УДК 371.68

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ОЦІНКУ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ, ЯК РОЗВ'ЯЗОК РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

© В. П. Марценюк, Н. М. Гандзюк

Тернопільський державний медичний університет імені. І. Я. Горбачевського
кафедра медичної інформатики
вул. Чехова, 3, м. Тернопіль, 46000, Україна
e-mail: *gandzyuk@tdmu.edu.te.ua*

Abstract. This article describes definition of exponential estimation of linear stationary system with delay solution by functional Liapunova-Krasovskogo.

Вступ

Для розв'язку $x(t)$ асимптотично стійких лінійних стаціонарних систем диференціальних рівнянь без запізнення

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), t \geq 0$$

з постійною матрицею A справедлива наступна двостороння нерівність Важевського [1, 2]

$$\sqrt{\frac{\lambda_{min}(H)}{\lambda_{max}(H)}}|x(0)| \exp\left\{-\frac{\lambda_{max}(C)t}{2\lambda_{min}(H)}\right\} \leq |x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}}|x(0)| \exp\left\{-\frac{\lambda_{min}(C)t}{2\lambda_{max}(H)}\right\} \quad (1)$$

Тут $|x(t)|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t), \lambda_{max}(\cdot), \lambda_{min}(\cdot)$ найбільші і найменші числа власних матриць, H — додатньо визначена матриця, що є розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$A^T(H) + HA = -C.$$

В роботах [3, 4, 6] отримано аналогічні оцінки для систем із запізненням. Розглядаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), t \geq 0 \\ x(t) = \varphi_{\text{поч}}(t), t \in [\sigma - \tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

Матриці A і B — сталі, запізнення $\tau > 0$. Нехай власні значенні матриці A мають від'ємні частини. В роботах [3, 4] дослідження проводилось за допомогою функцій Ляпунова квадратичного вигляду з використанням умови Разуміхіна. У роботі [6] дослідження проводилося за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського квадратичного типу:

$$V(\varphi) = \varphi^T(0)H\varphi(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \varphi^T(\theta)G\varphi(\theta)d\theta, \tag{3}$$

де симетрична матриця H така, що: $H > 0$ і $A^T(H) + HA = -D < 0$. Зауважимо, що в роботі [6] оцінка була побудована на основі розв'язку скалярного диференціального рівняння із запізненням. Уданій роботі розглядається побудова експоненціальної оцінки на основі розв'язку значно практичнішої порівняно із [6] різницевої нерівності.

1. Основна теорема

Якщо G — додатньо визначена матриця, то можна вказати деякі додатні константи ν і κ, що:

$$\nu|\varphi(0)|^2 \leq V(\varphi) \leq \kappa|\varphi|^2. \tag{4}$$

$$\frac{dV(\varphi)}{dt} = -\varphi^T(0)D\varphi(0) + 2\varphi^T(0)HB\varphi(-\tau) + \varphi^T(0)G\varphi(0) - \varphi^T(-\tau)G\varphi(-\tau)$$

Тобто $\frac{dV(\varphi)}{dt}$ є квадратичною формою відносно $2n$-вимірного вектору $(\varphi(0), \varphi(-\tau))$.

Введемо $2n \times 2n$ матрицю

$$\begin{bmatrix} D - G & (HB)^T \\ -HB & G \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Тоді можна записати $\frac{dV(\varphi)}{dt} = \frac{dV(\varphi(0), \varphi(-\tau))}{dt} = -(\varphi(0), \varphi(-\tau))C(\varphi(0), \varphi(-\tau))^T$. Потрібно вибрати матриці D, B, H, G так, щоб симетрична матриця C була додатно визначеною. Така задача при зроблених вище обмеженнях для D, H, G зводиться до знаходження оцінок для матриці B. Для випадку додатньо визначеної матриці C можна записати:

$$\frac{dV(\varphi)}{dt} \leq \lambda_{min}(C)|\varphi(0), \varphi(-\tau)|^2, \tag{6}$$

де $|\varphi(0), \varphi(-\tau)|$ — евклідова норма вектора $(\varphi(0), \varphi(-\tau))$ у просторі E^{2n}

Теорема 1. Нехай система (2) і функціонал Ляпунова-Красовського (3) такі, що матриця C:
$C = \begin{bmatrix} D-G & (HB)^T \\ -HB & G \end{bmatrix}$ додатньо визначена. Тоді існують константи $\nu > 0$ і $N > 1$ такі, що:

$$V(\varphi) \le V(\varphi_{\text{поч}})Ne^{-\nu(t-t_0)}, \;\; t \ge t_0 \ge \sigma + 3\tau. \tag{7}$$

Тут сталі N і ν визначаються залежно від величини запізнення τ. Позначимо

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{\lambda_{min}(H)}}{(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G))^{1/2}} \frac{\sqrt{c_0}}{\|A\| + \|B\|} = \tau_0(\tau) \tag{8}$$

Тоді у випадку, коли $\tau \le \tau_0$, то

$$\nu = -ln\frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{\lambda_{min}(C)\tau}{4(\lambda_{max}(H)+\tau\lambda_{min}(G))}}\right)}{2\tau}, \tag{9}$$

$$N = 1 + \frac{\lambda_{min}(C)\tau}{4(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{min}(G))}.$$

Якщо $\tau > \tau_0$, то

$$\nu = -\frac{-lnc_0}{2\tau}, N = \frac{1}{c_0}, \tag{10}$$

де $c_0(\tau) = c_0$ — додатній розв'язок рівняння

$$\frac{\lambda_{min}(C)}{4(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G))^{3/2}(\|A\| + \|B\|)}c_0^{3/2} + c_0 - 1 = 0. \tag{11}$$

Зауваження 1. Функціонал $V(\varphi)$ для конкретного розв'язку $x(t)$ рівняння (2) є функцією моменту часу, яку позначатимемо $V[t]$. Отже нерівність (7) можна переписати у вигляді

$$V[t] \le V[t_0]Ne^{-\nu(t-t_0)}, \;\; t \ge t_0 \ge \sigma + 3\tau. \tag{12}$$

Лема 1. Для будь-якого $t \ge \sigma + \tau$ існує $s \in [t-\tau, t]$: що $|x(s)| \ge M(t)$, де

$$M(t) = \left(\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)}\right)^{1/2}$$

Доведення. Припустимо протилежне. Тобто нехай існує момент $t \geq \sigma + \tau$, що для всіх $s \in [t-\tau, t]$

$$|x(s)| < \left(\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)}\right)^{1/2}, \quad s \in [t-\tau, t].$$

Звідси випливає заперечення:

$$V[t] = \varphi^T(0)H\varphi(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} \varphi^T(\theta)G\varphi(\theta)d\theta \leq \lambda_{max}(H)|\varphi(0)|^2 +$$

$$+ \lambda_{max}(G)\int\limits_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)|^2 d\theta < \lambda_{max}(H)\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)} +$$

$$+ \lambda_{max}(G)\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)}\tau = V[t].$$

□

Зауваження 2. Матриця C є додатньо визначеною тоді і тільки тоді, коли буде додатньо визначеною матриця Q [5].

Лема 2. Якщо $\frac{dV}{dt} \leq 0$ для всіх $t \geq 0$ то: $\left|\frac{dx}{dt}\right| \leq L(t)$, де $t \geq \sigma + \tau$ і $L(t) = (\|A\| + \|B\|)\left(\frac{V[t-\tau]}{\lambda_{min}(H)}\right)^{1/2}$.

Доведення. Оскільки $\frac{dV}{dt} \leq 0$ для всіх $t \geq 0$ то $V[t] \leq V[t-\tau]$, $t \geq \sigma + \tau$. Із (3) випливає, що:

$$\lambda_{min}(H)|x(t)|^2 \leq V[t]\lambda_{min}(H)|x(t-\tau)|^2 \leq V[t-\tau].$$

Тобто

$$|x(t)|^2 \leq \frac{V[t]}{\lambda_{min}(H)}|x(t-\tau)|^2 \leq \frac{V[t-\tau]}{\lambda_{min}(H)}.$$

Застосувавши ці відношення у систему (2) отримаємо:

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leq \|A\||x(t)| + \|B\||x(t-\tau)| \leq$$

$$\leq \|A\|\left((\frac{V[t]}{\lambda_{min}(H)}\right)^{1/2} + \|B\|\left(\frac{V[t-\tau]}{\lambda_{min}(H)}\right)^{1/2} \leq \frac{\|A\| + \|B\|}{\sqrt{\lambda_{min}(H)}}(V[t-\tau])^{1/2}.$$

□

Використавши леми 1 і 2, доведемо:

Лема 3. Для будь-якого $t \geq \sigma + 2\tau$ існує $s \in [t-\tau, t]$ таке, що відношення $|x(\omega)| \geq \frac{M(t)}{2}$ має місце для будь-якого $\omega \in I = \left[s - \frac{M(t)}{2L_1(t)}; s + \frac{M(t)}{2L_1(t)}\right] \cap [t-\tau, t]$, якщо $V[t-2\tau] > 0$. Тут $M(t)$ як і в лемі 1, а $L_1(t) = (a+b)\left(\frac{V[t-2\tau]}{\lambda_{min}(H)}\right)^{1/2}$.

Доведення. Знайдемо $s \in [t-\tau, t]$ таке як і в лемі 1, тоді $|x(s)| \geq M(t)$.
Запишемо тотожність

$$x(s) = x(\omega) - \int\limits_s^\omega \frac{dx(u)}{dt} du. \tag{13}$$

Тоді використавши (13) отримаємо

$$M(t) \leq |x(s)| \leq |x(\omega)| + \left| \int\limits_s^\omega \frac{dx(u)}{dt} du \right|. \tag{14}$$

Оскільки $L(t) \leq L_1(t)$ або $(L[t-\tau] \leq L_1[t-2\tau]$, то із леми 2 $\frac{|}{dx}dt| \leq L_1(t)$.

Тому продовжуючи (14):

$$M(t) \leq |x(\omega)| + L_1(t)\frac{M(t)}{2L_1(t)} = |x(\omega)| + \frac{M(t)}{2},$$

де $\omega \in I$. Звідси випливає що $|x(\omega)| \geq \dfrac{M(t)}{2}$. □

Введемо константи ρ, f, d

$$\rho = \frac{1}{(\lambda_{min}(H) + \tau\lambda_{max}(G))^{1/2}} \frac{\sqrt{\lambda_{min}(H)}}{\|A\| + \|B\|};$$

$$f = \frac{\lambda_{min}(C)}{8(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G))}\rho;$$

$$d = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{f}{\rho\tau}}, \ \tau \leq \tau_0 c_0, \ \tau < \tau_0, \end{cases}$$

де c_0 — додатній розв'язок рівняння $fc_0^{3/2} + c_0 - 1 = 0$ і $\tau_0 = \rho\sqrt{c_0}$. Використавши лему 3 доведемо:

Лема 4. Для будь-якого $t \geq \sigma + 3\tau$, $V[t] \leq V[t-2\tau]d$.

Доведення. Якщо $V[t-2\tau] = 0$ для деяких t, то в силу монотонного спадання $V[t] = 0$, і твердження справедливе для цього t. Якщо $V[t-2\tau] > 0$ то доведення здійснимо методом від супротивного. Нехай для цього t, $V[t] > V[t-2\tau]d$. Враховуючи цю нерівність, побудуємо оцінку для $\dfrac{M(t)}{L_1(t)}$:

$$\frac{M(t)}{L_1(t)} = \left(\frac{V[t]}{V[t-2\tau]}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\lambda_{min}(H)}}{(\lambda_{max}(H)+\tau\lambda_{max}(G))^{1/2}(\|A\|+\|B\|)} >$$

$$> \frac{1}{(\lambda_{max}(H)+\tau\lambda_{max}(G))^{1/2}} \frac{\sqrt{\lambda_{min}(H)}}{\|A\|+\|B\|} d^{1/2} \quad (15)$$

Проінтегруємо нерівність (6) на проміжку $[t-\tau,\ t]$. Отримаємо

$$V[t] \leq V[t-\tau] - \lambda_{min}(C) \int\limits_{t-\tau}^{t} |x(\omega), x(\omega-\tau)|^2 d\omega =$$

$$= V[t-\tau] - \lambda_{min}(C) \int\limits_{t-\tau}^{t} |x(\omega)|^2 d\omega - \lambda_{min}(C) \int\limits_{t-2\tau}^{t-\tau} |x(\omega)|^2 d\omega.$$

Для оцінки інтегралів $\int_{t-\tau}^{t} |x(\omega)|^2 d\omega$ і $\int_{t-2\tau}^{t-\tau} |x(\omega)|^2 d\omega$ врахуємо лему 3, яка говорить, що для будь-якого $t \geq \sigma + 2\tau$ можна вибрати момент $s \in [t-\tau, t]$ такий, що $|x(\omega)| \geq \frac{M(t)}{2}$ при $\omega \in I \subset [t-\tau,\ t]$. Вибравши такий момент s і використавши вище записану нерівність, отримаємо:

$$V[t] \leq V[t-\tau] - \lambda_{min}(C) \left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 min\left(\frac{r}{2}, \frac{M(t)}{2L_1(t)}\right) -$$

$$- \lambda_{min}(C) \left(\frac{M(t-\tau)}{2}\right)^2 min\left(\frac{r}{2}, \frac{M(t-\tau)}{2L_1(t-\tau)}\right) \quad (16)$$

Тут використано той факт, що довжина проміжку $I = I(s)$ буде завжди більшою за $min\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{M(t)}{2L_1(t)}\right)$. Якщо ж використати оцінку (15), то вона завжди буде більшою за $min\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{\rho\sqrt{d}}{2}\right)$. Про функцію $M(t)$ можна сказати, що вона монотонно спадна (як і $V[t]$). Тому $M(t-\tau) \geq M(t)$. Отже можна переписати нерівність (16):

$$V[t] \le V[t-\tau] - \lambda_{min}(C)\left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) - \lambda_{min}(C)\left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) =$$
$$V[t-\tau] - \lambda_{min}(C)\frac{(M(t))^2}{4} min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) \quad (17)$$

Далі розглянемо два випадки.

Нехай $\tau_0 < \tau$. Тоді справедлива нерівність $\frac{\rho\sqrt{d}}{2} = \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2} = \frac{\tau_0}{2} < \frac{\tau}{2}$. Отже $min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) = \frac{\rho\sqrt{d}}{2} = \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2}$.. Враховуючи (17) отримаємо

$$V[t] \le V[t-\tau] - \lambda_{min}(C)\frac{1}{4}\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)}\frac{\rho\sqrt{c_0}}{2} =$$
$$= V[t-\tau] - \frac{\lambda_{min}(C)}{8(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G))}\rho\sqrt{c_0}V[t]. \quad (18)$$

Тобто $V[t] \le V[t-\tau] - f\sqrt{c_0}V[t]$.

Звідси
$$V[t] \le V[t-\tau]\frac{1}{1 + fc_0^{1/2}} = V[t-\tau]c_0, \quad (19)$$

оскільки $fc_0^{3/2} + c_0 - 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{1 + fc_0^{1/2}} = c_0$.

Нерівність (19) є запереченням нашого припущення про те, що $V[t] > V[t-2\tau]d$.

Нехай $\tau_0 \le \tau$. Тоді справедливий ряд нерівностей

$$\tau \le \tau_0 = \rho\sqrt{c_0} = \rho\frac{1}{\sqrt{1 + fc_0^{1/2}}} = \rho\frac{1}{\sqrt{1 + f\frac{\tau_0}{\rho}}} < \rho\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f}{\rho}\tau}} = \rho\sqrt{d}.$$

Тобто (19) можна записати наступним чином:

$$V[t] \le V[t-\tau] - \lambda_{min}(C)\left(\frac{M(t)}{2}\right)^2\frac{r}{2} = V[t-\tau] - \lambda_{min}(C)\frac{1}{4}\frac{V[t]}{\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G)}\frac{r}{2} =$$
$$= v[t-\tau] - \frac{\lambda_{min}(C)}{8(\lambda_{max}(H) + \tau\lambda_{max}(G))}\tau V[t] = V[t-\tau] - \frac{f}{\rho}\tau V[t]. \quad (20)$$

З (19) випливає, що

$$V[t] \leq V[t-\tau]\frac{1}{1+\frac{f}{\rho}\tau} = V[t-\tau]d. \tag{21}$$

Нерівність (20) є запереченням нашого припущення. Отже, в двох випадках $\tau \leq \tau_0$ і $\tau_0 < \tau$ ми прийшли до суперечності. Тобто припущення не вірне.

□

Доведення теореми. Виберемо числа ν і N таким чином:

$$\nu = -\frac{\ln d}{2\tau}, N = \frac{1}{d}.$$

Нехай $t \geq t_0 \geq \sigma + 3\tau$ — будь-який момент часу і k — додатньо ціле або ж нуль таке, що:

$$t \in [t_0 + 2k\tau; t_0 + 2(k+1)\tau]$$

Тоді використавши нерівність із леми 4, отримаємо:

$$V[t] < V[t-2\tau]d \leq V[t-4\tau]d^2 \leq \cdots \leq V[t-2k\tau]d^k \leq$$
$$\leq V[t_0]\frac{1}{d}d^{k+1} \leq V[t_0]Ne^{-\nu 2\tau(k+1)} \leq V[t_0]Ne^{-\nu(t-t_0)}. \tag{22}$$

Теорему доведено. □

Висновки

В даній статті отримано експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського. Оцінка, залежна від величини запізнення, шукається в результаті розв'язку різницевої нерівності.

Список літератури

1. Валеев Б. Н. Построение функций Ляпунова / Б. Н. Валеев, А. П. Финин. — К.: Наукова думка, 1978.
2. Меркин Л. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Л. Р. Меркин. — М.: Наука, 1971.
3. Хусаинов Д. Я. Об одном методе построения функционалов Ляпунова-Красовского для линейных систем с запаздывающим аргументом / Д. Я. Хусаинов // Украинский математический журнал, Т.41, №3, 1989.
4. Хусаинов Д. Я. Оценки решений линейных систем с запаздыванием / Д. Я. Хусаинов // Сибирский математический журнал, Т.32, №5, 1991.
5. Хусаинов Д. Я. Оптимизационный метод исследования устойчивости линейних систем с запаздыванием / Д. Я. Хусаинов, В. П. Марценюк // Кибернетика и системный анализ, №4, 1996.
6. Хусаинов Д. Я. Двухсторонние оценки решений линейных систем с запаздыванием Д. Я. Хусаинов, В. П. Марценюк // Доклади НАН Украины, №8, 1996.

Статья поступила в редакцию 23.04.2012