УДК 517.929.4

МАКСИМАЛЬНІ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ МНОЖИНИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ МНОЖИННИХ СИСТЕМ З БАГАТОЗНАЧНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СКЛАДОВОЮ

© Р. П. Королік, В. В. Пічкур

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
факультет кібернетики
вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, Україна
e-mail: *vpichkur@gmail.com, korolik@email.ua*

Abstract. In this paper the properties of optimal sets of initial conditions in the problem of practical stability of discrete set systems are considered. In the case of linear dynamic components Minkowski function, inverse Minkowski function, and support function of these sets are obtained.

Вступ

Дискретні системи мають суттєве прикладне значення в зв'язку з тим, що ряд економічних, біологічних, соціальних та технічних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, різницеві співвідношення застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. Тому є актуальним дослідження якісних характеристик дискретних систем. Так, в роботах [7, 9, 10, 11] висвітлюються методи теорії стійкості, в [1, 3] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем, в [4] одержано властивості максимальних множин практичної стійкості множинних дискретних систем.

Якщо на праву частину системи діють постійні збурення, то дискретні моделі набувають форми включень. Дискретні включення застосовуються при апроксимації диференціальних включень та рівнянь Хукухари дискретними включеннями, оцінки точності таких наближень [8, 6]. Неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов досліджено в [5].

В роботі досліджено властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних включень. У випадку лінійної динамічної складової отримана функція Мінковського та обернена функція таких множин. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

Ми будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^n$ — евклідовий n-вимірний простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, який породжує евклідову норму $\|\cdot\|$, $intA$, ∂A — сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset \mathbb{R}^n$ відповідно, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ — замкнена куля радіусу r з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, $comp(\mathbb{R}^n)$ — сукупність всіх непорожніх компактів з $\mathbb{R}^n$, $conv(\mathbb{R}^n)$ — сукупність всіх непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$, $[0,N]=\{0,1,\ldots,N\}$ — множина індексів, $A^\sigma = A+\sigma K_1(0)$ — σ-розширення множини $A\subset\mathbb{R}^n$, $\mathrm{c}(A,\psi)$ — опорна функція, $A\subset\mathbb{R}^n$, $\psi\in\mathbb{R}^n$.

1. Властивості максимальної за включенням множини

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1)\in f_k(x(k)), \tag{1}$$

$$B_k:\mathbb{R}^m\to comp(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

де $x\in\mathbb{R}^m$, $f_k: D\to D\subset\mathbb{R}^m$ — неперервне в області D багатозначне відображення. Система (1), (2) називається дискретною множинною системою, при цьому (1) називається динамічною складовою, яка має форму дискретного включення, відображення (2) — множинною складовою множинної дискретної системи (1), (2) [4]. Позначимо $x(k,x_0)$ — розв'язок системи (1), який задовольняє початковій умові $x(0)=x_0$, $k\in[0,N]$. Множиною досяжності $X(k,x_0)$ дискретного включення (1) для $x(0)=x_0$ в момент $k\in[0,N]$ називається сукупність точок $x\in\mathbb{R}^m$ таких, що знайдеться розв'язок $x(k,x_0)$ дискретного включення (1), що $x(k)=x(k,x_0)$ [5].

Розв'язком (1), (2) називається багатозначне відображення

$$F:[0,N]\times D\to comp(\mathbb{R}^n)$$

таке, що його значення визначаються за правилом

$$F(k,x_0)=B_k(X(k,x_0)).$$

Тут $x(k)=x(k,x_0)$ — розв'язок системи (1), $k\in[0,N]$, $x_0\in D$.

Нехай $G_0\subset D$ — множина допустимих початкових станів, $\Phi(k)\in comp(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(k)\subset D$ — множина фазових обмежень, $B_k(0)\subset\Phi(k)$, $k\in[0,N]$, $f_k(0)=0$, $k\in[0,N-1]$.

Припустимо, що для системи (1), (2) виконується така умова: існують такі $r>0$ і $k\in[1,N]$, що справджується співвідношення

$$B_k(X(k,K_r(0)))/\Phi(k)\neq 0.$$

Означення 1. Система (1), (2) називається $\{G_0,\Phi(k),0,N\}$-сильно стійкою, якщо $B_k(x(k,x_0))\subset\Phi(k)$ для всіх розв'язків $x(k,x_0)$ включення (1), $x_0\in G_0$, $k\in[0,N]$.

Означення 2. Говорять, що сукупність $G_*\subset\Phi(0)$ є максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2) при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0,N]$, якщо система (1), (2) є $\{G_*,\Phi(k),0,N\}$- стійкою і $G_0\subseteq G_*$ для всіх множин $G_0\subseteq\Phi(0)$, для яких має місце $\{G_0,\Phi(k),0,N\}$- стійкість системи (1), (2).

Теорема 1. Множина G_* — компакт.

Доведення. Множина G_* — обмежена, оскільки $G_* \subset K_r(0)$. Покажемо замкненість G_*. Для цього зафіксуємо довільну послідовність $\{x_p\} \in G_*$, $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x_0$. Покажемо, що $x_0 \in G_*$. Для всіх розв'язків $x(k, x_0)$ включення (1), $k \in [0, N]$ має місце $B_k(X(k, x_p)) \subseteq \Phi(k)$, $p = 1, 2, ...,$ $k \in [0, N]$.

Зафіксуємо $k \in [0, N]$. Відображення $B_k(x)$– неперервне. Оскільки має місце неперервна залежність розв'язків (1) від початкових умов, тому за теоремою про суперпозицію [2, 5] відображення $z \mapsto B_k(X(k, z))$ є неперервним, $z \in D$. Зафіксуємо $k \in [0, N]$. З неперервності відображення $z \mapsto B_k(\mathrm{X}(k, z))$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер p_0 такий, що для всіх $p > p_0$ має місце включення

$$B_k(X(k, x_0)) \subseteq K_\varepsilon(B_k(\mathrm{X}(k, x_p))) \subseteq K_\varepsilon(\Phi(k)).$$

Звідси

$$B_k(X(k, x_0)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon(\Phi(k)) = \Phi(k).$$

Отже, $x_0 \in G_*$. Теорему доведено. □

Теорема 2. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то існує такий розв'язок $x\left(\bar{k}, x_0\right)$ включення (1) і $\bar{k} \in [0, N]$, для якого $\partial B_{\bar{k}}\left(X\left(\bar{k}, x_0\right)\right) \bigcap \partial\Phi\left(\bar{k}\right) \neq \emptyset$, при цьому для будь-якого розв'язку $x(k) = x(k, x_0)$ і $k \in [0, N]$ виконується $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$.

Доведення. Нехай $\partial B_k(X(k, x_0)) \bigcap \partial\Phi(k) = \emptyset$ для довільного $k \in [0, N]$ і справджується $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$. Це означає, що знайдеться $\varepsilon_i > 0$ для всіх $i = 0, 1, ..., N$ таке, що $B_i(\mathrm{X}(i, x_0))^{\varepsilon_i} \subset int\Phi(i)$. З неперервності відображення $z \mapsto B_k(X(k, z))$, $z \in D$ випливає, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що при $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справджується

$$B_i(\mathrm{X}(i, z_0)) \subset (B_i(\mathrm{X}(i, x_0)))^{\varepsilon_0},$$

де $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$ $i = 0, 1, ..., N$. Тому $B_i(\mathrm{X}(i, z_0)) \subset \Phi(i)$, $i = 0, 1, ..., N$, $z_0 \in K_\delta(x_0)$. Отже, $K_\delta(x_0) \subset G_*$. Це означає, що $x_0 \in intG_*$. А це суперечить умові теореми. Теорему доведено. □

Означення 3. Відображення $f_k : D \to comp(\mathbb{R}^n)$ називається відкритим, якщо з того, що $U \subseteq D$ — відкрита множина, випливає, що множина $f(U) = \bigcup_{x\in U} f(x)$ — відкрита.

Теорема 3. Нехай f_k, B_k — відкриті відображення, виконується включення $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1) та існує таке $\bar{k} \in [0, N]$ і знайдеться такий розв'язок $x\left(\bar{k}, x_0\right)$, що $\partial B_{\bar{k}}\left(X\left(\bar{k}, x_0\right)\right) \bigcap \partial\Phi\left(\bar{k}\right) \neq \emptyset$. Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Доведення. З умови теореми випливає, що $x_0 \in G_*$. Припустимо, що $x_0 \in intG_*$. Тоді існує таке $\delta > 0$, для якого $K_\delta(x_0) \subset G_*$. Оскільки f_kі B_k– відкриті відображення, то при деякому $\varepsilon_k > 0$ для $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справедливе таке співвідношення

$$B_k(\mathrm{X}(k, z_0)) \subset (B_k(\mathrm{X}(k, x_0)))^{\varepsilon_k} \subset \Phi(k),$$

$k = 0, 1, .., N$. Це означає $\partial B_k(X(k, x_0)) \bigcap \partial\Phi(k) = \emptyset$, $k \in [0, N]$. Прийшли до суперечності. Теорему доведено. □

Наслідок 1. Нехай f_k і B_k — відкриті відображення. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$ необхідно і достатньо, щоб для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1) $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та існував такий розв'язок $x(k, x_0)$, $k \in [0, N]$, що $\partial B_k(X(k, x_0)) \bigcap \partial\Phi(k) \neq \emptyset$.

Наслідок 2. Нехай f_k і B_k — відкриті відображення. Точка $x_0 \in intG_*$ тоді і тільки тоді, коли $B_k(X(k, x_0)) \subset int\Phi(k)$ для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1), $k \in [0, N]$.

2. Випадок лінійної динамічної складової

Розглянемо лінійну однорідну дискретну множинну систему

$$x(k+1) \in A(k)\, x(k) + U(k), \tag{3}$$

$$B_k : \mathbb{R}^m \to conv(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

де $A(k)$ — невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$, $0 \in intU(k)$, $k \in [0, N-1]$. Нехай $\Phi(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$ множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$. Запишемо множину досяжності системи (3) у вигляді

$$X(k, x_0) = \Theta(k)\, x_0 + \Omega(k),\ k \in [1, N],$$

де $\Theta(k) = A_{k-1}.....A_0$ — невироджена матриця, $\Theta(i, k) = A_{i-1}.....A_k$, $\Omega(k) = \sum_{i=1}^{k} \Theta(i, k)\, U(i-1)$, $k \in [1, N]$. Припустимо, що мають місце такі співвідношення

$$B_k(x) = \Xi(k)\, x + V(k),$$

де $\Xi(k)$ — матриця розмірності $m \times n$, $k \in [0, N]$, $V(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$B_k(X(k, x_0)) = \Xi(k)\,\Theta(k)\, x_0 + \Xi(k)\,\Omega(k) + V(k)$$

Опорна функція

$$c(B_k(X(k, x_0)), \psi) = \langle x_0, \Theta^*(k)\, \Xi^*(k)\, \psi\rangle +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i, k)\, \Xi^*(k)\, \psi) + c(V(k), \psi).$$

Має місце теорема.

Теорема 4. Якщо $\Phi(k) \in conv(\mathbb{R}^n)$, то $G_* \in conv(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Виберемо довільні точки $x_0, y_0 \in G_*$. Тоді

$$(\Xi(k)\Theta(k)x_0 + \Xi(k)\Omega(k) + V(k)) \subset \Phi(k),$$

$$(\Xi(k)\Theta(k)y_0 + \Xi(k)\Omega(k) + V(k)) \subset \Phi(k),\ k \in [0, N].$$

Оскільки множини $\Omega(k)$,$V(k)$ є опуклими, то при $\lambda \in [0,1]$ виконується

$$\lambda(\Xi(k)\Theta(k)x_0 + \Xi(k)\Omega(k) + V(k)) + (1-\lambda)(\Xi(k)\Theta(k)y_0 + \Xi(k)\Omega(k) + V(k)) =$$

$$= \lambda(\Xi(k)\Theta(k)x_0) + (1-\lambda)(\Xi(k)\Theta(k)y_0) +$$

$$+\lambda(\Xi(k)\Omega(k) + V(k)) + (1-\lambda)(\Xi(k)\Omega(k) + V(k)) =$$

$$= \Xi(k)\Theta(k)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) + \Xi(k)\Omega(k) + V(k) \subset \Phi(k), k \in [0, N].$$

Отже, точка $\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \in G_*$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 5. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$ необхідно і достатньо, щоб

$$\max_{k\in[0,N]}\max_{\psi\in S}\frac{\langle x_0, \Theta^*(k)\Xi^*(k)\psi\rangle}{c(\Phi(k),\psi) - \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i,k)\Xi^*(k)\psi) - c(V(k),\psi)} = 1$$

за умови $c(\Phi(k),\psi) - \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i,k)\Xi^*(k)\psi) - c(V(k),\psi) > 0$. Тут $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то $c(B_k(X(k,x_0)),\psi) \leq c(\Phi(k),\psi)$ для довільних $\psi \in S$, $k \in [0, N]$. Використовуючи наслідок 1 теореми 3, одержуємо, що існує $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$, для яких $c\left(B_{\bar{k}}\left(X\left(\bar{k}, x_0\right)\right), \xi\right) = c\left(\Phi\left(\bar{k}\right), \xi\right)$. Враховуючи властивості опорної функції [2], отримуємо, що при $\psi \in S$, $k \in [0, N]$ має місце нерівність

$$\langle x_0, \Theta^*(k)\Xi^*(k)\psi\rangle + \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i,k)\Xi^*(k)\psi) + c(V(k),\psi) \leq c(\Phi(k),\psi),$$

в якій досягається рівність при $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$. Оскільки

$$c(\Phi(k),\psi) - \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i,k)\Xi^*(k)\psi) - c(V(k),\psi) > 0, \psi \in S, k \in [0, N],$$

то звідси маємо

$$\frac{\langle x_0, \Theta^*(k)\Xi^*(k)\psi\rangle}{c(\Phi(k),\psi) - \sum_{i=1}^{k} c(U(i-1), \Theta^*(i,k)\Xi^*(k)\psi) - c(V(k),\psi)} \leq 1, \psi \in S, k \in [0, N].$$

Крім того,

$$\frac{\left\langle \xi_0, \Theta^*\left(\bar{k}\right)\Xi^*\left(\bar{k}\right)\psi\right\rangle}{c\left(\Phi\left(\bar{k}\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{\bar{k}} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,\bar{k}\right)\Xi^*\left(\bar{k}\right)\psi\right)-c\left(V\left(\bar{k}\right),\psi\right)}=1, \xi\in S, \bar{k}\in[0,N].$$

Достатність випливає з того, що при доведенні необхідності використовувались твердження, що мають необхідний і достатній характер. Теорему доведено. □

Теорема 6. Функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m_*\left(x_0\right)=\max_{k\in[0,N]}\max_{\psi\in S}\frac{\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle}{c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)-c\left(V\left(k\right),\psi\right)}, \tag{5}$$

де $c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)-c\left(V\left(k\right),\psi\right)>0$, $\psi\in S$, $k\in[0,N]$.

Доведення. За означенням функція Мінковського

$$m_*\left(x_0\right)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{x_0}{\lambda}\in G_*\right\}, x_0\in\mathbb{R}^m.$$

Якщо $\frac{x_0}{\lambda}\in G_*$, то $\mathrm{X}\left(k,\frac{x_0}{\lambda}\right)=\Theta\left(k\right)\frac{x_0}{\lambda}+\Omega\left(k\right)$ для всіх $k\in[0,N]$. З властивостей опорних функцій випливає

$$\frac{1}{\lambda}\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle+\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)+c\left(V\left(k\right),\psi\right)\leq c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)$$

для всіх $\psi\in S$ та $k\in[0,N]$. Тоді

$$\lambda\geq\frac{\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle}{c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)-c\left(V\left(k\right),\psi\right)}$$

для довільних $\psi\in S$, $k\in[0,N]$. Звідси за означенням функції Мінковського

$$m_*\left(x_0\right)=\max_{k\in[0,N]}\max_{\psi\in S}\frac{\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle}{c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)-c\left(V\left(k\right),\psi\right)}.$$

Теорему доведено. □

За властивостями функції Мінковського

$$G_*=\left\{x\in\mathbb{R}^m: m_*(x)\leq 1\right\}.$$

Теорема 7. Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$d_*\left(x_0\right)=\min_{k\in[0,N]}\min_{\psi\in S}\frac{c\left(\Phi\left(k\right),\psi\right)-\sum_{i=1}^{k} c\left(U\left(i-1\right),\Theta^*\left(i,k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right)-c\left(V\left(k\right),\psi\right)}{\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle} \tag{6}$$

за умови $\left\langle x_0, \Theta^*\left(k\right)\Xi^*\left(k\right)\psi\right\rangle>0$, $\psi\in S$, $k\in[0,N]$.

Доведення. За означенням оберненої функції Мінковського

$$d_*(x_0) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\}, x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Використовуючи доведення попередньої теореми та властивості опорних функцій маємо

$$\lambda \langle x_0, \Theta^*(k)\,\Xi^*(k)\,\psi\rangle + \sum_{i=1}^{k} c\left(U(i-1), \Theta^*(i,k)\,\Xi^*(k)\,\psi\right) + c\left(V(k), \psi\right) \le c\left(\Phi(k), \psi\right)$$

для всіх $\psi \in S$ та $k \in [0, N]$. Звідси

$$\lambda \le \frac{c\left(\Phi(k), \psi\right) - \sum_{i=1}^{k} c\left(U(i-1), \Theta^*(i,k)\,\Xi^*(k)\,\psi\right) - c\left(V(k), \psi\right)}{\langle x_0, \Theta^*(k)\,\Xi^*(k)\,\psi\rangle},$$

при умові $\langle g_k(\psi), \Theta(k)\,x_0\rangle > 0$, $\psi \in S$, $k \in [0, N]$. Остаточно отримаємо

$$d_*(x_0) = \min_{k\in[0,N]} \min_{\psi\in S} \frac{c\left(\Phi(k), \psi\right) - \sum_{i=1}^{k} c\left(U(i-1), \Theta^*(i,k)\,\Xi^*(k)\,\psi\right) - c\left(V(k), \psi\right)}{\langle x_0, \Theta^*(k)\,\Xi^*(k)\,\psi\rangle}.$$

Теорему доведено. □

За властивостями оберненої функції Мінковського

$$G_* = \bigcup_{e\in S} \{x = ke : k \in [0, d_*(e)]\}.$$

Розглянемо приклад. Знайдемо функцію Мінковського, обернену функцію Мінковського множини G_* для задачі практичної стійкості множинної дискретної системи вигляду

$$x(k+1) \in A(k)\,x(k) + K_{m(k)}(0),$$

$$B_k(x) = K_{p(k)}(x),$$

за умови, що фазові обмеження

$$\Phi(k) = K_{r(k)}(0), r(k) > 0, k \in [0, N].$$

З співвідношення (6) випливає, що у цьому випадку функція Мінковського має вигляд

$$m_*(x_0) = \max_{k\in[0,N],\psi\in S} \frac{\langle x_0, \Theta^*(k)\,\Xi^*(k)\,\psi\rangle}{r(k) - \sum_{i=1}^{k} m(i-1)\,\|\Theta^*(k,i)\,\Xi^*(k)\,\psi\| - n(k)}.$$

Обернена функція Мінковського згідно співвідношення (6) може бути записана так

$$d_*(x_0) = \min_{k\in[0,N],\psi\in S} \frac{r(k) - \sum_{i=1}^{k} m(i-1)\,\|\Theta^*(k,i)\,\Xi^*(k)\,\psi\| - n(k)}{\langle x_0, \Theta^*(k)\,\Xi^*(k)\,\psi\rangle}.$$

Висновки

В статті обґрунтовано компактність та властивості границі максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних включень. Для лінійної дискретної множинної системи доведено опуклість оптимальної множини початкових умов, одержано її функцію Мінковського та обернену функцію Мінковського.

Список літератури

1. Башняков А. Н. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы / А. Н. Башняков, В. В. Пичкур, И. В. Хитько // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 5–11.
2. Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений / В. И. Благодатских. — М:. Изд-во МГУ, 1979. — 88 с.
3. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. — К.: Наукова думка, 1985. — 304 с.
4. Королік Р. П. Про практичну стійкість дискретних множинних систем / Р. П. Королік, В. В. Пічкур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — Вип. 1. — С. 185–188.
5. Пічкур В. В. Про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов / В. В. Пічкур, М. С. Сасонкіна // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — № 1. — С. 73–80.
6. Плотников В. А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
7. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
8. Dontchev A. Difference Methods for Differential Inclusions: A Survey / A. Dontchev, F. Lempio // SIAM Review. — 1992. — Vol. 34, No. 2. — P. 263–294.
9. Galor O. Discrete Dynamical Systems / O. Galor. — Berlin: Springer, 2007. — 158 p.
10. Martynyuk A. A. Stability analysis of discrete systems / A. A. Martynyuk // International Applied Mechanics. — 2000. — Vol. 36, No. 7. — P. 3–34.
11. Michel A. Stability of dynamical systems / A. Michel, L. Hou, D. Liu. — Boston: Birkhäuser, 2008. — 515 p.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013