

# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 2 (67) ' 2025

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:

- 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
- 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
- 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
- 1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
- 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
- 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



T AURIDA  
J OURNAL OF  
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
M ATHEMATICS

2025, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:**

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВИЧ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.	ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н. — **главный редактор**  
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**  
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**  
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**  
GERMANCHUK M. S., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**  
ЗАКОРА Д. А., доц., д. ф.-м. н.  
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**  
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**

**АДРЕС УЧРЕДИТЕЛЯ, ИЗДАТЕЛЯ И РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007  
Тел. гл. редактора: +7 (978) 291-10-84  
Тел. редакции: +7 (978) 557-24-96, +7 (978) 837-82-77  
e-mail (гл. редактор): a.n.soloviev@yandex.ru  
e-mail (для переписки): tvim-article@mail.ru  
сайт журнала: www.tvim.su

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи  
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Системный анализ, управление и обработка информации
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика и математическое моделирование

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**EDITORIAL COUNCIL:**

<b>Sergey ABLAMEYKO</b> , Prof., Dr. Eng. Sc.	<b>Igor POLOVINKIN</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Tatyana CHERNOVA</b> , Assoc. prof., Dr. Eng. Sc.	<b>Andrey RAIGORODSKY</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Vladimir CHILIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Dmitry ROKHLIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Gennady DEMIDENKO</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Fedor STONYAKIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Vladimir KALINICHENKO</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Vyacheslav TSIBULIN</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Alexey KARAPETYANTS</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Anton UTKIN</b> , Senior Researcher, Dr. Eng. Sc.
<b>Viktor KRASNOPROSHIN</b> , Prof., Dr. Eng. Sc.	<b>Alexander VATULIAN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Vladislav KRAVCHENKO</b> , Prof., Dr. Eng. Sc.	<b>Konstantin VORONTSOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Leonid MESTETSKIY</b> , Prof., Dr. Eng. Sc.	<b>Alexander YAROSHENKO</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Mustafa MURATOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Yakov YERUSALIMSKY</b> , Prof., Dr. Eng. Sc.
<b>Andrey MURAVNIK</b> , Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Vladimir ZADOROZHNY</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
<b>Stanislav PAPKOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.	<b>Valentin ZAGREBNOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.

**EDITORIAL BOARD:**

**Arkadiy SOLOVIEV**, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc. — **Editor-in-Chief**  
**Lyudmila RUDENKO**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Vice Chief Editor**  
**Ayder ANAFIEV**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Managing Editor**  
**Vladimir BLYSCHIK**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **The Editor of the Cite**  
**Maria GERMANCHUK**, Cand. Phys.-Math. Sc. — **Secretary**  
**Dmitry ZAKORA**, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.  
**Margarita KOZLOVA**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Executive Secretary**  
**Vladimir LUKYANENKO**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Science editor**

**OFFICE ADDRESS:**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE:** [www.tvim.su](http://www.tvim.su)

**FOR CORRESPONDENCE:**

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation  
**Tel.** +7 978 291 10 84 — editor-in-chief  
+7 978 557-24-96, +7 978 837 82 77 — office  
**Email:** [a.n.soloviev@yandex.ru](mailto:a.n.soloviev@yandex.ru) — editor-in-chief  
[article@tvim.su](mailto:article@tvim.su) — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

**THEMATIC SECTIONS:**

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Малафеев О. А., Зайцева И. В., Козлов Н. О.</b> Построение оптимальной стратегии дрона в задаче преследования с препятствием .....	7
<b>Морозов Ю. В.</b> Исследование скрытых колебаний в системе 3-го порядка с разрывной правой частью .....	24
<b>Котова О. В.</b> Об оптимальном расположении узлов аппроксимации функции Рунге .....	41
<b>Лиу Т. Н.</b> On first integrals of a sixth-order ordinary differential equation .....	54
<b>Лемтюжникова Д. В.</b> Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 1 .....	67
<b>Брыкин В. В.</b> Вейвлет-анализ и машинное обучение в классификации состояния растений по текстурным признакам .....	99
Рефераты .....	112
Список авторов номера .....	115

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Malafeyev O. A. , Zaitseva I. V. , Kozlov N. O.</b> Building an optimal drone strategy in a pursuit problem with an obstacle.....	7
<b>Morozov Yu. V.</b> Study of hidden oscillations in a 3rd order system with a discontinuous right-hand side.....	24
<b>Kotova O. V.</b> On the optimal arrangement of approximation nodes of the Runge's function.....	41
<b>Luu T. H.</b> On first integrals of a sixth-order ordinary differential equation.....	54
<b>Lemtyuzhnikova D. V.</b> Conditionally ideal structures in solving discrete optimization problems. Part 1.....	67
<b>Brykin V. V.</b> Wavelet analysis and machine Learning in plant health classifying from texture features.....	99
Abstracts.....	112
Authors.....	115

УДК: 517.977.5:519.876.5

MSC2020: 49N70, 91A23, 93C15

DOI: 10.5281/zenodo.18288263

## ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДРОНА В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

© О. А. Малафеев

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ПРОСПЕКТ, 35. ПЕТЕРГОФ Г., ПЕТРОДВОРЦОВЫЙ РАЙОН, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 198504,  
РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: *malafeyeva@mail.ru*

© И. В. Зайцева<sup>1</sup>, Н. О. Козлов<sup>2</sup>

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ  
ПР. МЕТАЛЛИСТОВ, 3, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 195027, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
<sup>1</sup>E-MAIL: *irina.zaitseva.stv@yandex.ru*  
<sup>2</sup>E-MAIL: *nikitagarbuzko@gmail.com*

**BUILDING AN OPTIMAL DRONE STRATEGY IN A PURSUIT PROBLEM WITH AN  
OBSTACLE.**

**Malafeyev O. A. , Zaitseva I. V. , Kozlov N. O.**

**Abstract.** Drones are increasingly being used in a variety of fields, including surveillance, search and rescue, and package delivery. The obstacle pursuit problem has widespread application in the field of unmanned aerial systems. Obstacle pursuit tasks require drones to track targets while navigating obstacles. Obstacle pursuit poses challenges when drones must follow targets without colliding with obstacles, especially with limited information. Effective strategies are essential for successful pursuit missions. Understanding how drones navigate obstacles, adapt to changing conditions, and make decisions with limited information is crucial to enhancing the capabilities of drones in pursuit missions. One crucial aspect of drone operations is optimizing their pursuit strategies when faced with obstacles. This research delves into developing an optimal strategy for drones in obstacle pursuit tasks, specifically focusing on the application of differential games to model successful target interception in dynamic environments. Differential games provide a mathematical framework where drones and their pursued targets make decisions based on obstacle detection. The research explores the theorems and proofs related to successful strategies for unmanned aerial vehicles in pursuit problems, emphasizing the importance of obstacle avoidance and target pursuit. The paper develops a pursuit algorithm that takes into account the presence of obstacles and ensures safe approach to the target using a group of controlled drones. A simple, effective strategy for intercepting and optimally moving a group of drones to achieve the stated task is created. The results of a study on modeling simple drone movement dynamics are obtained. The research aims to improve the efficiency and success of UAV flights by identifying optimal approaches to achieving the target while simultaneously avoiding

obstacles. The results of the MATLAB simulations provide valuable insights for improving the performance of unmanned aerial vehicles in challenging environments, and their potential applications extend to areas such as robotics and artificial intelligence. By optimizing pursuit strategies in the presence of obstacles, UAVs can navigate complex terrain more efficiently, ultimately improving their performance and reliability across a wide range of applications.

**Keywords:** *drone, pursuit, obstacle, optimal strategy, game with incomplete information, ?-equilibrium, mathematical model, unmanned systems, control, algorithms.*

## ВВЕДЕНИЕ

В рамках данной работы поставлена задача построить оптимальную стратегию дрона в задаче преследования с препятствием. Основной целью исследования является применение дифференциальных игр для моделирования успешного перехвата преследуемой цели в динамических условиях. В данном контексте определены следующие цели и задачи работы. Построить алгоритм преследования, учитывающий наличие препятствий и обеспечивающий безопасное приближение к преследуемой цели с использованием группы управляемых дронов. Создать простую эффективную стратегию перехвата и оптимальное движение группы дронов с целью достижения поставленной задачи. Получить результаты исследования по моделированию простой динамики движения дронов.

### 1. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДРОНА В ДИНАМИЧЕСКИХ СЦЕНАРИЯХ

Для построения оптимальной стратегии дрона в динамических сценариях необходимо определить математическую модель системы, включая динамику движения дрона, цели и ограничения. Дифференциальные игры обеспечивают математическую основу, в которой дроны и преследуемые ими цели принимают решения.

Пусть  $X$  — локально компактное метрическое пространство и пусть  $F(x_0, t_0, t)$  — семейство отображений пространства  $X$  на себя, определяющее обобщённую дифференциальную систему (ОДС)  $F^*$  [2], [3], так что справедливы следующие аксиомы:

1.  $F(x_0, t_0, t)$  определено для всех  $x_0 \in X$ ,  $t_0, t \in [0, \infty]$  и является непустым компактным множеством пространства  $X$ .
2. При всех  $t_0, t_1, t_2 \in [0, \infty)$ ,  $(t_0 \leq t_1 \leq t_2)$ .  $F(x_0, t_0, t_2) = U_{x_i \in F(x_0, t_0, t_1)} F(x_i, t_1, t_2)$ .
3.  $F(x_0, t_0, t)$  непрерывно в метрике Хаусдорфа. Будем называть  $F(x_0, t_0, t)$  функцией достижимости ОДС  $F^*$ .

**Определение 1.** Отображение  $w = w(x_0, t_0, t_1) : [t_0, t] \rightarrow X$  называется траекторией ОДС  $F^*$  на интервале  $[t_0, t]$ , исходящей из точки  $x_0$ , если для всяких  $t_1, t_2 [t_0, t_1] (t_1 \leq t_2)$ ,  $w[\cdot](t_2) \in F(w[\cdot](t_1), t_1, t_2)$ .

Обозначим через  $F(A, t_0, t)$  множество всех траекторий ОДС  $F^*$  на интервале  $[t_0, t]$ , исходящих из точек множества  $A \subset X$ . Приведем некоторые вспомогательные утверждения из теории обобщенных дифференцированных систем.

**Теорема 1.** Траектория  $w(x_0, t_0, t)$  ОДС  $F^*$  является непрерывным отображением при любых  $x_0 \in X, t_0, t \in [0, \infty), (t_1 \leq t_2)$ .

*Доказательство.* Доказательство приведено в [3]. □

**Теорема 2.** Для  $\forall x_1 \in F(x_0, t_0, t) \cap X$  и  $t_0, t \in [0, \infty)$  таких, что  $t_0 \leq t$ , найдется траектория ОДС  $F^*$  на интервале  $[t_0, t]$ , начинающаяся в точке  $x_0$ , и заканчивающаяся в точке  $x_1$ .

*Доказательство.* Доказательство приведено в [3]. □

**Теорема 3.** Если множество  $B \subset X$  компактно, то при всех  $t_0, t \in [0, \infty)$  таких, что  $t_0 \leq t$ , множество  $\dot{F}(B, t_0, t)$  компактно в равномерной метрике

$$\hat{p}(w_1, w_2) = \max_{\tau \in [t_0, t]} p(w_1(\tau), w_2(\tau))$$

*Доказательство.* Доказательство приведено в [3]. Для полного описания дифференциальной игры с зависимыми движениями необходимо сформулировать еще одно допущение, которое назовем аксиомой управления. □

Определена совокупность:

$$A = (U(x_0, t_0, t), V(x_0, t_0, t), \pi[x_0, t_0, t], *)$$

называемая управлением игры с зависимыми движениями, где:

- а)  $U(x_0, t_0, t), V(x_0, t_0, t)$  — суть абстрактные множества, определенные для  $\forall x_0 \in X, t_0, t \in [0, \infty)$  таких, что  $t_0 \leq t$ , называемые множествами управления объектов Р и, соответственно, Е в точке  $x_0$  на интервале  $[t_0, t]$ ;
- б)  $\pi(x_0, t_0, t)$  — однозначное отображение

$$\pi(x_0, t_0, t) : U[\cdot] \times V[\cdot] \rightarrow F(x_0, t_0, t),$$

определённое при всех  $x_0 \in X$  и  $t_0, t \in [0, \infty)$  таких, что  $t_0 \leq t$ ;

- в)  $*$  — операция, сопоставляющая всяким совместным элементам  $(u_1, v_1) \in U(x_0, t_0, t_1) \times V(x_0, t_0, t_1)$ ,  $(u_2, v_2) \in U(x_1, t_1, t_2) \times V(x_1, t_1, t_2)$  (т.е. таким, что  $\pi[x_0, t_0, t_1](u_1, v_1)(t_1) = x_1$ ) элемент

$(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_3, v_3) \in U(x_0, t_0, t) \times V(x_0, t_0, t)$  с выполнением следующего соотношения:

$$\pi[x_0, t_0, t_2](u_3, v_3)(t) = \begin{cases} \pi[x_0, t_0, t_1](u_1, v_1)(t), & \text{при } t \in [t_0, t_1], \\ \pi[x_1, t_1, t_2](u_2, v_2)(t), & \text{при } t \in [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Пару  $D = (F^*, A)$  назовем динамикой игры с зависимыми движениями. Зафиксируем конечное разбиение интервала  $[0, T] : \sigma = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ , и определим для него игры с предписанной продолжительностью  $T < \infty$ ;  $\Gamma_i(x_0, T)$ ,  $i = 1, 2$ . Состояния информации объектов  $P$  и  $E$  в играх  $\Gamma_i(x_0, T)$ ,  $i = 1, 2$ , следующие: объекту  $E(P)$  в игре  $\Gamma_1(x_0, T)\Gamma_2(x_0, T)$  в момент  $t_i \in \sigma$  известно  $t_i$ ,  $x(t_i)$ ,  $w(x_0, t_0, t_i)$ , а объекту  $P(E)$ , кроме того, известно  $v \in V(u \in U[x(t_i), t_i, t_{i+1}])$ .

Предполагается также, что обоим объектам известны  $D, T, \sigma$ .

**Определение 2.** Стратегия  $\phi_i^\sigma(\Psi_i^\sigma)$  объекта  $P(E)$  в игре  $\Gamma_i(x_0, T)$ ,  $i = 1, 2$ , есть отображение, ставящее в соответствие состоянию информации объекта  $P(E)$  в момент времени  $t_i \in \sigma$  элемент  $v \in V(u \in U[x(t_i), t_i, t_{i+1}])$ .

При начальной позиции  $x_0 \in X$  по данной паре стратегий  $(\phi_i^\sigma, \Psi_i^\sigma)$ ,  $i = 1, 2$ , траектория  $w[x, t_0, T] \in \hat{F}(x, t_0, T)$  строится путем «склеивания» частичных траекторий  $w[x(t_i), t_i, t_{i+1}]$ ,  $t_i \in \sigma$ . При этом возникает отображение:

$$\chi_i^\sigma : \Phi_i^\sigma \times \Psi_i^\sigma \longrightarrow \hat{F}(x, t_0, T)$$

$$\Phi_i^\sigma = \{\phi_i^\sigma\}, \Psi_i^\sigma = \{\psi_i^\sigma\}, i = 1, 2$$

В силу однозначности отображений  $\pi(x_0, t_0, t) : U[\cdot] \times V[\cdot] \longrightarrow F(x_0, t_0, t)$ , справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** *Отображения  $\chi_i^\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , однозначны.*

*Доказательство.* Пусть  $H$  - непрерывный функционал на пространстве  $C([0, T])$  непрерывных отображений  $f : [t_0, T] \longrightarrow X$ , снабженном равномерной метрикой

$$\hat{p}(f_1, f_2) = \max_{\tau \in [t_0, T]} p(f_1(\tau), f_2(\tau)).$$

Функция выигрыша в игре  $\Gamma_i(x_0, T)$ ,  $i = 1, 2$ , определяется следующим образом:

$$H_i^\sigma(\phi_i^\sigma, \psi_i^\sigma) = \overline{H}.$$

Определив пространства стратегий  $\Phi_i^\sigma, \Psi_i^\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , и функции выигрыша  $H_i^\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , на их произведении  $\Phi_i^\sigma \times \Psi_i^\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , задали игру  $\Gamma_i(x_0, T)$  в нормальной форме.  $\square$

**Лемма 2.** В играх  $\Gamma_i(x_0, T)$ ,  $i = 1, 2$ , при всех  $x_0 \in X$ ,  $T < \infty$  и всяком разбиении  $\sigma$  интервала  $[0, T]$  существуют ситуации  $\varepsilon$ -равновесия для любого  $\varepsilon > 0$ . При этом

$$\text{Val}(\Gamma_1(x_0, T)) \leq \text{Val}(\Gamma_2(x_0, T)). \quad (1)$$

*Доказательство.* Мы покажем существование ситуации  $\varepsilon$ -равновесия для игры  $\Gamma_1(x_0, T)$ ; для игры  $\Gamma_2(x_0, T)$  это делается аналогичным образом. Доказательство леммы проведём индукцией по  $n$  – числу точек в разбиении  $\sigma = \sigma_n$  интервала  $[0, T]$ .

При  $n = 0$  игра  $\Gamma_1(x_0, T)$  есть однократная минорантная игра с функцией выигрыша

$$\bar{H}(\chi_1^{\sigma_0}, (\phi_1^{\sigma_0}, \psi_1^{\sigma_0})) = H_1^{\sigma_0}(\phi_1^{\sigma_0}, \psi_1^{\sigma_0}),$$

заданной на произведении  $U(x_0, t_0, T) \times V(\cdot)$ , в которой объект  $E$  первым выбирает точку пространства  $V(x_0, t_0, T)$ . После этого объект  $P$ , будучи информирован об этом выборе, выбирает точку пространства  $U(x_0, t_0, T)$ .

Заметим, что так как функция  $\bar{H}$  непрерывна на пространстве  $\hat{F}(x_0, t_0, T)$ , которое компактно по теореме 3, то из теоремы Вейерштрасса следует, что функция  $\bar{H}$  ограничена на всяком собственном подмножестве пространства  $\hat{F}(x_0, t_0, T)$ . Следовательно, в среде  $\Gamma_1^{\sigma_0}(x_0, T)$  для всякого числа  $\varepsilon > 0$  существует ситуация  $\varepsilon$ -равновесия. Допустим теперь, что утверждение справедливо для всех игр  $\Gamma_1^{\sigma_k}(x, \tau)$ ,  $x \in X$ ,  $\tau \in [0, \infty)$  таких, что  $k \leq n - 1$ . Покажем тогда, что в игре  $\Gamma_1^{\sigma_n}(x_0, T)$  также существует ситуация  $\varepsilon$ -равновесия. Обозначим через  $\sigma_n^{t_i}$  разбиение интервала  $[t_i, T]$ , индуцированное разбиением  $\sigma_n$  интервала  $[t_0, T]$ :  $\sigma_n^{t_i} = \{t_i < t_{i+1} < \dots < t_{N_\sigma} = T\}$ .

Для всякой игры  $\Gamma_1^{\sigma_n^{t_1}}(\pi[x_0, t_0, t_1](u_1[\cdot], v_1[\cdot]))(t_1)$  обозначим через  $\Phi_{v_1}^{u_1}$ ,  $\Psi_{v_1}^{u_1}$  множества стратегий объектов  $P$  и, соответственно,  $E$ . По индукционному предположению в играх  $\Gamma_1^{\sigma_n^{t_1}}(\pi[\cdot](u_1[\cdot], v_1[\cdot]))(t_1, T)$  существуют ситуации  $\varepsilon$ -равновесия для всякого числа  $\varepsilon > 0$ . Пусть это суть пары  $\phi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}$ ,  $\psi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}$ . Тогда справедливы следующие неравенства:

$$H_1^{\sigma_n^{t_1}}(\phi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}, \psi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}) \leq H_1^{\sigma_n^{t_1}}(\phi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}, \psi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}) + \varepsilon, \quad (2)$$

$$H_1^{\sigma_n^{t_1}}(\phi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}, \psi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}) \geq H_1^{\sigma_n^{t_1}}(\phi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}, \psi_{u_1, \varepsilon}^{u_1}) - \varepsilon \quad (3)$$

для всякой пары стратегий  $(\phi_{u_1}^{u_1}, \psi_{u_1}^{u_1}) \in \Phi_{v_1}^{u_1} \times \Psi_{v_1}^{u_1}$ .

Зафиксируем такую пару элементов  $u_1^\varepsilon \in U[x_0, t_0, t_1]$ ,  $v_1^\varepsilon \in V[x_0, t_0, t_1]$ , что выполняются неравенства:

$$G(u_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon) \geq \sup_{v_1 \in V} G(u_1^\varepsilon, v_1) - \varepsilon, \quad (4)$$

$$G(u_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon) \leq \inf_{u_1 \in U} G(u_1, v_1^\varepsilon) + \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь  $G(u_1, v_1) = \bar{H}(\bar{w}[x_0, t_0, T])$ , где

$$\bar{w}[x_0, t_0, T] = \begin{cases} \pi[x_0, t_0, t_i](u_1, v_1), & t \in [t_0, t_1], \\ \chi_i^{\sigma_{t_i}}(\phi_{v_1, \varepsilon}^{u_1}, \psi_{v_1, \varepsilon}^{u_1}), & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Это возможно в силу того, что однократная минорантная игра с функцией выигрыша  $G$  на произведении пространств стратегий  $U(x_0, t_0, t_1) \times V(x_0, t_0, t_1)$  для всякого  $\varepsilon > 0$  имеет ситуацию  $\varepsilon$ -равновесия. Определим стратегии  $\bar{\phi}_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma$  в игре  $\Gamma_1^{\sigma_0}(x_0, T)$  следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1^\sigma(t_0) = u_1^\varepsilon, \\ \bar{\phi}_1^\sigma(t_i) = \phi_{v_1, \varepsilon}^{u_1}(t_i), & t_i \neq t_0. \\ \bar{\psi}_1^\sigma(t_0) = v_1^\varepsilon, \\ \bar{\psi}_1^\sigma(t_i) = \psi_{v_1, \varepsilon}^{u_1}(t_i), & t_i \neq t_0. \end{cases}$$

Из (2) – (5) следует, что для всяких  $\bar{\phi}_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma$ :

$$\begin{aligned} H_1^\sigma(\bar{\phi}_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma) &\geq H_1^\sigma(\bar{\phi}_1^\sigma, \psi_1^\sigma) - 2\varepsilon, \\ H_1^\sigma(\phi_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma) &\leq H_1^\sigma(\phi_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

так что  $(\bar{\phi}_1^\sigma, \bar{\psi}_1^\sigma)$  является ситуацией  $2\varepsilon$ -равновесия в игре  $\Gamma_1^{\sigma_0}(x_0, T)$ . Функция значения этой игры удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \text{Val}(\Gamma_1^{\sigma_0}(x_0, T)) &= \sup_{V(x_0, t_0, t_1)} \inf_{U(x_0, t_0, t_1)} \dots \\ &\dots \sup_{V[x(t_i), t_i, t_{i+1}]} \inf_{U[x(t_i), t_i, t_{i+1}]} \dots \\ &\dots \sup_{V[x(N_{\sigma-1}), t_{N_{\sigma-1}}, T]} \inf_{U[x(N_{\sigma-1}), t_{N_{\sigma-1}}, T]} \dots \\ &\dots \bar{H}\left(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2) * \dots * (u_{N_\sigma}, v_{N_\sigma}))\right). \end{aligned}$$

Соотношение (1) вытекает из следующего неравенства, справедливого для ограниченной вещественнозначной функции  $g$ , определенной на произведении  $A \times B$  множеств  $A$  и  $B$ :

$$\inf_{x \in A} \sup_{y \in B} g(x, y) \geq \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} g(x, y)$$

□

**Лемма 3.** Для всякой пары  $\sigma, \sigma'$  разбиений интервала  $[0, T]$  такой, что разбиение  $\sigma'$  является измельчением разбиения  $\sigma$ , справедливы следующие неравенства:

$$\text{Val}(\Gamma_2^\sigma(x_0, T)) \geq \text{Val}(\Gamma_2^{\sigma'}(x_0, T)), \quad (6)$$

$$\text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T)) \leq \text{Val}(\Gamma_1^{\sigma'}(x_0, T)). \quad (7)$$

*Доказательство.* Покажем справедливость неравенства (6), неравенство (7) доказывается аналогичным образом. Ограничимся случаем, когда разбиение  $\sigma'$  получается из разбиения  $\sigma$  добавлением одной точки  $t'$ :  $\sigma' = \sigma \cup \{t'\}$ . Общий случай очевидным образом сводится к этому частному. Обозначим через  $k(\sigma_k)$  число внутренних точек в разбиении  $\sigma_k$ , так что  $\sigma_k = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = T\}$ .

1. Пусть  $\sigma = \sigma_0$ . Тогда разбиению  $\sigma'$  соответствует двухшаговая игра  $\Gamma_2^{\sigma'}(x_0, T)$ , и нам достаточно доказать справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in U[x_0, t_0, T]} \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \dots \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T](u, v)) \geq \\ & \geq \inf_{u_1 \in U[x_0, t_0, t_1]} \dots \sup_{v_2 \in V[x_0, t_0, t_1]} \inf_{u_2 \in U[x_0, t_1, t_2]} \dots \\ & \dots \sup_{v_2 \in V[x(t_1), t_0, t_2]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2))). \end{aligned}$$

Так как  $w[x(t_1), t_1, T] = f \in C([t_0, T])$ , где

$$f(t) = \begin{cases} x(t_1), & t \in [t_0, t_1], \\ w[x(t_1), t_1, T], & t \in [t_0, T], \end{cases}$$

то  $F(x(t_1), t_1, T) \subset F(x_0, t_0, t)$ , и, следовательно, при всяком  $u_2 \in U(x(t_1), t_1, T)$

$$\begin{aligned} & \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T](u, v)) \geq \\ & \geq \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2))). \end{aligned}$$

А тогда и подавно при всяких  $U[x(t_1), t_1, T]$ ,  $V[x(t_1), t_1, T]$

$$\begin{aligned} & \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T](u, v)) \geq \\ & \geq \inf_{v_2 \in U[x(t_1), t_1, T]} \sup_{v_2 \in V[x(t_1), t_1, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2))). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение в правой части (8) является функцией двух переменных, заданной на произведении  $U[x_0, t_0, t_1] \times V[x_0, t_0, t_1]$ . Так как неравенство (8) справедливо при любых  $U[x(t_1), t_1, T]$ ,  $V[x(t_1), t_1, T]$ , то выполняется также неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T](u, v)) \geq \\ & \geq \inf_{u_1 \in U[x_0, t_0, t_1]} \sup_{v_1 \in V[x_0, t_0, t_1]} \\ & \inf_{u_2 \in U[x_0, t_0, T]} \sup_{v_2 \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2))) \end{aligned}$$

при всяком  $u \in U[x_0, t_0, T]$  в выражении слева.

Следовательно, выполняется также соотношение

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in U[x_0, t_0, T]} \sup_{v \in V[x_0, t_0, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T](u, v)) \geq \\ & \geq \inf_{u_1 \in U[x_0, t_0, t_1]} \sup_{v_1 \in V[x_0, t_0, t_1]} \\ & \inf_{u_2 \in U[x(t_1), t_1, T]} \sup_{v_2 \in V[x(t_1), t_1, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T]((u_1, v_1) * (u_2, v_2))). \end{aligned}$$

2. Пусть теперь  $k$  — любое. Предположим для определенности, что  $t' \in [0, t_1]$ .

Рассмотрим на произведении  $U[x_0, t_0, t_1] \times V[x_0, t_0, t_1]$  функцию

$$\begin{aligned} G(u_1, v_1) = & \inf_{u_2 \in U[x(t_1), t_1, t_3]} \sup_{v_2 \in V[x(t_1), t_1, t_3]} \\ & \inf_{u_3 \in U[x(t_1), t_1, t_3]} \sup_{v_3 \in V[x(t_1), t_1, t_3]} \dots \\ \dots & \inf_{u_{k+1} \in U[x(t_k), t_k, T]} \sup_{v_{k+1} \in V[x(t_k), t_k, T]} \overline{H}(\pi[x_0, t_0, T] * \dots * (u_{k+1}, v_{k+1})). \end{aligned}$$

Применяя к ней рассуждения п. 1, получаем, что  $v'' \in V[x(t'), t', t_1]$

$$\begin{aligned} & \inf_{u' \in U[x_0, t_0, t_1]} \sup_{v' \in V[x_0, t_0, t_1]} G(u_1, v_1) \geq \\ & \geq \inf_{u' \in U[x_0, t_0, t']} \sup_{v' \in V[x_0, t_0, t']} \\ & \inf_{u'' \in U[x(t'), t', t_1]} \sup_{v'' \in V[x(t'), t', t_1]} G((u', v') * (u'', v'')). \end{aligned}$$

Тогда, вспоминая функциональные уравнения для функции значения, перепишем это неравенство следующим образом:

$$\text{Val}(\Gamma_2^\sigma(x_0, T)) \geq \text{Val}(\Gamma_2^{\sigma'}(x_0, T)).$$

□

**Лемма 4.** Для всякой измельчающейся последовательности  $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$  разбиений интервала  $[0, T]$  такой, что

$$\gamma(\sigma_n) = \max_{1 \leq i \leq N_{\sigma_n}} (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Val}(\Gamma_1^{\sigma_n}(x_0, T)) &= V_1(\{\sigma_n\}), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Val}(\Gamma_2^{\sigma_n}(x_0, T)) &= V_2(\{\sigma_n\}). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Утверждение леммы непосредственно вытекает из лемм 2, 3 и из теоремы о монотонной ограниченной последовательности. □

**Лемма 5.** *Для всяких измельчающихся последовательностей  $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\sigma'_n\}_{n=1}^\infty$  разбиений интервала  $[0, T]$  таких, что  $\gamma(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\gamma(\sigma'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , справедливы соотношения*

$$V_i(\{\sigma_n\}) = V_i(\{\sigma'_n\}), \quad i = 1, 2.$$

*Доказательство.* Докажем утверждение леммы для последовательности игр  $\{\Gamma_1^{\sigma_n}(x_0, T)\}_{n=1}^\infty$ ; для последовательности игр  $\{\Gamma_2^{\sigma'_n}(x_0, T)\}_{n=1}^\infty$  доказательство проводится аналогичным образом. Положим

$$L = \sup_{\{\sigma\}} \text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T)),$$

где  $\{\sigma\}$  — множество всех конечных разбиений интервала  $[0, T]$ . Из леммы 3 и неравенства (1) следует, что при всяком  $\sigma \in \{\sigma\}$  справедливо неравенство

$$\text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T)) \leq \text{Val}(\Gamma_2^\sigma(x_0, T)).$$

Здесь  $\{\sigma\}$  — разбиение интервала  $[0, T]$ , не содержащее никаких точек, кроме 0 и  $T$ . Отсюда заключаем, что  $L < \infty$ .

Зададимся произвольным числом  $\eta > 0$ . По определению  $L$  найдётся такое разбиение  $\sigma \in \{\sigma\}$ , что

$$\text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T)) \leq L - \eta/2. \tag{9}$$

Пусть  $k$  — число внутренних точек разбиения  $\sigma$ . В силу непрерывности функции достижимости  $F(x_0, t_0, T)$  и непрерывности функции выигрыша  $\bar{H}$  для всякого натурального числа  $m$  по любому  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что если в разбиении  $\sigma' \in \{\sigma\}$ ,  $t_i^{(\sigma')} - t_{i-1}^{(\sigma')} < \delta(\varepsilon)$ ,  $i = 1, \dots, N_{\sigma'}$ , то для всякого разбиения  $\sigma'$ , содержащего  $m$  внутренних точек, выполняется неравенство

$$W_1(\sigma') + W_1(\sigma) < \varepsilon,$$

где  $W_1(\sigma) = \text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T))$ .

Выберем такое разбиение  $\sigma' \in \{\sigma\}$ , что  $t_i^{(\sigma')} - t_{i-1}^{(\sigma')} < \delta(\eta/2)$ . Тогда при  $m = k$  выполняется неравенство:

$$-W_1(\sigma') + W_1(\sigma \cup \sigma') < \eta/2.$$

По лемме 3 и (9):

$$W_1(\sigma \cup \sigma') > L - \eta/2.$$

Вместе с предыдущим неравенством это даёт:

$$W_1(\sigma') > L - \eta. \tag{10}$$

Неравенство (10) показывает, что для последовательности  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  разбиений интервала  $[0, T]$  такой, что  $\gamma(\sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Val}(\Gamma_1^\sigma(x_0, T)) = L.$$

□

**Определение 3.** Стратегией  $\psi_1$  ( $\varphi_2$ ) игрока  $E(P)$  в игре  $\Gamma_1(x_0, T)$  называется пара  $(\sigma_{\psi_1}, K^E(\sigma_{\psi_1}))$  (соотв.  $(\sigma_{\varphi_2}, K^P(\sigma_{\varphi_2}))$ ), где  $\sigma_{\psi_1}$  ( $\sigma_{\varphi_2}$ ) — произвольное конечное разбиение интервала  $[0, T]$ , а  $K^E(\sigma_{\psi_1})$ ,  $(K^P(\sigma_{\varphi_2}))$  — отображение, ставящее в соответствие состоянию информации объекта  $E(P)$  в момент времени  $t_i \in \sigma_{\psi_1}$  ( $i = 0, \dots, N_{\sigma_{\psi_1}} - 1$ ), (соотв.  $t_i \in \sigma_{\varphi_2}$  ( $i = 0, \dots, N_{\sigma_{\varphi_2}} - 1$ )) элемент множества  $V[x(t_i), t_i, t_{i+1}] (U[x(t_i), t_i, t_{i+1}])$ .

Множество стратегий игрока  $E(P)$  в игре  $\Gamma_1(x_0, T)$  обозначим через  $\Psi_1$  ( $\Phi_2$ ).

**Определение 4.** Стратегией  $\phi_1$  ( $\psi_2$ ) объекта  $E(P)$  в игре  $\Gamma_2(x_0, T)$  называется отображение  $K^E(\sigma_{\psi_1})$  ( $K^P(\sigma_{\phi_2})$ ), ставящее в соответствие состоянию информации объекта  $P(E)$  в момент времени  $t_i \in \sigma_{\psi_1}$  ( $t_i \in \sigma_{\phi_2}$ ) элемент множества  $V[x(t_i), t_i, t_{i+1}] (U[x(t_i), t_i, t_{i+1}])$ .

Множество стратегий объекта  $P(E)$  в игре  $\Gamma_2(x_0, T)$  обозначим через  $\Phi_1$  ( $\Psi_2$ ). Состояния информации игроков в этих играх следующие. В момент  $t_i \in \sigma_{\phi_2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_{\sigma_{\phi_2}}$  игроку  $P(E)$  в игре  $\Gamma_2(x_0, T)$  ( $\Gamma_1(x_0, T)$ ) известно  $t_i, x(t_i), w[x_0, t_0, t_i]$ ,  $x(t_i)$ , игроку же  $E(P)$  сверх того известно управление  $u[x(t_i), t_i, t_{i+1}]$  ( $v[x(t_i), t_i, t_{i+1}]$ ), выбранное игроком  $P(E)$  в этот момент времени. Функция выигрыша в игре определяется с помощью введённой выше функции  $\bar{H}$ :

$$H_i(\phi_i, \psi_i) = \bar{H}(\chi_i(\phi_i, \psi_i)),$$

где  $\chi_i(\phi_i, \psi_i)$  — траектория игры,  $i = 1, 2$ , в ситуации  $(\phi_i, \psi_i) \in \Phi_i \times \Psi_i$ .

**Замечание 1.** Из полученных выше теорем следует существование ситуаций  $\epsilon$  — в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями. Для независимых движений это показано в [6]. Случай зависимых движений рассматривается аналогично.

**Замечание 2.** Вопрос существования ситуаций  $\epsilon$  — в дифференциальных играх с независимыми движениями рассматривается в [7]-[10]. Среды с независимыми движениями, определяемые с помощью обобщенных дифференциальных систем, рассматривались в [11], где доказано существование минимаксной стратегии преследователя, и в [4]. Конструктивным методам отыскания решений в дифференциальных играх посвящены работы [5], [12]-[14].

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЯ В ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММЕ MATLAB

Для верификации теоретического аппарата дифференциальных игр, представленного в первом разделе описана численная модель задачи преследования в среде MATLAB. Моделирование реализует дискретную аппроксимацию игры  $\Gamma_2(x_0, T)$  с тремя преследователями ( $P$ ) и одним убегающим ( $E$ ) на плоскости с препятствиями, используя алгоритм потенциальных полей для управления движением дронов. Принципы соответствия теоретической модели:

- абстрактные множества управлений  $U$  и  $V$  конкретизируются как множества допустимых векторов скорости, вычисляемых на каждом временном шаге;
- динамика системы (отображение  $\pi$ ) реализуется через итеративное обновление позиций объектов по дискретной схеме;
- временное разбиение  $\sigma$  вводится неявно через шаг дискретизации по времени;
- операция \* сшивания управлений на смежных интервалах обеспечивается итерационной структурой алгоритма;
- функционал качества  $H$  формализуется как бинарный показатель эффективности условия захвата.

В данном простом примере преследуемая цель (красный) является убегающим, а остальные три дрона (зеленый, желтый и голубой) являются преследователями. Цель преследователей — догнать убегающую цель, которая движется к заданной конечной позиции, избегая препятствия [15]-[16].

### 1. Инициализация параметров:

- указывается количество препятствий, их радиус, начальные и конечные позиции для убегающей цели и скорости дронов;
- генерируются случайные координаты для препятствий.

### 2. Создание фигуры для визуализации:

- моделируются объекты (преследователи и убегающий) с разными цветами;
- моделируются препятствия в виде окружностей.

### 3. Цикл для движения объектов:

- убегающая цель движется к конечной позиции, учитывая притяжение к цели и отталкивание от препятствий;
- преследователи движутся в направлении убегающей цели, также учитывая притяжение и отталкивание;
- проверяется, догнал ли один из преследователей убегающую цель.

Если хотя бы один из преследователей догоняет убегающего, сценарий завершается.

## 4. Обновление визуализации:

- позиции объектов обновляются на графике для отображения их текущего положения.

## 5. Задержка для визуализации:

- для более наглядной демонстрации движения дронов, преследуемой цели и взаимодействия с препятствиями добавлена задержка.

При выполнении моделирования преследователи в реальном времени двигаются по полю, преследуя убегающую цель и избегая столкновений с препятствиями. Когда хотя бы один из преследователей догоняет убегающего, сценарий завершается.

Результаты моделирования отображаются в MATLAB с помощью графического интерфейса, позволяя наблюдать за движением игроков и препятствий в реальном времени (рис.1). Позиции дронов, преследуемой цели и препятствий обновляются на графике после каждой итерации цикла, что обеспечивает визуальное представление о процессе движения.

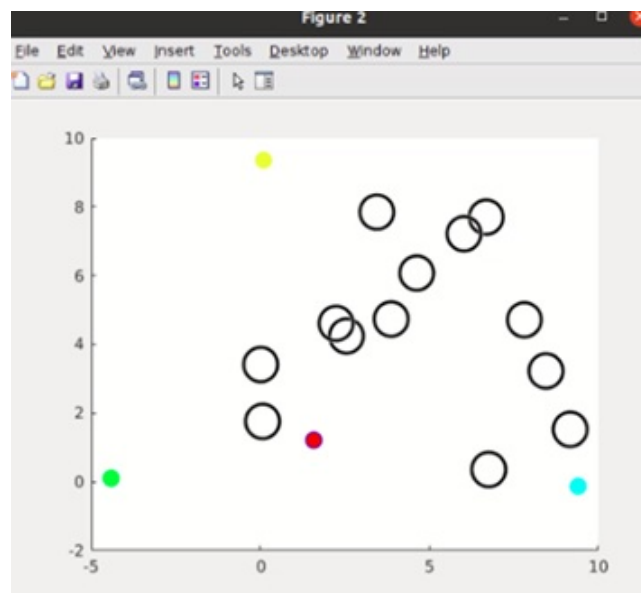


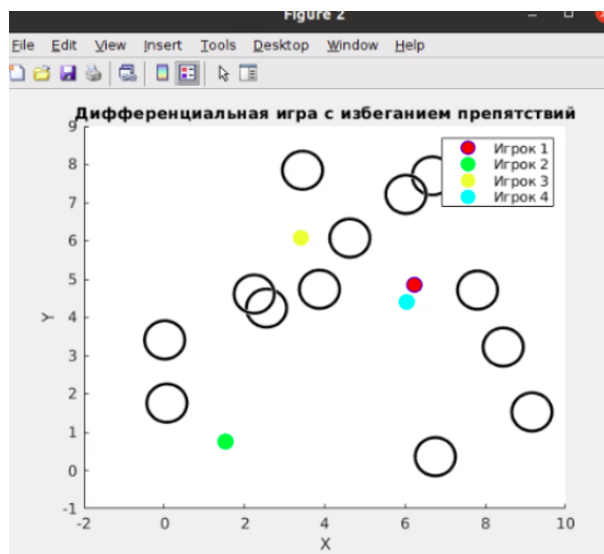
Рис. 1. Начальные позиции четырех объектов.

Для избегания столкновений с препятствиями объекты реагируют на их близость. Если расстояние между объектом и препятствием меньше "repulsion\_distance", объект изменяет направление движения, чтобы обойти препятствие.

Дроны и преследуемая цель вычисляют направление движения как вектор между текущим положением и целевым положением (для убегающей цели — конечной позицией, для дронов — позицией убегающей цели).

При обнаружении препятствия объект добавляет к своему направлению движения вектор отталкивания от препятствия, чтобы избежать столкновения.

Сценарий продолжается до тех пор, пока один из преследователей не догонит убегающую цель (рис.2). При достижении преследователем убегающего выводится сообщение о успешном преследовании. В случае столкновения игроков с препятствием выводится сообщение о произошедшем столкновении.



*Рис. 2.* Один из преследователей успешно завершил преследование убегающей цели.

В представленном коде (рис.3) реализована математическое моделирование движения дронов и убегающей цели в пространстве с учетом препятствий. Ниже представлено пояснение параметров и как она влияет на моделирование.

- «num\_obstacles»: определяет количество случайно сгенерированных препятствий.
- «obstacle\_radius»: задает радиус каждого препятствия.
- «start\_pos»: начальная позиция первого игрока.
- «end\_pos»: конечная позиция первого игрока, которую он должен достичь.
- «player1\_speed»: скорость движения первого игрока.
- «player2\_pos»: начальная позиция второго игрока.
- «player2\_speed»: скорость движения второго игрока.
- «player3\_speed»: скорость движения третьего игрока.
- «player3\_pos»: начальная позиция третьего игрока.
- «player4\_speed»: скорость движения четвертого игрока.

- «player4\_pos»: начальная позиция четвертого игрока.
- «repulsion\_distance»: расстояние, на котором игроки взаимодействуют с препятствиями.

```

% Задаем параметры
num_obstacles = 13;
obstacle_radius = 0.5;
start_pos = [1, 1]; % Начальная позиция первого игрока
end_pos = [15, 15]; % Конечная позиция первого игрока
player1_speed = 0.1;
player2_pos = [-5, 0]; % Позиция второго игрока
player2_speed = 0.12;
repulsion_distance = 2;

% Параметры для третьего и четвертого игроков
player3_pos = [0, 10]; % Позиция третьего игрока
player3_speed = 0.13; % Скорость третьего игрока
player4_pos = [10, 0]; % Позиция четвертого игрока
player4_speed = 0.14; % Скорость четвертого игрока

% Генерируем случайные препятствия
obstacles = rand(num_obstacles, 2) * 10;

% Создаем фигуру для визуализации
figure;
hold on;

% Рисуем начальную позицию первого игрока
player1_handle = plot(start_pos(1), start_pos(2), 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');

% Рисуем второго игрока
player2_handle = plot(player2_pos(1), player2_pos(2), 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');

% Рисуем третьего и четвертого игроков
player3_handle = plot(player3_pos(1), player3_pos(2), 'yo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'y');
player4_handle = plot(player4_pos(1), player4_pos(2), 'co', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'c');

% Рисуем препятствия
for i = 1:num_obstacles
    viscircles(obstacles(i,:), obstacle_radius, 'EdgeColor', 'k', 'LineWidth', 2);
end

% Цикл для движения игроков
caught = false; % Флаг для проверки, догнал ли второй игрок первого игрока
player1_pos = start_pos;
player3_pos = [0, 10];
player4_pos = [10, 0];
while ~caught
    % Движение первого игрока к конечной позиции, избегая препятствия

```

Рис. 3. Демонстрация кода в прикладной программе MATLAB.

Генерация препятствий. С помощью функции «rand» генерируются случайные координаты для создания препятствий.

Визуализация. Создается графическое окно для визуализации движения игроков и расположения препятствий. Начальные позиции игроков и препятствий отображаются на графике.

Цикл движения дронов. Преследователи двигаются к конечной позиции, управляя направлением движения в зависимости от расстояния до цели. Приближаясь к препятствиям, игроки изменяют направление движения, чтобы избежать столкновений. Преследователи двигаются в направлении убегающего игрока, также учитывая препятствия и избегая столкновений.

Моделирование продолжается до тех пор, пока один из преследователей не догонит убегающего. При достижении преследователем убегающего сценарий завершается.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено исследование по моделированию движения дронов в простой динамике с использованием прикладной программы MATLAB для решения задачи построения оптимальной стратегии дрона в процессе преследования с препятствием. Приведены необходимые для данного случая результаты по теории дифференциальных игр, которые являются основой для моделирования движения успешного перехвата преследуемой цели в динамических условиях. Моделирование движения дронов в различных сценариях имеет большое практическое значение для разработки исследований стратегий взаимодействия в динамических сценариях. В ходе работы проведено моделирование для определения направлений движения дронов, избегания столкновений с препятствиями и обновления их позиций в реальном времени; заданы параметры и получены графики моделирования, которые могут быть использованы для принятия решений в сценариях и оптимизации стратегий дронов; получены результаты моделирования простой динамики дронов. Результаты данного исследования могут быть применены в различных областях, таких как многоагентные системы и робототехника. Дальнейшие исследования направлены на улучшение моделирования движения дронов с учетом более сложных сценариев и стратегий поведения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малафеев, О. А. Игры, определяемые посредством обобщенных динамических систем // Успехи теории игр: Труды II Всесоюзной конференции по теории игр / Под ред. Э. Вилкаса. — Вильнюс: МИНТИС, 1973. — С. 212-214.

MALAFEYEV, O. A. (1973) Games defined by means of generalized dynamic systems. *Advances in game theory: Proceedings of the II All-Union Conference on Game Theory* (Ed. E. Vilkkas). Vilnius: MINTIS. Pp. 212–214.

2. Барбашин, Е. А. Обобщенные динамические системы // Ученые записки МГУ. — М.: Изд-во МГУ, 1949. — № 135. — С. 34-41.  
BARBASHIN, E. A. (1949) Generalized dynamic systems. *Scientific Notes of Moscow State University*. No. 135. Pp. 34–41.
3. Малафеев, О. А. Ситуации равновесия в динамических играх // Кибернетика. — Киев: Наукова думка, 1974. — № 3. — С. 111-118.  
MALAFEYEV, O. A. (1974) Equilibrium situations in dynamic games. *Cybernetics*. No. 3. Pp. 111–118.
4. Roxin, E. Stability in General Control Systems // Journal of Differential Equations. — 1965. — No 1. — С. 115-126.
5. Малафеев, О. А. О существовании обобщенного значения игры преследования // Управляемые системы. — Новосибирск: Наука, 1970. — Вып. 4-5. — С. 88-95.  
MALAFEYEV, O. A. (1970) On the existence of a generalized value of the pursuit game. *Controlled Systems*. Iss. 4–5. Pp. 88–95.
6. Красовский, Н. Н. Игровые задачи о встрече движения. — М.: Наука, 1970. — 132 с.  
KRASOVSKII, N. N. (1970) Game Problems on the Meeting of Motions. Moscow: Nauka.
7. Малафеев, О. А., Петросян, Л. А. О дискретной аппроксимации динамических игр преследования // Управляемые системы. — Новосибирск: Наука, 1970. — Вып. 6. — С. 112-120.  
MALAFEYEV, O. A., PETROSYAN, L. A. (1970) On discrete approximation of dynamic pursuit games. *Controlled Systems*. Iss. 6. Pp. 112–120.
8. Fleming, W. H. The Convergence Problem for Differential Games // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1961. — No 3. — С. 102-118.
9. Verajia, P., In J. Existence of Saddle Points in Differential Games // SIAM Journal on Control. — 1969. — V. 7, No 3. — С. 441-461.
10. Friedman, A. Existence of Value and of Saddle Points for Differential Games of Pursuit and Evasion // Journal of Differential Equations. — 1970. — V. 7, No 1. — С. 92-110.

11. Петров, Н. Н. О существовании значения игры преследования // Доклады Академии наук СССР. — М.: Наука, 1970. — Т. 190, № 6. — С. 1278-1281.  
PETROV, N. N. (1970) On the existence of a value of the pursuit game. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. Vol. 190, No. 6. Pp. 1278–1281.
12. Varaiya, P. P. On the Existence of Solutions to a Differential Game // SIAM Journal on Control. — 1967. — Vol. 5, No 1. — С. 153-162.
13. Айзекс, Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 314 с.  
ISAACS, R. (1967) *Differential Games*. Moscow: Mir.
14. Понтрягин, Л. С. О линейных дифференциальных играх // Доклады Академии наук СССР. — М., 1967. — Т. 174, № 6. — С. 1278-1280.  
PONTRYAGIN, L. S. (1967) On linear differential games. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. Vol. 174, No. 6. Pp. 1278–1280
15. Петросян, Л. А. Об одном инварианте в дифференциальных играх преследования // Вестник Ленинградского государственного университета. — Л., 1968. — № 1. — С. 46-52.  
PETROSYAN, L. A. (1968) On an invariant in differential pursuit games. *Vestnik of Leningrad State University*. No. 1. Pp. 46–52.
16. Пшеничный, Б. Н. Структура дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. — М.: Наука, 1969. — Т. 184, № 2. — С. 285-287.  
PSHENICHNYI, B. N. (1969) The structure of differential games. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. Vol. 184, No. 2. Pp. 285–287.

**Цитирование:** Малафеев О. А. и др. Построение оптимальной стратегии дрона в задаче преследования с препятствием // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 7–23.

УДК: 517.93

MSC2010: 37G15

DOI: 10.5281/zenodo.18478181

## ИССЛЕДОВАНИЕ СКРЫТЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ 3-ГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© Ю. В. Морозов

ИПУ РАН

ЛАБ. 16

ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [tot1983@ipu.ru](mailto:tot1983@ipu.ru)

STUDY OF HIDDEN OSCILLATIONS IN A 3RD ORDER SYSTEM WITH A DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE.

Morozov Yu. V.

**Abstract.** The paper presents an analytical study of the stability of hidden oscillations arising in a 3rd order system with a discontinuous right-hand side. Numerical examples are given to illustrate the correctness of the results obtained.

The problem of searching for hidden oscillations in nonlinear systems has been formulated relatively recently, but the study of parasitic oscillations when restrictions are imposed on control or phase variables has been widely discussed in the literature since the implementation of the simplest control algorithms with restrictions.

Works in which parasitic oscillations occurred when using a harmonic external force or when limiting linear control with a complex spectrum of corresponding eigenvalues have become widespread.

Unlike other works on the study of parasitic oscillations, in [4] a mathematical definition of this mode of operation of a nonlinear system is given.

In addition to the definition, the authors also proposed a method for searching for hidden fluctuations based on reducing the system to the Lurie type. Unfortunately, as it was shown in [7, 9, 10], there is a fairly simple class of systems for which this method is not applicable, but at the same time, hidden oscillations and hidden attractors exist in these systems.

This article builds on the research started at [10] and is a continuation of the work of [11]. In these works, the problem of stabilizing a third-order integrator using a control with a nested structure of saturation functions was investigated. In [11], a new discontinuous control law is proposed, which makes it possible to construct hidden fluctuations in an analytical form for a closed system. In this paper, it will be proved that the assumptions made about the structure of latent vibrations are a consequence of the occurrence of a sliding mode in a closed system, and the point mapping approach adapted for discontinuous systems by Feigin [2] will be used to study the properties of oscillatory modes.

Thus, the purpose of this work is to show that in the studied third-order system with a discontinuous right-hand side, hidden fluctuations arise only due to the occurrence of a stable sliding regime on the switching surface, when determining the Filippov solution.

**Keywords:** *discontinuous right side, hidden oscillations, cycle stability*

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема поиска скрытых колебаний в нелинейных системах была сформулирована сравнительно недавно [4, 6], однако исследования паразитных колебаний при введении ограничений на управление или фазовые переменные широко обсуждалась в литературе с момента реализации простейших алгоритмов управления с ограничениями [1].

Широкое распространение получили работы, в которых паразитные колебания возникали при использовании гармонической внешней силы или при ограничении линейного управления с комплексным спектром соответствующих собственных значений.

В отличие от других работ по исследованию паразитных колебаний, в [4] определение данного режима работы нелинейной системы сформулировано следующим образом:

**Определение 1.** Аттрактор называется скрытым, если его область притяжения не пересекается со сколь угодно малыми окрестностями неустойчивых состояний равновесия [4, 5], т.е. скрытые аттракторы не связаны с неустойчивыми состояниями и их бассейны притяжения «спрятаны» в фазовом пространстве системы [5].

Помимо определения, авторы предложили также метод поиска скрытых колебаний, опирающийся на приведение системы к типу Лурье. К сожалению, как было показано в работах [7, 9, 10] существует достаточно простой класс систем, для которых этот метод не применим, но при этом в данной системе существуют скрытые колебания и скрытые аттракторы.

Статья опирается на исследования, начатые в [10] и является продолжением работы [11]. В этих работах исследовалась проблема стабилизации интегратора третьего порядка с помощью управления, обладающего вложенной структурой из функций насыщения. В работе [11] предложен новый разрывный закон управления, позволяющий для замкнутой системы построить скрытые колебания в аналитическом виде. В данной работе, будет доказано, что сделанные предположения о структуре скрытых колебаний, являются следствием возникновения в замкнутой системе скользящего

режима, а для исследования свойств колебательных режимов будет использован подход точечного отображения, адаптированный для разрывных систем Фейгиным [2].

Таким образом, цель данной работы показать, что в исследуемой системе третьего порядка с разрывной правой частью, скрытые колебания возникают из-за возникновения устойчивого скользящего режима на поверхности переключения, при доопределении решения по Филиппову.

Далее кратко, изложим одну из наиболее распространенных схем исследования устойчивости периодического движения метода на основе точечных отображений в интерпретации Фейгена [2], ограничившись системой 3-го порядка.

Пусть состояние системы описывается вектором пространственных координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и временем  $\tau$ . Каждое из простейших отображений связывает соотношениями координаты и фазу исходной точки  $M^0(x^0, \tau^0)$  с координатами и фазой отображенной точки  $M^1(x^1, \tau^1)$ . Следовательно, движение системы для одной поверхности разрыва в простейшем случае будет описываться последовательными отображениями точек  $M^0, M^1, M^2$ , принадлежащих, вообще говоря, различным поверхностям  $S_i, i=1, 2, \dots$ . В качестве параметра часто бывает удобным выбрать промежуток времени  $\theta^1 = \tau^1 - \tau^0$ . Т. к. в данной работе будет рассматриваться только автономная система, для нее начальная фаза на каждом участке траектории роли не играет и может быть принята равной нулю.

Пусть  $M^0 \in S_i, M^1 \in S_j$  тогда имеют место соотношения вида

$$x^1 = F^{ij}(x^0, \theta^1) \quad (1)$$

причем значение  $\theta^1 > 0$  и является наименьшим корнем выражения

$$f_j(x^1, \theta^1) = 0, \quad (2)$$

являвшегося уравнением соответствующей поверхности  $S_j$ . Здесь  $F^{ij} = (F_1^{ij}, F_2^{ij}, F_3^{ij})$  — векторные функции, а  $f_j$  — скалярные функции.

Будем искать движение с символической характеристикой .ab.bc. ... la, включающей 2 символа и имеющее период  $\tau = q T$ , где  $q$  — целое положительное число. Уравнения неподвижных точек определяются уравнениями вида

$$x^1 = F^{ab}(x^0, \theta^1), \quad (3)$$

$$f_b(x^0, \theta^1) = 0, \quad (4)$$

$$x^2 = F^{ba}(x^1, \theta^2), \quad (5)$$

$$f_a(x^1, \theta^1, \theta^2) = 0 \quad (6)$$

и условий неподвижности

$$x^2 = x^0, \quad \theta^2 + \theta^1 = q T. \tag{7}$$

В результате приходим к системе 8 уравнений (3)–(7) относительно 8 неизвестных

$$x_i^0, \theta^1, x_i^1, \theta^2, i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Период движения заранее неизвестен и определяется как сумма отрезков времени движения по отдельным участкам фазовой траектории

$$\tau = \theta^1 + \theta^2.$$

Следует отметить, что даже в простейших случаях, когда движение между отдельными поверхностями  $S_i, i=1, 2, 3$  описывается линейными дифференциальными уравнениями и координаты  $x$  поддаются исключению путем их выражения через  $\theta^1, \dots, \theta^m$ , задача сводится к нахождению решений системы из  $m$  трансцендентных уравнений

$$f_b(x^0(\theta^1), \theta^1) = 0, \tag{9}$$

$$\dots \tag{10}$$

$$f_a(x^1(\theta^1, \theta^m), \theta^m, \theta^1) = 0. \tag{11}$$

Устойчивость неподвижной точки отображения (речь идет об устойчивости в малом), а следовательно, и соответствующего периодического движения определяется корнями характеристического уравнения  $\chi(\lambda)=0$ . Получим  $\chi(\lambda)$  для уравнений в форме (3). С этой целью переходим от этих уравнений к уравнениям в вариациях по всем пространственным координатам и отклонениям  $\theta$ :

$$\delta x_k^1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k^{ab}}{\partial x_i^0} \delta x_i^0 + \frac{\partial F_k^{ab}}{\partial \theta^1} \delta \theta^1, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_b}{\partial x_i^0} \delta x_i^0 + \frac{\partial f_b}{\partial \theta^1} \delta \theta^1 = 0, \tag{13}$$

$$\delta x_k^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k^{ba}}{\partial x_i^1} \delta x_i^1 + \frac{\partial F_k^{ba}}{\partial \theta^1} \delta \theta^1 + \frac{\partial F_k^{ba}}{\partial \theta^2} \delta \theta^2, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_a}{\partial x_i^1} \delta x_i^1 + \frac{\partial f_a}{\partial \theta^1} \delta \theta^1 + \frac{\partial f_a}{\partial \theta^2} \delta \theta^2 = 0, (k = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Здесь значения частных производных соответствуют неподвижным точкам отображения, устойчивость которых исследуется. Полагая в последних 4-х уравнениях

$$\delta x_k^2 = \lambda \delta x_k^0 \quad (k=1, 2, 3), \tag{16}$$

в результате получаем систему однородных линейных уравнений относительно вариаций

$$\delta x_1^0, \delta x_2^0, \delta x_3^0, \delta \theta^1, \delta x_1^1, \delta x_2^1, \delta x_3^1, \delta \theta^2.$$

Условие существования ненулевых решений этой системы, т. е. равенство нулю детерминанта матрица  $A \in R^{8 \times 8}$ , составленной из коэффициентов линейных управлений (12)–(16), и представляет собой характеристическое уравнение  $\chi(\lambda)=0$  третьей степени. Аналитически найти корни такого полинома можно только в особых случаях.

Предположим, что в нашей системе цикл симметричный относительно поверхности разрыва, тогда условия (7), (16) примут вид

$$x^1 = -x^0, \quad \theta^1 = \frac{1}{2} T = \Theta, \quad \delta x_k^2 = \lambda \delta x_k^0 \quad (k=1, 2, 3). \quad (17)$$

А значит, количество неизвестных сократится вдвое и матрицу линейной системы и соответствующее ей характеристическое уравнение можно выписать в явном виде:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1^{ab}}{\partial x_1^0} + \lambda & \frac{\partial F_1^{ab}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial F_1^{ab}}{\partial x_3^0} & \frac{\partial F_1^{ab}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial F_2^{ab}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial F_2^{ab}}{\partial x_2^0} + \lambda & \frac{\partial F_2^{ab}}{\partial x_3^0} & \frac{\partial F_2^{ab}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial F_3^{ab}}{\partial x_1^0} & \frac{\partial F_3^{ab}}{\partial x_2^0} & \frac{\partial F_3^{ab}}{\partial x_3^0} + \lambda & \frac{\partial F_3^{ab}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial f_a}{\partial x_1^0} & \frac{\partial f_a}{\partial x_2^0} & \frac{\partial f_a}{\partial x_3^0} & \frac{\partial f_a}{\partial \theta^1} \end{bmatrix} = 0. \quad (18)$$

Периодическое решение, определяемое параметрами  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \theta^1$  устойчиво, если все корни (18) расположены внутри круга единичного радиуса, т. е. выполняются строгие неравенства  $|\lambda| < 1$ . Когда абсолютное значение одного из корней становится равным единице, т. е.  $\lambda=1$ , или  $\lambda=-1$ , или пары комплексно-сопряженных корней вида  $\lambda=e^{\pm i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  происходит нарушение условий существования этих решений или потеря их устойчивости [2]. Далее для краткости наряду со словосочетанием периодическое решение будем использовать слово цикл.

## 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим нелинейную систему 3-го порядка с разрывной правой частью вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\text{sign}(x_3 + \text{sat}(n\alpha x_2 + \alpha^2 x_1)), \quad \alpha, n > 0, \quad (19)$$

где функция  $\text{sign}(\xi) = \xi/|\xi|$ ,  $\xi \neq 0$  и  $\text{sign}(\xi) \in [-1, 1]$  многозначная функция при  $\xi = 0$ , а решение системы (19) понимается в смысле Филиппова [3],  $\text{sat}(\xi) = \xi$ , при  $|\xi| \leq 1$  и  $\text{sign}(\xi)$  при  $|\xi| > 1$ . Покажем, что в начало координат системы (19) при  $0 < n, \alpha < +\infty$

локально асимптотически устойчиво, причем существует область притяжения [7], из которой любая траектория приходит в начала координат за конечное время.

**1.1. Локальная асимптотическая устойчивость начала координат системы (19).** Пусть  $x=[x_1; x_2; x_3] \in R^3$ . Обозначим функцию, определяющую поверхность разрыва в системе (19) через

$$S(x) = x_3 + \text{sat}(S_2(x_1, x_2)), S_2(x_1, x_2) := n\alpha x_2 + \alpha^2 x_1. \tag{20}$$

Тогда множество меры ноль в определении Филиппова задается как  $M = \{x : S(x) = 0\}$ .

Правая часть системы (19) в векторном виде записывается как  $f^+ = [x_2; x_3; -1]$  при  $S > 0$  и  $f^- = [x_2; x_3; 1]$  при  $S < 0$ .

Найдем область притяжения начала координат. Для этого воспользуемся методом Халила [7]. Рассмотрим непрерывную функцию Ляпунова  $V = |S|$ . Ее производная будет отрицательной при  $S \neq 0$ , если выполняется неравенство  $|n\alpha x_3 + \alpha^2 x_2| < 1$  т.е.  $\dot{V} = \text{sign}(S)(-\text{sign}(S) + n\alpha x_3 + \alpha^2 x_2) < 0$ .

Далее рассматривается функция  $V_1=|x_1|$ , для которой

$$\dot{V}_1 = \text{sign}(x_1)x_2 = \text{sign}(x_1)(S_2(x_1, x_2)/(n\alpha) - x_1\alpha/n).$$

Т. к. нас интересует только локальная окрестность начала координат потребуем выполнения условия  $|S_2(x_1, x_2)| < 1$ . Тогда  $\dot{V}_1 < 0$ , если выполняется  $(1/(n\alpha) - |x_1|\alpha/n) < 0$ ,  $|x_1| > 1/\alpha^2$ . Последнее означает, что ни одна траектория системы (19) не может покинуть область  $|x_1| < 1/\alpha^2$ , если выполняются также ограничения  $|S_2(x_1, x_2)| < 1$  и  $|n\alpha x_3 + \alpha^2 x_2| < 1$ . Более того, любая траектория, начавшаяся в области  $\Omega$

$$\Omega = \{x \in R^3 : |x_1| \leq 1/\alpha^2, |S_2(x_1, x_2)| < 1, |n\alpha x_3 + \alpha^2 x_2| < 1\}, \tag{21}$$

при  $t \rightarrow +\infty$  придет в начало координат [7].

Пусть

$$\Omega_s = \left\{ x \in \Omega : \left| \alpha^2 n^2 \left( \frac{\alpha}{n} x_1 + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) x_2 \right) \right| < 1 \right\}. \tag{22}$$

Докажем, что множество (22) является областью притяжения начала координат за конечное время для системы (19).

Найдем сначала множества, на которых возможен скользящий режим или на которых происходит протыкание поверхности разрыва фазовыми траекториями. Для этого определим параметр  $\gamma = f_N^- / (f_N^- - f_N^+)$ , где  $f_N^+(S > 0)$  и  $f_N^-(S < 0)$  проекции векторного поля  $f^\pm$  на нормаль к поверхности разрыва [3]. Если выполняются соотношения

$$f_N^- f_N^+ < 0, \gamma \in (0, 1), \tag{23}$$

в системе на множестве  $M$  существует устойчивый скользящий режим, т. е. система движется по многообразию  $M$  согласно допорделенной правой части, которая для системы (19) имеет вид  $f^0=[x_2; x_3; 1 - 2\gamma]$ . Если  $f_N^- f_N^+ > 0$  происходит протыкание поверхности, и решение можно доопределять по непрерывности.

Т. к.  $S$  — непрерывно дифференцируемая функция, за исключением точек на множестве  $M_0=\{x : x_3 = -\text{sign}(S(x_1, x_2)), |S(x_1, x_2)|=1\}$ , найдем  $f_N^\pm$  в каждой точке на множестве  $M_s=M \setminus M_0$ . Случай доопределения решения в точках множества  $M_0$  подробно разобран в [12] и в данной работе не приводится. Основная идея доказательства заключается в том, что векторное поле в этих точках строится как суперпозиция векторных полей от 2-х гладких поверхностей разрыва соответственно при  $|S(x_1, x_2)| < 1$  и  $|S(x_1, x_2)| > 0$  при этом направление этого векторного поля на решение не влияет, т. к. оно определено на множестве меры ноль [3]. Однако, эти точки могут быть стационарными, если новое векторное поле равно нулю, одновременно у 4-х проекций. Докажем что, для системы (19) это не так. Используя результаты Филиппова [3], находим проекции векторного поля в следующем виде:

$$f_N^\pm(x) = \frac{\nabla S(x) \cdot f^\pm(x)}{\|\nabla S(x)\|} = -\frac{(\rho(x_1, x_2) \pm 1)}{\|\nabla S(x_1, x_2)\|}, \quad (24)$$

$$\rho(x_1, x_2) = \phi' \alpha (\alpha x_2 - n \text{sat}(n \alpha x_2 + \alpha^2 x_1)),$$

$$\nabla S(x_1, x_2) = [\phi' \alpha^2; \phi' n \alpha; 1], \quad (25)$$

$$\|\nabla S(x)\| = \sqrt{1 + (\phi')^2 \alpha^2 (\alpha^2 + n^2)} \neq 0,$$

где  $\phi'=0$ , если  $|S_2| > 1$  и  $\phi'=1$ , если  $|S_2| < 1$ .

Из полученных уравнений (24) следует, что для любых функций  $\rho(x_1, x_2)$  вектора  $f_N^\pm(x)$  не могут быть равны нулю одновременно или быть эквивалентны при разных значениях  $\phi'$ , а значит на множестве  $M_0$  стационарных точек нет.

Найдем условия при которых в системе (19) возникает скользящий режим. Рассмотрим сначала случай  $|S_2| > 1$ , тогда  $\phi'=0$ . Из приведенные формул следует, что  $f_N^\pm(x) = \mp 1$ , а значит в системе имеет место устойчивый скользящий режим на множестве  $M$  при выполнении условия  $|n \alpha x_2 + \alpha^2 x_1| > 1$ . Из структуры поверхности разрыва и (20) следует, что во время устойчивого скользящего режима  $x_3 = \pm 1$ , а  $f^0=[x_2; x_3; 0]$ . Последнее означает, что траектория может не прийти в начало координат, оставаясь на поверхности разрыва до переключения. Во время этого движения траекториями являются параболы вида  $x_1 = \pm x_2^2/2 + C$ ,  $C$  — это константа, которая определяется координатами  $x_1^*, x_2^*$  в момент начала скользящего режима.

Рассмотрим случай  $|S_2| < 1$ . Тогда  $\phi' = 1$  и, следовательно,  $\rho(x_1, x_2) = \alpha(\alpha x_2 - n(n\alpha x_2 + \alpha^2 x_1))$ . Найдем

$$\gamma = \frac{1 - \rho(x_1, x_2)}{2} = \frac{1 + \alpha^2 n^2 (\frac{\alpha}{n} x_1 + (1 - \frac{1}{n^2}) x_2)}{2}. \tag{26}$$

Из уравнения (26) и условия следует, что скользящий режим будет существовать на множестве  $M$ , если выполнено 2-ва условия:  $|n\alpha x_2 + \alpha^2 x_1| < 1$  и  $|\alpha^2 n^2 (\frac{\alpha}{n} x_1 + (1 - \frac{1}{n^2}) x_2)| < 1$ . Доказан следующий результат,

**Лемма 1.**  $\Omega_s$  является областью притяжения начала координат системы (19) за конечное время. На множестве  $\Omega_c = \{x \in R^3 : |S_2(x_1, x_2)| > 1\}$  возникает устойчивый скользящий режим только при  $x_3 = \pm 1$ .

Из леммы 1 следует, что скрытое колебание может существовать только вне области  $\Omega_s$ .

**1.2. Неустойчивый цикл.** Сначала будем искать цикл в той области фазового пространства, где у системы (19) отсутствует скользящий режим по поверхности  $S(x) = 0$ , но при этом выполняется условие  $|x_3| \leq 1$ . В этом случае, описанный выше алгоритм работает практически без изменений.

Пусть при  $\theta^1 > 0$  система (19) имеет правую часть  $f = [x_2; x_3; -1]$ . Интегрируя уравнение (19) с этой правой частью, получаем уравнения вида (3):

$$x_3^1 = F_3(\Theta, x^0) := -\Theta + x_3^0, \tag{27}$$

$$x_2^1 = F_2(\Theta, x^0) := -\frac{\Theta^2}{2} + x_3^0 \Theta + x_2^0, \tag{28}$$

$$x_1^1 = F_1(\Theta, x^0) := -\frac{\Theta^3}{6} + x_3^0 \frac{\Theta^2}{2} + x_2^0 \Theta + x_1^0, \tag{29}$$

$$f(\Theta, x(\Theta)) := x_3(\Theta) + n\alpha x_2(\Theta) + \alpha^2 x_1(\Theta) = 0, \tag{30}$$

Вместо последнего уравнения удобно использовать уравнение

$$f(x^0) := x_3^0 + n\alpha x_2^0 + \alpha^2 x_1^0 = 0, \tag{31}$$

которое получается с учетом периодичности движения из принадлежности начальной и конечной точки полуцикла поверхности разрыва, т.е. из равенства  $f(\Theta, x(\Theta)) = f(0, x^0)$ .

С учетом, условия стационарности (17), если цикл в системе (19) существует, то он определяется 4-мя параметрами:  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, \Theta$ .

Найдем их. Из первого уравнения получаем  $\Theta = 2x_3^0$ . Подставляя это значение во второе уравнение, имеем  $x_2^0 = 0$ . Из уравнения (29) получаем

$$x_1^0 = -\frac{1}{3}(x_3^0)^3.$$

Подставляя правую часть этого уравнения в (31), получим

$$x_3^0(1 - \frac{\alpha^2}{3}(x_3^0)^2) = 0.$$

Таким образом, имеем решение системы (27)–(31) в виде

$$x_1^0 = -\frac{\sqrt{3}}{\alpha^3}, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}; \quad \Theta = 2x_3^0. \quad (32)$$

Два других корня кубического уравнения дают тривиальное решение и симметричное решение. Т. к. нас интересует только  $|x_3^0| \leq 1$  с учетом (32) получаем ограничение на выбор параметра  $\alpha$ , которое можно записать в виде:

$$\sqrt{3} \leq \alpha, \quad (33)$$

т. е. данный цикл возникает при любом  $n$ , если параметр  $\alpha$  выбрать, удовлетворяющим неравенству (33). Из моделирования следует, что данный цикл неустойчивый. Чтобы это доказать, необходимо найти матрицу  $A$  и составить характеристическое уравнение в форме (18).

Итак, матрица  $A$  после подстановки решения (32) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & 2z & 2z^2 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 2z & -z \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & -1 \\ k_1 k_3 & k_3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где введено обозначение  $z = x_3^0$ , а характеристическое уравнение может быть записано в виде:

$$(n\alpha z + 1)\lambda^2 + (2 - 4\alpha^2 z^2)\lambda - n\alpha z + 1.$$

После нормировки  $z = \sqrt{3}/\alpha$  получаем уравнение, которое не зависит от  $\alpha$ :

$$(\sqrt{3}n + 1)\lambda^2 - 10\lambda - \sqrt{3}n + 1$$

и для которого собственные значения вычисляются аналитически:

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{n^2 + 8} - 5}{\sqrt{3}n + 1}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{n^2 + 8} + 5}{\sqrt{3}n + 1}.$$

Покажем, что  $|\lambda_2| > 1$  при  $n > 0$ . Т. к. числитель и знаменатель не имеют корней (являются гладкими монотонными функциями при  $n > 0$ ) достаточно вычислить

значение при  $n=0$  и  $n \rightarrow +\infty$ . Имеем,  $\lambda_2(0)=\sqrt{3}\sqrt{8} + 5 > 1$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_2(n)=1$ . Значит циклы в интервале  $\sqrt{3} \leq \alpha < +\infty$  будут неустойчивыми. Таким образом, доказан следующий результат:

**Лемма 2.** Пусть значения параметров  $\alpha, n$  удовлетворяют условию (33), тогда в системе (19) есть неустойчивый цикл с параметрами (32), траектория которого состоит из 2-х симметричных относительно нуля сегментов кривых (27)–(29).

**1.3. Скрытое колебание.** Численное моделирование показывает, что в данной системе (19) существует также устойчивый цикл (скрытое колебание [4, 6]), лежащий на поверхности  $S(x)=0$ . Согласно леммы, это происходит из-за скользящего режима, который имеет место при  $x_3 = \pm 1$ . В этом случае, описанный метод исследования устойчивости цикла, не работает, т. к. часть движения строго детерминирована и не допускает вариаций [2]. Поэтому чтобы найти цикл, надо сделать дополнительное предположение.

Пусть цикл состоит из двух одинаковых симметричных полуциклов, каждый из которых образован двумя сегментами, но при этом имеет гладкую проекцию на плоскости  $(x_1, x_2)$ :

- (i) на первом сегменте  $\dot{x}_3 = -1$  и  $x_3^0 = 1$ ;
- (ii) на втором сегменте  $\dot{x}_3 = 0$  и  $x_3(\Theta) = -1$ , где  $\Theta = \theta_1 + \theta_2$  — полупериод.

Интегрируем систему (19) на каждом сегменте, согласно сделанных предположений (i), (ii) на интервале  $\tau \in [0, \theta_1]$ . Из уравнения

$$x_3 = -\tau + 1 \tag{34}$$

и условия  $x_3(\theta_1) = -1$  находим

$$\theta_1 = 2. \tag{35}$$

Из решения второго уравнения в (19) и с учетом (i)

$$x_2(\theta_1) = -\frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1 + x_2^0. \tag{36}$$

После подстановки (35) находим, что  $x_2(\theta_1) = x_2^0$ . Третье уравнение в (19) с учетом (i) дает

$$x_1(\theta_1) = -\frac{\theta_1^3}{6} + \frac{\theta_1^2}{2} + x_2^0\theta_1 + x_1^0 = \frac{2}{3} + 2x_2^0 + x_1^0. \tag{37}$$

На всем втором интервале  $[\theta_1, \Theta]$   $x_3(\tau) \equiv -1$ . Интегрируем второе уравнение системы (19), используя это предположение, имеем

$$x_2^2 = F_2(\theta_2, x^0) := -\theta_2 + x_2(\theta_1) = -\theta_2 + x_2^0, \tag{38}$$

из чего, с учетом условия симметрии, следует, что

$$\theta_2 = 2x_2^0. \quad (39)$$

Решение третьего уравнения системы (19) задается формулой

$$x_1^2 = F_1(\theta_2, x^0) := -\frac{\theta_2^2}{2} + x_2(\theta_1)\theta_2 + x_1(\theta_1). \quad (40)$$

После подстановки значения (39) в (40) имеем  $x_1^2 = \frac{2}{3} + 2x_2^0 + x_1^0$ . Откуда с учетом условия симметрии, следует, что

$$x_1^0 = -\frac{1}{3} - x_2^0.$$

Исходя из граничного условия (31), имеем

$$x_2^0 = -\frac{\alpha}{n}x_1^0 - \frac{1}{n\alpha}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем выражения для начальных условий

$$x_1^0 = \frac{3 - n\alpha}{3\alpha(n - \alpha)}, \quad x_2^0 = \frac{\alpha^2 - 3}{3\alpha(n - \alpha)}. \quad (41)$$

Положительность  $\theta_2$  подразумевает, что  $x_2^0 \geq 0$ , что справедливо, когда

$$\sqrt{3} \leq \alpha < n. \quad (42)$$

Следовательно, цикл существует для любого  $\alpha$  в полуинтервале  $[\sqrt{3}, n)$ ,  $\sqrt{3} < n$ .

Докажем, что данный цикл устойчивый при выборе коэффициентов, удовлетворяющих неравенствам (42).

Остановимся на особенностях построенного цикла:

1. Переменная  $x_3^0$  определяется однозначно и не зависит от переключения, ее вариация не может привести к изменению цикла, т. к. первый интервал времени также ею определяется, т. е.  $\delta x_3^0 = 0$  и  $\delta \theta_1 = 0$ ;
2. В силу структуры полученных уравнений (34)–(40) несмотря на то, что формально цикл состоит из 2-х сшитых одинаковых полуциклов, каждый из которых имеет 2 сегмента, можно рассматривать задачу вариации только для системы вида (3), которая в данном случае определяется уравнениями:

$$F_1(\theta_2, x^0) := -\frac{\theta_2^2}{2} + x_2^0\theta_2 + \frac{2}{3} + 2x_2^0 + (1 + \lambda)x_1^0, \quad (43)$$

$$F_2(\theta_2, x^0) := -\theta_2 + (1 + \lambda)x_2^0, \quad (44)$$

$$f_1 := n\alpha x_2^0 + \alpha^2 x_1^0 + 1 = 0. \quad (45)$$

Используя вариации по переменным  $\theta_2, x_2^0, x_1^0$ , формируем матрицу  $A$ , согласно (18). После переобозначения  $\theta_2 \rightarrow \theta, x_2^0 \rightarrow y, x_1^0 \rightarrow x$  получаем ее в виде:

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & \theta + 2 & y - \theta \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ \alpha^2 & n\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

а уравнение  $\chi(\lambda)=0$  с учетом условия  $n > \alpha$  на цикле с параметрами (41) имеет вид:

$$(\alpha^3 - 3n\alpha^2 + (3n^2 - 3)\alpha)\lambda + 5\alpha^3 - 9n\alpha^2 + (3n^2 + 3)\alpha = 0.$$

Единственный корень легко находится:

$$\lambda = -\frac{5\alpha^2 - 9n\alpha + 3n^2 + 3}{\alpha^2 - 3n\alpha + 3n^2 - 3}.$$

После замены переменных:  $n = \alpha + \epsilon$  и  $\alpha = \sqrt{3(1 + \beta)}$  получаем

$$\lambda = \frac{-\epsilon^2 + \sqrt{3}\sqrt{\beta + 1}\epsilon + \beta}{\epsilon^2 + \sqrt{3}\sqrt{\beta + 1}\epsilon + \beta} = 1 - \frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 + \sqrt{3}\sqrt{\beta + 1}\epsilon + \beta}, \epsilon > 0, \beta \geq 0.$$

Знаменатель, строго положительная функция. Числитель не имеет глобального минимума, поэтому максимальное и минимальное значения достигаются на границах:  $\lambda(\beta=0) = -1, \lambda(\epsilon=0) = 1, \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \lambda(\epsilon = \text{const}, \beta) = 1, \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \lambda(\epsilon, \beta) = -1$ . Т.о. при  $\epsilon > 0, \beta \geq 0$  и конечным значением  $\beta$  выполняется условие  $|\lambda| < 1$ , которое означает, что цикл устойчив. Доказан следующий результат:

**Лемма 3.** Пусть значения параметров  $\alpha, n$  удовлетворяют условиям (42), тогда в системе (19) есть устойчивый цикл (скрытое колебание), которое определяется уравнениями (34)–(41).

**Теорема.** Пусть значения параметров  $\alpha < \sqrt{3}$  и  $0 < n$ , тогда в системе (19) начало координат глобально асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Система (19) не имеет изолированных положений равновесия кроме начала координат.

Из доказательства леммы 1 следует, что в системе нет дополнительных стационарных точек на поверхности разрыва.

Из леммы 1 следует, что система (19) при любых значениях  $\alpha < \sqrt{3}$  и  $0 < n$  имеет инвариантное множество  $\Pi = \{x : |x_3| \geq 1\}$ , при этом траектория из множества  $\Pi$  попадает за конечное время либо на границу этого множества и дальше движется по ней до переключения, либо приходит в положение равновесия.

Пусть при  $\alpha < \sqrt{3}$  и  $0 < n$  существует хотя бы одна траектория которая уходит на бесконечность. Т. к. в системе нет ни точечных, ни линейных особенностей, а множество множества  $\Pi$  инвариантно, ускорение ограничено, а в скользящем режиме двумерная система глобально асимптотически устойчива траектория на бесконечность может уйти только по границе множества  $\Pi$ , испытывая переключения с одного скользящего режима на другой. При этом, если переключения не происходят, то согласно леммы 1 траектория представляет из себя параболу, лежащую на границе области  $\Pi$ , т. е. при  $x_3 = \pm 1$ . В силу непрерывности координат  $x_1, x_2$  это должна быть гладкая кривая состоящая из 2-х сегментов, с 1 переключением, амплитуда которой увеличивается. В предельном случае, можно считать, что траектория имеет одинаковую амплитуду, т. е. приходим к поиску параметров  $\alpha, n$  при в системе возникает цикл [4], касающийся границы области  $\Pi$  хотя бы одной точкой. Из лемм 2 и 3 следует, что такой цикл имеет место только при  $\alpha = \sqrt{3}$  и любом  $0 < n$ . Т. о. получаем противоречие том, что существует хотя бы одна траектория, уходящая на бесконечность или образующая цикл при  $\alpha < \sqrt{3}$  и  $0 < n$ . Другими словами, при этих параметрах за время переключения из одного скользящего режима в другой траектория не успевает достаточно сильно отклониться, чтобы сохранить свою амплитуду.  $\square$

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Построим циклы при разных значениях параметра  $\alpha = \{\sqrt{3} + 0.1, n - 0.01\}$ ,  $n=2$ .

Сначала находим, начальные условия для неустойчивого и устойчивого цикла, по формулам (32) и (41) соответственно. Затем для неустойчивого цикла, выбираем  $\theta_i^0 \in [0, \Theta]$ ,  $i=1, \dots, N^0$ ,  $N^0 = \Theta/0.01$ , а для устойчивого имеем 2 диапазона:  $\theta_i^1 \in [0, 2]$ ,  $i=1, \dots, N^1$ ,  $N^1=200$  и  $\theta_i^1 \in [0, \Theta_2]$ ,  $i=1, \dots, N^2$ ,  $N^2 = \Theta_2/0.01$ .

Для каждого момента времени  $\theta_i^k$ ,  $k=0, 1, 2$  вычисляем вектор  $x(\theta_i^k)$  по формулам: (14)–(31) для неустойчивого цикла и (34)–(40) для устойчивого.

Из приведенных рис. 1–4 видно, что оба цикла ведут себя согласно доказанных свойств. Разным цветом выделены разные сегменты траектории, соответствующие устойчивому циклу кривая 2 на рис. 1–4.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат работы сформулирован в виде 3-х лемм и теоремы. Объединяя все утверждения вместе опишем глобальные бифуркации в системе (19) для разных значений параметров  $\alpha, n$ :

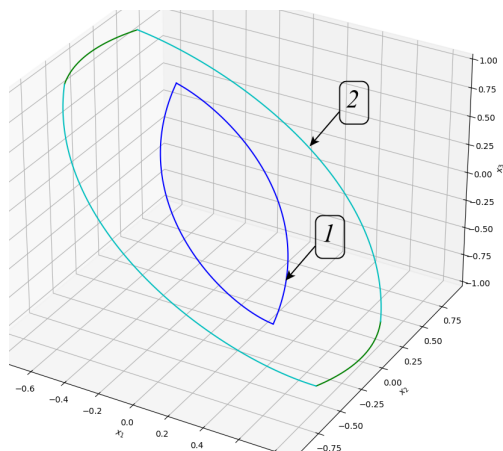


Рис. 1. Устойчивый (2) и неустойчивый (1) циклы в фазовом пространстве при  $\alpha = \sqrt{3} + 0.1$ .

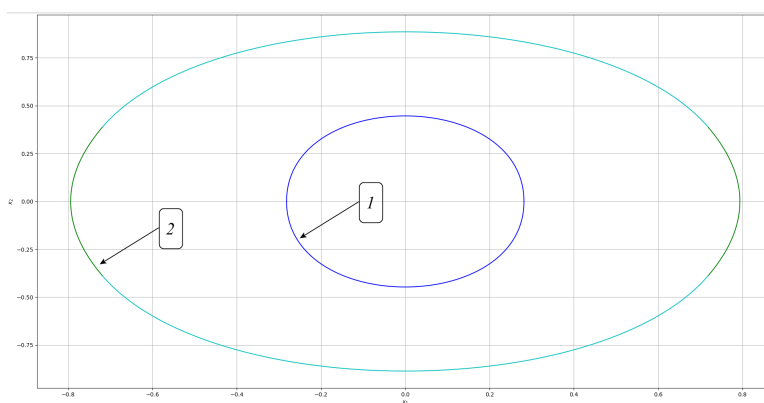


Рис. 2. Проекция устойчивого (2) и неустойчивого (1) цикла на плоскость  $(x_1, x_2)$  в фазовом пространстве при  $\alpha = \sqrt{3} + 0.1$ .

- Когда  $\alpha < \sqrt{3}$  область  $\Omega$  может сколь угодно сильно увеличиваться при этом нет ни устойчивого, ни неустойчивого циклов. А положение нуля обладает системы (19) обладает глобальной асимптотической устойчивостью.
- Когда  $\alpha = \sqrt{3}$  в системе (19) возникает ровно один цикл, и этот цикл является устойчивым и неустойчивым одновременно, т. е. для данного значения параметра  $\alpha$  имеем наполовину устойчивый цикл, у которого область притяжения состоит из его самого рис. 1–2 кривая 1 и трехмерными кривыми, входящими в точки касания с границей области  $\Pi$ .
- Когда  $\sqrt{3} < \alpha < n$  в системе (19) возникает два цикла: один — скрытое колебание, а другой — неустойчивый цикл, лежащий на границе области притяжения

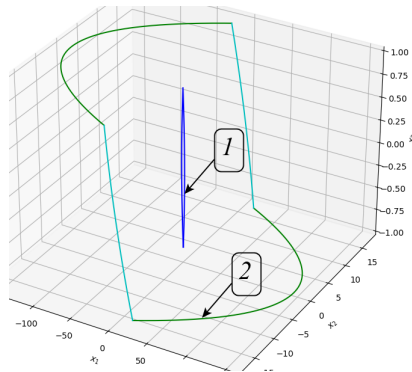


Рис. 3. Устойчивый (2) и неустойчивый (1) циклы в фазовом пространстве при  $\alpha = 1.99$ .

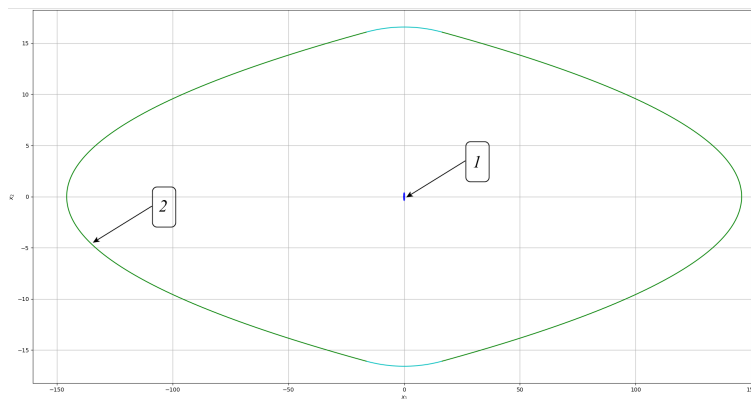


Рис. 4. Проекция устойчивого (2) и неустойчивого (1) цикла на плоскость  $(x_1, x_2)$  в фазовом пространстве при  $\alpha = 1.99$ .

нулевого решения. Важно отметить, что в силу построения, притягивающими сегментами данного цикла будут только те, что лежат границе области  $\Pi$ ;

- Когда  $\alpha \rightarrow n$  скрытое колебание в системе (19) становится бесконечно большой кривая 2 рис. 3–4. При этом неустойчивый цикл, лежащий на границе области притяжения нулевого решения кривая 1 рис. 3–4 уменьшается в размере.
- При  $\alpha > n$  скрытого колебания нет, а любое решение либо стремится к равновесию, либо уходит в бесконечность. При этом неустойчивый цикл, лежащий на границе области притяжения нулевого решения снова уменьшается в размере.

Область  $\Omega$  при  $\alpha \geq \sqrt{3}$ , вписана в неустойчивый цикл, при этом численно данный цикл можно построить только по формулам (27)–(31). При интегрировании исходной системы дифференциальных уравнений из любой точки на нем, траектория будет либо стремиться к равновесию, либо уходить на бесконечность в силу численного округления. Из приведенных формул следует, что область  $\Omega$  и неустойчивый цикл

на всем интервале  $\sqrt{3} < \alpha < +\infty$  будут уменьшаться при возрастании  $\alpha$  и в пределе стремятся к нулю, в отличие от случая непрерывного управления, где всегда вокруг нуля есть ограниченная область притяжения линейной системы, в которой может не быть неустойчивого цикла [10].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. Теория регулирования хода машин. Ч. 1. / Н. Е. Жуковский. — М.: Типо-литография Товарищества И.Н. Кушнерев и Ко, 1909. — 101 с.  
ZHUKOVSKY, N. (1909) *Teoriia regulirovaniia khoda mashin. Ch. 1.* Moscow: Tipolitografiia Tovarishchestva I.N. Kushnerev i Ko.
2. Фейгин М. З. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями / М. З. Фейгин. — М.: Наука, 1994. — 288 с.  
FEIGIN, M. (1909) *Forced Oscillations in Systems with Discontinuous Nonlinearities.* Moscow: Nauka.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 294 с.  
FILIPPOV, A. F. (1985) *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow: Nauka.
4. ANDRIEVSKY, B. et al. (2013) Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators. *IFAC Proceedings.* 46. Pp. 37–41.
5. KUZNETSOV, N. (2020) Theory of hidden oscillations and stability of control systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 59. Pp. 647–668.
6. LEONOV, G. & KUZNETSOV, N. (2014) Hidden oscillations in dynamical systems. 16 Hilbert's problem, Aizerman's and Kalman's conjectures, hidden attractors in Chua's circuits. *Journal of Mathematical Sciences.* 201. Pp. 645–662.
7. KHALIL, H. K. (2001) *Nonlinear Systems.* New York: Pearson..
8. Барбашин, Е. А. Введение в теорию устойчивости. / Е. А. Барбашин. — М.: Наука., 1967. — 304 с.  
BARBASHIN, A. F. (1967) *Vvedenie v teoriyu ustoichivosti.* Moscow: Nauka..
9. MOROZOV, Yu. & PESTEREV, A. (2022) The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System. *Lect. Notes Comput. Sci.* 13781. Pp. 66–78.

10. MOROZOV, Yu. & PESTEREV, A. (2024) Optimal selection of feedback coefficients in the problem of stabilizing a chain of three integrators. *Lect. Notes Comput. Sci.* 15218. Pp. 139–152.
11. Морозов Ю. В. Скрытые колебания в задаче управления интегратором 3-го порядка при использовании непрерывного управления и разрывного // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — СПб: СПбГУ, 2025. — №. 2. — С. 1–29.  
MOROZOV, Yu. (2024) Hidden Oscillations in the Problem of Controlling a 3rd Order Integrator Using Continuous Control and Discontinuous. *Differential Equations and Control Processes.* 2. Pp. 1–29.
12. Морозов, Ю. В. Глобальная стабилизация интегратора второго порядка разрывной обратной связью // АиТ. — М: ИПУ РАН, 2025. — No. 12 (Принято к публикации).  
MOROZOV, Yu. (2025) Global stabilization of a second-order integrator by discontinuous feedback. *Automation and Remote Control.* 12. Pp. (accepted).

**Цитирование:** Морозов Ю. В. Исследование скрытых колебаний в системе 3-го порядка с разрывной правой частью // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 24–40.

УДК: 517.5 + 519.65  
MSC2010: 41A10  
DOI: 10.5281/zenodo.18478520

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ УЗЛОВ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ РУНГЕ

© О. В. Котова

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ  
УЛ. ДЕРЖАВИНА, Д. 2, Г. МАКЕЕВКА, ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА, 286123, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: o.v.kotova@donnasa.ru

ON THE OPTIMAL ARRANGEMENT OF APPROXIMATION NODES OF THE RUNGE'S  
FUNCTION.

Kotova O. V.

**Abstract.** Function approximation is an important tool in mathematical modeling. A special case of approximation is interpolation. To conduct the research, we will consider the Runge's function, which is defined on the segment  $[-1, 1]$ :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

In this paper, a method for implementing the optimal arrangement of approximation nodes is proposed using the example of the Runge's function for a certain number of nodes.

The essence of the method is that in order to select the optimal location of the approximation nodes, the target function  $F$  is compiled, the minimization of which ensures the optimal location of the nodes  $x_i$  along the abscissa axis. The location of the approximation nodes along the ordinate axis is determined by calculating the values  $y_i$  based on the original function.

Traditionally, to interpolate a function, already known coordinates of nodes are used to calculate polynomial coefficients. This approach provides limited opportunities to control the location of interpolation nodes, since in fact the location has to be determined at random. The paper proposes a method based on the nonlinearity of space idea along the axes of the Cartesian's coordinate system. To control this nonlinearity, a polynomial function with the parameter  $t$  is used.

As an interpolation polynomial we will use the Lagrange's polynomial  $L_n(f, x)$ , which at nodes  $x_i$  corresponds to the values  $y_i$ .

We construct the objective function  $F$  as the sum of the squares of the difference between the Runge's function  $f(x)$  and the Lagrange's polynomial  $L_n(f, x)$ :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m+1} (f(\xi_i) - L_n(f, \xi_i))^2,$$

where the points  $\xi_i$  are defined as follows:

$$\xi_i = x_1 + \frac{i-1}{m}(x_n - x_1).$$

The function  $F(x)$  is a function of  $n$  variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  and is constructed by analogy with the sum of squares of regression residuals in regression analysis.

Minimization of the objective function  $F(x)$  on the interval  $[-1, 1]$  allows us to determine the the coordinates of the approximation nodes values  $x_i$  that ensure minimal deviations from the original Runge's function.

The article presents the application of the optimal node arrangement method for seven, ten and fifteen nodes.

The obtained interpolation polynomial is compared with the polynomial constructed on Chebyshev's nodes. The polynomial constructed on nodes by the proposed method approximates better than the polynomial constructed on Chebyshev's nodes.

For this conclusion, the mean square errors of the interpolation curves are compared.

The advantages of the proposed method for optimizing the arrangement of approximation nodes are: low values of the mean square error, the method is stable to an increase in the number of nodes, a significant decrease in the degree of approximating polynomials compared to other approximation methods without the need to use piecewise functions.

The disadvantages of the proposed method include the use of numerical methods for minimizing the objective function, which, when implementing existing methods for finding the minimum values of a function of many variables, largely depend on the quality of the choice of the initial approximation.

**Keywords:** *approximation, interpolation, Runge's function, approximation nodes, objective function, Chebyshev's nodes, mean square error.*

## ВВЕДЕНИЕ

Аппроксимация функций является важным инструментом математического моделирования. Она используется: в математике и статистике для упрощения сложных математических выражений ([1], [2], [3]), в физике и инженерной практике для моделирования физических процессов ([4], [5], [6]), в компьютерных науках для разработки алгоритмов и методов оптимизации ([7], [8], [9]), в экономике для создания экономических моделей и прогнозов ([10], [11], [12]). Частным случаем аппроксимации является интерполяция, которая также нашла широкое применение в различных отраслях науки и техники ([13], [14]). Некоторая сложная или эмпирически заданная функция является интерполированной с определённой точностью в некоторой ограниченной области, если она смоделирована с помощью простого аналитического выражения, например, полинома. Полученное выражение, в то же время, и аппроксимирует данную функцию в этой области. Для проведения исследований рассмотрим

функцию Рунге, которая определена на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}. \quad (1)$$

В работе [15] исследована полиномиальная аппроксимация некоторых классических функций на отрезке  $[-1, 1]$  с равностоящими узлами и отмечено, что функция Рунге обладает свойством: при увеличении числа равностоящих узлов получаются расходящиеся процессы. В численном анализе данный феномен выражается в эффекте нежелательных колебаний. В [16] это объясняют близостью особых точек к узлам аппроксимации. Если узлы выбирать специальным образом, то можно повысить качество аппроксимации. Исходя из этого, возникает задача выбора узлов интерполяции, обеспечивающая максимальное качество аппроксимации.

В данной работе предложена реализация метода оптимального расположения узлов аппроксимации на примере функции (1) для некоторого определенного количества узлов.

## 1. МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ УЗЛОВ АППРОКСИМАЦИИ

Суть метода заключается том, что для выбора оптимального расположения узлов аппроксимации составляется целевая функция  $F$ , минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов  $x_i$  по оси абсцисс. Расположение узлов аппроксимации по оси ординат определяется вычислением значений  $y_i$  на основе исходной функции Рунге (1):

$$y_i = \frac{1}{1 + 25x_i^2}. \quad (2)$$

Подобная постановка задачи описана в работе [18], но в отличие от предложенного метода, использовалась кусочная функция в виде локальных параметрических кубических сплайнов Эрмита.

Традиционно, для интерполяции некоторой функции используются уже известные координаты узлов для вычисления полиномиальных коэффициентов. Такой подход даёт ограниченные возможности в управлении расположением узлов интерполяции, поскольку фактически расположение приходится определять наугад. В работе предложен метод, в основу которого заложена идея о нелинейности пространства по осям декартовой системы координат. Для управления этой нелинейностью используется полиномиальная функция с параметром  $t \in [0, 1]$ :

$$t_i = \frac{i}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad i \in [1, m+1],$$

где  $m$  — количество переменных значений параметра  $t$ .

Рассмотрим  $n$  узлов интерполяции  $x_i$  на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$x_i = \{-1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1\}.$$

По значениям  $x_i$  строится последовательность  $y_i$  согласно (2):

$$y_i = \left\{ \frac{1}{26}, \frac{1}{1 + 25x_2^2}, \dots, \frac{1}{1 + 25x_{i-1}^2}, \frac{1}{26} \right\}. \quad (3)$$

В качестве интерполяционного полинома будем использовать полином Лагранжа  $L_n(f, x)$ , который в узлах  $x_i$  совпадает со значениями  $y_i$  из (3):

$$L_n(f, x_i) = y_i.$$

Для  $f(x) \in C[-1, 1]$  интерполяционный полином Лагранжа задается формулой:

$$L_n(f, x) = \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) l_i^{(n)}(x),$$

где  $l_i^{(n)}(x)$  — лагранжевы многочлены влияния, удовлетворяющие условию:

$$l_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

имеют вид:

$$l_i^{(n)}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

С учетом узлов интерполяции  $x_i$  и значений  $y_i$ , получаем полином степени  $n - 1$ , вида:

$$L_n(f, x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (4)$$

Построим целевую функцию  $F$ , как сумму квадратов разности между функцией  $f(x)$  из (1) и полиномом  $L_n(f, x)$  из (4):

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m+1} (f(\xi_i) - L_n(f, \xi_i))^2, \quad (5)$$

где точки  $\xi_i$  определяются так:

$$\xi_i = x_1 + \frac{i-1}{m}(x_n - x_1). \quad (6)$$

Функция  $F(x)$  является функцией  $n$  переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и построена по аналогии с суммой квадратов регрессионных остатков в регрессионном анализе.

Минимизация целевой функции  $F(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  позволяет определить значения координат узлов аппроксимации  $x_i$ , обеспечивающие минимальные отклонения от исходной функции Рунге (1).

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРИ КОНКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ $n$

Рассмотрим применение метода оптимального расположения узлов для семи, десяти и пятнадцати узлов. Для обеспечения хорошей точности расчетов возьмем  $m = 100$ .

В случае  $n = 7$  целевая функция имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{101} (f(\xi_i) - L_7(f, \xi_i))^2,$$

где  $\xi_i$  определяются из (6):

$$\xi_i = -1 + \frac{i-1}{50}, \quad i \in [1, 101],$$

$$f(\xi_i) = \frac{1}{1 + 25\xi_i^2}, \quad L_7(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{1 + 25x_i^2} \prod_{j=1, j \neq i}^7 \frac{(\xi_i - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Здесь функция  $F(x)$  зависит от пяти переменных:

$$x = (-1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 1).$$

В силу громоздкости выражений приведем только численные значения узлов аппроксимации, при которых целевая функция (5) минимальная:

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = -0,782883448900990,$$

$$x_3 = -0,465047049351183,$$

$$x_4 = 0,133292039030711,$$

$$x_5 = 0,465047056669734,$$

$$x_6 = 0,782883501355870,$$

$$x_7 = 1.$$

Заметим, что симметрия относительно оси  $Oy$  в значениях  $x_i$  нарушена.

Окончательно, с учетом полученных узлов интерполяционный полином имеет вид:

$$y = -3,97925611859124x^6 + 2,05905621081248 \cdot 10^{-7}x^5 + 7,50862575844819x^4 - \\ -2,58866031214999 \cdot 10^{-7}x^3 - 4,25662638870533x^2 + \\ +5,29604137072814 \cdot 10^{-8}x + 0,765718287309914.$$

Для визуализации полученных результатов в случае  $n = 7$  на рисунке 1 представлены графики полинома Лагранжа (сплошная линия) и функции Рунге (штриховая линия) для данных наборов узлов  $(x_i, y_i)$ , отмеченных звездочками.

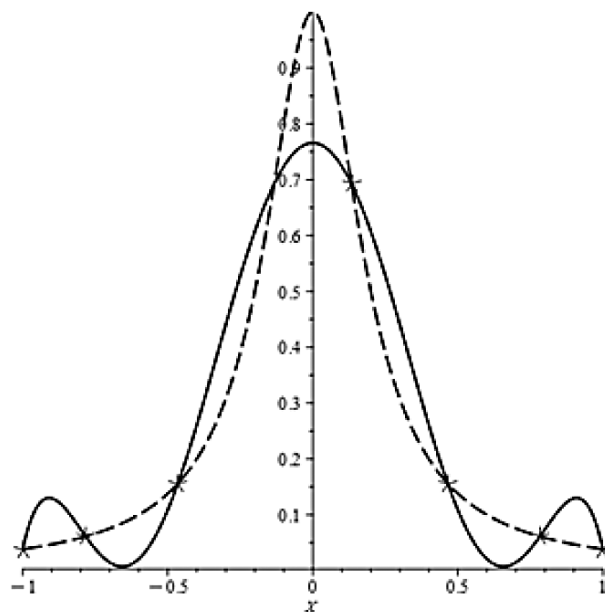


Рис. 1. Семь узлов аппроксимации

В случае  $n = 10$  и  $n = 15$  приведем только численные значения узлов  $x_i$  и графики полученных интерполяционных полиномов (рис. 2 а) и рис. 2 б)):

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = -0,861720010388827,$$

$$x_3 = -0,646216722377395,$$

$$x_4 = -0,376757609770804,$$

$$x_5 = -0,112363224922358,$$

$$x_6 = 0,112363226334691,$$

$$x_7 = 0,376757624071832,$$

$$x_8 = 0,646216736163552,$$

$$x_9 = 0,861720002525710,$$

$$x_{10} = 1.$$

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = -0,939313606296537,$$

$$x_3 = -0,742498832417788,$$

$$x_4 = -0,6,$$

$$x_5 = -0,419850145957282,$$

$$x_6 = -0,231211306133484,$$

$$x_7 = -2,50203966529834 \cdot 10^{-8},$$

$$x_8 = 0,$$

$$x_9 = 0,235854979144489,$$

$$x_{10} = 0,416684986274951,$$

$$x_{11} = 0,590446935583422,$$

$$x_{12} = 0,737336260741580,$$

$$x_{13} = 0,863398529968205,$$

$$x_{14} = 0,939579255793872,$$

$$x_{15} = 1.$$

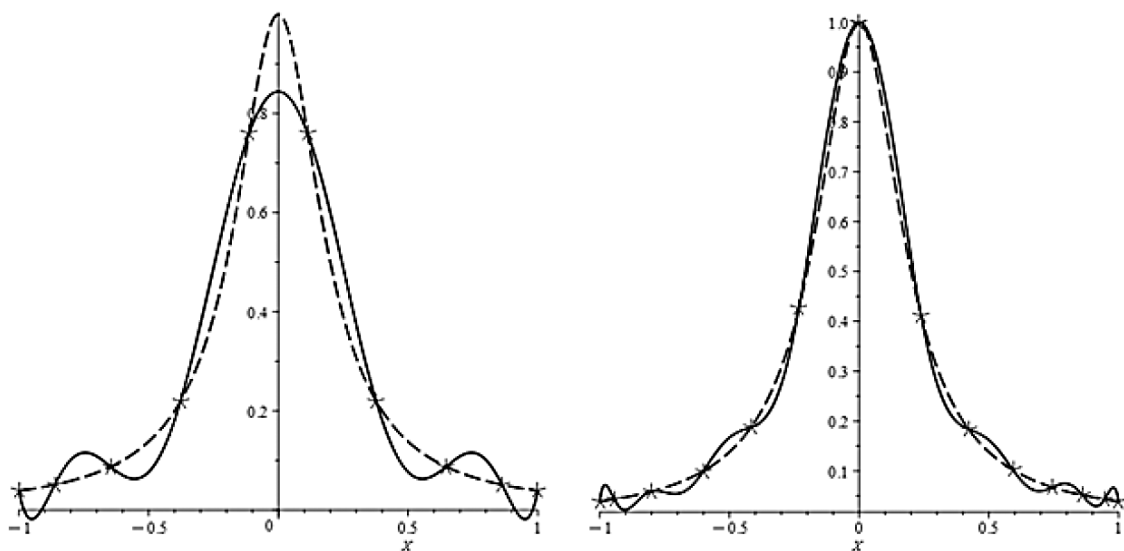


Рис. 2. а) Десять узлов аппроксимации      б) Пятнадцать узлов аппроксимации

Полученные исследования выявили интересную особенность: при нечетном количестве узлов нарушается симметрия относительно оси  $Oy$ .

### 3. СРАВНЕНИЕ С ПОЛИНОМОМ, ПОСТРОЕННЫМ НА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ УЗЛАХ ЧЕБЫШЕВА

Сравним полиномы, полученные описанным методом в случаях  $n = 7$ ,  $n = 10$  и  $n = 15$ , с полиномами, построенными на интерполяционных узлах Чебышева:

$$\tau_i = \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2n}, \quad i \in [1, n].$$

Построим интерполяционный полином  $L_n, \text{Cheb}(f, x)$ , который в узлах  $\tau_i$  совпадает со значениями  $y_i$  из (2) в точках  $\tau_i$ :

$$L_n, \text{Cheb}(f, \tau_i) = y_i(\tau_i).$$

Аналогично, как и ранее, составляем целевую функцию  $F_{\text{Cheb}}$  для узлов Чебышева:

$$F_{\text{Cheb}}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} (f(\xi_i) - L_n(f, \xi_i))^2,$$

где точки  $\xi_i$  определяются из (6).

Для визуализации полученных интерполяционных кривых, построенных на разных узлах, на рисунках 3 а) и 3 б) выбраны обозначения: полином Лагранжа, построенный предложенным методом, — сплошная линия, функция Рунге — штриховая линия, полином Лагранжа, построенный на узлах Чебышева, — штрихпунктирная линия.

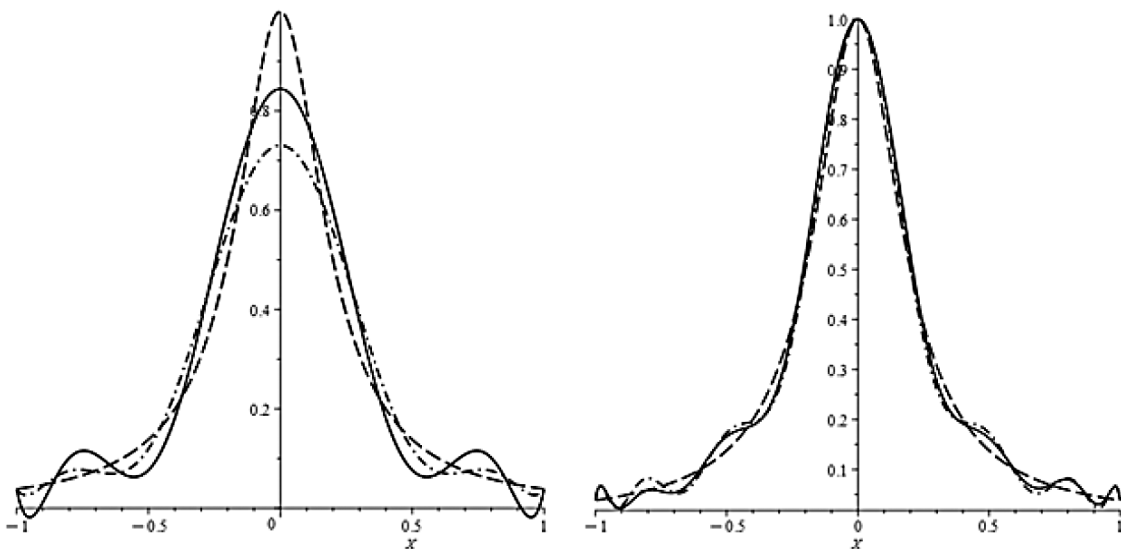


Рис. 3. а) Случай  $n = 10$

б) Случай  $n = 15$

Сравним среднеквадратические ошибки интерполяционных кривых в случаях  $n = 7$ ,  $n = 10$  и  $n = 15$  с узлами, определенными ранее, и узлами Чебышева:

Значение $n$	$MSE = \frac{F}{m+1}$	$MSE_{Cheb} = \frac{F_{Cheb}}{m+1}$
$n = 7$	0,00836015307844019	0,0203119520341254
$n = 10$	0,00370097288105691	0,00616572469894385
$n = 15$	0,000579781055509624	0,000630175956182370

Таким образом, интерполяционный полином, построенный на узлах, найденных предложенным методом, приближает лучше, чем полином, построенный на узлах Чебышева.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимуществом предложенного метода оптимизации расположения узлов аппроксимации, помимо низких значений среднеквадратичной ошибки, является то, что метод является устойчивым к увеличению количества узлов, т.к. их расположение каждый раз оптимизируется и адаптируется к исходной функции. Кроме того, значительно снижается степень аппроксимирующих полиномов по сравнению с другими методами аппроксимации без необходимости использования кусочных функций.

К недостаткам относится использование численных методов минимизации целевой функции, которые при реализации существующих методов поиска минимальных значений функции многих переменных в значительной степени зависят от качества выбора начального приближения. Вместе с тем, метод является в достаточной степени универсальным и может использоваться для аппроксимации непрерывных и дифференцируемых функций.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. KVASNIKOV, V., YEHOROV, S. and SHKVARNYTSKA, T. (2021) *Technology for restoring functional dependencies to determine reliability parameters*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. № 1(101). P. 78-86. DOI 10.31489/2021M1/78-86.
2. Заляжных В. В. Аппроксимация процентных точек критерия Гири / В. В. Заляжных // Математический вестник Вятского государственного университета. — 2022. — № 4(27). — С. 4-9. — DOI 10.25730/VSU.0536.22.031.

- ZALYAZHNYKH, V. (2022) *Approximation of percentage points Giri's criterion*. Mathematical Bulletin of Vyatka State University. № 4(27). P. 4-9. DOI 10.25730/VSU.0536.22.031.
3. Горский В. В. Конечно-разностная аппроксимация смешанных производных в уравнениях математической физики / В. В. Горский, В. Г. Реш // Математическое моделирование и численные методы. — 2021. — № 4(32). — С. 58-79. — DOI 10.18698/2309-3684-2021-4-5879.
- GORSKY, V and RESH, V. (2021) *Finite-difference approximation of mixed derivatives in equations of mathematical physics*. Mathematical modeling and numerical methods. № 4(32). P. 58-79. DOI 10.18698/2309-3684-2021-4-5879.
4. Грицевич М. И. Аппроксимация решения уравнений метеорной физики элементарными функциями / М. И. Грицевич, В. Т. Лукашенко, Л. И. Турчак // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 25-33.
- GRITSEVICH, M, LUKASHENKO, V. and TURCHAK, L. (2015) *Approximation of the solution meteoric physics's equations by elementary functions*. Mathematical modeling. № 2(27). P. 25-33.
5. KONOPATSKIY, E., MASHTALER, S. and BEZDITNYI, A. (2019) *Study of high-strength steel fiber concrete strength characteristics under elevated temperatures using mathematical modelling methods*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety - 2. Building Materials and Products. № 687. Chelyabinsk, September 25–27, 2019. P. 022040.
6. Конопацкий Е. В. Моделирование аппроксимирующего 16-точечного отсека поверхности отклика применительно к решению неоднородного уравнения теплопроводности / Е. В. Конопацкий // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7, № 2. — С. 39-46. — DOI 10.12737/article\_5d2c1a551a22c5.12136357.
- KONOPATSKIY, E. (2019) *Modeling of an approximating 16-point section of the response surface as applied to solving an inhomogeneous heat conduction equation*. Geometry and Graphics. No. 2 (7). P. 39–46. DOI 10.12737/article\_5d2c1a551a22c5.12136357.
7. Буянова И. В. Применение приближения с помощью кривых для определения вычислительной сложности решений задач по программированию / И. В. Буянова, И. С. Замулин // Современные наукоемкие технологии. — 2022. — № 5-2. — С. 232–236. — DOI 10.17513/snt.39176.

- BUYANOVA, I. and ZAMULIN, I. (2022) *Application of approximation using curves to determine the computational complexity of solving programming problems*. Modern science-intensive technologies. № 2(5). P. 232-236. DOI 10.17513/snt.39176.
8. SOBOL, V. and TORISHNYY, R. (2022) *Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives*. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. No. 4(15). P. 115–122. DOI 10.14529/mmp220411.
9. PATSEIKA, P., ROUBA, YA. and SMATRYTSKI, K. (2024) *On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier–Chebyshev series*. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. № 2. P. 6–18.
10. Вдовина Е. С. Задача аппроксимации законов пенсионного страхования / Е. С. Вдовина, Б. В. Дорофеев // Процессы управления и устойчивость. — 2015. — Т. 2, № 1. — С. 579–583.
- VDOVINA, E. and DOROFEEV, B. (2015) *The problem of approximating pension insurance laws*. Control processes and stability. № 1 (2). P. 579–583.
11. Садыкова З. Ф. Построение математических моделей с использованием полиномиальных функций и матричных исчислений с применением систем нечетких линейных уравнений при решении экономических задач / З. Ф. Садыкова, В. А. Абаев // Мягкие измерения и вычисления. — 2023. — Т. 66, № 5. — С. 94–107. — DOI 10.36871/2618-9976.2023.05.008.
- SADYKOVA, Z. and ABAEV, V. (2023) *Construction of mathematical models using polynomial functions and matrix calculus using systems of fuzzy linear equations in solving economic problems*. Soft measurements and calculations. No. 5 (66). P. 94–107. DOI 10.36871/2618-9976.2023.05.008.
12. Кутышкин, А. В. Моделирование динамики валового регионального продукта / А. В. Кутышкин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 104-113. — DOI 10.14529/ctcr210210.
- KUTYSHKIN, V. (2021) *Modeling the dynamics of the gross regional product*. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technologies, control, radio electronics. № 2(21). P. 104-113. DOI 10.14529/ctcr210210.

13. KONOPATSKIY, E. and BEZDITNYI, A. (2020) *Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method*. Journal of Physics: Conference Series: XIII International Scientific and Technical Conference “Applied Mechanics and Systems Dynamics”. № 1441. Omsk, November 5-7, 2019. P. 012063. DOI 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.
14. BADALYAN, N. and SHMELEV, V. (2023) *A method of piece-quadratic interpolation of a tabled function with a continuous first derivative based on linear combination of Central-symmetric parabolas*. Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Electrical Engineering, Energetics. No. 1. P. 50–58. DOI 10.53297/18293328-2023.1-50.
15. Чередниченко В. Г. О двух исторических примерах полиномиальной аппроксимации / В. Г. Чередниченко // Сибирские электронные математические известия, 2013. — Т. 10. — С. 55-58.  
CHEREDNICHENKO, V. (2013) *On two historical examples of polynomial approximation*. Siberian Electronic Mathematical Reports. № 10. P. 55-58.
16. Тихомиров, В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М.: МГУ, 1976. — 304 с.  
ТИХОМИРОВ, V. (1976) *Some issues in approximation theory*. Moscow. Moscow State University. 304 p.
17. Rouba, Ya. A. On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes / Ya. A. Rouba, K. A. Smatrytski, Ya. V. Dirvuk // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. — 2018. — No. 3. — P. 12-20.  
ROUBA, YA., SMATRYTSKI, K. and DIRVUK, YA. (2018) *On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes*. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. № 3. P. 12-20.
18. Хачумов, В. М. Оптимизация расположения узлов интерполирующего сплайна в задачах обработки типовых траекторий движения / В. М. Хачумов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Материалы Всероссийской конференции с международным участием, Москва, 15–19 апреля 2019 года. — Москва: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2019. — С. 329-334.  
KHACHUMOV, V. (2019) *Optimization of the nodes's arrangement of the interpolating spline in the problems of processing typical motion trajectories*.

Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems: Proceedings of the All-Russian conference with international participation. Moscow. 15–19 april 2019. P. 329-334.

**Цитирование:** Котова О. В. Об оптимальном расположении узлов аппроксимации функции Рунге // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 41–53.

UDC: 531.011  
MSC2010: 70H03, 70S10  
DOI: 10.5281/zenodo.18648865

## ON FIRST INTEGRALS OF A SIXTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

© T. H. Luu

RUDN UNIVERSITY

S. M. NIKOL'SKII MATHEMATICAL INSTITUTE

6, MIKLUKHO-MAKLAYA ST., MOSCOW, 117198, RUSSIAN FEDERATION

E-MAIL: *luuthuyen250393@gmail.com*

ON FIRST INTEGRALS OF A SIXTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION.

Luu T. H.

**Abstract.** In the paper, constructive methods for finding some first integrals of a sixth-order ordinary differential equation with a potential operator are suggested. We use some methods based on application of transformation of variables to establish invariance of the given sixth-order ordinary differential equation with the potential operator and the corresponding Hamilton-Ostrogradskii action. Some first integrals of the considered equation are also found.

**Keywords:** *Sixth-order ordinary differential equation, potential operator, Hamilton-Ostrogradskii action, symmetry, divergence invariance, first integral*

### INTRODUCTION

Variational principles play an important role in the mechanics of both finite-dimensional and infinite-dimensional systems. The use of some methods of mechanics is associated with the existence of direct or indirect variational formulations of the equations of motion, which can be used, for example, to find the first integrals of the considered equations. Note that, in particular, the works [1–10] are devoted to construction of variational formulations of various types of equations and their systems.

Studying the existence and determining the structure of first integrals of different types of equations and their systems are important and urgent problems. The first integrals of differential equations have various applications: they are used to prove the existence and uniqueness of solutions [11–13], to study the stability of motion of some infinite-dimensional systems [14], etc. Problems of finding the first integrals can be related to the symmetry properties of functionals and the corresponding Euler-Lagrange equations. For Euler functionals, the connection between symmetries and conservation laws was established in [15]. A wide interest in finding conservation laws with the use of symmetries is associated with the fundamental monographs of L.V. Ovsyannikov [16] and N.Kh. Ibragimov [17].

Symmetries are also widely used in the qualitative analysis of the motion of finite-dimensional systems [18]. Note that the works [1, 19–23] are devoted to relationships of the symmetries of equations and functionals with the first integrals of the equations of motion of infinite-dimensional systems. The present work is their continuation.

Assume that  $U, V$  are real linear normed spaces. The following definition and theorem will be needed for the sequel.

**Definition 1. [1]** An operator  $N : D(N) \subset U \rightarrow V$  is called potential on the set  $D(N)$  relative to a bilinear form  $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  if there exists a Gâteaux differentiable functional  $F_N : D(F_N) = D(N) \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), h) \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u). \quad (1)$$

In this case, it is said that the corresponding equation  $N(u) = 0$  admits a direct variational formulation.

**Theorem 1. [1]** Consider a Gâteaux differentiable operator  $N : D(N) \subset U \rightarrow V$  and a bilinear form  $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  such that for any fixed elements  $u \in D(N)$ ,  $g, h \in D(N'_u)$  the function  $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$  belongs to class  $C^1[0, 1]$ . For  $N$  to be potential on the convex set  $D(N)$  relative to  $\Phi$  it is necessary and sufficient to have

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(N'_u g, h) \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \quad (2)$$

Under this condition the potential  $F_N$  is given by

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + F_N[u_0], \quad (3)$$

where  $u_0$  is a fixed element of  $D(N)$ .

Let us remark that  $N'_u$  is the Gâteaux derivative of  $N$  at the point  $u$ . The domain  $D(N'_u)$  consists of elements  $h \in U$  such that  $(u + \varepsilon h) \in D(N)$  for all  $\varepsilon$  sufficiently small.

## 1. CONDITIONS OF POTENTIALITY AND A VARIATIONAL PRINCIPLE

Consider an ordinary differential equation

$$N(u) \equiv \sum_{i=1}^6 a_i(t)u^{(i)}(t) + a_0(t, u(t)) = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (4)$$

Here  $u = u(t)$  is an unknown function,  $a_i \in C^i[t_0, t_1]$  ( $i = \overline{1, 6}$ ),  $a_0 \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R})$  are given functions.

We define the domain of operator  $N$  (4) by

$$D(N) = \{u \in U = C^6[t_0, t_1] : u(t_0) = \phi_1, u(t_1) = \phi_2, u'(t_0) = \phi_3, u'(t_1) = \phi_4, \\ u''(t_0) = \phi_5, u''(t_1) = \phi_6\}, \quad (5)$$

where  $\phi_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) are given constants.

Note that  $V = C[t_0, t_1]$  and

$$D(N'_u) = \{h \in U = C^6[t_0, t_1] : h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, h'(t_0) = 0, h'(t_1) = 0, \\ h''(t_0) = 0, h''(t_1) = 0\}.$$

Let us introduce a bilinear form

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \quad (6)$$

**Theorem 2. [24]** *For operator  $N$  (4) to be potential on  $D(N)$  (5) relative to bilinear form (6), it is necessary and sufficient that  $\forall t \in [t_0, t_1]$  the following conditions hold:*

$$a_5(t) - 3a'_6(t) = 0, \quad (7)$$

$$a_3(t) + 5a'''_6(t) - 2a'_4(t) = 0, \quad (8)$$

$$a_1(t) - 3a^{(5)}_6(t) + a'''_4(t) - a'_2(t) = 0. \quad (9)$$

**Theorem 3. [24]** *If conditions (7)–(9) are fulfilled then the Hamilton-Ostrogradskii action is given by*

$$F_N[u] \equiv F_N^{t_1}[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \left( -3a^{(4)}_6(t) + a''_4(t) - a_2(t) \right) (u'(t))^2 + \frac{1}{2} \left( -3a''_6(t) + a_4(t) \right) (u''(t))^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} a_6(t) (u'''(t))^2 + B(t, u(t)) \right] dt, \quad (10)$$

where

$$B(t, u(t)) = \int_0^1 a_0(t, \tilde{u}(t, \lambda))(u(t) - u_0(t))d\lambda + B(t, u_0(t)), \quad (11)$$

$\tilde{u}(t, \lambda) = u_0(t) + \lambda(u(t) - u_0(t))$ ,  $u_0 = u_0(t)$  is a fixed element of  $D(N)$ ,  $B \in C^2([t_0, t_1] \times \mathbb{R})$ .

**Theorem 4.** [24] *Conditions (7)–(9) are fulfilled if and only if equation (4) takes the form*

$$N(u) \equiv a_6(t)u^{(6)}(t) + 3a_6'(t)u^{(5)}(t) + a_4(t)u^{(4)}(t) + \left(2a_4'(t) - 5a_6'''(t)\right)u'''(t) + a_2(t)u''(t) + \left(3a_6^{(5)}(t) - a_4'''(t) + a_2'(t)\right)u'(t) + B_u'(t, u(t)) = 0. \quad (12)$$

## 2. ON SYMMETRIES OF THE HAMILTON-OSTROGRADSKII ACTION

Assume that the functional (10) is defined on the set  $C^3[t_0, t_1]$ . Consider an infinitesimal transformation

$$\bar{u}(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \quad (13)$$

on  $D(N)$  (5).

The function  $S \in C^3([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^4)$  is called a generator of transformation (13).

**Definition 2.** Hamilton-Ostrogradskii action (10) is called an absolute invariant with respect to transformation (13), if

$$F_N^{T_1}[\bar{u}] = F_N^{T_1}[u] + o(\varepsilon) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1.$$

**Definition 3.** Transformation (13) is called a divergence symmetry of Hamilton-Ostrogradskii action (10), if there exists a function  $f \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^6)$  such that

$$F_N^{T_1}[\bar{u}] = F_N^{T_1}[u] + \varepsilon \int_{t_0}^{T_1} \frac{d}{dt} f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)) dt + o(\varepsilon) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall T_1 : t_0 \leq T_1 \leq t_1. \quad (14)$$

Note that the function  $S$  is also called a generator of the symmetry (absolute or divergence), and symmetries of the Hamilton-Ostrogradskii action are also called variational symmetries.

**Theorem 5.** *Transformation (13) is a divergence symmetry of Hamilton-Ostrogradskii action (10) if and only if*

$$N(u)S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) + \frac{d}{dt} \left[ -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) + \right]$$



$$\begin{aligned}
& (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = \\
& = \frac{d}{dt} \left( (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) - \\
& - \left( (-3a_6'''(t) + a_4'(t))u''(t) + (-3a_6''(t) + a_4(t))u'''(t) \right) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = \\
& = \frac{d}{dt} \left( (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) - \\
& - \frac{d}{dt} \left[ \left( (-3a_6'''(t) + a_4'(t))u''(t) + (-3a_6''(t) + a_4(t))u'''(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right] + \\
& + \left( (-3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t))u''(t) + 2(-3a_6'''(t) + a_4'(t))u'''(t) + \right. \\
& \left. + (-3a_6''(t) + a_4(t))u^{(4)}(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - a_6(t)u'''(t) \frac{d^3}{dt^3} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = \\
& = \frac{d}{dt} \left( -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + (a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t)) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = \\
& = \frac{d}{dt} \left( -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + \frac{d}{dt} \left( (a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t)) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) - \\
& - (a_6''(t)u'''(t) + 2a_6'(t)u^{(4)}(t) + a_6(t)u^{(5)}(t)) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = \\
& = \frac{d}{dt} \left( -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + \frac{d}{dt} \left( (a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t)) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) - \\
& - \frac{d}{dt} \left( (a_6''(t)u'''(t) + 2a_6'(t)u^{(4)}(t) + a_6(t)u^{(5)}(t)) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + (a_6'''(t)u'''(t) + 3a_6''(t)u^{(4)}(t) + 3a_6'(t)u^{(5)}(t) + a_6(t)u^{(6)}(t)) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)). \quad (19)
\end{aligned}$$

Further,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& \quad + \frac{d}{dt} \left( (a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t)) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& \quad + \frac{d}{dt} \left( (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) - \\
& - \frac{d}{dt} \left[ \left( (-3a_6'''(t) + a_4'(t))u''(t) + (-3a_6''(t) + a_4(t))u'''(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right] - \\
& \quad - \frac{d}{dt} \left( (a_6''(t)u'''(t) + 2a_6'(t)u^{(4)}(t) + a_6(t)u^{(5)}(t)) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& \quad + \frac{d}{dt} \left( (-3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t))u'(t) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + \left( \left( 3a_6^{(5)}(t) - a_4'''(t) + a_2'(t) \right)u'(t) + a_2(t)u''(t) + \left( 2a_4'(t) - 5a_6'''(t) \right)u'''(t) + a_4(t)u^{(4)}(t) + \right. \\
& \quad \left. + 3a_6'(t)u^{(5)}(t) + a_6(t)u^{(6)}(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) + \\
& \quad + \frac{\partial B(t, u(t))}{\partial u} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) - \\
& \quad - \frac{d}{dt} f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Hence, taking into consideration (12), we have

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( -a_6(t)u'''(t) \frac{d^2}{dt^2} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right) + \\
& + \frac{d}{dt} \left[ \left( (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) + a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t) \right) \frac{d}{dt} S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right] + \\
& + \frac{d}{dt} \left[ \left( (-3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t))u'(t) + (3a_6'''(t) - a_4'(t))u''(t) + (2a_6''(t) - a_4(t))u'''(t) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2a_6'(t)u^{(4)}(t) - a_6(t)u^{(5)}(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \right] + \\
& \quad + N(u)S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) - \\
& \quad - \frac{d}{dt} f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)) = 0,
\end{aligned}$$

i. e. we obtain condition (15). Obviously, condition (15) is also sufficient.  $\square$

**Consequence 1.** If transformation (13) is a divergence symmetry of Hamilton-Ostrogradskii action (10), then

$$\begin{aligned}
 I(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)) = & \\
 = -a_6(t)u'''(t)\frac{d^2}{dt^2}S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) + & \\
 + \left( (-3a_6''(t) + a_4(t))u''(t) + a_6'(t)u'''(t) + a_6(t)u^{(4)}(t) \right) \frac{d}{dt}S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) + & \\
 + \left( (-3a_6^{(4)}(t) + a_4''(t) - a_2(t))u'(t) + (3a_6'''(t) - a_4'(t))u''(t) + (2a_6''(t) - a_4(t))u'''(t) - \right. & \\
 \left. - 2a_6'(t)u^{(4)}(t) - a_6(t)u^{(5)}(t) \right) S(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) - & \\
 - f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)) &
 \end{aligned}$$

is a first integral of the ordinary differential equation (4).

### 3. ON SYMMETRIES AND FIRST INTEGRALS OF EQUATION (4) WITH POTENTIAL OPERATOR $N$

Suppose that  $S \in C^6([t_0, t_1] \times \mathbb{R})$ .

**Definition 4.** A transformation

$$\bar{u}(t, \varepsilon) = u(t) + \varepsilon S(t, u) \tag{20}$$

is called a symmetry of equation (4) if, for any sufficiently small  $\varepsilon$  and any solution  $u$  to this equation, the function  $\bar{u}$  (20) is also a solution to equation (4).

Note that in this case the operator  $S$  is also called a generator of the symmetry of equation (4).

The invariance criterion was obtained in [25] and formulated in the form of the following theorem.

**Theorem 6.** A transformation

$$\bar{u} = u + \varepsilon \tilde{S}(u)$$

is a symmetry of equation  $N(u) = 0$  if and only if

$$N'_u \tilde{S}(u) = 0 \tag{21}$$

on solutions to this equation.

**Theorem 7.** *If operator  $N$  (4) is potential on  $D(N)$  (5) with respect to bilinear form (6),  $S_1, S_2$  are generators of symmetries of equation (4), then*

$$\begin{aligned}
 J[t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), u^{(4)}(t), u^{(5)}(t)] &= [-a_2(t) + a_4''(t) - 3a_6^{(4)}(t)] S_1(t, u) D_t S_2(t, u) + \\
 &+ [a_2(t) - a_4''(t) + 3a_6^{(4)}(t)] D_t S_1(t, u) S_2(t, u) + \\
 &+ [-a_4'(t) + 3a_6'''(t)] S_1(t, u) D_t^2 S_2(t, u) + \\
 &+ [a_4'(t) - 3a_6'''(t)] D_t^2 S_1(t, u) S_2(t, u) + [-a_4(t) + 2a_6''(t)] S_1(t, u) D_t^3 S_2(t, u) + \\
 &+ [a_4(t) - 3a_6''(t)] D_t S_1(t, u) D_t^2 S_2(t, u) + [-a_4(t) + 3a_6''(t)] D_t^2 S_1(t, u) D_t S_2(t, u) + \\
 &+ [a_4(t) - 2a_6''(t)] D_t^3 S_1(t, u) S_2(t, u) - 2a_6'(t) S_1(t, u) D_t^4 S_2(t, u) + a_6'(t) D_t S_1(t, u) D_t^3 S_2(t, u) - \\
 &- a_6'(t) D_t^3 S_1(t, u) D_t S_2(t, u) + 2a_6'(t) D_t^4 S_1(t, u) S_2(t, u) - a_6(t) S_1(t, u) D_t^5 S_2(t, u) + \\
 &+ a_6(t) D_t S_1(t, u) D_t^4 S_2(t, u) - a_6(t) D_t^2 S_1(t, u) D_t^3 S_2(t, u) + a_6(t) D_t^3 S_1(t, u) D_t^2 S_2(t, u) - \\
 &- a_6(t) D_t^4 S_1(t, u) D_t S_2(t, u) + a_6(t) D_t^5 S_1(t, u) S_2(t, u) \quad (22)
 \end{aligned}$$

is a first integral of this equation.

*Proof.* Let us find the Gâteaux derivative of the operator  $N$ . We have

$$\begin{aligned}
 N'_u h &= a_6(t) h^{(6)}(t) + a_5(t) h^{(5)}(t) + a_4(t) h^{(4)}(t) + a_3(t) h'''(t) + \\
 &+ a_2(t) h''(t) + a_1(t) h'(t) + (a_0)'_u(t, u(t)) h(t).
 \end{aligned}$$

Further,

$$g N'_u h = \left( \sum_{i=1}^6 a_i(t) h^{(i)}(t) + (a_0)'_u(t, u(t)) h(t) \right) g(t).$$

We obtain

$$J_1 = a_1(t) h'(t) g(t) = D_t(a_1(t) h(t) g(t)) - (a_1(t) g'(t) + a_1'(t) g(t)) h(t),$$

$$\begin{aligned}
 J_2 = a_2(t) h''(t) g(t) &= D_t(a_2(t) h'(t) g(t) - a_2(t) g'(t) h(t) - a_2'(t) g(t) h(t)) + \\
 &+ a_2(t) g''(t) h(t) + 2a_2'(t) g'(t) h(t) + a_2''(t) g(t) h(t),
 \end{aligned}$$

$$J_3 = a_3(t) h'''(t) g(t) = D_t(a_3(t) h''(t) g(t) - a_3(t) g'(t) h'(t) - a_3'(t) g(t) h'(t)) +$$

$$+D_t(a_3(t)g''(t)h(t) + a_3''(t)g(t)h(t) + 2a_3'(t)g'(t)h(t)) - a_3(t)g'''(t)h(t) - \\ -3a_3''(t)g'(t)h(t) - 3a_3'(t)g''(t)h(t) - a_3'''(t)g(t)h(t),$$

$$J_4 = a_4(t)h^{(4)}(t)g(t) = D_t(a_4(t)h'''(t)g(t) - a_4(t)g'(t)h''(t)) + \\ +D_t(a_4(t)g''(t)h'(t) - a_4(t)g'''(t)h(t) + 2a_4'(t)g'(t)h'(t)) + \\ +D_t(a_4''(t)g(t)h'(t) - 3a_4''(t)g'(t)h(t) - a_4'''(t)g(t)h(t) - 3a_4'(t)g''(t)h(t)) - \\ -D_t(a_4'(t)g(t)h''(t)) + a_4(t)g^{(4)}(t)h(t) + 4a_4'''(t)g'(t)h(t) + 6a_4''(t)g''(t)h(t) - \\ +4a_4'(t)g'''(t)h(t) + a_4^{(4)}(t)g(t)h(t),$$

$$J_5 = a_5(t)h^{(5)}(t)g(t) = D_t(a_5(t)h^{(4)}(t)g(t)) - D_t(a_5(t)g'(t)h'''(t)) + \\ +D_t(a_5(t)g''(t)h''(t)) - D_t(a_5(t)g'''(t)h'(t)) + \\ +D_t(a_5(t)g^{(4)}(t)h(t)) - 5a_5'(t)g^{(4)}(t)h(t) - a_5(t)g^{(5)}(t)h(t) + \\ +2D_t(a_5'(t)g'(t)h''(t)) - 3D_t(a_5''(t)g'(t)h'(t)) + 4D_t(a_5'''(t)g'(t)h(t)) - \\ -5a_5^{(4)}(t)g'(t)h(t) - 10a_5'''(t)g''(t)h(t) + 6D_t(a_5''(t)g''(t)h(t)) - \\ -10a_5''(t)g'''(t)h(t) - 3D_t(a_5'(t)g''(t)h'(t)) + 4D_t(a_5'(t)g'''(t)h(t)) - \\ -D_t(a_5'(t)g(t)h'''(t)) + D_t(a_5''(t)g(t)h''(t)) - D_t(a_5'''(t)g(t)h'(t)) + \\ +D_t(a_5^{(4)}(t)g(t)h(t)) - a_5^{(5)}(t)g(t)h(t),$$

$$J_6 = a_6(t)h^{(6)}(t)g(t)dt = \\ = D_t(a_6(t)h^{(5)}(t)g(t)) - D_t(a_6(t)g'(t)h^{(4)}(t)) + D_t(a_6(t)g''(t)h'''(t)) - \\ -D_t(a_6(t)g'''(t)h''(t)) + D_t(a_6(t)g^{(4)}(t)h'(t)) - 5D_t(a_6'(t)g^{(4)}(t)h(t)) + \\ +15a_6''(t)g^{(4)}(t)h(t) + 6a_6'(t)g^{(5)}(t)h(t) - D_t(a_6(t)g^{(5)}(t)h(t)) + \\ +a_6(t)g^{(6)}(t)h(t) + 2D_t(a_6'(t)g'(t)h'''(t)) - 3D_t(a_6''(t)g'(t)h''(t)) + \\ +4D_t(a_6'''(t)g'(t)h'(t)) - 5D_t(a_6^{(4)}(t)g'(t)h(t)) + 6a_6^{(5)}(t)g'(t)h(t) + \\ +15a_6^{(4)}(t)g''(t)h(t) - 10D_t(a_6'''(t)g''(t)h(t)) + 20a_6'''(t)g'''(t)h(t) +$$

$$\begin{aligned}
& +6D_t(a_6''(t)g''(t)h'(t)) - 10D_t(a_6''(t)g'''(t)h(t)) - 3D_t(a_6'(t)g''(t)h''(t)) + \\
& +4D_t(a_6'(t)g'''(t)h'(t)) - D_t(a_6'(t)g(t)h^{(4)}(t)) + D_t(a_6''(t)g(t)h'''(t)) - \\
& -D_t(a_6'''(t)g(t)h''(t)) + D_t(a_6^{(4)}(t)g(t)h'(t)) - D_t(a_6^{(5)}(t)g(t)h(t)) + a_6^{(6)}(t)g(t)h(t).
\end{aligned}$$

Then taking into consideration conditions (7)–(9) we obtain

$$\begin{aligned}
gN'_u h = hN'_u g + D_t \left\{ \right. & [-a_2(t) + a_4''(t) - 3a_6^{(4)}(t)]h(t)g'(t) + [a_2(t) - a_4''(t) + 3a_6^{(4)}(t)]h'(t)g(t) + \\
& + [-a_4'(t) + 3a_6'''(t)]h(t)g''(t) + [a_4'(t) - 3a_6'''(t)]h''(t)g(t) + [-a_4(t) + 2a_6''(t)]h(t)g'''(t) + \\
& + [a_4(t) - 3a_6''(t)]h'(t)g''(t) + [-a_4(t) + 3a_6''(t)]h''(t)g'(t) + \\
& + [a_4(t) - 2a_6''(t)]h'''(t)g(t) - 2a_6'(t)h(t)g^{(4)}(t) + a_6'(t)h'(t)g'''(t) - \\
& - a_6'(t)h'''(t)g'(t) + 2a_6'(t)h^{(4)}(t)g(t) - a_6(t)h(t)g^{(5)}(t) + \\
& + a_6(t)h'(t)g^{(4)}(t) - a_6(t)h''(t)g'''(t) + a_6(t)h'''(t)g''(t) - \\
& \left. - a_6(t)h^{(4)}(t)g'(t) + a_6(t)h^{(5)}(t)g(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Substituting  $S_1(t, u)$  and  $S_2(t, u)$  into the last expression instead of  $h$  and  $g$ , respectively, and taking into account (21), we conclude that  $J$  of the form (22) is the first integral of the considered equation.

□

## CONCLUSION

In the paper, we use some methods based on application of transformation of variables to establish invariance of the given sixth-order ordinary differential equation with the potential operator and the corresponding Hamilton-Ostrogradskii action. Some first integrals of the considered equation are also found.

## REFERENCES

1. SAVCHIN, V. (1991) *Mathematical methods of mechanics of infinite-dimensional nonpotential systems*. Moscow: UDN.
2. FILIPPOV, V., SAVCHIN, V. & SHOROKHOV, S. (1994) Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences*. 68 (3). Pp. 275–398.

3. POPOV, A. (2002) Inverse problem of the calculus of variations for systems of differential-difference equations of second order. *Mathematical Notes*. 72 (5). Pp. 687–691.
4. BUDOCHKINA, S. & SAVCHIN, V. (2007) On indirect variational formulations for operator equations. *Journal of Function Spaces and Applications*. 5 (3). Pp. 231–242.
5. KOLESNIKOVA, I., POPOV, A. & SAVCHIN, V. (2007) On variational formulations for functional differential equations. *Journal of Function Spaces and Applications*. 5 (1). Pp. 89–101.
6. FILIPPOV, V., SAVCHIN, V. & BUDOCHKINA, S. (2013) On the existence of variational principles for differential-difference evolution equations. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 283. Pp. 20–34.
7. TLEUBERGENOV, M. & AZHYMBAEV, D. (2019) Stochastical problem of Helmholtz for Birkhoff systems. *Bulletin of the Karaganda University, Series "Mathematics"*. 1 (93). Pp. 78–87.
8. BUDOCHKINA, S. & DEKHANDOVA, E. (2021) On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms. *Ural Mathematical Journal*. 7 (1). Pp. 26–37.
9. BUDOCHKINA, S., LUU, T. & SHOKAREV, V. (2023) On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton-Ostrogradsky equations. *Ufa Mathematical Journal*. 15 (3). Pp. 118–128.
10. BUDOCHKINA, S. & LUU, T. (2023) Ordinary differential equation of the eighth-order and Hamilton-Ostrogradskii equations. *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*. 4. Pp. 55–71.
11. KURANT, R. (1964) *Partial differential equations*. Moscow: Mir.
12. TIKHONOV, A. & SAMARSKY, A. (1977) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Science.
13. LAX, P. (1968) Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics XXI*. Pp. 467–490.
14. VILKE, V. (1986) *Analytical and qualitative methods of mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom*. Moscow: MGU.
15. NOETHER, E. (1959) Invariant variational problems. *Variational principles of mechanics, ed. Polak L.S.* Pp. 611–630.

16. OVSYANNIKOV, L. (1978) *Group analysis of differential equations*. Moscow: Science.
17. IBRAGIMOV, N. (1983) *Transformation groups in mathematical physics*. Moscow: Science.
18. KOZLOV, V. (1995) *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*. Izhevsk: Udmurt State University.
19. BUDOCHKINA, S. (2012) Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation. *Eurasian Mathematical Journal*. 3 (1). Pp. 18–28.
20. BUDOCHKINA, S. (2021) On connection between variational symmetries and algebraic structures. *Ufa Mathematical Journal*. 13 (1). Pp. 46–55.
21. BUDOCHKINA, S. & SAVCHIN, V. (2011) Variational Symmetries of Euler and Non-Euler Functionals. *Differential Equations*. 47 (6). Pp. 814–821.
22. FILIPPOV, V., SAVCHIN, V. & BUDOCHKINA, S. (2024) Bi-variationality, symmetries and approximate solutions. *Journal of Mathematical Sciences*. 278 (2). Pp. 373–384.
23. BUDOCHKINA, S. & LUU, T. (2024) On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 45 (6). Pp. 2466–2477.
24. BUDOCHKINA, S. & LUU, T. (2021) On connection between variability of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42 (15). Pp. 3594–3605.
25. SAVCHIN, V. (2001) *Symmetries of differential equations with deviating arguments*. Abstracts of the XXXVII All-Russian Scientific Conference on Problems of Mathematics, Computer Science, Physics, Chemistry and Methods of Teaching Natural Sciences, Moscow, May 22–26, 2001. Moscow: RUDN University Publishing House.

**Цитирование:** Luu T. H. On first integrals of a sixth-order ordinary differential equation // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 54–66.

УДК: 519.854.2

MSC2010: 90C27

DOI: 10.5281/zenodo.18649995

## УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. ЧАСТЬ 1

© Д. В. Лемтюжникова

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК (ИПУ РАН)

МОСКВА, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [darabbt@gmail.com](mailto:darabbt@gmail.com)

CONDITIONALLY IDEAL STRUCTURES IN SOLVING DISCRETE OPTIMIZATION  
PROBLEMS. PART 1.

Lemtyuzhnikova D. V.

**Abstract.** This paper introduces and systematically develops the theory of **Conditionally Ideal Structures (CIS)** — a novel framework for reducing the computational complexity of NP-hard problems by leveraging structural data invariants. Departing from classical approaches rooted in the P versus NP dichotomy, the proposed method establishes a direct connection between algorithmic asymptotics and the geometric properties of data, particularly hierarchical organization and sparsity. The theoretical foundation is built upon two principal asymptotic regimes: the **logarithmic regime** ( $k(n) = O(\log n)$ ) and the **sub-exponential regime** ( $k(n) = \Theta(n^\epsilon)$ ), where  $k(n)$  represents a structural parameter quantifying data complexity.

The core contribution lies in formalizing structural parameters and introducing **compensating functions** that transform structural constraints into computational resources. This enables the derivation of **structurally-compensated complexity** bounds of the form  $T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)$ , where  $f(k(n))$  suppresses exponential growth. A key theoretical result is the proof of **asymptotic controllability**, guaranteeing that for any CIS,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(n, k(n))/e^n = 0$ , thus ensuring complexity grows substantially slower than a pure exponential.

Further theoretical advancements include:

- The proof of **algebraic closure** of the CIS class under fundamental operations like composition ( $\oplus$ ) and intersection ( $\cap$ ), enabling the combination of structural patterns while preserving complexity guarantees.
- A rigorous formalization of the boundary between tractable and intractable problem instances, firmly grounded in the **Strong Exponential Time Hypothesis (SETH)**.
- The development of a formal **compensation procedure** for constructing and verifying adaptive algorithms tailored to specific data structures.

The practical utility of the CIS framework is demonstrated through its application to diverse domains, including graph optimization (e.g., problems parameterized by treewidth), metric

clustering, and sparse matrix processing. In these cases, the exploitation of structural parameters leads to complexity reductions from exponential to polynomial or sub-exponential.

In conclusion, the theory of Conditionally Ideal Structures provides a unified and powerful methodology for designing efficient algorithms in scenarios of structural data heterogeneity. It extends the toolbox of parameterized complexity and opens promising avenues for future research, such as the exploration of singular parameters, integration with machine learning for automatic CIS identification, and the analysis of complexity phase transitions.

**Keywords:** *conditionally ideal structures, parameterized complexity, SETH hypothesis, subpolynomial algorithms, NP-hard problems, discrete optimization*

## ВВЕДЕНИЕ

Современная теория вычислительной сложности сталкивается с фундаментальным вызовом: преодоление разрыва между теоретической классификацией задач и их практической разрешимостью в условиях экспоненциального роста комбинаторного пространства. Несмотря на значимость классической дихотомии классов P и NP [5], её ограниченность при анализе задач со скрытыми структурными закономерностями требует разработки новых аналитических инструментов. Как показано в работах по NP-трудности [7], даже принципиально сложные задачи могут содержать подклассы, допускающие эффективные алгоритмы при наличии специфических структурных свойств. Данный факт послужил основой для развития параметризованной сложности [6, 14], где введение структурных параметров позволило смягчить вычислительную трудность для определённых случаев. Однако применяемые субполиномиальные алгоритмы [8, 9] и процедуры выделения ядер [10, 11], долгое время оставались разрозненными подходами, требующими унифицирующей теоретической платформы.

Предлагаемая концепция условно-идеальных структур (Conditionally Ideal Structures, CIS) устраняет этот пробел, обобщая идеи из различных областей теории сложности. Центральным элементом CIS является параметризация сложности в взаимодополняющих случаях: логарифмическом ( $k(n) = O(\log n)$ ) и субполиномиальном ( $k(n) = \Theta(n^\epsilon)$ ), где структурные инварианты данных (иерархичность, разреженность) подавляют комбинаторный взрыв. Теоретические корни подхода прослеживаются в работах Эдмондса по матроидам [4], где структурные ограничения гарантировали эффективность жадных алгоритмов, а также в исследованиях Ю. И. Журавлёва [1] и Б. Тариана [3], связанных с декомпозицией сложных структур. Критическим аспектом разработки является согласование метода с гипотезой

о сильной экспоненциальной временной сложности (SETH) [13], устанавливающей принципиальные ограничения для задач типа  $k$ -SAT.

Предлагаемое в работе использование композиции функций  $k$  и  $f$  для оценки сложности CIS является одним из возможных инструментов для более тонкой оценки сложности структур и разрешимости оптимизационных задач на таких структурах.

В отличие от известных идеальных структур, приводящих к полиномиальной разрешимости соответствующих задач, в представленном подходе отдельными этапами ставятся задачи распознавания CIS и алгоритмическая наполняемость методов решения в соответствии с выявленной сложностью структуры. В прикладном аспекте для конкретной структуры задачи ставится в соответствие компромиссная CIS, на которой находится приемлемое приближенное решение. Синтез близких CIS связывается с близостью задач, решений и алгоритмов. Такой подход апробирован для задач многоагентной маршрутизации на сложных структурах.

Теоретическая значимость исследования проявляется в трёх ключевых аспектах. Во-первых, доказана алгебраическая замкнутость класса CIS относительно операций композиции и пересечения, что открывает возможности комбинирования структурных паттернов. Во-вторых, установлена строгая связь с гипотезой SETH, позволяющая установить границу между практически разрешимыми и принципиально трудными случаями. В-третьих, разработаны условия существования полиномиальных аппроксимационных схем, расширяющие классические результаты параметризованной сложности.

Структура статьи отражает логику развития теоретического аппарата. В разделе 2 вводятся формальные определения CIS и анализируются их асимптотические свойства. Раздел 3 посвящён алгебраическим операциям над CIS, включая доказательства замкнутости класса. Каждый раздел сопровождается строгими доказательствами и иллюстративными примерами, подчёркивающими единство теоретической основы и её прикладную релевантность.

## 1. СТРУКТУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ

Современные вычислительные задачи часто требуют анализа не только объёма данных, но и их внутренней структуры. Традиционные подходы к оценке сложности алгоритмов, опирающиеся исключительно на размер  $n$  входных данных.

Ключевая проблема заключается в установлении связи между структурными свойствами данных и вычислительной сложностью. Для этого необходимо чётко определить объекты исследования: что считать входными данными, как выделить «простые» и «сложные» случаи. Кроме того, нужно ввести количественные меры

структурной сложности — параметры, отражающие внутреннюю организацию данных, а также установить асимптотические рамки: понять, как структурные ограничения влияют на рост сложности при  $n \rightarrow \infty$ .

Всё это требует единой формальной модели, которая: отделит абстрактные свойства данных от конкретных алгоритмов, позволит сравнивать задачи разной природы через призму структурной сложности и станет основой для анализа компромиссов между точностью и эффективностью. Предлагается модель вычислительной задачи, которая послужит основой для построения такой теории. Она зафиксировывает три критических компонента: множество допустимых входов, класс «положительных» случаев и функцию, измеряющую размерность данных. Предлагаемая модель лежит в основе построения методики, где структурные параметры данных трансформируются в вычислительные ресурсы — от полиномиальных до субэкспоненциальных.

**Определение 1** (Вычислительная задача). Вычислительной задачей называется кортеж  $\Pi = (\mathcal{D}, \mathcal{Y}, n)$ , где  $\mathcal{D}$  — множество допустимых входных данных,  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}$  — подмножество данных с положительным ответом,  $n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}$  — вычисляемая за полиномиальное время функция от размера данных  $d \in \mathcal{D}$ , задающая размерность данных.

Анализ вычислительной сложности традиционно опирается на размер входных данных  $n$ , однако во многих задачах решающую роль играют не объёмы информации, а её внутренняя организация. Например, древовидная ширина графа, ранг матрицы или степень кластеризации данных могут радикально влиять на эффективность алгоритмов, даже при растущем  $n$ .

Необходимо ввести количественные меры, отражающие структурные свойства объектов. Такие меры должны быть вычислимыми — позволять эффективно оценивать сложность данных на практике, согласовываться с размером  $n$ , то есть гарантировать корректный асимптотический анализ, а также объяснять вариативность сложности — показывать, почему задачи с одними данными решаются быстрее других при одинаковом  $n$ .

Для реализации этих требований предлагается ввести понятие структурного параметра — функции, измеряющей внутреннюю сложность данных. Это понятие позволяет классифицировать задачи по степени структурной сложности, тем самым создавая инструмент для проектирования адаптивных алгоритмов, эффективных на специфических классах входов. Реализация данной технологии предусматривает возможность оценивать вычислительные ресурсы через связь параметра с асимптотикой до выполнения вычислений. Например, для графов параметром может служить

размер минимального вершинного покрытия, а для матриц — число линейно независимых строк. Данные параметры не зависят от реализации алгоритмов, а являются свойством самих данных, что делает их универсальным инструментом анализа.

Формализуем это понятие, чтобы зафиксировать требования к структурным параметрам и установить их роль в теории вычислительной сложности.

**Определение 2** (Структурный параметр). Функция  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  называется *структурным параметром* задачи  $\Pi$ , если выполняются следующие условия:

- 1) **вычислимость**: для любого  $d \in \mathcal{D}$  существует алгоритм, вычисляющий  $k(n)$  за время  $O(n^c)$ , где  $c > 0$ ;
- 2) **согласованность**: существует полином  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такой что  $k(n) \leq p(n)$  для всех  $n$ .

Термин «параметр» сохранён для  $k(n)$ , несмотря на его функциональную зависимость от  $n$ , по следующим причинам. Структурный параметр  $k(n)$  введён для оценки структурных свойств данных (например, размер ядра, степень разреженности), которые напрямую влияют на вычислительную сложность алгоритмов. В частности, в оптимизационных задачах параметры часто зависят от размера данных (например, число итераций в адаптивных методах), но сохраняют название «параметров», так как управляют балансом между точностью и эффективностью. Структурный параметр  $k(n)$  можно интерпретировать как «динамический» параметр, адаптирующийся к размеру задачи, позволяет классифицировать данные по структурной сложности, строить алгоритмы с некоторой асимптотикой и связывать свойства данных с вычислительной трудоёмкостью.

Кроме того, в работе явно предполагается, что  $k$  зависит только от  $n$ , а не от конкретных данных  $d$ . Это упрощение позволяет анализировать асимптотику  $k(n)$ , абстрагируясь от деталей структуры  $d$ . Общий случай  $k(d)$  требует отдельного изучения (см. замечание ниже).

**Замечание 1** (О зависимости от данных). В данной работе ограничимся структурными параметрами, зависящими только от размера данных  $n$ . Это позволяет изучать асимптотическую сложность через призму роста  $k(n)$ , не анализируя тонкие структурные свойства  $d$ . Обобщение на случай  $k(d)$ , зависящих от внутренней структуры данных (например, дерева, матрицы), требует методов параметризованной сложности и будет рассмотрено отдельно.

**Замечание 2** (О целочисленности). Значения  $k(n)$  могут быть нецелыми, но для приложений их можно округлять до ближайшего натурального числа без потери

общности. Округление до  $\mathbb{N}$  не влияет на асимптотический анализ, так как сохраняется порядок роста. Поэтому далее будем исходить из того, что  $k(n) \in \mathbb{N}$ .

В следующем определении параметр  $\alpha$  вводится для количественной характеристики скорости роста структурного параметра  $k(n)$  относительно размера данных  $n$ .

**Определение 3** (Асимптотический показатель структурной сложности). Для структурного параметра определим величину:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n}.$$

Если данный предел существует, то значение  $\alpha$  называется *асимптотическим показателем структурной сложности* параметра  $k(n)$ , а структурный параметр  $k(n)$  имеет показатель  $\alpha$ .

Параметр  $\alpha$  возникает из логарифмической асимптотики, что позволяет выразить  $k(n)$  в виде:  $k(n) \sim n^\alpha$ , где  $\alpha$  определяет доминирующую степенную зависимость. Посмотрим, как конкретные пороги асимптотического показателя структурной сложности связаны с классами сложности.

Таблица 1. Связь асимптотического показателя структурной сложности с классами сложности

значение $\alpha$	тип роста	пример $k(n)$
$\alpha = 0$	Сублогарифмический рост (SLG)	$k(n)$
$\alpha = 0$	Полилогарифмический рост (PLG)	$k(n) = (\log n)^2$
$0 < \alpha < 1$	Сублинейный рост (SBL)	$k(n) = \sqrt{\log n}$
$\alpha = 1$	Квазилинейный рост (SGL)	$k(n)$
$\alpha$ не существует	Осциллирующий/Гибридный рост	$k(n)$

Далее, для того, чтобы ставить вопрос об эффективности решения вычислительной задачи, необходимо определить стандартные режимы асимптотики. Данные режимы основаны на знаниях о скорости сходимости функций.

**Замечание 3.** Для определения стандартных режимов асимптотики будем использовать следующие типы роста функций:

$$f(n) = o(g(n)) \text{ («} f \text{ растёт медленнее } g \text{»);}$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ («} f \text{ растёт так же, как } g \text{»);}$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ («} f \text{ ограничена сверху } g \text{»);}$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \text{ («} f \text{ растёт не быстрее, чем } g \text{»).$$

Стандартными режимами асимптотики будем понимать три базовых режима, описанных в определении ниже.

**Определение 4** (Стандартные режимы асимптотики). Для функций  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  определим:

- 1) **сублогарифмический (SLG)**:  $g(n) = o(\log n)$ ;
- 2) **сублинейный (SBL)**:  $g(n) = \Theta(n^\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ;
- 3) **полилогарифмический (PLG)**:  $g(n) = \Theta((\log n)^c)$ ,  $c > 0$ .

Предложенные в определении режимы аналогичны классификации алгоритмов по времени работы: SLG — очень медленный рост (например, поиск в отсортированном массиве), PLG — умеренный рост (например, алгоритмы с временем выполнения  $O(n^2)$ ), SBL — близкий к линейному, но не достигающий его (например,  $O(n \log n)$ ).

Далее примеры иллюстрируют, как предложенная классификация разделяет параметры по их асимптотическому поведению, что важно для анализа вычислительной сложности.

**Пример 1** (Режимы асимптотики). Примеры, иллюстрирующие определение 4: **SLG**:  $k(n) = (\ln n)^{1/2}$ , **PLG**:  $k(n) = (\ln n)^2$ , **SBL**:  $k(n) = n^{0.8}$ .

Исходя из этой классификации определим два вида асимптотики для структурного параметра: регулярная и сингулярная.

**Определение 5** (Регулярная асимптотика). Структурный параметр  $k(n)$  называется регулярным, если его асимптотический показатель структурной сложности  $\alpha$  существует и удовлетворяет условию:  $\alpha \in [0, 1)$ . Множество регулярных параметров обозначим  $\mathcal{R}(\Pi)$ .

Структурные параметры, характеризующие внутреннюю организацию данных, демонстрируют разнообразные асимптотические режимы роста. Эти режимы напрямую влияют на вычислительную сложность алгоритмов: от полиномиальной до субэкспоненциальной. Остаётся открытым вопрос: как именно показатель регулярности  $\alpha$  связан с конкретными формами роста структурного параметра  $k(n)$ ?

Понимание этой связи позволяет классифицировать алгоритмы по их чувствительности к структурным ограничениям. Например, для задач с  $\alpha=0$  (кластеризация с логарифмическим числом кластеров) сложность остаётся полиномиальной, тогда как при  $\alpha \in (0, 1)$  (например, декомпозиция графов с древовидной шириной  $\Theta(n^{0.5})$ ) она становится субэкспоненциальной.

Следующая теорема устанавливает строгое соответствие между показателем  $\alpha$  и регулярным структурным параметром  $k(n)$ , что становится основой для анализа и сравнения алгоритмов в рамках единой теоретической схемы.

**Теорема 1** (Режимы регулярных параметров). Пусть  $k(n)$  — регулярный структурный параметр с показателем  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} \in [0, 1)$ . Тогда:

- 1) если  $\alpha = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 : k(n) = o(n^\varepsilon)$ ;
- 2) если  $\alpha \in (0, 1)$ , то  $k(n) = \Theta(n^\alpha)$ .

*Доказательство.* Докажем оба случая, используя свойства логарифмической асимптотики.

**Случай 1:**  $\alpha = 0$ . По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \frac{\ln k(n)}{\ln n} < \varepsilon.$$

Откуда получаем:  $k(n) < e^{\varepsilon \ln n} = n^\varepsilon$ , т. е.  $k(n) = o(n^\varepsilon)$ . Это включает:

- сублинейный рост:  $k(n) = O(\ln n)$ ;
- полилогарифмический рост:  $k(n) = \Theta((\ln n)^c)$ .

**Случай 2:**  $\alpha \in (0, 1)$ . Для  $\varepsilon = \alpha/2$  найдём  $N$ , такое что:

$$\forall n > N \quad \alpha - \varepsilon < \frac{\ln k(n)}{\ln n} < \alpha + \varepsilon.$$

Умножая на  $\ln n$ , получим:  $(\alpha - \varepsilon) \ln n < \ln k(n) < (\alpha + \varepsilon) \ln n$  или  $n^{\alpha - \varepsilon} < k(n) < n^{\alpha + \varepsilon}$ , откуда  $k(n) = \Theta(n^\alpha)$ .  $\square$

**Замечание 4** (О границах применимости). Теорема 1 работает только для параметров с *регулярной асимптотикой*. Исключены осциллирующие функции:  $k(n) = n^{\sin(\ln n)}$  и гибридные случаи вида

$$k(n) = \begin{cases} n^{0.5}, & n \text{ чётное,} \\ \ln^2 n, & n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Хотя основное внимание в работе уделено регулярным структурным параметрам, важно отметить существование сингулярных параметров — классов  $k(n)$ , для которых стандартные режимы асимптотики неприменимы. Эти параметры возникают в случаях, когда предел  $\alpha$  не существует, например, для осциллирующих функций  $k(n) = n^{\sin(\ln n)}$ , или когда предел достигает граничных значений ( $\alpha = 0$  или  $\alpha = 1$ ), но поведение  $k(n)$  не вписывается в стандартные классы (например,  $k(n) = n \cdot (\log n)^{-1}$  при  $\alpha = 1$ ). Сингулярные параметры представляют собой «пограничные» случаи, где структурная сложность данных не может быть однозначно классифицирована как

регулярная. Они важны, поскольку указывают на направления, где стандартные методы анализа сложности требуют модификаций (например, для параметров с хаотичным или пограничным поведением). Таким образом, введение сингулярных параметров не только завершает общую картину, но и очерчивает границы применимости текущей теории, оставляя пространство для её расширения.

**Определение 6** (Сингулярный параметр). Структурный параметр  $k(n)$  называется сингулярным, если либо показатель  $\alpha$  не существует, либо  $\alpha \geq 1$ . Множество сингулярных параметров обозначим  $\mathcal{S}(\Pi)$ .

**Пример 2** (Примеры сингулярных параметров).

**Осциллирующий:**  $k(n) = n^{\sin(\log n)}$ ,  $\nexists \lim \frac{\ln k(n)}{\ln n}$ .

**Квазилинейный:**  $k(n) = \frac{n}{\log n}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k(n) = n/(\log n)^c$ ,  $c > 0$ .

Хотя регулярные параметры охватывают широкий класс задач, существуют случаи, когда асимптотика  $k(n)$  не подчиняется регулярным паттернам. Это мотивирует введение сингулярных параметров, которые требуют отдельного анализа. Следующая теорема формализует условия, при которых параметр  $k(n)$  считается сингулярным, и описывает его асимптотические свойства. В данной работе сингулярные параметры не используются для построения дальнейшей теории. Их изучение закладывает основу для будущих исследований, где «пограничные» случаи могут стать ключом к пониманию фазовых переходов в вычислительной сложности.

**Теорема 2** (Режимы сингулярных параметров). Для любого  $k(n) \in \mathcal{S}(\Pi)$  верно:

- 1) *осциллирующий режим:*  $\liminf \frac{\ln k(n)}{\ln n} \neq \limsup \frac{\ln k(n)}{\ln n}$ ;
- 2) *квазилинейный режим:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} = 1$ , но  $k(n) = o(n)$ .

*Доказательство.*

1. Для любого  $k(n) \in \mathcal{S}(\Pi)$ :

Если предел  $\alpha$  не существует:

$$\liminf \frac{\ln k(n)}{\ln n} \neq \limsup \frac{\ln k(n)}{\ln n} \implies \text{Осциллирующий режим.}$$

Если предел  $\alpha$  существует, но  $\alpha = 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} = 1 \implies \text{Квазилинейный режим.}$$

При этом  $k(n) = o(n)$ , например:

$$k(n) = \frac{n}{\log n} \implies \alpha = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \log n}{\ln n} = 1.$$

**2.** Если любой сингулярный параметр удовлетворяет условию  $\nexists \alpha \in [0, 1)$ , то предел не существует или предел существует и равен 1.  $\square$

**Замечание 5.** Предложенная классификация покрывает все сингулярные случаи, сохраняет совместимость с регулярными параметрами и допускает расширение для сложных осцилляций.

Классификация структурных параметров на регулярные и сингулярные играет важную роль в анализе вычислительной сложности.

Для систематизации задач важно выяснить, является ли такое разделение исчерпывающим. Если классификация полна и непересекающаяся, это позволит строить иерархии сложности, группируя задачи по асимптотике их структурных параметров, разрабатывать универсальные методы анализа, разделяя случаи с предсказуемой и «хаотичной» структурой данных, а также формализовать границы применимости алгоритмов, выделяя классы входов, где экспоненциальный взрыв сложности неизбежен. Например, для задач кластеризации регулярные параметры (типа размера кластеров) допускают субэкспоненциальные алгоритмы, в то время как сингулярные (например, фрактальная размерность данных) могут требовать принципиально иных подходов.

Следующая теорема устанавливает, что предложенная классификация не только логически непротиворечива, но и полна — любой структурный параметр, удовлетворяющий  $k(n) = o(n)$ , принадлежит ровно одному из двух классов.

**Теорема 3** (Полнота классификации). *Для любого структурного параметра  $k(n) \in \mathcal{K}(\Pi)$ , удовлетворяющего  $k(n) = o(n)$ , выполняется:*

$$k(n) \in \mathcal{R}(\Pi) \sqcup \mathcal{S}(\Pi),$$

где:  $\mathcal{R}(\Pi)$  — класс регулярных параметров (Опр. 5),  $\mathcal{S}(\Pi)$  — класс сингулярных параметров (Опр. 6), причём  $\mathcal{R}(\Pi) \cap \mathcal{S}(\Pi) = \emptyset$ .

*Доказательство.*

**1. Полнота:** Пусть даны  $k(n) \in \mathcal{K}(\Pi)$  и  $k(n) = o(n)$ , рассмотрим значения соответствующего показателя  $\alpha$ .

**Случай 1:** Если предел существует и  $\alpha \in [0, 1)$ , то по Опр. 5  $k(n) \in \mathcal{R}(\Pi)$ .

**Случай 2:** Если предел:

- не существует;
- или  $\alpha = 0$  (но  $k(n) \neq O((\log n)^c)$ );
- или  $\alpha = 1$  (но  $k(n) = o(n)$ ),

то по Опр. 6  $k(n) \in \mathcal{S}(\Pi)$ .

**2. Непересекаемость:** Предположим  $\exists k(n) \in \mathcal{R}(\Pi) \cap \mathcal{S}(\Pi)$ . Тогда по Опр. 5:  $\exists \alpha \in [0, 1)$ , по Опр. 6:  $\alpha \notin [0, 1)$  или предел не существует. Противоречие, следовательно,  $\mathcal{R}(\Pi) \cap \mathcal{S}(\Pi) = \emptyset$ .  $\square$

**Пример 3** (Проверка полноты). Рассмотрим несколько примеров с разными типом роста функции:

**регулярный параметр:**  $k(n) = n^{0.5}$ ,  $\alpha = 0.5 \in (0, 1)$ ;

**сингулярный (осциллирующий):**  $k(n) = n^{\sin(\log n)}$ ,  $\nexists \alpha$ ;

**сингулярный (предельный):**  $k(n) = \frac{n}{\log \log n}$ ,  $\alpha = 1 \notin [0, 1)$ .

**Замечание 6** (Об ограничении  $k(n) = o(n)$ ). Теорема 3 рассматривает только структурные параметры с  $k(n) = o(n)$ . Это связано с тем, что параметры, растущие быстрее  $n$ , выходят за рамки данной классификации и требуют отдельного анализа.

Таким образом, введение структурных параметров с регулярной и сингулярной асимптотикой позволяет систематизировать анализ вычислительных задач. Теоремы 1 и 3 устанавливают исчерпывающую классификацию, которая связывает сложность алгоритмов со структурой данных, разделяет задачи на практически разрешимые (субполиномиальные/квазилинейные) и принципиально трудные (сингулярные). Далее рассматриваются структурные параметры с регулярной асимптотикой, однако, дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение нерегулярных параметров с осциллирующей асимптотикой и их приложений.

## 2. ПОНЯТИЕ УСЛОВНО-ИДЕАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Рассмотренные структурные параметры, характеризуют внутренние свойства данных. Однако для анализа сложности алгоритмов необходимо связать эти параметры с вычислительными ресурсами.

Введём функцию, которая отображает структурную сложность объекта в количественную оценку трудоёмкости. Такая функция должна: учитывать асимптотику структурного параметра  $k(n)$ , экспоненциальные эффекты при росте  $n$ , а также разделить влияние структурных ограничений (через зависимость от  $k(n)$ ) и базовой сложности обработки (через полиномиальный член). Формализация этой идеи потребует специального определения, которое позволит разделить вклад «структурной управляемости» и «размерности данных» в итоговую сложность алгоритма.

**Определение 7** (Компенсирующая функция). Пусть  $k(n)$  — регулярный структурный параметр с показателем  $\alpha$ . *Компенсирующей функцией* для  $k(n)$  называется

функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , определяемая следующим образом:

$$f(k(n)) = \begin{cases} k^m(n), & \text{если } \alpha = 0, \\ 2^{k(n)}, & \text{если } \alpha \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

где  $m > \xi$  — абсолютные константы, не зависящие от  $n$ .

**Замечание 7.** Определение связывает вид компенсирующей функции с асимптотическим поведением  $k(n)$ . При логарифмическом росте структурного параметра  $k(n)$  с показателем  $\alpha=0$  полином  $k^m(n)$  сохраняет итоговую сложность полиномиальной. При степенном росте структурного параметра  $k(n) \sim n^\alpha$  с показателем  $\alpha \in (0, 1)$  экспонента  $2^{k(n)}$  позволяет выделить субэкспоненциальную сложность  $O(2^{n^\alpha})$ .

Перейдём к формализации совместного влияния структурных параметров и компенсирующих функций на вычислительную сложность. Для этого необходимо объединить два ключевых аспекта: структурную сложность данных, выраженную через параметр  $k(n)$  и механизм компенсации, преобразующий структурные ограничения в вычислительный ресурс. Такое объединение позволяет выяснить, как количественно оценить сложность алгоритма, учитывая не только размер данных  $n$ , но и их скрытые структурные свойства.

Временная сложность, зависящая от  $k(n)$ , должна сохранять асимптотическую сложность (т. е. исключать экспоненциальный рост), разделить вклад полиномиальной компоненты  $n^\xi$ , отражающей базовую обработку данных, и компенсирующей функции  $f(k(n))$ , отвечающая за структурные ограничения. Для решения этих задач введём понятие, которое свяжет структурные параметры, компенсирующие функции и итоговую сложность в единую модель, которое станет основой для анализа алгоритмов на структурно-сложных данных.

В теории сложности вычислений обозначения  $T(n)$  и  $T(n, k)$  используются для описания временной сложности алгоритмов, но в разных контекстах.  $T(n)$  — это функция, описывающая максимальное время работы алгоритма в зависимости от размера входа  $n$ , где  $n$  — основная мера данных (например, число бит, вершин графа или элементов массива).  $T(n, k)$  — функция, описывающая время работы алгоритма в зависимости от двух переменных:  $n$  — размера входа,  $k$  — дополнительного параметра задачи, который характеризует её структурные свойства (например, размер решения, древовидная ширина графа, размер ядра). В отличие от параметризованной сложности, где  $k$  фиксирован, в данной работе  $k(n)$  является функцией от  $n$ , что отражает структурные ограничения данных. Поэтому далее определим структурно-компенсированную сложность с помощью функции сложности, которая зависит от

$n$  — размера входа,  $k(n)$  — структурного параметра задачи, который характеризует её структурные свойства в зависимости от  $n$ .

**Определение 8** (Структурно-компенсированная сложность). Алгоритм решения задачи  $\Pi$  имеет *структурно-компенсированную сложность*, если функция его временной сложности выражается как:

$$T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi), \quad (2)$$

где:  $f(k(n))$  — компенсирующая функция,  $k(n)$ ,  $\xi > 0$  — константа. При этом функцию временной сложности  $T(n, k(n))$  будем называть функцией структурно-компенсированной сложности.

Теперь покажем, как конкретная асимптотика и структурный параметр встроены в вычислительную задачу.

**Пример 4** (Пример структурного параметра в SBL-режиме).

Задача: Факторизация матрицы.

Структурный параметр:  $k(n)$  = ранг матрицы.

Пример значения:  $k(n) = n^{0.4}$ .

Компенсирующая функция:  $f(k(n)) = 2^{k(n)} = 2^{n^{0.4}}$ .

Сложность:  $T(n) = O(2^{n^{0.4}} \cdot n^3)$  — субэкспоненциальная сложность.

Пояснение: низкий ранг матрицы позволяет использовать методы декомпозиции, сокращающие вычислительные ресурсы. Экспонента  $2^{n^{0.4}}$  растёт медленнее  $2^n$ .

**Пример 5.**

Задача: Проверка наличия гамильтонова цикла в графе.

Структурный параметр  $k(n)$  : древовидная ширина графа.

Пример значения:  $k(n) = \log n$ .

Компенсирующая функция:  $f(k(n)) = k^3(n) = (\log n)^3$ .

Сложность:  $T(n) = O((\log n)^3 \cdot n^2)$  — полиномиальная сложность.

Пояснение: для графов с логарифмической древовидной шириной алгоритмы на основе динамического программирования сохраняют полиномиальную сложность, избегая экспоненциального взрыва.

До этого момента в работе рассматривались связи структурных свойств данных с асимптотикой алгоритмов. Однако принципиальный вопрос остаётся открытым: какие именно классы данных позволяют достигать управляемой сложности, и как формально описать их свойства?

Для ответа на него необходимо выделить подмножества данных, где структурный параметр  $k(n)$  эффективно ограничивает комбинаторную сложность задачи, компенсирующая функция  $f(k(n))$  гарантирует выполнение асимптотического условия  $T(n, k(n)) \ll e^n$ , а алгоритмическая эффективность достигается за счёт явного использования структурных паттернов. Такие подмножества формализуют интуитивное представление о «хороших» данных — объектах, внутренняя организация которых приводит к экспоненциальному росту сложности. Их выделение позволяет классифицировать задачи по степени структурной управляемости, строить адаптивные алгоритмы, эффективные на специфических классах входов, а также анализировать границы применимости методов параметризованной сложности. Для работы с этими классами введём понятие, объединяющее структурные параметры, компенсирующие функции и асимптотические гарантии в единую схему, которое станет основой для изучения «идеальных» структур данных в контексте вычислительной сложности.

**Определение 9** (Условно-идеальная структура). Для вычислительной задачи  $\Pi = (\mathcal{D}, \mathcal{Y}, n)$  множество  $S \subseteq \mathcal{D}$  называется *условно-идеальной структурой* (CIS), если существует регулярный структурный параметр  $k(n) : S \rightarrow \mathbb{N}$  и компенсирующая функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , такие что задача  $\Pi$  разрешима со *структурно-компенсированной сложностью*. Такую задачу будем обозначать CISP (Conditionally Ideal Structures Problem).

После введения CIS (Опр. 9) важно уточнить роль констант, устанавливающих компромисс между структурными ограничениями и вычислительной сложностью. Для CIS ключевыми являются константы  $c, m, n, \varepsilon$ . В логарифмическом режиме ( $k(n) \leq c \log n$ ) значение  $c$  определяет границы структурной «идеальности» данных. Например, для кластеризации  $c$  может отражать максимальное допустимое число кластеров, при котором сохраняется полиномиальная сложность  $O(n^{m+\xi})$ . Увеличение  $c$  расширяет класс данных, принадлежащих CIS, но требует более строгого контроля за  $m$  и  $\xi$ .

Условие  $m > \xi$  (Опр. 7) критично для CIS, так как гарантирует, что вклад структурного параметра  $k(n)$  доминирует над базовой сложностью обработки  $O(k^m(n) \cdot n^\xi) = O(n^{m+\xi})$  при  $k(n) = O(\log n)$ . Нарушение  $m > \xi$  приводит к «размыванию» структурного вклада, что противоречит определению CIS.

В субэкспоненциальных CIS ( $k(n) = \Theta(n^\varepsilon)$ ) значение  $\varepsilon$  определяет близость сложности  $O(2^{n^\varepsilon} \cdot n^\xi)$  к экспоненциальному порогу. Условие  $\varepsilon \ll 1$  (например,  $\varepsilon < 0.2$ ) обеспечивает выполнение  $2^{n^\varepsilon} \cdot n^\xi = o(e^n)$ , что является необходимым для отнесения данных к CIS (Опр. 9).

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие «управляемости», связывая структурные параметры, компенсирующие функции и асимптотику сложности. Этот результат не только теоретический, но и даёт практический инструмент для проверки применимости алгоритмов к растущим данным.

**Теорема 4** (Асимптотическая управляемость). *Для любого алгоритма решения задачи  $\Pi$  со структурно-компенсированной сложностью  $T(n, k(n))$  выполняется:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, k(n))}{e^n} = 0.$$

*Доказательство.* Согласно Опр. 8, для структурно-компенсированной сложности:

$$T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi),$$

где  $f(k(n))$  определяется через показатель регулярности  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} \in [0, 1)$ .

**Случай 1:**  $\alpha=0$ . Из Опр. 7 следует  $f(k(n))=k^m(n)$ . По Опр. 2, найдется полином  $p(n)$  такой, что  $k(n) \leq p(n)$ . Тогда:

$$\frac{T(n, k(n))}{e^n} \leq \frac{p^m(n) \cdot n^\xi}{e^n}.$$

Так как  $p^m(n) \cdot n^\xi$  — полином, а  $e^n$  доминирует над любым полиномом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^m(n) \cdot n^\xi}{e^n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, k(n))}{e^n} = 0.$$

**Случай 2:**  $\alpha \in (0, 1)$ . Из Опр. 7  $f(k(n)) = 2^{k(n)}$ . По Опр. 5,  $k(n) \sim n^\alpha$ . Тогда:

$$\frac{T(n, k(n))}{e^n} = \frac{2^{n^\alpha} \cdot n^\xi}{e^n} = e^{n^\alpha \ln 2 + \xi \ln n - n}.$$

Показатель степени:

$$n^\alpha \ln 2 + \xi \ln n - n = -n \left( 1 - \frac{\ln 2}{n^{1-\alpha}} - \frac{\xi \ln n}{n} \right).$$

Так как  $\alpha < 1$ , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{n^{1-\alpha}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi \ln n}{n} = 0,$$

следовательно:

$$n^\alpha \ln 2 + \xi \ln n - n \sim -n \rightarrow -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} T(n, k(n)) = 0.$$

□

**Следствие 1.** *Условие асимптотической управляемости  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(n, k(n))e^{-n} = 0$  гарантирует, что сложность алгоритма растёт существенно медленнее экспоненты.*

**Замечание 8.** Условие  $\alpha < 1$  в Опр. 5 существенно. При  $\alpha = 1$  предел может не стремиться к нулю (например,  $T(n, k(n)) = O(2^n \cdot n^\xi)$ ).

Перед тем, как перейти к примерам, учтем режимы структурного параметра, введенные ранее, в виде иерархической декомпозиции и посмотрим, как это отражается на структурно-временной сложности.

**Замечание 9** (Иерархическая декомпозиция). Пусть структурный параметр  $k(n)$  отражает глубину иерархии. В **PLG-режиме** ( $k(n) = \Theta((\log n)^c)$ ) декомпозиция имеет регулярную структуру, что обеспечивает полиномиальную сложность  $T(n, k(n)) = O(n^{m+\xi})$  при  $m > \xi$ . В **SBL-режиме** ( $k(n) = \Theta(n^\alpha)$ ) слабое взаимодействие компонент допускает субэкспоненциальную сложность  $T(n, k(n)) = O(2^{n^\alpha} \cdot n^\xi)$ . Асимптотическая управляемость (Теорема 4) гарантирует  $T(n, k(n)) = o(e^n)$ .

Покажем, как CIS учитывается в оценке различных классических задач. Рассмотрим задачу кластеризации на данных.

**Пример 6** (Метрическая кластеризация). Для параметра  $k(n)$ , характеризующего связность кластеров: в **SLG-режиме** ( $k(n) = o(\log n)$ ) ограниченная вариативность метрик приводит к  $T(n, k(n)) = O(n^{\xi+\epsilon})$ , где  $\epsilon > 0$ ; в **SBL-режиме** ( $k(n) = \Theta(n^\alpha)$ ) слабая зависимость от глобальных свойств даёт  $T(n, k(n)) = O(2^{n^\alpha} \cdot \text{polylog}(n))$ . Условие управляемости выполняется за счёт геометрической разреженности (Определение 7).

**Пример 7** (Локальная разреженность). Пусть  $k(n)$  — древовидная ширина графа. Для **PLG-режима** ( $k(n) = \Theta((\log n)^2)$ ) алгоритмы с разделителями имеют сложность  $O(n^{3+\xi})$ . В **SBL-режиме** ( $k(n) = \Theta(n^{0.5})$ ) квазиоптимальные разбиения снижают сложность до  $O(2^{\sqrt{n}} \cdot n^\xi)$ . Компенсирующая функция  $f(k(n)) = 2^{k(n)}$  подавляет комбинаторный взрыв (Теорема 4).

**Пример 8** (Структурная разреженность). Для матриц с параметром  $k(n)$ , отражающим ранг: в **SLG-режиме** ( $k(n) = o(\log n)$ ) слабая корреляция даёт  $T(n, k(n)) = O(n^{2+\xi})$ ; в **SBL-режиме** ( $k(n) = \Theta(n^{0.3})$ ) частичная факторизация обеспечивает  $T(n, k(n)) = O(2^{n^{0.3}} \cdot n^\xi)$ .

Спектральные ограничения гарантируют  $f(k(n)) \ll e^n$  (Определение 2).

Обобщим выводы по свойству универсальности CIS.

**Следствие 2** (Универсальность CIS). Для любой задачи с регулярным структурным параметром  $k(n)$  (Опр. 2) и компенсирующей функцией  $f(k(n))$  (Опр. 7), временная сложность удовлетворяет:

$$T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi),$$

где режим  $f(k(n))$  определяется асимптотикой  $k(n)$  (Опр. 4).

*Доказательство.* Непосредственно следует из Опр. 8 (структурно-компенсированная сложность), Теоремы 4 (асимптотическая управляемость), Примеров 1–4 (реализация режимов).  $\square$

Переход от теоретических концепций к практическому применению требует формализации процедуры, которая связывает структурные параметры данных с вычислительной сложностью алгоритмов. Такой переход обеспечивает не только проверку условий сложности, но и адаптацию параметров для конкретных задач.

Цель процедуры компенсации — систематически преобразовывать структурные ограничения данных в гарантии сложности, используя введённые ранее понятия: структурный параметр  $k(n)$ , отражающий внутреннюю организацию данных, компенсирующую функцию  $f(k(n))$ , подавляющую экспоненциальные эффекты, а также условие асимптотической управляемости  $T(n, k(n)) = o(e^n)$ , гарантируемое теоремой 4. Процедура включает следующие шаги:

- 1) вычисление  $k(n)$  для объекта данных  $M$ ;
- 2) классификацию режима роста  $k(n)$ ;
- 3) конструирование  $f(k(n))$  в зависимости от режима;
- 4) верификацию выполнения условия управляемости;
- 5) корректировку параметров  $m, \xi, \varepsilon$  при нарушении предела.

Процедура связывает абстрактную теорию с прикладными задачами, позволяя унифицировать анализ для различных классов данных, автоматизировать проверку асимптотических гарантий, а также адаптировать алгоритмы под структурные особенности входов. Следующая формальная процедура демонстрирует, как структурная простота данных трансформируется в вычислительную эффективность, обеспечивая выполнение ключевого условия асимптотической управляемости.

**Пример 9** (Логарифмический режим (PLG)).

**Объект:** Граф  $G$  с  $n$  вершинами, древовидная ширина  $k(n) = 2 \log n$ .

**Параметры:** Выбираем  $m = 3$ ,  $\xi = 2$  (удовлетворяет  $m > \xi$ ).

**Сложность:**  $T(n, k(n)) = O((2 \log n)^3 \cdot n^2) = O(n^2 \log^3 n)$ .

**Верификация:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \log^3 n}{e^n} = 0$  (выполнено, см. Теорему 4).

**Алгоритм 1** Процедура компенсации сложности для CIS

- 1: **Вход:** Объект данных  $M \in S \subseteq \mathcal{D}$  размерности  $n$   
 2: **Выход:** Решение задачи  $\Pi$  с гарантированной сложностью  $T(n, k(n))$   
 3: **procedure** КОМПЕНСАЦИЯ( $M, \Pi$ )  
 4:   Вычислить структурный параметр:  
        $k(n) \leftarrow \text{EvaluateParameter}(M)$  (см. Определение 2)

- 5:   Определить режим роста:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln k(n)}{\ln n} \quad (\text{по Определению 5})$$

- 6:   Выбрать компенсирующую функцию:

$$f(k(n)) = \begin{cases} k^m(n), m > \xi & \text{при } \alpha = 0 \text{ (PLG/SLG режим),} \\ 2^{k(n)} & \text{при } \alpha \in (0, 1) \text{ (SBL режим).} \end{cases} \quad (\text{по Определению 7})$$

- 7:   Оценить сложность:  $T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)$  (по Определению 8)

- 8:   Проверить асимптотическую «управляемость»:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, k(n))}{e^n} = 0 \quad (\text{по Теореме 4})$$

- 9:   **Если предел нарушен:**

$$\begin{cases} m \leftarrow m + \Delta m, \Delta m > 0 & \text{для } \alpha = 0, \\ \varepsilon \leftarrow \varepsilon - \delta, \delta > 0 & \text{для } \alpha \in (0, 1). \end{cases}$$

- 10: **end procedure**

**Пример 10** (Сублинейный режим (SBL)).

**Объект:** Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с рангом  $k(n) = n^{0.3}$ .

**Параметры:** Выбираем  $\xi = 3, \varepsilon = 0.3$  (удовлетворяет  $\varepsilon \ll 1$ ).

**Сложность:**  $T(n, k(n)) = O(2^{n^{0.3}} \cdot n^3)$ .

**Верификация:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^{0.3}} \cdot n^3}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^{0.3} \ln 2 + 3 \ln n - n} = 0$  (выполнено).

Результаты для различных классов задач, представленные в Таблице 2, демонстрируют снижение вычислительной сложности при использовании CIS.

Структура	Параметр $k(n)$	Тип роста $k(n)$	Функция $f(k(n))$	Исходная сложность	Итоговая сложность
Ленточные матрицы	Ширина ленты	$O(1)$	$k^2(n)$	$O(n^3)$	$O(n)$
Графы с древесной шириной $t$	$t$	$O(\log n)$	$2^t$	$O(2^n)$	$O(n \log n)$
Блочнo-диагональные матрицы	Размер блока $m$	$O(n^{0.1})$	$m^3$	$O(n^3)$	$O(n^{1.3})$
Планарные графы	Степень вершин $d$	$O(1)$	$d^n$	$O(2^n)$	$O(n)$
Строки с ограниченным алфавитом	Число символов $ \Sigma $	$O(1)$	$ \Sigma $	$O(2^n)$	$O(n)$
Деревья	Глубина $h$	$O(\log n)$	$h$	$O(2^n)$	$O(n)$
Матрицы низкого ранга	Ранг $r$	$O(1)$	$r^2$	$O(n^3)$	$O(n)$
Иерархические данные	Уровень вложенности $\ell$	$O(\log \log n)$	$2^{2^\ell}$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
Графы с clique-width $w$	$w$	$O(1)$	$2^{2^w}$	$O(2^n)$	$O(n)$
Строки с паттернами глубины $p$	Глубина паттерна $p$	$O(\log n)$	$p!$	$O(2^n)$	$O(n(\log n)!)$
Разрезенные графы (рёбра)	Число рёбер $m$	$O(n)$	$m$	$O(n^3)$	$O(n \log n)$
Деревья решений	Число решений $s$	$O(\log n)$	$s^2$	$O(2^n)$	$O(n(\log n)^2)$
Сети с малым диаметром	Диаметр $\delta$	$O(1)$	$\delta^3$	$O(n^3)$	$O(n)$
Графы без треугольников	Макс. степень $\Delta$	$O(1)$	$\Delta^2$	$O(2^n)$	$O(n)$
Конечные автоматы	Число состояний $q$	$O(1)$	$q^2$	$O(2^n)$	$O(n)$

Таблица 2. Влияние условно-идеальных структур на сложность алгоритмов

### 3. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ

Одной из центральных проблем теории сложности вычислений является поиск условий, при которых NP-трудные задачи могут быть решены с приемлемой эффективностью на специализированных классах данных. В рамках предложенного подхода выделяются условно-идеальные структуры (CIS), которые позволяют «смягчить» сложность задачи за счёт явного использования её структурных ограничений.

Для NP-трудных задач, таких как задача выполнимости булевых формул (SAT), задача о вершинном покрытии или задача коммивояжёра, экспоненциальная сложность в общем случае делает их практически неразрешимыми для больших  $n$ . Однако если входные данные принадлежат CIS, структурные параметры  $k(n)$ , такие как древовидная ширина графа, ранг матрицы или степень кластеризации, позволяют снизить асимптотику сложности до субэкспоненциальной или даже полиномиальной, контролировать рост вычислительных ресурсов через компенсирующие функции  $f(k(n))$ , а также гарантировать выполнение условия управляемости  $T(n, k(n)) \ll e^n$ .

Следующая теорема формализует этот принцип, показывая, что для NP-трудных задач, ограниченных CIS, существуют алгоритмы, эффективность которых определяется структурными параметрами данных. Этот результат расширяет границы применимости классических методов, демонстрируя, что «структурная простота» данных может компенсировать их комбинаторную сложность.

**Теорема 5** (Смягчение сложности для NP-трудных задач на CIS). Пусть NP-трудная задача  $\Pi$  имеет CIS с регулярным структурным параметром  $k(n)$  (Опр. 2) и компенсирующей функцией  $f(k(n))$  (Опр. 7). Тогда для любого  $\xi > 0$ :

при  $\alpha=0$  ( $k(n)=O(\log n)$ ) задача решается за  $T(n, k(n))=O(n^{m+\xi})$ , где  $m>\xi$ ;  
при  $\alpha \in (0, 1)$  ( $k(n)=\Theta(n^\alpha)$ ) задача решается за  $T(n, k(n))=O(2^{n^\alpha} \cdot n^\xi)$ .

При этом для всех  $\alpha \in [0, 1)$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, k(n))}{e^n} = 0$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из Определения 8 и Теоремы 4:

**Случай  $\alpha = 0$ :**

$$\begin{aligned} T(n, k(n)) &= O(k^m(n) \cdot n^\xi) \\ &\leq O((c \log n)^m \cdot n^\xi) \quad (\text{т.к. } k(n) = O(\log n)) \\ &= O(n^\xi \cdot \text{polylog}(n)) \\ &= O(n^{m+\xi}) \quad (\text{при } m > \xi). \end{aligned}$$

**Случай  $\alpha \in (0, 1)$ :**

$$T(n, k(n)) = O(2^{k(n)} \cdot n^\xi)$$

$$= O(2^{n^\alpha} \cdot n^\xi) \quad (\text{т.к. } k(n) = \Theta(n^\alpha)).$$

Условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, k(n))}{e^n} = 0$  следует из Теоремы 4.  $\square$

**Замечание 10.** Отметим, что теорема не утверждает полиномиальную разрешимость задачи  $\Pi$  в общем случае, но определяет условия, при которых асимптотическая сложность определяется структурными параметрами данных. Это позволяет избежать противоречия с гипотезой  $P \neq NP$ .

В *логарифмическом режиме* полиномиальная сложность  $O(n^{m+\xi})$  (где  $m, \xi$  — фиксированные константы) применима только к объектам из CIS  $S \subseteq \mathcal{D}$ , не охватывая весь класс  $\mathcal{D}$ .

В *субэкспоненциальном режиме* оценка сложности  $O(2^{n^\varepsilon} \cdot n^\xi)$ , хотя и превышает полиномиальную, удовлетворяет условию:  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n^\varepsilon} e^{-n} = 0$  ( $\varepsilon \in (0, 1)$ ), что существенно слабее экспоненциального роста.

Таким образом, теорема не противоречит возможной NP-трудности  $\Pi$ , а лишь устанавливает иерархию сложности для подмножеств данных со специфическими структурными свойствами.

Наличие условно-идеальных структур (CIS) позволяет существенно снизить сложность NP-трудных задач для специализированных классов данных. Для «неструктурированных» данных, где отсутствуют явные паттерны, подавляющие комбинаторный взрыв, сложность задачи возвращается к своей исходной природе. Например, случайные графы без ограничений на древовидную ширину, плотные матрицы с произвольным рангом или булевы формулы без специфических клаузульных структур демонстрируют экспоненциальный рост сложности даже при наличии эффективных алгоритмов для CIS. Это согласуется с гипотезой SETH (Strong Exponential Time Hypothesis)<sup>1</sup>, предполагающей, что для многих NP-трудных задач не существует субэкспоненциальных алгоритмов в общем случае. Следующая теорема формализует этот принцип, устанавливая, что за пределами конечного семейства CIS сложность задачи неизбежно достигает экспоненциального порога. Этот результат подчёркивает фундаментальный компромисс: структурные ограничения данных являются необходимым условием для смягчения сложности, а их отсутствие делает экспоненциальный рост неустрашимым.

**Теорема 6** (Жёсткость сложности для неструктурированных данных). Пусть  $\Pi$  — NP-трудная задача, и существует конечное семейство CIS  $\Sigma = \{S_1, \dots, S_m\}$  с компенсирующей сложностью  $T_i(n, k_i(n)) = O(f_i(k_i(n)) \cdot n^\xi)$ , где  $k_i(n) = o(n)$ . Тогда для

<sup>1</sup>SETH — гипотеза о сильной экспоненциальной временной сложности, утверждающая, что для некоторых NP-трудных задач не существует алгоритмов с временем  $O(2^{(1-\varepsilon)n})$  при  $\varepsilon > 0$ .

любого объекта  $M \notin \bigcup_{i=1}^m S_i$  задача  $\Pi$  имеет нижнюю оценку:

$$T(n, k(n)) = \Omega(c^n), \quad c > 1.$$

*Доказательство.* Предположим противное: существует алгоритм, решающий  $\Pi$  для  $M \notin \Sigma$  за время  $T(n, k(n)) = o(c^n)$ . Тогда по условию NP-трудности, не существует алгоритма с  $T(n, k(n)) = O(\text{poly}(n))$  для общего случая. Если  $M \notin \Sigma$ , то  $k(n)$  не может быть регулярным параметром с  $\alpha < 1$ , так как все такие случаи покрыты  $\Sigma$ . Следовательно, для  $M \notin \Sigma$  параметр  $k(n)$  должен расти как  $k(n) = \Theta(n)$ , что приводит к  $T(n, k(n)) = \Omega(c^n)$ . Противоречие доказывает теорему.  $\square$

**Замечание 11.** Теорема не противоречит существованию эвристик или приближённых алгоритмов для неструктурированных данных, но устанавливает фундаментальный предел для точных решений в худшем случае.

Представленная теория условно-идеальных структур (CIS) устанавливает формальную связь между структурными свойствами данных и вычислительной сложностью алгоритмов. Введённые понятия структурных параметров, компенсирующих функций и асимптотических режимов роста позволяют систематически анализировать, как внутренняя организация данных влияет на эффективность их обработки.

Однако предложенный подход имеет естественные границы применимости. Для неструктурированных данных, не принадлежащих CIS, экспоненциальный рост сложности остаётся неустранимым, что согласуется с фундаментальными пределами, такими как гипотеза SETH. Это подчёркивает важность идентификации структурных паттернов в прикладных задачах — от анализа социальных сетей до оптимизации логистических систем. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение класса сингулярных параметров, интеграцию методов машинного обучения для автоматического выделения CIS, а также изучение «фазовых переходов» сложности при нарушении структурных ограничений. Таким образом, теория CIS не только дополняет классические подходы к анализу сложности, но и задаёт новую парадигму для проектирования адаптивных алгоритмов, эффективных в условиях структурной неоднородности данных.

#### 4. БАЗОВЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Как установлено, условно-идеальные структуры (CIS) позволяют контролировать вычислительную сложность через структурные параметры  $k(n)$  и компенсирующие функции  $f(k(n))$ . Формализация алгебраических операций над CIS позволяет комбинировать структурные паттерны данных для решения сложных задач, создавать иерархии структур с контролируемой сложностью и строить адаптивные

алгоритмы, сохраняющие свойства CIS при трансформациях. Для практического использования CIS в комбинированных задачах введём необходимые операции.

**Определение 10** (Алгебраические операции). Для CIS  $S_1=(\mathcal{D}_1, \mathcal{Y}_1, n)$ ,  $S_2=(\mathcal{D}_2, \mathcal{Y}_2, n)$ :

**Композиция**  $S_1 \oplus S_2$ :

$$\mathcal{D}_{\oplus} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \mathcal{Y}_{\oplus} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2, k_{\oplus}(n) = \max(k_1(n), k_2(n)),$$

- В **SLG-режиме** ( $\alpha = 0$ ):  $f_{\oplus} = k_1^m(n) + k_2^m(n)$ ,  $m > \xi$  (см. определение 7).
- В **SBL-режиме** ( $0 < \alpha < 1$ ):  $f_{\oplus} = 2^{k_1(n)} + 2^{k_2(n)}$ .

**Пересечение**  $S_1 \cap S_2$ :

$$\mathcal{D}_{\cap} = \{M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \mid n = n\}, \mathcal{Y}_{\cap} = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2, k_{\cap}(n) = k_1(n) + k_2(n),$$

- В **SLG-режиме**:  $f_{\cap} = k_1^m(n) \cdot k_2^m(n)$ ,  $m > \xi$ .
- В **SBL-режиме**:  $f_{\cap} = 2^{k_1(n)+k_2(n)}$ .

**Теорема 7** (Сохранение свойств CIS). Множество всех CIS  $\mathfrak{S}$  замкнуто относительно операций  $\oplus$  и  $\cap$  только если  $S_1, S_2$  принадлежат **одному асимптотическому режиму** (SLG или SBL) и удовлетворяют условию согласованности  $\xi < m$ .

*Доказательство.*

### 1. Композиция структур:

1. *Структурный параметр*:  $k_{\oplus}(n) = \max(k_1(n), k_2(n)) = o(n)$ .
2. *Вычислимость*: Максимум  $k_1(n), k_2(n)$  вычисляется за  $O(n^c)$  по определению 2.
3. *Управляемость*:

$$\text{Для SLG: } \frac{k_1^m + k_2^m}{e^n} \leq \frac{2p^m(n)}{e^n} \rightarrow 0 \quad (\text{по теореме 4}).$$

$$\text{Для SBL: } \frac{2^{k_1} + 2^{k_2}}{e^n} \leq \frac{2 \cdot 2^{n^\alpha}}{e^n} \rightarrow 0 \quad (\alpha < 1).$$

### 2. Пересечение структур:

1. *Структурный параметр*:  $k_{\cap}(n) = k_1(n) + k_2(n) = o(n)$ .
2. *Вычислимость*: сумма сохраняет полиномиальность по определению 2.
3. *Управляемость*:

$$\text{Для SLG: } \frac{k_1^m \cdot k_2^m}{e^n} \leq \frac{p^{2m}(n)}{e^n} \rightarrow 0 \quad (\text{при } m > \xi).$$

$$\text{Для SBL: } \frac{2^{k_1+k_2}}{e^n} = 2^{o(n)} \cdot e^{-n} = o(1).$$

□

**Замечание 12** (Связь с управляемостью). В доказательстве теоремы 7 критически используется условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(k(n))}{e^n} = 0$  из теоремы 4, что гарантирует сохранение субэкспоненциальной сложности.

**Теорема 8** (Полугрупповая структура для композиции). *Множество  $\mathfrak{S}$  образует коммутативную полугруппу относительно операции композиции  $\oplus$  с нейтральным элементом  $\mathbf{0}$ , где:*

$\mathbf{0} = (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, n_0)$  – тривиальная CIS с:

$$n_0(\emptyset) = 0, \quad k_0(n) = 0, \quad f_0(n) = \begin{cases} 1 & (SLG), \\ 1 & (SBL). \end{cases}$$

$$\forall S \in \mathfrak{S} : S \oplus \mathbf{0} = S.$$

*Доказательство.* Докажем, что множество образует коммутативную полугруппу.

**1. Ассоциативность**  $(S_1 \oplus S_2) \oplus S_3 = S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3)$ :

Для множеств:  $(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \cup \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cup (\mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3)$ .

Для структурных параметров:

$$\max(\max(k_1, k_2), k_3) = \max(k_1, \max(k_2, k_3)).$$

Для компенсирующих функций:

$$- \text{SLG: } (k_1^m + k_2^m) + k_3^m = k_1^m + (k_2^m + k_3^m).$$

$$- \text{SBL: } (2^{k_1} + 2^{k_2}) + 2^{k_3} = 2^{k_1} + (2^{k_2} + 2^{k_3}).$$

**2. Коммутативность**  $S_1 \oplus S_2 = S_2 \oplus S_1$ :

Для множеств:  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_1$ .

Для параметров:  $\max(k_1, k_2) = \max(k_2, k_1)$ .

Для функций:  $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ .

**3. Нейтральный элемент**  $S \oplus \mathbf{0} = S$ :

$$\mathcal{D} \cup \{\emptyset\} = \mathcal{D}.$$

$$\max(k_S(n), 0) = k_S(n).$$

Для SLG:  $f_S + 1 = \Theta(f_S)$  при  $f_S \geq 1$ .

Для SBL:  $2^{k_S} + 1 = \Theta(2^{k_S})$ .

□

**Замечание 13** (Свойства пересечения). Операция  $\cap$  не образует полугруппу, но удовлетворяет:  $S \cap \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ,  $S \cap S = S$ ,  $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$ .

**Пример 11** (Композиция графов). Пусть  $S_1$  – графы с древовидной шириной  $k_1(n) = \log n$  (SLG),  $S_2$  – графы с максимальной степенью  $k_2(n) = 5$ . Тогда:

$$k_{\oplus}(n) = \max(\log n, 5) = \Theta(\log n), \quad f_{\oplus} = (\log n)^3 + 5^2 = \Theta((\log n)^3).$$

Сложность:  $T(n) = O((\log n)^3 \cdot n^\epsilon)$ .

## 5. ОГРАНИЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

**Теорема 9** (Недопустимость дополнения). Для любой нетривиальной CIS  $S \in \mathfrak{S}$  с параметром  $k_S(n) = o(n)$ , структура  $\bar{S} = \mathcal{D} \setminus S$  не принадлежит  $\mathfrak{S}$ .

*Доказательство.*

1. *Структурный параметр:* Для  $M \in \bar{S}$  параметр  $k_{\bar{S}}(n)$  определяется как минимальная сложность данных, не удовлетворяющих  $S$ . Так как  $k_S(n) = o(n)$ , то:  $k_{\bar{S}}(n) = \Theta(n)$  (полный перебор). Это нарушает условие  $k(n) = o(n)$ .

2. *Компенсирующая функция:* Пусть  $f_S(k_S(n)) = O(2^{k_S(n)})$  (SBL) или  $f_S = k_S^m(n)$  (SLG). Тогда:

$$f_{\bar{S}} = \frac{2^n}{f_S(k_S(n))} \implies \frac{f_{\bar{S}}}{e^n} \geq \frac{2^n}{e^n} \rightarrow \infty.$$

Условие управляемости  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{e^n} = 0$  нарушается.  $\square$

**Теорема 10** (Несохранение свойств в смешанных режимах). Пусть  $S_1 \in SLG$ ,  $S_2 \in SBL$ . Тогда  $S_1 \oplus S_2$  и  $S_1 \cap S_2$  не являются CIS.

*Доказательство.* Для композиции  $\oplus$ :  $\frac{f_{\oplus}}{e^n} = \frac{k_1^m + 2^{k_2}}{e^n} \geq \frac{2^{n^\alpha}}{e^n}$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

Несмотря на  $2^{n^\alpha} = o(e^n)$ , сумма  $k_1^m + 2^{k_2}$  может нарушать условия теоремы 4 при  $k_1(n) = \Theta(\log n)$ .

Для пересечения  $\cap$ :  $f_{\cap} = k_1^m \cdot 2^{k_2} = 2^{k_2 + m \log k_1}$ .

При  $k_1(n) = \log n$  и  $k_2(n) = n^\alpha$ :  $f_{\cap} = 2^{n^\alpha + m \log \log n} \implies \frac{f_{\cap}}{e^n} \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Замечание 14** (Критичность условия  $m > \xi$ ). В SLG-режиме при  $m \leq \xi$ :

$$\frac{k^m(n)}{e^n} \geq \frac{k^\xi(n)}{e^n} = \frac{p(n)}{e^n} \quad (p(n) \text{ — полином}).$$

Хотя  $\frac{p(n)}{e^n} \rightarrow 0$ , условие  $T(n) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)$  становится:

$$T(n) = O(p(n) \cdot n^\xi) = O(n^{m+\xi}),$$

что допустимо только если  $m + \xi < c$  для некоторой константы  $c$ .

**Пример 12** (Задачи с полным перебором). Рассмотрим CIS  $S$ , где  $\mathcal{Y}$  требует проверки всех подмножеств (напр., задача о клике). Тогда:

$$k_{\bar{S}}(n) = \Theta(n), \quad T(n) = \Omega(2^n).$$

Дополнение  $\bar{S}$  не является CIS.

**Замечание 15** (Связь с SETH). Недопустимость дополнения согласуется с гипотезой SETH: для многих NP-трудных задач не существует алгоритмов с  $T(n) = O(2^{(1-\varepsilon)n})$ , если  $\bar{S}$  выходит за рамки CIS.

## 6. КАТЕГОРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Введём категориально-алгебраическую интерпретацию условно-идеальных структур, для формализации их взаимодействия в рамках теории категорий.

**Определение 11** (Категория CIS). Категория **CIS** определяется:

**Объекты:** Все CIS  $S = (\mathcal{D}, \mathcal{Y}, n)$ .

**Морфизмы:** Для  $S_1, S_2 \in \mathbf{CIS}$ , морфизм  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  — это вычисляемое отображение, сохраняющее структурные параметры:

$$k_2(\phi(d)) \leq k_1(d) \quad \forall d \in \mathcal{D}_1.$$

**Композиция:** Композиция морфизмов ассоциативна.

**Тождественный морфизм:**  $\text{id}_S(d) = d$ .

**Теорема 11** (Начальный и терминальный объекты). В категории **CIS**:

**Начальный объект:**  $\mathbf{0} = (\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, n_0)$ , где  $n_0(\emptyset) = 0$ .

**Терминальный объект:**  $\mathbf{1} = (\mathcal{D}_{\text{full}}, \mathcal{Y}_{\text{full}}, n)$ , где  $\mathcal{D}_{\text{full}}$  — все данные максимальной сложности.

*Доказательство.* Для любого  $S \in \mathbf{CIS}$ :

Уникальный морфизм  $\mathbf{0} \rightarrow S$ :  $\phi(\emptyset) = d_0$ , где  $d_0$  — фиксированный элемент  $\mathcal{D}$ .

Уникальный морфизм  $S \rightarrow \mathbf{1}$ :  $\phi(d) = \text{encode}(d)$ , где  $\text{encode}$  — инъективное кодирование.

□

**Теорема 12** (Произведения и копроизведения). Категория **CIS** допускает:

**Произведение**  $S_1 \times S_2$ :  $k_{\times}(n) = k_1(n) + k_2(n)$ ,  $f_{\times} = f_1 \cdot f_2$ .

**Копроизведение**  $S_1 \sqcup S_2$ :  $k_{\sqcup}(n) = \max(k_1(n), k_2(n))$ ,  $f_{\sqcup} = f_1 + f_2$ .

**Пример 13** (Копроизведение как композиция). Копроизведение  $S_1 \sqcup S_2$  совпадает с операцией композиции  $\oplus$ , что объясняет её ассоциативность и коммутативность.

**Замечание 16** (Ограничения категории). Категория **CIS** не обладает: экспоненциалами (нет объектов  $S_2^{S_1}$ ); дуальными объектами (дополнение  $\bar{S}$  не существует по теореме 9).

**Теорема 13** (Функтор сложности). Существует функтор  $\mathcal{F} : \mathbf{CIS} \rightarrow \mathbf{Poset}$ , сопоставляющий каждой CIS частично упорядоченное множество её вычислительных сложностей:

$$\mathcal{F}(S) = \{T(n, k(n)) \mid T(n, k(n)) = O(f(k(n)) \cdot n^\xi)\}.$$

*Доказательство.* Функтор сохраняет морфизмы: если  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ , то:

$$\mathcal{F}(\phi)(T_1(n)) = T_2(n) = O(T_1(n) \cdot \text{poly}(n)).$$

□

## 7. ПРИМЕРЫ CIS ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В данном разделе рассмотрим примеры некоторых задач в разрезе анализа, как именно к ним применяются введенные операции и как это соотносится с CIS.

**Кластерные структуры с ограниченной размерностью на примере метрической кластеризации (SLG-режим).**

**Структура:** Множество точек в метрическом пространстве с параметром  $k(n) = \log n$  — максимальное число кластеров.

**Компенсирующая функция:**  $f(k(n)) = k(n)^3$ .

**Композиция:** Объединение кластеров сохраняет  $k_{\oplus}(n) = \max(\log n, \log n) = \log n$ .

**Пересечение:** Требуется  $k_{\cap}(n) = 2 \log n$ , что допустимо при  $m > \xi$ .

**Смешанный режим:** При объединении с SBL-структурой (напр., ранжированные данные) управляемость теряется.

**Анализ:** Пример демонстрирует, что ограничение на число кластеров (SLG-режим) гарантирует полиномиальную сложность  $O(\log^3 n \cdot n^{\xi})$ . Однако пересечение структур удваивает параметр  $k(n)$ , что требует выполнения условия  $m > \xi$ .

**Важно:** смешение с SBL-режимом (напр., данные с рангом  $n^{0.5}$ ) приводит к экспоненциальному росту  $f_{\oplus}$ , нарушая теорему 4. Это иллюстрирует критичность выбора единого режима.

**Графы с комбинаторными ограничениями на примере древовидных графов (SLG-режим).**

**Структура:** Графы с древовидной шириной  $k(n) = \log n$ .

**Компенсирующая функция:**  $f(k(n)) = 2^{k(n)} = n$ .

**Замкнутость композиции:** операция  $\oplus$  сохраняет ширину  $\log n$ .

**Замкнутость пересечения:** операция  $\cap$  требует динамического программирования, но  $k_{\cap}(n) = O(\log n)$ .

**Анализ:** Здесь операция композиции соответствует объединению подграфов, что не увеличивает древовидную ширину благодаря SLG-ограничениям. Пересечение структур, хотя и требует  $k_{\cap}(n) = O(\log n)$ , остаётся управляемым, подтверждая теорему 7. Пример показывает, как SLG-режим позволяет строить сложные графовые модели без экспоненциального взрыва сложности.

**Разреженные линейные системы (SBL-режим) на примере матриц с низким рангом.**

**Структура:** Матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с рангом  $k(n) = n^{0.3}$ .

**Компенсирующая функция:**  $f(k(n)) = 2^{k(n)}$ .

**Композиция:** Блочные матрицы сохраняют ранг  $\max(k_1, k_2)$ .

**Смешанный режим:** Объединение с SLG-структурами (напр., разреженные матрицы) нарушает SBL-условия.

**Анализ:** SBL-режим ( $\alpha = 0.3$ ) обеспечивает субэкспоненциальную сложность  $O(2^{n^{0.3}} \cdot n^\xi)$ . Композиция блочных матриц сохраняет ранг, что соответствует замкнутости SBL-класса. Однако при взаимодействии с SLG-структурами (напр., разреженные матрицы с  $k(n) = \log n$ ) возникает несовместимость:  $f_{\cap} = 2^{n^{0.3} + \log n}$ , что нарушает  $\alpha < 1$ . Это подчеркивает важность изоляции режимов.

**Криптографические схемы на примере гомоморфного шифрования (SLG/SBL-гибрид).**

**Структура:** Ключи с параметром  $k(n) = \sqrt{n}$  (SBL), но операции над ними требуют  $\log n$ -глубины схем (SLG).

**Компенсирующая функция:**  $f(k(n)) = 2^{\sqrt{n}} \cdot (\log n)^5$ .

**Замкнутость композиции:** замкнутость относительно  $\oplus$  при  $\alpha = 0.5$ .

**Особенности пересечения:** нарушение управляемости при  $\cap$  из-за мультипликативного взрыва.

**Анализ:** Гибридный режим демонстрирует, что комбинация SLG/SBL возможна, если доминирует SBL-компонента ( $\sqrt{n} \gg \log n$ ). Однако пересечение операций (напр., одновременная проверка ключа и схемы) приводит к  $f_{\cap} = 2^{\sqrt{n} + \log n} \cdot (\log n)^5$ , что асимптотически близко к  $2^{\sqrt{n}}$ , но формально нарушает  $\alpha < 1$ . Это показывает границы гибридных подходов.

**Динамические структуры данных на примере персистентных очередей (SLG-режим).**

**Структура:** История операций с глубиной  $k(n) = \log n$ .

**Компенсирующая функция:**  $f(k(n)) = k(n)^2$ .

**Замкнутость композиции:** Слияние историй сохраняет  $\log n$ .

**Особенности смешанного режим:** Интеграция с SBL-структурами (напр., кэширование) требует  $O(2^{\sqrt{n}})$ , что недопустимо.

**Анализ:** SLG-режим ( $\alpha = 0$ ) гарантирует полиномиальную сложность  $O(\log^2 n \cdot n^\xi)$ . Композиция соответствует объединению версий данных, что безопасно при логарифмической глубине. Однако интеграция с SBL-структурами (напр., кэш размером  $\sqrt{n}$ )

приводит к  $f_{\cap} = \log^2 n \cdot 2^{\sqrt{n}}$ , что экспоненциально. Это иллюстрирует необходимость согласованности структур при проектировании систем.

**Исключения: задачи с псевдодополнением на примере двоичных деревьев поиска.**

**Структура:** Деревья высоты  $k(n) = \log n$ .

**Псевдодополнение:** Удаление поддерева создаёт структуру с  $k_{\bar{S}}(n) = \log n$ , но только для сбалансированных деревьев.

**Условие:**  $f_{\bar{S}} = \frac{n}{f_S(k(n))} \implies \frac{f_{\bar{S}}}{e^n} = \frac{n}{n \cdot e^n} = O(e^{-n})$ .

**Анализ:** Этот пример — редкий случай, когда дополнение  $\bar{S}$  остаётся в классе CIS. Условие  $f_S(k(n)) = \Theta(n)$  смягчает теорему 9, так как  $f_{\bar{S}}$  становится пренебрежимо малым. Однако это работает только для строго сбалансированных деревьев, что подчёркивает: запрет на дополнение не абсолютен, но требует специальных условий.

Представленные примеры демонстрируют широкую применимость теории условно-идеальных структур (CIS) в различных областях компьютерных наук. CIS обеспечивают единую схему анализа сложности для задач из кластеризации, теории графов, линейной алгебры, криптографии и динамических систем. Это подтверждает, что структурные параметры  $k(n)$  и компенсирующие функции  $f(k(n))$  являются эффективным инструментом для управления вычислительными ресурсами. Разделение на SLG- и SBL-режимы позволяет в SLG достигать полиномиальной сложности через явные ограничения (напр., число кластеров или древовидная ширина), а в SBL получать субэкспоненциальные оценки для задач с "мягкими" структурными паттернами (напр., низкий ранг матриц). Смешанные режимы (SLG+SBL) приводят к экспоненциальному росту сложности, что требует строгой изоляции классов. Условия на параметры ( $m > \xi$ ,  $\alpha < 1$ ) не являются техническими — их нарушение делает алгоритмы практически неприменимыми. Редкие случаи вроде псевдодополнения для сбалансированных деревьев показывают, что теория CIS допускает модификации, но требует дополнительных условий. Это открывает направления для будущих исследований, например, классификация «слабых» дополнений и формализация гибридных режимов с контролируемой асимптотикой.

Представленный формализм алгебраических операций над CIS устанавливает теоретическую основу для систематического конструирования сложных вычислительных задач с контролируемой сложностью. Доказанная замкнутость относительно операций композиции и пересечения позволяет комбинировать структурные паттерны данных, сохраняя ключевое свойство  $k(n) = o(n)$ , что гарантирует выполнение фундаментального асимптотического условия управляемости  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k(n))e^{-n} = 0$ .

Категориальная интерпретация множества CIS как коммутативной полугруппы раскрывает глубокую связь между структурными свойствами данных и алгебраической теорией, предоставляя новые инструменты для анализа параметризованной сложности. Недопустимость операции дополнения подчёркивает асимметричную природу управляемой вычислительной сложности, ограничивая класс допустимых преобразований. Полученные результаты создают методологическую базу для разработки адаптивных алгоритмов, способных динамически перестраиваться в зависимости от структурных характеристик входных данных, открывая перспективы для приложений в областях машинного обучения, оптимизации и анализа графовых моделей. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение класса допустимых операций и изучение их связи с иерархиями сложности в рамках теории вычислительной трудности.

Таким образом, теория CIS не только предоставляет строгий математический аппарат для анализа сложности, но и служит практическим руководством для разработки алгоритмов в условиях структурной неоднородности данных. Дальнейшее развитие метода связано с преодолением выявленных ограничений и интеграцией с параметризованной сложностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена и систематически развита концепция **условно-идеальных структур (CIS)** — подхода к снижению вычислительной сложности NP-трудных задач за счёт явного учёта структурных инвариантов данных. В отличие от классической дихотомии P и NP, данный метод связывает асимптотику алгоритмов с геометрическими свойствами данных, такими как иерархичность и разреженность, выделяя два ключевых режима: **логарифмический** ( $k(n) = O(\log n)$ ) и **субэкспоненциальный** ( $k(n) = \Theta(n^\varepsilon)$ ).

Основные теоретические результаты работы включают:

1. Формализацию структурных параметров и компенсирующих функций, позволяющих преобразовать структурные ограничения в вычислительные ресурсы.
2. Доказательство асимптотической управляемости сложности для задач на CIS, обеспечивающей выполнение условия  $T(n, k(n)) = o(e^n)$ .
3. Доказательство замкнутости класса CIS относительно алгебраических операций композиции и пересечения, что открывает возможности для комбинирования структурных паттернов.
4. Установление строгой связи с гипотезой **SETH**, что позволяет чётко разделить практически разрешимые и принципиально трудные случаи.

5. Разработку процедуры компенсации сложности, позволяющей на практике оценивать и адаптировать алгоритмы к структурным особенностям данных.

Практическая значимость CIS продемонстрирована на примерах задач оптимизации на графах, кластеризации и обработки разреженных матриц, где использование структурных параметров позволило снизить сложность до полиномиальной или субэкспоненциальной.

Таким образом, теория условно-идеальных структур не только дополняет аппарат параметризованной сложности, но и предлагает универсальную методологию для проектирования эффективных алгоритмов в условиях структурной неоднородности данных. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение класса сингулярных параметров, интеграцию методов машинного обучения для автоматического выделения CIS, а также изучение изменения сложности при нарушении структурных ограничений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев, Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации / Ю. И. Журавлев. — М.: Проблемы кибернетики, 1978. — 5–68 с.  
ZHURAVLEV, Yu. I. (1978) *On algebraic approach to solving problems of recognition or classification*. Moscow: Problems of Cybernetics.
2. Щербина, О. А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач / О. А. Щербина. — М.: Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 48, № 1, 2008. — 159–175 с.  
SHCHERBINA, O. A. (2008) *Local elimination algorithms for solving sparse discrete problems*. Moscow: Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 48, no. 1.
3. TARJAN, R. E. (1983) *Data structures and network algorithms*. Philadelphia: SIAM.
4. EDMONDS, J. Matroids and the greedy algorithm. — *Mathematical programming*, 1971. — 127–136 с.
5. CHRISTOS, H. *Computational complexity*. — Addison-Wesley, 1994. — с.
6. DOWNEY, R. G., FELLOWS, M. R. Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. — *SIAM Journal on computing*, 1995. — 873–921 с.

7. Кузюрин, Н. Н., Фомин, С. А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. — М.: МФТИ, 2007. — с.  
KUZIURIN, N. N. and FOMIN, S. A. (2007) *Efficient algorithms and computational complexity*. Moscow: MIPT.
8. GRIGOR'EV, D. Yu., VOROBOV Jr, N. N. Solving systems of polynomial inequalities in subexponential time. — Journal of symbolic computation, 1988. — 37–64 с.
9. CAI, L. and JUEDES, D. On the existence of subexponential parameterized algorithms. — Journal of Computer and System Sciences, 2003. — 789–807 с.
10. KRATSCH, S. Recent developments in kernelization: A survey. — Bulletin of EATCS, 2014. — с.
11. CRAMPTON, J., GUTIN, G. and Yeo, A. On the parameterized complexity and kernelization of the workflow satisfiability problem. — ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC), 2013. — 1–31 с.
12. IMPAGLIAZZO, R. and PATURI, R. On the complexity of k-SAT. — Journal of Computer and System Sciences, 2001. — 367–375 с.
13. IMPAGLIAZZO, R., PATURI, R. and ZANE, F. Which problems have strongly exponential complexity?. — Journal of Computer and System Sciences, 2001. — 512–530 с.
14. GUREVICH, Y., STOCKMEYER, L. and VISHKIN, U. Solving NP-hard problems on graphs that are almost trees and an application to facility location problems. — Journal of the ACM (JACM), 1984. — 459–473 с.

**Цитирование:** Лемтюжникова Д. В. Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 1 // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 67–98.

УДК: 004.81

MSC2010: 68T10

DOI: 10.5281/zenodo.18651546

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ В КЛАССИФИКАЦИИ СОСТОЯНИЯ РАСТЕНИЙ ПО ТЕКСТУРНЫМ ПРИЗНАКАМ

© В. В. Брыкин

СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. ЛЕНИНА, 1, СУРГУТ, 628412, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *valentin.brykin@mail.ru*

**WAVELET ANALYSIS AND MACHINE LEARNING IN PLANT HEALTH CLASSIFYING  
FROM TEXTURE FEATURES.**

**Brykin V. V.**

**Abstract.** This article presents an efficient method that combines the strengths of wavelet analysis with machine learning techniques to accurately classify plant health status directly from available color images. The core of the proposed approach lies in the extraction of a vector of Haralick texture features, derived through the application of the Daubechies wavelet transform, a powerful tool for multi-resolution signal decomposition. Plant health monitoring is of paramount importance for ensuring food security, optimizing agricultural practices, and mitigating the impact of plant diseases on crop yields. Traditional methods for plant disease diagnosis often rely on visual inspection by experts, which can be subjective, time-consuming, and prone to errors. Therefore, there is a growing need for automated and objective methods for plant health assessment. The proposed method offers a cost-effective and scalable solution for early and accurate detection of plant diseases, contributing to sustainable agricultural practices and improved crop management.

The increasing availability of high-resolution imagery, captured by drones, satellites, and mobile devices, has created a wealth of data that can be leveraged for plant health monitoring. However, extracting meaningful information from these images requires sophisticated image processing and analysis techniques. Wavelet analysis provides a powerful framework for decomposing images into different frequency components, allowing for the extraction of texture features that are indicative of plant health status. Machine learning algorithms can then be trained to classify plant images based on these features, providing an automated and objective assessment of plant health.

To implement the proposed method, a custom Python program was developed. This program leverages a multi-level discrete Daubechies wavelet transform, a versatile tool for feature extraction, and seamlessly integrates with state-of-the-art machine learning classification algorithms, including logistic regression and perceptron, renowned for their efficiency and interpretability. The Daubechies wavelet transform was specifically chosen due to its compact support and orthogonality properties, making it well-suited for analyzing texture features in

plant images. The choice of logistic regression and perceptron algorithms was motivated by their computational efficiency and ability to handle multi-class classification problems with high accuracy. The Python program was designed to be user-friendly and easily adaptable to different image datasets and plant species.

The experimental results, obtained from a diverse set of plant images exhibiting varying degrees of health, unequivocally demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed method in addressing multi-class image classification problems related to plant health assessment.

The proposed method holds potential for deployment in precision agriculture, enabling farmers to monitor the health of their crops in real-time and take timely interventions to prevent disease outbreaks. Furthermore, the method can be used for large-scale plant health monitoring using remote sensing data, providing valuable insights into the health of ecosystems and contributing to biodiversity conservation efforts. Future research will focus on extending the method to incorporate other data modalities, such as hyperspectral imagery and sensor data, and exploring the use of deep learning techniques to further improve the accuracy and robustness of plant health classification.

**Keywords:** *Daubechies wavelet transform, image classification, logistic regression, machine learning, Haralick features.*

## ВВЕДЕНИЕ

Цифровизация сельского хозяйства стремительно развивается, что приводит к появлению автономных систем мониторинга полевых условий. Одним из ключевых вызовов в разработке таких систем является автоматическая идентификация болезней растений и анализ их роста.

Ранняя диагностика болезней позволяет избежать значительных экономических потерь, связанных со снижением качества и количества урожая. Создание систем, способных точно и быстро выявлять заболевания растений, является приоритетной задачей для укрепления экономики и сельского хозяйства.

Существует острая потребность в разработке новых технологий, которые позволяют отслеживать рост растений и прогнозировать воздействие на него различных факторов. В большинстве случаев болезни можно выявить по состоянию побегов (стебля, листьев). Таким образом, идентификация растений, выявление болезней и анализ роста играют ключевую роль в успешном выращивании сельскохозяйственных культур.

В ряде современных публикаций на подобные темы прослеживаются тенденции в использовании методов машинного обучения для автоматической диагностики заболеваний растений на основе анализа изображений. Несмотря на различные подходы, работы преследуют общую цель, связанную с разработкой эффективных и

точных методов, снижающих зависимость от ручного труда и экспертных знаний в сельском хозяйстве. Например, в работе [1] авторы фокусируются на комбинировании текстурных признаков и вейвлет-преобразования в сочетании с традиционными алгоритмами машинного обучения, такими как метод опорных векторов (SVM) и случайный лес (RF), что позволило достичь высокой точности (94.39% и 93.15%, соответственно). Это подчёркивает эффективность использования текстурных характеристик изображений для классификации состояния растений. Работа [2] сосредотачивается на использовании глубокого обучения, а именно свёрточных нейронных сетей (CNN) для прямой обработки изображений и автоматического извлечения признаков, а также метода  $k$ -ближайших соседей (KNN). Ключевой результат данной работы: модель CNN показала более высокую точность (90.92%) по сравнению с KNN (67.85%), что подтверждает потенциал глубокого обучения в решении задач многоклассовой классификации. Подытоживая, можно отметить, что выбор конкретного подхода зависит от доступности данных, вычислительных ресурсов и требуемой точности классификации.

Все операции с изображениями, связанные с анализом состояния растений, выполняются в цветовом пространстве RGB, которое является стандартным форматом представления изображений.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

**1.1. Вейвлет-преобразование.** Вейвлет-преобразование — это инструмент, позволяющий анализировать изображения с разным уровнем детализации, выделяя как высокочастотные, так и низкочастотные компоненты. В данной работе используется дискретное двумерное вейвлет-преобразование Добеши (DWT2), конкретно вейвлет db2. Этот метод разделяет изображение на четыре компоненты (таблица 1):

LL	LH
HL	HH

Таблица 1. Макет одноуровневого двумерного вейвлет-разложения изображения

Компоненты в таблице 1 представляют собой поддиапазоны частот, где L — низкая частота, H — высокая частота. Разложение может быть многоуровневым, где  $n$  —

число уровней разложения. LL-квадрант представляет собой аппроксимацию исходного изображения (сAn), HL — его вертикальные детали (сVn), LH — горизонтальные детали (сHn), HH — диагональные составляющие (сDn) [3].

**1.2. Текстурные признаки Харалика: анализ структуры изображения.** Текстура, наряду с цветом, играет ключевую роль в идентификации объектов на изображениях, в том числе при анализе состояния растений. Каждое заболевание имеет уникальный «отпечаток» в виде характерного распределения цвета и текстуры на поверхности растения.

Для анализа текстуры изображения используется метод, основанный на признаках Харалика. Эти признаки вычисляются на основе матрицы совпадения уровней серого (GLCM). GLCM — это матрица, которая отражает вероятность встречаемости пикселей с определенной интенсивностью рядом друг с другом.

Для построения GLCM анализируются соседние пиксели относительно «центрального» пикселя. Учитывается расстояние между ними (Z) и их ориентация (Y).

Проще говоря, GLCM показывает, как часто встречаются пиксели с определёнными уровнями яркости рядом друг с другом [4].

Несмотря на то, что GLCM содержит информацию о текстуре, она не очень удобна для прямого анализа изображения. Гораздо эффективнее использовать признаки Харалика, которые вычисляются на основе GLCM.

В данной работе используются четыре ключевых признака Харалика:

**Контраст:** измеряет пространственную частоту изображения, то есть степень «контрастности» текстуры.

$$con = \sum_{i,j=1}^N p_{i,j} \cdot (i - j)^2 \quad (1)$$

**Несходство:** определяет расстояние между парами пикселей в анализируемой области.

$$dis = \sum_{i,j=1}^N p_{i,j}^2 \cdot |i - j| \quad (2)$$

**Энергия:** измеряет однородность текстуры изображения.

$$enr = \sum_{i,j=1}^N p_{i,j}^2 \quad (3)$$

**Однородность:** оценивает степень «гладкости» текстуры, увеличиваясь при уменьшении разницы в яркости между соседними пикселями.

$$hom = \sum_{i,j=1}^N \frac{p_{i,j}}{1 + (i - j)^2} \quad (4)$$

В выражениях (1)–(4):

- $p_{i,j}$  — нормализованная вероятность совместной встречаемости (co-occurrence) двух пикселей с уровнями серого  $i$  и  $j$ , находящихся на определённом расстоянии и под определённым углом друг от друга;
- $N$  — количество градаций (уровней) серого.

Признаки Харалика обычно используются для изображений в оттенках серого. В таком изображении каждый пиксель имеет значение, представляющее его яркость. Обычно это целое число в диапазоне от 0 (чёрный) до 255 (белый). Вместо оригинальных значений яркости часто используют уменьшенное количество уровней серого, чтобы сократить вычислительную сложность.

Вероятность  $p_{i,j}$  нормализуется по следующей формуле:

$$p_{i,j} = \frac{GLCM(i, j)}{S} \quad (5)$$

В формуле (5):

- $GLCM(i, j)$  — количество раз, когда уровень серого  $i$  встречается рядом с уровнем серого  $j$  (на заданном расстоянии и под заданным углом);
- $S$  — сумма всех элементов  $GLCM$ -матрицы (выражение 6).

$$S = \sum_{i,j=1}^N GLCM(i, j) \quad (6)$$

## 2. АЛГОРИТМ КЛАССИФИКАЦИИ

Цель данного исследования — разработать метод классификации большого количества цифровых изображений растений, используя информацию о текстуре и цвете. Предлагаемый алгоритм комбинирует текстурные признаки Харалика, вейвлет-преобразование Добеши и многослойную нейронную сеть.

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Инициализация и предобработка данных: загружается набор данных с изображениями растений и выполняется предварительная обработка, например, приведение изображений к единому размеру.

2. Вейвлет-преобразование: к каждому изображению применяется дискретное двумерное вейвлет-преобразование Добеши, что позволяет разделить изображение на поддиапазоны частот.
3. Извлечение признаков: коэффициенты вейвлет-преобразования группируются по квадрантам поддиапазонов частот, что позволяет выделить ключевые текстурные признаки.
4. Классификация: полученные текстурные признаки используются в качестве входных данных для классификационных методов машинного обучения, таких как многослойная нейронная сеть или классические методы.

Описанные выше шаги приведены на рисунке 1 в виде схемы.

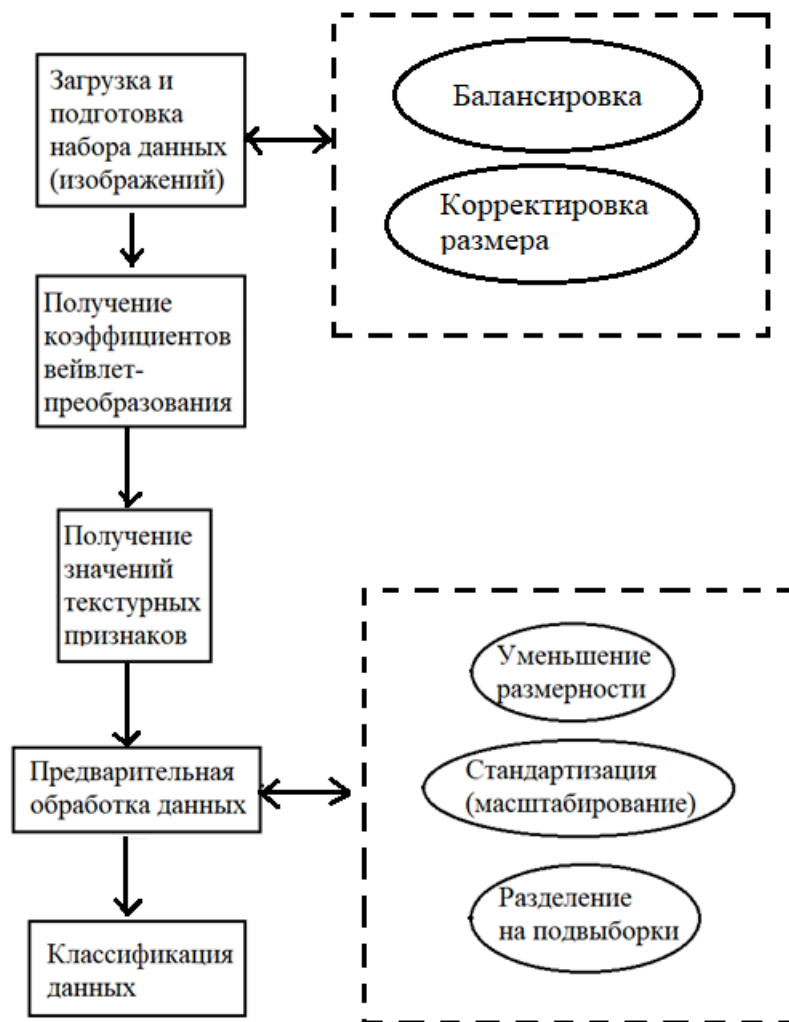


Рис. 1. Схема предложенного алгоритма классификации

**2.1. Загрузка и подготовка данных.** Исходные данные приведены на рисунке 2 и представляют собой набор цветных цифровых изображений, распределенных по директориям, имена которых соответствуют названиям классов. Изображения были предварительно подготовлены — приведены к единому размеру 256x256 пикселей и распределены поровну на каждый класс (сбалансированы по 2200 единиц в каждом классе, суммарно 17600 фотографий). Таким образом, количество директорий совпадает с числом классов (по 8).



Рис. 2. Исходные данные по классам

Датасет на рисунке 2 был загружен с общедоступного ресурса по исследованию данных Kaggle [5].

**2.2. Получение текстурных признаков.** В результате применения вейвлет-преобразования, описанного в разделе 1.1, каждое изображение делится на четыре квадранта (рисунок 3). Каждый квадрант представляет собой область размером 128x128 пикселей в цветовом пространстве RGB (красный, зеленый, синий каналы). Для каждого из этих каналов строится матрица совпадения уровней серого (GLCM), которая описывает распределение яркости пикселей в квадранте и анализирует взаимосвязи между различными уровнями серого в изображении. Разные текстуры (например, гладкая, шероховатая, зернистая) характеризуются разными закономерностями совместной встречаемости уровней серого.

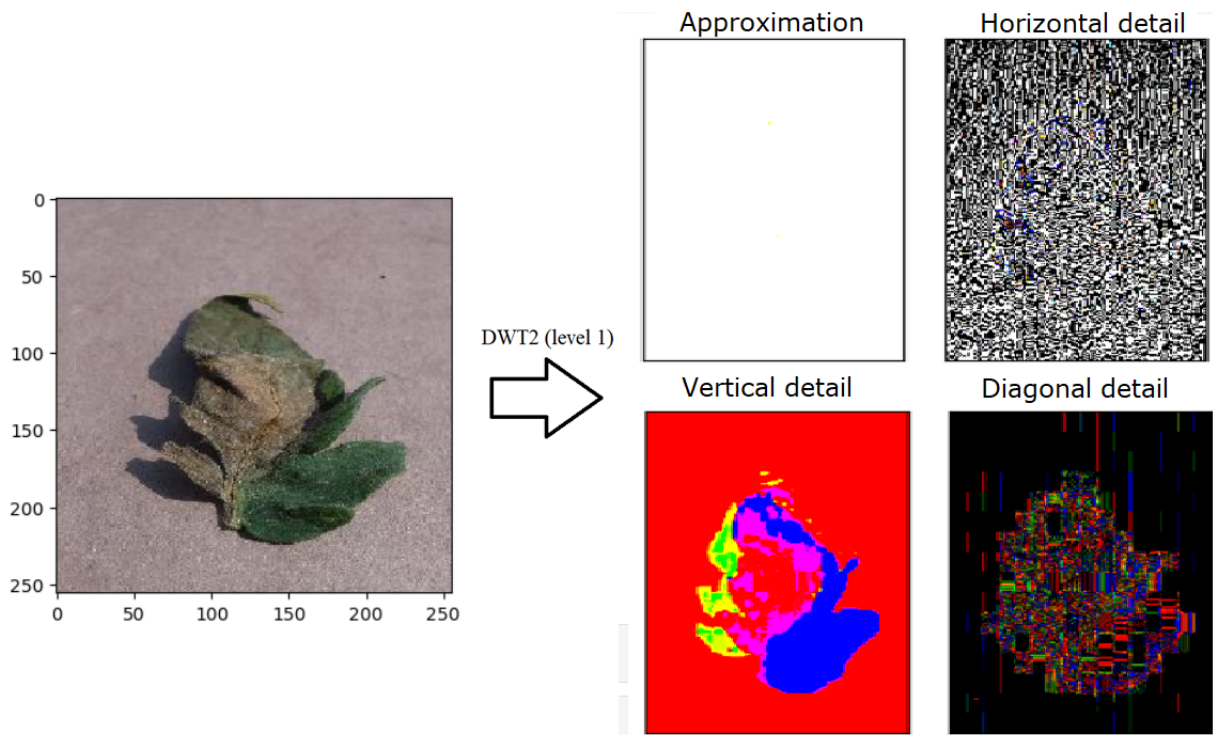


Рис. 3. Пример одноуровневого двумерного вейвлет-разложения исходного изображения

Таким образом, для целого изображения получается 12 матриц GLCM (по 4 для каждого канала RGB). Из каждой матрицы GLCM вычисляются 4 признака Харалика, описанных ранее.

На рисунке 3:

DWT2 (level1) — одноуровневое дискретное двумерное вейвлет-преобразование Добеши;

Approximation — аппроксимация исходного изображения;

Horizontal detail — горизонтальные детали исходного изображения;

Vertical detail — вертикальные детали исходного изображения;

Diagonal detail — диагональные составляющие исходного изображения.

В итоге, после одноуровневого вейвлет-преобразования, одно цветное изображение описывается вектором из 48 коэффициентов — текстурных признаков Харалика.

Общее количество признаков  $F$  можно рассчитать по формуле:

$$F = Q \times C \times H \times n \quad (7)$$

В формуле (7):

- $Q = 4$  — количество квадрантов, на которые делится изображение;
- $C = 3$  — количество каналов цветного изображения (RGB);
- $H = 4$  — количество признаков Харалика, вычисляемых из каждой GLCM матрицы;
- $n$  — число уровней вейвлет-преобразования.

С увеличением количества уровней вейвлет-разложения  $n$  число признаков  $F$  линейно увеличивается. В данной работе оптимальное число уровней разложения  $n$  было определено эмпирически и составило 3. Таким образом, общее количество признаков  $F = 4 \times 3 \times 4 \times 3 = 144$ .

Для удобства дальнейшего анализа все признаки были записаны в CSV-файл с помощью библиотеки Pandas языка Python (рисунок 4).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...	135
0	4910.661102	5415.794556	4273.397919	29048.449310	29122.806091	29106.444092	1553.198120	2060.362946	1171.758636	1393.249298 ...	0.020375
1	7303.758423	8427.883728	6236.064575	23997.235077	24021.615082	24051.146210	1490.319397	1115.246582	1598.354919	2341.404175 ...	0.021991
2	4430.062317	4523.639435	3207.685944	31342.150543	31424.312653	31187.380554	2588.799622	5389.672791	2168.333527	1171.598816 ...	0.031454
3	2486.059052	3068.871552	1756.565704	29658.216309	29714.896667	29592.967621	1630.973450	1723.165375	1520.119598	2698.978638 ...	0.022097
4	2495.887024	3002.724609	1748.883606	29889.781281	29849.687653	29692.824524	1620.140015	1768.595612	1494.767761	2675.156372 ...	0.022522
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17595	1535.361542	1275.335602	1669.307983	32816.403412	33203.055695	33404.653168	3346.186890	3439.760468	693.740204	844.401672 ...	0.023542
17596	2938.391449	3469.871307	1427.089050	20699.824158	21046.329041	22294.390381	1638.140228	2546.195953	436.153076	1110.063110 ...	0.041534
17597	2976.249786	3380.340973	1314.810059	33047.073792	33249.885498	33173.229004	811.761047	2261.653107	458.613220	1446.747620 ...	0.029648
17598	7692.713287	10451.721527	10453.655701	28285.653687	28356.335419	28304.653381	1385.866791	1878.329651	1318.927338	1372.675537 ...	0.016805
17599	4373.335419	4887.719177	2555.983002	27060.069489	27138.666473	28001.021484	1659.912781	3139.970367	585.401855	717.408020 ...	0.033401

17600 rows x 145 columns

Рис. 4. Текстурные признаки Харалика для исходного датасета

На рисунке 4 представлен датафрейм из 17600 строк (по числу изображений в датасете) и 144 столбцов (по числу признаков Харалика для каждого изображения), записанный в переменную "features-db".

Стоит также упомянуть другие модули и библиотеки Python, используемые в данной работе:

**Os** — для работы с операционной и файловой системами (загрузка и инициализация набора данных); **OpenCV** — для анализа изображений; **NumPy** — для работы с многомерными массивами; **Matplotlib** — для визуализации данных и вычислений; **PyWt** — для вейвлет-вычислений; **Scikit-Learn** — для операций машинного обучения [6].

**2.3. Предварительная обработка данных.** Датафрейм, представленный на рисунке 4, содержит текстурные признаки Харалика, полученные в результате вейвлет-преобразования. Этот датафрейм является базой данных, готовой для обучения модели машинного обучения.

Входными данными для обучения нейронной сети будут текстурные признаки Харалика (все столбцы датафрейма, кроме последнего). Выходными данными будут метки классов, закодированные в последнем столбце датафрейма.

Перед обучением модели необходимо провести предварительную обработку данных:

1. Разделение на обучающую и тестовую выборки: датафрейм разделяется на две части в соотношении 70:30, где 70 % данных используется для обучения модели, а 30 % — для тестирования.
2. Стандартизация: данные стандартизируются с помощью метода *StandartScaler*, что позволяет привести их к нулевому среднему значению и единичной дисперсии. Стандартизация применяется лишь к входным данным, поскольку выходные данные содержат только метки классов [7], [8].
3. Уменьшение размерности: для увеличения скорости работы модели и снижения требований к памяти используется метод уменьшения размерности. В данной работе применяется метод главных компонент (*Principal Component Analysis*, *PCA*). С помощью *PCA* можно сократить количество признаков, сохранив максимальную информацию о данных [9], [10].

Результат применения *PCA* на наборе данных из рисунка 4 представлен на рисунке 5.

График на рисунке 5 показывает, что при количестве главных компонент  $N = 40$  значение «*Variance explained*» практически достигает единицы. Параметр «*variance explained*» помогает понять, насколько хорошо компоненты отражают исходные данные, и используется для выбора оптимального количества компонент при уменьшении размерности. Таким образом, при значении числа  $N = 40$  компонент сохраняется максимальное количество информации о данных. В результате размерность признаков была сокращена со 144 до 40.

**2.4. Классификация и результаты.** Классификация изображений была проведена с помощью двух методов машинного обучения:

- Логистическая регрессия: классический алгоритм машинного обучения;
- MLP (*Multilayer Perceptron*, многослойный перцептрон): базовая модель искусственной нейронной сети [11].

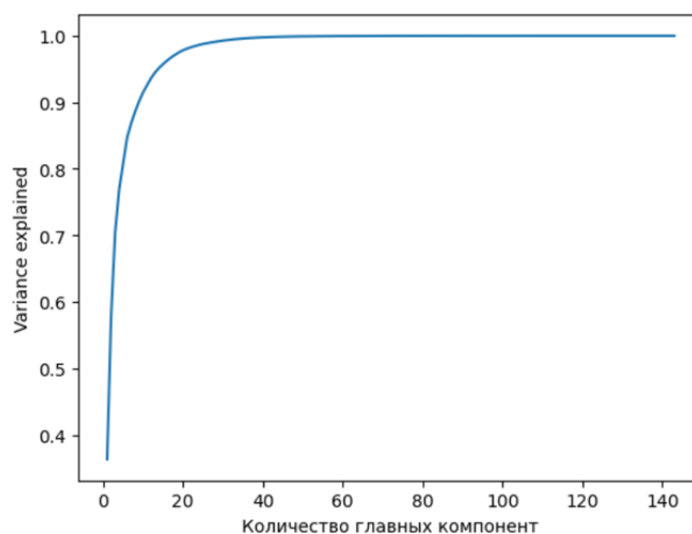


Рис. 5. График зависимости параметра «Variance explained» от числа главных компонент

Результаты работы каждого из методов приведены в таблице 2.

Метод классификации	Метрика			
	Accuracy	Precision	Recall	F-score
Логистическая регрессия	90%	0.9	0.89	0.89
MLP	86%	0.86	0.85	0.86

Таблица 2. Результаты классификации

Как можно видеть из таблицы 2, благодаря комбинированию методов текстурного анализа и машинного обучения удалось достичь высоких показателей точности для 8 классов — до 90%. Оценка проводилась на базовых метриках задачи классификации [12], а именно:

Accuracy — общая точность, доля правильных предсказаний от общего числа предсказаний;

Precision — точность положительного класса, доля истинно положительных предсказаний от всех положительных предсказаний;

Recall — полнота, доля истинно положительных предсказаний от всех фактических положительных случаев;

F-score — F-мера, гармоническое среднее точности и полноты.

Для precision и recall, так как в задаче более двух классов, используется макро-среднее, поскольку все классы одинаково важны и сбалансированы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен алгоритм, который эффективно классифицирует состояние растений по цветным изображениям, анализируя их текстуру. Алгоритм комбинирует вейвлет-анализ с методами машинного обучения, что позволило достичь высокой точности классификации (до 90%).

Для дальнейшего улучшения предложенного метода необходимо изучить возможность использования различных типов вейвлет-преобразований и классификационных алгоритмов машинного обучения, чтобы определить наиболее оптимальные комбинации для конкретной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. iieta.org. (2022) *IIETA: Advancing the World of Information and Engineering*. [Online] Available from: [https://iieta.org/journals/ts/paper/10.18280/ts.390602?title=Evaluation of Machine Learning Models for Plant Disease Classification Using Modified GLCM and Wavelet Based Statistical Features](https://iieta.org/journals/ts/paper/10.18280/ts.390602?title=Evaluation%20of%20Machine%20Learning%20Models%20for%20Plant%20Disease%20Classification%20Using%20Modified%20GLCM%20and%20Wavelet%20Based%20Statistical%20Features).
2. researchgate.net. (2023) *ResearchGate: Find and share research*. [Online] Available from: [https://www.researchgate.net/publication/376415019\\_Detecting\\_Plant\\_Disease\\_Using\\_CNN\\_and\\_KNN?title=Detecting Plant Disease Using CNN and KNN](https://www.researchgate.net/publication/376415019_Detecting_Plant_Disease_Using_CNN_and_KNN?title=Detecting%20Plant%20Disease%20Using%20CNN%20and%20KNN).
3. Добеши, И. Десять лекций по вейвлтам / И. Добеши. — Ижевск: РХД, 2004. — 464 с.  
DAUBESHIES, I. (2004) *Ten lectures on wavelets*. Izhevsk: RKhD.
4. Ковалёва И. Л. Текстурные признаки изображений / И. Л. Ковалёва. — Минск: Белорусский национальный технический университет, 2010. — 26 с.  
KOVALEVA, I.S. (2010) *Texture features of images*. Minsk: Belarusian National Technical University.
5. Kaggle.com. (2018) *Kaggle: your Machine Learning and Data Science community*. [Online] Available from: [https://www.kaggle.com/datasets/vipooool/new-plant-diseases-dataset?title=New Plant Diseases Dataset](https://www.kaggle.com/datasets/vipooool/new-plant-diseases-dataset?title=New%20Plant%20Diseases%20Dataset).
6. Рашка, С., Мирджалили, В. Python и машинное обучение / С. Рашка. — 3-е изд.. — М., СПб: Диалектика, 2020. — 848 с.  
RASHKA, S. and MIRJALILI, V. (2020) *Python and Machine Learning*. Moscow, SPb: Dialectics.

7. scikit-learn // Scikit-learn.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://scikitlearn.ru/stable/modules/preprocessing.html? title=Предварительная обработка данных>.  
Scikit-learn.ru. (2024) *scikit-learn*. [Online] Available from: <https://scikitlearn.ru/stable/modules/preprocessing.html? title=Предварительная обработка данных>.
8. Хабр // habr.com [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/675876/? title=Как писать преобразователи данных в Sklearn>.  
habr.com. (2022) *Habr*. [Online] Available from: <https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/675876/? title=Как писать преобразователи данных в Sklearn>.
9. vitalflux.com. (2023) *Analytics Yogi. Reimagining Data-driven Society with Data Science & AI*. [Online] Available from: <https://vitalflux.com/pca-explained-variance-concept-python-example/? title=PCA Explained Variance Concepts with Python Example>.
10. Николенко, С., Кадурин, А. и др. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей / С. Николенко. — Спб.: Питер, 2018. — 477 с.  
NIKOLENKO, S., KADURIN, A. et al. (2018) *Deep learning. Immersion in the world of neural networks*. SPb: Piter.
11. Хайкин, С. Нейронные сети. Полный курс / С. Хайкин. — 2-е изд.. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. — 1104 с.  
KHAIKIN, S. (2004) *Neural networks. Full course*. Moscow: “Williams” publishing house.
12. Яндекс Образование // Education.yandex.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/metriki-klassifikacii-i-regressii? title=Метрики классификации и регрессии>.  
Education.yandex.ru. (2023) *Yandex Education*. [Online] Available from: <https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/metriki-klassifikacii-i-regressii? title=Метрики классификации и регрессии>.

**Цитирование:** Брыкин В. В. Вейвлет-анализ и машинное обучение в классификации состояния растений по текстурным признакам // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 99–111.

Малафеев О. А. и др. Построение оптимальной стратегии дрона в задаче преследования с препятствием // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 7–23.

УДК: 517.977.5:519.876.5

Дроны все чаще используются в различных областях, включая наблюдение, поисково-спасательные операции и доставку посылок. Одним из важнейших аспектов работы дронов является оптимизация стратегии преследования при столкновении с препятствиями. Это исследование направлено на разработку оптимальной стратегии для дронов в задачах преследования с препятствиями, в частности, с упором на применение дифференциальных игр. Дифференциальные игры обеспечивают математическую основу, в которой дроны и преследуемые ими цели принимают решения на основе обнаружения препятствий. В исследовании рассматриваются теоремы и доказательства, касающиеся успешных стратегий для беспилотных летательных аппаратов в задачах преследования, подчеркивается важность обхода препятствий и преследования цели. Исследование направлено на повышение эффективности и успешности полетов беспилотных летательных аппаратов путем определения оптимальных подходов к достижению цели при одновременном избегании препятствий. Результаты моделирования в прикладной программе MATLAB дают ценную информацию для улучшения работы беспилотных летательных аппаратов в сложных условиях, а их потенциальное применение распространяется на такие области, как робототехника и искусственный интеллект. Оптимизируя стратегии преследования при наличии препятствий, беспилотные летательные аппараты могут более эффективно перемещаться по сложной местности, что в конечном итоге повышает их производительность и надежность в широком спектре применений.

*Ключевые слова:* беспилотный летательный аппарат, преследование, препятствие, оптимальная стратегия,  $\gamma$ -равновесие, математическая модель, управление, алгоритмы.

---

Морозов Ю. В. Исследование скрытых колебаний в системе 3-го порядка с разрывной правой частью // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 24–40.

УДК: 517.93

В статье представлено аналитическое исследование устойчивости скрытых колебаний, возникающих в системе 3-го порядка с разрывной правой частью. Приведены численные примеры, иллюстрирующие правильность полученных результатов.

*Ключевые слова:* прерывистая правая сторона, скрытые колебания, циклическая стабильность.

---

Котова О. В. Об оптимальном расположении узлов аппроксимации функции Рунге // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 41 – 53.

УДК: 517.5 + 519.65

Описан метод оптимизации расположения узлов аппроксимации, реализованный на примере функции Рунге. Для выбора узлов аппроксимации составляется целевая функция, минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов по оси абсцисс. Приведено сравнение с интерполяционным полиномом, построенным по узлам Чебышева.

*Ключевые слова:* аппроксимация, интерполяция, функция Рунге, узлы аппроксимации, целевая функция, узлы Чебышева, среднеквадратическая ошибка.

---

Luu T. H. On first integrals of a sixth-order ordinary differential equation // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 54 – 66.

УДК: 531.011

В статье предлагаются конструктивные методы нахождения некоторых первых интегралов обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка с потенциальным оператором. Рассмотрены методы, основанные на применении преобразования переменных, для установления инвариантности данного обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка с потенциальным оператором и соответствующим действием Гамильтона-Остроградского. Также найдены некоторые первые интегралы рассматриваемого уравнения.

*Ключевые слова:* Обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка, потенциальный оператор, действие Гамильтона-Остроградского, симметрия, дивергентная инвариантность, первый интеграл.

---

Лемтюжникова Д. В. Условно-идеальные структуры в решении задач дискретной оптимизации. Часть 1 // Таврический вестник информатики и математики. — 2025. — № 2 (67). — С. 67 – 98.

УДК: 519.854.2

В работе вводится и систематически развивается теория условно идеальных структур (УИС) — новый подход для снижения вычислительной сложности NP-трудных задач

путем использования структурных инвариантов данных. Теоретическая основа строится на двух основных асимптотических режимах: логарифмическом и субэкспоненциальном. Основной вклад заключается в формализации структурных параметров и введении компенсирующих функций, преобразующих структурные ограничения в вычислительные ресурсы. Доказана асимптотическая управляемость, гарантирующая, что сложность растет существенно медленнее экспоненциальной. Доказана алгебраическая замкнутость класса УИС относительно операций композиции и пересечения. Разработана формальная процедура компенсации для построения адаптивных алгоритмов. Практическая применимость продемонстрирована на задачах оптимизации графов, метрической кластеризации и обработки разреженных матриц.

**Ключевые слова:** условно идеальные структуры, параметризованная сложность, гипотеза *SETH*, субполиномиальные алгоритмы, *NP*-трудные задачи, дискретная оптимизация.

---

**Брыкин В. В.** Вейвлет-анализ и машинное обучение в классификации состояния растений по текстурным признакам // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2025. — № 2 (67). — С. 99 – 111.

**УДК:** 004.81

В данной работе представлен новый метод, который объединяет вейвлет-анализ с машинным обучением для классификации состояния растений по цветным изображениям. Метод использует вектор текстурных признаков Харалика, полученных с помощью вейвлет-преобразования Добеши. Для реализации метода разработана программа на языке Python, которая применяет многоуровневое дискретное вейвлет-преобразование Добеши и классификационные алгоритмы машинного обучения, такие как логистическая регрессия и перцептрон. Результаты демонстрируют эффективность предложенного метода в задачах многоклассовой классификации изображений. В работе сделаны выводы о практическом применении метода и его потенциале для дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** вейвлет-преобразование Добеши, классификация изображений, логистическая регрессия, машинное обучение, признаки Харалика.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

*Брыкин Валентин  
Валерьевич*

аспирант Политехнического института Сургутского государственного университета, г. Сургут, Российская Федерация  
*e-mail: valentin.brykin@mail.ru*

*Зайцева Ирина  
Владимировна*

к. ф.-м. н., заведующий кафедрой высшей математики и физики Российского государственного гидрометеорологического университета, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
*e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru*

*Козлов Никита  
Олегович*

студент кафедры высшей математики и физики Российского государственного гидрометеорологического университета, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
*e-mail: nikitagarbuzko@gmail.com*

*Котова Ольга  
Викторовна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка, Донецкая Народная Республика, Российская Федерация  
*e-mail: o.v.kotova@donnasa.ru*

*Лемтюжникова  
Дарья Владимировна*

старший научный сотрудник, ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация  
*e-mail: darabbt@gmail.com*

*Льву Тхи Хуен*

аспирант Математического института им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Российская Федерация  
*e-mail: luuthihuyen250393@gmail.com*

*Малафеев Олег  
Алексеевич*

д. ф.-м. н., заведующий кафедры моделирования социально-экономических систем Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
*e-mail: malafeyeva@mail.ru*

*Морозов Юрий  
Викторович*

к. ф.-м. н, с.н.с., лаб.16, ИПУ РАН, г. Москва, Российская Федерация  
*e-mail: tot1983@ipu.ru*

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: XX.XX.2024.

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № XXX. Тираж 50 экз. Формат А4.

Усл. печ. ед. XX. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.

Отпечатано в Издательском доме

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»

295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7