившая в систему заявка теряется по причине восстановления прибора, до окончания которого осталось время x;

32x — наработка прибора достигла критического уровня, произошел отказ прибора, и началось его восстановление; до поступления следующей заявки осталось время x;

10x0 — восстановление прибора закончено; до поступления следующей заявки осталось время x;

10xu — обслуживание заявки закончено, до поступления следующей заявки осталось время x; величина наработки прибора до отказа равна u.

Временнáя диаграмма функционирования системы изображена на рис. 1, а граф ее переходов — на рис. 2.

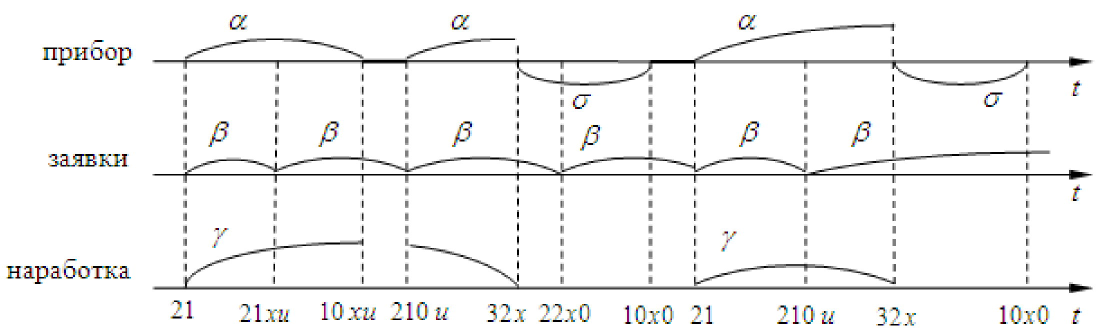

Рис. 1. Временнáя диаграмма функционирования системы.

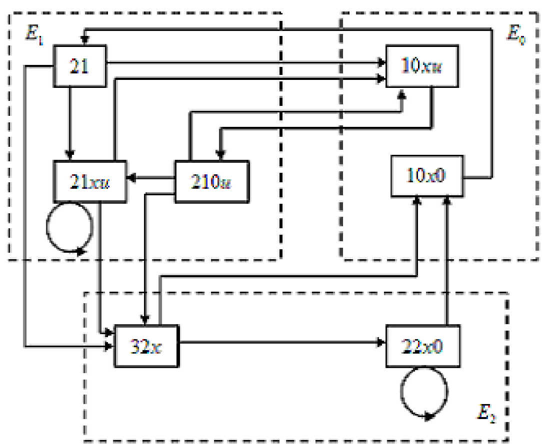

Рис. 2. Граф переходов системы.

Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\theta_{21} = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma,\ \theta_{210u} = \alpha \wedge \beta \wedge u,\ \theta_{21xu} = \beta \wedge x \wedge u,\ \theta_{22x0} = \beta \wedge x,$$

$$\theta_{32x} = \sigma \wedge x,\ \theta_{10x0} = \theta_{10x0} = x,$$

где $\wedge$ — знак минимума.

Опишем случайные события переходов. События переходов из состояния 210u иллюстрируются на рис. 3:

$$\begin{aligned} &\{210u \to 10, \beta - \alpha, u - \alpha\} = \{\alpha < \beta \wedge u\}, \\ &\{210u \to 21, \alpha - \beta, u - \beta\} = \{\beta < \alpha \wedge u\}, \\ &\{210u \to 32, \beta - u\} = \{u < \alpha \wedge \beta\}. \end{aligned} \tag{1}$$

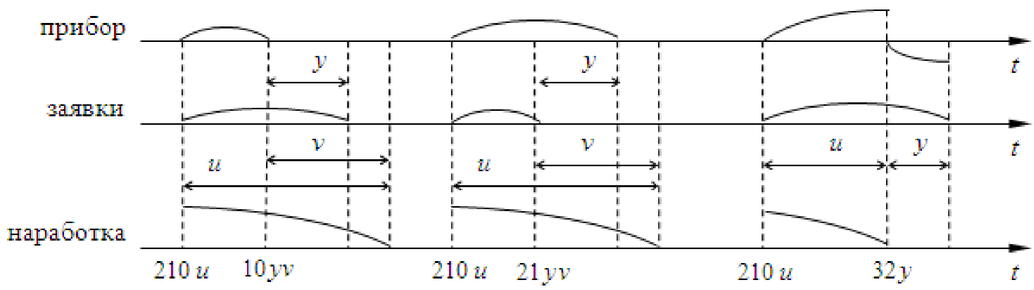

Рис. 3. События переходов из состояния 210u

Из соотношений (1) определяем плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из состояния 210u:

$$p_{210u}^{10dyd\nu} = P\{\beta - \alpha \in dy, u - \alpha \in d\nu\} = f(u-\nu)g(u-\nu+y)dyd\nu,\ 0 < \nu < u,\ y > 0;$$

$$p_{210u}^{21dyd\nu} = P\{\alpha - \beta \in dy, u - \beta \in d\nu\} = g(u-\nu)f(u-\nu+y)dyd\nu,\ 0 < \nu < u,\ y > 0;$$

$$p_{210u}^{32dy} = P\{\beta - u \in dy, u < \alpha\} = g(u+y)\overline{F}(u)dy,\ y > 0.$$

Аналогично вычисляются вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из других состояний системы:

$$p_{21}^{21dxdu} = P\{\alpha - \beta \in dx, \gamma - \beta \in du\} = \int_0^\infty g(t)f(t+x)\phi(t+u)\, dtdxdu,\ x > 0,\ u > 0;$$

$$p_{21}^{10dxdu} = P\{\beta-\alpha \in dx, \gamma-\alpha \in du\} = \int\limits_0^\infty f(t)g(t+x)\phi(t+u)\,dtdxdu,\ x>0,\ u>0;$$

$$p_{21}^{32dx} = P\{\beta-\gamma \in dx, \alpha>\gamma\} = \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)g(t+x)\,dtdx,\ x>0;$$

$$p_{21xu}^{21dy,u-x+dy} = P\{x-\beta \in dy\} = g(x-y)dy,\ 0<y<x,\ x<u;$$

$$p_{21xu}^{21x-u+d\nu,d\nu} = P\{u-\beta \in d\nu\} = g(u-\nu)d\nu,\ 0<\nu<u,\ u<x;$$

$$p_{21xu}^{10dy,u-x} = P\{\beta-x \in dy\} = g(x+y)dy,\ y>0,\ <u;$$

$$p_{21xu}^{32dy} = P\{\beta-u \in dy\} = g(u+y)dy,\ y>0,\ u<x;\ P_{10x0}^{21}=1;\ P_{10xu}^{210u}=1;$$

$$p_{22x0}^{22dy,0} = P\{x-\beta \in dy\} = g(x-y)dy,\ 0<y<x;$$

$$p_{22x0}^{10dy,0} = P\{\beta-x \in dy\} = g(x+y)dy,\ y>0;$$

$$p_{32x}^{22dy,0} = P\{\sigma-x \in dy\} = \psi(x+y)dy,\ y>0;$$

$$p_{32x}^{10dy,0} = P\{x-\sigma \in dy\} = \psi(x-y)dy,\ 0<y<x.$$

3. Нахождение стационарного распределения вложенной цепи Маркова

Обозначим через ρ_{21} значение стационарного распределения для состояния 21, а $\rho(210u), \rho(21xu), \rho(32x), \rho(22x0), \rho(10x0)$ и $\rho(10xu)$ — плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова для состояний $210u, 21xu, 32x, 22x0, 10x0$ и $10xu$ соответственно. Используя плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова, составим для них систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases}
\rho(21xu)=\int\limits_0^\infty g(t)\rho(21,t+x,t+u)dt+\int\limits_0^\infty g(t)f(t+x)\rho(210,t+u)dt+\rho_{21}\int\limits_0^\infty g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt,\\
\rho(10xu)=\int\limits_0^\infty g(t+x)\rho(21t,t+u)dt+\int\limits_0^\infty f(t)g(t+x)\rho(210,t+u)dt+\rho_{21}\int\limits_0^\infty g(t+x)f(t)\phi(t+u)dt,\\
\rho(210u)=\int\limits_0^\infty \rho(10tu)\,dt,\\
\rho(32x)=\int\limits_0^\infty g(t+x)\,dt\int\limits_t^\infty \rho(21st)\,ds+\int\limits_0^\infty \overline{F}(t)g(t+x)\rho(210t)\,dt+\rho_{21}\int\limits_0^\infty \overline{F}(t)g(t+x)\phi(t)\,dt,\\
\rho(22x0)=\int\limits_0^\infty g(t)\rho(22,t+x,0)\,dt+\int\limits_0^\infty \psi(t+x)\rho(32t)\,dt,\\
\rho(10x0)=\int\limits_0^\infty g(t+x)\rho(22t0)\,dt+\int\limits_0^\infty \psi(t)\rho(32,t+x)\,dt,\\
\rho_{21}=\int\limits_0^\infty \rho(10t0)\,dt,\\
\rho_{21}+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty[\rho(21xu)+\rho(10xu)]\,dudx+\int\limits_0^\infty[\rho(22x0)+\rho(32x)+\rho(10x0)]\,dx+\int\limits_0^\infty \rho(210u)du=1.
\end{cases} \quad (2)$$

Пусть $L_1^1(R_+^2)$ и $L_1^1(R_+)$ — весовые пространства функций с конечными нормами

$$\|\varphi(x,u)\|_{L_1^1(R_+^2)}=\int_0^\infty\int_0^\infty(1+x)(1+u)|\phi(x,u)|\,dudx;\ \ \|\varphi(x)\|_{L_1^1(R_+)}=\int_0^\infty(1+x)|\phi(x)|\,dx.$$

Решение системы уравнений будем искать в пространствах: $\rho(21xu)$, $\rho(10xu)\in L_1^1(R_+^2)$, $\rho(32x)$, $\rho(22x0)$, $\rho(10x0)\in L_1^1(R_+)$. Нам понадобятся следующие понятия теории восстановления [8]:

- $h_g(t)=\sum_{n=1}^\infty g^{*(n)}(t)$ и $h_f(t)=\sum_{n=1}^\infty f^{*(n)}(t)$ — плотности функций восстановления $H_g(t)$ и $H_f(t)$ рекуррентных потоков, порожденных СВ β и α соответственно;
- $v_g(t,x)=g(t{+}x){+}\int_0^t g(t{+}x{-}s)h_g(s)\,ds$ — плотность прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного СВ β;
- плотность распределения вероятностей $\kappa(x)$ СВ — времени между началом восстановления прибора и моментом поступления ближайшей заявки в систему, определяемая соотношением

$$\kappa(x)=\int_0^\infty\overline{F}(t)v_g(t,x)\phi(t)\,dt+\int_0^\infty h_f(t)\,dt\int_0^\infty\overline{F}(y)v_g(y,x)\phi(t{+}y)\,dy;$$

- $H_g^\kappa(t)$ — запаздывающий процесс восстановления, порожденный функциями $K(t)=\int_0^t\kappa(x)\,dx$ и $G(t)$; $h_g^\kappa=\kappa(t)+\int_0^t h_g(t-s)\kappa(s)\,ds$ — плотность этого процесса восстановления.

Теорема. *Если время обслуживания заявки α имеет конечные математическое ожидание $M\alpha$ и дисперсию $D\alpha$, то стационарное распределение вложенной цепи Маркова определяется плотностью вероятностей*

$$\rho(210u)=\rho_{21}\int_0^\infty h_f(t)\phi(t+u)\,dt,$$

$$\rho(21xu)=\rho_{21}\int_0^\infty h_g(t)f(t{+}x)\phi(t{+}u)\,dt{+}\rho_{21}\int_0^\infty h_g(t)f(t{+}x)\,dt\int_0^\infty h_f(s)\phi(s{+}t{+}u)\,ds,$$

$$\rho(32x)=\rho_{21}\kappa(x),\ \ \rho(22x0)=\rho_{21}\int_0^\infty h_g^\kappa(t)\psi(t+x)\,dt,$$

$$\rho(10xu)=\rho_{21}\int_0^\infty f(t)v_g(t,x)\phi(t+u)\,dt{+}\rho_{21}\int_0^\infty h_f(t)\,dt\int_0^\infty f(y)v_g(y,x)\phi(y{+}t{+}u)\,dy,$$

$$\rho(10x0)=\rho_{21}\int_0^\infty\psi(t)\kappa(t{+}x)\,dt{+}\rho_{21}\int_0^\infty v_g(t,x)\,dt\int_0^\infty\psi(t{+}y)\kappa(y)\,dy,$$

где

$$\rho_{21} = [2\int_0^\infty \phi(t)\hat{H}_f(t)\,dt + \int_0^\infty \psi(t)\hat{H}_g^\kappa\,dt + \int_0^\infty h_g(t)\overline{F}(t)\,dt \int_0^\infty \phi(s+t)\hat{H}_f(s)\,ds]^{-1},$$

$$\hat{H}_f(t) = 1 + H_f(t),\;\; \hat{H}_g^\kappa(t) = 1 + H_g^\kappa(t).$$

Доказательство. Исключая из первых трех уравнений системы (2) функцию $\rho(10xu)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho(21xu) = \int_0^\infty g(t)\rho(21, t+x, t+u)dt + \int_0^\infty g(t)f(t+x)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21}\int_0^\infty g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt, \\ \rho(210u) = \int_0^\infty \overline{G}(t)\rho(21t, t+u)dt + \int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21}\int_0^\infty \overline{G}(t)f(t)\phi(t+u)dt. \end{cases} \tag{3}$$

Разрешим первое уравнение последней системы относительно функции $\rho(21xu)$. Для этого проитерируем уравнение n раз и в полученном равенстве перейдем к пределу при $n \to \infty$ по норме пространства $L_1^1(R_+^2)$. Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем соотношение

$$\rho(21xu) = \int_0^\infty h_g(t)f(t+x)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21}\int_0^\infty h_g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt.$$

Подставим полученное выражение для функции $\rho(21xu)$ во второе уравнение системы (3); после упрощения оно принимает вид

$$\rho(210u) = \int_0^\infty f(t)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21}\int_0^\infty f(t)\phi(t+u)dt.$$

Из последнего уравнения находим $\rho(210u)$ [9]

$$\rho(210u) = \rho_{21}\int_0^\infty h_f(t)\phi(t+u)dt, \tag{4}$$

тогда

$$\rho(21xu) = \rho_{21}\int_0^\infty h_g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt + \rho_{21}\int_0^\infty h_g(t)f(t+x)dt\int_0^\infty h_f(s)\phi(s+t+u)dt. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в уравнения системы (3), нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы. Постоянная ρ_{21} находится из условия нормировки. □

4. Нахождение стационарных характеристик системы

Разобьем фазовое пространство состояний E на непересекающиеся подмножества состояний, соответствующие различным физическим состояниям прибора: $E_0 = \{10x0, 10xu\}$ — прибор находится в состоянии ожидания заявки; $E_1 = \{21, 210u, 21xu\}$ — прибором проводится обслуживание заявок;

$E_2 = \{32x, 22x0\}$ — проводится восстановление обслуживающего прибора. Обозначим переходные вероятности полумарковского процесса $\xi(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t, e, E_i) = P\{\xi(t) \in E_i/\xi(0) = e\},\ e \in E,\ i = \overline{0,2}.$$

Известно, что предельные переходные вероятности определяются соотношениями из [7]

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, e, E_i) = \int\limits_{E_i} m(e)\rho(de)[\int\limits_{E} m(e)\rho(de)]^{-1},\ i = \overline{0,2}, \qquad (6)$$

где $m(e)$ — среднее время пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в состоянии $e \in E$. Для рассматриваемой системы средние времена пребывания в состояниях определяются формулами:

$$M\theta_{10x0} = x,\ M\theta_{10xu} = x,\ M\theta_{32x} = \int\limits_0^x \overline{\Psi}(t)\,dt,\ M\theta_{22x0} = \int\limits_0^x \overline{G}(t)\,dt,$$

$$M\theta_{21} = \int\limits_0^x \overline{F}(t)\overline{G}(t)\overline{\Phi}(t)\,dt,\ M\theta_{21xu} = \int\limits_0^{x\wedge u} \overline{G}(t)\,dt,\ M\theta_{210u} = \int\limits_0^u \overline{G}(t)\overline{F}(t)\,dt.$$

С учетом найденного стационарного распределения интегралы в (6) приводятся к виду:

$$\int\limits_{E_0} m(e)\rho(de) = \rho_{21}M\beta\left(\int\limits_0^\infty H_g^\kappa(t)\psi(t)\,dt + \int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt + \int\limits_0^\infty h_g(t)\overline{F}(t)\,dt\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(y)\phi(t+y)\,dy\right) -$$

$$-\rho_{21}M\gamma - \rho_{21}M\sigma,\ \int\limits_{E_1} m(e)\rho(de) = \rho_{21}M\gamma,\ \int\limits_{E_2} m(e)\rho(de) = \rho_{21}M\sigma,$$

$$\int\limits_{E} m(e)\rho(de) = \rho_{21}M\beta\left(\int\limits_0^\infty H_g^\kappa(t)\psi(t)\,dt + \int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt + \int\limits_0^\infty h_g(t)\overline{F}(t)\,dt\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(y)\phi(t+y)\,dy\right).$$

Выясним вероятностный смысл слагаемых в правых частях последних соотношений. Для этого заметим, что полумарковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой системы, является регенерирующим. Моментами регенерации, в частности, являются моменты поступления заявки в свободную систему (состояние 21). Несложно показать, что $M\zeta = \int\limits_0^\infty H_g^\kappa(t)\psi(t)\,dt$ — среднее число потерянных заявок за период регенерации по причине ремонта обслуживающего прибора; $M\nu = \int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt$ — среднее число заявок, принятых к обслуживанию за период регенерации; $M\delta = \int\limits_0^\infty h_g(t)\overline{F}(t)\,dt\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(y)\phi(t+y)\,dy$ — среднее число потерянных заявок за период регенерации по причине занятости обслуживающего прибора.

В терминах введенных обозначений финальные вероятности пребывания прибора в подмножествах состояний E_0, E_1, E_2 равны соответственно

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} \Phi(t, e, E_0) = 1 - \frac{M\gamma + M\sigma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)},$$

$$p_1 = \lim_{t\to\infty} \Phi(t, e, E_1) = \frac{M\gamma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)}, \tag{7}$$

$$p_2 = \lim_{t\to\infty} \Phi(t, e, E_2) = \frac{M\sigma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)}.$$

Стационарные времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i определим из соотношений [7]

$$T(E_i) = \int\limits_{E_i} m(e)\rho(de)[\int\limits_{E\setminus E_i} \rho(de)P(e, E_i)]^{-1},\ i = \overline{0,2} \tag{8}$$

Учитывая уравнения системы (2) и вид стационарного распределения, интегралы в знаменателях дробей формул (8) преобразуются к виду:

$$\int\limits_{E\setminus E_0} \rho(de)P(e, E_0) = \int\limits_{E\setminus E_1} \rho(de)P(e, E_1) = \rho_{21} \int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\, dt,\ \int\limits_{E\setminus E_2} \rho(de)P(e, E_2) = \rho_{21}.$$

Следовательно, стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний $E_i,\ i = \overline{0,2}$, определяются формулами

$$T(E_0) = \frac{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta) - M\gamma - M\sigma}{M\nu},\ \ T(E_1) = \frac{M\gamma}{M\nu},\ \ T(E_2) = M\sigma. \tag{9}$$

Отметим, что в случае абсолютно надежной системы ($M\gamma \to \infty$) найденные характеристики принимают известный вид [10]. Используя полученные результаты, выпишем стационарные характеристики частных систем обслуживания $M/M/1/0$, $M/G/1/0$ и $GI/M/1/0$.

Система $M/M/1/0$. В случае, если

$$g(t) = \mu e^{-\mu t},\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \phi(t) = \eta e^{-\eta t}\ \psi(t) = \varepsilon e^{-\varepsilon t},\ t \geq 0,$$

формулы (7), (9) принимают вид

$$p_0 = \frac{1 + \frac{\lambda}{\eta}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}},\ \ p_1 = \frac{\frac{\mu}{\eta}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}},\ \ p_2 = \frac{\frac{\mu}{\varepsilon}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}},$$

$$T(E_0) = \tfrac{1}{\mu},\ \ T(E_1) = \tfrac{1}{\eta+\lambda},\ \ T(E_2) = \tfrac{1}{\varepsilon},$$

Система $M/G/1/0$. Если $g(t) = \mu e^{-\mu t},\ t \geq 0$, а СВ α, γ и σ имеют распределения общего вида, то характеристики определяются выражениями:

$$p_0 = 1 - \frac{M\gamma + M\sigma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt},\ p_1 = \frac{M\gamma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt},$$

$$p_2 = 1 - \frac{M\sigma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt},$$

$$T(E_0) = \frac{1}{\mu},\ T(E_1) = \frac{M\gamma}{\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t)\,dt},\ T(E_2) = M\sigma.$$

Система $GI/M/1/0$. Входящий поток заявок порождается СВ β с плотностью $g(t)$ общего вида, а плотности распределений остальных СВ:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ \phi(t) = \eta e^{-\eta t},\ \psi(t) = \varepsilon e^{-\varepsilon t}, t \geq 0.$$

Стационарные характеристики системы определяются соотношениями:

$$p_0 = 1 - \frac{(\varepsilon+\eta)(\lambda+\eta-\varepsilon)[1-\tilde{g}(\varepsilon)][1-\tilde{g}(\lambda+\eta)]}{\varepsilon(\lambda+\eta)M\beta[\eta\,(1-\tilde{g}(\lambda+\eta)) + (\lambda-\varepsilon)\,(1-\tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$p_1 = \frac{(\lambda+\eta-\varepsilon)[1-\tilde{g}(\varepsilon)][1-\tilde{g}(\lambda+\eta)]}{(\lambda+\eta)M\beta[\eta\,(1-\tilde{g}(\lambda+\eta)) + (\lambda-\varepsilon)\,(1-\tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$p_2 = \frac{\eta(\lambda+\eta-\varepsilon)[1-\tilde{g}(\varepsilon)][1-\tilde{g}(\lambda+\eta)]}{\varepsilon(\lambda+\eta)M\beta(\eta\,(1-\tilde{g}(\lambda+\eta)) + (\lambda-\varepsilon)\,(1-\tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$T(E_0) = M\beta\frac{\eta\,(1-\tilde{g}(\lambda+\eta)) + (\lambda-\varepsilon)\,(1-\tilde{g}(\varepsilon))}{(\lambda+\eta-\varepsilon)[1-\tilde{g}(\varepsilon)][1-\tilde{g}(\lambda+\eta)]} - \frac{\eta+\varepsilon}{\varepsilon(\eta+\lambda)},$$

$$T(E_1) = \frac{1}{\lambda+\eta},\ T(E_2) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Здесь через $\tilde{g}(\cdot)$ обозначено изображение по Лапласу соответствующей функции-оригинала $g(t) : \tilde{g}(z) = \int\limits_0^\infty g(t)e^{-zt}\,dt$.

Заключение

С помощью аппарата полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний построена математическая модель функционирования однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным обслуживающим прибором в предположении, что все случайные величины, фигурирующие в задаче, имеют распределения общего вида. В явном виде найдены такие стационарные характеристики системы, как финальные вероятности пребывания системы в состояниях ожидания и обслуживания заявок, в состоянии ремонта прибора; а также средние стационарные времена пребывания системы в этих состояниях.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В. Про одне узагальнення формул Ерланга /Б.В. Гнеденко // Докл. АН УССР. — 1959, №4. — С. 347–360.
2. Марьянович Т. П. Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором / Т.П. Марьянович // Украинский математический журнал. — Том XIV — №4, С. 417–422.
3. Марьянович Т. П. Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться / Т. П. Марьянович // Украинский математический журнал. — Том XII — № 3, С. 279–286.
4. *W. Gray* A Vacation Queueing Model with Service Breakdowns / Gray W., Scott M., Wang P. // Applied Math. Modeling. — 2000. — Vol. 24, P. 391–400.
5. Емельянов Г. В. Системы массового обслуживания с приборами, которые могут выходить из строя и восстанавливаться / Г. В. Емельянов // Проблемы передачи информации. — 1967. — Том 3 — № 3, С. 59–63.
6. Коваленко А. И. Исследование надежности однолинейной системы с потерями требований / А. И. Коваленко, Б. Д. Марянин, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — № 2, С. 89–101.
7. Королюк В. С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К.: Наук. Думка, 1982. — 236 с.
8. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
9. Обжерин Ю. Е. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания / Ю. Е. Обжерин, А. И. Песчанский // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5, С. 51–62.
10. Корлат А. Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А. Н. Корлат, В. Н. Кузнецов, А. Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.

Статья поступила в редакцию 23.06.2012