

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 3 (68) ' 2025

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:

- 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
- 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
- 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
- 1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
- 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
- 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2025, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А. , акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МУРАВНИК А. Б. , д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О. , проф., д. ф.-м. н.	МУРАТОВ М. А. , проф., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В. , проф., д. ф.-м. н.	ПАПКОВ С. О. , проф., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В. , проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П. , доц., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М. , проф., д. т. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М. , доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А. , проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б. , проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВИЧ В. Г. , проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С. , проф., д. ф.-м. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А. , проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В. , в. н. с., д. т. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н. , проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г. , доц., д. ф.-м. н.
КРАВЧЕНКО В. В. , проф., д. т. н.	ЧЕРНОВА Т. А. , доц., д. т. н.
КРАСНОПРОШИН В. В. , проф., д. т. н.	ЧИЛИН В. И. , проф., д. ф.-м. н.
МЕСТЕЦКИЙ Л. М. , проф., д. т. н.	ЯРОШЕНКО А. А. , проф., д. ф.-м. н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
GERMANCHUK M. S., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., доц., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**

АДРЕС УЧРЕДИТЕЛЯ, ИЗДАТЕЛЯ И РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007
Тел. гл. редактора: +7 (978) 291-10-84
Тел. редакции: +7 (978) 557-24-96, +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): a.n.soloviev@yandex.ru
e-mail (для переписки): tvim-article@mail.ru
сайт журнала: www.tvim.su

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Системный анализ, управление и обработка информации
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика и математическое моделирование

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO , Prof., Dr. Eng. Sc.	Igor POLOVINKIN , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Tatyana CHERNOVA , Assoc. prof., Dr. Eng. Sc.	Andrey RAIGORODSKY , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladimir CHILIN , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Dmitry ROKHLIN , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Gennady DEMIDENKO , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Fedor STONYAKIN , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladimir KALINICHENKO , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Vyacheslav TSIBULIN , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Alexey KARAPETYANTS , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Anton UTKIN , Senior Researcher, Dr. Eng. Sc.
Viktor KRASNOPROSHIN , Prof., Dr. Eng. Sc.	Alexander VATULIAN , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladislav KRAVCHENKO , Prof., Dr. Eng. Sc.	Konstantin VORONTSOV , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Leonid MESTETSKIY , Prof., Dr. Eng. Sc.	Alexander YAROSHENKO , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Mustafa MURATOV , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Yakov YERUSALIMSKY , Prof., Dr. Eng. Sc.
Andrey MURAVNIK , Dr. Phys.-Math. Sc.	Vladimir ZADOROZHNY , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Stanislav PAPKOV , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	Valentin ZAGREBNOV , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.

EDITORIAL BOARD:

Arkadiy SOLOVIEV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. Sc. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Science editor**

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.su

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation
Tel. +7 978 291 10 84 — editor-in-chief
+7 978 557-24-96, +7 978 837 82 77 — office
Email: a.n.soloviev@yandex.ru — editor-in-chief
article@tvim.su — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

Рудницкий О. И. Некоторые свойства базисных инвариантов унитарной группы $W(J_3(4))$	7
Shamoyan R. F. On Bergman projections and sharp decomposition theorems in tubular and related domains in \mathbb{C}^n	18
Гетманская И. В. Взаимосвязь оценок производных первого и второго порядка	36
Брыкин В. В. Разработка веб-приложения для анализа состояния растений с использованием технологий искусственного интеллекта	49
Карякин А. Т., Соцков В. А. Применение метода искусственного интеллекта для реализации проекта со сложным нелинейным управлением	61
Козлова М. Г., Гуменюк Н. И. Разработка приложения для распознавания лиц студентов академической группы	71
Кристалинский В. Р. О программе для приближенного решения краевой задачи Гильберта для аналитических функций	86
Лемтюжникова Д. В. Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 2	96
Рефераты	120
Список авторов номера	125

TABLE OF CONTENTS

Rudnitskii O. I. Some properties of the basic invariants of the unitary group $W(J_3(4))$	7
Shamoyan R. On Bergman projections and sharp decomposition theorems in tubular and related domains in \mathbb{C}^n	18
Getmanskaya I. V. The relationship of estimates of first- and second-order derivatives	36
Brykin V. V. Development of a web application for analyzing the condition of plants using artificial intelligence technologies	49
A. T. Karyakin, V. A. Sotskov Application of artificial intelligence method to implement a project with complex nonlinear control	61
Kozlova M. G., Gumenuk N. I. Development of an application for facial recognition of students in an academic group	71
Kristalinskiy V. R. About the program for approximate solution of hilbert boundary value problem for analytical functions	86
Lemtyuzhnikova D. V. Conditionally ideal structures in solving discrete optimization problems. Part 2	96
Abstracts	120
Authors	125

УДК: 514.7

MSC2020: 51F15, 14L24

DOI: 10.5281/zenodo.18818094

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ $W(J_3(4))$

© О. И. Рудницкий

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

Физико-технический институт

просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация

E-MAIL: oirud58@gmail.com

SOME PROPERTIES OF THE BASIC INVARIANTS OF THE UNITARY GROUP $W(J_3(4))$.

Rudnitskii O. I.

Abstract. This paper is devoted to the study of the algebra of invariants of the finite unitary primitive group $W(J_3(4))$ of order 336 generated by reflections of second order with respect to the planes in the 3-dimensional unitary space (the group of number 24 in the list of Shephard-Todd). The group $W(J_3(4))$ acts on the polynomial ring in 3 variables over the field of complex numbers in a natural manner, and, as is well known (Shephard and Todd), the set of all $W(J_3(4))$ -invariant polynomials forms an algebra generated by 3 algebraically independent homogeneous polynomials J_{m_i} of degrees $m_i = 4, 6, 14$ (a system of basic invariants of group $W(J_3(4))$). This group and its invariants have been studied in a large number of scientific papers (e.g., F. Klein, H.S.M. Coxeter). Of particular interest is the curve with equation $J_4 = 0$, which has a number of interesting properties (see F. Klein, H.S.M. Coxeter, M. Kato). In the previous works, author obtained in explicit form all basic invariants J_{m_i} of this group.

The main purpose of the article is to consider two new methods of finding in explicit form of the basic invariants of group $W(J_3(4))$. These methods are based on the following property of group $W(J_3(4))$: the group $W(J_3(4)) \supset B_3 \supset A_3$, where A_3 and B_3 are the symmetry groups of the regular 3-simplex and the real 3-cube, respectively. In particular, we obtain the representation of each basis invariant of the group $W(J_3(4))$ as a polynomial of the power sum symmetric polynomials (of the basic invariants of group B_3).

Note that previously a similar problem was solved in the paper by M. Oura and J. Sekiguchi for the group $W(K_6)$ and in the author's papers for the groups $W(K_5)$, $W(N_4)$, $EW(N_4)$.

Keywords: Unitary space, reflection, reflection groups, invariant, algebra of invariants.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть в n -мерном унитарном пространстве U^n задана прямоугольная система координат с началом O и ортонормированным базисом \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$); вектор $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

Конечная унитарная неприводимая группа G , порожденная отражениями относительно гиперплоскостей пространства U^n с общей точкой O , естественным образом действует в кольце многочленов $R = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$. Множество всех многочленов $f \in R$, инвариантных относительно действия группы G , имеет структуру алгебры, которую будем обозначать I^G . Известно [1], что алгебра I^G порождается n алгебраически независимыми однородными многочленами $f_{m_i} \in R$ степеней m_i ($i = \overline{1, n}$), которые называются **базисными инвариантами** группы. Отметим, что для заданной группы G система базисных инвариантов определяется неоднозначно, но их степени (числа m_i) определяются однозначно и называются показателями группы.

Данная статья посвящена изучению свойств базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$ порядка 336, порожденной отражениями второго порядка в трехмерном унитарном пространстве (группа № 24 в списке Шепарда-Тодда) [1]. Отметим, что группа $W(J_3(4))$ и ее инварианты исследовались в большом числе работ, например, [2–6] (см. также статьи автора [7–9]). Особый интерес представляет базисный инвариант f_4 минимальной четвертой степени. Алгебраическая кривая $f_4 = 0$ на комплексной проективной плоскости обладает следующими интересными свойствами: имеет 28 двойных касательных [3], является единственной кривой рода три с группой автоморфизмов порядка 168, а сам этот порядок реализует оценку, даваемую теоремой Гурвица для максимального порядка группы автоморфизмов кривой рода три [4].

Цель настоящей работы — рассмотреть два подхода к построению базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$, основанных на свойствах этой группы.

Для получения результатов в этой статье был использован программный пакет — система компьютерной алгебры Maple.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Конечная унитарная группа $W(J_3(4))$ порядка 336 порождается в пространстве U^3 отражениями второго порядка относительно плоскостей с уравнениями

$$x_2 = 0, \quad (1)$$

$$x_2 + x_3 = 0, \quad (2)$$

и

$$x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0, \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon\sqrt{7})$ — корень уравнения $z^2 - z + 2 = 0$; $\varepsilon = \sqrt{-1}$ [7] (см. также [8]).

Группа содержит отражения второго порядка относительно 21 плоскости с уравнениями [8]

$$x_i = 0, \quad x_i \pm x_j = 0, \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (i < j), \quad (4)$$

и

$$x_k \pm x_l \pm \alpha x_m = 0; \quad (k, l, m) = (1, 2, 3)\text{-циклически.}$$

Алгебру $I^{W(J_3(4))}$ порождают три базисных инварианта степеней $m_i = 4, 6, 14$ [1]. В работе [7] (см. также [9]) построена следующая система базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$:

$$\begin{aligned} J_4 &= \sum x_i^4 - 3\bar{\alpha} \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2, \\ J_6 &= 2 \sum x_i^6 + 5\bar{\alpha} \sum x_i^4 x_j^2 + 20\alpha^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2, \\ J_{14} &= 382 \sum x_i^{14} - 793\bar{\alpha} \sum x_i^{12} x_j^2 + 143(16 - 21\bar{\alpha}) \sum x_i^{10} x_j^4 - \\ &\quad - 143(16 + 95\bar{\alpha}) \sum x_i^8 x_j^6 + 572(21 + 9\bar{\alpha}) \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 - \\ &\quad - 4290(19 - 5\bar{\alpha}) \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + 8008(13 - 11\bar{\alpha}) \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 + \\ &\quad + 20020(5 + \bar{\alpha}) \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4. \end{aligned} \quad (5)$$

здесь индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Рассмотрим еще два подхода к построению базисных инвариантов этой группы.

2. ДВА СПОСОБА ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Способ 1. Нетрудно заметить, что группа $W(J_3(4))$ содержит в качестве подгруппы группу B_3 — симметрий вещественного куба, порожденную отражениями второго порядка относительно плоскостей (4) (см. также [10, Proposition 5.13]). Следовательно, $I^{W(J_3(4))} \subset I^{B_3}$.

Известно (см. [1]), что степенные суммы

$$I_k = \sum_{i=1}^3 x_i^{2k}, \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (6)$$

являются базисными инвариантами группы B_3 .

Следовательно, любой элемент f алгебры $I^{W(J_3(4))}$ представим в виде $f = \phi_t(I_k)$, $k = \overline{1, 3}$, где $\phi_t(I_k)$ — некоторый многочлен подходящей степени t , от степенных

сумм I_k , удовлетворяющий условию

$$\delta(\phi_t(I_k)) = \phi_t(I_k), \quad (7)$$

где δ есть преобразование вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + \alpha x_3), \\ x_2 \rightarrow \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + \alpha x_3), \\ x_3 \rightarrow \frac{1}{2}(\bar{\alpha}x_1 + \bar{\alpha}x_2 - 2x_3) \end{cases}$$

(отражение второго порядка относительно плоскости с уравнением (3)).

Получим явный вид многочленов $\phi_t(I_k)$, $t = 2, 3, 7$, которые соответствуют базисным инвариантам группы $W(J_3(4))$, то есть найдем явный вид представления базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$ в виде многочлена от степенных сумм (6).

Аналогичная задача для некоторых групп G была поставлена и решена в работе [11], а также в работах автора [12–14]. Отметим также, что аналогичный подход к построению базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$ был рассмотрен в работе автора [9].

1.1. Пусть $t = 2$. Тогда

$$P_4 = \phi_2(I_1, I_2) = a_1 I_1^2 + a_2 I_2,$$

здесь и далее a_l — неопределенные коэффициенты.

Если многочлен P_4 удовлетворяет условию (7), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах в правой и левой частях равенства (7), получим

$$a_1 = -\frac{3\varepsilon\sqrt{7}\alpha}{14}a_2.$$

Следовательно,

$$P_4 = a_2\left(-\frac{3\varepsilon\sqrt{7}\alpha}{14}I_1^2 + I_2\right).$$

Ненулевой многочлен P_4 , определяемый однозначно с точностью до постоянного множителя, является базисным инвариантом восьмой степени группы $W(J_3(4))$, и при $a_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}\varepsilon\bar{\alpha}^2$ совпадает с базисным инвариантом J_4 (см. (5)), то есть

$$J_4 = -\frac{1}{2}(3\bar{\alpha}I_1^2 + \sqrt{7}\varepsilon\bar{\alpha}^2I_2). \quad (8)$$

1.2. Для $t = 3$, многочлен

$$P_6 = \phi_3(I_1, I_2, I_3) = a_1 I_1^3 + a_2 I_1 I_2 + a_3 I_3.$$

Условие (7) приводит к совместной системе линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов $a_l, l = \overline{1, 3}$. Ее общее решение имеет вид:

$$a_1 = t, a_2 = -\frac{3\sqrt{7}}{8}\varepsilon\bar{\alpha}^4 t, a_3 = -\frac{7}{40}\bar{\alpha}^8 t.$$

Таким образом,

$$P_6 = \frac{t}{40}(40I_1^3 - 15\sqrt{7}\varepsilon\bar{\alpha}^4 I_1 I_2 - 7\bar{\alpha}^8 I_3).$$

Эта форма при $t \neq 0$ есть базисный инвариант 6-й степени группы $W(J_3(4))$, который при $t = \frac{10}{3}\alpha^2$ совпадает с базисным инвариантом J_6 (см. (5)), то есть

$$J_6 = \frac{1}{3}(10\alpha^2 I_1^3 - 15\sqrt{7}\varepsilon\bar{\alpha}^2 I_1 I_2 - 7\bar{\alpha}^6 I_3). \tag{9}$$

1.3. Если $t = 7$, то

$$P_{14} = \phi_5(I_1, I_2, I_3) = a_1 I_1^7 + a_2 I_1^5 I_2 + a_3 I_1^4 I_3 + a_4 I_1^3 I_2^2 + a_5 I_1^2 I_2 I_3 + \\ + a_6 I_1 I_2^3 + a_7 I_1 I_3^2 + a_8 I_2^2 I_3.$$

Соотношение (7) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно 8 неизвестных коэффициентов a_l с общим решением:

$$a_1 = \left(\frac{2140093}{22478848} + \frac{78705}{3211264}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 + \left(\frac{2565}{12544} + \frac{495}{12544}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_2 = -\left(\frac{22593}{32768} + \frac{215475}{1605632}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 - \left(\frac{1185}{896} + \frac{195}{896}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_3 = \left(\frac{1165}{1792} + \frac{135}{1792}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 + \left(\frac{27}{56} + \frac{9}{56}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_4 = \left(\frac{142839}{114688} + \frac{17541}{114688}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 + \left(\frac{1145}{448} + \frac{75}{448}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_5 = -\left(\frac{285}{128} + \frac{129}{896}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{14}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_6 = -\left(\frac{603}{8192} - \frac{207}{8192}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_1 - \left(\frac{45}{32} - \frac{15}{224}\varepsilon\sqrt{7}\right)c_2, \\ a_7 = c_1, a_8 = c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные числа.

При любых значениях c_1, c_2 многочлен P_{14} есть инвариант 14-й степени группы $W(J_3(4))$.

Если

$$c_1 = \frac{72471 + 75803\varepsilon\sqrt{7}}{9}b_1, c_2 = \frac{495383 - 110565\varepsilon\sqrt{7}}{24}b_1 + \frac{2793 - 539\varepsilon\sqrt{7}}{24}b_2,$$

то

$$P_{14} = b_1 J_{14} + b_2 J_4^2 J_6,$$

где J_4, J_6, J_{14} — базисные инварианты группы $W(J_3(4))$ (см. (5)).

При $c_1 \neq 0$, форма P_{14} — базисный инвариант, а при

$$c_1 = \frac{72471 + 75803\varepsilon\sqrt{7}}{9}, \quad c_2 = \frac{495383 - 110565\varepsilon\sqrt{7}}{24},$$

форма P_{14} совпадает с базисным инвариантом J_{14} , то есть

$$\begin{aligned} J_{14} = & \frac{1}{36}((79188 - 62764\alpha^2)I_1^7 - (960102 + 380679\bar{\alpha})I_1^5 I_2 - \\ & -(201855 + 516841\alpha^2)I_1^4 I_3 + (2089086 + 81666\alpha^4)I_1^3 I_2^2 - \\ & -(1075932 + 1254630\bar{\alpha})I_1^2 I_2 I_3 - (774189 + 535977\alpha)I_1 I_2^3 - \\ & -(619752 + 606424\alpha^2)I_1 I_3^2 + (687792 + 110565\bar{\alpha}^4)I_2^2 I_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получено (см. (8)–(10)) представление базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$ в виде многочлена от степенных сумм (6).

Способ 2. Назовем тетраэдр вписанным в куб, если все вершины тетраэдра являются вершинами куба. Известно (см., например, [15, 16]), что в трехмерном евклидовом пространстве правильный тетраэдр можно вписать в куб.

Следовательно, группа B_3 содержит в качестве подгруппы группу A_3 симметрий правильного тетраэдра, а значит группа $A_3 \subset W(J_3(4))$ и порождается отражениями второго порядка относительно плоскостей фундаментальной области с уравнениями

$$x_1 = 0, \quad -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - \alpha x_3) = 0, \quad x_2 = 0. \quad (11)$$

Таким образом, $I^{W(J_3(4))} \subset I^{A_3}$ и так как алгебра I^{A_3} порождается тремя алгебраически независимыми многочленами T_{m_i} степеней $m_i = 2, 3, 4$ [1], то всякий элемент f алгебры $I^{W(J_3(4))}$ представим в виде $f = \psi_t(T_{m_i})$, $k = \overline{1, 3}$, где ψ_t , как и ранее, многочлен подходящей степени t , удовлетворяющий условию

$$\sigma(\psi_t(T_{m_i})) = \psi_t(T_{m_i}); \quad (12)$$

здесь σ есть преобразование вида

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1, \\ x_2 \rightarrow -x_3, \\ x_3 \rightarrow -x_2 \end{cases}$$

(отражение второго порядка относительно плоскости с уравнением (2)).

Найдем явный вид базисных инвариантов T_{m_i} и многочленов ψ_t , соответствующих базисным инвариантам группы $W(J_3(4))$.

Базисные инварианты T_{m_i} найдем из следующих соображений.

Пусть вершины правильного тетраэдра заданы векторами $\overrightarrow{OV_r}, r = \overline{1,4}$. Тогда алгебраически независимые многочлены

$$T_{m_i} = \sum_{r=1}^4 (\vec{x}, \overrightarrow{OV_r})^{m_i} \quad (13)$$

— базисные инварианты группы A_3 .

В [15] координаты вершин правильного тетраэдра заданы столбцами следующей матрицы

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Шесть плоскостей симметрии правильного тетраэдра — это плоскости, проходящие через середину ребра тетраэдра и перпендикулярные этому ребру (разность любых двух столбцов матрицы V дает координаты нормального вектора этих плоскостей). Выберем из них три, задающих фундаментальную область группы A_3 . Это плоскости с уравнениями

$$x_1 = 0, \quad -\frac{1}{2}(x_1 - \sqrt{3}x_2) = 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}(x_2 - \sqrt{2}x_3) = 0. \quad (15)$$

Преобразование ρ с матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{3}} & \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

переводит плоскости фундаментальной области (15) в плоскости (11) фундаментальной области нашего тетраэдра. Следовательно, координаты вершин нашего тетраэдра это столбцы матрицы $V_1 = R \cdot V$, то есть матрицы

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} & -\frac{1}{2}\bar{\alpha} & -\frac{1}{2}\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Далее, используя (13), с точностью до постоянного множителя, получим следующие базисные инварианты группы A_3 :

$$T_2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + \alpha^2 x_3^2, \quad T_3 = x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3, \\ T_4 = 8(x_1^4 + x_2^4) + \alpha^4 x_3^4 + 12\alpha^2(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2).$$

Получим теперь явный вид многочленов ψ_t , соответствующих базисным инвариантам группы $W(J_3(4))$, то есть степеней $t = 2, 3, 7$.

2.1. Пусть $t = 2$. Тогда

$$H_4 = \psi_2(T_2, T_4) = a_1 T_2^2 + a_2 T_4,$$

здесь, как и ранее, a_l — неопределенные коэффициенты.

Из равенства (12) получим

$$H_4 = t \left(-\frac{3\varepsilon\sqrt{7}\alpha}{7} T_2^2 + T_4 \right).$$

При $t \neq 0$ многочлен H_4 — базисный инвариант четвертой степени группы $W(J_3(4))$, который при $t = -\frac{\varepsilon\sqrt{7}}{16}\bar{\alpha}^2$ совпадает с базисным инвариантом J_4 (см. (5)), то есть

$$J_4 = -\frac{\bar{\alpha}}{16} (6T_2^2 + \varepsilon\sqrt{7}\bar{\alpha}T_4). \quad (17)$$

2.2. При $t = 3$ имеем

$$H_6 = \psi_3(T_2, T_3, T_4) = a_1 T_2^3 + a_2 T_3^2 + a_3 T_2 T_4.$$

Если H_6 удовлетворяет условию (12), то

$$a_1 = \frac{-21 + 5\varepsilon\sqrt{7}}{14} t, \quad a_2 = (-14 + 22\varepsilon\sqrt{7})t, \quad a_3 = t.$$

Следовательно, многочлен

$$H_6 = \frac{t}{14} ((-21 + 5\varepsilon\sqrt{7})T_2^3 + (-196 + 308\varepsilon\sqrt{7})T_3^2 + 14T_2 T_4),$$

при $t \neq 0$ — базисный инвариант шестой степени группы $W(J_3(4))$, который при $t = \frac{\varepsilon\sqrt{7}}{32}\bar{\alpha}^3$ совпадает с базисным инвариантом J_4 (см. (5)), то есть

$$J_6 = \frac{1}{32} ((10\bar{\alpha} - 4)T_2^3 - 224\alpha^2 T_3^2 + \varepsilon\bar{\alpha}^3 T_2 T_4). \quad (18)$$

2.3. Для $t = 7$ имеем

$$\begin{aligned} H_{14} = \psi_7(T_2, T_3, T_4) = & a_1 T_2^7 + a_2 T_2^5 T_4 + a_3 T_2^4 T_3^2 + \\ & + a_4 T_2^3 T_4^2 + a_5 T_2^2 T_3^2 T_4 + a_6 T_2 T_3^4 + a_7 T_2 T_4^3 + a_8 T_3^2 T_4^2. \end{aligned}$$

Как и ранее, соотношение (12) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно 8 неизвестных коэффициентов a_l с общим решением:

$$\begin{aligned} a_4 = t_1, \quad a_7 = t_2, \\ a_1 = \frac{261 - 105\varepsilon\sqrt{7}}{98} t_1 + \frac{2751 - 1683\varepsilon\sqrt{7}}{343} t_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-21 + 5\varepsilon\sqrt{7}}{7}t_1 + \frac{-89 + 45\varepsilon\sqrt{7}}{14}t_2, \\
a_3 &= (-514 + 154\varepsilon\sqrt{7})t_1 + \frac{-17612 + 4828\varepsilon\sqrt{7}}{7}t_2, \\
a_5 &= (448 - 32\varepsilon\sqrt{7})t_1 + (2140 - 172\varepsilon\sqrt{7})t_2, \\
a_6 &= (3752 - 1288\varepsilon\sqrt{7})t_1 + (17528 - 5528\varepsilon\sqrt{7})t_2, \\
a_8 &= (-98 - 14\varepsilon\sqrt{7})t_1 - (448 + 48\varepsilon\sqrt{7})t_2.
\end{aligned}$$

Форма H_{14} при любых значениях t_1, t_2 есть инвариант 14-й степени группы $W(J_3(4))$.

Если

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{64111 + 23699\varepsilon\sqrt{7}}{8192}b_1 - \frac{749 + 217\varepsilon\sqrt{7}}{8192}b_2, \\
t_2 &= \frac{32193 + 8541\varepsilon\sqrt{7}}{16384}b_1 + \frac{343 + 91\varepsilon\sqrt{7}}{16384}b_2,
\end{aligned}$$

то

$$H_{14} = b_1J_{14} + b_2J_4^2J_6,$$

где, как и ранее, J_4, J_6, J_{14} — базисные инварианты группы $W(J_3(4))$ (см. (5)).

Отсюда, нетрудно установить, что при $t_1 \neq -\frac{63+\varepsilon\sqrt{7}}{14}t_2$ многочлен H_{14} — базисный инвариант 14-й степени группы $W(J_3(4))$, а при

$$t_1 = -\frac{64111 + 23699\varepsilon\sqrt{7}}{8192}, t_2 = \frac{32193 + 8541\varepsilon\sqrt{7}}{16384},$$

форма H_{14} совпадает с базисным инвариантом J_{14} группы $W(J_3(4))$, то есть

$$\begin{aligned}
16384J_{14} &= (-145416 - 78312\varepsilon\sqrt{7})T_2^7 + (224828 + 99788\varepsilon\sqrt{7})T_2^5T_4 + \\
&+ (-5232384 + 5331200\varepsilon\sqrt{7})T_2^4T_3^2 + (-128222 - 47398\varepsilon\sqrt{7})T_2^3T_4^2 + \\
&+ (11115776 - 4390656\varepsilon\sqrt{7})T_2^2T_3^2T_4 + (-13647872 - 40943616\varepsilon\sqrt{7})T_2T_3^4 + \\
&+ (32193 + 8541\varepsilon\sqrt{7})T_2T_4^3 + (-3631936 + 1068480\varepsilon\sqrt{7})T_3^2T_4^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, получено (см. (17)–(19)) еще одно представление базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье реализованы два подхода к построению в явном виде базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$ порядка 336 порожденной отражениями второго порядка относительно плоскостей трёхмерного унитарного пространства. Решен вопрос о выражении базисных инвариантов этой группы через степенные суммы, установлены соотношения между базисными инвариантами, найденными различными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shephard, G. C. Finite unitary reflection groups / G. C. Shephard, J. A. Todd // *Can. J. Math.* — 1954. — 6. — № 2. — P. 274–304. DOI: 10.4135/CJM. — 1954. — 028. - 3
2. Klein, F. Ueber die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen // *Math. Ann.* — 1879. — 14. — P. 428–471.
3. Coxeter, H. S. M. My graph // *Proc. London Math. Soc.* — 1983. — V. 46. — № 3. — P. 117 — 136.
4. Coxeter, H. S. M. The simple groups PSL(2,7) and PSL(2,11) / H. S. M. Coxeter, W. L. Edge // *Math. Repts. Acad. Sci. Can.* — 1983. — V. 5. — P. 201 — 206.
5. Спрингер, Т. Теория инвариантов. — М.: Мир, 1981. — 191 с.
Springer, T. (1981) *Invariant theory*. — Moscow: Mir, 1981. — 191 p.
6. Kato, M. Differential equations for invariant curves under Klein’s simple groups of order 168 // *Kyushu J. Math.* — 2004. — V. 58. — P. 323 — 336.
7. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1990. — 115 с.
Rudnitskii, O. I. (1990) Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. *The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences*. Minsk.
8. Рудницкий, О. И. О базисных инвариантах унитарной группы $W(J_3(4))$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2017. — № 2(35). — С. 97–103.
Rudnitskii, O. I. (2017) On basic invariants of unitary group $W(J_3(4))$. *TVIM*. — 2017. — 35. — P. 97–103.
9. Рудницкий, О. И. Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2018. — № 1(38). — С. 89–96.
Rudnitskii, O. I. (2018) Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$. *TVIM*. — 2018. — № 1(38). — P. 89–96.
10. Cohen, A. M. Finite complex reflection groups // *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e serie*. — 1976. — 9. — № 3. — P. 379 — 436.

11. Oura, M. Basic Invariants of the Complex Reflection Group No.34 Constructed by Conway and Sloane / M. Oura, J. Sekiguchi // *arXiv:2302.09695v1* — [math.GR] — 19 Feb 2023 (doi.org/10.48550/arXiv.2302.09695)
12. Рудницкий, О. И. Об одном свойстве базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2022. — № 2(55). — С. 85–96.
Rudnitskii, O. I. (2022) About one property of basic invariants of unitary group $W(K_5)$. *TVIM*. — 2022. — 2(55). — P. 85–96.
13. Рудницкий, О. И. О базисных инвариантах унитарной группы $W(N_4)$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2024. — № 1(62) . —С. 94–101.
Rudnitskii, O. I. (2024) On basic invariants of the unitary group $W(N_4)$. *TVIM*. — 2024. — 1(62) . — P. 94–101.
14. Рудницкий, О. И. Об одном свойстве базисных инвариантов унитарной группы $EW(N_4)$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2024. — № 3(64). — С. 61–69.
Rudnitskii, O. I. (2025) About one property of the basic invariants of the unitary group $EW(N_4)$. *TVIM*. — 2024. — 3(64). — P. 61–69.
15. Игнатенко, В. Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1980. — Т. 11. — С. 203 — 240.
Ignatenko, V. F. (1980) The geometry of algebraic surfaces with symmetries // *Itoги Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* — 1980. — V. 11. — P. 203 — 240.
16. Игнатенко, В. Ф. Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1984. — Т. 16. — С. 195 — 229.
Ignatenko, V. F. (1984) Some problems in the geometric theory of invariants of groups generated by orthogonal and oblique reflections // *Itoги Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* — 1984. — V. 16. — P. 195 — 229.

Цитирование: Рудницкий О. И. Некоторые свойства базисных инвариантов унитарной группы $W(J_3(4))$ // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2025. — № 3 (68). — С. 7–17.

УДК: 517.55

MSC2010: 42B15, 42B30

DOI: 10.5281/zenodo.18818151

ON BERGMAN PROJECTIONS AND SHARP DECOMPOSITION THEOREMS IN TUBULAR AND RELATED DOMAINS IN \mathbb{C}^n

© R. F. Shamoyan

SARATOV, RUSSIA

E-MAIL: *rshamoyan@gmail.com*

ON BERGMAN PROJECTIONS AND SHARP DECOMPOSITION THEOREMS IN
TUBULAR AND RELATED DOMAINS IN \mathbb{C}^n .

Shamoyan R.

Abstract. The theory of analytic function spaces in very general tubular domains over symmetric cones is a relatively new interesting research area. Tube domains are very general and very complicated domains. Recently several new results in this research area were provided in papers of B. Sehba and his coauthors concerning Bergman type operators in such type complicated unbounded domains. In this note we expand their results to certain spaces of analytic functions in products of tube domains. We define new integral operators of Bergman type and new analytic mixed norm spaces in such type domains and products of tube domains and provide new results on boundedness of certain Bergman type operators. Our results may have various nice applications in this research area. Our results with very similar proofs may be valid in Siegel domains of second type, in bounded symmetric domains and bounded strongly pseudoconvex domains with the smooth boundary, various matrix domains. We will add at the end of this note a new sharp decomposition theorem for Bergman space. Previously such type sharp decomposition theorems in analytic function spaces were provided by author in other domains. Our sharp result in Bergman type function spaces enlarge that list of previously known such type assertions in analytic function spaces of several variables. We finally pose in addition various interesting new problems related to this research area and moreover indicate also some concrete schemes for solutions of these problems. We also provide in the second part of this note many interesting short comments and remarks.

Keywords: *analytic functions, Bergman projections, tubular domains over symmetric cones, Bergman spaces, product domains, mixed norm function spaces, decomposition theorems, harmonic function spaces, polydisk.*

1. INTRODUCTION

The goal of this paper is to provide new results on boundedness of Bergman type projections in tubular domains over symmetric cones and in products of such type

domains. Note that for particular values of parameters our results are well-known. Our results on Bergman type projections may have various interesting applications in complex function theory of several variables namely in spaces of analytic functions in tubular domains over symmetric cones. We provide first basic notations and definitions of complex function theory in tubular domains over symmetric cones which are needed for this paper. The theory of analytic spaces in tubular domains over symmetric cones is an active research area (see, for example, [1]-[7] and references there).

Let $T_\Omega = V + i\Omega$ be the tube domain over an irreducible symmetric cone Ω in the complexification $V^{\mathbb{C}}$ of an n -dimensional Euclidean space V . $\mathcal{H}(T_\Omega)$ denotes the space of all holomorphic functions on T_Ω . Following the notation of [5] and [8] we denote the rank of the cone Ω by r and by Δ the determinant function on V .

Letting $V = \mathbb{R}^n$, we have as an example of a symmetric cone on \mathbb{R}^n the Lorentz cone Λ_n which is a rank 2 cone defined for $n \geq 3$ by

$$\Lambda_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1^2 - \dots - y_n^2 > 0, y_1 > 0\}.$$

The determinant function in this case is given by the Lorentz form

$$\Delta(y) = y_1^2 - \dots - y_n^2$$

(see, for example, [5]).

Also, if $t, k \in \mathbb{R}^r$, then $t < k$ means $t_j < k_j$ for all $1 \leq j \leq r$.

For $\tau \in \mathbb{R}_+$ and the associated determinant function $\Delta(x)$ [5] we set

$$A_\tau^\infty(T_\Omega) = \left\{ F \in \mathcal{H}(T_\Omega) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega} |F(x+iy)| \Delta^\tau(y) < \infty \right\}.$$

It can be checked that this is a Banach space. For $1 \leq p, q < +\infty$ and $\nu \in \mathbb{R}$, and $\nu > -1$ we denote by $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ the mixed-norm weighted Bergman space consisting of analytic functions f in T_Ω such that

$$\|F\|_{A_\nu^{p,q}} = \left(\int_\Omega \left(\int_V |F(x+iy)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \Delta^\nu(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

It will be interesting to study also these analytic function spaces when p or q are equal to ∞ . Such spaces can be easily defined, as in case of simpler domains.

We can extend easily these $A_\nu^{p,q}$ analytic spaces to product domains in at least two ways. The study of such type analytic spaces is a new interesting problem.

This is a Banach space. Replacing above A by L we will get as usual the corresponding larger space of all measurable functions in tube over symmetric cone with the same

quazinnorm (see [1], [8]). It is known that the $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ space is nontrivial if and only if $\nu > -1$ (see [5], [9]). When $p = q$ we write (see [5])

$$A_\nu^{p,q}(T_\Omega) = A_\nu^p(T_\Omega).$$

This is the classical weighted Bergman space with usual modification when $p = \infty$.

The (weighted) Bergman projection P_ν is the orthogonal projection from the Hilbert space $L_\nu^2(T_\Omega)$ onto its closed subspace $A_\nu^2(T_\Omega)$ and it is given by the following integral formula (see [5])

$$P_\nu f(z) = C_\nu \int_{T_\Omega} B_\nu(z, w) f(w) dV_\nu w,$$

where

$$B_\nu(z, w) = C_\nu \Delta^{\nu + \frac{n}{r}}((z - \bar{w})/i)$$

is the Bergman reproducing kernel for $A_\nu^2(T_\Omega)$ (see [5], [8]).

Here we used the notation $dV_\nu(w) = \Delta^{\nu - \frac{n}{r}}(v) dudv$. Below and here we use constantly the following notations $w = u + iv \in T_\Omega$ and also $z = x + iy \in T_\Omega$. Hence for any analytic function from $A_\nu^2(T_\Omega)$ the following integral formula is valid (see also [5])

$$f(z) = C_\nu \int_{T_\Omega} B_\nu(z, w) f(w) dV_\nu w.$$

In this case sometimes below we say simply that the f function allows Bergman representation via Bergman kernel with ν index. Note that these assertions have direct copies in simpler cases of analytic function spaces in unit disk, polydisk, unit ball, upperhalfspace \mathbb{C}_+ and in spaces of harmonic functions in the unit ball or upperhalfspace of Euclidean space \mathbb{R}^n . These classical facts are well-known and can be found, for example, in [2], [10] and in some items from references there. Above and throughout the paper we write \mathbb{C} (sometimes with indexes) to denote positive constants which might be different each time we see them (and even in a chain of inequalities), but are independent of the functions or variables being discussed.

In the second part of this paper we formulate new sharp decomposition theorem for Bergman A_α^1 function spaces in tube domain and pose various new interesting problems for readers concerning same type results in harmonic function spaces in several variables in the unit ball and upper half space of \mathbb{R}^n , indicating shortly some ways for readers on how to solve such type problems. Previously such sharp results were provided by the author in Bergman type function spaces in the unit ball and in bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary in his recent papers with E. Tomashevskaya (see, for

example, [16]-[18]). Such type sharp results may have various applications in function theory of several variables.

Rather transparent arguments which we found in proof of theorem 3 in tube domains over symmetric cones and earlier in bounded strongly pseudoconvex domains shows that similar type sharp decomposition theorems for Bergman spaces may be valid also with very similar proofs in Siegel domains of second type, bounded symmetric domains and minimal bounded homogeneous domains.

Proofs of all our sharp decomposition assertions are based on special integral representations, uniform estimates for Bergman spaces and Forelly-Rudin estimates which are available in many domains.

2. BASIC PRELIMINARIES ON SYMMETRIC CONES AND DETERMINANT FUNCTION

We first shortly remind the readers some basic facts on symmetric cones (see [11], [14]). A subset Ω of \mathbb{R}^n or V , so that $\dim V = n$ to be a cone if $\lambda x \in \Omega$, for all $x \in \Omega, \lambda > 0$, if $\lambda x + \mu y \in \Omega$ for all $x, y \in \Omega, \lambda, \mu > 0$ then it is convex. Let in addition $\Omega^* = \{y \in \mathbb{R}^n : (y/x) > 0, \text{ for all } x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}\}$ and $\Omega^* = \Omega$. This type open cone is selfdual (Ω^* is dual cone).

Let $G(\Omega) = \{g \in Gl(\mathbb{R}^n) : g\Omega = \Omega\}$, where $Gl(\mathbb{R}^n)$ denotes the group of all linear invertible transformation of \mathbb{R}^n . If for all $x, y \in \Omega, y = gx$, for some $g \in G(\Omega)$ then our open convex cone Ω is homogeneous, if also $\Omega^* = \Omega$ then it is symmetric cone. These are one of the main objects of this paper.

If the equation $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ is not possible for each $V_1 \subset \mathbb{R}^n, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, then our cone is irreducible, here $V_i \neq \emptyset, i = 1, 2, (\Omega_1, \Omega_2 \text{ are symmetric cones}),$ where also $\Omega_i \subset V_i, i = 1, 2.$

We remind shortly the reader now basic facts on determinant $\Delta^t(\text{Im } z), z \in \mathbb{C}^n, t \in (0, \infty).$ We fix V – a simple Euclidean Jordan algebra with rank $r.$

(a) A Jordan algebra V over R is said to be Euclidean if there exists a positive definite bilinear symmetric form on V which is associative $(L(x)u/v) = (u, L(x)v),$ where (u, v) is an inner product on $R^n,$ for all $x, u, v \in V;$

(b) A Jordan algebra is simple if all it's ideals are trivial;

(c) We define rank of $V.$

If $x \in V, m(x) = \min\{k > 0 : (l, x, x^2, \dots, x^k) \text{ are linearly dependent}\},$ then $1 \leq m(x) \leq \dim V$ and $r = \max\{m(x) : x \in V\},$ we say rank of V is $r.$

According to spectral theorem if V has rank $r,$ then $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, c_i$ are elements of so called Jourdan frame, and $\{\lambda_i\}$ are determined uniquely by x (with their

multiplicities). We fix now a Peirce decomposition of $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$; we formally look at V as a space of symmetric matrices (V_{ij}) , $V_{ii} = Rc_i$, where R is a special mapping (see [8]), $V_{ij} = V(c_i, 1/2) \cap V(c_j, 1/2) = \{x \in V : c_i x = c_j x = \frac{x}{2}\}$, $i < j$, $\dim V_{ij} = d = 2\frac{n/r-1}{r-1}$. We denote by P_{ij} the orthogonal projection of V onto V_{ij} for $i \leq j$. Finally we denote by $\Delta_j(x)$, $j = 1, \dots, r$, the principal minors of $x \in V$ with respect to the fixed Jordan frame $\{c_1, \dots, c_r\}$. That is $\Delta_k(x)$ is the determinant of the projection $P_k x$ of x in the Jordan subalgebra $V^{(k)} = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$.

It is well-known that $\Omega = \{x \in V : \Delta_k(x) > 0, k = 1, \dots, r\}$. We have also $\Delta_k(mx) = \Delta_k(x)$, $x \in V$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m > 0$. See other properties of Δ_k in [14].

We define $\Delta_s(x) = \prod_{j=1}^r \Delta_j^{s_j - s_j + 1}(x) = \Delta_1^{s_1 - s_2}(x) \dots \Delta_r^{s_r}(x)$, $x \in \Omega$, $s \in C^r$. We have that $|\Delta_s| = \Delta(\text{Im } z)$ and $\Delta_s \sum_{i=1}^r a_i c_i = \prod_{i=1}^r a_i^{s_i}$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, r$.

To formulate our theorems we will need basic facts of theory of analytic function spaces in tubular domains over symmetric cones taken from [11], [14]. Let $dv(w)$ and $dv_\alpha(w) = [\Delta^{\alpha - \frac{n}{r}}(v)] dudv$, $\alpha > n/r - 1$, be a standard Lebesgue measure in tubular domains over symmetric cone T_Ω and weighted Lebesgue measure in tube, $w = u + iv$. The weighted Bergman kernel B_ν of T_Ω is given as usual by

$$B_\nu(w, z) = (d_\nu) \Delta \left(\frac{w - \bar{z}}{i} \right)^{-\nu - \frac{n}{r}}, \quad w, z \in T_\Omega, \nu \in \mathbb{R},$$

is a Bergman constant, where

$$d_\nu = (c_\nu^{-1}) \Gamma \left(\nu + \frac{n}{r} \right).$$

Let Ω be an irreducible symmetric cone in the Euclidean space V , and $T_\Omega = V + i\Omega$ the corresponding tube domain in the complexified space $V^{\mathbb{C}}$. We shall note n the dimension of V and r the rank of Ω . Moreover, we shall denote by $(x | y)$ the scalar product in V , and by Δ the determinant function. For the description of such cones Ω in terms of Jordan algebras, one may use the book of Faraut and Koranyi [8]. One may also have in mind the typical example that one obtains when V is the space of real symmetric $r \times r$ matrices, and Ω is the cone of positive definitive matrices. In this example, the scalar product on V is induced by the Hilbert-Schmidt norm of the matrices, and the determinant function is given by the determinant of the matrices. The rank is r , while the dimension is $\frac{r(r+1)}{2}$.

We shall also make use the g eneralized wave operator on V , given by $\square = \Delta \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)$. This is a differential operator of degree r , defined by the equality

$$\Delta \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) [e^{i(x|\zeta)}] = \Delta(\zeta) e^{i(x|\zeta)}, \quad \zeta \in V.$$

It's name is due to another fundamental example, given by the forward light cone in \mathbb{R}^n ,

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n; x_1 > \sqrt{x_2^2 + \dots + x_n^2} \right\},$$

which is of rank 2 . In this case, the determinant function is equal to

$$\Delta(x) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2.$$

3. PRELIMINARIES ON GEOMETRY OF TUBULAR DOMAINS OVER SYMMETRIC CONES, BASIC LEMMAS, NEW ANALYTIC SPACES

In this section we will collect several very useful assertions from [1], [8]–[9] mainly concerning so-called r-lattices that will be used rather often in all proofs of our sharp embedding theorems below.

Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones in \mathbb{C}^n . We shall use the following notations:

- $\delta : T_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ will denote the determinant function from the boundary, that is $\delta(z) = \Delta(Imz)$. Let $dv_t(Z) = (\delta(z))^t dv(z), t > -1$;
- ν will be the Lebesgue measure on T_Ω ;
- $H(T_\Omega)$ will denote the space of holomorphic function on T_Ω , endowed with the topology of uniform convergence on compact subsets;
- $B : T_\Omega \times T_\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ will be the Bergman kernel of T_Ω . Note that if B is kernel of type $t, t \in \mathbb{N}$, then B^s is kernel of type $st, s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$. This follows directly from definition (see [1], [8]–[9], [11], [12]). Note $B = B_{2n/r}$ (see [1], [8]–[9], [11], [12]);
- given $r \in (0, \infty)$ and $z_0 \in T_\Omega$, we shall denote by $B_{T_\Omega}(z_0, r)$ the Bergman ball.

See, for example, [1], [8]–[9], [11], [12], for definitions, basic properties and applications to geometric function theory of the Bergman distance and [1], [8]–[9], [11], [12] for definitions and basic properties of the Bergman kernel. Let us now recall a number of vital results proved in T_Ω . The first two give information about the shape of Bergman balls:

Lemma 1 (see [1], [8]–[9], [11], [12]). *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones, and $r \in (0, \infty)$. Then*

$$\nu(B_{T_\Omega}(\cdot, t)) \approx \delta^{2r/n}.$$

Lemma 2 (see [1], [8]–[9], [11], [12]). *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones. Then there is $C > 0$ such that*

$$\frac{C}{1-r} \delta(z_0) \leq \delta(z) \leq \frac{1-r}{C} \delta(z_0)$$

for all $r \in (0, \infty)$, $z_0 \in T_\Omega$ and $z \in B_{T_\Omega}(z_0, r)$.

Definition 1. Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones, and $r > 0$. An r -lattice in T_Ω is a sequence $a_k \subset T_\Omega$ such that $T_\Omega = \bigcup_k B_{T_\Omega}(a_k, r)$ and there exists $m > 0$ such that any point in T_Ω belongs to at most m balls of the form $B_{T_\Omega}(a_k, R)$, where $R = \frac{1}{2}(1 + r)$. Note by Lemma 2,

$$\nu_\alpha(B_{T_\Omega}(a_k, R)) = \int_{B_{T_\Omega}(a_k, R)} \delta^\alpha(z) d\nu(z) = (\delta^\alpha(a_k))\nu(B_{T_\Omega}(a_k, R)), \alpha > -1.$$

The existence of r -lattice in tubular domains over symmetric cones is ensured by the following

Lemma 3 (see [1], [3]–[6], [8]–[9], [11], [12]). *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded tubular domains over symmetric cones. Then for every $r \in (0, \infty)$ there exists an r -lattice in T_Ω , that is there exists $m \in \mathbb{N}$ and a sequence $a_k \subset T_\Omega$ of points such that $T_\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{T_\Omega}(a_k, r)$ and no point of T_Ω belongs to more than m of the balls $B_{T_\Omega}(a_k, R)$, where $R = \frac{1}{2}(1 + r)$.*

We will call r -lattice sometimes the family $B_{T_\Omega}(a_k; r)$. Dealing with B Bergman kernel we always assume $|B(z; a_k)| \asymp |B(a_k; a_k)|$ for any $z \in B_{T_\Omega}(a_k; r)$, $r \in (0; \infty)$ (see [1], [8]–[9], [11], [12]). Let $m = (2n/r)l$, $l \in \mathbb{N}$. Then $|B_m(z; a_k)| \asymp |B_m(a_k; a_k)|$, $z \in B_{T_\Omega}(a_k; r)$, $r \in (0; \infty)$. This fact is crucial for embedding theorems in tubular domains over symmetric cones (see also [13]).

Lemma 4 (see [3]–[6], [8], [11], [12]). *Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones. Given $r \in (0; \infty)$, set $R = \frac{1}{2}(1 + r) \in (0; \infty)$. Then there exists a $C_r > 0$ depending on r such that*

$$\forall z_0 \in T_\Omega, \forall z \in B_{T_\Omega}(z_0, r), \chi(z) \leq \frac{C_r}{\nu(B_{T_\Omega}(z_0, r))} \int_{B_{T_\Omega}} \chi d\nu$$

for every nonnegative plurisubharmonic function $\chi : T_\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Lemma 5 (see [3]–[6], [8], [11], [12]).

1. Let $\lambda > \frac{n}{r} - 1$ be fixed. Then $\Delta(y + y') \geq \Delta(y) \forall y, y' \in \Omega$,
 $|\Delta^{-\lambda}(\frac{x+iy}{i})| \geq \Delta(y)^{-\lambda}, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \Omega$.
2. Let α, β are real, then

$$I_{\alpha, \beta}(t) = \int_{\Omega} (\Delta^\alpha(y + t)) (\Delta^\beta(y)) dy < \infty,$$

if $\beta > -1, \alpha + \beta < 1 - \frac{2n}{r}$, and

$$I_{\alpha, \beta}(t) = (c_{\alpha, \beta}) \Delta^{\alpha + \beta + \frac{n}{r}}(t).$$

Moreover

$$I_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^{-\alpha} \left(\frac{x + iy}{i} \right) \right| dx < \infty,$$

if $\alpha > \frac{2n}{r} - 1$, and

$$I_\alpha(y) = (c_\alpha) \Delta^{\alpha + \frac{n}{r}}(y),$$

where $y \in \Omega$.

Lemma 6. For any analytic function from $A_\alpha^2(T_\Omega)$ the following integral formula is valid

$$f(z) = \tilde{c}_\alpha \int_{T_\Omega} B_\alpha(z, w) f(w) d\nu_\alpha(w), z \in T_\Omega. \tag{1}$$

Let $1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty, \frac{n}{r} \leq p_1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} = 1, \frac{n}{r} < \gamma$. Let $f \in A_\gamma^{p,q}$, then (1) with $\alpha > \frac{n}{r} - 1$ is valid (Bergman representation formula with α index is valid).

We now collect a few facts on the (possibly weighted) L^p -norms of the Bergman kernel and the normalized Bergman kernel. The first result is classical (see, for example, [1], [5], [8]).

Proposition 1 (Forelly-Rudin estimates). Let $T_\Omega \subset \mathbb{C}^n$ be a tubular domains over symmetric cones, and let $z_0 \in T_\Omega$ and $1 \leq p < \infty$. Then

$$\int_{T_\Omega} |B(\zeta, z_0)|^p \delta^\beta(\zeta) d\nu(\zeta) \leq C \delta^{\beta - 2(2n/r)(p-1)}(z_0), -1 < \beta < (2n/r)(p-1).$$

The same result is valid for weighted Bergman kernel (see [11]).

We define new Banach mixed norm analytic Bergman-type spaces in $T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ in product of tubular domains over symmetric cones as follows. Let $m \geq 1, p_j \in (1; \infty) \nu_j > \frac{n}{r} - 1$,

$$A_{\vec{p}}^{\vec{\nu}} = \{f \in H(T_\Omega^m) = H(T_\Omega \times \dots \times T_\Omega) = \left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \Delta^{\nu_1 - \frac{n}{r}}(y_1) dx_1 dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \Delta^{\nu_m - \frac{n}{r}}(y_m) dx_m dy_m \right)^{\frac{1}{p_m}} < \infty\}.$$

Replacing A by L as usual we get larger space of measurable functions with the same norms.

Mixed norm analytic function spaces in tube we just defined above may be defined easily when one p_j index is equal to infinity. As in simpler domains and probably our projection theorems may be extended also to such type analytic function spaces and we pose this as a problem for readers.

Note first for case of polydisk (when T_Ω is a unit disk) or even T_Ω is a unit ball in \mathbb{C}^n these analytic spaces are not new. They were introduced and studied in [14]-[15]. Note also very similar spaces in \mathbb{R}^n were introduced and studied before by various authors. Our theorem for mentioned particular cases are not new. They can be seen in [14]: For $m = 1$ case our theorem is also known (see [3]-[5]).

Lemma 7 (Reproducing formulas, see [5]). *For any analytic function from $A_\alpha^2(T_\Omega)$ the following integral formula is valid*

$$f(z) = \tilde{c}_\alpha \int_{T_\Omega} B_\alpha(z, w) f(w) dv_\alpha(w), z \in T_\Omega. \quad (2)$$

Let $1 \leq p < \infty, 1 \leq q < \infty, (n/r) \leq p_1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} = 1, (\frac{n}{r} - 1) < \gamma$. Let $f \in A_\gamma^{p,q}$, then (2) with $\alpha > (\frac{n}{r} - 1)$ is valid (Bergman representation formula with α index is valid).

We provide below a well-known and important application of r -lattices of tubular domains over symmetric cones.

Lemma 8 (Atomic decomposition of A_ν^p , see [5]). *Let $p \geq 1$ and $\nu > \frac{n}{r} - 1$. Let $\{z_j\}$ be a δ -lattice in T_Ω , $\delta \in (0, 1)$, $z_j = x_j + iy_j, z_j \in T_\Omega, j = 1, \dots, r$. Then*

$$\|f\|_{A_\nu^p} \asymp \sum_j |f(z_j)|^p \Delta^{\nu + \frac{n}{r}}(y_j).$$

Assume that Bergman projection P_ν is bounded on A_ν^p and let $\{z_j\}$ be a δ -lattice in T_Ω .

If $f \in A_\nu^p$, then

$$f(z) = \sum_j \lambda_j B_\nu(z, z_j) \Delta^{\nu + \frac{n}{r}}(y_j), z \in T_\Omega, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \Delta^{\nu + \frac{n}{r}}(y_j) \leq c \|f\|_{A_\nu^p}^p. \quad (4)$$

If

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \Delta^{\nu + \frac{n}{r}}(y_j) < +\infty,$$

then the "sum with B_ν " (3) converges in A_ν^p and the reverse to (4) is true also.

We mention now several known results on Bergman type projections. The weighted Bergman projection P_ν is the orthogonal projection from the Hilbert space $L_\nu^2(T_\Omega)$ onto its closed subspace $A_\nu^2(T_\Omega)$ and it is given by the integral formula

$$(P_\nu f)(z) = \int_{T_\Omega} B_\nu(z, w) f(w) \Delta^{\nu - \frac{n}{r}}(\text{Im } w) dv(w),$$

$z \in T_\Omega, \nu > \frac{n}{r} - 1$ (see [11], [14]).

The $L^{p,q}_\nu$ boundedness of the Bergman projection P_ν is still an open problem and has attracted a lot of attention in recent years. Today it is only known that this projection extends to a bounded operator on $L^{p,q}_\nu$ for general symmetric cones for the range $1 \leq p < \infty$, $q'_{\nu,p} < q < q_{\nu,p}$, $q_{\nu,p} = \min\{p, p'\} q_\nu$, $q_\nu = 1 + \frac{\nu}{n/r-1}$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (see [11], [14]).

The importance can be seen, for example, from the following fact. If P_ν extends to a bounded operator on $L^{p,q}_\nu$, then the topological dual space $(A^{p,q}_\nu)^*$ of the Bergman space $A^{p,q}_\nu$ identifies with $A^{p',q'}$ under the integral pairing

$$\langle f, g \rangle_\nu = \int_{T_\Omega} f(z) \overline{g(z)} \Delta^{\nu - \frac{n}{r}}(\text{Im } z) dv(z),$$

$f \in A^{p,q}_\nu; g \in A^{p',q'}$ (see [11], [14]). Let

$$(T_{\alpha,\beta,\gamma} f)(z) = \Delta^\alpha(\text{Im } z) \int_{T_\Omega} B_\gamma(z, w) f(w) \Delta^\beta(\text{Im } w) dv(w),$$

$$(T^+_{\alpha,\beta,\gamma} f)(z) = \Delta^\alpha(\text{Im } z) \int_{T_\Omega} |B_\gamma(z, w)| f(w) \Delta^\beta(\text{Im } w) dv(w),$$

$z \in T_\Omega, f \in L^1(T_\Omega)$. The following assertions were proved in [14].

Theorem A. *There are $\nu_1 = \nu_1(\alpha, n, r, q)$, $\nu_2 = \nu_2(\alpha, n, r, q)$ so that for $1 \leq p, q < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\gamma = \alpha + \beta + \frac{n}{r}$, $\alpha + \beta > -1$, then $T^+_{\alpha,\beta,\gamma}$ is a bounded operator on $L^{p,q}_\nu(T_\Omega)$ for all $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$.*

Theorem B. *Let (Q^+) be $(T^+_{\alpha,\beta,\gamma})$ operator for $\alpha = 0$, $\gamma = \nu + m$, $\beta = \nu - \frac{n}{r}$. Then (Q^+) for $\nu + m > \frac{n}{r} - 1$, $1 \leq p, q < \infty$, is a bounded operator from $L^{p,q}_\nu$ to $L^{p,q}_{\nu+mq}$, if $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$ for some $\nu_1 = \nu_1(p, q, n, r, \nu)$, $\nu_2 = \nu_2(p, q, n, r, \nu)$, $(T^+_{\alpha,\beta,\gamma})$ is a bounded operator on L^∞ , if $\alpha > \frac{n}{r} - 1$, $\beta > -1$, $\gamma = \alpha + \beta + \frac{n}{r}$. The same is valid for $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ operator, acting between same $L^{p,q}$ type spaces into certain $A^{p,q}_\alpha$ spaces.*

It is natural to try to extend these results to larger spaces of analytic function in tube. It is one of the goals of this paper.

Theorems A, B can be seen as direct extensions of well-known old classical theorems on Bergman projection in analytic function spaces in simpler domains to general tube domains over symmetric cones.

4. MAIN RESULTS

In this section we formulate main results of this note. Complete and not difficult proofs of these interesting assertions will be provided elsewhere.

Theorem 1. *Let*

$$T_{\vec{\beta}} f(\vec{z}) = \int_{T_{\Omega}^m} \frac{f(w_1, \dots, w_m) \prod_{j=1}^m \Delta^{\beta_j - \frac{n}{r}}(w_j) dv(w_j)}{\Delta^{\beta_1 + \frac{n}{r}}\left(\frac{z_1 - \bar{w}_1}{i}\right) \dots \Delta^{\beta_m + \frac{n}{r}}\left(\frac{z_m - \bar{w}_m}{i}\right)},$$

$dv(w) = dudv; w = u + iv \in T_{\Omega}, \vec{z} = (z_1, \dots, z_m) \in T_{\Omega}$. Let $\beta_j > \beta_0, j = 1, \dots, m$ for some fixed enough large β_0 . Then $T_{\vec{\beta}}$ operator maps $L_{\vec{\nu}}^p(T_{\Omega}^m)$ into $A_{\vec{\nu}}^p(T_{\Omega}^m)$, $p_j > 1; \nu_j > \frac{n}{r} - 1, j = 1, \dots, m$.

Remark 1. For unit ball and unit disk this theorem can be seen in [14], [15]. We provide for simplisity our proof in the unit disk case since repetition of same arguments leads to the proof of theorem 1. The proof use only Minkowski and Holder's inequality and Forelly-Rudin estimate (5) which is avialable in tubular domaines over symmetric cones $\tau > -1, \tau_1 > \tau + \frac{2n}{r}$,

$$\int_{T_{\Omega}} \frac{\Delta^{\tau}(Im w) \cdot dv(w)}{\Delta(Im^{\tau_1}\left(\frac{w-z}{i}\right))} \leq c \Delta^{\tau - \tau_1 + \frac{2n}{r}}(Im z), z \in T_{\Omega}. \quad (5)$$

Remark 2. In the unit disk for $m = 1$ this result is classical and well-known fact (Bergman projection theorem in tubular domain ([10], [12])). The proof uses only Forelly-Rudin estimate from Lemma 1 and Holders and Minkowski inequalities and $m = 2$ and unit disk case is typical. We have in the unit disk $U = \{|z| < 1\}$, $m = 2$ case the following estimates.

The following theorem for $m = 1$ is well-knowns.

For any two n -tuples of real numbers $x = (x_1, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$ we consider integral operator

$$(R_{x,y}g)(w) = \Delta(Im w)^{-m\left(\frac{2n}{r}\right) + \sum_{i=1}^m y_i} \times \int_{T_{\Omega}} \dots \int_{T_{\Omega}} g(z_1, \dots, z_m) \cdot \prod_{j=1}^m \frac{(\Delta(Im z_j))^{x_j}}{\Delta(Im\left(\frac{\bar{z}_j - w}{i}\right))^{x_j + y_j}} \times dV(z_1) \dots dV(z_m)$$

for $g \in L^1(T_{\Omega}^m; dV_{x_1}, \dots, dV_{x_m}); w \in T_{\Omega}, x_j > -1; x_j + y_j > 0; j = 1, \dots, m$.

Theorem 2. *Let $s_j > (-1)$ and $s_j < p, ms_j + 1 > m\left(\frac{2n}{r} - y_j\right) - (m - 1)\left(\frac{2n}{r}\right), j = 1, \dots, m$. Then there is exist a constant $C > 0$ such that*

$$\int_{T_{\Omega}} |R_{x,y}g)(w)| \cdot \Delta(Im w)^{(m-1)\frac{2n}{r} + \sum_{j=1}^m s_j} \cdot dV(w) \leq$$

$$\leq C \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} g(z_1, \dots, z_m) \cdot \prod_{j=1}^m (\Delta^{s_j}(Im z_j)) dV(z_j).$$

Remark 3. This theorem is valid probably for all $p > 1$. Our theorem 2 for $m = 1$ case can be seen in [1] and [3].

We refer to [3]–[5] for definitions of weighted Hardy H_β^1 and A_β^∞ , $\beta \geq 0$ (analytic Bloch and Hardy type spaces in tube). We formulate a new sharp decomposition theorem for Bergman spaces in tube.

Let D be bounded (or unbounded) domain in \mathbb{C}^n . We seek equivalent relations of the following type $\|f_1 \dots f_m\|_X \asymp \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{X_j}$, where X, X_j are certain classes of analytic function spaces in D domain and f_1, \dots, f_m are concrete analytic functions from these domains. Such type sharp results were proved by author in various domains and various complex function spaces previously in [16]–[19]. In the following theorem we add a new result in this direction. A valuable remark will be added after theorem also.

Theorem 3. *We have*

$$\|f_1 \dots f_m\|_{A_\alpha^1} \asymp \prod \|f_j\|_{A_{\alpha_k}^1},$$

for some $\alpha, \alpha_k, k = 1, \dots, m, \alpha > -1, \alpha_k > -1, k = 1, \dots, m,$

or

$$\|f_1 \dots f_m\|_{A_\alpha^1(T_\Omega)} \asymp \prod_{j=1}^{m_0} \|f_j\|_{A_{\alpha_j}^1(T_\Omega)} \times \prod_{j=m_0+1}^m \|f_j\|_{X_j},$$

if

$$\prod_{i=1}^m f_i(\omega_i) = c_\beta \int_{T_\Omega} \prod_{j=1}^m f_j(z) \frac{\Delta^\beta(z) d\nu(z)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\frac{\beta+2n/r}{m}}(\frac{z-\omega_j}{i})},$$

where $X_j = A_{\beta_j}^\infty$ or $H_{\beta_j}^1$, $\beta > \beta_0$, β_0 is large enough, c_β is a constant of Bergman representation formula, and $w_j \in T_\Omega$ for all $j = 1, \dots, m, m_0 \geq 1$, some fixed indexes $\beta_k \geq 0, k = m_0 + 1, \dots, n$.

Note that if the amount of functions equal to one, then integral representation vanishes and we get a trivial relation.

This type sharp decomposition theorems in the ball and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary were proved earlier in [16]–[19].

Remark 4. The core of the proof of theorem 3 is a new special integral representation, uniform estimates for Bergman spaces and Forelly-Rudin formula in tube domains over symmetric cones. Probably this sharp decomposition theorem 3 can be extended from A_α^1 Bergman analytic function spaces in tubular domains over symmetric cones to all A_α^p spaces in tubular domains for all positive values of p and all $\alpha > -1$. We leave this interesting question as a problem for interested readers. Note that for strongly

pseudoconvex bounded domains this is true and it was proved previously by author in a recent paper with E. Tomashevskaya (see, for example, [16]-[18]). We remark for interested readers in addition that this sharp decomposition theorem 3 is valid with the same proof for A_α^1 Bergman function spaces in very general Siegel domains of second type, and also for bounded symmetric domains. Another interesting problem is to extend this sharp decomposition theorem 3 from A_α^1 function spaces in tubular domains to general $A_\alpha^{p,q}$ function spaces for all positive values p and q and $\alpha > -1$, or at least with some restrictions on positive parameters p and q . We leave this rather interesting question also to interested readers. This type decomposition problems may be considered and solved by similar methods also for Bergman type A_α^p harmonic function spaces of several variables in the upper half space and in the unit ball of \mathbb{R}^n . We leave this also to interested readers.

Remark 5. In various other domains this theorem 3 was proved previously by author. We refer the reader to [16]-[19] for similar type results in other analytic function spaces of several variables in other domains in \mathbb{C}^n .

All elementar tools (in particular uniform estimates and integral representations and Forelly-Rudin type estimates), which are needed to get similar type new sharp decomposition theorems in Bergman type function spaces of several variables in the unit polydisk and in harmonic function spaces in the unit ball and upper-half spaces can be seen in [20]-[22]. We pose this as a problem and leave this to various interested readers. We also note that similar type sharp decomposition theorems with very similar proofs may be valid also in minimal bounded homogeneous domains, Siegel domains of second type and also in various bounded symmetric domains in \mathbb{C}^n .

We refer to [20]-[22] for basic definitions of function theory in the polydisk and unit ball of \mathbb{R}^n of analytic and harmonic functions of several variables. We denote as usual A_α^p Bergman spaces in the polydisk U^n in \mathbb{C}^n and unit ball B^n in \mathbb{R}^n .

We have similarly as in tube domains in theorem 3 under certain integral condition in polydisk U^n $\|f_1 \dots f_m\|_{A_\alpha^1(U^n)}$ is equivalent to $\prod_{k=1}^m \|f_k\|_{A_{\alpha_k}^1(U^n)}$ (under certain Bergman type condition which vanishes for $m = 1$) for some $\alpha, \alpha_k, k = 1, \dots, m, \alpha > -1, \alpha_k > -1, k = 1, \dots, m$. Note that some modifications of relation which was provided above are also valid if we replace $A_{\alpha_k}^1$ by $A_{\alpha_k}^\infty$ or $H_{\alpha_k}^1$. Where these are analytic Bloch type and weighted Hardy classes in the polydisk U^n (see [20]-[22] for these spaces in the polydisk), for some $\alpha_k > -1$ (see for such results also theorem 3).

Very similarly for $A_\alpha^p(B^n)$ harmonic Bergman spaces in the ball B^n in \mathbb{R}^n we have under certain natural integral condition (which vanishes for $m = 1$) that $\|f_1 \dots f_m\|_{A_\alpha^1(B^n)}$ is equivalent to $\prod_{k=1}^m \|f_k\|_{A_{\alpha_k}^1}$, for some $\alpha > -1, \alpha_k > -1, k = 1, \dots, m$. With obvious

simple modifications of the right side of this sharp relation for weighted Hardy and Bloch spaces of harmonic functions spaces of several variables in the ball B^n of \mathbb{R}^n .

These assertions can be also shown for A_α^1 Bergman harmonic function spaces in \mathbb{R}^{n+1} and related Bloch and weighed Hardy spaces in these unbounded domains (see [20]-[22] and various references there for these spaces of harmonic functions of several variables in these domains).

Proofs in all cases are very similar and not difficult and can be probably extended even to all values of positive p , namely for A_α^p Bergman spaces in these domains, where $\alpha > -1$.

5. CONCLUSION

The theory of analytic function spaces in rather complicated and general tubular domains over symmetric cones. Is a new research area and our new results on Bergman type projections in these analytic function spaces may have various interesting applications in this new research area. In much simpler domains for example such as the unit ball, the unit polydisk, and upper half plane such type interesting applications are well known in literature.

All our results have rather transparent proofs and they with the same proof are also valid in various other domains (and various similar type analytic function spaces on them) such as, for example, Siegel domains of second type or bounded symmetric domains or minimal bounded homogeneous domains and they may have also many applications in complex function theory in these type domains. We leave this to interested readers. These all our results have with the same proof also complete analogues in Bergman type harmonic function spaces of several variables in upperhalf plane and in the unit ball in \mathbb{R}^n . We leave this task also to interested readers.

All our results can be probably extended to mixed norm A_α^{pq} spaces in tube and product of tube domains also and to analytic Herz spaces also in tube and in products of tube domains. We refer to [5] for many properties of A_α^{pq} mixed norm analytic function spaces in tube. To define such spaces in product domains is an easy task. We define analytic Herz spaces in tube as follows they have the following finite quazinorm

$$\int_{T_\Omega} \left(\int_{B(w,r)} |f(z)|^p dv_\alpha(z) \right)^{q/p} dv(w),$$

where $, q \geq 1, \alpha > -1$. Such type analytic function spaces in other domains are well studied.

Or we can replace integration by T_Ω by summation, and the inner integral by $D(a_k, r)$, where dv_α is weighted Lebesgue measure (see [5]) and (a_k) is r -lattice in tube (see [5]), and where $B(z, r)$ is a Bergman ball in tube domains, $z \in T_\Omega$ (see [5]).

To define such analytic mixed norm Herz spaces in product domains is an easy task. We pose an extension of all our results of this note to this type function spaces in tube and product of tube domains as a problem to interested readers.

In [23] new Bergman projection theorems were provided for new mixed norm spaces in the polydisk extending well known classical results. It will be interesting to find their complete analogues in tubular domain. We can easily define such spaces also in tube by simple iteration of a norm of A_α^{pq} spaces in T_Ω which we defined above.

Namely can we say that there is a bounded projection of Bergman type T_β , where β is large enough, from $L_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{p_1, \dots, p_m}$ to $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{p_1, \dots, p_m}$ spaces in T_Ω^m products of tube domains, $m \geq 1$.

Where analytic function spaces we indicated above have the following finite quasinorms $\|\dots\|f\|_{A_{\alpha_1}^{p_1, p_2} \dots} \|_{A_{\alpha_m}^{p_{m-1}, p_m}}$, $p_j \geq 1$, $j = 1, \dots, m$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$ (or related classes of measurable functions with L instead of A).

We denote new analytic Herz type spaces defined above by $H_\alpha^{p, q}$, $p, q \geq 1$, $\alpha > -1$, larger classes consisting from measurable functions by $L_\alpha^{p, q}$, for same parameters. The interesting question is T_β , for large enough β , that is Bergman projection bounded from spaces with norm $\|\dots\|f\|_{L_{\alpha_1}^{p_1, p_2} \dots} \|_{L_{\alpha_n}^{p_{n-1}, p_n}}$ to it is analytic subspace for all $p_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, n$.

Let $A_\alpha^{p, q}(T_\Omega \times \dots \times T_\Omega)$ be the space of analytic functions, so that

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \left(\int_V \dots \int_V |f|^p dx_1 \dots dx_m \right)^{q/p} \Delta^{\beta_1}(y_1) \dots \Delta^{\beta_m}(y_m) dy_1 \dots dy_m$$

is finite. We define large spaces of measurable functions similarly as usual replacing A by L . The open interesting question is the following, is there a bounded Bergman projection T_β for large enough β between these spaces for all $p, q \geq 1$, and $\beta_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

We refer the reader to [15], [24]–[28] for other new interesting results on Bergman projection in various analytic spaces and various domains.

Bergman projection theorems in \mathbb{C}^n may have many applications in function theory, for example to prove various embedding theorems in \mathbb{C}^n (see, for example, [6], [7], [11]–[13]).

The author thanks Dr. Natalia Makhina for technical help and support.

REFERENCES

1. SEHBA, B. F. (2009) Bergman-type operators in tubular domains over symmetric cones. *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.* 52 (2). Pp. 529–544.
2. DUREN, P., SCHUSTER, A. (2004) *Bergman spaces, Mathematical Surveys and Monographs*. 100. AMS.
3. SEHBA, B. F. (2009) *Operators in some analytic function spaces and their dyadic counterparts: PhD Dissertation*. Glasgow.144 p.
4. SEHBA, B. F. (2008) Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones. *Integr. Eq. Operator Theory*. 62. Pp. 233–245.
5. BEKOLLE, D., BONAMI, A., GARRIGOS, G. NANA, C., PELOSO, M., RICCI, F. (2001) *Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint, Proceedings of the international workshop on classical analysis*. Yaounde.88 p.
6. SEHBA, B. F., NANA, C. (2015) Carleson Embeddings and two operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones. *Integr. Eq. Operator Theory*. 83. Pp. 151–178.
7. ARSENOVIC, M., SHAMOYAN, R. (2011) Embedding relations and boundedness of the multifunctional operators in tube domains over symmetric cones. *Filomat*. 25 (4). Pp. 109–126.
8. FARAUT, J., KORANYI, A. (1994) *Analysis on symmetric cones*. New York: Oxford University Press.394 p.
9. DEBERTOL, D. (2003) *Besov spaces and boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains, Dottorato di Ricerca in Matematica*. Universita di Genova, Politecnico di Torino.
10. ZHU, K. (2005) *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*. New York: Springer-Verlag.255 p.
11. SHAMOYAN, R. F., MIHI'Ć, O. (2017) Embedding theorems for weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in tubular domains. *Roma J.* 1 (13). Pp. 93–115.
12. SHAMOYAN, R. F., MIHI'Ć, O. (2018) On some new sharp estimates in analytic Herz-type function spaces in tubular domains over symmetric cones. *Czechoslovak Math. J.* 56. Pp. 78–98.
13. SHAMOYAN, R., KURILENKO, S. (2015) On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n-dimensional complex space. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 7 (3). Pp. 383–388.

14. YAROSLAVTSEVA, O. V. (1999) *Some questions of representations in weighted spaces of holomorphic and the n -harmonic functions with mixed norm: PhD Dissertation.* Bryansk: BSU. 144 p.
15. SHAMOYAN, R. F., MIHIĆ, O. (2015) On a new function space in polyball. *Palestine Math. Journal.* 4 (1). Pp. 105–107.
16. SHAMOYAN, R. F., TOMASHEVSKAYA, E. B. (2020) On new decomposition theorems in some analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains. *Journal Sib. Fed. Univ. Math. and Phys.* 13 (4). Pp. 503–514.
17. SHAMOYAN, R. F., TOMASHEVSKAYA, E. B. (2020) On new sharp theorems for multifunctional BMOA type spaces in bounded pseudoconvex domain. *Vestn. KRAUNTS, Fiz.-Mat. Nauki.* 32 (3). Pp. 102–113.
18. SHAMOYAN, R. F., TOMASHEVSKAYA, E. B. (2020) On some new decomposition theorems in multifunctional Herz and Bergman analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains. *Vestn. KRAUNTS, Fiz.-Mat. Nauki.* 30 (1). Pp. 42–58.
19. SHAMOYAN, R. F. (2020) On some new decomposition theorems for multifunctional analytic Herz spaces in bounded strongly pseudoconvex domains. *Transaction of Razamadze Math. Institute.* 5. Pp. 45–49.
20. SHAMOYAN, F., DJRBASHYAN, A. (1988) *Topics in the theory of A_α^p spaces.* Teubner texte zur Math. 199 p.
21. DJRBASHIAN, A. E. (1983) Integral representation and continuous projections in harmonic function spaces. *Mat. Sbornik.* 121. Pp. 259–271.
22. DJRBASHIAN, A. E. (1987) A_α^p spaces of harmonic functions in a half spaces and an analogue of Riesz theorem. *Izv. NAN Armenii.* 22 (4). Pp. 386–397.
23. ANTONENKOVA, O. (2005) *Reproducing kernels, Cauchy transform, and bounded linear functionals in some new spaces of analytic functions in the polydisk, PhD dissertation.* Bryansk. 135 p.
24. SHAMOYAN, R., KURILENKO, S. (2016) On Bergman type integral operators on semiproducts of tubular domains over symmetric cones and multifunctional analytic function spaces. *Kragujevac Journal of Mathematics.* 5 (4). Pp. 180–209.
25. SHAMOYAN, R., KURILENKO, S. (2017) On Bergman type integral operators in tubular domains over symmetric cones. *Kragujevac Journal of Mathematics.* 41 (5). Pp. 295–312.
26. SHAMOYAN, R., POVPRITS, E. (2015) Bergman type projection theorems in Q_p function spaces. *ROMAI journal.* 45. Pp. 23–43.

27. SHAMOYAN, R., ARSENOVIC, M. (2012) On boundedness of some new multifunctional Bergman type integral operators in tubular domains over symmetric cones. *Proceedings Razmadze Math. Institute.* 6. Pp. 83–95.
28. SHAMOYAN, R. F., MAKHINA, N. M. (2024) On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains and tubular domains over symmetric cones. *Mathematica Montisnigri.* 60. Pp. 50–57.

Цитирование: Shamoyn R. F. On Bergman projections and sharp decomposition theorems in tubular and related domains in \mathbb{C}^n // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 18–34.

УДК: 517, 512

MSC2010: 93A30

DOI: 10.5281/zenodo.18818236

ВЗАИМОСВЯЗЬ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

© И. В. Гетманская

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
УЛ. АВИАМОТОРНАЯ 8А, МОСКВА, 111024, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *getmi@mail.ru*

THE RELATIONSHIP OF ESTIMATES OF FIRST- AND SECOND-ORDER DERIVATIVES.

Getmanskaya I. V.

Abstract. In the theory of approximation of functions and operators, theorems for comparing absolute values or norms of derivatives play an important role under certain restrictions on the function itself and its derivatives. A significant result in this direction is the exact A. N. Kolmogorov inequality [1] for the norms of intermediate derivatives through the norms of the function itself and its highest derivative. In the works of N. P. Dmitrieva [2], [3] found a two-way estimate of the norm of the first-order derivative using special vector-valued differentiable periodic splines on a class of bounded vector-valued differentiable functions with values in a spherical ring of an n -dimensional Euclidean space. The obtained results of comparing estimates of the norms of derivatives are used in [3] to find the maximum speed of an object moving along a given ring under restrictions on the power plant. In this paper, we study the relationship between estimates of the upper edges of first- and second-order derivatives of a function of one variable. The results of these studies are used in the formation of methods for nonlinear estimation of parametric regression [4]. The latter is based on the approximation by the Taylor formula of varying degrees of accuracy of the main numerical characteristics of the components of the estimation formulas [5].

In the practical application of the obtained approximations, the question arises of their correctness, the answer to which depends on the correctness of the representation according to the Taylor formula of the inverse relative to the estimated parameter of the regression function. The solution to this problem is related to the results of comparing random limited "O" values, which are the errors of the initial data and approximation formulas, on the one hand, and the two forms of error of the Peano and Lagrange approximation formulas.

At the same time, the dependence of the estimate of the absolute value of the second-order derivative on the first-order derivative is revealed. The consequences of the latter are the relationship between estimates of the absolute values of derivatives of the first and second order, the justification of which is carried out by methods of formal logic [6].

The results obtained do not contradict the generalized formulas for comparing the norms of derivatives. At the same time, for the special case of the generally accepted formulation of the problem, the approximate formulas proposed in the paper for comparing the norms of derivatives

of a function of one variable are much simpler, which is important for practical application and justified for the case of a function of one variable.

Keywords: *Taylor's formula, the error of the approximation formula, the comparison of the "big"small, theory of evidence, predicate statements, the logical operation relation to the condition, contraposition.*

ВВЕДЕНИЕ

В теории аппроксимации функции и операторов немаловажную роль играют теоремы сравнения абсолютных значений или норм производных при определённых ограничениях на саму функцию и её производные. Значительным результатом в этом направлении является точное неравенство А. Н. Колмогорова [1] для норм промежуточных производных через нормы самой функции и её старшей производной. В работах Н. П. Дмитриева [2], [3] на классе ограниченных векторнозначных дифференцируемых функций со значениями в шаровом кольце n -мерного Евклидова пространства найдена двухсторонняя оценка нормы производной первого порядка с помощью специальных векторнозначных дифференцируемых периодических сплайнов. Полученные результаты сравнения оценок норм производных применены в работе [3] для нахождения максимальной скорости движения объекта по заданному кольцу при ограничениях на мощность силовой установки.

В данной работе исследуется взаимосвязь оценок верхних граней производных первого и второго порядка функции одной переменной. Результаты этих исследований используются при формировании методов нелинейного оценивания параметрической регрессии [4]. Последнее базируется на приближении формулой Тейлора различной степени точности основных числовых характеристик составляющих формул оценивания [5].

В практическом применении полученных приближений встаёт вопрос их корректности, ответ на который зависит от корректности представления по формуле Тейлора обратной относительно оцениваемого параметра функции регрессии. Решение этой задачи связано с результатами сравнения случайных ограниченных "О"большое, которыми являются погрешности исходных данных и формул приближения, с одной стороны, и двух форм погрешности формулы приближения Пеано и Лагранжа, с другой стороны. При этом, обнаруживается зависимость оценки абсолютной величины производной второго от производной первого порядка. Следствия последнего: взаимосвязь между оценками абсолютных величин производных первого и второго порядка, обоснование которой осуществлено методами формальной логики [6].

Полученные результаты не противоречат обобщённым формулам сравнения норм производных. При этом, для частного случая общепринятой постановки задачи, предлагаемые в работе приближённые формулы сравнения норм производных функции одной переменной значительно проще, чем обобщённые формулы оценивания, что немаловажно для практического применения и оправдано для случая функции одной переменной.

1. УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ФОРМУЛОЙ ТЕЙЛОРА

В предположении того, что функция $y = Y(x) \subseteq D(Y) \times R(Y) \subseteq \mathfrak{R}^2$, где $D(Y)$ – область её определения, $R(Y)$ – область её допустимых значений, дифференцируема до $\nu+1$ -го порядка в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in D(Y)$, её представление $\forall x \in U(x_0)$ по формуле Тейлора [7] при $x \rightarrow x_0$ –

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{d^k Y(x_0)}{dx^k} \frac{(x-x_0)^k}{k!} + o((x-x_0)^\nu) \quad (1)$$

Здесь, если обозначить $x - x_0 = \varepsilon$, то $o(\varepsilon^\nu) = O(\varepsilon^{\nu+1})$ – погрешность (остаток) в форме Пеано.

Корректность формулы (1) зависит от радиуса ε окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 , в точках которой разлагается функция. Для $|\varepsilon| \geq 1$ формула некорректна, что необходимо учитывать в практике её применения.

В работе [8] приведено доказательство того, что при $|\varepsilon| < 1$ "о малое" $o(\varepsilon)$ можно оценить

$$o(\varepsilon) = O(\varepsilon^2) \leq \varepsilon^2.$$

Обобщение этого утверждения – следующая теорема.

Теорема 1. Если: $|\varepsilon| < 1$, то

$$|O(\varepsilon^k)| \leq |\varepsilon|^k. \quad (2)$$

Доказательство. Исходя из равенства $|O(\varepsilon^k)| = O(|\varepsilon^k|) = O(|\varepsilon|^k)$ и определения [7] ограниченной функции, $\forall \varepsilon \rightarrow 0 \exists \lambda \in \mathfrak{R} : 0 < \lambda < \infty$

$$|O(\varepsilon^k)| = O(|\varepsilon|^k) \leq \lambda |\varepsilon|^k. \quad (3)$$

Оценка λ следующая:

$$|\varepsilon| < \lambda < 1/|\varepsilon|,$$

иначе меняется порядок малости $O(|\varepsilon|^k)$ в формуле (3). Так как по условию теоремы $|\varepsilon| < 1$, то

$$\begin{aligned} \sup \lambda &= \min_{|\varepsilon|} \{1/|\varepsilon|\} = \lim_{|\varepsilon| \rightarrow 1} \frac{1}{|\varepsilon|} = 1, \\ \inf \lambda &= \max_{|\varepsilon|} \{|\varepsilon|\} = \lim_{|\varepsilon| \rightarrow 1} |\varepsilon| = 1. \end{aligned}$$

Поэтому $\lambda = 1$ и $|O(\varepsilon^k)| \leq |\varepsilon|^k$, что и следовало доказать. \square

Погрешность формулы Тейлора в форме Лагранжа [7]:

$$o(\varepsilon^\nu) = O(\varepsilon^{\nu+1}) = \frac{d^{\nu+1}Y(\xi)}{dx^{\nu+1}} \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

где $\xi \in U(x_0, \varepsilon)$. При сравнении погрешности приближения в форме Пеано с формой Лагранжа, применяя оценку (2), имеем

$$\left| \frac{d^{\nu+1}Y(\xi)}{dx^{\nu+1}} \frac{\varepsilon^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \right| = \left| \frac{d^{\nu+1}Y(\xi)}{dx^{\nu+1}} \right| \frac{|\varepsilon|^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \leq |\varepsilon|^{\nu+1}.$$

Из последнего получаем следующее условие корректности формулы приближения (1) точности $o(\varepsilon^\nu) = O(\varepsilon^{\nu+1})$

$$\left| \frac{d^{\nu+1}Y(\xi)}{dx^{\nu+1}} \right| \frac{1}{(\nu+1)!} \leq 1. \tag{4}$$

2. ЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

Теорема 2. Если для трижды дифференцируемой в точке $\xi \in D(Y)$ определённой в п.1 функции $y = Y(x)$ с ошибкой меньшей

$$\delta_1(\xi) = \left| \frac{1}{2} \frac{d^2Y(\xi)}{dx^2} \right|$$

выполняется

$$\left| \frac{dY(\xi)}{dx} \right| \leq 1, \tag{5}$$

то с ошибкой меньшей

$$\delta_2(\xi) = \left| \frac{1}{6} \frac{d^3Y(\xi)}{dx^3} \right|$$

выполняется

$$\left| \frac{d^2Y(\xi)}{dx^2} \right| \leq 2. \tag{6}$$

Доказательство. Для \forall т. $\xi \in D(Y)$, в которой выполняются условия теоремы, \exists т. $x_0 \in D(Y)$ и $U(x_0, \varepsilon)$ радиуса $\varepsilon < 1$: $\xi \in U(x_0, \varepsilon)$ и $\forall x \in U(x_0, \varepsilon)$ выполняется условия трижды дифференцируемости $Y(x)$, что предполагает возможным с точностью $o(\varepsilon^2)$ разложение функции $Y(x)$ в окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ по формуле Тейлора (1).

Достаточным условием корректности формулы Тейлора любой точности является оценка (4) с $\nu = 0$, из которой следует (5).

Её точность $|o(\varepsilon^1)| = |O(\varepsilon^2)|$, записанная в форме Лагранжа

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d^2 Y(\xi)}{dx^2} \right| \varepsilon^2,$$

оценка сверху которой

$$|O(\varepsilon^2)| = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2 Y(\xi)}{dx^2} \right| \varepsilon^2 < \frac{1}{2} \left| \frac{d^2 Y(\xi)}{dx^2} \right|,$$

что совпадает с $\delta_1(\xi)$.

Согласно теории разложения функции по формуле Тейлора, порядок малости очередного слагаемого увеличивается на единицу. Поэтому, если выполняется (4) с $\nu = 0$, то должно выполняться (4) $\forall \nu > 0$, в том числе и с $\nu = 1$, из чего следует (6).

Точностью оценки (6) $|o(\varepsilon^2)| = |O(\varepsilon^3)|$ в форме Лагранжа

$$|O(\varepsilon^3)| = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3 Y(\xi)}{dx^3} \right| \varepsilon^3,$$

а её оценка сверху

$$\frac{1}{6} \left| \frac{d^3 Y(\xi)}{dx^3} \right|,$$

которая совпадает с $\delta_2(\xi)$, что и требовалось доказать. \square

Для трижды дифференцируемой в т. $x \in D(Y)$ функции $y = Y(x)$, определённой в п. 1, примем обозначения следующих предикатов (функций высказываний) [6]

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \left| \frac{dY(x)}{dx} \right| \leq 1;$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) : \left| \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right| \leq 2.$$

Следствие 1. В условиях теоремы 2 $\overline{\mathbf{b}(\xi)} \rightarrow \overline{\mathbf{a}(\xi)}$.

Доказательство. В алгебре логики высказываний [6] теорему 2 можно записать логической операцией связи условием предикатов $\mathbf{a}(\xi) \rightarrow \mathbf{b}(\xi)$. Согласно её свойству контрапозиции [6], справедлива логическая эквивалентность

$$\mathbf{a}(\xi) \rightarrow \mathbf{b}(\xi) \equiv \overline{\mathbf{b}(\xi)} \rightarrow \overline{\mathbf{a}(\xi)},$$

что и требовалось доказать. \square

3. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОК ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

В качестве примеров рассматриваются основные элементарные функции или их композиции.

Примем следующие обозначения: отклонение значения $\left| \frac{dY(x)}{dx} \right|$ от пограничного её оценки (5)

$$\mu_1(x) = \left| \left| \frac{dY(x)}{dx} \right| - 1 \right|$$

и отклонение значения $\left| \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right|$ от пограничного её оценки (6)

$$\mu_2(x) = \left| \left| \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right| - 2 \right|.$$

Пример 1. $y = Y(x) = \sin(x)$.

Область определения функции $Y(x)$: $D(Y) = \mathfrak{R}$, а область допустимых значений $R(Y) = [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= \cos(x), \\ \frac{d^2Y(x)}{dx^2} &= -\sin(x), \\ \frac{d^3Y(x)}{dx^3} &= -\cos(x), \end{aligned}$$

В точке $x = \pi/4$

$$\mathbf{a} \left(\frac{\pi}{4} \right) : \left| Y' \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

$$\mathbf{b} \left(\frac{\pi}{4} \right) : \left| Y'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| < 2.$$

Теорема 2 $\mathbf{a} \left(\frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \mathbf{b} \left(\frac{\pi}{4} \right)$ выполняется.

Так как $\forall x$ высказывание $\bar{\mathbf{b}}(x) = false$, то следствие 1 для функции этого примера не проверяемо.

Пример 2. $y = Y(x) = tg(x)$.

Область определения функции $Y(x)$: $D(R) = \mathfrak{R} \setminus \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in N \right\}$.

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \\ \frac{d^2Y(x)}{dx^2} &= 2 \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}. \end{aligned}$$

В точке $x = \pi/4$

$$\bar{\mathbf{a}}\left(\frac{\pi}{4}\right) : \left|Y'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 > 1,$$

$$\bar{\mathbf{b}}\left(\frac{\pi}{4}\right) : \left|Y''\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 4 > 2.$$

Выполняется следствие 1 $\bar{\mathbf{b}}(\pi/4) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(\pi/4)$.

Пример 3. $y = Y(x) = \exp(1/x^2)$.

Область определения функции $Y(x)$: $D(Y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{dY(x)}{dx} = -\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^3},$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^4} \left(\frac{2}{x^2} + 3\right).$$

В точке $x = 1$

$$\bar{\mathbf{a}}(1) : |Y'(1)| = |-2\exp(1)| = 2e > 1,$$

$$\bar{\mathbf{b}}(1) : |Y''(1)| = 10e > 2.$$

Выполняется следствие 1 $\bar{\mathbf{b}}(1) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(1)$.

Пример 4. $y = Y(x) = \sqrt{1/\ln(x)}$,

область определения $Y(x)$: $D(Y) = (1, \infty) \subset \mathbb{R}$.

$$\frac{dY(x)}{dx} = -\frac{1}{2x} \frac{1}{\sqrt{\ln^3(x)}},$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \frac{1}{2x} \frac{1}{\sqrt{\ln^3(x)}} \left(\frac{3}{2\ln(x)} + \frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{d^3Y(x)}{dx^3} = \frac{1}{2x^2 \sqrt{\ln^3(x)}} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{2\ln(x)} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{15}{4\ln^2(x)}\right),$$

$$\delta_1(x) = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \right| = \left| \frac{1}{4x} \frac{1}{\sqrt{\ln^3(x)}} \left(\frac{3}{2\ln(x)} + \frac{1}{x}\right) \right|,$$

$$\delta_2(x) = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3Y(x)}{dx^3} \right| = \frac{1}{12x^2 \sqrt{\ln^3(x)}} \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{2\ln(x)} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{15}{4\ln^2(x)}\right).$$

В точке $x = \exp(1)$

$$\mathbf{a}(e) : \left| \frac{dY(e)}{dx} \right| = \frac{1}{2e} < 1,$$

$$\mathbf{b}(e) : \left| \frac{d^2 Y(e)}{dx^2} \right| = \frac{3}{4e} + \frac{1}{2e^2} < 2.$$

Теорема 2 $\mathbf{a}(e) \rightarrow \mathbf{b}(e)$ выполняется.

В точке $x = \exp(1/4)$

$$\bar{\mathbf{a}}(\sqrt[4]{e}) : \left| \frac{dY(\sqrt[4]{e})}{dx} \right| = \frac{4}{\sqrt[4]{e}} \cong 3.12 > 1,$$

$$\bar{\mathbf{b}}(\sqrt[4]{e}) : \left| \frac{d^2 Y(\sqrt[4]{e})}{dx^2} \right| = \frac{4}{\sqrt[4]{e}} \left(6 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \right) \cong 16.3 > 2.$$

Выполняется следствие 1 $\bar{\mathbf{b}}(\sqrt[4]{e}) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(\sqrt[4]{e})$.

В точке $x = \exp(1/2)$

$$\mathbf{a}(\sqrt{e}) : \left| \frac{dY(\sqrt{e})}{dx} \right| = \sqrt{\frac{2}{e}} \cong 0.86 < 1,$$

$$\bar{\mathbf{b}}(\sqrt{e}) : \left| \frac{d^2 Y(\sqrt{e})}{dx^2} \right| = \sqrt{\frac{2}{e}} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \cong 3.09 > 2.$$

Теорема 2 и её следствие 1 не выполняется.

Так как оценки (5) и (6) приближённые, толкование невыполнения теоремы и её следствия следующее:

1. Верхняя грань ошибки приближения оценки (6) –

$$\delta_2(\exp(1/2)) = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3 Y(\exp(1/2))}{dx^3} \right| = \frac{\sqrt{2}}{6e} \left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 3 \left(1 + \frac{1}{e} \right) + 15 \right) \cong 1.82.$$

а отклонение левой части неравенства (6) от правой –

$$\mu_2(\exp(1/2)) = \left| \left| \frac{d^2 Y(\exp(1/2))}{dx^2} \right| - 2 \right| \cong 3.09 - 2 = 1.09.$$

Так как отклонение оценки (6) $\mu_2(\exp(1/2)) \cong 1.09$ меньше верхней грани её ошибки приближения $\delta_2(\exp(1/2)) \cong 1.82$, то точка $x = \exp(1/2)$ является точкой неопределённости для оценки (6). Но, при этом, ошибка приближения оценки (6) должна быть < 1.82 , поэтому, так как разница между $\mu_2(\exp(1/2)) \cong 1.09$ и $\delta_2(\exp(1/2)) \cong 1.82$ невелика, то, с большой долей вероятности, можно предположить, что ошибка приближения $< \mu_2(\exp(1/2)) \cong 1.09$, тогда высказыванию $\bar{\mathbf{b}}(\sqrt{e})$ можно доверять.

2. Верхняя грань ошибки приближения оценки (5) –

$$\delta_1(\exp(1/2)) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{e}} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \cong \frac{3.09}{2} \cong 1.55,$$

а отклонение левой части неравенства (5) от правой –

$$\mu_1(\exp(1/2)) = \left| \left| \frac{dY(\exp(1/2))}{dx} \right| - 1 \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| \cong 0.14.$$

Так как отклонение оценки (5) $\mu_1(\exp(1/2)) \cong 0.14$ меньше верхней грани ошибки приближения оценки (5) $\delta_1(\exp(1/2)) \cong 1.55$, то точка $x = \exp(1/2)$ является точкой неопределённости для оценки (5).

Но, при этом, малое отклонение от пограничного оценки (5) и приближенность оценки позволяет предположить ложность высказывания $\mathbf{a}(\sqrt{e})$.

Выше изложенному не противоречит выполнение следствия 1

$$\bar{\mathbf{b}}(\sqrt{e}) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(\sqrt{e}).$$

Пример 5. Для функции $y = Y(x) = 2\arctg(x)$, область определения которой $D(Y) = \mathfrak{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= \frac{2}{1+x^2}, \\ \frac{d^2Y(x)}{dx^2} &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

В точке $x = 0$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}(0) : \left| \frac{dY(0)}{dx} \right| &= 2 > 1, \\ \mathbf{b}(0) : \left| \frac{d^2Y(0)}{dx^2} \right| &= 0 < 2. \end{aligned}$$

Этот пример доказывает то, что признак $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ не является достаточным признаком $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, то есть $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x})$, но $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \not\rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x})$.

Пример 6. Область определения функции

$$y = Y(x) = \frac{\exp(-x)}{x}$$

$D(Y) = \mathfrak{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= -\exp(-x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right), \\ \frac{d^2Y(x)}{dx^2} &= \exp(-x) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right), \\ \frac{d^3Y(x)}{dx^3} &= -\exp(-x) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right). \end{aligned}$$

В точке $x = -2$

$$\bar{\mathbf{a}}(-2) : |Y'(-2)| = \frac{e^2}{4} > 1,$$

$$\mathbf{b}(-2) : |Y''(-2)| = \frac{e^2}{4} < 2,$$

Этот пример доказывает то, что $\mathbf{b}(-2) \nrightarrow \mathbf{a}(-2)$.

В точке $x = -1$

$$\mathbf{a}(-1) : |Y'(-1)| = 0 < 1,$$

$$\bar{\mathbf{b}}(-1) : |Y''(-1)| = e > 2.$$

Теорема 2 не выполняется: $\mathbf{a}(-1) \nrightarrow \mathbf{b}(-1)$.

Объяснения невыполнения следующие:

1. Верхняя грань ошибки приближения оценки (6) –

$$\delta_2(-1) = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3 Y(-1)}{dx^3} \right| = \frac{e}{3} \cong 0.9.$$

Отклонение значения 2-й производной от пограничного значения её оценки (6)

$$\mu_2(-1) = \left| \left| \frac{d^2 Y(-1)}{dx^2} \right| - 2 \right| = |e - 2| \cong 0.72.$$

Так как $\delta_2(-1) \cong 0.9 > \mu_2(-1) \cong 0.72$, то точка $x = -1$ рассматриваемой функции является точкой неопределённости для оценки (6).

Но, так как $\delta_2(-1) \cong 0.9$ верхняя грань ошибки приближения оценки (6), то ошибка приближения оценки (6) не только < 0.9 , но и, с большой долей вероятности, она меньше 0.72, из чего следует достоверность высказывания $\bar{\mathbf{b}}(-1)$.

2. Верхняя грань ошибки приближения оценки (5) –

$$\delta_1(-1) = \frac{1}{2} \left| \frac{d^2 Y(-1)}{dx^2} \right| = \frac{e}{2} \cong 1.36.$$

Отклонение значения 1-й производной от пограничного значения её оценки (5)

$$\mu_1(-1) = \left| \left| \frac{dY(-1)}{dx} \right| - 1 \right| = |0 - 1| = 1.$$

Так как $\delta_1(-1) \cong 1.36 > \mu_1(-1) = 1$, то точка $x = -1$ рассматриваемой функции является точкой неопределённости для оценки (5).

Разница между значениями $\delta_1(-1) \cong 1.36$ и $\mu_1(-1) = 1$ оценки (5) в 2 раза больше, чем у оценки (6). Поэтому вероятность истинности высказывания $\mathbf{a}(-1)$ меньше, чем у высказывания $\bar{\mathbf{b}}(-1)$. Если предположить, что высказывание

$\mathbf{a}(-1)$ ложно, то выполняется следствие 1

$$\bar{\mathbf{b}}(-1) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(-1).$$

В точке $x = -3$

$$\mathbf{a}(-3) : |Y'(-3)| = \frac{2e^3}{9} > 1,$$

$$\mathbf{b}(-3) : |Y''(-3)| = \frac{5e^3}{27} > 2,$$

что демонстрирует выполнение следствия 1 $\bar{\mathbf{b}}(-3) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}(-3)$.

В точке $x = 1$

$$\mathbf{a}(1) : |Y'(1)| = \frac{2}{e} < 1,$$

$$\mathbf{b}(1) : |Y''(1)| = \frac{5}{e} < 2,$$

что демонстрирует выполнение теоремы 2 $\mathbf{a}(1) \rightarrow \mathbf{b}(1)$.

Выводы

В работе найдены условия корректности приближения функции одной переменной формулой Тейлора, необходимые в практике нелинейных оценок параметрической регрессии.

Выработка условий корректности формулы приближения осуществляется методом сравнения малых ограниченных величин.

Как результат этих исследований, обнаруживается связь между оценками производных первого и второго порядка.

Доказательство следствия сформулированного утверждения о зависимости оценок производных проводится методом формальной логики с использованием свойства контрапозиции логической операции связи условием высказываний-предикатов.

Два примера, как контрпримеры предполагаемого утверждения, доказывают его ошибочность.

Результаты приведённых в работе оценок производных первого и второго порядка для шести различных функций в различных точках их дифференцируемости не противоречат утверждениям о взаимозависимости приближённых оценок производных первого и второго порядка.

В точках дифференцируемости рассматриваемых функций, где ошибки приближения оценок производных первого и второго порядка меньше отклонения значений производных от пограничных оценок, доказанные теорема и её следствие выполняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учён. зап. Моск. Университета / 1939. — Вып. 30, Математика. Кн. 3. — С. 3–16.

KOLMOGOROV, A. (1939) On inequalities between the upper faces of successive derivatives of an arbitrary function over an infinite interval. *Moscow time. University. Issue 30. Mathematics (Book 3)*. Pp. 3–16.

2. Дмитриев, Н. П. Ильбахтин, Г. Г. Экстремум нормы производной на классе ограниченных векторзначных функций со значениями в шаровом кольце n -мерного евклидова пространства / Современное программирование // Материалы II Международной научно-практической конференции / Нижневартовск. — 14–16 ноября, 2019. — Нижневартовский государственный университет. — С. 22–27.

DMITRIEV, N. ILBAKHTIN, G. (2019) The extremum of the norm of a derivative on a class of bounded vector-valued functions with values in a spherical ring of an n -dimensional Euclidean space. *Modern programming. Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference. – Nizhnevartovsk*. Pp. 22–27.

3. Дмитриев, Н. П. Мамедли, Р. Э. Моделирование экстремума нормы производной на классе ограниченных векторзначных дважды дифференцируемых функций / Современное программирование // Материалы II Международной научно-практической конференции / Нижневартовск. — 14–16 ноября, 2019. — Нижневартовский государственный университет. — С. 28–30.

DMITRIEV, N. MAMMADLI, R. (2019) Modeling the extremum of the norm of a derivative on a class of bounded vector-valued doubly differentiable functions. *Modern programming. Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference. Nizhnevartovsk*. Pp. 28–30.

4. Гетманская, И. В. Интервальное оценивание нелинейной параметрической регрессии в пассивном эксперименте // Таврический вестник информатики и математики. -Симферополь / 2021. — № 4 (53). — С. 27–40.

GETMANSKAYA, I. (2021) Interval estimation of nonlinear parametric regression in a passive experiment. *The Tauride Bulletin of Computer Science and Mathematics. No.4(53)*. Pp. 27–40.

5. Гетманская, И. В. Состоятельная оценка параметра однопараметрической парной регрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — № 3. — С. 3–11.

GETMANSKAYA, I. (2006) Consistent estimation of the parameter of one-parameter pair regression. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences series*. No.3. Pp. 3–11.

6. Гетманская, И. В. Формализация в алгебре логики методов доказательства // Актуальные вопросы науки и образования. Сборник материалов VIII Международной научно-практической конференции. — М.: Экономическое образование, 2024. — С. 291–299.

GETMANSKAYA, I. (2024) Formalization of proof methods in the algebra of logic. *Current issues of science and education*. May 14, 2024, Moscow (Collection of materials of the VIII International Scientific and Practical Conference). Pp. 291–299.

7. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т.1. — М.: Высш. шк., 1988. — 712 с.

KUDRYAVTSEV, L. (1988) *Course of mathematical analysis. In 3 t.* Т. 1. Moscow: Higher School.

8. Гетманская, И. В. Оптимизация нелинейного несмещённого оценивания параметрической регрессии // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии. Сборник статей по материалам XXXVII международной заочной научно-практической конференции. — М.: Изд. Интернаука, 2016. — №2(30). — С. 24–36.

GETMANSKAYA, I. (2016) Optimization of nonlinear unbiased estimation of parametric regression. *Scientific discussion: questions of mathematics, physics, chemistry, biology. Collection of articles based on the materials of the XXXVII International Correspondence Scientific and Practical Conference*. No.2(30). Pp. 24–36.

Цитирование: Гетманская И. В. Взаимосвязь оценок производных первого и второго порядка // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — №3 (68). — С. 36–48.

УДК: 004.81

MSC2010: 68T10

DOI: 10.5281/zenodo.18818391

РАЗРАБОТКА ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ РАСТЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

© В. В. Брыкин

СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРОСП. ЛЕНИНА, 1, СУРГУТ, 628412, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *valentin.brykin@mail.ru*

**DEVELOPMENT OF A WEB APPLICATION FOR ANALYZING THE CONDITION OF
PLANTS USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES.**

Brykin V. V.

Abstract. This paper presents the development of a web application designed for the automated assessment of plant health through image analysis utilizing artificial intelligence. The growing demand for solutions in precision agriculture motivates this development, enabling optimized monitoring and diagnosis of crop conditions, reduced labor costs for manual inspection, and enhanced decision-making within the agro-industrial complex. The web application allows users to upload plant images and receive prompt assessments of their health, facilitating timely identification of problems and proactive interventions.

At the core of the application lies an artificial neural network (ANN) model trained using the TensorFlow and Keras machine learning libraries. The selection of ANNs stems from their ability to effectively process complex non-linear relationships in data and achieve high classification accuracy. To ensure reliable and precise diagnostics, the ANN model underwent training on an extensive dataset encompassing images of healthy and diseased plants of various species. Detailed investigation and preprocessing of the data included scaling, normalization, and augmentation techniques aimed at enhancing the model's robustness and generalization capabilities. The ANN architecture was optimized using regularization methods and hyperparameter optimization to achieve the best balance between accuracy and computational complexity. Experimental results demonstrate that the developed ANN model exhibits high classification accuracy, outperforming existing alternatives, enabling the effective detection of disease symptoms and developmental anomalies in plants at early stages.

The web application is developed using modern web technologies, including HTML, CSS, and JavaScript, ensuring cross-platform compatibility and accessibility from various device types, including personal computers, tablets, and smartphones. The application interface is designed with user-friendliness and intuitive understanding in mind for users with varying levels of technical expertise. Particular attention was paid to optimizing performance and image processing speed, which is achieved through the use of efficient algorithms and JavaScript code optimization. The application provides users with the ability to upload images directly from a device or utilize photographs taken in real-time. After image upload, automatic processing

and analysis are performed using the trained ANN model. The analysis results are displayed in a convenient and understandable format, including an assessment of plant condition and, if necessary, recommendations for further action.

All image operations are performed in the RGB color space, ensuring compatibility with most image formats and allowing the use of standard processing algorithms. Image preprocessing includes scaling and normalization to ensure a uniform input data format for the AI model. The developed web application is a promising tool for automated plant health analysis that can be used in various fields, including agriculture, horticulture, landscaping, and scientific research. Further development directions include expanding the image database, adding new features such as integration with geolocation systems and yield prediction, as well as optimizing the application's performance and scalability for handling large data volumes. This research contributes to the advancement of AI-driven solutions in agriculture, enabling more sustainable and efficient crop management practices.

Keywords: *web application, artificial intelligence, image classification, mobile devices, convolutional neural networks*

ВВЕДЕНИЕ

Автоматизированные системы дистанционного мониторинга состояния растений находят всё более широкое применение в сельском хозяйстве. Они позволяют своевременно выявлять заболевания, определять водный баланс и оценивать биомассу растений как в открытом грунте, так и в теплицах [1], [2], [3].

Распознавание состояния растений сводится к задаче классификации изображений. В качестве классификатора предлагается использовать искусственную нейронную сеть (ИНС) — модель, обучаемую без участия пользователя. Для оценки состояния растений используется многоклассовая классификация. Изображения будут отнесены к одному из восьми классов, представляющих наиболее распространенные заболевания растений:

- Бактериальная пятнистость (bacterial spot)
- Грибковая пятнистость (fungus spot)
- Здоровое (healthy)
- Фитофтороз (late blight)
- Листовая плесень (leaf mold)
- Ожог листьев (leaf scorch)
- Мучнистая роса (powdery mildew)
- Вирус жёлтой курчавости (yellow curl virus)

Классификатор выдаёт вектор вероятностей принадлежности входного изображения каждому из классов. Класс с наивысшей вероятностью считается результатом классификации.

В данной работе представлены этапы создания и развёртывания модели ИНС сверточной архитектуры для решения задачи многоклассовой классификации состояния растений по цветным изображениям:

- Непосредственно моделирование нейронной сети, результатом которого является обученная модель, способная генерировать результат с как можно более высокой точностью;
- Разработка веб-приложения, позволяющего развернуть созданную модель для общего пользования.

Все операции обработки изображений были выполнены в цветовом пространстве RGB.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДОЛОГИЯ

Для исследования использовались цифровые фотографии листьев здоровых и больных растений, доступные на платформе Kaggle. Набор данных состоит из 18 000 изображений, разделенных на 8 классов, по 2250 изображений в каждом классе, чтобы избежать дисбаланса классов. Дисбаланс классов может привести к переобучению модели, делая ее предвзятой в сторону класса с большим количеством данных [4].

Набор данных был разделён на три компонента в соотношении:

Обучающая выборка: 70% данных, используемых для обучения модели. Валидационная выборка: 15% данных, используемых для настройки гиперпараметров модели и предотвращения переобучения. Тестовая выборка: 15% данных, используемых для оценки качества работы обученной модели.

Для разработки использовалась облачная платформа Google Colab, интегрированная с учетной записью Google Диска, что упрощает исследования в области машинного обучения. В качестве классификатора использовалась свёрточная нейронная сеть (CNN) MobileNet, обученная на наборе данных ImageNet. Предварительное обучение позволяет значительно сократить время обучения модели [5], [6].

По итогам обучения модели MobileNet на изображениях растений были получены показатели общей точности (Accuracy): 78% на обучающей выборке, 59% — на валидационной. Разница показателей в 19% говорит о проблеме переобучения — излишней адаптации модели к обучающим данным с утратой обобщающей способности [7].

Одна из причин переобучения нейронной сети — чрезмерное количество нейронов. В MobileNet количество нейронов велико из-за её глубины. При расхождении точности между обучающей и валидационной выборками, обучение необходимо остановить и уменьшить количество нейронов в модели. Однако уменьшение количества нейронов может снизить точность, поэтому при переобучении желательно сохранять количество нейронов.

Для решения проблемы переобучения применялся алгоритм Dropout, который исключает случайные нейроны из сети с определённой вероятностью p на каждой итерации обучения. Это помогает обобщить модель и снизить её специализацию. Алгоритм Dropout применяется к классификационной части сети, перед выходным слоем “Dense”. Вероятность p , с которой нейроны отключаются, является единственным параметром алгоритма [8].

Для изучения влияния Dropout на качество модели было проведено несколько экспериментов с различными значениями p . Результаты приведены в таблице 1.

Значение вероятности p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Точность (обучающая выборка), %	76	79	84	88	87	84	80	72	70
Точность (проверочная выборка), %	66	71	75	85	84	76	70	64	61

Таблица 1. Применение алгоритма Dropout в Keras для модели на основе MobileNet

Анализ данных в таблице 1 показывает, что оптимальное значение вероятности p для алгоритма Dropout составляет 0.4. При этом значении модель демонстрирует наилучшую точность как на обучающей, так и на валидационной выборках, а также наибольший прогресс точности на валидационной выборке.

На рисунке 1 изображена динамика обучения модели MobileNet с применением метода исключения нейронов (Dropout) при $p = 0.4$.

```
Epoch 1/8
64/64 [=====] - 671s 10s/step - loss: 1.5996 - accuracy: 0.4538 - val_loss: 11.1643 - val_accuracy: 0.2246 - lr: 0.0010
Epoch 2/8
64/64 [=====] - 669s 10s/step - loss: 0.9971 - accuracy: 0.6742 - val_loss: 6.3521 - val_accuracy: 0.4600 - lr: 0.0010
Epoch 3/8
64/64 [=====] - 525s 8s/step - loss: 0.8133 - accuracy: 0.7410 - val_loss: 2.3861 - val_accuracy: 0.6426 - lr: 0.0010
Epoch 4/8
64/64 [=====] - 440s 7s/step - loss: 0.7048 - accuracy: 0.7696 - val_loss: 1.8320 - val_accuracy: 0.7048 - lr: 0.0010
Epoch 5/8
64/64 [=====] - 366s 6s/step - loss: 0.6680 - accuracy: 0.7924 - val_loss: 0.7391 - val_accuracy: 0.8143 - lr: 0.0010
Epoch 6/8
64/64 [=====] - 305s 5s/step - loss: 0.6342 - accuracy: 0.7990 - val_loss: 0.8367 - val_accuracy: 0.7984 - lr: 0.0010
Epoch 7/8
64/64 [=====] - 252s 4s/step - loss: 0.5914 - accuracy: 0.8042 - val_loss: 0.7685 - val_accuracy: 0.8170 - lr: 0.0010
Epoch 8/8
64/64 [=====] - 210s 3s/step - loss: 0.5744 - accuracy: 0.8772 - val_loss: 0.5322 - val_accuracy: 0.8506 - lr: 0.0010
```

Рис. 1. Обучение модели на основе MobileNet при $p = 0,4$

Таким образом, метод Dropout успешно предотвратил переобучение модели в рамках данной задачи.

На основании проведённых экспериментов и полученных результатов, рекомендуются следующие общие принципы применения Dropout как метода борьбы с переобучением в задачах распознавания изображений:

1. Начинать с медианных значений p (0.3–0.5), которые позволяют получить существенный эффект регуляризации без избыточного “разрежения” сети.

2. Выполнять эмпирический подбор p : наилучшее значение может зависеть от специфики задачи, архитектуры сети и размера обучающей выборки. Необходимо провести серию экспериментов с различными значениями p и оценить точность классификации на независимой тестовой выборке. Приветствуется кросс-валидация для более надёжной оценки производительности.

3. Отслеживать разницу между точностью на тренировочной и тестовой выборках: она является ключевым индикатором переобучения.

4. Рассмотреть возможность применения Dropout в нескольких слоях: это может усилить эффект регуляризации.

На рисунке 2 представлены графики зависимости точности и ошибки обучения модели MobileNet (для обучающей и валидационной выборок) после применения методов аугментации данных и Dropout.

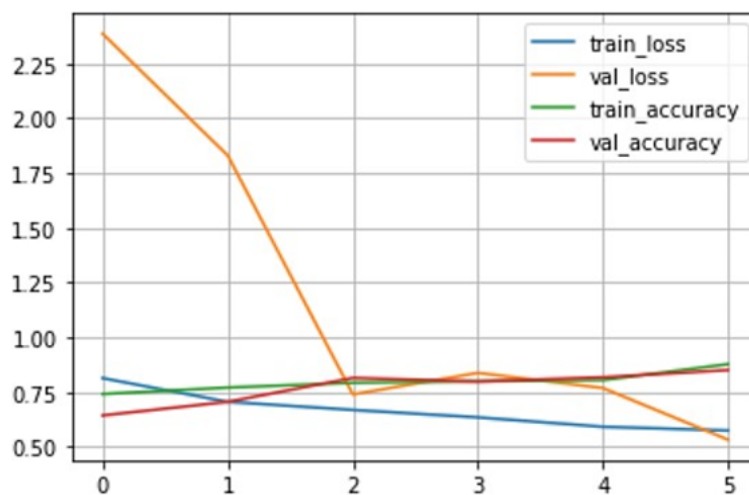


Рис. 2. Процесс обучения в графическом представлении

Легенда на рисунке 2 содержит следующие обозначения:

Синяя линия — “train_loss”: график ошибки модели на обучающей выборке.

Оранжевая линия — “val_loss”: график ошибки модели на проверочной выборке.

Зелёная линия — “train_ассигасу”: график точности работы модели на обучающей выборке.

Красная линия — “val_ассигасу”: график точности работы модели на проверочной выборке.

По оси абсцисс нумеруются эпохи обучения.

Представленные графики демонстрируют повышение точности обучения модели MobileNet как на обучающей, так и на валидационной выборке. Точность на обеих выборках достигла близких значений: 88% для обучающей и 85% для валидационной (зелёная и красная линии соответственно), что подтверждает эффективность использованных методов оптимизации модели.

Далее была проведена процедура тестирования обученной модели: случайным образом выбрано изображение из тестовой выборки (которое не участвовало в обучении) с помощью библиотек Keras для работы с изображениями (рисунок 3).

```

from PIL import Image
np.random.seed(200)
idx = np.random.randint(30)
test_images_dir = os.path.join('/content/drive/My Drive/PLANT_DIS_REC/datasets/Dataset/test', 'late_blight')
test1 = Image.open(os.path.join(test_images_dir, os.listdir(test_images_dir)[idx]))

plt.imshow(test1)
plt.title(os.listdir(test_images_dir)[idx])

Text(0.5, 1.0, 'late_blight.2050.jpg')
late_blight_2050.jpg
0
50
100
150
200
250
0 50 100 150 200 250

test1 = test1.resize((224,224))
test1_scaled = np.expand_dims(np.asarray(test1), axis = 0) / 255
predictions = mobilenet_model.predict(test1_scaled)
print(predictions)

[[5.6686909e-05 2.8846331e-04 1.5034264e-05 9.9963975e-01 6.2135714e-09
 8.8132729e-10 3.3346109e-10 4.1249504e-10]]

classes_dict = train_set_from_dir.class_indices
classes_dict = { v:k for (k,v) in classes_dict.items() }
classes_dict[np.argmax(predictions)]

'late_blight'

```

Рис. 3. Результат работы классификатора на основе MobileNet

Как видно из названия образца на рисунке 3, растение поражено болезнью “фитофтороз” (класс “late_blight”).

Модель выдаёт вероятностный массив принадлежности тестируемого изображения каждому из 8 классов. С вероятностью 99.9% изображение классифицировано как класс “3”. На рисунке 3 также видно, что этому классу соответствует “late_blight”, следовательно, классификация прошла успешно.

На успешном тестировании модели завершается первый этап, выполненный средствами библиотек машинного обучения Tensorflow и Keras, а также высокоуровневого языка Python, являющегося простым и надёжным при решении задач из области МО [9].

Для создания приложения необходимо развернуть модель MobileNet для общего доступа и преобразовать модель “mobilenet_model” из формата “H5” в формат “JSON”. Формат “JSON” позволяет обмениваться данными между клиентской и серверной частями приложения.

Для запуска моделей машинного обучения в браузере с использованием JavaScript и преобразования модели в формат, совместимый с JavaScript, используется библиотека TensorFlow.js. Она обладает рядом преимуществ:

- Визуализация: TensorFlow.js предоставляет множество инструментов для визуализации процессов обучения и работы модели (графики, анимация и др.).
- Доступ к сенсорам: библиотека позволяет напрямую обращаться к сенсорам устройства (камера, GPS и т. д.).
- Безопасность данных: данные обрабатываются непосредственно в браузере, что обеспечивает безопасность данных пользователя.
- Совместимость с Python: TensorFlow.js поддерживает модели, обученные в Python.

TensorFlow.js запускается в браузере, используя библиотеку WebGL, что обеспечивает высокую производительность при выполнении математических операций над тензорами [10].

Для преобразования модели в JSON-формат применяется команда tensorflowjs-converter. После выполнения этой команды на Google Диске создаётся архив с результатами, который необходимо распаковать и поместить данные в каталог “tensorflowjs-model”.

Развёртывание модели машинного обучения для широкой аудитории подразумевает создание веб-приложения. Веб-приложение позволяет пользователям взаимодействовать с моделью через браузер, используя компьютер, интернет и веб-сервер.

Пользовательский интерфейс создаётся с помощью языка разметки HTML и стилизуется каскадными таблицами CSS.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Тестирование разработанного веб-приложения проводилось на локальном веб-сервере, эмулирующем хостинг с помощью XAMPP (Apache + MariaDB + PHP + Perl) — бесплатной кроссплатформенной сборки веб-сервера.

Была проверена работа функциональных характеристик системы: загрузка модели машинного обучения в браузер, отображение загруженного изображения и вывод результатов классификации.

Чтобы протестировать приложение, пользователь должен кликнуть левой кнопкой мыши на светлую область в центре экрана (кнопка со значком стрелки загрузки) и выбрать изображение растения на своем устройстве (рисунок 4).



Рис. 4. Результат работы приложения

Из рисунка 4 видно, что сообщение “Модель успешно загружена” информирует об успешной загрузке преобразованной модели машинного обучения. Надпись на кнопке загрузки изменяется — после загрузки картинки предлагается заменить изображение. Также на рисунке 4 представлено изображение листа растения, поражённого бактериальной пятнистостью. Это изображение было взято из тестовой выборки, то есть модель не “видела” его во время обучения. Как видно, нейронная сеть правильно отнесла изображение к классу “bacterial_spot” с вероятностью 94.78%. Результат отображён на круговом индикаторе, заполненном соответственно вероятности, а также в виде числа под индикатором, округлённого до целого.

Тестирование приложения выявило следующие особенности работы системы классификации:

- Расположение объекта: объект (лист растения) должен занимать как можно большую часть изображения.
- Освещение: объект должен быть равномерно освещён.

При невыполнении этих требований точность распознавания снижается.

При создании приложения была применена Flexbox-технология, позволяющая пользоваться программой на устройствах мобильного формата (рисунок 5).

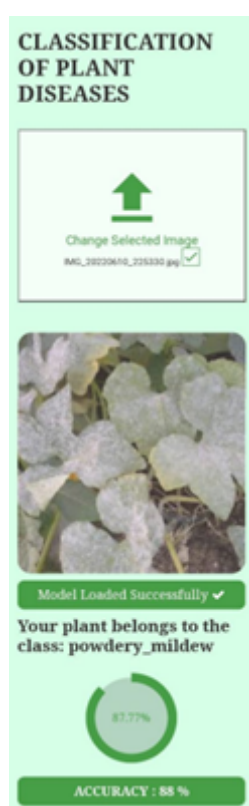


Рис. 5. Результат работы мобильной версии приложения

Первая классификация занимает больше времени (около 7-10 секунд), чем последующие (около 3-5 секунд). Это связано с затратами времени на инициализацию модели.

При попытке загрузить файл, не являющийся изображением, появляется всплывающее окно с предупреждением о некорректном формате файла.

Тестирование из рисунков 4-5 показало, что приложение успешно загрузило модель нейронной сети и корректно классифицировало предоставленное изображение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приведённой статье было рассмотрено создание веб-приложения, доступного для широкого круга пользователей и оптимизированного для мобильных устройств. Приложение основано на модели сверточной нейронной сети, решающей задачу классификации состояния растений по фотографиям.

Для повышения точности нейронной сети были использованы методы аугментации данных и Dropout, что позволило увеличить точность на 10% на обучающей выборке и на 26% на валидационной. Кроме того, была решена проблема переобучения модели.

Для дальнейшего повышения качества классификации необходимо использовать предварительную обработку изображений, например, увеличение контрастности, масштабирование и т. д.

Улучшенная модель была развёрнута для общего доступа в виде веб-приложения.

Проведено тестирование приложения с помощью локального веб-сервера XAMPP, что подтвердило корректную работу основных функций: запуск приложения, загрузка модели и файлов, генерация результатов классификации, вывод данных на экран, обработка ошибок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. RAHMAN, C. R., ARKO, P. S. et al. (2020) Identification and Recognition of Rice Diseases and Pests Using Convolutional Neural Networks. *Biosystems Engineering*. (Vol.194). Pp. 112–120.
2. RAHMAN, C. R., ISLAM, M. M. et al. (2019) Improved Segmentation Approach for Plant Disease Detection. *Proceedings of the 2019 1st International Conference on Advances in Science, Engineering and Robotics Technology (ICASERT)*. Pp. 1–5.
3. Брагинский, М. Я., Тараканов, Д. В. Фенотипирование растений адаптивной системой обработки изображений на базе свёрточных нейронных сетей // Физиология растений. — 2021. — №2(42). — С. 6–16.
BRAGINSKIY, M. Y., TARAKANOV, D. V. (2021) Plant Phenotyping by an Adaptive Image Processing System Based on Convolutional Neural Networks. *Bulletin of Cybernetics*. (Vol.2(42)). Pp. 1–5.
4. Сэмплинг в условиях несбалансированности классов [Электронный ресурс] // Loginom : [сайт]. — 2021. — Режим доступа: <https://loginom.ru/blog/imbalance-class> (дата обращения: 01.09.2025).

- Sampling under class imbalance conditions [Electronic resource] // Loginom : [website]. — 2021. — Available at: <https://loginom.ru/blog/imbalance-class> (Accessed: 01.09.2025).
5. Погружение в сверточные нейронные сети: передача обучения (transfer learning) [Электронный ресурс] // Хабр : [сайт]. — 2019. — Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/467967> (дата обращения: 02.09.2025).
- Deep dive into Convolutional Neural Networks: Transfer Learning [Electronic resource] // Habr : [website]. — 2019. — Available at: <https://habr.com/ru/post/467967> (Accessed: 02.09.2025).
6. Keras Applications [Электронный ресурс] // Keras: Deep Learning for humans : [сайт]. — 2024. — Режим доступа: <https://keras.io/api/applications> (дата обращения: 03.09.2025).
- Keras Applications [Electronic resource] // Keras: Deep Learning for humans : [website]. — 2024. — Available at: <https://keras.io/api/applications> (Accessed: 03.09.2025).
7. Николенко, С. Г. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей / С. Г. Николенко, А. Кадурич, Е. Архангельская. — Санкт-Петербург : Питер, 2018. — 477 с.
- NIKOLENKO, S G., KADURIN, A., ARKHANGELSKAYA, E. (2018) Deep Learning. Immersion into the World of Neural Networks. Saint Petersburg: Piter. 477 p.
8. Dropout — метод борьбы с переобучением нейронной сети [Электронный ресурс] // Про программирование : [сайт]. — 2020. — Режим доступа: https://proproprogs.ru/neural_network/dropout-metod-borby-s-pereobucheniem-neuronnoy-seti (дата обращения: 10.09.2025).
- Dropout — A method to combat neural network overfitting [Electronic resource] // Pro Programming : [website]. — 2020. — Available at: https://proproprogs.ru/neural_network/dropout-metod-borby-s-pereobucheniem-neuronnoy-seti (Accessed: 10.09.2025).
9. Рашка, С. Python и машинное обучение / С. Рашка, В. Мирджалили. — 3-е изд. — Москва ; Санкт-Петербург : Диалектика, 2020. — 848 с.
- RASCHKA, S., MIRJALILI, V. (2020) Python and Machine Learning. 3rd ed. Moscow; Saint Petersburg: Dialectics. 848 p.

10. Представляем TensorFlow.js: Машинное обучение в Javascript [Электронный ресурс] // Блог конференции DataStart по Data Science, Machine Learning и Big Data : [сайт]. — 2018. — Режим доступа: <https://datastart.ru/blog/read/predstavlyaem-tensorflowjs-mashinnoe-obuchenie-v-javascript> (дата обращения: 11.09.2025).

Introducing TensorFlow.js: Machine Learning in Javascript [Electronic resource] // DataStart Conference Blog on Data Science, Machine Learning and Big Data : [website]. — 2018. — Available at: <https://datastart.ru/blog/read/predstavlyaem-tensorflowjs-mashinnoe-obuchenie-v-javascript> (Accessed: 11.09.2025).

Цитирование: Брыкин В. В. Разработка веб-приложения для анализа состояния растений с использованием технологий искусственного интеллекта // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 49–60.

УДК: 621.316.7; 004.4

MSC2010: 004.5; 93C83; 93-04; 03B52; 62J86

DOI: 10.5281/zenodo.18818434

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА СО СЛОЖНЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

© А. Т. Карякин, В. А. Соцков

КАВАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Х.М. БЕРБЕКОВА

ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ, РОБОТОТЕХНИКИ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

360004, Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-MAIL: *karyakin2279@mail.ru*, *sozkov_va@rambler.ru*

**APPLICATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE METHOD TO IMPLEMENT A PROJECT
WITH COMPLEX NONLINEAR CONTROL.**

A. T. Karyakin, V. A. Sotskov

Abstract. The paper examines an approach to students studying artificial intelligence methods using the example of polynomial regression and fuzzy logic for indoor climate control. Fuzzy logic allows for uncertainty and variability of data, making this method effective in real-world conditions where parameters may be inaccurate or fuzzy, while the regression model allows for describing complex nonlinear dependencies between temperature and humidity and the level of perceived comfort. In developing a hybrid model and using more complex algorithms, students learn to use combinations of methods to improve the accuracy of control of the selected process.

In recent decades, there has been an active interest in the use of more complex nonlinear regression models in climate control systems. This is due to the fact that traditional methods using linear models have significant limitations; they assume the presence of strict and simple dependencies between input and output parameters, which may not reflect the complex and nonlinear nature of changes in microclimate conditions. In this regard, there is a need to use more complex mathematical apparatus, such as nonlinear regression and fuzzy logic. Nonlinear regression allows you to model complex dependencies between microclimate parameters and control actions, which makes it possible to more accurately predict changes in humidification, ventilation and air conditioning conditions. Fuzzy logic, in turn, allows you to take into account the uncertainties and variability of data, processing them in terms of "approximate" states, such as "cold", "warm", "humid", etc., which significantly improves the adaptability of the system. The implementation of the presented project showed that both approaches have significant potential for solving problems in the field of forecasting and managing climate processes. Evaluation of effectiveness showed that polynomial regression allows for fairly accurate forecasting of changes in microclimate parameters in the presence of complex relationships between temperature, humidity and the level of perceived comfort. The operation of fuzzy control systems is associated with the processes of fuzzification and defuzzification. Fuzzification translates crisp (classical) input values into membership degrees within corresponding fuzzy sets. At the inference stage, the "If..., then..." rule aggregates multiple conditions and produces a combined recommendation. Finally,

defuzzification performs the reverse translation: from the fuzzy domain, the system returns a final crisp value that has practical meaning for the operator or actuator. Defuzzification methods can vary, such as the center-of-gravity method, the mean-maximum method, the weighted average method, and others.

The practical results of applying fuzzy methods depend on the quality of the data. If the data base is collected irregularly and sensors frequently fail, any system cannot guarantee accuracy. Therefore, when implementing fuzzy logic, it is advisable to simultaneously modernize measurement and data collection systems and implement a comprehensive information flow management policy. In the context of the potential implementation of fuzzy logic, it is also necessary to consider the integration of such systems with existing control infrastructure. In a number of real-world industrial sectors, SCADA systems are often used to monitor technological processes in real time. Their traditional functionality includes collecting data from sensors, controlling actuators, and generating reports. To expand these capabilities, an additional fuzzy inference module could be developed that would receive current process parameter values from the SCADA and generate control actions taking into account uncertainty. Such a scheme would increase the level of automation and bring it closer to intelligence. To develop the necessary competencies in this complex area, the authors believe that the implementation of practical, integrated projects is a logical direction.

Keywords: *Polynomial regression, fuzzy logic, microclimate control, comfort coefficient, control systems, optimization of conditions.*

ВВЕДЕНИЕ

Управление климатическими условиями в помещениях является важной задачей, особенно в контексте повышения комфорта и энергоэффективности. Современные системы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха (ОВК) используют различные методы для поддержания оптимальной температуры и влажности [1]. Наибольшее распространение получили традиционные системы. Эти системы, как правило, реагируют на текущие показания температуры и влажности, но не всегда способны эффективно учитывать все вариации характеристик в окружающей среде [2].

В последние десятилетия наблюдается активный интерес к применению более сложных нелинейных регрессионных моделей в системах климатического контроля. Это связано с тем, что традиционные методы, использующие линейные модели, имеют существенные ограничения, они предполагают наличие строгих и простых зависимостей между входными и выходными параметрами, что может не отражать сложную и нелинейную природу изменения условий микроклимата. В связи с этим возникает необходимость в применении более сложного математического аппарата [3],

такого как нелинейная регрессия и нечеткая логика [4-5]. Нелинейная регрессия позволяет моделировать сложные зависимости между параметрами микроклимата и управляющими воздействиями, что дает возможность точнее предсказывать изменения в условиях увлажнения, вентиляции и кондиционирования [6]. Нечеткая логика, в свою очередь, позволяет учитывать неопределенности и вариативность данных, обрабатывая их в терминах «приблизительных» состояний, таких как «холодно», «тепло», «влажно» и т. д., что значительно улучшает адаптивность системы [5-6].

Цель работы. Обеспечить компетенции студентов по специальности Управление в технических системах к работе на основе методов Искусственного Интеллекта (ИИ) путем реализации проекта со сложным нелинейным управлением. Для этого разработан и исследован метод, который использует полиномиальную регрессию и нечеткую логику для улучшения точности и гибкости управления процессом поддержания комфортных условий путем контроля микроклимата в помещении. Ставится задача продемонстрировать, как сочетание различных методов ИИ может привести к улучшению качества управления климатом, повышению точности предсказаний и увеличению энергоэффективности систем ОВК. Научная новизна. Впервые рассмотрены методы полиномиальной регрессии и нечеткой логики как инструменты для управления климатическими условиями.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Проект с использованием микроконтроллера для осуществления управления микроклиматом в помещении можно реализовать с помощью различных датчиков и исполнительных механизмов. Представим набор компонентов, который опционально может входить в проект.

Микроконтроллер: основной контроллер, который будет управлять всем процессом, например, Arduino.

Датчики: датчик температуры и влажности (например, DHT11 или DHT22) — для измерения температуры и уровня влажности в помещении. Датчик CO₂ (если требуется) — для мониторинга качества воздуха.

Исполнительные механизмы:

- вентилятор — для вентиляции и поддержания свежего воздуха;
- нагревательный элемент — для поднятия температуры в холодные дни, может быть объединен с вентилятором как тепловая пушка;
- кондиционер — для охлаждения в жаркую погоду;
- увлажнитель/осушитель воздуха — для контроля уровня влажности.

Дополнительные модули:

- реле для управления работой вентиляторов, нагревателей и других устройств;
- LCD-дисплей для отображения текущих значений температуры и влажности;
- сетевой модуль (если требуется) для удаленного мониторинга и управления через интернет (например, ESP8266).

Процесс сбора данных включает в себя: считывание показаний температуры и влажности с датчиков DHT11 или DHT22 в реальном времени и передачу полученных данных на микроконтроллер для дальнейшей обработки и анализа.

В основе данной системы лежат два ключевых метода: полиномиальная регрессия и нечеткая логика. Моделирование зависимости температуры (T) и влажности (H), модель комфортного состояния (C) реализуется полиномиальной регрессией второго порядка и может быть записана следующим образом:

$$C = a_0 + a_1T + a_2H + a_3T^2 + a_4H^2 + a_5T \cdot H, \quad (1)$$

где: C — показатель комфортности состояния (например, индекс комфорта), T — температура (в градусах Цельсия), H — влажность (в процентах), $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ — коэффициенты полинома, которые определяются на основе данных.

Процесс оценки коэффициентов модели включает сбор статистических данных и их анализ с помощью методов оптимизации для нахождения лучших значений параметров. Нечеткая логика применяется для классификации состояний окружающей среды и принятия решений на основе неполных или неопределенных данных [8]. В частности, целесообразно использовать нечеткие правила для классификации состояния окружающей среды по следующим категориям: «холодно», «тепло», «сухо», «влажно». На основе нечетких правил, система принимает решения о необходимых действиях для поддержания комфортных условий в помещении.

2. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КЛИМАТОМ

Принятие решений на основе нечеткой логики позволяет системе адаптироваться к изменениям в окружающей среде, не требуя точных значений, что повышает гибкость и эффективность управления [9].

Для того чтобы система могла работать с нечеткими переменными, сначала производится фазификация данных. Процесс фазификации включает преобразование точных измерений температуры и влажности в нечеткие категории, например:

Температура 20 °C может быть преобразована в значение «холодно» или «умеренно тепло», в зависимости от границ, установленных в системе. Влажность 80 % может быть преобразована в значение «влажно».

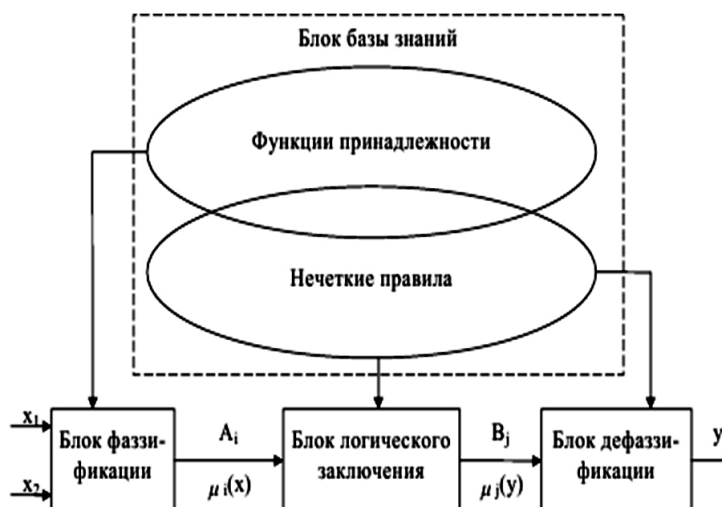


Рис. 1. Блочная структура системы управления регулятора нечеткой логики [8]

Фазификация позволяет системе управлять информацией, выраженной в терминах, более близких к естественному восприятию человека [10]. После применения нечетких правил, система получает нечеткие результаты, которые необходимо преобразовать в точные управляющие сигналы для устройств, таких как обогреватели или кондиционеры. Этот процесс называется дефазификацией. Для дефазификации может использоваться метод центраида, при котором вычисляется центр масс области, определяемой нечетким выходом. Математически это выражается как:

$$u = \frac{\int u\mu(u)du}{\int \mu(u)du}, \quad (2)$$

где: u — возможное управляющее значение, $\mu(u)$ — функция принадлежности для нечеткого выходного параметра. Этот метод позволяет получить точное значение управляющего сигнала, который затем передается в систему для реализации необходимых действий, таких как включение обогревающего или охлаждающего устройства [10-11].

3. РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Система управления микроклиматом, разработанная в рамках данного проекта, использует данные о температуре и влажности для вычисления индекса комфорта и принятия решений о действиях, которые необходимо предпринять для поддержания оптимальных условий в помещении. Программная часть проекта реализована на Python 3, блок-схема, которой представлена на рис. 2.

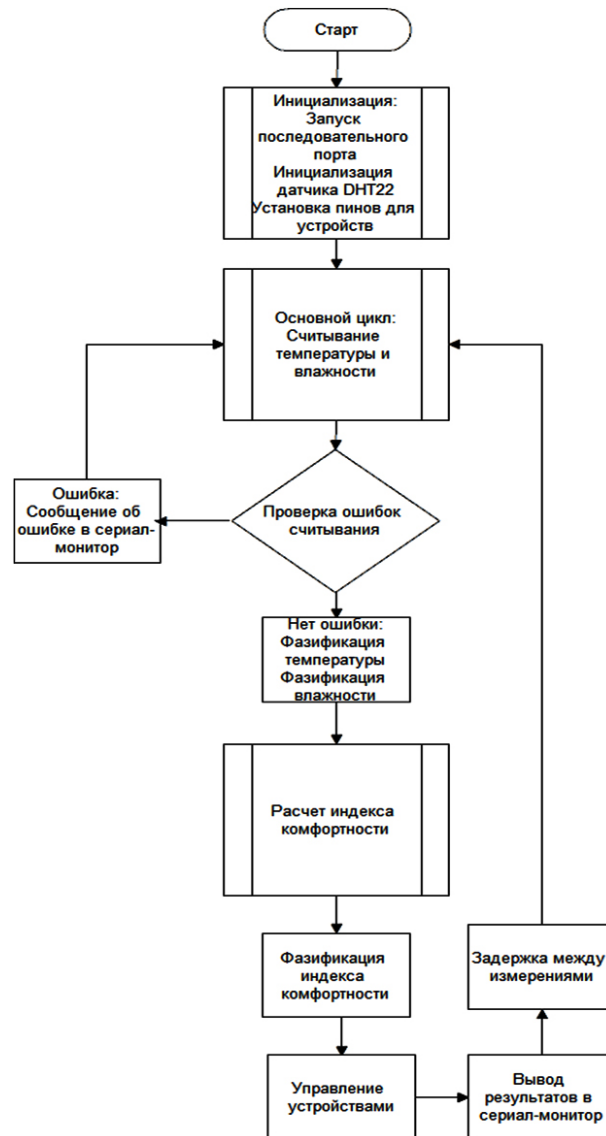


Рис. 2. Блок-схема программной части проекта

Приведенные на рис. 3 результаты работы программы показывают адекватность модели: наиболее комфортные условия наблюдаются в диапазоне $T = 23 - 28$ °С, после чего наблюдается нелинейное снижение индекса комфорта.

Приведенные на рис. 4 результаты работы программы также показывают адекватность модели: наиболее комфортные условия наблюдаются в диапазоне $H = 35 - 60$ % влажности, после чего наблюдается нелинейное снижение индекса комфорта.

Тестирование и отладка разработанной системы включала: проверку работы датчиков, тестирование реле, отладку кода. Также проведен ряд экспериментов: тестирование надежности, оценка времени отклика системы, применение нечеткой логики, тестирование полиномиальной регрессии. Все виды тестирования завершены успешно.

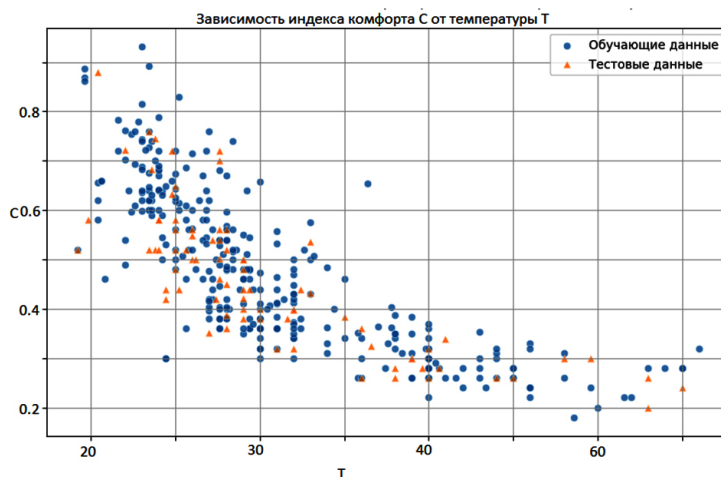


Рис. 3. Зависимость индекса комфорта C от температуры T

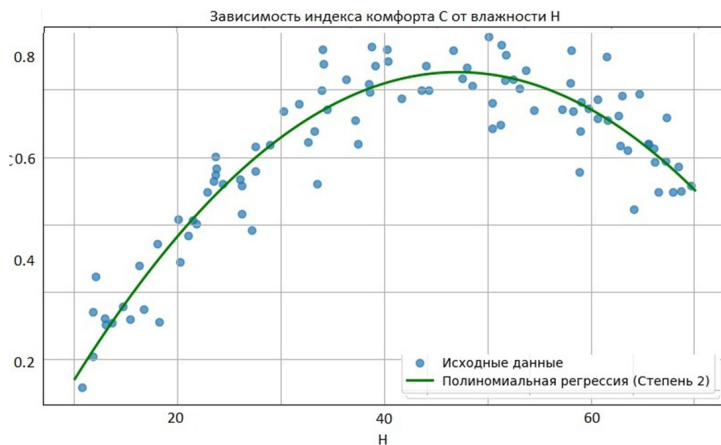


Рис. 4. Зависимость индекса комфорта C от влажности H

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного исследования рассмотрены методы полиномиальной регрессии и нечеткой логики как инструменты для управления климатическими условиями. Реализация представленного проекта показала, что оба подхода обладают значительным потенциалом для решения задач в области прогнозирования и управления

климатическими процессами. Оценка эффективности показала, что полиномиальная регрессия позволяет достаточно точно прогнозировать изменения параметров микроклимата при наличии сложных взаимосвязей между температурой, влажностью и уровнем ощущаемого комфорта.

Создание системы управления микроклиматом с помощью Arduino — это актуальный проект, который позволяет применять навыки программирования и работы с электроникой. Имеется возможность расширять функционал, добавляя новые датчики, управляющие устройства и алгоритмы, в зависимости от требований конкретного проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко, А. В. Модели управления микроклиматом в помещении / А. В. Карпенко, И. Ю. Петрова // *Фундаментальные исследования*. — 2016. — №7-2. — С. 224–229.

KARPENKO, A. V., PETROVA, I. Yu (2016) Models of indoor microclimate control. *Fundamental research*. 7-2. Pp. 224–229.

2. Сергиенко, Л. С. О компьютерном моделировании микроклимата в здании / Л. С. Сергиенко, В. Г. Житов // *Международная конференция «Математические модели и методы их исследования»* / Красноярск. — Изд-во ИВМ СО РАН, 2001. — Т. 2. — С. 191–195.

SERGIENKO L. S., ZHITOV V. G. (2001) On computer modeling of microclimate in a building. *International Conference "Mathematical Models and Methods of Their Research"*, Krasnoyarsk: Publishing House of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Vol. 2. Pp. 191–195.

3. Владыкин, И. Р. Взаимосвязанная система управления отопительно-вентиляционными установками в защищенном грунте / И. Р. Владыкин, Р. Г. Кондратьев, В. В. Логинов, В. А. Евтишин, И. С. Елесин // *Инженерный вестник Дона*. — 2013. — №1. — URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1506/
VLADYKIN I. R., KONDRATIEV R. G., LOGINOV V. V., YEVTISHIN V. A., and ELESIN I. S. (2013) Interconnected Control System for Heating and Ventilation Installations in Protected Ground. *Engineering Bulletin of the Don*. 1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1506/

4. Бушер, В. В. Применение систем на базе нечёткой логики в климатических установках / В. В. Бушер, Мельникова Л. В. // Электромеханические и компьютерные системы. — 2012. — №7(83). — С. 068–073.
BUSHER V. V., MELNIKOVA L. V. (2012) Application of fuzzy logic-based systems in climate control systems. *Electromechanical and Computer Systems*. 7 (83). Pp. 068–073.
5. Карякин, А. Т. Применение методов нечеткого логического вывода в системах управления ресурсами энергетических предприятий с учетом экономической эффективности / А. Т. Карякин // Экономика: вчера, сегодня, завтра. — 2025. — Том 15. — №2А. — С. 145–157.
KARYAKIN A. T. (2025) Application of fuzzy logic methods in resource management systems of energy enterprises, taking into account economic efficiency. *Economy: yesterday, today, tomorrow*. Vol. 15. No 2A. Pp. 145–157.
6. DAN ZHANG, QIUJUN LU (2016) Robust Regression Analysis with LR-Type Fuzzy Input Variables and Fuzzy Output Variable *Journal of Data Analysis and Information Processing*. No. 4. pp. 64–80.
7. BURL J. B. (1998) Fuzzy Control Systems. *In Advances in Control Systems Elsevier*. Vol. 1. pp. 1–28.
8. Демидова, Г. Л., Лукичев, Д. В. Регуляторы на основе нечеткой логики в системах управления техническими объектами. — СПб: Университет ИТМО, 2017. — 81 с.
DEMIDOVA G. L. and LUKICHEV D. V. (2017) *Fuzzy logic-based controllers in technical objects control systems*. SPb: ITMO Universitya.
9. Акперов, Г. И. Способ нечеткого сравнения для управления функционированием организационной системы / Г. И. Акперов // Инженерный вестник Дона. — 2024. — №10. — URL: ivdon.ru/magazine/archive/n10y2024/9535/
AKPEROV G. I. (2024) The method of fuzzy comparison for managing the functioning of an organizational system. *Engineering Bulletin of the Don*. 10. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n10y2024/9535/
10. KARR, M. P., & BURGE J. (2024) Fuzzy Logic Control for Robotics and Automation. *IEEE Robotics & Automation Magazine*. No. 21(1). pp. 67–75.

11. Бирюлин, В. И. и др. Модель нечеткого логического вывода оценки энергоэффективности промышленных предприятий / В. И. Бирюлин и др. // Строительство и архитектура. — 2022. — Т.10. — №1. — С. 31–35.

BIRYULIN V. I., et al. (2022) Fuzzy Logic Inference Model for Assessing the Energy Efficiency of Industrial Enterprises. *Construction and Architecture*. Vol. 10. No 1. Pp. 31–35.

Цитирование: Карякин А. Т., Соцков В. А. Применение метода искусственного интеллекта для реализации проекта со сложным нелинейным управлением // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 61–70.

УДК: 004.93

MSC2020: 68T01

DOI: 10.5281/zenodo.18818478

РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ЛИЦ СТУДЕНТОВ АКАДЕМИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

© М. Г. Козлова, Н. И. Гуменюк

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: art-inf@mail.ru

DEVELOPMENT OF AN APPLICATION FOR FACIAL RECOGNITION OF STUDENTS IN AN ACADEMIC GROUP.

Kozlova M. G., Gumenuk N. I.

Abstract. Facial recognition is one of the most promising and rapidly developing technologies in artificial intelligence and computer vision. It is widely used in a wide range of fields, from security and monitoring to improving user experiences in mobile apps and marketing.

However, recognizing faces in complex and dynamic environments, such as video, remains one of the most challenging tasks. Effectively addressing this challenge requires systems that can quickly and accurately detect and identify faces in real time, even in the presence of interference. Advances in machine learning, neural network models, and mobile computing have opened the door to implementing facial recognition directly on user devices, improving application performance and enhancing transaction privacy.

Facial recognition technology has come a long way thanks to significant advances in artificial intelligence (AI) and machine learning. These innovations are taking the accuracy and speed of facial recognition systems to new heights, driving change in industries and improving user experiences worldwide. One of the most significant improvements in recent years has been the increased accuracy of facial recognition algorithms. AI-powered systems now use deep learning methods, particularly convolutional neural networks (CNNs), to analyze facial features with unprecedented accuracy. These advanced models can recognize even the most subtle facial features, improving accuracy in a variety of conditions, including lighting, facial expressions, and camera angles. This leap in accuracy has significantly reduced the likelihood of error, making facial recognition systems much more reliable.

Modern facial recognition systems demonstrate high performance when working with large streams of people and challenging filming conditions. For example, the FA6 Class platform combines computer vision, biometric analysis, and modular integration with external systems, ensuring accurate identification in real time. Thanks to high-performance video processing algorithms and the use of peripheral devices for primary analytics, such solutions enable instant verification of biometric data against local or corporate databases, maintaining stable operation even with low image quality.

This paper describes the development of a mobile application using facial recognition methods based on convolutional neural networks. The main goal is to recognize and identify the faces of students in a specific group. Google ML Kit is used for face detection and FaceNet for face recognition.

This paper examines methods, models, and technologies for face detection and recognition, and describes client-server interaction. Using these methods and the server component, an application was developed that enables real-time video processing and high-precision face initialization.

Keywords: *recognition, classification, convolutional neural networks, Google ML Kit, FaceNet.*

ВВЕДЕНИЕ

Распознавание лиц является одной из самых перспективных и активно развивающихся технологий в области искусственного интеллекта и компьютерного зрения. Эта технология находит широкое применение в самых разных сферах: от обеспечения безопасности и мониторинга до улучшения пользовательского опыта в мобильных приложениях и маркетинге. Так, в статье [1] исследуются алгоритмы и методы распознавания лиц на видеоизображениях, библиотеки OpenCV и face_recognition. В [2] описаны основные сферы и области применения технологии распознавания лиц, например: контроль доступа — быстрый и бесконтактный доступ на территорию, контроль посещений и перемещений, объективный учёт рабочего времени; построение аналитики — определение пола, возраста, эмоций и другой информации о клиентах, выявление предпочтений покупателей, анализируя их поведенческие факторы. В [3] авторы анализируют результаты тестирования наиболее широко известных моделей и библиотек по распознаванию лиц. В статье [4] говорится о том, что рынок распознавания лиц быстро растёт и расширяется в разных направлениях, включая правительство, здравоохранение, безопасность, розничную торговлю, маркетинг, посадку в аэропортах и многое другое. Также упоминается о тенденциях в развитии технологии распознавания лиц, таких как бесконтактные биометрические решения.

Однако одной из самых сложных задач остаётся распознавание лиц в сложных и динамичных условиях, например, на видео. Для эффективного решения этой проблемы необходимы системы, которые могут быстро и точно обнаруживать и идентифицировать лица в реальном времени, даже при наличии помех. Развитие технологий машинного обучения, нейросетевых моделей и мобильных вычислений открыло возможность реализации распознавания лиц непосредственно на пользовательских устройствах, что позволяет улучшить производительность приложений и повысить уровень конфиденциальности операций.

Технология распознавания лиц прошла долгий путь развития благодаря значительным достижениям в области искусственного интеллекта (ИИ) и машинного обучения. Эти инновации поднимают точность и скорость систем распознавания лиц на новую высоту, что приводит к изменениям в отраслях и улучшит пользовательский опыт во всём мире. Одним из наиболее значимых улучшений за последние годы стало повышение точности алгоритмов распознавания лиц. Системы на базе искусственного интеллекта теперь используют методы глубокого обучения, в частности свёрточные нейронные сети (CNN), для анализа черт лица с беспрецедентной точностью. Эти усовершенствованные модели могут распознавать даже самые незначительные особенности лица, повышая точность в различных условиях, будь то разное освещение, выражение лица или ракурс. Такой скачок в точности значительно сократил вероятность ошибки, сделав системы распознавания лиц гораздо более надёжными.

Благодаря использованию оптимизированных алгоритмов и мощных вычислительных возможностей современные системы распознавания лиц могут обрабатывать и сопоставлять лица в режиме реального времени. Такая быстрая обработка крайне важна для приложений, требующих быстрой верификации, например для систем безопасности в аэропортах или аутентификации мобильных устройств. Возможность практически мгновенно сканировать и распознавать лица сделала эти системы высокоэффективными, сократив время ожидания и повысив удовлетворённость пользователей. Кроме того, способность ИИ адаптироваться и совершенствоваться с течением времени играет ключевую роль в развитии технологии распознавания лиц. По мере обработки всё большего объёма данных эти системы становятся лучше в работе с пограничными случаями, такими как изображения низкого качества или частичные изображения лиц. Этот процесс непрерывного обучения гарантирует точность и надёжность систем даже при столкновении с новыми и разнообразными сценариями.

Особую значимость приобретает возможность обнаружения и отслеживания конкретного человека среди множества других. Подобная задача встречается в ситуациях, где требуется оперативная и точная идентификация: в местах массового скопления людей, на объектах с повышенными требованиями к безопасности, при поиске людей или предоставлении персонализированных услуг. Технология, которая позволяет эффективно и в реальном времени решать эту задачу, должна обладать высокой точностью и способностью работать с большими потоками данных.

Современные системы распознавания лиц демонстрируют высокую эффективность при работе с большими потоками людей и сложными условиями съёмки. Например, платформа FA6 Class сочетает компьютерное зрение, биометрический анализ

и модульную интеграцию с внешними системами, обеспечивая точную идентификацию в реальном времени [5]. Благодаря высокопроизводительным алгоритмам обработки видеопотока и использованию периферийных устройств для первичной аналитики, подобные решения позволяют мгновенно сверять биометрические данные с локальными или корпоративными базами, сохраняя стабильность работы даже при низком качестве изображения.

Аналогичный подход реализован и в ряде городских систем безопасности, таких как система видеонаблюдения в аргентинском городе Тигре [6]. Там использована масштабная сеть камер и система NeoFace Watch, позволяющая автоматически распознавать лица и сопоставлять их с национальными базами данных в режиме реального времени.

Однако подобные платформы, несмотря на их высокую точность и функциональность, обладают существенными ограничениями: корпоративные системы наподобие FА6 Class являются коммерческими и требуют дорогостоящей интеграции, а крупные инфраструктурные решения вроде комплекса в Тигре имеют высокую сложность развертывания и обслуживаются специализированными структурами. Это делает их малоприспособленными для локальных, узкоприкладных задач, таких как идентификация студентов в учебной аудитории.

Поэтому возникает необходимость в компактном и доступном решении, способном обеспечить приемлемый уровень точности и скорости без избыточной инфраструктуры. Основной задачей данной работы является разработка мобильного приложения, которое сможет обнаруживать и идентифицировать лица студентов в режиме реального времени непосредственно с пользовательского устройства. Целью исследования является создание решения, которое сочетает высокую точность, скорость и устойчивость к помехам, что делает его применимым в широком спектре практических задач.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ЛИЦА

1.1. Обнаружение и отслеживание лиц в видео. Для обнаружения и отслеживания лиц в видео можно использовать глубокие нейронные сети, специально настроенные для работы с видеоданными. Одним из эффективных подходов является использование комбинации детектора лиц на основе сверточных нейронных сетей (CNN) с последующим алгоритмом отслеживания движущихся объектов (например, алгоритмом опорных векторов или методом опорных точек). Рассмотрим основные шаги и архитектуру модели для такой задачи.

Первым шагом является построение модели для обнаружения лиц в видео.

Для начала строится модель для обнаружения лиц в кадрах видео. Для этого можно использовать предварительно обученную модель, такую как Single Shot MultiBox Detector (SSD) или You Only Look Once (YOLO), которые показывают хорошую производительность в реальном времени.

Приведем пример архитектуры модели SSD для обнаружения лиц:

```
python
import tensorflow as tf
from tensorflow.keras.applications import MobileNetV2
from tensorflow.keras.layers import Conv2D, Reshape
from tensorflow.keras.models import Model
# Загрузка предварительно обученной модели MobileNetV2 без полносвязных слоев
base_model = MobileNetV2(input_shape=(224, 224, 3),
include_top=False, weights='imagenet')
# Замораживаем веса предварительно обученной модели
base_model.trainable = False
# Добавляем дополнительные слои для детекции лиц
x = base_model.output
x = Conv2D(256, (3, 3), activation='relu', padding='same')(x)
x = Conv2D(128, (3, 3), activation='relu', padding='same')(x)
# 4 координаты bounding box'a
predictions = Conv2D(4, (3, 3), activation='sigmoid', name='face_detection')(x)
# Компилируем модель
model = Model(inputs=base_model.input, outputs=predictions)
# Вывод архитектуры модели
model.summary()
```

Следующим этапом является отслеживание лиц в видео. После обнаружения лиц на каждом кадре видео необходимо отслеживать эти лица в последующих кадрах. Для этого можно использовать алгоритмы отслеживания объектов, такие как Kalman Filter или SORT (Simple Online and Realtime Tracking). В качестве примера рассмотрим использование SORT для отслеживания лиц.

```
python
from sort import Sort # pip install sort
tracker = Sort()
# Пример получения bounding box'ов из модели детекции лиц
frames = [] # список кадров видео
# Для каждого кадра:
# Получаем bounding box'ы с помощью модели детекции лиц
```

```
# Передаём bounding box'ы в SORT для отслеживания
detections = model.predict(frame)
tracked_objects = tracker.update(detections)
# Отрисовываем tracked_objects на кадре видео
```

Замечание по архитектуре и процессу:

1. Детектор лиц на основе CNN: в приведенном примере используется MobileNetV2 как базовая модель без полносвязных слоев. Несколько свёрточных слоёв добавляется для улучшения точности детекции лиц. Финальный слой используется для предсказания bounding box'ов лиц на изображении.

2. Отслеживание лиц в видео: после детекции лиц на каждом кадре видео используется алгоритм отслеживания SORT для непрерывного отслеживания этих лиц на последующих кадрах. SORT осуществляет ассоциацию и отслеживание объектов на основе истории и предсказаний.

Преимущества использования такой модели:

- высокая точность детекции: использование глубоких свёрточных сетей позволяет добиться высокой точности при детекции лиц в видео;

- работа в реальном времени: модели типа SSD или YOLO позволяют обрабатывать кадры видео в реальном времени, что важно для задач видеонаблюдения и аналитики;

- непрерывное отслеживание: алгоритмы отслеживания объектов, такие как SORT, обеспечивают непрерывное отслеживание лиц на протяжении видео, что полезно для задач видеоаналитики.

Таким образом, построение модели для обнаружения и отслеживания лиц в видео с использованием глубоких нейронных сетей и алгоритмов отслеживания представляет собой эффективный подход к решению задачи видеоаналитики и безопасности.

В связи со спецификой постановки задачи по обнаружению лиц студентов конкретной академической группы (например, преподавателем) в рамках проекта курса «Интеллектуализация обработки информации» [7] выбраны инструменты и технологии аналогичные приведённым.

1.2. Проект обнаружения лиц. На первом этапе проекта для задачи обнаружения лица был использован Google ML Kit Face Detection [8]. ML Kit предоставляет простой API, который позволяет находить лица на изображениях или видеопотоке. Речь идёт только о детекции, а не распознавании личности – библиотека определяет, где находится лицо, но не может сказать, кто изображён.

ML Kit использует комбинацию классических методов компьютерного зрения и современных нейронных сетей. Работа детектора начинается с обработки исходного

изображения. Перед тем как передать данные в модель, ML Kit приводит изображение к корректной ориентации, нормализует яркость и цветовые каналы и, если это необходимо, уменьшает разрешение. Такая предварительная подготовка помогает алгоритму успешно справляться со сложными условиями, включая слабое освещение, шум, смещение экспозиции и быстрые движения. В основе процесса лежит компактная сверточная нейронная сеть, анализирующая изображение целиком и прогнозирующая, где на нём могут находиться лица. Архитектурно эта сеть относится к классу однопроходных детекторов, таких как SSD. Сеть не сканирует изображение по отдельным зонам и не проводит каскадных проверок, а анализирует его за один прямой проход, одновременно извлекая признаки и определяя потенциальные рамки объектов. Такая архитектура обеспечивает сочетание скорости и достаточной точности, что критически важно для работы в реальном времени. Внутренне сеть напоминает упрощённый вариант MobileNet: она сочетает свёртки с малым числом параметров и операции глубинного разделения, что позволяет резко уменьшить объём вычислений, сохраняя информативность признаков. Нейросеть обучена распознавать характерные визуальные признаки лица: симметрию, форму, контрасты глаз и рта, относительное расположение ключевых частей.

После того как модель находит лицо и определяет его границы, вступает в работу другая нейронная сеть, занимающаяся локализацией ключевых точек. Она прогнозирует положение глаз, носа, рта и других важных ориентиров. Это небольшая регрессионная нейронная сеть, обученная предсказывать координаты точек на фрагменте лица. Такой подход позволяет системе достаточно точно определять геометрию лица при самых разных ракурсах.

Если включён режим определения контуров, ML Kit применяет ещё одну компактную модель, похожую по принципам на лёгкие архитектуры, использующиеся в системах типа MediaPipe FaceMesh [9]. Она формирует набор из множества точек, описывающих контур лица, контуры глаз, губ, бровей и носа. Эти контуры незаменимы при создании реалистичных AR-эффектов, а также при тонкой постобработке изображений.

В приложениях, работающих с видеопотоком, как указано в разделе 1.1, особую роль играет механизм отслеживания лиц. ML Kit сопоставляет обнаруженное лицо с предыдущими кадрами, используя геометрию лица, его ключевые точки и положение в кадре. На основе этих данных система формирует стабильный идентификатор, благодаря чему одно и то же лицо в движении воспринимается как единый объект. Такой подход позволяет применять фильтры и эффекты к конкретному человеку, даже если он перемещается или временно выходит из кадра.

Все нейросети ML Kit работают не изолированно, а как единая последовательная система. Основная модель отвечает за локализацию лица, а последующие – за углублённый анализ. В этом подходе важно то, что большинство моделей работают не с исходным изображением, а с признаками, уже извлечёнными предыдущими этапами. Это снижает вычислительную нагрузку и ускоряет процесс. Для обеспечения эффективности на мобильных устройствах Google применяет ряд методов оптимизации. Модели проходят квантизацию, что уменьшает размер и ускоряет вычисления, переводя весовые значения в формат с более низкой точностью. Нейронные сети также адаптированы для выполнения на самых разных аппаратных ускорителях: CPU, GPU и NNAPI, который может использовать DSP или специализированные блоки нейросетевой обработки. При этом архитектура слоёв подобрана таким образом, чтобы обеспечивать минимальные задержки и работать плавно даже на устройствах среднего уровня.

1.3. Идентификация лица. Для решения задачи идентификации уже обнаруженного лица была выбрана модель FaceNet. FaceNet — один из новых подходов в технологии распознавания лиц. Этот метод основан на глубокой сверточной нейронной сети и обучении с использованием triplet loss для обработки обучающих данных [10]. Преимущество использования метода FaceNet заключается в том, что эта модель требует лишь минимального выравнивания с точки зрения достаточно плотного вырезания области лица.

FaceNet — это метод (называется однократным обучением), который использует глубокие сверточные сети для оптимизации создания эмбедингов. Метод может использовать небольшой набор изображений лица для создания начальной модели, и при появлении новых данных эта модель может применяться без повторного обучения. FaceNet напрямую обучает представления лица в евклидовом пространстве, где расстояние отражает степень сходства между моделями лиц. Получив результаты сходства между моделями лиц, становится легко осуществлять распознавание и классификацию, используя векторы признаков, формируемые FaceNet.

В процессе обучения FaceNet использует триплеты, сопоставляя изображения лиц методом online triplet mining. Каждый триплет представляет собой набор из опорного изображения (anchor), положительного (positive) и отрицательного (negative). На рис. 1 показана структурная модель, применяемая в FaceNet. FaceNet включает пакетные слои на входе и глубокую архитектуру – глубокую CNN, за которой следует L2-нормализация, формирующая конечное встраивание лица [11]. Во время обучения используется функция потерь на триплетах (triplet loss) (рис. 2).



Рис. 1. Структура FaceNet

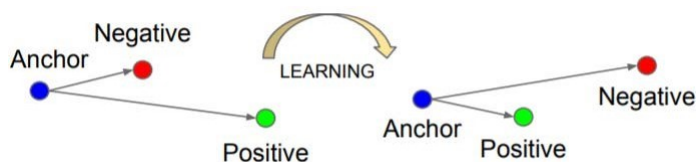


Рис. 2. Обучение функции потерь на триплетах

Triplet loss минимизирует расстояние между anchor и positive и максимизирует расстояние между anchor и negative. При этом positive имеет ту же личность, что и anchor, а negative — другую. FaceNet напрямую обучает своё выходное представление (эмбединг) к компактному вектору размерностью 112, используя метод потерь на основе триплетов, основанный на LMNN [12].

2. РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ

В рамках поставленной задачи распознавания лиц студентов определенной группы разработано клиент-серверное приложение. На первом этапе работы приложения происходит захват изображения с камеры устройства. Захваченное изображение передается в модуль обнаружения лиц библиотеки Google ML Kit. После успешного обнаружения, каждое распознанное на изображении лицо вырезается из исходного изображения. После этого изображение лица приводится к размерности 112x112 px методом билинейной интерполяции, нормализуется и при помощи модели FaceNet создаётся вектор эмбединга. Полученные векторы сравниваются со списком сохраненных лиц при помощи L2-нормы: если расстояние между двумя векторами меньше заданного порога и наименьшее среди всех сохраненных лиц, то изображению присваивается соответствующая метка (рис. 3).

Клиент-серверное взаимодействие в системе автоматизированного распознавания лиц, интегрированной с системой учебных групп, представляет собой распределённую архитектуру, в которой мобильное Android-приложение функционирует в роли клиента, а удалённый сервер, реализованный на платформе FastAPI, выполняет роль централизованного хранилища и поставщика данных [13]. Клиент инициирует запросы на получение информации о составе учебных групп и связанных с ними биометрических данных, после чего сервер осуществляет формирование структурированных

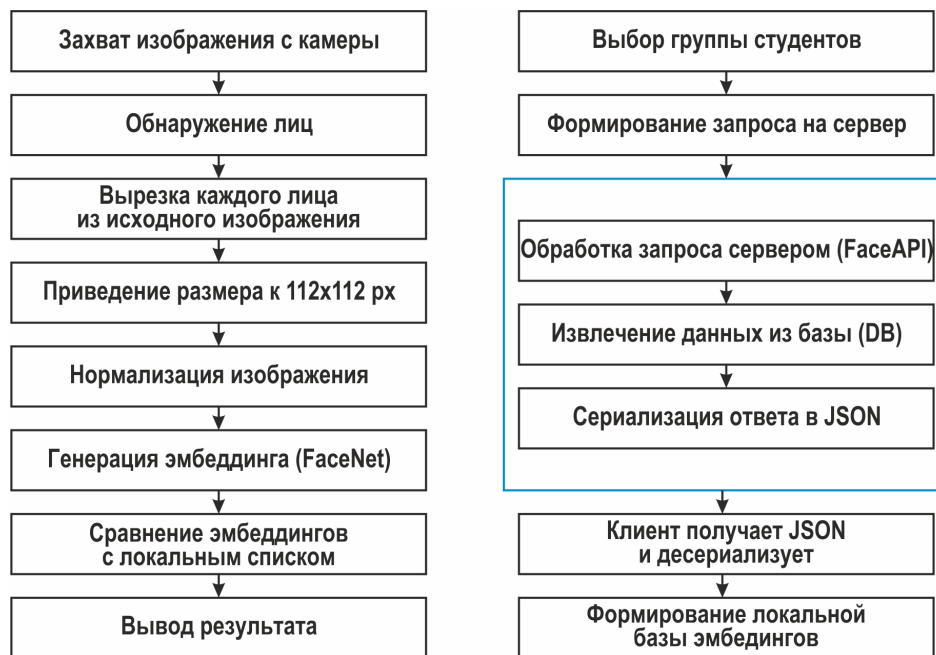


Рис. 3. Клиент-серверное взаимодействие

ответов. Взаимодействие обеспечивает согласованность данных и позволяет синхронизировать локальные и удалённые представления набора эмбедингов, относящихся к учащимся.

Архитектура приложения предполагает, что каждая учебная группа имеет уникальный идентификатор, который используется клиентом для запроса соответствующего набора данных. При обращении к серверу клиент передает идентификатор группы в параметрах HTTP-запроса. Серверная часть принимает запрос, извлекает данные из базы, содержащей сущности, описывающие группы и связанные с ними профили учащихся, после чего сериализует сведения в формате JSON. В ответе формируются имя группы, персональные данные студентов, а также числовые представления эмбедингов лиц. Формат данных включает поле имени, значения которого используются для отображения в пользовательском интерфейсе, и массив чисел с плавающей точкой, интерпретируемый как вектор признаков, полученный в результате работы модели распознавания. После получения ответа клиент выполняет десериализацию данных, преобразует вложенные массивы чисел, после чего формирует локальные экземпляры объектов, содержащих имя и эмбединг каждого учащегося, относящегося к выбранной группе.

Приложение предусматривает возможность добавления новых данных на серверную сторону. В процессе регистрации нового лица выполняется захват изображения

камеры, после чего извлекается эмбединг с помощью локально работающей модели. Сервер получает данные, после чего выполняет проверку корректности структуры, конвертирует полученный массив чисел в формат, поддерживаемый базой данных, и добавляет новую запись к существующей группе.

Обмен данными реализован через протокол HTTP с использованием клиентской библиотеки Retrofit на стороне Android [14]. Серверная часть реализована на FastAPI, что обеспечивает высокую производительность и строгую типизацию данных благодаря применению Pydantic-моделей. Каждая модель описывает структуру объекта, получаемого или отправляемого клиентом.

3. ТЕСТИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приложение предоставляет преподавателю возможность выбрать группу студентов, для которой уже заранее сохранены эмбединги. После выбора группы система активирует камеру и использует ML Kit для обнаружения лиц в кадре. Каждый найденный фрагмент лица передаётся в FaceNet, которая преобразует изображение в вектор признаков фиксированной длины. Полученный эмбединг сравнивается с эмбедингами студентов выбранной группы. Если дистанция между векторами ниже заранее установленного порога, система считает, что лицо принадлежит конкретному студенту; при превышении порога оно классифицируется как неизвестное. Результаты распознавания отображаются в интерфейсе приложения, фиксируются с указанием времени и могут быть использованы, например, для автоматизации посещаемости.

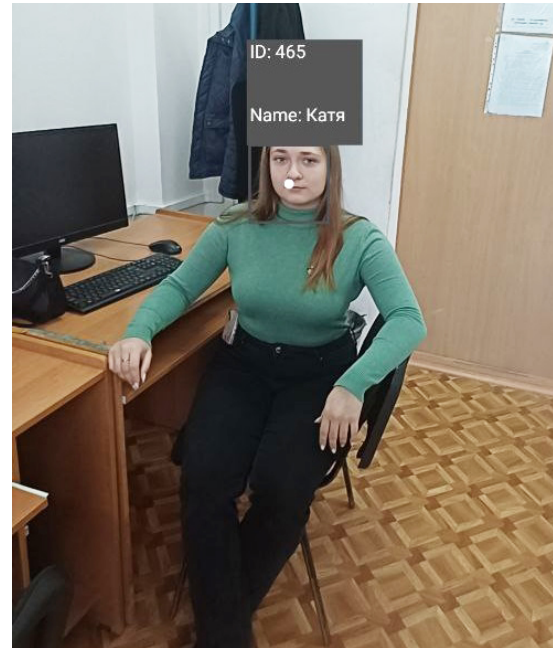
Тестирование приложения проводилось на реальной выборке изображений студентов, снятых в условиях, максимально приближенных к учебным аудиториям, включая различные типы освещения, повороты и частичные перекрытия лиц (рис. 7). По итогам анализа были получены следующие показатели метрик: оценка точности (precision) составила 0.80, полнота составила 0.92.

Тестирование выявило ключевую проблему: модель хорошо различает известные лица, но недостаточно надёжно отвергает неизвестные, иногда ошибочно присваивая им метки студентов (ложные срабатывания) (рис. 8).

Это указывает на то, что алгоритм успешно решает задачу верификации, но имеет слабую обобщающую способность для идентификации с открытым множеством. Требуется повысить порог уверенности модели или внедрить специальный механизм детекции «неизвестных» лиц, чтобы минимизировать риски ошибочного доступа и повысить общую надёжность системы.



а) распознавание двух людей



б) распознавание одного человека

Рис. 4. Демонстрация работы приложения

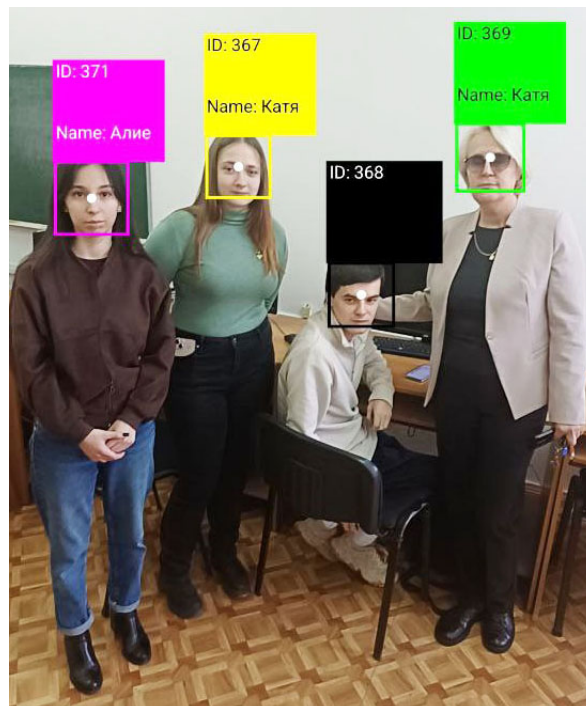


Рис. 5. Пример ложного срабатывания

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены методы, модели и технологии обнаружения и распознавания лиц, описано клиент-серверное взаимодействие. На основе симбиоза этих методов и серверной части было реализовано приложение, позволяющее в реальном времени обрабатывать видеоряд и инициализировать лица людей с высокой точностью.

Дальнейшая доработка приложения может включать в себя расширение функционала приложения: редактирование списка групп студентов, автоматическое выставление пометки о посещении учебного занятия при успешном распознавании студента, улучшение качества распознавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салех, О. А. Методы распознавания лиц на основе анализа видеоизображений / Л. О. А. Салех, С. В. Хлопин // *Системный анализ в проектировании и управлении : Сборник научных трудов XXVI Международной научно-практической конференции*. В 3-х частях, Санкт-Петербург, 13–14 октября 2022 года. — Санкт-Петербург: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2023. — С. 132–141. — DOI 10.18720/SPBPU/2/id23-89.
SALEKH, O. A., KHLOPIN, S. V. (2023) Face recognition methods based on video image analysis. *System analysis in design and management : Proceedings of the XXVI International Scientific and Practical Conference*. — P. 132–141.
2. Русаков, А. М. Применение технологии распознавания лиц в сфере безопасности / А. М. Русаков, И. А. Трубоченко, А. Д. Фисенко // *Научный взгляд в будущее*. — 2018. № 21(1) — С. 42–49. — DOI 10.30888/2415-7538.2021-21-01-021.
RUSAKOV, A. M., TRUBCHENKO, I. A., FISENKO, A. D. (2018) Application of face recognition technology in thesecurity sphere. *A scientific look into the future*. — V. 21(1). — P. 132–141.
3. Шелагурова М. Анализ качества работы и особенностей широко используемых библиотек и моделей для распознавания лиц / URL: <https://lab.neural-university.ru/quality-analysis>
SHELAGUROVA M., STEPANOV V., FIRGALEEVA A. (2024) Analysis of the quality of work and features of widely used libraries and models for face recognition / URL: <https://lab.neural-university.ru/quality-analysis>

4. Future of Facial Recognition Technology (2025). URL: <https://www.techsciresearch.com/blog/future-of-facial-recognition-technology/105.html>
5. FA6 Class – Classroom Attendance. — URL: <https://face-six.com/classroom-attendance-reinvented>
6. VARGAS, J., BERGONZELLI, D. (2015). Securing the Future in Tigre / NEC Technical Journal. — URL: <https://www.nec.com/en/global/techrep/journal/g14/n01/pdf/140116.pdf>.
7. KOZLOVA, M. Educational Technologies in the Master’s Course «Intellectualization of Information Processing» / M. Kozlova, V. Lukianenko, D. Savchuk // DET-2024: International Conference on Distance Education Technologies: Conference Proceedings, Stavropol, Vol. 1616. — Cham, Switzerland: Springer, 2025. — P. 246–255.
8. ML Kit. Face Detection. — URL: <https://developers.google.com/ml-kit/vision/face-detection?hl=ru>
9. MediaPipe Face Mesh. — URL: https://mediapipe.readthedocs.io/en/latest/solutions/face_mesh.html
10. Triplet Loss Explained. — URL: <https://medium.com/analytics-vidhya/triplet-loss-b9da35be21b8>
11. SCHROFF, F., KALENICHENKO, D., PHILBIN, J. (2015). FaceNet: A Unified Embedding for Face Recognition and Clustering / Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). — P. 815–823. — URL: https://www.cv-foundation.org/openaccess/content_cvpr_2015/papers/Schroff_FaceNet_A_Unified_2015_CVPR_paper.pdf
12. WEINBERGER, K. Q., BLITZER, J., SAUL, L. K. (2016). Distance Metric Learning for Large Margin Nearest Neighbor Classification / Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS). — 2016. — P. 2–3. — URL: https://www.cs.cornell.edu/~kilian/papers/NIPS2005_0265.pdf
13. FastAPI Framework. — URL: <https://fastapi.tiangolo.com>
14. Retrofit. — URL: <https://square.github.io/retrofit>

Цитирование: Козлова М. Г., Гуменюк Н. И. Разработка приложения для распознавания лиц студентов академической группы // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 71–85.

УДК: 519.688

MSC2010: 65E05

DOI: 10.5281/zenodo.18818525

О ПРОГРАММЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© В. Р. Кристалинский

СМОЛЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Российская Федерация
Военная ордена Кутузова Академия
войсковой противовоздушной обороны
Вооруженных Сил Российской Федерации
ул. Котовского, 2, Смоленск, 214027, Российская Федерация
E-MAIL: *kristvr@rambler.ru*

**ABOUT THE PROGRAM FOR APPROXIMATE SOLUTION OF HILBERT BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR ANALYTICAL FUNCTIONS.**

Kristalinskiy V. R.

Abstract.

The theory of boundary value problems for analytical functions and their generalizations is one of the most important and has a large number of applications in various applied fields, in particular, in the theory of elasticity. The methods of their solution are considered in a number of works. In connection with the applications of boundary value problems in practice, the issue of developing methods for their approximate solution and computer implementation of these methods is very relevant. The development of such methods and their implementation involves overcoming significant difficulties.

This article is devoted to the computer implementation of an approximate method for solving the Hilbert boundary value problem based on modern information technologies. Hilbert's boundary value problem, which belongs, along with the Riemann problem, to the main boundary value problems of the theory of analytic functions, is the oldest of the problems of this type. It was considered in the works of S. L. Sobolev, F. D. Gakhov, N. I. Muskhelishvili and other authors. The works of V. S. Rogozhin and M. P. Ganin indicate methods for reducing boundary value problems for polyanalytical and polyharmonic functions to this problem.

Thus, the development and implementation of approximate methods for solving this problem is a very urgent task. It was considered by us in the dissertation [1].

However, the development of information technology, in particular computer mathematical systems, makes it possible to implement improved approaches to the computer implementation of the methods we have developed, to develop software products more efficient and user-friendly than it was before. In particular, the program we developed in the Wolfram Mathematica system makes it possible to find the maximum value of the absolute value of the difference between the

exact and approximate solution of the boundary value problem, if the exact value is known. In addition, we have built a C# program based on it, which allows us to implement an algorithm for approximate solution of the Hilbert boundary value problem in the interface of modern Windows applications, which makes it convenient for a wide range of users.

Keywords: *complex analysis, Hilbert boundary value problem, approximate solution methods, Wolfram Mathematica system, C# language*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова L . Известно, что краевая задача Гильберта для аналитических функций ставится следующим образом (см., например, [10, с. 264]): найти аналитическую в области D и непрерывную на контуре L функцию

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

предельные значения действительной и мнимой частей которой удовлетворяют на L соотношению

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t) \quad (2)$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — заданные на L действительные функции комплексного аргумента, удовлетворяющие условию Гельдера (т. е. $a(t), b(t)c(t) \in H(L)$).

Задача Гильберта и ее обобщения исследовались многими авторами, в частности, принадлежащими к Смоленской математической школе (см., например, [4–7], [13, 14]). Наиболее полное изложение результатов, связанных с этой задачей, приведено в [10]. Приведем указанный, например, в [2], метод решения данной задачи.

Пусть

$$\kappa = \text{Ind} \left[\frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)} \right].$$

Тогда $\kappa = 2m$, где $m = \text{Ind}[a(t) + ib(t)]$. Следуя Н. И. Мусхелишвили [3], число κ будем называть индексом задачи Гильберта (??). Как известно, (см., например, [2, с. 186]) при $\kappa \geq 0$ общее решение задачи Гильберта (1) дается формулой

$$\varphi(z) = z^m \cdot X(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau + \sum_{j=0}^{\kappa} \beta_j W_j(z) \right], \quad (3)$$

где $\mu(\tau)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$(Z\mu)(t) \equiv \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau'^2(s)}}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right] \mu(\tau) d\tau = \frac{Q(t)}{t^m X(t)}, \quad (4)$$

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\tau)}{\tau - z} d\tau \right\} \quad (5)$$

$\gamma(t)$ — решение интегрального уравнения

$$(Z\gamma)(t) = \ln \left[\frac{\bar{t}^m}{t^m} G(t) \right], \quad (6)$$

$$Q(t) = \frac{2c(t)}{a(t) - ib(t)}, \quad G(t) = \frac{a(t) + ib(t)}{a(t) - ib(t)}, \quad t \in L. \quad (7)$$

Функции $W_j(z)$ определяются равенствами

$$W_0(z) \equiv 1, \quad W_{2k-1} = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu_{2k-1}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (8)$$

$$W_{2k} = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu_{2k}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad (9)$$

где $\nu_i(t)$ — решения интегральных уравнений Фредгольма $(Z\nu_i)(t) = q_i(t)$, $i=1, 2, \dots, \kappa$ причем

$$q_{2k-1}(t) = \frac{1}{\bar{t}^k} - \frac{1}{t^k}, \quad q_{2k}(t) = \frac{i}{\bar{t}^k} - \frac{i}{t^k} \quad (10)$$

Приближенные методы решения задачи Гильберта и ее обобщений, в связи с их важностью для приложений, также рассматривались рядом авторов (см., например, [11, 12]). В диссертации [1] и в статье [4] нами был предложен метод приближенного решения краевой задачи Гильберта для аналитических функций, основанный на описанном в [5] методе приближенного вычисления интеграла типа Коши. Этот метод был реализован в системе MathCad. Однако эта компьютерная реализация обладает рядом недостатков. В частности, она не позволяет находить максимальное значение абсолютной величины разности между точным и приближенным решением задачи на контуре, если точное значение известно. Этому недостатка лишена предлагаемая в настоящей статье реализация указанного метода в системе Mathematica. Кроме того, на ее основе можно построить программу на языке C# в стандартном интерфейсе приложения Windows, включающую в себя эту реализацию.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Целью статьи является построение компьютерной реализации описанного в [1] алгоритма в системе Mathematica и ее интеграция с программой на языке C#. Пусть D — область, ограниченная эллипсом, заданным уравнением $t(f) = a \sin(f) + ib \cos(f)$.

Требуется найти функцию $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, граничные значения действительной и мнимой частей которых на L удовлетворяют соотношению

$$\cos(0.2 \cos f)u(f) + \sin(0.2 \cos f)v(f) = c(f), \quad (11)$$

где

$$c(f) = \cos(0.2 \cos f)Re(\sin t(f)) + \sin(0.2 \cos f)Im(\sin t(f)). \quad (12)$$

Будем решать поставленную задачу на основе схемы, описанной в [2] с помощью системы Wolfram Mathematica. Вводим полуоси эллипса

```
a=1.2
```

```
b=0.9
```

Задаем число членов рядов Фурье, которые в дальнейшем будут использоваться для приближенного вычисления интегралов типа Коши

```
nf=19
```

Для заданного эллипса строим ядро интегрального уравнения, к которому сводится решение краевой задачи Гильберта

```
K[f1_,f2_]=If[f1==f2,(a*b)/(2*(b^2*(Cos[f2])^2+a^2*(Sin[f2])^2)),
((a*b)*(1-Cos[f1-f2]))/(a^2*(Cos[f1]-Cos[f2])^2+b^2*(Sin[f1]-Sin[f2])^2)]
```

Для дискретизации ядра разделим отрезок интегрирования на 200 равных отрезков и вычислим его значения в их концах

```
ft=Table[0,{i,1,201}];
```

```
Kd=Table[K[ft[[i]],ft[[j]]],{i,1,201},{j,1,201}];
```

При этом значения функции при $i = 1$ и $j = 1$ нужно задавать вручную

```
Kd[[201,1]]=0
```

```
Kd[[1,201]]=0
```

Сведем решение интегрального уравнения, указанного в [2] к решению системы линейных уравнений, используя известный метод, основанный на использовании формулы Симпсона

```
A=Table[Kd[[m,n]]/300,{m,1,201},{n,1,201}];
```

```
R=Table[If[k==1,A[[m,k]]/2,If[Mod[k,2]==1,A[[m,k]]*2,A[[m,k]]*4]],
{m,1,201},{k,1,201}];
```

```
ed=IdentityMatrix[201];
```

```
R1=Table[R[[m,k]]+ed[[m,k]],{m,1,201},{k,1,201}];
```

Находим приближенное значение функции $\gamma(f)$, которая будет в дальнейшем использована для вычисления правой части уравнения

```
M[f_]=0.4*Cos[f]
```

```
M1=Table[M[ft[[i]]],{i,1,201}];
```

```

γ1=LinearSolve[R1,M1];
T1=Table[ft[[i]],Re[γ1[[i]]],{i,1,201}];
γ = Interpolation[T1]

```

Далее вычисляем интеграл типа Коши $\Gamma(z)$ с плотностью $\gamma(f)$ методом, описанным в [4] и вычисляем краевое значение для функции, определяемой этим интегралом внутри эллипса. С этой целью предварительно вычисляем граничное значение для функции, определяемой этим интегралом вне эллипса. Далее получаем функцию $X(t)$:

```

Xp[t_]=Exp[I*Γ[t]];
Строим функцию g(f):
g[f_]=2*(Cos[0.2*Cos[f]]*Re[Sin[t[f]]]+Sin[0.2*Cos[f]]*Im[Sin[t[f]]])/
(Cos[0.2*Cos[f]]-I*SIN[0.2*Cos[f]]);

```

Строим правую часть интегрального уравнения

```
g1[f_]=g[f]/Xp[t[f]];
```

Находим приближенное решение этого уравнения $\mu(f)$

```

g1t=Table[g1[ft[[i]]],{i,1,201}];
res=LinearSolve[R1,g1t];
T1=Table[ft[[i]],Re[res[[i]]],{i,1,201}];
reμ =Interpolation[T1]
T2=Table[ft[[i]],Im[res[[i]]],{i,1,201}];
imμ =Interpolation[T2]
μ [f_]=reμ [f]+I*imμ [f];

```

Далее вычисляем интеграл типа Коши с плотностью $\mu(f)$ аналогично тому, как это было сделано выше для функции $\gamma(f)$. После этого можно строить функцию $g1(f)$ — приближенное решение задачи. Значение произвольной постоянной $\alpha1$ находим подбором.

```

α1=-0.0393969*I
g1[f_]=Xp[t[f]]*(Mp[t[f]]+ α1);

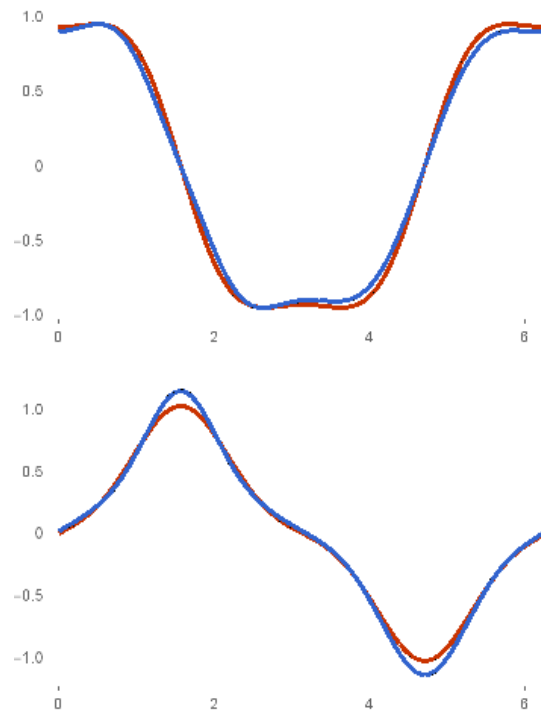
```

Строим графики вещественной и мнимой частей точного решения — функции $\sin(z)$ и приближенного решения на контуре и значения максимальной абсолютной погрешности решения.

```

Plot[Re[Sin[t[f]]],Re[g1[f]],{f,0,2*Pi}]
NMaximize[Abs[Re[Sin[t[f]]]-Re[g1[f]]],f]
0.0897874,f→1.20919
Plot[Im[Sin[t[f]]],Im[g1[f]],f,0,2*Pi]
NMaximize[Abs[Im[Sin[t[f]]]-Im[g1[f]]],f,0,2*Pi]

```



0.120551, $f \rightarrow 1.5708$

Можно интегрировать данную программу с приложением на языке C#, аналогично тому, как это сделано в наших работах [13, 14]. Это позволит проводить расчеты в традиционном интерфейсе приложений Windows. На рис. 1 показано рабочее окно интегрированного приложения с результатами расчетов.

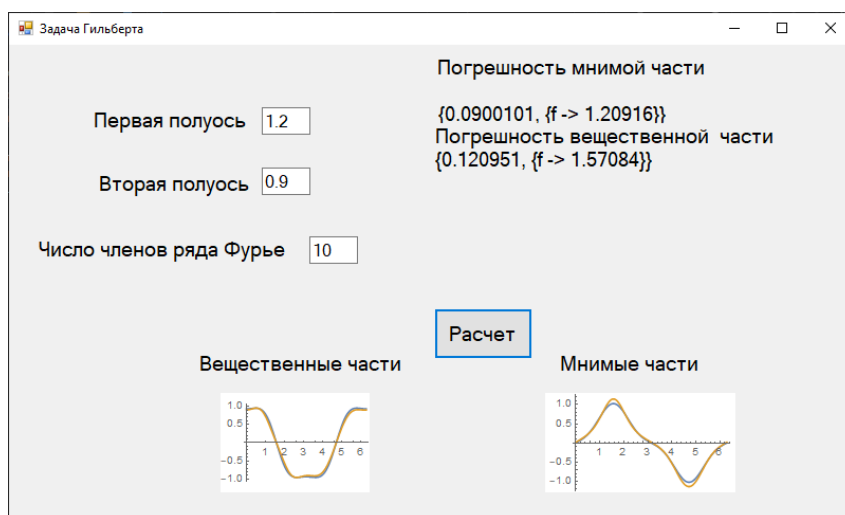


Рис. 1. Окно разработанной программы на языке C# с результатами вычислений

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами построена компьютерная реализация средствами системы Mathematica ранее разработанного алгоритма приближенного решения краевой задачи Гильберта в классе аналитических функций, позволяющая в случае известного решения получить погрешность полученного решения. Построена также интегрированная программа на языке C#, позволяющая проводить расчеты в более привычном для пользователя интерфейсе. В построенном примере пользователь вводит только полуоси эллипса и число членов ряда Фурье, используемого для приближенного вычисления интеграла типа Коши, однако в принципе можно доработать программу, чтобы с формы вводились и компоненты краевого условия. Полученная компьютерная реализация может использоваться в научных исследованиях по краевым задачам Гильберта и их обобщениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристалинский, В. Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций : специальность 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Кристалинский Владимир Романович. — Смоленск, 2001. — 114 с.

KRISTALINSKY, V. R. (2001) Approximate methods for solving Hilbert type and Riemann type boundary value problems for bianalytical functions: specialty 01.01.01 "Real, complex and functional analysis": dissertation for the degree of Candidate of Physico-mathematical Sciences.

2. Литвинчук, Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. — М.: Наука, 1977. — 448 с.

LITVINCHUK, G. (1977) *Boundary value problems and singular integral equations with a shift*. Moscow: Nauka.

3. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 511 с.

MUSKHELISVILI, N. (1968) *Singular integral equations*. Moscow: Nauka.

4. Кристалинский, В. Р. О приближенном решении задачи Гильберта для аналитических функций / В. Р. Кристалинский // Избранные вопросы высшей математики и информатики. Материалы международного семинара Смоленского государственного педагогического института, Хагенского заочного университета и Смоленского НИЦ. — Смоленск, 1997. — С. 15–17.
KRISTALINSKY, V. (1997) On the approximate solution of the Hilbert problem for analytical functions. *Selected issues of higher mathematics and computer science. Materials of the international seminar Smolensk State Pedagogical Institute, Hagen Correspondence University and Smolensk Scientific Research Center.* Smolensk. Pp. 15–17.
5. Кристалинский, В. Р. Об одном методе приближенного вычисления интегралов типа Коши / В. Р. Кристалинский // Полианалитические функции: граничные свойства и краевые задачи. — Смоленск, 1997. — С. 34–38.
KRISTALINSKY, V. (2004) About one method of approximate calculation of Cauchy type integrals. *Polyanalytical functions: boundary properties and boundary value problems.* Smolensk. Pp. 34–38.
6. Расулов, К. М. Неоднородная краевая задача типа Гильберта для квазигармонических функций второго рода / К. М. Расулов, К. М. Тимофеева // Системы компьютерной математики и их приложения / Смоленск. — 2019. — С. 127–132.
RASULOV, K. & TIMOFEEVA, N. (2019) An inhomogeneous Hilbert type boundary value problem for quasi-harmonic functions of the second kind. *Computer mathematics systems and their applications.* Smolensk. Pp. 127–132.
7. Расулов, К. М. О картине разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для квазигармонических функций в круговых областях / К. М. Расулов, К. М. Тимофеева // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2016. — С. 33–40.
RASULOV, K. & TIMOFEEVA, N. (2016) On the solvability of a homogeneous Hilbert boundary value problem for quasi-harmonic functions in circular domains. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* Pp. 33–40.
8. Умалатов, С. Д. Краевая задача типа задачи Гильберта в многосвязной области / С. Д. Умалатов // Неделя науки. — 2023. — С. 379–381.
UMALATOV, S. (2023) Hilbert type boundary value problem in a multiconnected domain. *Science Week.* Pp. 379–381.

9. Усмонов, Н. Краевая задача гильберта для полуплоскости с коэффициентом, имеющим особенности не голоморфной структуры / Н. Усмонов, Ф. А. Инояттов // Вестник Филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе. — 2021. — С. 23–33.
USMONOV, N. & INOYATOV, F. (2021) Hilbert boundary value problem for a half-plane with a coefficient having non-holomorphic structure features. *Bulletin of the Branch of the Lomonosov Moscow State University in Dushanbe*. Pp. 23–33.
10. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
GACHOV, F. (1977) *Boundary value problems*. Moscow: Nauka.
11. Бойков, И. В. Приближенные методы решения вырожденных сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. А. Пивкина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 1 (65), 2023. — С. 15–27.
BOJKOV, I. & PIVKINA, A. (2021) Approximate methods for solving degenerate singular integral equations. *News of higher educational institutions. The Volga region. Physical and mathematical sciences*. 1(65). Pp. 15–27.
12. Алексидзе, М. А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. — М.: Наука, 1991. — 354 с.
ALEKSIDZE, M. (1991) *Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems*. Moscow: Nauka.
13. Кристалинский, В. Р. О построении интерфейса между документом Wolfram Mathematica и проектом Visual Studio на языке C# / В. Р. Кристалинский, П. Л. Лютикас // Системы компьютерной математики и их приложения. — Смоленск, 2024. — С. 26–31.
KRISTALINSKY, V. & LUTICAS, P. (2024) About building an interface between a Wolfram Mathematica document and a Visual Studio project in C#. *Computer mathematics systems and their applications*. Smolensk. Pp. 26–31.
14. Кристалинский, В. Р. Построение комплекса программ, моделирующих наведение зенитных управляемых ракет / В. Р. Кристалинский, Черный С. Н. // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2024. — Т. 20, № 2. — С. 477–487.
KRISTALINSKY, V. & CHERNYI, S. (2024) Building a set of programs that simulate the guidance of anti-aircraft guided missiles. *Modern information technologies and IT education*. 20 (2). Pp. 477–487.

15. WANG, L. et al. (2023) Plemelj formula of inframonogenic functions and their boundary value problems. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 68 (7). Pp. 1158–1181.
16. RYAZANOV, V. et al. (2021) On Hilbert and Riemann problems for generalized analytic functions and applications. *Analysis and Mathematical Physics*. 11 (1). Pp. 5.

Цитирование: Кристаллинский В. Р. О программе для приближенного решения краевой задачи Гильберта для аналитических функций // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 86–95.

УДК: 519.854.2

MSC2010: 90C27

DOI: 10.5281/zenodo.18818567

УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ЧАСТЬ 2

© Д. В. Лемтюжникова

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПУ РАН)

МОСКВА, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: darabbt@gmail.com

CONDITIONALLY IDEAL STRUCTURES IN SOLVING DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS. PART 2.

Lemtyuzhnikova D. V.

Abstract.

This work presents a comprehensive theoretical development of Conditionally Ideal Structures (CIS), establishing deep connections with fundamental areas of computational complexity. Building upon the foundational framework introduced in the first part, we demonstrate how structural data invariants can systematically overcome computational barriers in NP-hard problems through a unified mathematical apparatus.

The research reveals that structural parameters serve as a powerful bridge connecting geometric data properties with computational complexity classes. Our key contributions include the formalization of relationships between CIS and fixed-parameter tractability, where we establish precise conditions for complexity reduction from exponential to polynomial regimes. The theory naturally extends to approximation schemes, demonstrating that structural constraints enable efficient polynomial-time approximation schemes (PTAS) for problems that remain intractable in the general case.

A significant advancement lies in the robustness analysis of CIS algorithms, where we prove stability guarantees under bounded data perturbations. This theoretical foundation enables practical applications in scenarios where data exhibits approximate structural regularity rather than perfect adherence to ideal patterns. Furthermore, we develop a comprehensive parallel computation framework for CIS, establishing work-optimal parallel algorithms with polylogarithmic depth for broad classes of structurally decomposable problems.

The kernelization theory for CIS represents another major contribution, providing constructive methods for data reduction while preserving solution guarantees. This approach enables efficient preprocessing for large-scale instances of structurally constrained problems. The universality of the CIS framework is demonstrated through its extension to matroids, where we establish fundamental equivalences between matroid rank functions and structural parameters.

Practical applications span multiple domains including graph optimization, clustering algorithms, sparse matrix processing, and cryptographic schemes. The proposed techniques achieve substantial complexity reduction for real-world problems exhibiting hierarchical

organization or sparsity patterns. The theory provides both theoretical guarantees and practical algorithmic blueprints for handling computationally challenging problems in high-dimensional data environments.

Looking forward, the CIS framework opens several promising research directions, including integration with machine learning for automatic structure discovery, analysis of complexity phase transitions, and development of adaptive algorithms for dynamic environments.

The work establishes a new paradigm for designing efficient algorithms that leverage structural data properties to combat combinatorial explosion in increasingly complex computational problems.

Keywords: *Conditionally Ideal Structures, Parameterized Complexity, Approximation Schemes, Algorithm Robustness, Parallel Algorithms, Kernelization, Matroids, Computational Complexity*

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория вычислительной сложности переживает парадигмальный сдвиг: от анализа наихудших случаев к исследованию структурных свойств данных, позволяющих преодолевать экспоненциальные барьеры. Этот переход, начатый в работах по параметризованной сложности [6] и субэкспоненциальным алгоритмам [9], получает систематическое развитие в теории условно-идеальных структур (CIS), представленной в первой части данной работы.

Концепция условно-идеальных структур представляет собой принципиально новый подход к анализу вычислительной сложности, основанный на глубокой связи между структурными свойствами данных и эффективностью алгоритмов. Формально, *условно-идеальной структурой* для вычислительной задачи $\Pi = (D, Y, n)$ называется множество $S \subseteq D$, для которого существуют:

- *Структурный параметр* $k(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, количественно характеризующий внутреннюю организацию данных и удовлетворяющий условиям:
 - *вычислимость*: $k(n)$ вычисляется за полиномиальное время;
 - *согласованность*: $k(n) \leq p(n)$ для некоторого полинома $p(n)$;
 - *регулярность*: $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} \in [0, 1)$.
- *Компенсирующая функция* $f(k(n))$, преобразующая структурные ограничения в вычислительные ресурсы:

$$f(k(n)) = \begin{cases} k^m(n) & \text{при } \alpha = 0 \quad (\text{логарифмический режим}) \\ 2^{k(n)} & \text{при } \alpha \in (0, 1) \quad (\text{сублинейный режим}) \end{cases}$$

где $m > \xi$ — константы, обеспечивающие доминирование структурного вклада.

- Структурно-компенсированная сложность алгоритма решения:

$$T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)$$

с выполнением ключевого условия асимптотической управляемости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(n, k(n))e^{-n} = 0$$

Критически важным аспектом CIS является классификация по асимптотике структурного параметра, определяющая принципиально разные режимы вычислительной сложности:

- логарифмический режим ($k(n) = O(\log n)$): обеспечивает полиномиальную сложность $O(n^{m+\xi})$;
- сублинейный режим ($k(n) = \Theta(n^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$): даёт субэкспоненциальную сложность $O(2^{n^\alpha} \cdot n^\xi)$.

Теоретический аппарат CIS включает также алгебраические операции над структурами (композиция \oplus и пересечение \cap), доказательство замкнутости класса относительно этих операций, и формальную процедуру компенсации сложности для практического применения.

Во второй части работы этот теоретический аппарат получает дальнейшее развитие через установление систематических связей с ключевыми разделами современной теории сложности. Исследование организовано в шести взаимосвязанных направлениях.

Раздел 1 устанавливает формальные условия принадлежности CIS к классу фиксированно-параметризуемых задач (ФРТ), анализируя переход от параметризованной сложности к структурно-компенсированной. **Раздел 2** раскрывает глубокую связь между CIS и приближёнными схемами полиномиального времени (PTAS), демонстрируя как структурные ограничения данных обеспечивают существование эффективных приближённых алгоритмов. **Раздел 3** посвящён исследованию робастности алгоритмов CIS, формализуя условия устойчивости вычислительной сложности к ограниченным возмущениям структурных параметров. **Раздел 4** развивает параллельные аспекты CIS, устанавливая критерии эффективной параллелизации структурно-ограниченных задач. **Раздел 5** связывает CIS с теорией ядер задач, доказывая существование полиномиальных ядер и разрабатывая методы структурной редукции. **Раздел 6** завершает работу расширением теоретического аппарата на класс матроидов, демонстрируя универсальность подхода через установление эквивалентности ранга матроида и структурного параметра CIS.

Теоретическая значимость представленных результатов заключается в создании единого аппарата, связывающего структурные свойства данных с фундаментальными классами вычислительной сложности. Практическая ценность подтверждается разработкой конкретных алгоритмических техник для задач дискретной оптимизации, машинного обучения и анализа больших данных, демонстрирующих эффективность на реальных задачах с выраженной структурной организацией.

1. О СВЯЗИ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР И ФИКСИРОВАННО-ПАРАМЕТРИЗУЕМЫХ ЗАДАЧ

1.1. Формализация условий принадлежности CIS к FPT. Изучение взаимосвязи между CISP и фиксированно-параметризуемыми задачами (Fixed-Parameter Tractable Problem, FPTP) позволяет выявить условия, при которых структурные ограничения данных обеспечивают переход от теоретической разрешимости к практической применимости. Напомним ключевые определения:

Определение 1 (FPTP). Задача Π называется *фиксированно-параметризуемой* (FPTP), если существует алгоритм, решающий её за время: $T(n, k) = O(f(k) \cdot n^c)$, где k — фиксированный параметр, не зависящий от n , $f : N \rightarrow N$ — произвольная функция, $c \in N$ — константа.

Определение 2 (CISP). Задача Π принадлежит классу CISP, если существует алгоритм с временем: $T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^c)$, где $k(n) = o(n)$ — структурный параметр, а $f(k(n))$ — компенсирующая функция (см. определение компенсирующей функции в первой части статьи).

Ключевое отличие CIS от FPT — зависимость параметра $k(n)$ от n , что позволяет анализировать задачи с «мягкими» структурными ограничениями (например, $k(n) = \log n$ или $k(n) = n^{0.3}$). Следующая теорема устанавливает условия вложенности CIS в FPT. Важным аспектом является установление формальных критериев вложенности CISP в класс FPTP, где структурные ограничения данных обеспечивают понижение вычислительной сложности до практически приемлемого уровня.

Теорема 1 (Принадлежность CIS к FPT в SLG-режиме). Пусть задача $\Pi \in CISP$ имеет структурный параметр $k(n) = O(\log n)$ (SLG-режим) и компенсирующую функцию $f(k(n)) = k(n)^m$, где $m > c$. Тогда $\Pi \in FPT$ с временем: $T(n, k(n)) = O((\log n)^m \cdot n^c)$.

Доказательство. Из условия $k(n)=O(\log n)$ следует, что $(\log n)^m$ растёт медленнее любого полинома от n . Доминирующий член — n^c , что соответствует определению FPT. \square

Замечание 1. CIS образует подкласс FPT только в SLG-режиме. В SBL-режиме ($k(n)=\Theta(n^\alpha)$, $0<\alpha<1$) сложность $T(n, k(n))=O(2^{n^\alpha} \cdot n^c)$ выходит за рамки FPT, что подчёркивает важность структурных ограничений (см. примеры режимов асимптотики из первой части статьи).

1.2. Структурная редукция сложности.

Теорема 2 (Полиномиализация FPT-алгоритмов для CIS). Для задачи $P \in CISP$ с параметром $k(n)=O(\log n)$ и $f(k(n))=2^{k(n)}$, временная сложность допускает полиномиальную оценку: $T(n, k(n))=O(n^{C \log 2 + c})$, где C — константа из условия $k(n) \leq C \log n$.

Доказательство. Подстановка $k(n)=C \log n$ в $f(k(n))$ даёт:

$$T(n, k(n))=O(2^{C \log n} \cdot n^c)=O(n^{C \log 2} \cdot n^c)=O(n^{C \log 2 + c}).$$

Условие управляемости выполняется, так как $C \log 2 + c$ — константа (см. теорему асимптотический управляемости из первой части статьи). \square

Пример 1 (Вершинное покрытие на графах с древовидной шириной). Для графов с $tw(G)=O(\log n)$ (SLG-режим) стандартный FPT-алгоритм с $T(n, k)=O(2^k \cdot n)$ имеет сложность $O(n^2)$.

Структурные параметры в CIS обладают двойственной природой. Комбинаторные параметры: древовидная ширина, размер вершинного покрытия. Алгебраические параметры: ранг матрицы, степень кластеризации.

Пример 2 (Динамическое программирование на графах). Для графов с $tw(G)=k(n)$ сложность алгоритма — $O(2^{k(n)} \cdot k^2(n) \cdot n)$. При $k(n)=\log n$ (SLG-режим) получаем $O(n^3)$, а при $k(n)=n^{0.5}$ (SBL-режим) — $O(2^n \cdot n^2)$, что иллюстрирует переход от FPT к субэкспоненциальному классу.

В данном примере хорошо видно, что параметр $k(n)$ в CIS обладает двойственной природой, отражая как комбинаторные, так и алгебраические свойства данных.

Древесная ширина графа $tw(G)$ характеризует иерархическую сложность его структуры, тогда как ранг матроида $\text{rank}(M)$ определяет размерность независимых подмножеств. Для графов с $tw(G)=k(n)$ динамическое программирование на дереве декомпозиции обеспечивает сложность $O(2^{k(n)} \cdot k^2(n) \cdot n)$, демонстрируя прямую зависимость между структурным параметром и временем выполнения.

Несмотря на теоретические преимущества, применение CIS сталкивается с существенными ограничениями. Требование монотонности функции $f(k(n))$ исключает задачи с колебательными зависимостями сложности от параметра. Алгоритмическая верификация условия $k(n)=o(n)$ остаётся неразрешимой для широкого класса структурных параметров. Кроме того, скрытые константы в полиномиальных оценках могут достигать непрактичных значений.

Перспективные направления исследований включают разработку адаптивных алгоритмов, автоматически определяющих структурные параметры через машинное обучение, и обобщение теории на случай суперэкспоненциальных функций $f(k(n))$. Отдельный интерес представляет изучение устойчивости задач на CIS к малым возмущениям параметра. Для $k(n)=o(n)$ и $\varepsilon(n)=o(1)$ справедливо:

$$T(n, k(n) + \varepsilon n) = O(T(n, k(n)) \cdot 2^{\varepsilon n}),$$

где при $\varepsilon(n)=n^{-0.5}$ экспоненциальный множитель $2^{\sqrt{n}}$ остаётся субдоминирующим относительно e^n .

1.3. Структурная полнота и классификация CIS. Фундаментальная связь между FPT-полнотой и CIS устанавливает строгие критерии исключения CISP. Центральным вопросом здесь является критерий, выявляющий принципиальную несовместимость структурной регуляризации с задачами, параметризованными относительно линейно растущих параметров.

Теорема 3 (Критерий FPT-полноты для CIS). *Для FPT-полной задачи Π относительно параметра $k(n)$ эквивалентны:*

- 1) $\Pi \notin CISP$;
- 2) $\nexists \varepsilon > 0: k(n) = O(n^{1-\varepsilon})$.

Доказательство. Если $\Pi \in CISP$ при $k(n)=\Theta(n)$, то алгоритм с $T(n, k(n))=o(e^n)$ позволил бы решать SAT за субэкспоненциальное время, нарушая SETH. Обратно, при $k(n)=O(n^{1-\varepsilon})$ задача допускает представление в CIS через ограничение носителя данных. \square

Пример 3 (Поиск клики). Задача поиска клики размера $k(n) = \lfloor 0.5n \rfloor$ исключена из CIS, так как $k(n)$ растёт линейно, что нарушает условие $k(n) = o(n)$ (см. теорему о жесткости сложности неструктурированных данных из первой части статьи).

Поскольку параметр $k(n)$ растёт линейно относительно n , а задача является FPT-полной относительно этого параметра, из теоремы непосредственно следует её исключение из класса CISP. Данный пример демонстрирует общий принцип: задачи, чья вычислительная сложность существенно зависит от параметров, масштабирующихся с размером входа, принципиально не допускают структурной регуляризации в рамках CIS.

Классификация задач CIS таким образом основывается на двойственности между геометрией данных и параметризованной сложностью. Задачи, допускающие представление через ограниченные структурные параметры, образуют ядро класса CISP, тогда как FPT-полные задачи с неограниченными параметрами формируют его естественную границу.

Установленная характеристика позволяет позиционировать класс CISP внутри стандартной параметризованной иерархии. В частности, условие $k(n) = O(n^{1-\varepsilon})$ соответствует классу SUBEPT¹, что влечёт строгое включение $CIS \subsetneq SUBEPT$. Этот факт подчёркивает, что структурная регуляризация представляет собой более сильное требование, чем общая субэкспоненциальная разрешимость, накладывая дополнительные ограничения на геометрию данных.

Задачи CIS в SBL-режиме демонстрируют асимптотику, схожую с SUBEPT, но формальная вложенность отсутствует из-за различий в определении параметров.

Сформулированные результаты предоставляют возможность для анализа алгоритмических границ. Задачи, исключённые из CISP в силу своей FPT-полноты, требуют принципиально иных подходов, таких как эвристики или аппроксимационные схемы, тогда как задачи из CISP допускают детерминированное точное решение с гарантированной субэкспоненциальной сложностью.

1.4. Предельные параметры и адаптация к CIS. Ключевым аспектом интеграции задач в класс CISP является анализ асимптотического поведения структурного

¹SUBEPT (Subexponential Parameterized Complexity) — класс параметризованных задач, разрешимых за время $T(n, k) = O(2^{o(k)} \cdot \text{poly}(n))$, где: k — параметр задачи (например, размер решения), n — размер входных данных, $o(k)$ — функция, растущая медленнее любого линейного члена от k . Например, задача поиска вершинного покрытия размера k решается за $O(2^{o(k)} \cdot n)$, что соответствует SUBEPT.

параметра $k(n)$. Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 0$ выступает необходимым критерием для трансформации FPT-алгоритмов в полиномиальные схемы. Формально, задача П допускает представление в CIS тогда и только тогда, когда её параметр $k(n)$ удовлетворяет:

$$\exists \varepsilon > 0 : k(n) = O(n^{1-\varepsilon}), \quad (1)$$

что обеспечивает экспоненциальное подавление связующей функции $f(k(n))$ относительно e^n .

Рассмотрим FPT-алгоритм с временем выполнения $T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)$. При условии $k(n) = o(n)$ и $f(k(n)) = 2^{o(n)}$, сложность алгоритма может быть переоценена как:

$$T(n, k(n)) = O(2^{k(n) \cdot \log c} \cdot n^d), \quad (2)$$

где константа c зависит от специфики задачи. Для $k(n) = O(\log n)$ это даёт полиномиальную оценку $O(n^{\log c + \xi})$, тогда как при $k(n) = \Theta(n^\varepsilon)$ сложность остаётся субэкспоненциальной.

Условие $k(n) = o(n)$ является необходимым для включения задачи в CIS.

Пример 4 (Доминирующее множество). Для задачи поиска доминирующего множества с параметром $k(n)$:

- при $k(n) = \sqrt{n} : T(n) = O(3^{\sqrt{n}} \cdot n) \notin CISP$;
- при $k(n) = \log n : T(n) = O(n^{\log 3 + 1}) \in CISP$.

Первая оценка исключает задачу из CISP, вторая — допускает включение при $\log 3 + 1 < 2$.

Указанный механизм позволяет классифицировать задачи по степени их адаптивности к CIS. Если для параметра $k(n)$ существует представление $k(n) = \omega(1) \cap o(n)$, то задача занимает промежуточное положение между классическими FPTP и полиномиальными случаями. Критической точкой перехода становится выполнение условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f(k(n))}{\log n} = \text{const}, \quad (3)$$

гарантирующего полиномиальность.

Данный результат согласуется с теоремой о структурной полноте, подчёркивая универсальность CIS как инструмента анализа алгоритмических границ.

Приведённые построения демонстрируют рациональность условий CIS. Любое ослабление требования $k(n) = o(n)$ немедленно приводит к потере полиномиальности, что проявляется в примере с $k(n) = \sqrt{n}$. Таким образом, класс CISP образует максимально широкий набор задач, для которых возможна детерминированная регуляризация сложности без потери точности.

2. ТЕОРЕМЫ О СВЯЗИ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР И ПРИБЛИЖЕННЫХ СХЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Исследование взаимосвязи CIS с полиномиальными приближенными схемами (Polynomial-time approximation scheme, PTAS) позволяет установить фундаментальные ограничения и возможности приближённого решения NP-трудных задач. Результаты демонстрируют двойственную природу CIS: структурные ограничения данных обеспечивают существование PTAS, тогда как их отсутствие приводит к принципиальной невозможности эффективных приближённых алгоритмов. Напомним определение PTAS.

Определение 3. Полиномиальная приближенная схема (PTAS) — алгоритм, результатом работы которого является приближённое решение с ошибкой ε за время, полиномиальное от размера входа, но экспоненциальное от ε^{-1} .

Структурные параметры CIS могут являться предпосылкой для построения PTAS. Например, задача коммивояжёра (TSP) на графах с ограниченной древесной шириной (CIS-параметр) допускает PTAS, т. к. декомпозиция графа позволяет локально оптимизировать маршруты. Другой пример: задачи кластеризации с фиксированным числом кластеров (CIS-параметр) могут быть приближены с помощью динамического программирования. При этом PTAS могут существовать без структурных ограничений, характерных для CIS, если задача обладает специфическими свойствами: задача упаковки в прямоугольники (2D Strip Packing) имеет PTAS, основанный на геометрических преобразованиях, но не требует ограничений CIS.

Покажем, как именно связано существование PTAS для NP-трудных задач наличием структурных ограничений, формализуемых через CIS.

2.1. Существование PTAS для CIS.

Теорема 4 (PTAS для структурно-ограниченных данных). *Если задача Π является NP-трудной и обладает $S \in CIS$ с параметром $k(n)=O(\log(n))$, тогда для всех объектов $M \in S$ то для нее существует PTAS, вычисляющий решение с погрешностью $(1 + \varepsilon)$ за время:*

$$T(n, \varepsilon) = O\left(\left(\frac{k(n)}{\varepsilon}\right)^c \cdot n^d\right),$$

где $c, d \in \mathbb{N}$ — константы, не зависящие от n и ε .

Доказательство.

1. Декомпозиция объекта. Разобьём объект $M \in S$ на $t = \lceil \frac{n}{k(n)} \rceil$ независимых подзадач $\{M_i\}_{i=1}^t$, каждая размером $O(k(n))$. По определению CIS, параметр $k(n) = o(n)$ гарантирует $t = \Theta\left(\frac{n}{k(n)}\right)$.

2. Точное решение подзадач. Для каждой M_i применим точный алгоритм с временем $T_{\text{точн}}(k(n)) = O(f(k(n)))$. Суммарное время:

$$T_{\text{подзадачи}} = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot f(k(n))\right).$$

3. Аппроксимация агрегации. Введём параметр дискретизации $\delta = \frac{\varepsilon}{k(n)}$. Число состояний для каждой подзадачи:

$$N_{\text{сост}} = O\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{k(n)}\right) = O\left(\left(\frac{k(n)}{\varepsilon}\right)^{k(n)}\right).$$

Общее время агрегации:

$$T_{\text{агр}} = O(t \cdot N_{\text{сост}}) = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot \left(\frac{k(n)}{\varepsilon}\right)^{k(n)}\right).$$

4. Анализ сложности. Условие $k(n) = o(n)$ позволяет оценить:

$$T(n, \varepsilon) = T_{\text{подзадачи}} + T_{\text{агр}} = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot k^m(n) + \frac{n}{k(n)} \cdot \left(\frac{k(n)}{\varepsilon}\right)^{k(n)}\right).$$

При $k(n) = O(\log n)$ и фиксированном ε :

$$\left(\frac{k(n)}{\varepsilon}\right)^{k(n)} = e^{k(n) \ln(k(n)\varepsilon^{-1})} = e^{O(\log n \cdot \log \log n)} = n^{o(1)},$$

что даёт итоговую оценку $O(n^{c+o(1)}) = O(n^d)$. □

2.2. Обратная связь: PTAS порождает CIS. Покажем, как PTAS могут расширять применимость CIS. Если задача имеет PTAS, её можно решать на данных, близких к CIS, например, после небольшой модификации входных данных.

Теорема 5 (Структурная регуляризация через PTAS). Пусть для задачи Π существует PTAS с временем $T(n, \varepsilon) = O(g(\varepsilon) \cdot n^d)$, где $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — монотонно возрастающая функция. Тогда класс задач, допускающих приближенное решение с погрешностью $(1 + \varepsilon)$, имеет CIS S с параметром $k(n) = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$ и функцией $f(k(n)) = g(k^{-1}(n))$.

Доказательство.

1. Определение структурного параметра. Положим $k(n) = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$. Для фиксированного $k(n)$, PTAS требует времени:

$$T(n, k^{-1}(n)) = O(g(k^{-1}(n)) \cdot n^d).$$

2. Проверка условий CIS. Для принадлежности к CIS необходимо:

1. $k(n) = o(n)$: Для схемы с $\varepsilon \rightarrow 0$ ($k(n) \rightarrow \infty$) потребуем $k(n) = o(n)$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n} = 0$: Функция $f(k(n)) = g(k^{-1}(n))$ должна удовлетворять:

$$\forall c > 0 \exists N : \forall n > N \quad g(k^{-1}(n)) < e^{cn}.$$

3. Построение. Пусть $g(\varepsilon) = 2^{\varepsilon^{-1}}$. Тогда:

$$f(k(n)) = 2^{k(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{k(n)} e^{-n} = 0 \iff k(n) = o(n).$$

При $k(n) = O(\log n)$ условие выполняется, что соответствует логарифмическому режиму CIS. \square

2.3. Жёсткость аппроксимации вне CIS.

Следствие 1 (Невозможность PTAS для неструктурированных данных). Пусть задача Π NP-трудна и не принадлежит ни одной CIS. Тогда при $P \neq NP$ и справедливости *SETH*, для любого $\varepsilon_0 > 0$ не существует PTAS с временем $o(2^n)$, вычисляющего $(1 + \varepsilon)$ -приближение при $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Доказательство. Из Теоремы о жесткости сложности неструктурированных данных из первой части статьи следует, что для объектов $M \notin \text{US}_i$:

$$T(n, k(n)) = \Omega(c^n), \quad c > 1.$$

Предположим, существует PTAS с временем $T(n, \varepsilon) = o(c^n)$. Это противоречит *SETH*, так как:

$$\exists \delta > 0 : T(n, \varepsilon) = o(c^n) \not\subseteq O(2^{(1-\delta)n}).$$

Условие $\varepsilon < \varepsilon_0$ исключает тривиальные приближения, сохраняя ε константой. \square

2.4. Интерпретация и примеры.

Пример 5 (Задача коммивояжёра (TSP)). Рассмотрим, как исследуемые понятия применяются к задаче коммивояжера.

Структурированный случай: Графы с древесной шириной $k(n) = O(\log n)$ допускают PTAS за $O(n^2)$.

Неструктурированный случай: Для произвольных графов с $k(n)=\Theta(n)$ наилучший результат — $(1.5 - \delta)$ -приближение за $O(n^3)$.

Пример 6 (Задача о вершинном покрытии). Рассмотрим, как исследуемые понятия применяются к задаче о вершинном покрытии.

Логарифмический режим: При $k(n)=O(\log n)$ динамическое программирование даёт приближенное решение с погрешностью $(1 + \varepsilon)$ за $O(n)$.

Субполиномиальный режим: При $k(n)=\Theta(n^{0.2})$ время возрастает до $O(2^{n^{0.2}})$.

Таким образом, множества CIS и структур, соответствующих PTAS, пересекаются. Это пересечение возникает в следующих случаях. Многие задачи, допускающие CIS (например, с ограниченной древесной шириной или рангом), могут быть эффективно приближены с помощью PTAS. Например, задача коммивояжёра (TSP) на графах с древесной шириной $k(n)=O(\log n)$ имеет PTAS, который использует декомпозицию графа на подзадачи, или задача кластеризации с фиксированным числом кластеров (CIS-параметр) может быть эффективно решена с помощью динамического программирования. Даже если задача NP-трудна в общем случае, наличие структурных параметров CIS (например, ограниченной степени вершин) позволяет построить PTAS. Например, для задачи раскраски графов с максимальной степенью $\Delta=O(1)$ допускается PTAS с временем $O(n \cdot \varepsilon^{-\Delta})$.

Некоторые алгоритмы допускают комбинацию структурных свойств CIS и методы PTAS, например, для задач на графах с ограниченной древесной шириной можно сначала построить декомпозицию (CIS), а затем применить PTAS к подзадачам. Таким образом, структурные параметры CIS обеспечивают алгоритмическую управляемость, необходимую для PTAS, а PTAS могут быть адаптированы к данным с ограничениями CIS, понижая зависимость времени от точности ε .

При комбинировании CIS и PTAS необходимо учитывать ограничения. Некоторые задачи (например, упаковка в прямоугольники) имеют PTAS, не требующие структур CIS. При этом, задачи с жёсткими структурными ограничениями (например, клика на графах с $k(n)=\Theta(n)$) могут не допускать PTAS.

3. О РОБАСТНОСТИ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Исследование устойчивости алгоритмов для CISP к малым возмущениям данных позволяет расширить область их практического применения. Формализуем условия, при которых отклонения от структурных ограничений сохраняют вычислительную эффективность.

3.1. Формализация устойчивости.

Определение 4. Объект M называется δ -близким к $S \in CIS$, если существует последовательность не более чем δ элементарных операций (удаление/добавление вершин, рёбер и т.д.), преобразующая M в $M' \in S$.

Теорема 6 (Робастность CISP). Пусть задача Π разрешима на $S \in CIS$ за время $T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^d)$, где $k(n) = o(n)$ — структурный параметр, а $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n} = 0.$$

Тогда для любого δ -близкого к S объекта M задача Π решается за время:

$$T_{\text{роб}}(n) = O(f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+c}),$$

где $c = \lceil \delta(\log n)^{-1} \rceil$, при условии $\delta = o(n)$.

Доказательство. Конструкция приближённого объекта. По определению δ -близости, существует $M' \in S$, достижимый из M за δ операций. Число способов выбора позиций для изменений:

$$\binom{n}{\delta} \leq \left(\frac{en}{\delta}\right)^\delta = O\left(e^{\delta \ln(n\delta^{-1})}\right).$$

Анализ сложности. Для каждого кандидата M' решаем Π за $O(f(k(n)) \cdot n^d)$. Общая сложность:

$$T_{\text{роб}}(n) = O\left(e^{\delta \ln(n\delta^{-1})} \cdot f(k(n)) \cdot n^d\right).$$

Так как $e^{\delta \ln(n\delta^{-1})} = n^\delta \cdot \delta^{-\delta}$ при $\delta = o(n)$ и $k(n) = o(n)$:

$$T_{\text{роб}}(n) = O(n^\delta \cdot f(k(n)) \cdot n^d) = O(f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+c}),$$

где $c = \lceil \delta(\log n)^{-1} \rceil$, так как $n^\delta = 2^{\delta \log n} \leq 2^{c \log n} = n^c$.

Проверка асимптотического условия управляемости. Для $f(k(n)) = 2^{k(n)}$:

$$\frac{f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+c}}{e^n} = \frac{2^{k(n)+\delta} \cdot n^{d+c}}{e^n} \leq \frac{2^{o(n)} \cdot n^{o(n)}}{e^n} \rightarrow 0.$$

Для $f(k(n)) = k^m(n)$:

$$\frac{(k(n) + \delta)^m \cdot n^{d+c}}{e^n} \leq \frac{(o(n) + o(n))^m \cdot n^{o(1)}}{e^n} \rightarrow 0.$$

□

3.2. Примеры и ограничения.

Пример 7 (Вершинное покрытие на возмущённых графах). Рассмотрим графы, требующие $\delta=O(1)$ изменений для достижения древесной ширины $k(n)=O(\log n)$.

- Число кандидатов: $O(n^\delta)=O(n^{O(1)})$.
- Время обработки: $O(2^{k(n)} \cdot n)=O(n^2)$.
- Итоговая сложность: $O(n^{O(1)} \cdot n^2)=O(n^{c+2})$.

При $\delta=o(n(\log n)^{-1})$ сложность остаётся субэкспоненциальной.

Предложение 1 (Границы применимости). Робастность сохраняется только при: $\delta=o(n)$, $f(k(n)+\delta)=o(e^n)$ и отсутствии каскадных зависимостей между изменениями.

Алгоритмы для CISP демонстрируют устойчивость к ограниченным возмущениям данных, если структурные отклонения не нарушают асимптотику параметра $k(n)$. Эффективность сохраняется в классе $o(e^n)$ при условии полиномиального роста числа модификаций.

4. СВЯЗЬ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Исследование параллельных алгоритмов для CISP позволяет выявить фундаментальные принципы, связывающие структурные свойства данных с эффективностью распараллеливания. Ключевым результатом является доказательство существования параллельных схем с полилогарифмической глубиной для задач, допускающих декомпозицию на структурно-ограниченные компоненты.

4.1. Теоретический базис.

Определение 5 (Параллельная декомпозиция CIS). Объект $M \in S$ называется *параллельно декомпозируемым*, если существует разбиение $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$, где:

- каждая M_i принадлежит $S_i \in CIS$ с параметром $k_i(n)=o(n)$, $i \in \{1, \dots, N\}$;
- число компонент $m=\text{poly}(n)$;
- граф зависимостей между компонентами имеет диаметр $O(\log^p n)$.

Теорема 7 (Параллелизация структурно-декомпозируемых задач). Пусть задача Π разрешима на $S \in CIS$ за время $T(n, k(n))=O(f(k(n)) \cdot n^d)$, где $k(n)=o(n)$, а $f(k(n))$ удовлетворяет $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n}=0$. Тогда существует параллельный алгоритм для Π на модели PRAM с:

$$\text{глубиной: } T_{\text{par}}(n)=O(\log^p n \cdot \log f(k(n)));$$

$$\text{работой: } W(n)=O(f(k(n)) \cdot n^d);$$

$$\text{процессорами: } P(n) = O\left(\frac{f(k(n)) \cdot n^d}{T_{\text{par}}(n)}\right).$$

Доказательство. Декомпозиция объекта. Используя структурный параметр $k(n)$, разложим M на $m = \Theta(nk^{-1}(n))$ независимых подзадач $\{M_i\}$. Для графа с древесной шириной $k(n)$ дерево декомпозиции высоты $h = O(\log n)$ содержит $m = O(n)$ мешков размера $O(k(n))$.

Параллельное выполнение. Каждой подзадаче M_i сопоставим группу из $P_i = O(f(k(n)))$ процессоров. Общее число процессоров:

$$P(n) = \sum_{i=1}^m P_i = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot f(k(n))\right).$$

Условие $f(k(n)) = O(k^m(n))$ при $k(n) = O(\log n)$ гарантирует $P(n) = O(n^d)$.

Анализ глубины. Критический путь определяется высотой декомпозиции и временем локальной обработки:

$$T_{\text{par}}(n) = O(h \cdot \log f(k(n))) = O(\log n \cdot k(n)) = O(\log^p n),$$

где последнее равенство следует из $k(n) = O(\log n)$.

Work-оптимальность. Сохранение работы обеспечивается соотношением:

$$W(n) = P(n) \cdot T_{\text{par}}(n) = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot f(k(n))\right) \cdot O(\log^p n) = O(f(k(n)) \cdot n^d).$$

□

4.2. Примеры приложений.

Пример 8 (Параллельный алгоритм для паросочетаний). Для графов с древесной шириной $k(n) = O(\log n)$ последовательный алгоритм поиска максимального паросочетания имеет сложность $O(2^{k(n)} \cdot n) = O(n^2)$. Параллельная схема реализует:

- декомпозицию графа на $O(n)$ мешков размера $O(\log n)$;
- параллельную обработку мешков на $O(n^2)$ процессорах;
- синхронизацию результатов с глубиной $O(\log^2 n)$.

Итоговая work-сложность $O(n^2 \log^2 n)$ соответствует оптимизированной последовательной версии.

Пример 9 (Раскраска композитных структур). Для объекта $M = S_1 \oplus S_2$, где S_1 — графы с древесной шириной $k_1(n) = O(\log n)$, а S_2 — графы со степенью $k_2(n) = O(1)$, параллельный алгоритм раскраски достигает:

$$T_{\text{par}}(n) = O(\max(\log^2 n, \log n)) = O(\log^2 n)$$

с сохранением work-сложности $O(n^2)$. Синхронизация цветов на пересечениях структур требует дополнительной глубины $O(\log n)$, что не влияет на асимптотику.

4.3. Критерии эффективности.

Предложение 2 (Принадлежность классу NC). Задача П принадлежит классу NC тогда и только тогда, когда:

- существует $S \in CIS$ с параметром $k(n)=O(\log^c n)$;
- компенсирующая функция $f(k(n))$ полиномиальна: $f(k(n))=k^{O(1)}(n)$;
- граф зависимостей декомпозиции имеет диаметр $O(\log^p n)$.

Доказательство. Необходимость: Из определения NC следует существование схемы глубины $O(\log^p n)$, что соответствует декомпозиции CIS с $k(n)=O(\log n)$.

Достаточность: Параметры CIS $k(n)=O(\log^c n)$ и $f(k(n))=k^m(n)$ обеспечивают глубину:

$$T_{\text{par}}(n)=O(\log n \cdot m \log k(n))=O(\log^{c+1} n) \in NC$$

□

Параллелизуемость задачи определяется возможностью её представления через иерархию структурно-ограниченных подзадач с логарифмической глубиной зависимостей. С помощью CIS формализуются условия, при которых экспоненциальная сложность сводится к управляемому полиномиальному и полилогарифмическому оценкам.

5. СВЯЗЬ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР С ЯДРАМИ ЗАДАЧ

В контексте параметризованной сложности построение ядер задач — фундаментальный метод снижения вычислительной трудоёмкости посредством сведения исходной задачи к эквивалентному экземпляру полиномиального размера от параметра. Для NP-трудных задач, допускающих CIS, данный подход приобретает особую значимость: структурная регуляризация данных позволяет не только гарантировать существование компактных ядер, но и явно связать их размер с асимптотикой параметра $k(n)$. В настоящем разделе устанавливаются формальные условия, при которых задачи с CIS допускают полиномиальные ядра, а также демонстрируется конструктивное построение таких редукций. Результаты опираются на двойственность между структурными ограничениями данных (выражаемыми через режимы роста $k(n)$) и алгоритмической управляемостью, что обеспечивает мост между теоретическими пределами сложности и практическими методами обработки больших экземпляров задач.

Теорема 8 (Существование полиномиального ядра). Пусть задача распознавания $\Pi=(\mathcal{D}, \mathcal{Y}, n)$ допускает CIS $S \subseteq \mathcal{D}$ с параметром $k(n)=o(n)$ и компенсирующей функцией $f(k(n))$, удовлетворяющей условию:

$$\forall c > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N f(k(n)) < e^{cn}. \quad (4)$$

Тогда существует вычислимая функция $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ и полином $p(k(n))$, такие что:

- 1) $|\kappa(M)|=O(p(k(n)))$ для всех $M \in S$;
- 2) $M \in \mathcal{Y} \iff \kappa(M) \in \mathcal{Y}$;
- 3) время вычисления $\kappa(M)$ ограничено $O(f(k(n)) \cdot n^d)$ для некоторых $d \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

1. Формализация структурного параметра. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^t$ — семейство подструктур объекта $M \in S$, где:

- $\bigcup_{i=1}^t B_i = M$;
- $\max_i |B_i| \leq k(n)$;
- дерево-декомпозиция \mathcal{T} имеет ширину $k(n)$ (для графовых задач).

Существование такого разложения гарантировано определением CIS.

2. Построение ядерного оператора. Определим редукцию $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ через композицию:

$$\rho(M) = \bigcup_{i=1}^t \rho_i(B_i), \quad (5)$$

где ρ_i — локальные редукционные правила, сохраняющие эквивалентность решений:

$$B_i \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset \iff \rho_i(B_i) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset. \quad (6)$$

Конкретный вид ρ_i определяется комбинаторными свойствами Π .

3. Оценка размера ядра. Для каждого B_i выполнено:

$$|\rho_i(B_i)| \leq g(k(n)) \quad \text{где} \quad g(k(n)) = O(k^c(n)). \quad (7)$$

Суммарный размер ядра:

$$|\kappa(M)| \leq \sum_{i=1}^t g(k(n)) \leq \frac{n}{k(n)} \cdot g(k(n)) = O(n \cdot k^{c-1}(n)) = O(k^c(n)), \quad (8)$$

где последнее равенство следует из $k(n)=o(n)$.

4. Доказательство эквивалентности. Индукцией по структуре \mathcal{T} докажем:

$$\forall M \in S \exists \Sigma : \mathcal{Y}(M) \leftrightarrow \mathcal{Y}(\kappa(M)), \quad (9)$$

где Σ — биекция, сохраняющая свойства решений. База индукции: для $|M| \leq k(n)$ утверждение тривиально. Шаг индукции: объединение редуцированных подструктур сохраняет эквивалентность по построению ρ_i .

5. Анализ сложности. Время работы κ складывается из:

- декомпозиции: $O(f(k(n)))$ (по определению CIS);
- применения ρ_i : $O(t \cdot k^{c+1}(n)) = O(n \cdot k^c(n))$.

Итоговая оценка: $O(f(k(n)) + n \cdot k^c(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^d)$, что полиномиально при $f(k(n)) = k^{O(1)}(n)$. \square

Пример 10 (Вершинное покрытие для графов ограниченной древесной ширины). Для графа $G=(V, E)$ с древесной шириной $tw(G)=k(n)=O(\log n)$:

1. Построим минимальное дерево-декомпозиции $(T, \{X_t\})$ ширины $k(n)$.
2. Для каждого мешка X_t применим редукцию:

$$X'_t = X_t \setminus \{v \in X_t \mid \exists u \in N(v) : u \in \bigcup_{t' \neq t} X_{t'}\}. \quad (10)$$

3. Результирующее ядро $G' = \bigcup X'_t$ содержит $O(k^2(n))$ вершин.

5.1. Полиномиальные ядра. В контексте параметризованной сложности построение ядер задач представляет собой методологию редукции, позволяющую сводить исходную задачу к эквивалентному экземпляру с размером, полиномиально зависящим от структурного параметра. Для CISP, данный подход приобретает каноническую форму, связывая геометрические свойства данных с вычислительной управляемостью.

Теорема 9 (Структурная редукция). Пусть задача распознавания $\Pi=(\mathcal{D}, \mathcal{Y}, n)$ допускает CIS $S \subseteq \mathcal{D}$ с параметром $k(n)=o(n)$ и компенсирующей функцией $f(k(n))$, удовлетворяющей условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n} = 0. \quad (11)$$

Тогда существует отображение $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ и полином $p(k(n))$, такие что $\forall M \in S : |\kappa(M)| = O(p(k(n)))$, $M \in \mathcal{Y} \iff \kappa(M) \in \mathcal{Y}$ и время вычисления $\kappa(M)$ ограничено $O(f(k(n)) \cdot n^d)$.

Доказательство. Декомпозиция. Для $M \in S$ построим семейство подструктур $\{B_i\}_{i=1}^l$, где $|B_i| \leq k(n)$ и $l = O(nk^{-1}(n))$, используя дерево-декомпозицию ширины $k(n)$.

Локальная редукция. Для каждой B_i определим оператор $\rho_i : 2^{B_i} \rightarrow 2^{B_i}$, сохраняющий:

$$\mathcal{Y}(B_i) \neq \emptyset \iff \mathcal{Y}(\rho_i(B_i)) \neq \emptyset. \quad (12)$$

Свойство достижимо через теорему о сохранении решений при конечных возмущениях.

Композиция. Ядро $\kappa(M) = \bigcup_{i=1}^t \rho_i(B_i)$ имеет размер:

$$|\kappa(M)| \leq t \cdot O(k^c(n)) = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot k^c(n)\right) = O(k^{c-1}(n) \cdot n). \quad (13)$$

Условие $k(n) = o(n)$ гарантирует $|\kappa(M)| = O(k^c(n))$.

Корректность. Индукцией по дереву-декомпозиции доказывается существование биекции $\phi : \mathcal{Y}(M) \leftrightarrow \mathcal{Y}(\kappa(M))$, сохраняющей свойства решений. \square

5.2. Робастность и параллелизм.

Теорема 10 (Устойчивость к возмущениям). Для объекта $M \in S$, требующего $\delta(n) = o(n)$ модификаций для включения в CIS, время решения задачи Π на M оценивается как:

$$T(n, k(n)) = O(f(k(n) + \delta(n)) \cdot n^{d+1}). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть M' получен из M добавлением $\delta(n)$ элементов. Ранг структуры M' удовлетворяет:

$$r(M') \leq r(M) + \delta(n) = k(n) + \delta(n). \quad (15)$$

Перебор всех $\binom{\delta(n)}{k(n)}$ комбинаций взаимодействия новых элементов с исходной структурой требует:

$$T(n, k(n)) = O(\delta^{k(n)}(n) \cdot f(k(n)) \cdot n^d) = O(f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+1}), \quad (16)$$

где последнее равенство следует из $\delta(n) = o(n)$. \square

Теорема 11 (Параллельная декомпозиция). Для задачи $\Pi \in CISP$ существует параллельный алгоритм с глубиной $O(\log n + \log f(k(n)))$ и шириной $O(n^c)$, сохраняющий асимптотику $O(f(k(n)) \cdot n^d)$.

Доказательство. Разобьём носитель E на $O(nk^{-1}(n))$ независимых компонент $\{C_i\}$. Каждая компонента обрабатывается параллельно за $O(\log f(k(n)))$ шагов. Синхронизация результатов требует $O(\log n)$ шагов. Суммарное число процессоров:

$$P(n) = O\left(\frac{n}{k(n)} \cdot f(k(n))\right) = O(n^c). \quad (17)$$

\square

5.3. Иллюстративный пример.

Пример 11 (Вершинное покрытие). Для графа $G=(V, E)$ с древесной шириной $tw(G)=O(\log n)$:

- дерево-декомпозиция строится за $O(n)$;
- локальная редукция удаляет вершины степени 1;
- итоговое ядро G' содержит $O(k^2(n))$ вершин.

Корректность следует из инвариантности минимального покрытия при удалении изолированных вершин.

6. СВЯЗЬ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР С МАТРОИДАМИ

Определение 6 (Максимальное независимое множество). Для матроида $\mathcal{M}=(E, \mathcal{I})$ найти:

$$\arg \max_{I \in \mathcal{I}} |I|.$$

6.1. Формальные определения и основные результаты. Пусть задан матроид $\mathcal{M}=(E, \mathcal{I})$ с носителем E мощности n и ранговой функцией $r : 2^E \rightarrow \mathbb{N}$. Будем говорить, что \mathcal{M} образует CIS, если существуют структурный параметр $k(n)=o(n)$ и компенсирующая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n}=0$, такие что любая задача оптимизации на \mathcal{M} разрешима за время $O(f(k(n)) \cdot n^d)$.

Теорема 12 (Эквивалентность ранга и структурного параметра). Для матроида \mathcal{M} следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{M} образует CIS с параметром $k(n)=r(\mathcal{M})$;
2. носитель E допускает разбиение на $t=O(nk^{-1}(n))$ подмножеств $\{C_i\}_{i=1}^t$, где $r(C_i) \leq k(n)$ для всех i .

Доказательство. Доказательство основывается на свойствах ранговой функции матроида. Из условия $k(n)=o(n)$ следует существование разбиения носителя E на подмножества ограниченного ранга. Такое разбиение позволяет провести декомпозицию исходную задачу на независимые подзадачи, каждая из которых решается за время $O(f(k(n)))$. Суммарная сложность $O(t \cdot f(k(n)))=O(nk^{-1}(n) \cdot f(k(n)))$ удовлетворяет определению CIS в силу экспоненциального подавления $f(k(n))$. \square

6.2. Построение компактных ядер.

Теорема 13 (Существование полиномиального ядра). Для матроида $\mathcal{M} \in \text{CIS}$ с параметром $k(n)$ существует подмножество $E' \subseteq E$ мощности $|E'| = O(k^2(n))$, сохраняющее свойства исходной задачи:

$$\mathcal{Y}(\mathcal{M}) \neq \emptyset \iff \mathcal{Y}(\mathcal{M}|_{E'}) \neq \emptyset, \quad (18)$$

где $\mathcal{M}|_{E'}$ — ограничение матроида на E' .

Доказательство. Используя рекурсивную процедуру сепарации, построим последовательность подмножеств $\{X_i\}$, каждое размера $O(k(n))$, таких что удаление X_i разделяет матроид на компоненты с носителями размера $O(k(n))$. После $O(\log n)$ шагов редукции объединение оставшихся компонент образует ядро E' размера $O(k^2(n))$. Сохранение ранга гарантируется свойствами рестрикции матроидов. \square

6.3. Устойчивость к возмущениям.

Теорема 14 (Робастность CIS). Пусть матроид \mathcal{M}' получен из $\mathcal{M} \in \text{CIS}$ добавлением $\delta = o(n)$ новых элементов. Тогда задача на \mathcal{M}' разрешима за время $O(f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+1})$.

Доказательство. Ранг объединения $\mathcal{M} \cup \Delta$ с $|\Delta| = \delta$ оценивается как $r(\mathcal{M} \cup \Delta) \leq k(n) + \delta$. Перебор всех $\binom{\delta}{k(n)}$ способов взаимодействия новых элементов с исходной структурой требует $O(\delta^{k(n)}(n))$ операций. Для каждого варианта решение исходной задачи занимает $O(f(k(n)) \cdot n^d)$, что в совокупности даёт $O(f(k(n) + \delta) \cdot n^{d+1})$. \square

6.4. Параллельные вычисления.

Теорема 15 (Параллельная декомпозиция). Для матроида $\mathcal{M} \in \text{CIS}$ существует параллельный алгоритм с глубиной $O(\log n + \log f(k(n)))$ и шириной $O(n^c)$, сохраняющий асимптотику $O(f(k(n)) \cdot n^d)$.

Доказательство. Декомпозиция носителя на независимые компоненты выполняется за $O(\log n)$ параллельных шагов. Каждая компонента обрабатывается независимо с глубиной $O(\log f(k(n)))$, а синхронизация результатов требует $O(1)$ шагов. Суммарное число процессоров не превышает $O(nk^{-1}(n) \cdot f(k(n)))$, что полиномиально по n . \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено систематическое развитие теории условно-идеальных структур (CIS) и установлены их связи с ключевыми разделами современной теории сложности. Полученные результаты демонстрируют, как структурные параметры данных используются для преодоления вычислительных барьеров в NP-трудных задачах.

Основные теоретические результаты включают:

1. **Формализацию связи CIS с параметризованной сложностью:** доказаны условия принадлежности CIS к классу FPT, установлены критерии FPT-полноты и показано, что логарифмический режим структурного параметра гарантирует полиномиальную сложность, тогда как сублинейный режим соответствует субэкспоненциальному классу сложности.
2. **Разработку теории приближённых схем для CIS:** доказано существование PTAS для структурно-ограниченных данных, установлены условия взаимного порождения CIS и PTAS, а также показана принципиальная невозможность эффективной аппроксимации для неструктурированных данных.
3. **Создание теории робастности CIS:** формализовано понятие δ -близости к CIS, доказаны теоремы об устойчивости вычислительной сложности к ограниченным возмущениям и определены границы применимости алгоритмов при структурных модификациях данных.
4. **Развитие параллельных аспектов CIS:** установлены критерии принадлежности к классу NC, разработаны эффективные параллельные схемы для структурно-декомпозируемых задач и доказана work-оптимальность параллельных алгоритмов.
5. **Построение теории ядер для CIS:** доказано существование полиномиальных ядер, разработаны конструктивные методы структурной редукции и показана устойчивость ядер к ограниченным возмущениям параметров.
6. **Обобщение на класс матроидов:** установлена эквивалентность ранга матроида и структурного параметра CIS, доказаны теоремы о существовании компактных ядер и разработаны параллельные алгоритмы для матроидных задач.

Практическая значимость работы подтверждается приложениями к задачам оптимизации на графах, кластеризации, обработке разреженных матриц и криптографии. Предложенные алгоритмические техники позволяют существенно снижать вычислительную сложность для широкого класса прикладных задач с выраженной структурной организацией данных.

Перспективные направления дальнейших исследований включают:

- 1) расширение теории на класс сингулярных параметров с осциллирующей асимптотикой;
- 2) интеграцию методов машинного обучения для автоматического выделения CIS;
- 3) исследование фазовых переходов сложности при нарушении структурных ограничений;
- 4) разработку адаптивных алгоритмов, динамически определяющих структурные параметры;
- 5) обобщение подхода на задачи с суперэкспоненциальными компенсирующими функциями.

Таким образом, теория условно-идеальных структур не только дополняет классические подходы к анализу сложности, но и создает предпосылки для проектирования эффективных алгоритмов в условиях структурной неоднородности данных. Установленные в работе связи между геометрическими свойствами данных и вычислительной сложностью открывают новые возможности для создания адаптивных алгоритмов, устойчивых к комбинаторному взрыву в условиях роста размерности данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев, Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. — М.: Проблемы кибернетики, 1978. — 5–68 с.
Zhuravlev, Yu. I. (1978) On algebraic approach to solving problems of recognition or classification. Moscow: Problems of Cybernetics.
2. Щербина, О. А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач. — М.: Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 48, № 1, 2008. — 159–175 с.
Shcherbina, O. A. (2008) Local elimination algorithms for solving sparse discrete problems. Moscow: Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 48, no. 1.
3. Tarjan, R. E. (1983) *Data structures and network algorithms*. Philadelphia: SIAM.
4. Edmonds, J. Matroids and the greedy algorithm. — *Mathematical programming*, 1971. — 127–136 с.
5. Christos, H. *Computational complexity*. — Addison-Wesley, 1994. — с.

6. Downey, R. G., Fellows, M. R. Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. — SIAM Journal on computing, 1995. — 873–921 с.
7. Кузюрин, Н. Н., Фомин, С. А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. — М.: МФТИ, 2007. — с.
Kuziurin, N. N., Fomin, S. A. (2007) *Efficient algorithms and computational complexity*. Moscow: MIPT.
8. Grigor'ev, D. Yu., Vorobjov Jr, N. N. Solving systems of polynomial inequalities in subexponential time. — Journal of symbolic computation, 1988. — 37–64 с.
9. Cai, L., Juedes, D. On the existence of subexponential parameterized algorithms. — Journal of Computer and System Sciences, 2003. — 789–807 с.
10. Kratsch, S. Recent developments in kernelization: A survey. — Bulletin of EATCS, 2014. — с.
11. Crampton, J., Gutin, G., Yeo, A. On the parameterized complexity and kernelization of the workflow satisfiability problem. — ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC), 2013. — 1–31 с.
12. Impagliazzo, R., Paturi, R. On the complexity of k-SAT. — Journal of Computer and System Sciences, 2001. — 367–375 с.
13. Impagliazzo, R., Paturi, R., Zane, F. Which problems have strongly exponential complexity?. — Journal of Computer and System Sciences, 2001. — 512–530 с.
14. Gurevich, Y., Stockmeyer, L., Vishkin, U. Solving NP-hard problems on graphs that are almost trees and an application to facility location problems. — Journal of the ACM (JACM), 1984. — 459–473 с.

Цитирование: Лемтюжникова Д. В. Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 2 // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 96–119.

Рудницкий О. И. Некоторые свойства базисных инвариантов унитарной группы $W(J_3(4))$ // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 7–17.

УДК: 514.7

Рассмотрены два способа построения в явном виде базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$, порожденной отражениями второго порядка относительно плоскостей трёхмерного унитарного пространства, получено их представление в виде многочленов от степенных сумм.

Ключевые слова: унитарное пространство, отражение, группа отражений, инвариант, алгебра инвариантов.

Shamoyan R. F. On Bergman projections and sharp decomposition theorems in tubular and related domains in \mathbb{C}^n // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 18–34.

УДК: 517.55

Теория аналитических пространств в общих трубчатых областях над симметрическими конусами - новая область исследований в теории функций нескольких комплексных переменных, и потому теоремы и результаты данной небольшой заметки актуальны и могут быть интересны для экспертов по теории функций нескольких переменных. В последние годы в зарубежной литературе появилось несколько интересных научных статей по этой тематике. Укажем, в частности, на статьи Алине Бонами, Бенуа Сэгва и их соавторов. В частности, в этих работах рассматриваются интересные задачи, связанные с проекторами типа Бергмана. Такого рода задачи, как и в случае менее общих областей, могут иметь многочисленные приложения в указанной области исследований.

В одномерном случае или в случае полидиска, или в случае шара, или верхнего полупространства такого рода проблемы, связанные с интегральными операторами типа Бергмана, имеют конкретные и довольно интересные приложения, хорошо известные многочисленным экспертам по теории функций комплексного переменного. Заметим вдобавок также, что в теории пространств гармонических функций нескольких переменных картина схожая, и тут хорошо известные многочисленные теоремы об интегральных операторах типа Бергмана имеют многочисленные приложения в пространствах гармонических функций нескольких переменных в единичном шаре или же в верхнем полупространстве. Все это указывает, конечно, на актуальность рассматриваемых в нашей небольшой заметке задач.

В работе предпринята попытка обобщить некоторые недавние результаты указанных выше авторов об операторах типа Бергмана В трубчатых областях над симметрическими конусами, опубликованные сравнительно недавно в зарубежных журналах. Удалось, в частности, предъявить прямые обобщения некоторых результатов Б. Сегва об интегральных операторах типа Бергмана в трубчатых областях над симметрическими конусами. Результаты, безусловно, могут иметь приложения в указанной области исследований. Отметим в заключении, что в работе введен также новый довольно интересный класс аналитических пространств в указанных довольно сложных областях, что может безусловно также иметь самостоятельный интерес для экспертов.

Наши результаты с очень похожими доказательствами могут быть также предъявлены в самых разных многомерных областях, к примеру, в ограниченных строго псевдовыпуклых областях, областях Зигеля второго типа или ограниченных симметрических областях, или матричных областях.

В конце статьи мы приведем одну точную новую теорему декомпозиции для пространств типа Бергмана. Ранее такого рода точная теорема декомпозиции была получена автором в других областях в других аналитических пространствах нескольких переменных. Наша точная теорема в пространствах Бергмана в трубчатых областях над симметрическими конусами расширяет этот список точных результатов.

Мы также сформулируем в данной небольшой заметке несколько интересных новых на наш взгляд задач для читателя и укажем также на методы их решения.

Ключевые слова: Аналитическая функция, проектор Бергмана, трубчатые области над симметрическими конусами, классы Бергмана, пространства со смешанной нормой, теоремы декомпозиции, пространства гармонических функций, полидиск.

Гетманская И. В. Взаимосвязь оценок производных первого и второго порядка // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 36–48.

УДК: 517, 512

В работе исследуются условия корректности приближения значения функции одной переменной в точке по формуле Тейлора. Эти условия вырабатываются в результате сравнения двух форм погрешности приближения: Пеано и Лагранжа, как ограниченных величин. При этом обнаруживается зависимость оценки производной II порядка

от оценки производной I порядка. Обоснование взаимосвязи между этими оценками осуществляется методами формальной логики.

Ключевые слова: формула Тейлора, погрешность формулы приближения, сравнение «О большое» малых, теория доказательств, высказывания-предикаты, логическая операция связь условием, контрапозиция.

Брыкин В. В. Разработка веб-приложения для анализа состояния растений с использованием технологий искусственного интеллекта // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 49 – 60.

УДК: 004.81

В данной работе представлен процесс создания веб-приложения, которое использует модель искусственной нейронной сети (ИНС) для классификации состояния растений. Модель ИНС обучена с помощью библиотек машинного обучения Tensorflow и Keras и обеспечивает высокую точность классификации. Приложение разработано с использованием HTML, CSS и JavaScript. Все операции с изображениями выполняются в цветовом пространстве RGB.

Ключевые слова: веб-приложение, искусственный интеллект, классификация изображений, мобильные устройства, свёрточные нейронные сети.

Карякин А. Т., Соцков В. А. Применение метода искусственного интеллекта для реализации проекта со сложным нелинейным управлением // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 61 – 70.

УДК: 621.316.7; 004.4

В статье рассматривается подход к изучению студентами методов искусственного интеллекта на примере полиномиальной регрессии и нечеткой логики для управления микроклиматом в помещениях. Нечеткая логика допускает неопределенность и изменчивость данных, что делает этот метод эффективным в реальных условиях, где параметры могут быть неточными или нечеткими, в то время как регрессионная модель позволяет описывать сложные нелинейные зависимости между температурой и влажностью и уровнем воспринимаемого комфорта. При разработке гибридной

модели и использовании более сложных алгоритмов студенты учатся использовать комбинации методов для повышения точности управления выбранным процессом.

Ключевые слова: полиномиальная регрессия, нечеткая логика, управление микроклиматом, коэффициент комфортности, системы управления, оптимизация условий.

Козлова М. Г., Гуменюк Н. И. Разработка приложения для распознавания лиц студентов академической группы // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 71 – 85.

УДК: 004.93

Описан процесс разработки мобильного приложения с использованием методов распознавания лиц на основе свёрточных нейронных сетей. Основная цель — распознавание и идентификация лиц студентов определённой группы. Используются Google ML Kit для обнаружения лиц и FaceNet для распознавания лиц.

Ключевые слова: распознавание, классификация, свёрточные нейронные сети, Google ML Kit, FaceNet.

Кристаллинский В. Р. О программе для приближенного решения краевой задачи Гильберта для аналитических функций // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 86 – 95.

УДК: 519.688

В статье рассмотрена компьютерная реализация алгоритма приближенного решения краевой задачи Гильберта для аналитических функций в системе Mathematica и программа на языке программирования C#, интегрированная с указанной реализацией.

Ключевые слова: комплексный анализ, краевая задача Гильберта, приближенные методы решения, система Wolfram Mathematica, язык C#.

Лемтюжникова Д. В. Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 2 // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 3 (68). — С. 96 – 119.

УДК: 519.854.2

В работе представлено теоретическое развитие условно идеальных структур (КИС), устанавливающее глубокие связи с фундаментальными областями вычислительной сложности. Показано, как инварианты структурных данных могут систематически

преодолевать вычислительные барьеры в NP-сложных задачах с помощью единого математического аппарата. Исследование показывает, что структурные параметры служат важным инструментом, соединяющим геометрические свойства данных с классами сложности вычислений. Проведена формализация взаимосвязей между CIS и управляемостью с фиксированными параметрами, установлены условия для снижения сложности от экспоненциального к полиномиальному режиму. Теория распространяется на схемы аппроксимации, демонстрируя, что структурные ограничения позволяют использовать эффективные схемы аппроксимации за полиномиальное время (РТА) для задач, которые в общем случае остаются неразрешимыми. В работе описана новая парадигма для разработки эффективных алгоритмов, которые используют структурные свойства данных для борьбы с комбинаторным взрывом во все более сложных вычислительных задачах.

***Ключевые слова:** условно идеальные структуры, параметризованная сложность, схемы аппроксимации, надежность алгоритмов, параллельные алгоритмы, кернелизация, матрицы, вычислительная сложность.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

***Брыкин Валентин
Валерьевич***

аспирант Политехнического института Сургутского государственного университета, г. Сургут, Российская Федерация
e-mail: valentin.brykin@mail.ru

***Гетманская Ирина
Васильевна***

к. т. н., доцент кафедры математического анализа факультета информационных технологий Московского технического университета связи и информатики, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: getmi@mail.ru

***Гуменюк Никита
Иванович***

магистрант кафедры информатики Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация

***Карякин Александр
Тимофеевич***

к. тех. н., доцент Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Российская Федерация
e-mail: karyakin2279@mail.ru

***Козлова Маргарита
Геннадьевна***

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: art-inf@mail.ru

***Кристалинский
Владимир Романович***

к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета Смоленского государственного университета, г. Смоленск, Российская Федерация, научный сотрудник военной ордена Кутузова Академии войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации
e-mail: kristor@rambler.ru

-
- Лемтюжникова
Дарья Владимировна* старший научный сотрудник, ИПУ
им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россий-
ская Федерация
e-mail: darabbt@gmail.com
- Рудницкий Олег
Иванович* к. ф.-м. н, доцент кафедры математического ана-
лиза Физико-технического института ФГАОУ
ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь,
Российская Федерация
e-mail: oirud58@gmail.com
- Соцков Владимир
Алексеевич* к. тех. н., доцент Кабардино-Балкарский госу-
дарственный университет им. Х. М. Бербекова,
г. Нальчик, Российская Федерация
e-mail: sozkov_va@rambler.ru
- Шамоян Роми
Файзоевич* к. ф.-м. н., г. Саратов, Российская Федерация
e-mail: rshamoyan@gmail.com

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: XX.XX.2024 .

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № XXX . Тираж 50 экз. Формат А4.
Усл. печ. ед. XX . Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.

Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7