ISSN 1729-3901

Таврический Вестник Информатики и Математики

3
2024

МЕЖДУНАРОДНОЕ
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ
ИЗДАНИЕ

ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№ 3 (64) ' 2024

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:
1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2024, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

АДРЕС УЧРЕДИТЕЛЯ, ИЗДАТЕЛЯ И РЕДАКЦИИ:
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:
Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007
Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): tvim-article@mail.ru
сайт журнала: www.tvim.su

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Системный анализ, управление и обработка информации

Вычислительная математика и математическое моделирование

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Протокол № 6 от 27 июня 2025 г.

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., Dr. Eng. Sc.
Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Yakov YERUSALIMSKY, Prof., Dr. Eng. Sc.
Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Vladislav KRAVCHENKO, Prof., Dr. Eng. Sc.
Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., Dr. Eng. Sc.,
Leonid MESTETSKIY, Prof., Dr. Eng. Sc.
Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math. Sc.
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Fedor STONYAKIN, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Anton UTKIN, Senior Researcher, Dr. Eng. Sc.
Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., Dr. Eng. Sc.
Vladimir CHILIN, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc.

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. Sc. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. Sc. — **Secretary**
Ahtem DJELILOV, Prof., Dr. Philological Sc. — **Communications Editor**
Dmitry ZAKORA, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math. Sc.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. Sc. — **Science editor**

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: **www.tvim.su**

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief
+7 978 837 82 77 — office
Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.su — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

Жуковский В. И., Бельских Ю. А., Жуковская Л. В. Существование равновесия по Бержу–Вайсману в одной дифференциальной позиционной игре двух лиц, в которой отсутствует равновесие по Нэшу 7

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Sachkov S. N., Sachkova E. N. Poincaré method of small parameter for construction of equilibria 18

Джабраилов А. Л. Исследование обобщенной краевой задачи для дифференциального уравнения бесконечного порядка 44

Петров В. Э. Уравнение несущей линии с эллиптическими кромками 61

Сахаров А. Н. Особые периодические решения полиномиальных дифференциальных уравнений 74

Shamoyan R. F., Makhina N. M. On some new embeddings in minimal bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ 89

Ханан Али. Evolution inequalities of high order with complex-valued 95

Рефераты 103

Список авторов номера 108

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Belskikh Yu. A., Zhukovskaya L. V. The Existence of Berge-Vaisman Equilibrium in a Differential Positional Game of two Persons in which the Nash-Equilibrium is absent 7

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Sachkov S. N., Sachkova E. N. Poincaré method of small parameter for construction of equilibria 18

Dzhabrailov A. L. Study of a generalized boundary value problem for an infinite order differential equation 44

Petrov V. E. Equation of a Bearing Line With Elliptical Edges 61

Sakharov A. N. Singular periodic solutions of polynomial differential equations 74

Shamoyan R. F., Makhina N. M. On some new embeddings in minimal bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ 89

Hanan Ali. Evolution inequalities of high order with complex-valued 95

Abstracts 103

Authors 108

УДК: 519.834

MSC2010: 91A10

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ–ВАЙСМАНУ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ, В КОТОРОЙ ОТСУТСТВУЕТ РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ

© В. И. Жуковский, Ю. А. Бельских, Л. В. Жуковская

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления, д. ф.-м. н., профессор
Ленинские горы, МГУ, ВМК, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

Государственный гуманитарно-технологический университет
физико-математический факультет, к. ф.-м. н., доцент
ул. Зеленая, 22, г. Орехово-Зуево, Московская обл., 142611, Российская Федерация
e-mail: *belskihja@gmail.com*

Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) РАН
ведущий научный сотрудник, д.э.н.
Нахимовский пр, 47, Москва, 117418, Российская Федерация
e-mail: *zhukovskaylv@mail.ru*

THE EXISTENCE OF BERGE-VAISMAN EQUILIBRIUM IN A DIFFERENTIAL POSITIONAL GAME OF TWO PERSONS IN WHICH THE NASH-EQUILIBRIUM IS ABSENT.

Zhukovskiy V. I., Belskikh Yu. A., Zhukovskaya L. V.

Abstract. Every person who encountered with the research of conflict situations knows that it is very difficult (and as a rule impossible) to obtain solution in explicit analytical form. Linear-quadratic differential games appear as an exception. The present article is devoted to such games. The idea of Lyapunov A. M. about possibility of investigation of behavior of solution of differential equations without solving them but using properties of Lyapunov function and its derivative here is associated with possibility of opinion about optimal properties of players strategies according to optimal properties of Bellman functions and their derivative. This approach is based on combination of dynamic programming with method of Lyapunov functions suggested by academician Krasovskii N. N. so that it allows to obtain the coefficient criteria of existence of solutions and construction their explicit form. Using such approach in the article the set of differential games is extracted in which there exists the Berge-Vaisman equilibrium.

The notion of “Berge equilibrium” appeared in Russia in 1994 during the critical discussion of the published book “Theorie Generale des Jeux a n Personnes Games” by Claude Berge. Berge equilibrium removes “selfish” nature promoted in Nash equilibrium due to the altruistic approach, dictated by the concept of Berge equilibrium. In 1995 Constantin S. Vaisman (then a graduate student of Zhukovskiy) defended his Ph.D. thesis on Berge equilibrium, at the Leningrad

University in 1995. Unfortunately, Vaisman died three years after the Ph.D. defense of the thesis, before the age of 36 years. During these three years he published 19 works. We observe also that Vaisman together with the first author of this article wrote individual chapters in two books.

Vaisman merit lies in the fact that he presented the example that the property of individual rationality for Berge equilibrium, generally speaking, does not take place. Therefore Vaisman added this requirement in the definition of Berge equilibrium, after which Berge equilibrium was naturally called as the equilibrium by Berge–Vaisman.

Berge equilibrium has not got the bright destiny. Because of Vaisman's death, who was the greatest enthusiast of Berge equilibrium, they suspended the investigation of it in Russia. Furthermore, the publication of the book by Claude Berge aroused the acute review of Martin Shubic. However, the Algerian trainees of Zhukovskiy Radjef Mohamed Said and Larbani Moussa managed to publish the works, which caused widespread interest in the West to Berge equilibrium. Right now the research of Berge equilibrium stuck at an early stage. Namely, there are the initial accumulation of facts, the formalization of modification Berge equilibrium, a comparison with Nash equilibrium. Futhermore, basically, all the studies are limited to only finite non-cooperative games. We believe it is time to proceed to the second heuristic stage, that is to answer the following two questions:

1) Is there Berge equilibrium and how to build it?

2) How should one take into account the dynamics of the conflict?

Zhukovskiy V.I. and his co-authors devoted their recently published book “Mathematical foundations of the Golden rule: altruistic way of resolving conflicts as opposed egoistic to Nash equilibrium” to answering the first question, it is true only within static version of non-cooperative games. We expect to dedicate a separate book to dynamic version of the problem (within the mathematical formalization of the positional differential game proposed by Russian academician Krasovsky). Though this article is devoted to a partial answer to the second question.

Keywords: *Non-cooperative positional linear-quadratic differential game, dynamic programming, Berge-Vaisman equilibrium, Nash equilibrium, continuous dependence and analyticity of the solution by parameter.*

Введение

Конфликтные ситуации неизбежно сопровождают развитие общества. Конфликты возникают в экономике, экологии и многих других сферах человеческой деятельности. При этом конфликтующие подвергаются возмущениям, помехам и прочим неопределенностям. Зачастую о неопределенностях известны лишь границы изменений, а реализоваться может любая из них. Как принимать решение, учитывая также изменение конфликта с течением времени? Какое оптимальное поведение нужно выбрать в таких условиях? Ответы на эти вопросы и составляют содержание теории дифференциальных игр при неопределенности (нового направления кибернетики), некоторым теоретическим основам которой посвящена настоящая статья.

Конечно, охватить в рамках одной статьи весь спектр вопросов дифференциальных игр при неопределенности просто нереально. Поэтому здесь ограничились лишь бескоалиционным вариантом игры, а в нем — задачей, выбор которой продиктован как новейшими тенденциями в развитии теории дифференциальных игр, так и собственными симпатиями авторов.

Каждый, кто сталкивался с исследованием конфликтных ситуаций, знает, как трудно (и, как правило, невозможно!) получить решение в явном аналитическом виде. Счастливым исключением являются линейно-квадратичные дифференциальные игры, которым и посвящена настоящая статья. Идея А. М. Ляпунова о возможности исследования качественного поведения решения дифференциального уравнения, не решая его, а лишь используя свойства функции Ляпунова и ее производной, здесь ассоциируется с возможностью суждения об экстремальных свойствах стратегий игроков по экстремальным свойствам функций Беллмана и их производных. Данный подход основывается на предложенном академиком Н. Н. Красовским объединении динамического программирования с методом функций Ляпунова и позволяет в ряде случаев «выйти» на коэффициентные ограничения существования решений и построение их явного вида.

В статье выделен класс дифференциальных игр, в которых существует недавно появившееся в литературе равновесие по Бержу–Вайсману (подробно об этом в самой статье).

1. Постановка задачи

Рассматривается бескоалиционная позиционная дифференциальная линейно-квадратичная игра двух лиц с малым влиянием одного из игроков на скорость изменения фазового вектора

$$\langle \{1,2\},\ \Sigma,\ \{\mathbf{U}_i\}_{i=1,2},\ \{J_i(U,t_0,x_0)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1}$$

В (1) $\{1,2\}$ — множество порядковых номеров игроков, изменение (во времени t) управляемой системы Σ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2,\ x(t_0) = x_0,$$

где $n \times n$-матрица $A(\cdot) \in C_{n\times n}[t_0,\vartheta]$, моменты начала $t_0 \geq 0$ и фиксированный момент окончания игры $\vartheta > t_0$; фазовый n-вектор-столбец $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$; пара $(t,x) \in [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ образует позицию игры, при этом (t_0,x_0) — начальная, а $(t,x(t))$ —

текущая в момент $t \in [t_0, \vartheta]$ позиции; $u_i \in \mathbb{R}^n$ — управляющее воздействие i-го игрока $(i = 1, 2)$, постоянная $\varepsilon \geq 0$ — малый скалярный параметр; множество стратегий i-го игрока $\mathbf{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta)\}$, т. е. стратегия U_i для i-го игрока отождествляется с n-вектор-функцией $u_i(t, x)$ (обозначаем $U_i \div u_i(t, x)$) линейной по $x \in \mathbb{R}^n$ и непрерывной по t. Таким образом, выбор стратегии U_i для игрока i сводится к выбору $n \times n$-матрицы с непрерывными на $[0, \vartheta)$ элементами $Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta)$. Набор $U = (U_1, U_2) \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$ называют ситуацией игры (1).

Партия игры (1) происходит следующим образом. Каждый из игроков выбирает свою стратегию $U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x,\ U_i \in \mathbf{U}_i\ (i = 1, 2)$. Подставляя $u_i = u_i(t, x)$ в (1), получаем однородную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + \varepsilon Q_2(t)]x,\ x(t_0) = x_0$$

с непрерывными по t коэффициентами. Эта система имеет при любых фиксированных $\varepsilon = const \geq 0$ единственное непрерывное решение $x(t)$, которое может быть продолжено на весь интервал игры $[t_0, \vartheta]$. По $x(\cdot) \in C_n[t_0, \vartheta]$ строим реализации $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ выбранных игроками стратегий $U_i \in \mathbf{U}_i$. На непрерывных тройках $(x(t), u_1[t], u_2[t] \mid t \in [t_0, \vartheta])$ определены функции выигрыша игроков, заданные квадратичными функционалами

$$J_1(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_1x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{11}u_1[t] - u_2'[t]D_{12}u_2[t] + x'(t)G_1x(t))\,dt,$$

$$J_2(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_2x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (-u_1'[t]D_{21}u_1[t] + u_2'[t]D_{22}u_2[t] + x'(t)G_2x(t))\,dt,$$

где штрих сверху означает операцию транспонирования, $n \times n$-матрицы $C_i,\ G_i,\ D_{ij}\ (i, j = 1, 2)$ симметричны и постоянны. Далее $M < 0$ $(>,\ \geq,\ \leq)$ означает, что квадратичная форма $u'Mu$ определенно-отрицательна (положительна, не отрицательна, не положительна).

Определение 1. *Ситуацию* $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathbf{U}$ *назовем равновесной по Бержу-Вайсману в игре (1), если при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$ *выполняется*

$$\begin{aligned} &J_1(U_1^B, U_2, t_0, x_0) \leq J_1(U^B, t_0, x_0)\ \forall U_2 \in \mathbf{U}_2,\\ &J_2(U_1, U_2^B, t_0, x_0) \leq J_2(U^B, t_0, x_0)\ \forall U_1 \in \mathbf{U}_1,\\ &\max_{U_1}\min_{U_2} J_1(U_1, U_2, t_0, x_0) \leq J_1(U^B, t_0, x_0),\\ &\max_{U_2}\min_{U_1} J_2(U_1, U_2, t_0, x_0) \leq J_2(U^B, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим следующие три обстоятельства.

Во-первых, понятие «равновесие по Бержу» (РБ) появилось в России в 1994 году при критическом обсуждении опубликованной Клодом Бержем в Париже книги [1]. РБ снимает «эгоистический» характер пропагандируемого в [1] равновесия по Нэшу за счет альтруистического подхода, диктуемого концепцией равновесия по Бержу. По РБ в 1995 году в Ленинградском университете защитил кандидатскую диссертацию Константин Семенович Вайсман (в то время аспирант Жуковского В.И.). К сожалению, К.С. Вайсман скрропостижно скончался через три года после защиты, не дожив до 36 лет. За эти три года им было опубликовано 19 работ. Заметим также, что К. С. Вайсман совместно с первым автором этой статьи написал отдельные разделы в двух книгах [9,19].

Во-вторых, заслуга К.С. Вайсмана состоит также в том, что он на примере показал, что свойство индивидуальной рациональности (2) для РБ, вообще говоря, не имеет места. Поэтому К.С. Вайсман добавил данное требование в определение РБ, после чего РБ естественно было назвать равновесием Бержа-Вайсмана. Впрочем, в тех играх, которые рассматривал сам К.С. Вайсман, максимины из условий (2), как доказано в [30], не существуют. Поэтому при исследовании РБ в подобных ситуациях условия (2) можно опускать.

В-третьих, у РБ не очень счастливая судьба. Смерть К.С. Вайсмана, самого большого энтузиаста РБ, приостановило исследование РБ в России. Кроме того, публикация самой книги [1] вызвала острую рецензию Мартина Шубика. Однако алжирские стажеры В.И. Жуковского Раджеф Мухамед Саид и Ларбани Мусса успели опубликовать работы [21, 22], которые вызвали на Западе широкий интерес к РБ. Как показал обзор [24], сейчас исследования РБ «застряли» на начальной стадии, а именно, идет первоначальное накопление фактов, формализуются модификации РБ, проводится сравнение с равновесием по Нэшу. При этом, в основном, все исследования ограничены лишь конечными бескоалиционными играми. По нашему мнению, пора переходить ко второму эвристическому этапу, то есть ответить на два вопроса:

1) существует ли РБ и как его построить?

2) как учесть динамику конфликта?

Ответу на первый вопрос, правда в рамках только статического варианта бескоалиционной игры, посвящена недавно опубликованная книга [24]. Динамическому варианту задачи (в рамках математической формализации позиционной дифференциальной игры, предложенной русским академиком Н.Н. Красовским) мы предполагаем посвятить отдельную книгу. Впрочем, частичному ответу на второй вопрос посвящается настоящая статья.

2. Существование равновесия Бержа–Вайсмана

Итак, будем рассматривать дифференциальную позиционную линейно-квадратичную игру двух лиц (1). Напомним, что динамика игры описана обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \; x(t_0) = x_0,$$

где $x, u_i \in \mathbb{R}^n$, $A(\cdot) \in C_{n\times n}[t_0, \vartheta]$, $\varepsilon = const \geq 0$ - малый параметр, постоянная $\vartheta > t_0 \geq 0$; множество стратегий i-го игрока

$$\mathbf{U}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x \mid \forall t \in [0,\vartheta), \; x \in \mathbb{R}^n, \; Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta)\} \; (i = 1,2),$$

функции выигрыша игроков

$$J_1(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_1x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{11}u_1[t] - u_2'[t]D_{12}u_2[t] + x'(t)G_1x(t))\, dt,$$

$$J_2(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_2x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (-u_1'[t]D_{21}u_1[t] + u_2'[t]D_{22}u_2[t] + x'(t)G_2x(t))\, dt,$$

где симметричные постоянные $n \times n$-матрицы C_i, G_i, D_{ij} таковы, что $C_2 \leq 0$, $G_2 \leq 0$, $D_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2)$. Здесь и далее $D > 0$ $(<)$ означает, что квадратичная форма $u'Du$ определенно положительна (отрицательна). Равновесие по Бержу-Вайсману формализуется определением 1.

В соответствии с методом динамического программирования построим две скалярные функции

$$W_1(t, x, u_1, u_2, V_1, V_2) = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]' [A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] + u_1'D_{11}u_1 - u_2'D_{12}u_2 + x'G_1x,$$

$$W_2(t, x, u_1, u_2, V_1, V_2) = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2}{\partial x}\right]' [A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] - u_1'D_{21}u_1 + u_2'D_{22}u_2 + x'G_2x.$$

Обычным приемом (как например в [25, с. 62–67]) устанавливается справедливость следующего утверждения (где обозначено $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, 0_n — n-нуль-вектор, $0_{n\times n}$ — $n \times n$-нуль-матрица):

Пусть для игры (1) удалось найти две непрерывно дифференцируемые скалярные функции $V_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ такие, что

1.
$$V_i(\vartheta, x) = x'C_ix \; \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{3}$$

2. существуют две n-вектор-функции $u_i(t,x,V)$ $(i = 1,2)$, для которых при $\forall t \in [0,\vartheta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^2$ будет выполнено

$$\max_{u_2}\{W_1(t,x,u_1(t,x,V),u_2,V)\} = W_1(t,x,u_1(t,x,V),u_2(t,x,V),V),$$

$$\max_{u_1}\{W_2(t,x,u_1,u_2(t,x,V),V)\} = W_2(t,x,u_1(t,x,V),u_2(t,x,V),V);$$

3. существуют непрерывно дифференцируемые решения $V_i(t,x)$ $(i = 1,2)$ системы из двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$W_i[t,x,V] = W_i(t,x,u_1(t,x,V),u_2(t,x,V),V(t,x)) = 0, \ (i = 1,2)$$

с граничными условиями (3);

4. выполнены включения

$$U_i^B \div u_i^B(t,x) = u_i(t,x,V_1(t,x),V_2(t,x)) \in \mathbf{U}_i.$$

Тогда

а) ситуация равновесия по Бержу-Вайсману примет вид $U^B = (U_1^B, U_2^B)$;

в) при любой начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ выигрыши $J_i(U^B,t_0,x_0) = V_i(t_0,x_0)$ $(i = 1,2)$.

Используя данное утверждение, а так же теорию Пуанкаре о малом параметре [27], в частности, теорему о непрерывной зависимости решения от параметра и об аналитичности решения по параметру [27, с. 8], доказано следующее утверждение:

Утверждение 1. Если матрицы $C_2 \leq 0$, $G_2 \leq 0$, $D_{ij} > 0$ $(i,j = 1,2)$, то в игре (1) при достаточно малых $\varepsilon \geq 0$ не существует ситуация равновесия по Нэшу, но существует ситуация равновесия по Бержу-Вайсману $(U_1^B, U_2^B) \div (u_1^B(t,x), u_2^B(t,x))$, $U_i^B \in \mathbf{U}_i$ $(i = 1,2)$ при любом выборе начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$. При этом $u_i^B(t,x)$ могут быть представлены в виде $u_i^B(t,x) = Q_i^B(t,\varepsilon)x$ $(i = 1,2)$, где для указанной постоянной $\varepsilon \geq 0$ матрицы $Q_i^B(t,\varepsilon) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$.

Заключение

В статье получены коэффициентные критерии существования равновесия по Бержу-Вайсману в бескоалиционной позиционной дифференциальной линейно-квадратичной игре двух лиц с малым влиянием одного из игроков на скорость изменения фазового вектора.

Список литературы

1. BERGE, C. (1957) *Theorie Generale des Jeux a n Personnes Games.* Paris: Gauthier-Villar.

2. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу в одной дифференциальной игре // Сложные динамические системы: сборник научных трудов. — Псков: Псковский педагогический институт, 1994. — С. 58–63.

   VAISMAN, K. S. (1994) The Berge Equilibrium in one differential game. *Complex dynamic systems: collection of scientific papers.* Pskov: Pskov Pedagogical Institute. Pp. 58–63.

3. VAISMAN, K. S. (1994) The Berge Equilibrium for linear-quadratic differential game. *Multiple criteria problems under uncertainty.* Abstracts of the 3-d International Workshop. Pp. 96.

4. Вайсман, К. С., Жуковский, В. И. Свойства равновесия по Бержу // Математические проблемы экологии: тез. докл. — Чита, 1994. — С. 27–28.

   VAISMAN, K. S., ZHUKOVSKIY, V. I. (1994) Properties of Berge Equilibrium. *Mathematical problems of ecology: Abstr. of reports.* Chita. Pp. 27–28.

5. Вайсман, К. С., Жуковский, В. И. Структура равновесных по Бержу решений // Понтрягинские чтения — V: тез. докл. — Воронеж, 1994. — С. 29.

   VAISMAN, K. S., ZHUKOVSKIY, V. I. (1994) Structure of Berge Equilibrium solutions. *Pontryagin readings — V: Abstr. of reports.* Voronezh. Pp. 29.

6. VAISMAN, K. S., ZHUKOVSKIY, V. I. (1994) The Berge Equilibrium under uncertainty. *Multiple criteria problems under uncertainty.* Abstracts of the 3-d International Workshop. Pp. 97–98.

7. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. and VAISMAN, K. S. (1994) *The Berge equilibrium: Preprint.* Tbilisi: Institute of Control System.

8. Житомирский, Г. И., Вайсман, К. С. О равновесии по Бержу // Сложные динамические системы: сборник научных трудов. — Псков: Псковский педагогический институт, 1994. — С. 52–57.

   ZHITOMIRSKIY, G. I., VAISMAN, K. S. (1994) On Berge Equilibrium. *Complex dynamic systems: collection of scientific papers.* Pskov: Pskov Pedagogical Institute. Pp. 52–57.

9. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий "Линейно-квадратичные дифференциальные игры" (раздел 3.2). — Киев: Наукова Думка, 1994. — 119–142 с.

VAISMAN, K. S. (1994) *The Berge Equilibrium / ZHUKOVSKIY, V. I. and CHIKRII, A. A. "Linear-qudratic differential games" (part. 3.2).* Kiev: Naukova Dumka.

10. Вайсман, К. С. Существование гарантированного равновесия по Бержу в одной дифференциальной игре // Понтрягинские чтения — VI: тез. докл. — Воронеж, 1995. — С. 19.

    VAISMAN, K. S. (1995) Existence of Berge Equilibrium in one differential game. *Pontryagin readings — VI: Abstr. of reports.* Voronezh. Pp. 19.

11. Вайсман, К. С. Об одном решении строго выпуклой бескоалиционной игры // Сложные управляемые системы: Межвуз. сб. науч. тр. — М.: РосЗИТЛП, 1996. — С. 13–16.

    VAISMAN, K. S. (1996) On one solution of a strictly convex non-cooperative game. *Complex managed systems: Interuniversity collection of scientific papers.* Moscow. Pp. 13–16.

12. Вайсман, К. С., Аймуханов, Н. Ж. Равновесие по Бержу в дифференциально-разностной игре // Сложные управляемые системы: Межвуз. сб. науч. тр. — М.: РосЗИТЛП, 1996. — С. 90–93.

    VAISMAN, K. S., Aimukhanov, N. J. (1996) Berge Equilibrium in a differential-difference game. *Complex managed systems: Interuniversity collection of scientific papers.* Moscow. Pp. 90–93.

13. VAISMAN, K. S. (1995) About differential game under uncertainty. *Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization.* Abstracts of Third Intern. Work.. Pp. 45–48.

14. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — СПбГУ, 1995. — 15 с.

    VAISMAN, K. S. (1995) *Berge Equilibrium, Cand. Sci.(Phys.-Math.) Dissertation.* St. Petersburg: St. Petersburg. Gos. Univ.

15. ZHUKOVSKIY, V. I., VAISMAN, K. S. (1996) About one solution in non-cooperative game. *Game Theory and Economics.* Abstr. of N.N. Vorob'ev Memorial Conference. Pp. 77.

16. ZHUKOVSKIY, V. I., MOLOSTVOV, V. S. and VAISMAN, K. S. (1997) Non-cooperative games under uncertainty. *Game Theory and Application.* III. Pp. 189–222.

17. VAISMAN, K. S. (1997) Nash equilibriums routing and Networks. *Game Theory and Application.* III. Pp. 147–160.

18. ZHUKOVSKIY, V. I., VAISMAN, K. S. To a problem about Berge equilibrium // Vestnik of the Pskov Free University. Mathematics and Computer Science. — Pskov, 1997. — V.1. — C. 49–70.

19. Вайсман, К. С. Арбитражная схема Нэша при неопределенности / В. И. Жуковский Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. — Москва: Эдиториал URSS, 2010. — 231–249 с.

    VAISMAN, K. S. (2010) *Nash arbitration scheme under uncertainty / ZHUKOVSKIY, V. I. "Cooperative games under uncertainty and their applications".* Moscow: Editorial URSS.

20. SHUBIK, M. (1961) Review of C. Berge "General theory of n-person games". *Econometrica.* 29 (4). Pp. 821.

21. RADJEF, M. (1998) Sur l'existence d'un equilibre de Berge pour un jeu differentiel a n-personnes. *Cahiers Mathematiques de l'Universite d'Oran.* (1). Pp. 89–93.

22. LARBANI, M. and LEBBAH, H. A. (1999) A concept of equilibrium for a game under uncertainty. *Europ. J. Oper. Res.* (117). Pp. 145–156.

23. COLMAN, A., KORNER, T., MUSY, O. and TAZDAIT, T. (2011) Mutual support in games: some properties of Berge equilibria. *Journal of Mathematical Psychology, Article in Press.* 29 (4). Pp. 1—10.

24. Гусейнов, А. А., Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Математические основы Золотого правила: альтруистский способ разрешения конфликтов в противоположность эгоистическому равновесию по Нэшу. — Moscow: URSS, 2016. — 256 с.

    HUSEYNOV, A. A., ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. (2016) *Mathematical foundations of the Golden rule: altruistic way of resolving conflicts as opposed egoistic to Nash equilibrium.* Moscow: USRR.

25. Жуковский, В. И., Чикрий, А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова Думка, 1994. — 320 с.

    ZHUKOVSKIY, V. I., CHIKRII, A. A. (1994) *Linear-qudratic differential games.* Kiev: Naukova Dumka.

26. Жуковский, В. И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. — М: Эдиториал USSR, 2010. — 336 с.

ZHUKOVSKIY, V. I. (1994) *Cooperative games under uncertainty and their applications.* Moscow: Editorial URSS.

27. Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 247 с.

    MISHCHENKO, E. F., ROZOV, N. H. (1975) *Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations.* Moscow: Nauka.

28. Ли, Э. Б., Маркус, Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 547 с.

    LI, E. B., MARCUS, L. (1972) *Foundations of optimal control theory.* Moscow: Nauka.

29. Жуковский, В. И., Житенева, Ю. Н., Бельских, Ю. А. Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц // Математическая теория игр и ее приложения. — 2022. — Т.11(1). — С. 39–72.

    ZHUKOVSKIY, V. I., ZHITENEVA, J., N. , BELSKIKH, J., A. (2022) Pareto equilibrium of objections and counterobjections in a differential game of three persons. *Mathematical Theory Games and its Applications.* 11 (1). Pp. 39–72.

30. ZHUKOVSKIY, V. I., ZHUKOVSKAYA, L. V., SACHKOV, S. N., SACHKOVA, E. N. (2023) Application of Lyapunov–Poincare method of small parameter for Nash and Berge equilibrium designing in one differential two-player game. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.* 33 (4). Pp. 601—624.

Цитирование: Жуковский В. И. и др. Существование равновесия по Бержу-Вайсману в одной дифференциальной позиционной игре двух лиц, в которой отсутствует равновесие по Нэшу // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 7 – 17.

УДК: 519.62
MSC2020: 91A10

POINCARÉ METHOD OF SMALL PARAMETER FOR CONSTRUCTION OF EQUILIBRIA

© V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, S. N. Sachkov, E. N. Sachkova

Lomonosov Moscow State University
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics
Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
Nakhimovskii pr., 47, Moscow, 117418,Russia
e-mail: *Zhukovskaylv@mail.ru*

State University of Humanities and Technology
ul. Zelenaya, 22, Orekhovo-Zuevo, 142611, Russia
e-mail: *snsachkov@yandex.ru*

Poincaré method of small parameter for construction of equilibria.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Sachkov S. N., Sachkova E. N.

Abstract. We consider a differential linear-quadratic noncooperative positional game, in which one of the players has a small influence on the rate of change of the state vector. For this game, the coefficient criteria for the existence of Berge and Nash equilibria are established and a design procedure for such equilibria is suggested, on the basis of dynamic programming combined with the small parameter method.

Keywords: *small parameter method, differential linear-quadratic noncooperative game, Nash equilibrium, Berge equilibrium.*

Introduction

Those readers who studied Lyapunov's stability theory surely remember algebraic coefficient criteria. The whole idea of such criteria is to establish the stability of an unperturbed motion without solving a system of differential equations using the signs of coefficients and/or relations among them. In this paper we will suggest a similar approach to equilibrium design in noncooperative linear-quadratic two-player games. More specifically, based on the sign definiteness of the quadratic forms appearing in the payoff functions of players, we will answer two questions as follows.

1. Do Berge and/or Nash equilibria exist?
2. How can they be calculated?

In fact, the answers to both questions are concealed in the possibility of judging the existence of a solution for a system of two matrix ordinary differential equations of the Riccati type that is extendable on the time interval of a game. For solving this problem, we will employ dynamic programming, the small parameter method and also Poincaré's theorem on analyticity (conditions under which a solution of a differential equation is analytic with respect to a parameter).

1. Preliminaries

Consider a noncooperative differential positional linear-quadratic two-player game described by

$$\Gamma_2 = \langle \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathbf{U}_i\}_{i=1,2}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2} \rangle.$$

Here $\{1, 2\}$ is the set of players; the n-dimensional state vector $x \in \mathbf{R}^n$ of a controlled dynamic system Σ evolves over time t in accordance with the vector ordinary differential equation

$$\dot{x}(t) = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

where $t \in [t_0, \vartheta]$ and a terminal time instant $\vartheta > t_0 \geqslant 0$ is fixed; the position of the game Γ_2 at a time instant t is represented by a pair $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^n$, where (t_0, x_0) denotes an initial position; the elements of a system matrix $A(t)$ of dimensions $n \times n$ are assumed to be continuous on $[0, \vartheta]$, and this fact will be indicated by $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$; $u_i \in \mathbf{R}^n$ gives the control of player i; $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and hence Γ_2 belongs to the class of differential positional games with a small influence of player 2 on the rate of change $\dot{x}(t)$ of the state vector $x(t)$.

A strategy U_i of player i is identified with an n-dimensional vector function $u_i(t, x)$ of the form $Q_i(t)x$, where $Q_i(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$, and this fact will be indicated by $U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x$. The set of all such strategies is

$$\mathbf{U}_i = \left\{ U_i \div Q_i(t)x \quad \forall Q_i(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta] \right\}.$$

The strategy profile of the game Γ_2 is a pair $U = (U_1, U_2) \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$. Therefore, as his strategy player i has to choose a matrix $Q_i(t)$ that is continuous on $[0, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$.

A play of the game Γ_2 is organized as follows. Based on his individual considerations (see the payoff function $J_i(U, t_0, x_0)$ defined below), each player chooses and uses his strategy $U_i^* \div u_i^* = Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$. As a result, the system (1) takes the form

$$\dot{x}(t) = [A(t) + Q_1^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)]\,x, \quad x(t_0) = x_0.$$

Such a homogeneous and linear (in variable x) system with continuous (in the variable t) coefficients has a unique continuous solution $x^*(t)$ that is extendable to $[t_0, \vartheta]$ $\forall t_0 \in [0, \vartheta)$. Using $x^*(t)$ we constructed *the realizations* $u_i^*[t] = u_i^*(t, x^*(t)) = Q_I^*(t)x^*(t)$ of the strategies $U_i^* \div Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$ chosen by the players. On such a continuous triplet $\{x^*(t), u_1^*[t], u_2^*[t] \mid t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$, *the payoff function of the player* i is a priori defined as a quadratic functional ($i = 1,2$):

$$J_i\left(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0\right) = [x^*(\vartheta)]' C_i x^*(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left\{ (u_1^*[t])' D_{i1} u_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{i2} u_2^*[t] \right\} dt. \tag{2}$$

the value of (2) is called *the payoff* of player i. In (2), the prime means transposition, and the matrices C_i and D_{ij} of dimensions $n \times n$ are assumed to be symmetric without loss of generality. Other notations involved include the following: 0_n as a null n-dimensional column vector; $u_i = \left(u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(n)}\right) \in \mathbf{R}^n (i = 1, 2)$; $V = (V_1, V_2)$; E_n and $O_{n\times n}$ as identity and null matrices, respectively, of dimensions $n \times n$; $\det B$ as the determinant of a matrix B of dimensions $n \times n$. In addition, the gradient of a scalar function $W(t, x, u_1, u_2, V)$ with respect to u_i is given by

$$\operatorname{grad}_{u_i} W(t, x, u_1, u_2, V) = \frac{\partial W}{\partial u_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial u_i^{(1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial u_i^{(n)}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

The Hessian of $W(t, x, u_1, u_2, V)$ with respect to the components $u_i \in \mathbf{R}^n$ under fixed values of all other variables is a matrix of dimensions $n \times n$ of the form

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^{(1)} \partial u_i^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^{(1)} \partial u_i^{(n)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^{(n)} \partial u_i^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^{(n)} \partial u_i^{(n)}} \end{pmatrix}.$$

For a constant and symmetric matrix D of dimensions $n \times n$, the inequality $D > 0$ (< 0, $\leqslant 0$) means that the quadratic form $u_i' D u_i$ is positive definite (negative definite, nonnegative definite, respectively). A direct componentwise verification shows that, for a constant vector $a \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u_i}(u_i' D u_i) = (D + D') u_i, \\ \frac{\partial}{\partial u_i}(a' D u_i) = D' a, \\ \frac{\partial}{\partial u_i}(a' u_i) = a, \\ \frac{\partial^2}{\partial u_i^2}(u_i' D u_i) = D + D' = \{\text{if } D = D'\} = 2D. \end{array} \tag{4}$$

For a scalar function $W(t, x, u_i)$,

$$\max_{u_i} W(t, x, u_i) = Idem\{u_i \to u_i(t, x)\}$$

means that

$$\max_{u_i} W(t,x,u_i) = W(t,x,u_i(t,x)) \ \forall t \in [0,\vartheta], \ \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{5}$$

and the identity (5) holds if

$$\left.\frac{\partial W(t,x,u_i)}{\partial u_i}\right|_{u_i(t,x)} = 0_n, \ \ \left.\frac{\partial^2 W(t,x,u_i)}{\partial u_i^2}\right|_{u_i(t,x)} < 0. \tag{6}$$

2. EXPLICIT SOLUTION OF RICCATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION

Proposition 1. Let a matrix A of dimensions $n \times n$ and also constant and symmetric matrices C and D of dimensions $n \times n$ be such that $A(\cdot) \in C^{m\times n}[0,\vartheta]$ and

$$C < 0, \ D < 0.$$

Then the solution $\Theta(t)$ of the Riccati matrix differential equation

$$\dot{\Theta} + \Theta A(t) + A'(t)\Theta - \Theta D^{-1}\Theta = O_{n\times n}, \ \Theta(\vartheta) = C, \tag{7}$$

has the form

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D^{-1} [X^{-1}(\tau)]' \, d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t), \tag{8}$$

where $X(t), \ 0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, satisfies the matrix system

$$\dot{X} = A(t)X, \ X(\vartheta) = E_n. \tag{9}$$

Proof. The matrix linear homogeneous system (9) with continuous in t coefficients has a solution $X(\cdot) \in C^{m\times n}[0,\vartheta]$ that is extendable to $[0,\vartheta]$; moreover, $\det X(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,\vartheta]$, because this matrix of dimensions $n \times n$ represents the fundamental system of solutions for the ordinary differential vector equation $\dot{x} = A(t)x$. Then two implications are true,

$$[\det X(t) \neq 0 \ \forall t \in [0,\vartheta]] \Rightarrow \left[\exists X^{-1}(t) \ \forall t \in [0,\vartheta]\right]$$

and

$$[X(\vartheta) = E_n] \Rightarrow [X^{-1}(\vartheta) = E_n].$$

From (8) it follows that, at $t = \vartheta$,

$$\Theta(\vartheta) = E_n\{C^{-1} + O_{n\times n}\}^{-1} E_n = C.$$

Once again, due to $\det X(t) \neq 0\ \forall t \in [0,\vartheta]$ we may write

$$[X^{-1}(t)X(t) = E_n] \Rightarrow \left[\dot{X}^{-1}(t)X(t) + X^{-1}(t)\dot{X}(t) = O_{n\times n}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\dot{X}^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt} = -A'(t)[X^{-1}(t)]',\ [X^{-1}(\vartheta)]' = X^{-1}(\vartheta) = E_n\right].$$

As a result,

$$\begin{array}{l} \frac{d[X^{-1}(t)]}{dt} = -X^{-1}(t)A(t),\ X^{-1}(\vartheta) = E_n, \\ \frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt} = -A'(t)[X^{-1}(t)]',\ [X^{-1}(\vartheta)]' = E_n. \end{array} \tag{10}$$

Denote by $\{\cdots\}$ the parenthesized expression in (8). In view of (10), (8) and $[X^{-1}(t)]' = [X'(t)]^{-1}$ (see [1, p. 33]), differentiating both sides of (8) with respect to t gives

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \left[\frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt}\right]\{\cdots\}^{-1}X^{-1}(t) + [X^{-1}(t)]'\left[\frac{d}{dt}\{\cdots\}^{-1}\right]X^{-1}(t) +$$

$$+[X^{-1}(t)]'\{\cdots\}^{-1}\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -A'(t)\Theta(t) + [X^{-1}(t)]'\{\cdots\}^{-1}X^{-1}(t)D^{-1}[X^{-1}(t)]'\{\cdots\}^{-1}X^{-1}(t) -$$

$$-\Theta(t)A(t) = -A'(t)\Theta(t) + \Theta(t)D^{-1}\Theta(t) - \Theta(t)A(t).$$

The proof of Proposition 2.1 is concluded by the two chains of implications

$$[D < 0] \Rightarrow [D^{-1} < 0] \Rightarrow \left[X^{-1}(\tau)D^{-1}[X^{-1}(\tau)]' < 0\ \forall \tau \in [0,\vartheta]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)D^{-1}[X^{-1}(\tau)]'\,d\tau \leqslant 0 \quad \forall t \in [0,\vartheta]\right],$$

$$\left[C^{-1} < 0 \wedge \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)D^{-1}[X^{-1}(\tau)]'\,d\tau \leqslant 0 \quad \forall t \in [0,\vartheta]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[C^{-1} + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)D^{-1}[X^{-1}(\tau)]'\,d\tau < 0\right].$$

□

Remark 1. Equation (7) appears if a saddle point $U^0 = (U_1^0, U_2^0) \in \mathbf{U}$ is designed using dynamic programming:

$$J(U_1, U_2^0, t_0, x_0) \leqslant J(U_1^0, U_2^0, t_0, x_0) \leqslant J(U_1^0, U_2, t_0, x_0),$$

$\forall (t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n,\ U_i \in \mathbf{U}_i\ (i = 1,2)$, in the zero-sum two-player modification of the game Γ_2 (i.e., the game Γ_2 with $C = C_1 = -C_2,\ D = D_{11} = -D_{22},\ D_{12} = D_{21} = O_{n\times n}$

and $J = J_1 = -J_2$). There exist several different types of the solution $\Theta(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, of equation (7), that are reducible to each other. (Recall that the solution $\Theta(t)$ is nonunique.) We have selected (8) due to its convenience for the small parameter method.

Proposition 2. Let $A(\cdot), B(\cdot) \in C^{m\times n}[0, \vartheta]$. Then the solution of the matrix differential equation

$$\dot{\Theta} + \Theta A(t) + A'(t)\Theta + B(t) = O_{n\times n},\ \Theta(\vartheta) = C, \tag{11}$$

has the form

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C + \int\limits_t^{\vartheta} X'(\tau)B(\tau)X(\tau)\,d\tau \right\} X^{-1}(t), \tag{12}$$

where $X(t)$ is the fundamental matrix of solutions for the system

$$\dot{X} = A(t)X,\ X(\vartheta) = E_n.$$

Proof. The matrix system (11) is linear in x, inhomogeneous and also consists of continuous in $t \in [0, \vartheta]$ coefficients. For any $t_0 \in [0, \vartheta)$, such a system has a unique continuous differentiable solution $\Theta(t)$, that is extendable to the interval $[0, \vartheta]$.

Finally, we will demonstrate that $\Theta(t)$ is given by (12). Really,

$$[X(\vartheta) = E_n] \Rightarrow [\det X(t) \neq 0\ \forall t \in [0, \vartheta]] \Rightarrow \left[\exists X^{-1}(t)\ \forall t \in [0, \vartheta]\right].$$

In view of (10), differentiating both sides of (12) yields

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \left[\frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt}\right]\{\cdots\}X^{-1}(t) + [X^{-1}(t)]'\left[\frac{d}{dt}\{\cdots\}\right]X^{-1}(t) +$$

$$+ [X^{-1}(t)]'\{\cdots\}\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -A'(t)\Theta(t) - B(t) - \Theta(t)A(t).$$

From (12) it follows that, at $t = \vartheta$, $\Theta(\vartheta) = E_n C E_n = C$. □

3. NO MAXIMA IN Γ_2

The next result can be used to eliminate the linear-quadratic differential games Γ_2 without any Berge and/or Nash equilibrium, depending on the sign definiteness of the quadratic forms appearing in the integrand of the payoff functions (2) of the players.

Lemma 1. *Let the quadratic form $u_1' D_{11} u_1$ in (2) be positive definite. For any strategy profile $U^* = (U_1^*, U_2^*) \in \boldsymbol{U}$, where $U_i^* \div Q_i^*(t)x$ $(i = 1, 2)$ and $Q_i^*(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$, any initial position $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$, and any constant and symmetric matrices*

C_1 and D_{12} there exists a strategy $\widetilde{U}_1 \in \boldsymbol{U}_1$, $\widetilde{U}_1 \div \widetilde{Q}_1(t)x$, of player 1 such that

$$J_1(\widetilde{U}_1, U_2^*) > J_1(U_1^*, U_2^*). \tag{13}$$

Proof. Consider some frozen strategy profile from $\mathbf{U}$,

$$U^* = (U_1^*, U_2^*) \div (Q_1^*(t)x, Q_2^*(t)x)\,,\ Q_i^*(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]\ (i=1,2),$$

and also some frozen initial position $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$.

The proof of Lemma 3.1 includes two stages as follows. In the first stage, we will establish the existence of a quadratic form $V(t,x) = x'\Theta(t)x$ for which

$$J_1(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0) = V(t_0, x_0).$$

In the second stage, we will find a strategy $\widetilde{U}_1 \in \mathbf{U}_1$ of player 1 that satisfies (13).

First stage. We construct the scalar function

$$W(t,x,u_1,u_2,V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'(A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2) + u_1' D_{11} u_1 + u_2' D_{12} u_2. \tag{14}$$

For $u_i = Q_i^*(t)x\ (i=1,2)$,

$$W[t,x,V] = W(t,x,u_1 = Q_1^*(t)x, u_2 = Q_2^*(t)x, V) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'(A(t)x + Q_1^*(t)x + \varepsilon Q_2^*(t)x) + [Q_1^*(t)x]' D_{11} Q_1^*(t)x + [Q_2^*(t)x]' D_{12} Q_2^*(t)x.$$

Next, we solve the partial differential equation

$$W[t,x,V] = 0,\ V(\vartheta, x) = x' C_1 x. \tag{15}$$

The solution $V = V(t,x)$ is constructed in the class of the quadratic forms $V(t,x) = x'\Theta(t)x$ with a matrix $\Theta(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ of dimensions $n \times n$.

Substituting $V(t,x) = x'\Theta(t)x$ into (15) and collecting like terms at the n-dimensional vector $x \in \mathbb{R}^n$ give

$$W[t,x,V(t,x) = x'\Theta(t)x] = x'\left\{\frac{d\Theta(t)}{dt} + [\Theta(t)]'[A(t) + Q_1^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)] + \right.$$

$$\left. + [A'(t) + (Q_1^*(t))' + \varepsilon(Q_2^*(t))']\Theta(t) + [Q_1^*(t)]' D_{11} Q_1^*(t) + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t)\right\} x = 0,$$

$$x'\Theta(\vartheta)x = x' C_1 x.$$

Both of these identities will hold if, for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ the matrix $\Theta(t)$ of dimensions $n \times n$ is the solution of the linear inhomogeneous matrix differential equation

$$\dot{\Theta} + \Theta'[A(t) + Q_1^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)] + [A'(t) + (Q_1^*(t))' + \varepsilon(Q_2^*(t))']\Theta + B(t) = O_{n\times n} \tag{16}$$

with continuous in t elements and the boundary-value condition

$$\Theta(\vartheta) = C_1, \tag{17}$$

where the matrix

$$B(t) = [Q_1^*(t)]' D_{11} Q_1^*(t) + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) \tag{18}$$

is continuous and symmetric.

By Proposition 2.2, the system (16), (17) has a unique continuously differentiable solution $\Theta = \Theta^*(t)$ that is extendable to any interval $[t_0, \vartheta] \subset [0, \vartheta]$. Due to the symmetric property of the matrices C and $B(t)$ from (18) and the explicit form (12) of $\Theta^*(t)$ the matrix $\Theta^*(t)$ will be symmetric for all $t \in [t, \vartheta]$.

Now, we will construct the realizations of the frozen strategies $U_i^* \div u_i^*(t,x) = Q_i^*(t)x$ along the solution $x^*(t)$ to the vector equation (1), i.e., we will construct $u_i^*[t] = Q_i^*(t)x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ $(i = 1, 2)$, where

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = A(t)x^*(t) + Q_1^*(t)x^*(t) + \varepsilon Q_2^*(t)x^*(t), \;\; x^*(t_0) = x_0.$$

In view of (15), it follows that

$$W[t, x^*(t), V(t, x^*(t)) = [x^*(t)]'\Theta^*(t)x^*(t)] = W^*[t] = 0 \tag{19}$$

for all $t \in [t_0, \vartheta]$ along the solution of (16), (17) and (1). Due to (17), we have $V(\vartheta, x^*(\vartheta)) = [x^*(\vartheta)]'C_1 x^*(\vartheta)$; then integrating both sides of (19) from t_0 to ϑ gives

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta} W^*[t]\,dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right]' [A(t)x + Q_1^*(t)x + \varepsilon Q_2^*(t)x] + \right.$$

$$\left. + [Q_1^*(t)]' D_{11} Q_1^*(t) + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) \right\} \Bigg|_{x = x^*(t)} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV^*(t, x^*(t))}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \{(u_1^*[t])' D_{11} u_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{12} u_2^*[t]\}\,dt =$$

$$= V(\vartheta, x^*(\vartheta)) - V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} \{(u_1^*[t])' D_{11} u_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{12} u_2^*[t]\}\,dt =$$

$$= [x^*(\vartheta)]' C_1 x^*(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \{(u_1^*[t])' D_{11} u_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{12} u_2^*[t]\}\,dt - V(t_0, x_0) =$$

$$= J_1(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0) - V(t_0, x_0).$$

This directly leads to the equality

$$V(t_0, x_0) = x_0'\Theta^*(t_0)x_0 = J_1(U^*, t_0, x_0).$$

Second stage. Consider the strategy $\widetilde{U}_1 \div \widetilde{u}_1(t,x) = \beta e_n' x$ of player 1, where e_n is the column vector from $\mathbb{R}^n$ consisting of 1's and a numerical parameter $\beta > 0$ will be determined below. Due to the symmetry of the matrix D_{11} and the condition $D_{11} > 0$,

$$u_1' D_{11} u_1 \geqslant \lambda_1 \|u_1\|^2 = \lambda_1 u_1' u_1 \quad \forall u_1 \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Here $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm and $\lambda_1 > 0$ is the smallest root of the characteristic equation $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$ [1, pp. 88, 109].

We will adopt the matrix $\Theta^*(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, of dimensions $n \times n$ obtained in the first stage of solving the problem (16), (17). (Note that the elements $\Theta^*(t)$ are continuously differentiable with respect to t). Taking inequality (20) into account, also we will use the strategy $U_2^* \div Q_2^*(t)x$ of player 2 chosen in the first stage.

In view of (20), following (14) we construct the function

$$\begin{gathered}
\widetilde{W}[t,x] = W(t, x, \widetilde{u}_1(t,x) = \beta x, u_2^*(t,x) = Q_2^*(t)x, V(t,x) = x'\Theta^*(t)x) = \\
= \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right]' [A(t)x + \widetilde{u}_1(t,x) + \varepsilon u_2^*(t,x)] + \\
+ [\widetilde{u}_1(t,x)]' D_{11} \widetilde{u}_1(t,x) + [u_2^*(t,x)]' D_{12} u_2^*(t,x) \geqslant \\
\geqslant x' \frac{d\Theta^*(t)}{dt} x + 2x'\Theta^*(t)[A(t) + \beta E_n + \varepsilon Q_2^*(t)]x + x'\lambda_1 \beta^2 e_n' E_n e_n x + x'[Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t)x = \\
= x' \left\{ \frac{d\Theta^*(t)}{dt} + \Theta^*(t)[A(t) + \beta E_n + \varepsilon Q_2^*(t)] + \left[A'(t) + \beta E_n + \varepsilon [Q_2^*(t)]'\right] \Theta^*(t) + \right. \\
\left. + \lambda_1 \beta^2 e_n' e_n E_n + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t) \right\} x = x' M(t,\beta) x.
\end{gathered}$$

The parenthesized matrix $M(t,\beta)$ of dimensions $n \times n$ is symmetric and has the form

$$M(t,\beta) = \lambda_1 \beta^2 n E_n + 2\beta\Theta^*(t) + K(t),$$

with the matrix

$$K(t) = \Theta^*(t) + 2\Theta^*(t)[A(t) + \varepsilon Q_2^*(t)] + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t)$$

of dimensions $n \times n$. (Recall that $e_n e_n' = n$.)

The elements of the matrix $M(t,\beta)$ are continuous in $t \in [0, \vartheta]$ and hence uniformly bounded on the compact set $[0, \vartheta]$. The factor β^2 appears in the diagonal elements of the matrix $M(t,\beta)$ only. As before, $\lambda_1 > 0$ is the smallest root of the characteristic equation $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$ and E_n denotes an identity matrix of dimensions $n \times n$.

Therefore, the constant $\beta = \beta(U_1^*) > 0$ can be chosen sufficiently large so that all leading minors of the matrix $M(t,\beta)$ become positive for all $t \in [0,\vartheta]$ and for all $\beta > \beta(U_1^*)$. By Silvester's criterion [1, p. 88], the quadratic form $x'M(t,\beta)x$ is positive definite for all $t \in [0,\vartheta]$ and constants $\beta > \beta(U_1^*)$ because the sign of $x'M(t,\beta)x$ is determined by the sign of the quadratic form $\beta^2\lambda_1 nx'x$.

We fix some constant $\beta^* > \beta(U_1^*)$; then

$$\widetilde{W}[t,x] = x'M(t,\beta^*)x > 0 \ \forall t \in [0,\vartheta] \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}. \tag{21}$$

Denote by $\widetilde{x}(t)$, $t \in [0,\vartheta]$, the solution of the vector equation

$$\dot{x} = A(t)x + \beta^* x + \varepsilon Q_2^*(t)x, \ \ x(t_0) = x_0.$$

Since $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow [\widetilde{x}(t) \neq 0_n \ \forall t \in [t_0,\vartheta]]$, according to (21) we have

$$\widetilde{W}[t,\widetilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [t_0,\vartheta].$$

Integrating both sides of this inequality from t_0 to ϑ and using the boundary-value condition $\Theta^*(\vartheta) = C_1$ from (17) and also $\widetilde{u}_1^*[t] = \beta\widetilde{x}(t)$ we obtain

$$0 < \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \widetilde{W}[t,\widetilde{x}(t)]\,dt = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right]' [A(t)x + \beta^* E_n x + \varepsilon Q_2^*(t)x] \right\}_{x=\widetilde{x}(t)} dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left\{ x'\beta^* D_{11}\beta^* x + [Q_2^*(t)]' D_{12} Q_2^*(t)x \right\}_{x=\widetilde{x}(t)} dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{dV(t,\widetilde{x}(t))}{dt} \right\} dt + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{(\widetilde{u}_1^*[t])' D_{11} \widetilde{u}_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{12} u_2^*[t]\}\,dt =$$

$$= \widetilde{x}\,'(\vartheta) C_1 \widetilde{x}(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{(\widetilde{u}_1^*[t])' D_{11} \widetilde{u}_1^*[t] + (u_2^*[t])' D_{12} u_2^*[t]\}\,dt - V(t_0,x_0) =$$

$$= J_1(\widetilde{U}_1, U_2^*, t_0, x_0) - V(t_0,x_0).$$

In combination with $J_1(U_1^*, U_2^*, t_0, x_0) = V(t_0,x_0)$ this result finally proves Lemma 3.1. ☐

Remark 2. Consider the inner optimization problem in the game Γ_2: find $\max\limits_{U_1 \in \mathbf{U}_1} J_1(U_1, U_2^*, t_0, x_0)$ subject to the constraint (1) with a fixed strategy $U_2^* \in \mathbf{U}_2$ of player 2 and any $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$. In fact, Lemma 3.1 states that this maximization problem has no solution for $D_{11} > 0$ and $x_0 \neq 0_n$. Indeed, whatever the strategy $U_1^* \in \mathbf{U}_1$

of player 1 is, there always exists a strategy $\widetilde{U}_1 \in \mathbf{U}_1$ such that

$$J_1(\widetilde{U}_1, U_2^*) > J_1(U_1^*, U_2^*)$$

for all $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$. This result can be used for eliminating the solution concepts of the games Γ_2 that maximize the payoff function of player 1 (e.g., avoiding Nash equilibrium in the game Γ_2 with $D_{11} > 0$). By analogy with Lemma 3.1, we may demonstrate that the game Γ_2 with $D_{12} > 0$ has no Berge equilibrium and hence the players should not choose this solution principle for the game Γ_2 with $D_{12} > 0$.

4. FORMALIZATION OF EQUILIBRIA AND SUFFICIENT CONDITIONS

Definition 1. A strategy profile $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathbf{U}$ is a Nash equilibrium in the game Γ_2 if, for any initial position $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$,

$$\begin{aligned} \max_{U_1 \in \mathbf{U}_1} J_1(U_1, U_2^e, t_0, x_0) &= J_1(U^e, t_0, x_0), \\ \max_{U_2 \in \mathbf{U}_2} J_2(U_1^e, U_2, t_0, x_0) &= J_2(U^e, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Definition 2. A strategy profile $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathbf{U}$ is a Berge equilibrium in the game Γ_2 if, for any initial position $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$,

$$\begin{aligned} \max_{U_2 \in \mathbf{U}2} J_1(U_1^B, U_2, t_0, x_0) &= J_1(U^B, t_0, x_0), \\ \max_{U_1 \in \mathbf{U}_1} J_2(U_1, U_2^B, t_0, x_0) &= J_2(U^B, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{23}$$

Remark 3. Despite the seeming similarity of these two types of equilibria, they have a deep distinction as follows. Unlike Definition 4.1 expressing the selfish character of each player (maximization of his own payoff), Definition 4.2 postulates altruism, guiding each player towards *the Golden Rule of ethics* — "behave unto the opponent as you would like him to behave unto you."

The *sufficient conditions* that guarantee the existence of a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in the linear-quadratic game under study (see below) are the result of applying dynamic programming to Definitions 4.1 and 4.2 respectively. They were derived in the book [2, pp. 112, 124].

First, we introduce the two scalar functions

$$W_i(t, x, u_1, u_2, V) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]' [A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] + u_1' D_{i1} u_1 + u_2' D_{i2} u_2 \ (i = 1, 2), \tag{24}$$

where $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$.

Nash equilibrium

Proposition 3. Let $V_i^e(t,x)$ $(i = 1,2)$ be unique continuously differentiable scalar functions such that

1^0)

$$V_i^e(\vartheta, x) = x'C_ix \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{25}$$

2^0) Let $u_i^e(t,x,V^e)$ $(i = 1,2)$ be vector functions such that

$$\begin{aligned} &\max_{u_1}\{W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)\} = Idem\,\{u_1 \to u_1^e(t,x,V^e)\},\\ &\max_{u_2}\{W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2,V^e)\} = Idem\,\{u_2 \to u_2^e(t,x,V^e)\}\end{aligned} \tag{26}$$

for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ and $V^e = (V_1^e, V_2^e) \in \mathbb{R}^2$.

3^0) Let the functions $V_i^e(t,x)$ $(i = 1,2)$ be the solution for the system of two partial differential equations

$$W_i(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2^e(t,x,V^e),V^e) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{27}$$

with the boundary value conditions (25) for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$.

4^0) Let strategies $U_i^e \div u_i^e(t,x,V^e(t,x)) = u_i^e[t,x]$ be such that $U_i^e \in \mathbf{U}_i$ $(i = 1,2)$.

Then

a) the strategy profile $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ is a Nash equilibrium in the game Γ_2 (in terms of Definition 4.1)

b) the Nash equilibrium payoffs are

$$J_i(U^e, t_0, x_0) = V_i^e(t_0, x_0) \quad (i = 1,2). \tag{28}$$

Remark 4. In practice, a Nash equilibrium should be designed by constructing the scalar functions $W_i(t,x,u_1,u_2,V^e)$ (24) and proceeding with items 1^0)–4^0) of Proposition 4.1. More specifically, letting $V_i^e(t,x) = x'\Theta_i^e(t)x$, $[\Theta_i^e(t)]' = \Theta_i^e(t)$ $(i = 1,2)$, we have to perform the following steps.

Step 1. Using (25), find $\Theta_i^e(\vartheta) = C_i$ $(i = 1,2)$.

Step 2. Based on (26) and (4)–(6), construct $u_i^e(t,x,V^e)$ $(i = 1,2)$.

Step 3. Find the solution $V_i^e(t,x)$ $(i = 1,2)$ for the system of two partial differential equations (27) with the boundary-value conditions (25).

Step 4. Check that $u_i^e[t,x] = u_i(t,x,V^e(t,x)) = Q_i^e(t)x$ and $Q_i^e(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ $(i = 1,2)$.

The resulting pair $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ is a Nash equilibrium in the game Γ_2 and the corresponding payoffs of the players are $J_i(U^e, t_0, x_0) = V_i^e(t_0, x_0)$ $(i = 1,2)$.

Berge equilibrium

Proposition 4. Let $V_i^B(t,x)$ $(i = 1,2)$ be unique continuously differentiable scalar functions such that

$1^0)$

$$V_i^B(\vartheta, x) = x'C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

$2^0)$ Let $u_i^B(t,x,V^B)$ $(i = 1,2)$ be vector functions such that

$$\begin{aligned} &\max_{u_2}\{W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)\} = Idem\,\{u_2 \to u_2^B(t,x,V^B)\}, \\ &\max_{u_1}\{W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)\} = Idem\,\{u_1 \to u_1^B(t,x,V^B)\} \end{aligned} \tag{30}$$

for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ and $V^B = (V_1^B, V_2^B) \in \mathbb{R}^2$.

$3^0)$ Let the functions $V_i^B(t,x)$ $(i = 1,2)$ be the solution for the system of two partial differential equations

$$W_i(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) = 0 \quad (i = 1,2) \tag{31}$$

with the boundary-value conditions (29) for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$.

$4^0)$ Let the strategies $U_i^B \div u_i^B(t,x,V^B(t,x)) = u_i^B[t,x]$ be such that $U_i^B \in \mathbf{U}_i$ $(i = 1,2)$.

Then

a) the strategy profile $U^B = (U_1^B, U_2^B)$ is a Berge equilibrium in the game Γ_2 (in terms of Definition 4.2);

b) the Berge equilibrium payoffs are

$$J_i(U^B, t_0, x_0) = V_i^B(t_0, x_0) \quad (i = 1,2) \tag{32}$$

Remark 5. Like in the case of Nash equilibrium, a Berge equilibrium should be designed in four steps corresponding to the items $1^0) - 4^0)$ of Proposition 4.2. As the functions $V_i^B(t,x)$ we should choose the quadratic form $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B(t)x$, where $[\Theta_i^B(t)]' = \Theta_i^B(t)$ for all $t \in [0,\vartheta]$ $(i = 1,2)$.

5. EXPLICIT FORM OF EQUILIBRIA

Nash equilibrium

Proposition 5. Consider the game Γ_2 with the matrices

$$D_{11} < 0, \quad D_{22} < 0, \quad C_1 < 0. \tag{33}$$

If the system of Riccati matrix equations

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^e + \Theta_1^e A(t) + A'(t)\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}\Theta_1^e - \varepsilon^2[\Theta_1^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e + \Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_1^e] - \\ -\varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n},\ \Theta_1^e(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^e + \Theta_2^e[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^e] + [A'(t) - \Theta_1^e D_{11}^{-1}]\Theta_2^e + \\ +\Theta_1^e D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n},\ \Theta_2^e(\vartheta,\varepsilon) = C_2, \end{cases} \tag{34}$$

has a solution $(\Theta_1^e(t), \Theta_2^e(t))$ that is extendable to $[0,\vartheta]$, then in the game Γ_2

a) the Nash equilibrium is given by

$$U^e = (U_1^e, U_2^e) \div (-D_{11}^{-1}\Theta_1^e(t,\varepsilon)x, -\varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(t,\varepsilon)x); \tag{35}$$

b) the Nash equilibrium payoffs of the players are

$$J_i(U^e, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i^e(t_0,\varepsilon)x_0 \ \ (i = 1,2). \tag{36}$$

Proof. Following Remark 4.2 we construct the functions

$$W_i^e(t,x,u_1,u_2,V) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]'[A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] + u_1' D_{i1}u_1 + u_2' D_{i2}u_2 \ (i = 1,2). \tag{37}$$

Step 1. In view of (25) and $V_i^e(t,x) = x'\Theta_i^e(t)x$,

$$V_i^e(\vartheta, x) = x'\Theta_i^e(\vartheta,\varepsilon)x = x'C_i x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \tag{38}$$

which gives

$$\Theta_i^e(\vartheta,\varepsilon) = C_i \ (i = 1,2). \tag{39}$$

Step 2. Due to (26),

$$\max_{u_1}\{W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)\} = Idem\,\{u_1 \to u_1^e(t,x,V^e)\}.$$

This equality holds if, according to (4)–(6),

$$\left.\frac{\partial W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)}{\partial u_1}\right|_{u_1(t,x,V^e)} = \frac{\partial V_1^e}{\partial x} + 2D_{11}u_1^e(t,x,V^e) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_1(t,x,u_1,u_2^e(t,x,V^e),V^e)}{\partial u_1^2}\right|_{u_1(t,x,V^e)} = 2D_{11} < 0,$$

for any $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ and $V^e = (V_1^e, V_2^e) \in \mathbb{R}^2$. By analogy,

$$\left.\frac{\partial W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2,V^e)}{\partial u_2}\right|_{u_2(t,x,V^e)} = \varepsilon\frac{\partial V_2^e}{\partial x} + 2D_{22}u_2^e(t,x,V^e) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2,V^e)}{\partial u_2^2}\right|_{u_2(t,x,V^e)} = 2D_{22} < 0,$$

for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ and $V^e = (V_1^e, V_2^e) \in \mathbb{R}^2$.

The second and fourth relations are true by (33). Using the first and third relations, we find

$$u_1^e(t,x,V^e) = -\frac{1}{2} D_{11}^{-1} \frac{\partial V_1^e}{\partial x}, \quad u_2^e(t,x,V^e) = -\frac{\varepsilon}{2} D_{22}^{-1} \frac{\partial V_2^e}{\partial x}. \tag{40}$$

Step 3. We write the two partial differential equations (27), with the boundary-value conditions (39) to find the two scalar functions $V_i^e(t,x)$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{gathered}
0 = W_1^e[t,x,V^e] = W_1(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2^e(t,x,V^e),V^e) = \\
= \tfrac{\partial V_1^e}{\partial t} + \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' \left[A(t)x - \tfrac{1}{2} D_{11}^{-1} \tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right] - \tfrac{\varepsilon^2}{2} \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x} + \\
+ \tfrac{1}{4} \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' D_{11}^{-1} \tfrac{\partial V_1^e}{\partial x} + \tfrac{\varepsilon^2}{4} \left[\tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]' D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x} = \\
= \tfrac{\partial V_1^e}{\partial t} + \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' A(t)x - \tfrac{\varepsilon^2}{2} \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x} - \\
- \tfrac{1}{4} \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' D_{11}^{-1} \tfrac{\partial V_1^e}{\partial x} + \tfrac{\varepsilon^2}{4} \left[\tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]' D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}, \\
W_2^e[t,x,V^e] = W_2(t,x,u_1^e(t,x,V^e),u_2^e(t,x,V^e),V^e) = \\
= \tfrac{\partial V_2^e}{\partial t} + \left[\tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]' \left[A(t)x - \tfrac{1}{2} D_{11}^{-1} \tfrac{\partial V_1^e}{\partial x} - \tfrac{\varepsilon^2}{2} D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}\right] + \\
+ \tfrac{1}{4} \left[\tfrac{\partial V_1^e}{\partial x}\right]' D_{11}^{-1} D_{21} D_{11}^{-1} \tfrac{\partial V_1^e}{\partial x} - \tfrac{\varepsilon^2}{4} \left[\tfrac{\partial V_2^e}{\partial x}\right]' D_{22}^{-1} \tfrac{\partial V_2^e}{\partial x} = 0.
\end{gathered} \tag{41}$$

In view of (4) and $V_i^e(t,x) = x'\Theta_i^e(t)x$, we obtain the gradients $\frac{\partial V_i^e}{\partial x} = 2\Theta_i^e(t)x$ and $\frac{\partial V_i^e}{\partial t} = x' \frac{d\Theta_i^e}{dt} x$. Substituting $\frac{\partial V_i^e}{\partial x}$ and $\frac{\partial V_i^e}{\partial t}$ into (41) and collecting like terms with the pairwise products of the components of the n-dimensional vector x, we arrive at the equations

$$\begin{gathered}
W_1^e[t,x,V^e] = x' \left\{ \frac{d\Theta_1^e}{dt} + \Theta_1^e A(t) + A'(t)\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}^{-1} \Theta_1^e + \right. \\
\left. + \varepsilon^2 \big[- \Theta_1^e D_{22}^{-1} \Theta_2^e - \Theta_2^e D_{22}^{-1} \Theta_1^e + \Theta_2^e D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \Theta_2^e \big] \right\} x = 0, \\
W_2^e[t,x,V^e] = x' \left\{ \frac{d\Theta_2^e}{dt} + \Theta_2^e A(t) + A'(t)\Theta_2^e - \Theta_1^e D_{11}^{-1} D_{21} D_{11}^{-1} \Theta_1^e - \right. \\
\left. - \Theta_2^e D_{11}^{-1} \Theta_1^e - \varepsilon^2 \Theta_2^e D_{22}^{-1} \Theta_2^e \right\} x = 0
\end{gathered}$$

with the boundary-value conditions

$$V_i(\vartheta, x) = x'\Theta_i^e(\vartheta, \varepsilon)x = x'C_i x \quad (i = 1, 2).$$

The identities $W_i^e[t,x,V^e(t,x)] = 0$ for all $(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ $(i = 1,2)$ hold if the system of Riccati matrix equations

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^e + \Theta_1^e A(t) + A'(t)\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}\Theta_1^e + \varepsilon^2[-\Theta_1^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e - \Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_1^e + \\ +\Theta_2^e D_{22}^{-1} D_{12} D_{22}^{-1}\Theta_2^e] = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^e(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^e + \Theta_2^e A(t) + A'(t)\Theta_2^e - \Theta_2^e D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \Theta_1^e D_{11}^{-1}\Theta_2^e + \\ +\Theta_1^e D_{11}^{-1} D_{21} D_{11}^{-1}\Theta_1^e - \varepsilon^2\Theta_2^e D_{22}^{-1}\Theta_2^e = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^e(\vartheta,\varepsilon) = C_2 \end{cases} \tag{42}$$

has a solution $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$ that is extendable to the interval $[0,\vartheta]$.

Step 4. Using the obtained solutions $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$ and (40) we find the two n-dimensional vector functions

$$\begin{aligned} u_1^e[t,x] &= u_1(t,x,V^e(t,x)) = -D_{11}^{-1}\Theta_1^e(t,\varepsilon)x, \\ u_2^e[t,x] &= u_2(t,x,V^e(t,x)) = -\varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(t,\varepsilon)x. \end{aligned} \tag{43}$$

Since $D_{11}^{-1}\Theta_1^e(\cdot,\varepsilon)$, $\varepsilon D_{22}^{-1}\Theta_2^e(\cdot,\varepsilon) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$, the Nash equilibrium in the game Γ_2 will have the form (35), and the Nash equilibrium payoffs of the players will be given by (36). ☐

Remark 6. In the case $D_{11} > 0$ and/or $D_{22} > 0$, by Lemma 3.1 at least one of the two maxima from Definition 4.1 is not achieved for any $x_0 \neq 0_n$. Really, assume on the contrary that, e.g., in the case $D_{11} > 0$ there exists a strategy $\widehat{U}_1 \in \mathbf{U}_1$ of player 1 such that, for $x_0 \neq 0_n$,

$$\max_{U_1\in\mathbf{U}_1} J_1(U_1, U_2^e, t_0, x_0) = J_1(\widehat{U}_1, U_2^e, t_0, x_0).$$

Then, according to Lemma 3.1, for the initial position $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ there also exists a strategy $\widetilde{U}_1 \in \mathbf{U}_1$ for which

$$J_1(\widetilde{U}_1, U_2^*) > J_1(\widehat{U}_1^*, U_2^*),$$

which contradicts the whole essence of the operator $\max\limits_{U_1\in\mathbf{U}_1}$. Thus, we have established the following result: if $D_{11} > 0$ and/or $D_{22} > 0$, then there exists no Nash equilibrium in the game Γ_2 for any initial position $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$).

Berge equilibrium

We will utilize Remark 4.3, repeating Steps 1 — 4 from Remark 4.2, with appropriate modifications dictated by Proposition 4.2.

Proposition 6. *Consider the game* Γ_2 *with the matrices*

$$D_{12} < 0, \quad D_{21} < 0, \quad C_2 < 0. \tag{44}$$

If the system of Riccati matrix equations

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^B + \Theta_1^B[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^B] + [A'(t) - \Theta_2^B D_{21}^{-1}]\Theta_1^B + \\ +\Theta_2^B D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\Theta_2^B - \varepsilon^2\Theta_1^B D_{12}^{-1}\Theta_1^B = O_{n\times n},\ \Theta_1^B(\vartheta,\varepsilon) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^B + \Theta_2^B A(t) + A'(t)\Theta_2^B - \Theta_2^B D_{21}\Theta_2^B + \varepsilon^2[-\Theta_2^B D_{12}^{-1}\Theta_1^B - \Theta_1^B D_{12}^{-1}\Theta_2^B + \\ +\Theta_1^B D_{12}^{-1} D_{22} D_{12}^{-1}\Theta_1^B] = O_{n\times n},\ \Theta_2^B(\vartheta,\varepsilon) = C_2, \end{cases} \tag{45}$$

has a solution $(\Theta_1^B(t,\ \varepsilon), \Theta_2^B(t,\ \varepsilon))$ *that is extendable to* $[0,\vartheta]$, *then in the game* Γ_2

a) *the Berge equilibrium is given by*

$$U^B = (U_1^B, U_2^B) \div (-D_{21}^{-1}\Theta_2^B(t,\varepsilon)x, -\varepsilon D_{12}^{-1}\Theta_1^B(t,\varepsilon)x); \tag{46}$$

b) *the Berge equilibrium payoffs of the players are*

$$J_i(U^B, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i^B(t_0,\varepsilon)x_0 \quad (i = 1, 2). \tag{47}$$

Proof. Following Remark 4.3, we construct the two scalar functions (37).

Step 1. In view of (29) and $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B(t)x$,

$$\Theta_i^B(\vartheta,\varepsilon) = C_i \ (i = 1, 2). \tag{48}$$

Step 2. Due to (30), using (4)–(6) we write

$$\left.\frac{\partial W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)}{\partial u_2}\right|_{u_2(t,x,V^B)} = \varepsilon\frac{\partial V_1}{\partial x} + 2D_{12}u_2^B(t,x,V^B) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2,V^B)}{\partial u_2^2}\right|_{u_2(t,x,V^B)} = 2D_{12} < 0 \ \textit{and}$$

$$\left.\frac{\partial W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)}{\partial u_1}\right|_{u_1(t,x,V^B)} = \frac{\partial V_2}{\partial x} + 2D_{21}u_1^B(t,x,V^B) = 0_n,$$

$$\left.\frac{\partial^2 W_2(t,x,u_1,u_2^B(t,x,V^B),V^B)}{\partial u_1^2}\right|_{u_1(t,x,V^B)} = 2D_{21} < 0,$$

for any$(t,x) \in [0,\vartheta] \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$ and $V^B = (V_1^B, V_2^B) \in \mathbb{R}^2$.

The second and fourth relations are true by (44). Using the first and third relations, we find

$$u_1^B(t,x,V^B) = -\frac{1}{2}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2^B}{\partial x},\quad u_2^B(t,x,V^B) = -\frac{\varepsilon}{2}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1^B}{\partial x}. \tag{49}$$

Step 3. Substituting (49) into (31), we obtain the system of two partial differential equations with boundary conditions (29):

$$0 = W_1^B[t,x,V^B] = W_1(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) =$$

$$
\begin{gathered}
= \frac{\partial V_1^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' \left[A(t)x - \frac{1}{2} D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2} D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right] + \\
+ \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x} = \\
= \frac{\partial V_1^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' A(t)x + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \\
- \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x}, \\
0 = W_2^B[t,x,V^B] = W_2(t,x,u_1^B(t,x,V^B),u_2^B(t,x,V^B),V^B) = \\
= \frac{\partial V_2^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' \left[A(t)x - \frac{1}{2} D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2} D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right] + \\
+ \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1}\, \frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1} D_{22} D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x} = \\
= \frac{\partial V_2^B}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' A(t)x - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{21}^{-1} \frac{\partial V_2^B}{\partial x} + \\
+ \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{\partial V_1^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1} D_{22} D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial V_2^B}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\, \frac{\partial V_1^B}{\partial x}.
\end{gathered}
$$

Letting $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B(t)x$ and $\frac{\partial V_i^B}{\partial x} = 2\Theta_i^B(t)x$, we demonstrate that due to (48) the previous equalities hold if $\Theta_i^B(t,\varepsilon)$ $(i = 1,2)$ are the solutions of the system (45). Using the resulting solution $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$ of the system (45), the explicit form of the functions $V_i^B(t,x) = x'\Theta_i^B x$ and gradients $\frac{\partial V_i^B}{\partial t} = 2\Theta_i^B x$ as well as the inclusions $D_{21}^{-1}\Theta_2^B(\cdot,\varepsilon)$, $\varepsilon D_{12}^{-1}\Theta_1^B(\cdot,\varepsilon) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ we finally prove (49). Note that the relations (47) are true according to (32). ☐

Remark 7. By analogy with Remark 5.1, we can establish the following result: if $D_{12} > 0$ and/or $D_{21} > 0$, then there are no Berge equilibria in the game Γ_2 for any initial position $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times [\mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}]$.

6. Application of small parameter method

Poincare's theorem

Thus, Propositions 5.1 and 5.2 have showed that the presence of Berge and/or Nash equilibria is connected with the existence of a solution for the corresponding systems of two matrix ordinary differential equations of the Riccati type that can be extended to the entire interval $[0,\vartheta]$ of the game. As a matter of fact, the existence of solutions in a small left neighborhood $(\vartheta - \delta, \vartheta]$ of the point $t = \vartheta$ is guaranteed by general existence theorems from the theory of ordinary differential equations. The question of the extendability of such solutions to the entire interval $[0, \vartheta]$ of the game remains open. In this section, we will try to answer it using the small parameter method. This method arose in connection with the three-body problem in celestial mechanics; it dates back to J. D'Alembert and was intensively developed starting from the end of the 19 th century. Further, from the numerous theoretical results on the small parameter method [3, 4], we will use Poincaré's theorem on the analyticity of solutions with respect to the parameter. It will be formulated for the matrix system of ordinary differential equations

$$\dot{\Theta} = \Xi(t, \Theta, \varepsilon), \quad \Theta(\vartheta, \varepsilon) = C. \tag{50}$$

The notations are the following: Θ as a matrix of dimensions $n \times n$; $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ as a matrix of dimensions $n \times n$ whose elements are functions of the variables t, Θ, and ε; ε as a small parameter such that $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, where ε_0 is a small number; C as a constant matrix of dimensions $n \times n$, $t \in [0, \vartheta]$ as continuous time. The elements of the matrix $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ are assumed to be defined and continuous on domain G, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Denote by $\Theta = \Theta(t, \varepsilon)$ a solution of (50) that satisfies the boundary value conditions $\Theta(\vartheta, \varepsilon) = C$, $(\vartheta, \varepsilon) \in G$. Together with the system (50), consider the system

$$\dot{\Theta} = \Xi(t, \Theta, 0), \quad \Theta(\vartheta, 0) = C, \tag{51}$$

which is obtained from (50) for $\varepsilon = 0$. Let $\Theta = \Theta^{(0)}(t)$ be a solution of (51) defined on $t \in [0, \vartheta]$ with the same boundary-value condition $\Theta(\vartheta) = C$. For a small value ε, the right-hand sides of these systems are close to each other.Then a natural question is: how do the solution of the systems (50) and (51) differ on the entire interval $[0, \vartheta]$? By the theorem on the continuous dependence of solutions of combined ordinary differential equations on the parameter, generally these solutions are close to each other too. Moreover, if there exists a unique solution $\Theta^{(0)}(t)$ of the system (51) and the elements of $\Xi(t, \Theta, \varepsilon)$ are holomorphic (analytic) for $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\Theta = \Theta^{(0)}(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, then for a sufficiently small value ε the solution of (50) can be written as the series

$$\Theta(t, \varepsilon) = \Theta^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Theta^{(m)}(t), \tag{52}$$

which has uniform convergence on the entire interval $[0, \vartheta]$. This fact is the core of *Poincaré's theorem.*

Among general theorems from the theory of differential equations, also we will employ the theorem on the continuous dependence of solutions on the parameter; see below.

Theorem 1. *Let the right-hand side of system* (50) *be continuously differentiable with respect to the elements of the matrix* Θ *and also continuous in* ε *on the domain* G*. Then* *for a sufficiently small value* $\varepsilon > 0$, *the solution* $\Theta(t, \varepsilon)$ *of system* (50) *is well-defined on the same interval* $[0, \vartheta]$ *as the solution of system* (51).

Nash equlubrium

We will demonstrate that the existence of a solution $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$ of the system (34) that is extendable to $[0, \vartheta]$ is a superfluous requirement of Proposition 5.1 in the case of a small value $\varepsilon > 0$. In other words, it can be neglected for sufficiently small values $\varepsilon > 0$. More specifically, we will establish the following result.

Proposition 7. Consider the game Γ_2 with the matrices

$$D_{11} < 0, \quad D_{22} < 0, \quad C_1 < 0.$$

Then for sufficiently small values $\varepsilon > 0$ the game Γ_2 has the Nash equilibrium (35) and the corresponding payoffs of the players are given by (36).

Proof. Proposition 6.1 can be proved by demonstrating that the system (34) with sufficiently small values $\varepsilon > 0$ has a solution $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$, $t \in [0, \vartheta]$, that is extendable to $[0, \vartheta]$.

To this end, we will utilize Theorem 6.1. For (34), we construct the null approximation by letting $\varepsilon = 0$. In this case, the system (34) is decomposed into two subsystems of matrix ordinary differential equations. One of them belongs to the Riccati class whereas the other is linear in $\Theta_2^{(0)}$:

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^{(0)} + \Theta_1^{(0)} A(t) + A'(t)\Theta_1^{(0)} - \Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^{(0)}(\vartheta) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2^{(0)} + \Theta_2^{(0)} \left[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^{(0)}\right] + \left[A'(t) - \Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1}\right] \Theta_2^{(0)} + \\ +\Theta_1^{(0)} D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \Theta_2^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{cases} \tag{53}$$

For $D_{11} < 0$, $C_1 < 0$ and $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0, \vartheta]$ the solution $\Theta_1^{(0)}(t)$ of the first part the system (53) exists, is continuous and extendable to $[0, \vartheta]$, symmetric ($[\Theta_1^{(0)}(t)]' = \Theta_1^{(0)}(t)$) and negative ($\Theta_1^{(0)}(t) < 0$) for all $t \in [0, \vartheta]$ and has the form

$$\Theta_1^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C_1^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D_{11}^{-1} [X^{-1}(\tau)]' \, d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t), \tag{54}$$

where $X(t)$ denotes the fundamental system of solutions for $\dot{x} = A(t)x$, $X[\vartheta] = E_n$; see Proposition 2.1. Incorporating this matrix $\Theta_1^{(0)} = \Theta_1^{(0)}(t)$ into the second part of the system, we obtain the following matrix linear inhomogeneous differential equation in $\Theta_2^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \dot{\Theta}_2^{(0)} + \Theta_2^{(0)} \left[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t)\right] + \left[A'(t) - \Theta_1^{(0)}(t) D_{11}^{-1}\right] \Theta_2^{(0)} + \\ +\Theta_1^{(0)}(t) D_{11}^{-1} D_{12} D_{11}^{-1} \Theta_1^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{gathered} \tag{55}$$

Since $\Theta_1^{(0)}(\cdot)$, $A(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$, for any constant matrix C_2 of dimensions $n \times n$ equation (55) has a continuous and extendable to $[0,\vartheta]$ solution of the form

$$\Theta_2^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C_2 + \int\limits_t^{\vartheta} X'(\tau)B_1(\tau)X(\tau)\,d\tau \right\} X^{-1}(t), \tag{56}$$

with the continuous and symmetric matrix

$$B_1(t) = \Theta_1^{(0)}(t)D_{11}^{-1}D_{12}D_{11}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t).$$

of dimensions $n \times n$; see Proposition 2.2. From (56) and the symmetry of C_2 and $B(t)$, it follows that (56) holds for any $t \in [0,\vartheta]$ (like in (54), $X(t)$ denotes the fundamental matrix). Consequently, the system (34) with $\varepsilon = 0$ has a continuous and extendable to $[0,\vartheta]$ solution $(\Theta_1^{(0)}(t), \Theta_2^{(0)}(t))$. Therefore, by Theorem 6.1 the system (34) with sufficiently small values $\varepsilon > 0$ also has an extendable to $[0,\vartheta]$ solution $(\Theta_1^e(t,\varepsilon), \Theta_2^e(t,\varepsilon))$. And Proposition 6.1 directly follows from Proposition 5.1. ☐

Berge equilibrium

Like for Nash equilibrium, we will demonstrate that the existence of a solution $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$ of the system (45) that is extendable to $[0,\vartheta]$ is a superfluous requirement of Proposition 5.2, which can be replaced by the smallness of $\varepsilon > 0$.

Proposition 8. Consider the game Γ_2 with the matrices

$$D_{12} < 0, \quad D_{21} < 0, \quad C_2 < 0.$$

Then for sufficient small values $\varepsilon > 0$, the game Γ_2 has the Berge equilibrium (46) and the corresponding payoffs of the players are given by (47).

Proof. As before, using Theorem 6.1 we will prove that the solution of the system (45) is extendable to $[0,\vartheta]$. By analogy with Proposition 6.1 we construct the null approximation $(\widetilde{\Theta}_1^{(0)}(t), \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t))$ by letting $\varepsilon = 0$ in (45). As a result, the system (45) is decomposed into the two subsystems of matrix nonlinear differential equations

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{\Theta}}_1^{(0)} + \widetilde{\Theta}_1^{(0)}\left[A(t) - D_{21}^{-1}\widetilde{\Theta}_2^{(0)}\right] + \left[A'(t) - \widetilde{\Theta}_2^{(0)}D_{21}^{-1}\right]\widetilde{\Theta}_1^{(0)} + \\ +\widetilde{\Theta}_2^{(0)}D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\widetilde{\Theta}_2^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \widetilde{\Theta}_1^{(0)}(\vartheta) = C_1, \\ \dot{\widetilde{\Theta}}_2^{(0)} + \widetilde{\Theta}_2^{(0)}A(t) + A'(t)\widetilde{\Theta}_2^{(0)} - \widetilde{\Theta}_2^{(0)}D_{21}^{-1}\widetilde{\Theta}_2^{(0)} = O_{n\times n}, \quad \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(\vartheta) = C_2. \end{cases} \tag{57}$$

For $D_{21} < 0$ and $C_2 < 0$ the solution $\widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t)$ for the matrix system of Riccati differential equations (the second equation in (57)) exists, is continuous and extendable to $[0,\vartheta]$, symmetric $([\widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t)]' = \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t))$ and negative $(\widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) < 0)$ for all $t \in [0,\vartheta]$ and has the form

$$\widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C_2^{-1} + \int\limits_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D_{21}^{-1} [X^{-1}(\tau)]' \, d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t). \tag{58}$$

Incorporating the solution $\widetilde{\Theta}_2^{(0)} = \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t)$ into the first part of (57) we obtain the following matrix linear inhomogeneous ordinary differential equation in $\widetilde{\Theta}_1^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \dot{\widetilde{\Theta}}_1^{(0)} + \widetilde{\Theta}_1^{(0)} \left[A(t) - D_{21}^{-1} \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) \right] + \left[A'(t) - \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) D_{21}^{-1} \right] \widetilde{\Theta}_1^{(0)} + \\ + \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1} \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \quad \widetilde{\Theta}_1^{(0)}(\vartheta) = C_1. \end{gathered}$$

In view of the inclusion $\widetilde{\Theta}_2^{(0)}(\cdot), A(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta]$ and Proposition 2.2, the explicit solution is given by

$$\widetilde{\Theta}_1^{(0)}(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C_1 + \int\limits_t^{\vartheta} X'(\tau) B_2(\tau) X(\tau) \, d\tau \right\} X^{-1}(t), \tag{59}$$

with the continuous and symmetric matrix

$$B_2(t) = \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1} \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t)$$

of dimensions $n \times n$.

Clearly, the continuous matrix $\widetilde{\Theta}_1^{(0)}(t)$ of dimensions $n \times n$ well-defined for all $t \in [0,\vartheta]$ and symmetric. Hence, for $\varepsilon = 0$ the null approximation $(\widetilde{\Theta}_1^{(0)}(t), \widetilde{\Theta}_2^{(0)}(t) \big| t \in [0,\vartheta])$ of the solution $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon) \big| t \in [0,\vartheta])$ of the system (45) is extendable to $[0,\vartheta]$. By Theorem 6.1 the system (45) with sufficiently small values $\varepsilon > 0$ has an extendable to $[0,\vartheta]$ solution $(\Theta_1^B(t,\varepsilon), \Theta_2^B(t,\varepsilon))$. And Proposition 6.2 directly follows from Proposition 5.2. $\square$

7. Coefficient criteria of existence

This section is devoted to the coefficient criteria of the existence (and nonexistence!) of Nash and/or Berge equilibria (in terms of Definitions 4.1 and 4.2 respectively) in the differential positional linear-quadratic game Γ_2 with a small influence of one player on the rate of change $\dot{x}(t)$ of the state vector $x(t)$. In the game Γ_2 the state vector evolves in accordance with the vector linear differential equation

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0,$$

and the payoff function of player i is described by the quadratic functional

$$J_i(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta) C_i x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \{ u_1'[t] D_{i1} u_1[t] + u_2'[t] D_{i2} u_2[t] \} \, dt \ (i = 1{,}2),$$

where x, $u_i \in \mathbb{R}^n$. As before, the prime indicates transposition. The strategy set of player i has the form

$$\mathbf{U}_i = \left\{ U_i \div u_i(t,x) \mid u_i(t,x) = Q_i(t)x \ \forall Q(\cdot) \in C^{n\times n}[0,\vartheta] \right\};$$

the game ends at a fixed time instant $\vartheta > t_0 \geqslant 0$; the symmetric constant matrices C_i and D_{ij} of dimensions $n \times n$ are given; the notation $D > 0$ (< 0) means that a quadratic form $x'Dx$ is positive definite (negative definite, respectively); $\varepsilon \geqslant 0$ is a small scalar parameter. The players choose their strategies $U_i \div Q_i(t)x$, find the solution $x(t)$ of the system equation

$$\dot{x} = A(t)x + Q_1(t)x + \varepsilon Q_2(t)x, \quad x(t_0) = x_0,$$

construct the realizations $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ of the chosen strategies U_i and then calculate their payoffs $J_i(U_1, U_2, t_0, x_0)$ using $x(t)$ and $u_i[t]$. In the noncooperative statement of the game Γ_2 the players have to answer two questions as follows.

1. Which of the solution concepts (Nash or Berge equilibrium) should they adhere to?
2. How can these equilibria be constructed?

Table 1. Coefficient criteria of equilibrium

	D_{11}	D_{12}	D_{21}	D_{22}	C_1	C_2	NE	BE
1	$D_{11} < 0$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$\forall$	$\exists$	
2	$\forall$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$\forall$	$\forall$	$C_2 < 0$		$\exists$
3	$D_{11} < 0$	$D_{12} < 0$	$D_{21} < 0$	$D_{22} < 0$	$C_1 < 0$	$C_2 < 0$	$\exists$	$\exists$
4	$D_{11} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\nexists$	
5	$\forall$	$D_{12} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\nexists$
6	$\forall$	$\forall$	$D_{21} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$		$\nexists$
7	$\forall$	$\forall$	$\forall$	$D_{22} > 0$	$\forall$	$\forall$	$\nexists$	

The answer to the first question is provided by Table 7.1. Here NE and BE denote Nash and Berge equilibrium, respectively; $\exists$, $\nexists$ and $\forall$ are the existential, non-existential and universal quantifiers, respectively. Proposition 6.1 and 6.2 as well as Remarks 5.1 and 5.2 are combined in Table 7.1, which presents the coefficient criteria of choosing (or rejecting) Nash and/or Berge equilibrium in the game Γ_2.

For example, if $D_{12} < 0$, $D_{21} < 0$, $C_2 < 0$ then there exists a Berge equilibrium; if simultaneously $D_{22} > 0$, then there does not exist a Nash equilibrium (see columns 2 and 7 of the table below).

The answer to the second question is based on Poincaré's theorem; see the beginning of Section 6. More specifically, we have to consider not only the null term ($\varepsilon = 0$) of the matrix expansion

$$\Theta(t,\varepsilon) = \Theta^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Theta^{(m)}(t),$$

but also the subsequent ones $\Theta^{(1)}(t),\ \Theta^{(2)}(t),\ldots$. This approach will be illustrated by an example of Berge equilibrium design for the game Γ_2: we will find the solution of (45) and then construct the strategies (46) and the corresponding payoffs (47). In view of $\Theta^B(t,\varepsilon) = \Theta_1^{(0)}(t) + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)}(t) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(t) + \ldots$ and (45) we have

$$\begin{aligned}
&(\dot\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\dot\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\dot\Theta_1^{(2)} + \ldots) + (\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots)[A(t) - \\
&-D_{21}^{-1}(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)] + \\
&+\big[A'(t) - (\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)D_{21}^{-1}\big](\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots) + \\
&+(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots) - \\
&-\varepsilon^2(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots)D_{21}^{-1}(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots) = O_{n\times n}, \\
&(\Theta_1^{(0)}(\vartheta) + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)}(\vartheta) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(\vartheta) + \ldots) = C_1, \\
&(\dot\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\dot\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\dot\Theta_2^{(2)} + \ldots) + (\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)A(t) + \\
&+A'(t)(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots) - \\
&-(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)D_{21}(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots) + \\
&+\varepsilon^2[-(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots)D_{12}^{-1}(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots) - \\
&-(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots)D_{12}^{-1}(\Theta_2^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)} + \ldots) + \\
&+(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots)D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}(\Theta_1^{(0)} + \varepsilon^1\Theta_1^{(1)} + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)} + \ldots)] = O_{n\times n}, \\
&(\Theta_2^{(0)}(\vartheta) + \varepsilon^1\Theta_2^{(1)}(\vartheta) + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(\vartheta) + \ldots) = C_2.
\end{aligned} \tag{60}$$

According to the proof of Proposition 6.2, the null approximations $\Theta_i^{(0)}(t)$ $(i = 1,2)$ satisfy the system (57) and have the explicit forms (58) and (59) respectively, where $\widetilde\Theta_i^{(0)}(t) = \Theta_i^{(0)}(t)\ \forall t \in [0,\vartheta]$, $(i = 1,2)$. Equalizing the terms with the factor ε in (60), we obtain the following system of two matrix linear homogeneous differential equations with time-continuous coefficients to calculate the first approximations:

$$\begin{cases}
\dot\Theta_1^{(1)} + \Theta_1^{(1)}\left[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)\right] + \left[A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}\right]\Theta_1^{(1)} + \\
+\Theta_2^{(1)}D_{21}^{-1}[D_{11}D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)] + [\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11} - \Theta_1^{(0)}(t)]D_{21}^{-1}\Theta_2^{(1)} = O_{n\times n}, \\
\quad \Theta_1^{(1)}(\vartheta) = O_{n\times n}, \\
\dot\Theta_2^{(1)} + \Theta_2^{(1)}\left[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)\right] + \left[A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}\right]\Theta_2^{(1)} = O_{n\times n}, \\
\quad \Theta_2^{(1)}(\vartheta) = O_{n\times n}.
\end{cases}$$

Obviously, it has the trivial solution

$$\Theta_1^{(1)}(t) = \Theta_2^{(1)}(t) = O_{n\times n} \quad \forall t \in [0,\vartheta]. \tag{61}$$

Now, equalizing the terms with the factor ε^2 in (60) and using (61), we derive the following system of two matrix linear inhomogeneous differential equations with time-continuous coefficients to calculate the second approximations $\Theta_1^{(2)}(t)$ and $\Theta_2^{(2)}(t)$:

$$\begin{aligned}&\dot{\Theta}_1^{(2)} + \Theta_1^{(2)}\Big[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)\Big] + \Big[A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}\Big]\Theta_1^{(2)} + \\ &+\Theta_2^{(2)}D_{21}^{-1}[D_{11}D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)] + [\Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}D_{11} - \Theta_1^{(0)}(t)]D_{21}^{-1}\Theta_2^{(2)} - \\ &-\Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \quad \Theta_1^{(2)}(\vartheta) = O_{n\times n},\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\Theta}_2^{(2)} + \Theta_2^{(2)}\Big[A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)\Big] + \Big[A'(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{21}^{-1}\Big]\Theta_1^{(2)} + \\ &+\Theta_1^{(0)}D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t) = O_{n\times n}, \\ &\quad \Theta_2^{(2)}(\vartheta) = O_{n\times n}.\end{aligned} \tag{63}$$

We find the explicit-form solution of (62)–(63). First, using Proposition 2.2 we construct the solution $\Theta_2^{(2)}(t)$ of the second matrix equation from (62)–(63). For this purpose, we write the fundamental system of solutions $Y(t)$ for the vector differential equation ($y \in \mathbb{R}^n$):

$$\dot{y} = [A(t) - D_{21}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t)]y, \quad Y(\vartheta) = E_n.$$

According to Proposition 2.2 the solution of (63) takes the form

$$\Theta_2^{(2)}(t) = [Y^{-1}(t)]'\left\{\int\limits_t^{\vartheta} Y'(\tau)L(\tau)Y(\tau)\,d\tau\right\}Y^{-1}(t),$$

where

$$L(t) = \Theta_1^{(0)}D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_2^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_1^{(0)}(t) - \Theta_1^{(0)}(t)D_{12}^{-1}\Theta_2^{(0)}(t).$$

Substituting $\Theta_2^{(2)} = \Theta_2^{(2)}(t)$ into (62) we obtain a matrix linear inhomogeneous differential equation with the null boundary-value condition. Its explicit solution $\Theta_1^{(2)}(t)$, like the solution of the second equation from (62) is found using Proposition 2.2. Finally, with the resulting approximations $\Theta_i^{(j)}(t)$ ($j = 0, 1, 2;\ i = 1, 2$), (15) and (16) the Berge equilibrium in the game Γ_2 can be written as

$$U^B = (U_1^B, U_2^B) \div (-D_{21}^{-1}[\Theta_2^{(0)}(t) + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(t)]x, -\varepsilon D_{12}[\Theta_1^{(0)}(t) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(t)]x).$$

(The accuracy is up to the second approximation.) The corresponding payoffs of the players are given by

$$J_1(U^B, t_0, x_0) = x_0'[\Theta_1^{(0)}(t_0) + \varepsilon^2\Theta_1^{(2)}(t_0)]x_0,$$

$$J_2(U^B, t_0, x_0) = x_0'[\Theta_2^{(0)}(t_0) + \varepsilon^2\Theta_2^{(2)}(t_0)]x_0.$$

Concluding this paper, we suggest that the solution of any game (in particular, Γ_2) should be described by a pair

$$\left(U^S = (U_1^S, U_2^S),\ J^S = (J_1(U^S, t_0, x_0), J_2(U^S, t_0, x_0))\right).$$

In this case, a strategy profile U^S determines the behavioral rules of the players, and J^S their payoffs gained.

REFERENCES

1. Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

   VOEVODIN, V. and KUZNETSOV, YU. (1984) *Matrices and calculations.* Moscow: Nauka.

2. Жуковский, В. И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий. — Киев: Наукова Думка, 1994. — 320 с.

   ZHUKOVSKIY, V. and CHIKRII, A. (1994) *Linear-quadratic differential games.* Kyiv: Naukova Dumka.

3. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. — М.: URSS, 2020. — 494 с.

   MALKIN, I. (2020) *Some problems of theory of non-linear oscillations.* Moscow: URSS.

4. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М.: Наука, 1975. — 248 с.

   MISHCHENKO, E. and ROZOV, N. (1975) *Differential equations with small parameter and Relaxation oscillations.* Moscow: Nauka.

Цитирование: Zhukovskiy V. I. et al. Poincaré method of small parameter for construction of equilibria // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 18–43.

УДК: 517.968

MSC2010: 34A35

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

© А. Л. Джабраилов

ФГБОУ ВО "Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова"
Россия, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
e-mail: *ahmed_0065@mail.ru*

Study of a generalized boundary value problem for an infinite order differential equation.

Dzhabrailov A. L.

Abstract.

The article studies various aspects of the existence of solutions to a linear differential equation of infinite order with constant coefficients. It is noted that earlier researchers did not obtain any significant results even for a linear differential equation of infinite order with constant coefficients devoted to the study of boundary value problems. This is primarily due to the fact that there is no more or less universal method for reducing a differential equation of infinite order to an infinite system of differential equations, the theory of which was well developed in [3, 5]. The work is devoted to the consideration of a general differential equation of infinite order

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) y^{(j)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$$

boundary value problem with multipoint functional conditions

$$y^{(k_i-1)}\left(x_{i,k_i}\right) = \Phi_{i,k_i}\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right),$$

where $x_{i,k_i} \in [a,b]$, $k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1,m}$, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, n — finite natural number, $n_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, and $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$;

$$y^{(i-1)}\left(x_i\right) = \Phi_i\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right), \;\; i = n+1, \; n+2, \ldots$$

That is, the problem of reducing one generalized multipoint-functional boundary value problem for a nonlinear differential equation of infinite order to a boundary value problem for an infinite system of differential equations is considered by using theories of infinite definitions and solvability of infinite systems of algebraic equations, substantiated in the works of Koch and Poincaré [4]. The author uses the method of linear mappings, which establishes a connection between the space of infinitely differentiable functions $C^{(\infty)}(a,b)$ and the space of infinite-dimensional continuous vector functions $C_\infty(a,b)$ with continuous derivatives on the segment $[a, b]$ with using some given non-singular matrix $A(x)$ with continuously differentiable elements. The solution to the problem posed and its derivatives up to infinite order are sought in the form of some functional series compiled from the matrix $A(x)$ and elements of the space $C_\infty\,(a, b)$. Theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved using the results of A. Poincaré related to the convergence of certain series to ensure the solvability of the corresponding infinite algebraic systems in the space l_1 [8].

When using Koch conditions for this purpose [3, 9], which provide solutions to such systems in l_2 order to construct a system of integral-functional equations, after substitution, the proof of the corresponding theorem is given in space $C_\infty\,(a, b)$ with the norm $||\bar{y}|| = \max\limits_{a\le x\le b} ||\bar{y}||_{l_2} = \max\limits_{a\le x\le b} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i(x)|^2\right)^{1/2}$ and the necessary metric.

Keywords: *differential equation of infinite order, infinite determinants, systems of differential and algebraic equations, multipoint functional conditions, linear mappings, theorems on the existence and uniqueness of a solution.*

1. Введение

В публикациях [1, 2] приводится библиография известных работ по исследованию различных аспектов существования решений линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Однако авторы не получили сколь-нибудь значимых результатов даже для этого уравнения [1], посвященных исследованию краевых задач. Связанно это прежде всего с фактом отсутствия более-менее универсального метода сведения дифференциального уравнения бесконечного порядка к бесконечной системе дифференциальных уравнений, теория которых неплохо разработана [3, 5].

Данная работа посвящена рассмотрению для общего дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) y^{(j)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right) \tag{1}$$

краевой задачи с многоточечно-функциональными условиями

$$y^{(k_i-1)}\left(x_{i,k_i}\right) = \Phi_{i,k_i}\left(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right), \tag{2}$$

где $x_{i,k_i} \in [a, b],\ k_i = \overline{1, n_i},\ i = \overline{1, m},\ m \in \{1, 2, \dots, n\}, n-$конечное натуральное число, $n_i \in \{0, 1, \dots, n\}$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$;

$$y^{(i-1)}\left(x_i\right) = \Phi_i\left(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right),\ \ i = n+1,\ n+2, \dots \tag{3}$$

Краевая задача в такой постановке еще никем не рассматривалась.

Функции $a_j(x),\ j = 1, 2, \dots,\ f(x, y, y', .., y^{(\nu-1)}, \dots)$ считаются непрерывными по своим аргументам в области $D\colon \{|y^{(i)}| \le d_i,\ i = 0, 1, \dots,\ x \in [a, b]\}$ (см. [3]) и допускается выполнение неравенства

$$\left|f\left(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right)\right| \le M, \tag{4}$$

M — некоторое число, и условия Липшица

$$|f\left(x, u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots\right) - f\left(x, v_1, v_2, \dots, v_\nu, \dots\right)| \le L(x) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i - v_i|\,, \tag{5}$$

Для любых $u = (u_i)_{i=1}^{\infty},\ v = (v_i)_{i=1}^{\infty} \in D,\ L(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

2. Методы

Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве $C^{(\infty)}(a, b)$ бесконечно непрерывно-дифференцируемых функций $y(x)$ с нормой $||y|| = \max\limits_{a \le x \le b} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|y^{(i-1)}(x)\right|$ и соответствующей метрикой. Естественно, значения $y(x), y'(x), \dots, y^{(\nu-1)}(x), \dots$ при $x \in [a, b]$ не должны выходить из области $\left|y^{(i-1)}(x)\right| \le d_{i-1},\ i = 1, 2, \dots$

Допускается, что функционалы Φ_{i,k_i}, Φ_i по $y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots$ непрерывны (см. [3, 5]) и для любой функции $y(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ ограничены, т. е.

$$\begin{aligned} &\left|\Phi_{i,k_i}\left(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right)\right| \le M_{i,k_i},\ \ i = 1, 2, \dots, m. \\ &\left|\Phi_j\left(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots\right)\right| \le M_j,\ \ j = n+1, n+2, \dots, \end{aligned} \tag{6}$$

а также при произвольном подборе двух функций $u(x), v(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ имеют место условия типа Липшица

$$\left|\Phi_{i,k_i}\left(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots\right) - \Phi_{i,k_i}\left(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots\right)\right| \le L_{i,k_i}||u - v||,\ i = \overline{1, m},$$

$$\left|\Phi_i\left(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots\right) - \Phi_i\left(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots\right)\right| \le \tilde{L}_i||u - v||,\ i = n+1, n+2, \dots \tag{7}$$

$M_{i,k_i}, M_j, L_{i,k_i}, \tilde{L}_i$ — некоторые числа.

Теперь возьмем пространство бесконечномерных непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $C'_\infty(a, b)$ и между его элементами $\bar{y}(x) = (y_i(x))_{i=1}^{\infty}$ и элементами $y(x)$ пространства $C^{(\infty)}(a, b)$ устанавливаем взаимнооднозначное соответствие путем линейных отображений [6, 7]

$$y^{(i-1)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}(x) y_j(x),\ \ i = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

с помощью бесконечной невырожденной матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{\infty}$ с непрерывно-дифференцируемыми на $[a, b]$ элементами $a_{ij}(x), i, j = 1, 2\ldots$ Для обеспечения неравенства $\det A(x) \neq 0$ положим $a_{i,j}(x) = \tilde{a}^*_{i,j}(x)+\delta_{i,j}$, $a_{i,i}(x) = \tilde{a}^*_{i,i}(x)+1$, $a_{i,j}(x) = a^*_{i,j}(x)$, $\delta_{i,j} = 0$, $i \neq j$, и считаем, что функции $\tilde{a}^*_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют всем ограничениям Коха и Пуанкаре [3, 4] (о них будем говорить позже), позволяющим разрешить бесконечную систему алгебраических уравнений (8) относительно $y_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, в случае необходимости. Разумеется, мы вынуждены наделять функции $a_{ij}(x), y_j(x)$ в (8) всеми необходимыми свойствами, обеспечивающими равномерную сходимость на сегменте $[a, b]$ всех функциональных рядов из (8) и вновь полученных путем различных операций. По смыслу формул (8) последовательным дифференцированием при $i = 1, 2, \ldots$ и приравниванием результата дифференцирования с правой частью последующего равенства, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}(x) y'_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{i+1,j}(x) - a'_{i,j}(x)\right] y_j(x), \ i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Для получения (9) использованы равенства

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}(x) y_j(x), \ y^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[a'_{k+1,j}(x) y_j(x) + a_{k+1,j}(x) y'_j(x)\right], \ k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Эти выражения подставим в уравнение (1) и сгруппируем соответствующие слагаемые, появится еще одно уравнение

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{0,j}(x) y'_j(x) = f\left(x, \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}(x) y_j(x), \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j}(x) y_j(x), \ldots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{\nu,j}(x) y_j(x), \ldots\right) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[a_i(x) a'_{i,j}(x) + a_0(x) a_{1,j}(x)\right] y_j(x). \tag{11}$$

Объединяя (9) и (11) составим новую систему

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}(x) y'_j(x) = f_i\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots\right), \ i = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

где

$$a_{0,j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) a_{i,j}(x), \ \ j = 1, 2, \ldots$$

$$f_i\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots\right) =$$

$$= \begin{cases} f\left(x, \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{1,j}(x)y_j(x), \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{2,j}(x)y_j(x), \ldots, \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{\nu,j}(x)y_j(x), \ldots\right) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j(x)y_j(x), \;\; i = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left[a_{i+1,j}(x) - a'_{i,j}(x)\right] y_j(x), \;\; i = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{13}$$

Если обозначить $a^*_{i,j}(x) = a_{i-1,j}(x) - \delta_{i,j},\ i, j = 1, 2, \ldots,\ \delta_{i,j} = 1$ для $i = j$ и $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j$, то по (12) запишем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $y'_j(x),\ j = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[a^*_{i,j}(x) + \delta_{i,j}\right] y'_j(x) = f_{i-1}\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_\nu(x), \ldots\right), \; i = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

с бесконечным определителем из элементов матрицы $A^*(x) = \left(a^*_{i,j}(x) + \delta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$:

$$\det A^*(x) = \begin{vmatrix} a^*_{1,1}(x) + 1 & a^*_{1,2}(x) & a^*_{1,3}(x) & \ldots & a^*_{1,\nu}(x) & \ldots \\ a^*_{2,1}(x) & a^*_{2,2}(x) + 1 & a^*_{2,3}(x) & \ldots & a^*_{2,\nu}(x) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{\nu,1}(x) & a^*_{\nu,2}(x) & a^*_{\nu,3}(x) & \ldots & a^*_{\nu,\nu}(x) + 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Пусть следующий двойной функциональный ряд

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \left|a^*_{k,s}(x)\right| \tag{16}$$

для всех $x \in [a, b]$ сходится. В этом случае бесконечный определитель из (15) сходится и определитель n-го порядка

$$\det A^*_n(x) = \begin{vmatrix} a^*_{1,1}(x) + 1 & a^*_{1,2}(x) & \ldots & a^*_{1,n}(x) \\ a^*_{2,1}(x) & a^*_{2,2}(x) + 1 & \ldots & a^*_{2,n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{n,1}(x) & a^*_{n,2}(x) & \ldots & a^*_{n,n}(x) + 1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

стремиться при $n \to \infty$ к определителю $\det A^*(x)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \det A^*_n(x) = \det A^*(x), \tag{18}$$

что следует из абсолютной сходимости бесконечного определителя (15) по признаку А. Пуанкаре [3, 5, 8]. Из сходимости двойного функционального ряда (16) следует сходимость бесконечных определителей $\det A_k^*(x)$и справедливость равенств

$$\det A_k^*(x) = \lim_{n\to\infty} \det A_{n,k}^*(x), \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

где определитель $\det A_{n,k}^*$ получается из определителя $\det A_n^*(x)$ заменой k-го столбца столбцом из правых частей (14). К тому же определители $\det A_k^*(x)$ для каждого значения $x \in [a, b]$ будут ограниченными. Допустив, что в области определения функций $f_{i-1}\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right)$ выполняется условие

$$\sup_i\{|f_{i-1}\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right)|\} \leq M^*(x), \ \ i = 1, 2, \dots \tag{20}$$

где $M^*(x)$ — ограниченная на $[a, b]$ функция, из (14) находим

$$y_k'(x) = \frac{\det A_k^*(x)}{\det A^*(x)}, \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{21}$$

предположив

$$\det A^*(x) \neq 0, \ \ x \in [a, b]. \tag{22}$$

При этом для каждого значения $x \in [a, b]$

$$\sup_k\{|y_k'(x)|\} < \infty, \ \ k = 1, 2, \dots \tag{23}$$

и

$$\det A_k^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{j,k}^*(x) f_{j-1}\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right), \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

где $A_{i,k}^*(x)$ — алгебраическое дополнение элемента $\left(a_{i,k}^*(x) + \delta_{i,k}\right)$ матрицы $A^*(x)$. Следовательно, окончательно систему (21) представим в виде

$$y_k'(x) = F_k\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right), \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{25}$$

$$\begin{gathered} F_i\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right) = \\ = \left(\det A^*(x)\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} A_{j,i}^*(x) f_{j-1}\left(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_\nu(x), \dots\right), i = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{26}$$

3. Результаты

В дальнейших рассуждениях и при исследовании различных краевых задач для дифференциального уравнения бесконечного порядка (1) система (25) будет играть главную роль, поэтому покажем, как ее можно получить и по-другому, используя выводы из работ Коха [3, 9]. По определению Коха бесконечный определитель (15) при фиксированном $x \in [a,b]$ абсолютно сходится, если бесконечное произведение

$$P = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_{i,i}(x)) \tag{27}$$

абсолютно сходиться, а также абсолютно сходится сумма всех произведений, которые получаются из P с помощью всевозможных перестановок вторых индексов. Для абсолютной сходимости определителя по Коху достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a^*_{i,i}(x)|, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} a^{*2}_{i,k}(x). \tag{28}$$

Эти условия будут соблюдены, если все миноры определителя $\det A^*(x)$абсолютно сходятся, так же, как и суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta^2_{i,k}(x), \; \sum_{k=1}^{\infty} \Delta^2_{i,k}(x), \tag{29}$$

где $\Delta_{i,k}(x)$ — минор определителя (15), соответствующий i-ой строке и k-му столбцу. Тогда известные свойства конечных определителей справедливы и для бесконечных определителей и остается в силе предельный переход в (18).

В итоге при фиксированном $x \in [a,b]$ система (12) обладает единственным решением $y'_i(x), \;\; i = 1, 2, \ldots$ в l_2, если $\{f_i\} \in l_2$ и выполняется неравенство (23). Остаются в силе и формулы (21), (24), (25). Последние утверждения связаны со свойствами вполне непрерывной формы Гильберта [3, 4, 9].

Итак, уравнение (1) сведено к бесконечной системе дифференциальных уравнений (25) применением линейных преобразований (8). Обратимся к краевым условиям (2), (3). Равенства (2) отображения (8) переводят в функциональные равенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_i,j}\left(x_{i,k_i}\right) y_j\left(x_{i,k_i}\right) = \Phi^*_{i,k_i}\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu \ldots\right), \;\; k_i = \overline{1, n_i}, \;\;\; i = \overline{1, m}, \tag{30}$$

где Φ^*_{i,k_i} получаются из Φ_{i,k_i} заменой выражений $y^{(k_i-1)}(x)$ по формулам (8).

Аналогично, из (3) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\left(x_i\right) y_j\left(x_i\right) = \Phi^*_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right), \;\;\; i = n+1, n+2, \ldots \tag{31}$$

По самому методу получения (25), (30) и (31) ясно, что каждое решение задачи (1)–(3) будет решением и задачи (25), (30), (31) и наоборот. Поэтому для получения условий разрешимости задачи (1)–(3) будем исследовать краевую задачу (25), (30), (31). Но должны согласовать следующие моменты: мы намерены доказать существование решения $y(x)$ задачи (1)–(3) так, чтобы числовые значения $y(x), y'(x), \ldots, y^{(\nu)}(x), \ldots$ при $x \in [a,b]$ не выходили из области D, т. е., чтобы выполнялись неравенства $|y^{(i)}(x)| \leq d_i,\ i = 0,1,\ldots$ для $x \in [a,b]$. Соответственно, числовые значения решения $y_i(x),\ i = 1,2,\ldots$ задачи (25), (30), (31) тоже должны оставаться в некотором прямоугольнике $|y_i| \leq d_i^*$, т. е.правые части $F_k\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right),\ k = 1,2,\ldots,$ должны быть определены в некоторой области $D^* : \{|y_i| \leq d_i^*, i = 1,2,\ldots,\ x \in [a,b]\}$ и между числами d_i и d_i^*, $i = 1,2,\ldots$, должны существовать связи, согласованные формулами (8). Например, можно выбрать область D^* так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\delta_{i,j}+\beta_{i,j}\right)d_j^* = d_i,\ \ i=1,2,\ldots\\ \beta_{i,j}=\max_{a\leq x\leq b}|a_{i,j}(x)|-\delta_{i,j},\ \delta_{i,j}=1,\ i=j;\ \ \delta_{i,j}=0,\quad i\neq j\end{gathered} \tag{32}$$

и неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\beta_{i,j} < +\infty,\ \ \det\beta = \det\left(\delta_{i,j}+\beta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty} \neq 0, \tag{33}$$

позволяющие из (32) найти

$$d_j^* = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{k,j}^* d_k}{\det\beta},\ \ j = 1,2,\ldots, \tag{34}$$

$\beta_{k,j}^*$ — алгебраические дополнения элементов матрицы β. При этом числовые ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{i-1},\ \ \sum_{j=1}^{\infty} d_j^* \tag{35}$$

сходятся.

Таким образом, систему (25) с условиями (30), (31) будем изучать относительно точек области D^*. Ее простое интегрирование в смысле неопределенного интеграла дает

$$y_k(x) = C_k + \int\limits_0^x F_k\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right)dt,\ \ C_k = const,\ \ k = 1,2,\ldots \tag{36}$$

Произвольные постоянные $C_k,\ k = 1,2,\ldots,$ подбираем так, чтобы выполнялись равенства (30), (31), что приводит к бесконечной системе алгебраически-функциональных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j}C_j = \tilde{\Phi}_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right),\ \ i = 1,2,\ldots, \tag{37}$$

где

$$b_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k_p,j} = a_{k_p,j}\left(x_{p,k_p}\right),\ \ k_p=\overline{1,n_p},\ p=\overline{1,m},\ n_1+n_2+\ldots+n_m=n,$$
$$b_{i,j}=a_{i,j}\left(x_i\right),\ \ i=n+1,n+2,\ldots,j=1,2,\ldots \tag{38}$$

$$\tilde{\Phi}_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k_p}\left(y_1,y_2,\ldots,y_\nu,\ldots\right)=\Phi^*_{p,k_p}\left(y_1,y_2,\ldots,y_\nu,\ldots\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\infty}a_{k_p,j}\left(x_{p,k_p}\right)\int\limits_a^{x_{p,k_p}}F_j\left(t,y_1\left(t\right),y_2\left(t\right),\ldots,y_\nu\left(t\right),\ldots\right)dt,$$
$$k_p=\overline{1,n_p},\ \ p=\overline{1,m},\ \ n_1+n_2+\ldots+n_m=n, \tag{39}$$

$$\tilde{\Phi}_i\left(y_1,y_2,\ldots,y_\nu,\ldots\right)=\Phi^*_i\left(y_1,y_2,\ldots,y_\nu,\ldots\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\left(x_i\right)\int\limits_a^{x_i^*}F_j\left(t,y_1\left(t\right),y_2\left(t\right),\ldots,y_\nu\left(t\right),\ldots\right)dt,\ \ i=n+1,n+2,\ldots,$$

$$x_i^*=\begin{cases} x_{1,k_1}, & k_1=\overline{1,n_1}, \quad i=\overline{1,n_1},\\ x_{2,k_2}, & k_2=\overline{1,n_2}, \quad i=\overline{n_1+1,n_2},\\ \ldots & \ldots \qquad\qquad \ldots\\ x_{m,k_m}, & k_m=\overline{1,n_m}, \quad i=\overline{n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}+1,n},\\ x_i, & \qquad\qquad\quad\ i=n+1,n+2,\ldots \end{cases} \tag{40}$$

Запишем (37) в удобном виде для применения ограничений Коха и Пуанкаре

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\delta_{i,j}+b^*_{i,j}\right)C_j=\tilde{\Phi}_i\left(y_1,y_2,\ldots,y_\nu,\ldots\right),\ \ i=1,2,\ldots \tag{41}$$

Здесь $b_{i,j}=\left(\delta_{i,j}+b^*_{i,j}\right)$, $i,j=1,2,\ldots$, $\delta_{i,j}=1$ при $i=j$ и $\delta_{i,j}=0$ при $i\neq j$. Допускается, что двойной числовой ряд [1] (см. (14))

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|b^*_{i,j}| \tag{42}$$

сходится и

$$\det B^*=\det\left(\delta_{i,j}+b^*_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}\neq 0, \tag{43}$$

или при выполнении неравенства (43) числовые ряды (см. (25))

$$\sum_{i}^{\infty}|b^*_{i,i}|,\ \ \sum_{i,j=1}^{\infty}b^{*2}_{i,j} \tag{44}$$

сходятся. Все это позволяет из (41) найти C_j по формулам

$$C_i = \left(\det B^*\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} B^*_{j,i} \tilde{\Phi}_j \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right), \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{45}$$

Эти выкладки сводят задачу (25), (30), (31) к системе интегрально-функциональных уравнений, после подстановки (45) в (36):

$$y_i(x) = \tilde{\Phi}^*_i \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) + \int\limits_a^x F_i \left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right) dt, \ \ i = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

где

$$\tilde{\Phi}^*_i \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) = \left(\det B^*\right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} B^*_{j,i} \tilde{\Phi}_j \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right), \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

$B^*_{i,j}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы B^*.

На функцию f и функционалы Φ_{i,k_i}, Φ_i наложены в области D ограничения (4)–(7), которые в области D^* должны отражаться через отображения (8) и на функции F_i и функционалы $\tilde{\Phi}^*_i$ из (46) в виде конкретных оценок, выводимых ниже. Из (4), (13) и (26) имеем

$$\left|F_i \left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right)\right| \leq \tilde{M}_i, \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{48}$$

$$\tilde{M}_i = \sum_{j=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} \left| \left(\det A^*(x)\right)^{-1} A_{j,i}(x) \right| \times$$

$$\times \left[M + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\max_{a \leq x \leq b} |b_\nu(x)| + \max_{a \leq x \leq b} \left| a_{i+1,\nu}(x) - a'_{i,\nu}(x) \right| \right) d^*_\nu \right], \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Аналогично, из (6), (39) и (47):

$$\left|\tilde{\Phi}_i \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right)\right| \leq M^*_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, \tag{50}$$

где

$$\begin{gathered} M^*_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k_p} = M_{p,k_p} + \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{k_p,j}\left(x_{p,k_p}\right)\right| \left(x_{p,k_p} - a\right) \tilde{M}_j, \quad k_p = \overline{1, n_p}, \\ p = \overline{1, m}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n, \end{gathered} \tag{51}$$

$$M^*_i = M_i + \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{i,j}\left(x_i\right)\right| \left(x^*_i - a\right) \tilde{M}_j, \ \ i = n+1, n+2, \ldots$$

$$\left|\tilde{\Phi}^*_i \left(y_1, y_2, .., y_\nu, \ldots\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\det B^*\right)^{-1} B^*_{j,i} \right| M^*_j = \tilde{M}^*_i, \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Для любых векторов $\bar{y} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, $\bar{z} = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ из области D^* по условию (5), (7) с учетом (8) и (13), (26), (39) и (46) получим неравенства

$$\begin{gathered} |F_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) - F_i\left(x, z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots\right)| \leq \tilde{L}_i(x) \sum_{j=1}^{\infty} |y_i - z_i|,\ i = 1, 2, \ldots \\ |\tilde{\Phi}_i^*\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) - \tilde{\Phi}_i^*\left(z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots\right)| \leq \tilde{L}_i^* ||\bar{y} - \bar{z}||, \quad i = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{53}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\det A^*(x)\right)^{-1} A_{j,i}^*(x)\right| [L(x) + \sup_j |b_j(x)| + \\ + \sup_j \left|a_{i+1,j}(x) - a'_{i,j}(x)\right|], \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{54}$$

$$\tilde{L}_i^* = \sum_{\nu,j=1}^{\infty} |\left(\det B^*\right)^{-1} B_{j,i}^* | P_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{gathered} P_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+k_p} = \tilde{L}_{p,k_p} + \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{k_p,j}\left(x_{p,k_p}\right)\right| \int\limits_a^{x_{p,k_p}} \tilde{L}_j\left(t\right) dt,\ \ k_p = \overline{1, n_p},\ \ p = \overline{1, m}, \\ \sum_{k=1}^{m} n_k = n,\ P_i = \tilde{L}_i + \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}\left(x_i\right)| \int\limits_a^{x_i^*} \tilde{L}_j\left(t\right) dt,\ \ i = n+1, n+2, \ldots \end{gathered} \tag{55}$$

Числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i^*$ сходится, функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Пространство $C_\infty\left(a, b\right)$ бесконечномерных непрерывных вектор-функций содержится в $C'_\infty\left(a, b\right)$. В нем норму определим по одной из формул $||y|| = \max\limits_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(x)|$ или $||y|| = \sup\limits_i \left\{\max\limits_{a \leq x \leq b} |y_i(x)|\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$, с соответствующими метриками. Возьмем множество $C_\infty^*\left(a, b\right) \subset C_\infty\left(a, b\right)$, элементы которого $\left(y_i(x)\right)_{i=1}^{\infty}$ обладают следующим свойствами:

$$|y_i(x)| \leq P_i^*,\ P_i^* = \tilde{M}_i^* + \tilde{M}_i \lambda_i,\ \ \lambda_i = \max\{x_i^* - a, b - x_i^*\}, \tag{56}$$

$$P_i^* \leq d_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{57}$$

$$|y_i\left(x'\right) - y_i\left(x''\right)| \leq l_i |x' - x''|,\ \ l_i = const,\ \ x', x'' \in [a, b], \tag{58}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i < +\infty. \tag{59}$$

Множество $C_\infty^*\left(a, b\right)$замкнуто и выпукло в $C_\infty\left(a, b\right)$. Из-за (61)–(64) вектор-функции $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, из $C_\infty^*\left(a, b\right)$образует равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство вектор-функций. Значит, $C_\infty^*\left(a, b\right)$ компактно [4].

Рассмотрим теперь нелинейный интегро-функциональный оператор

$$A\bar{y} = (A_i\bar{y})_{i=1}^{\infty}\,,\ \ \bar{y} = (y_i(x))_{i=1}^{\infty}\,, \tag{60}$$

$$A_i\bar{y} = \tilde{\Phi}_i^*\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) + \int\limits_{x_i^*}^{x} F_i\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right) dt, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{61}$$

из правых частей (46). В силу (56), (57) он определен на $C_\infty^*\left(a, b\right)$. Покажем, что $AC_\infty^*\left(a, b\right) \subset C_\infty^*\left(a, b\right)$. Выполнение неравенств

$$|A_i\bar{y}(x)| \leq P_i^*, \ \ i = 1, 2, \ldots \tag{62}$$

непосредственно следует из (61), если учесть (48) и (52).

Пусть $x',\ x'' \in [a, b]$. Из (62) получим разности и их оценки (см. (45)):

$$|A_i\bar{y}\left(x'\right) - A_i\bar{y}\left(x''\right)| =$$

$$= \left| \int\limits_{a}^{x'} F_i\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right) dt - \int\limits_{a}^{x''} F_i\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{x''}^{x'} F_i\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right), \ldots\right) dt \right| \leq \tilde{M}_i |x' - x''|, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{63}$$

т. е.выполняются и условия (58), (59) при $l_i = \tilde{M}_i,\ i = 1, 2, \ldots$ так как числовой $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{M}_i$ сходится по неравенствам (57).

Таким образом оператор A преобразует $C_\infty^*\left(a, b\right)$ в себя. Его непрерывность следует из непрерывности функций $F_i\left(t, y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), \ldots, y_\nu\left(t\right)\right)$, как сумм равномерно сходящихся функциональных рядов по причине соответствующих ограничений на функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots)$, $a_j(x), a_{i,j}(x)$ и непрерывности функционалов Φ_{i,k_i}, Φ_i и их ограниченности.

Следовательно, непрерывный оператор A преобразует компактное выпуклое множество $C_\infty^*\left(a, b\right)$ в себя и по теореме Шаудера [4] имеет в $C_\infty^*\left(a, b\right)$ неподвижную точку, что равносильно существованию решения системы (46). Метод построения этой системы позволяет утверждать, что выражения из (8) будут решением и его производными бесконечного порядка краевой задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функции $a_{j-1}(x)$, $j = 1, 2, \ldots,$ $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$ *и функционалы* $\Phi_{i,k_i}\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$, $\Phi_i\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$ *непрерывны по совокупности аргументов в области* D *и справедливы неравенства* (4), (6);

2) дана невырожденная бесконечная матрица $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^{\infty}$ *с непрерывно дифференцируемыми элементами на сегменте* $[a, b]$*;*

3) функции $a_{j-1}(x)$*,* $a_{i,j}(x)$*,* $i, j = 1, 2, \ldots$*, и числа* M, M_{i,k_i}*,* M_j *и* d_{ν}^{*} *соответственно из* (4)*,* (6) *и* (34)*,* (49) *таковы, что ряды из* (16)*,* (33)*,* (35)*,* (42) *сходятся и выполнены* (22)*,* (33)*,* (43) *и* (57)*.*

Тогда задача (1)*–*(3) *имеет по крайней мере одно решение* $y(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$*.*

Доказательство теоремы содержится в приведенных выше рассуждениях.

4. Обсуждение

Естественно, единственность решения задачи (1)–(3) вытекает из единственности решения задачи (25), (30), (31) по формулам (8) или тоже самое, из единственности решения интегрально-функциональной системы (46). Пусть последняя имеет два решения $\bar{y} = (y_i(x))_{i=1}^{\infty}$, $\bar{z} = (z_i(x))_{i=1}^{\infty}$. Ограничения (53) из (46) позволяют получить оценки

$$|y_i(x) - z_i(x)| \leq \left|\tilde{\Phi}_i^{*}(y_1, y_2, \ldots, y_{\nu}, \ldots) - \tilde{\Phi}_i^{*}(z_1, z_2, \ldots, z_{\nu}, \ldots)\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{x_i^*}^{x} \left[F_i\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{\nu}(t), \ldots\right) - F_i\left(t, z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{\nu}(t), \ldots\right)\right] dt\right| \leq$$

$$\leq \tilde{L}_i^{*}||\bar{y} - \bar{z}|| + \int\limits_{a}^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} |y_i(t) - z_i(t)|dt| + \int\limits_{a}^{x} \tilde{L}_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} |y_i(t) - z_i(t)|dt, \tag{64}$$

$$\max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(x) - z_i(x)| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i^{*} + \sum_{i=1}^{\infty} \left|\int\limits_{a}^{x_i^*} \tilde{L}_i(t)\, dt\right|\right] \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(x) - z_i(x)| +$$

$$+ \int\limits_{a}^{x} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} |y_i(t) - z_i(t)|dt \tag{65}$$

$$|\bar{y} - \bar{z}| \leq P||\bar{y} - \bar{z}||. \tag{66}$$

Отсюда, если

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\tilde{L}_i^{*} + 2\int\limits_{a}^{x_i^*} \tilde{L}_i(t)\, dt + \int\limits_{x_i^*}^{b} L_i(t)\, dt\right] < 1, \tag{67}$$

то $||\bar{y} - \bar{z}|| = 0$ и $y(x) = z(x)$, $y_i(x) = z_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ Просуммировав (64) и сразу применив лемму Гроноулла в место неравенства (67) можно использовать следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\tilde{L}_i^* + \int\limits_a^{x_i^*} \tilde{L}_i\,(t)\,dt\right]\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_a^{b}\tilde{L}_i\,(t)\,dt\right) < 1. \tag{68}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$ *и функционалы* $\Phi_{i,k_i}\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$, $\Phi_i\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$ *в области* D *удовлетворяют условиям Липшица* (5) *и* (7)*;*

2) функции $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots,$ *из уравнения* (1), *элементы* $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots,$ *матрицы* $A(x)$, *функции* $L(x)$ *из* (5) *и числа* $L_{i,k_i}, \tilde{L}_i$ *из* (7) *таковы, что числовые ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tilde{L}_i^*, \sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_a^{x_i^*}\tilde{L}_i\,(t)\,dt,\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_{x_i^*}^{b}\tilde{L}_i\,(t)\,dt$ *сходятся;*

3) выполняется неравенство (67) *или* (68).

Тогда в условиях теоремы задача (1)–(3) *имеет только единственное решение.*

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функционально-интегральная система вида (46) удобна для исследования методами функционального анализа. К ней можно применить принципы сжатого отображения Красносельского М. А. Она подробно исследована в монографии [5] для различных выражений функционалов $\tilde{\Phi}_i^*\left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right)$ с обоснованием приближенных методов нахождения решений отдельных краевых задач с указанием путей продолжения решения на бесконечный интервал $[a, +\infty)$ и в обобщенном банаховом пространстве [4].

Теорема 1 доказана применением результатов А. Пуанкаре, связанных со сходимостью рядов (16), (33), (42) для обеспечения разрешимости соответствующих бесконечных алгебраических систем в пространстве l_1 [8]. При использовании условий Коха (28) с этой целью [3, 9], дающих решения таких систем в l_2 для построения системы (46), доказательства соответствующей теоремы приводится в пространстве $C_\infty\,(a, b)$ с нормой $||\bar{y}|| = \max\limits_{a\le x\le b}||\bar{y}(x)||_{l_2} = \max\limits_{a\le x\le b}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и необходимой метрикой. Тогда условия разрешимости задачи (1)–(3) с ее параметрами согласовываются с этим замечанием.

Каждый раз приходится обращаться к разрешимости бесконечной системы алгебраическо-функциональных уравнений, что значительно осложняет процесс. Можно привести некоторое упрощение. Равенства (30), (31) без особого труда можно свести к равенствам (см. (38)–(40))

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} y_j \left(x_i^*\right) = \tilde{\Phi}_i \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{69}$$

или

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} y_j \left(x_i\right) + \tilde{\Phi}_{1,i} \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right), \;\; i = 1, 2, \ldots \tag{70}$$

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} -b_{i,i}^{-1} b_{i,j}, & i \neq j, \;\; i, j = 1, 2, \ldots \\ 0, & i = j, \;\; i, j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{71}$$

Тогда вместо системы (46) получается бесконечная система с нагруженными частями

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} y_j \left(x_i\right) + \tilde{\Phi}_{1,i} \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) +$$

$$+ \int\limits_a^x F_i \left(t, y_1 \left(t\right), y_2 \left(t\right), \ldots, y_\nu \left(t\right), \ldots\right) dt, \;\; i = 1, 2, \ldots, \tag{72}$$

которая исследуется также как и система (46). В частности, такой подход применяется и при $\det B^* = 0$ в (43). Например, когда (см. (48), (50), (56))

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_j \{|\alpha_{i,j}|\} < 1, \tag{73}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{i,j}| d_j^* + |b_{i,i}^{-1}| M_i^* + \tilde{M}_i \lambda_i \leq d_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{74}$$

оператор

$$A_{1,i} \bar{y} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} y_j \left(x_i\right), \;\; i = 1, 2, \ldots \tag{75}$$

в $C_\infty^* \left(a, b\right)$ будет оператором сжатия, а оператор (по теореме 1)

$$A_{2,i} \bar{y} = \tilde{\Phi}_{1,i} \left(y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots\right) + \int\limits_a^x F_i \left(t, y_1 \left(t\right), y_2 \left(t\right), \ldots, y_\nu \left(t\right), \ldots\right) dt, \;\; i = 1, 2, \ldots \tag{76}$$

вполне непрерывным, поэтому их сумма, равная правой части (72) и отображающая множество $C_\infty^* \left(a, b\right)$ в множество $C_\infty^* \left(a, b\right)$, по принципу Красносельского М.А. имеет неподвижную точку, т. е.задача (1)–(3) имеет решение [5].

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Российской Федерации (FEGS-2020-0001).

Список литературы

1. Коробейник, Ю. Ф. О бесконечно дифференцируемых решениях линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка // Сибирский матем. журнал. — 1965. — № 3. — С. 6.516–527

   KOROBEINIK, Yu. F. (1965) On infinitely differentiable solutions of a linear differential equation of infinite order. *Sibirsk. Mat. Zh.* 6 (3). Pp. 516–527.

2. Коробейник, Ю. Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1970. — № 4. — С. 34.881–922

   KOROBEINIK, Yu. F. (1970) Differential equations of infinite order and infinite systems of differential equations. *Mathematics of the USSR-Izvestiya.* 4. Pp. 891–930.

3. Валеев, К. Г., Жаутыков, О. Л. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / К. Г. Валеев, О. Л. Жаутыков. — Алма-Ата: Наука, 1974. — 415 с.

   VALEEV, K. G. & ZHAUTYKOV, O. A. (1974) *Infinite systems of differential equations.* Alma-Ata: Nauka.

4. Исраилов, С. В., Танкиев, И. А., Гачаев, А. М. Решение линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами // Вестник Академии наук Чеченской Республики. — 2015. — Т. 28, № 2. — С. 5–8.

   ISRAILOV, S. V. & TANKIEV, I. A. & GACHAEV, A. M. (2015) Solution of a linear differential equation of infinite order with analytical coefficients. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Chechen Republic.* 3 (28). Pp. 5–8.

5. Исраилов, С. В., Юшаев, С. С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / С. В. Исраилов, С. С. Юшаев. — Нальчик: Эль-фа, 2004. — 445 с.

   ISRAILOV, S. V. & YUSHAEV, S. S. (2004) *Multipoint and functional boundary value problems for ordinary differential equations.* Nalchik: El'-fa.

6. Исраилов, С. В., Юшаев, С. С. Преобразование одних краевых задач для ОДУ в другие // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Материалы третьей Международной научной конференции. — Махачкала, 24-27 сентября, 2007. — С. 104–106.

   ISRAILOV, S. V. & YUSHAEV, S. S. (2007) Functional differential equations and their applications. *Proceedings of the third International scientific conference.* Makhachkala, September 24-27. Pp. 104–106.

7. Исраилов, С. В., Юшаев, С. С. Сведение одной многоточечной краевой задачи для дифференциального уравнения n-го порядка к задаче Николетти для системы // Материалы международной конференции «Мухтаровские чтения». — 2008. — С. 104–105.

   ISRAILOV, S. V. & YUSHAEV, S. S. (2007) Reduction of a multipoint boundary value problem for an n-th order differential equation to the Nicoletti problem for the system. *Proceedings of the international conference "Mukhtarov Readings".* 2008. Pp. 104–105.

8. Пуанкаре А. Избранные труды, т.1. Новые методы небесной механики / А. Пуанкаре. — Москва, 1971. — 771 с.

   POINCARÉ A. (1971) *Selected Works in Three Volumes. Vol. I. New Methods of Celestial Mechanics.* A. Poincaré.

9. VON KOCH (1909) Sur la convergence des determinants infinis. *Rediconti del Circolo Mat. di Palermo.* 28. Pp. 255–256.

10. HILBERT D. (1912) *Qrundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integral gleichunden.* In: Pietsch, A. (eds) Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Teubner-Archiv zur Mathematik. 11.

Цитирование: Джабраилов А. Л. Исследование обобщенной краевой задачи для дифференциального уравнения бесконечного порядка // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 44 – 60.

УДК: 517.968.23

MSC2010: 45E05, 45A05

УРАВНЕНИЕ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КРОМКАМИ

© В. Э. Петров

Санкт-Петербург, Российская Федерация

e-mail: *petrov_twell@list.ru, vladimir.petrov@twell.ru*

Equation of a Bearing Line With Elliptical Edges.

Petrov V. E.

Abstract. We consider the Prandtl carrier line equation,

$$\Gamma(x) - \frac{p(x)}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x}\, dt = p(x) H_0(x), \quad \Gamma(\pm 1) = 0.$$

describing the circulation of $\Gamma(x)$ on a thin wing with chord $p(x)$ in a uniform incident flow $H_0(x) = 1$. At present, only one case of an exact solution is known — an elliptical wing, when $p(x) = p_0\sqrt{1-x^2}$. We consider a generalization of this case, when the wing edges remain elliptical, but the geometry can be quite general, namely

$$p(x) = \frac{\alpha x + b}{\gamma x + d}\sqrt{1-x^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

The equation in this case is reduced to an infinite recurrent system with linear coefficients. It is solved by some modification of the Laplace method. As a result, an integral representation for the solution of the system is obtained and, using it, a representation of the solution of equation itself. The solution is also presented as the Appell hypergeometric function F_1. The limiting cases $b = \alpha \neq 0$ and $\alpha = 0$ are considered separately.

Keywords: *Prandtl equation for an asymmetric wing with a chord*

Введение

Продолжим изучение уравнения Прандтля

$$\Gamma(x) - \frac{p(x)}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x}\, dt = p(x) H_0(x) \tag{0.1}$$

при условии

$$\Gamma(\pm 1) = 0, \tag{0.2}$$

начатое в [1] с точки зрения построения явных (в квадратурах) решений.

Уравнение (0.1) относится к универсальным уравнениям математической физики. Оно возникает всегда при рассмотрении тонких оболочек с краем (пластин). Физический смысл состоит в том, что оболочка или пластина — это объект, когда один из габаритных параметров "вырождается" и становится много меньше характерных размеров тела. В этом случае краевые условия, заданные на каждой из поверхностей оболочки можно свести на срединную поверхность, а краевые условия Дирихле заменить на первый член разложения Тейлора по малому параметру (толщине). Так возникают приложения к теории крыла, электродинамике, двумерной механике. Подробно это описано в [2]. Там же указаны краевые задачи на плоскости, соответствующие уравнению (0.1). Также в [2] отмечено, что интегральный оператор в (0.1) — это дробный лапласиан, точнее,

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}\,dt=\sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}[\Gamma](x).$$

Техника, применяемая в [2], позволила получить теорему существования и единственности решения задачи (0.1), (0.2). Эта техника основана на применении интегрального преобразования на отрезке $\mathscr{P}$ [3], введении специальной шкалы пространств и теореме о повышении гладкости. В частности, доказано, что если

$$p(x)\geqslant 0,\qquad \frac{1-x^2}{p(x)}<M,\qquad \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)|H_0(x)|^2\,dx<\infty,$$

то решение существует, единственно и принадлежит весовому пространству

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{|\Gamma(x)|^2}{1-x^2}+(1-x^2)\big|\Gamma'(x)\big|^2\right)dx<\infty,$$

а краевые условия (0.2) выполнены автоматически.

Рассматриваемый в настоящей статье случай эллиптических кромок:

$$p(x)=\frac{\alpha x+b}{\gamma x+d}\sqrt{1-x^2}\geqslant 0,\quad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{0.3}$$

значительно проще с теоретической точки зрения и подробно исследован в [4], однако, построение явных решений для таких кромок, по-видимому, дано впервые.

Для выполнения условия неотрицательности хорды $p\geqslant 0$ достаточно положить

$$b\geqslant|\alpha|,\qquad d\geqslant|\gamma|. \tag{0.4}$$

что мы и предположим. Набегающий поток, как и в [1], положим однородным:

$$H_0(x)=1\,. \tag{0.5}$$

Случай эллиптических кромок для уравнения Прандтля

1. Следуя [4], сделаем тригонометрическую замену переменных:

$$x = \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad \Gamma(x) = \sigma(\theta). \tag{1.1}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}\sigma(\theta)\,(\gamma\cos\theta + d) + \frac{\sin\theta\,(\alpha\cos\theta + b)}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sigma'(\varphi)}{\cos\varphi - \cos\theta}\,d\varphi = \\ = \sin\theta\,(\gamma\cos\theta + d).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Имея в виду условие (0.2), решение будем искать в виде

$$\sigma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k\,\sin k\theta\,, \tag{1.3}$$

что приводит к следующей системе рекуррентных уравнений[1]:

$$\begin{cases} (d+b)\sigma_1 + \dfrac{\gamma+2\alpha}{2}\sigma_2 = d\,, \\ (d+2b)\sigma_2 + \dfrac{\gamma+3\alpha}{2}\sigma_3 + \dfrac{\gamma+\alpha}{2}\sigma_1 = \dfrac{\gamma}{2}\,, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} (d+kb)\sigma_k + \dfrac{\gamma+(k+1)\alpha}{2}\sigma_{k+1} + \dfrac{\gamma+(k-1)\alpha}{2}\sigma_{k-1} = 0\,, \\ k = 3, 4\ldots \end{cases} \tag{1.5}$$

2. Общее решение системы (1.4) и (1.5) неединственно и параметризовано (см. (1.4)) произвольным значением σ_1. Однако лишь при одном из них ряд (1.3) сходится.

Общее решение уравнения (1.5) будем искать в виде

$$\sigma_k = \int\limits_\mu^\nu x^{k-1} f(x)\,dx\,, \tag{2.1}$$

---

[1] Мы пользуемся известным равенством [4, 6]:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\cos k\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}\,d\varphi = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}\,, k = 0, 1, 2\ldots$$

где $f(x)$ — некоторая неизвестная функция. Пределы μ и ν также будут определены ниже. Подставим интеграл (2.1) в возвратное уравнение (1.5) и, произведя интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mu}^{\nu} x^{k-2}\big\{(\gamma x^2+2dx+\gamma)f(x)-x(\alpha x^2+2bx+\alpha)f'(x)\big\}\,dx = \\ &\quad = \nu^{k+1}(\alpha\nu^2+2b\nu+\alpha)f(\nu)-\mu^{k+1}(\alpha\mu^2+2b\mu+\alpha)f(\mu)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Потребуем теперь обращения в нуль правой части равенства (2.2). Это возможно, если выполнено одно из трех условий:

$$\begin{cases} \mu=0\,, \\ \nu=x_2\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu=0\,, \\ \nu=x_1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu=x_2\,, \\ \nu=x_1\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

где x_1 и x_2 — суть корни квадратного уравнения $\alpha x^2+2bx+\alpha=0$. Именно,

$$\begin{cases} x_1=-b/\alpha+\sqrt{(b/\alpha)^2-1}\,, \\ x_2=-b/\alpha-\sqrt{(b/\alpha)^2-1}\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

Рассмотрим сначала случай $b>|\alpha|\,,\ \alpha\neq 0\,.$ Два предельных случая $\alpha=0$ и $b=|\alpha|$ будут рассмотрены ниже. Поскольку $x_1=1/x_2\,,$ то при рассматриваемых условиях один из корней больше, а другой меньше по модулю единицы (в зависимости от знака α). Пусть для определенности

$$\alpha\,<0\,. \tag{2.5}$$

В этом случае

$$0\,<\,x_2\,<\,1\,<\,x_1\,<\,\infty\,. \tag{2.6}$$

Если $\alpha>0$, то к условию (2.5) легко прийти, сделав замены

$$\begin{cases} u_k=(-1)^k\sigma_k\,, \\ \alpha_1=-\alpha\,, \\ \gamma_1=-\gamma\,. \end{cases}$$

В силу (любого) условия (2.3) правая часть в (2.2) равна нулю, а плотность $f(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\gamma x^2+2dx+\gamma}{x(\alpha x^2+2bx+\alpha)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-x_2}-\frac{B}{x-x_1}\,,$$

решением которого является функция

$$f(x)=C\,|x|^A\,|x-x_2|^B\,|x-x_1|^{-B}\,,$$

где

$$A = \frac{\gamma}{\alpha}\,, \quad B = \frac{b\gamma - d\alpha}{|\alpha|\sqrt{b^2 - \alpha^2}}\,.$$

Ясно, далее, что в силу (2.6) лишь первая пара в (2.3) обеспечит сходимость ряда (1.3). Таким образом, решением возвратной системы (1.5) является последовательность:

$$\sigma_k = C\int\limits_0^{x_2} x^{k+A-1}(x_2 - x)^B (x_1 - x)^{-B}\, dx\,, \tag{2.9}$$

где C — произвольная постоянная.

Следующим содержательным вопросом является проблема сходимости интеграла в представлении (2.9).

3. Пусть

$$A = \frac{\gamma}{\alpha} = -N + \lambda < -1\,, \tag{3.1}$$

где $0 \leqslant \lambda < 1$.

В этом случае с учетом неравенств (0.4) и (2.5) имеем $B > 0$. Следовательно, на верхнем пределе интеграл сходится. Однако на нижнем пределе первые N интегралов (2.9) расходятся. Если $N = 2$, то σ_k в виде (2.9) удовлетворяет системе (1.5), начиная с $k = 3$, что и требуется. Поэтому исследуем вопрос при $N > 2$. Заметим для этого, что начиная с $k = N + 1$, интеграл (2.9) существует и удовлетворяет системе (1.5) тождественно. Таким образом осталось построить первые N коэффициентов σ_1, $\sigma_2 \ldots \sigma_N$. Определению подлежит также произвольная постоянная C, с точностью до которой записано решение (2.9). Записав (2.9) в виде $\sigma_k = C\xi_k,\ k > N$, получим для искомых коэффициентов систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (d+b)\sigma_1 + (\gamma + 2\alpha)\sigma_2 = d\,, \\ (d+2b)\sigma_2 + (\gamma+3\alpha)\sigma_3 + \dfrac{\gamma+\alpha}{2}\sigma_1 = \dfrac{\gamma}{2}\,, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (d+kb)\sigma_k + \dfrac{\gamma+(k+1)\alpha}{2}\sigma_{k+1} + \dfrac{\gamma+(k-1)\alpha}{2}\sigma_{k-1} = 0\,, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (d+Nb)\sigma_N + C\left(\dfrac{\gamma+(N+1)\alpha}{2}\xi_{N+1}\right) + \dfrac{\gamma+(N-1)\alpha}{2}\sigma_{N-1} = 0\,, \\ C\Big(\big(d+(N+1)b\big)\xi_{N+1} + \dfrac{\gamma+(N+2)\alpha}{2}\xi_{N+2}\Big) + \dfrac{\gamma+N\alpha}{2}\sigma_N = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Легко видеть, что система (3.2) разрешима, поскольку для матрицы (в силу условий (0.4)) выполнено свойство

$$|A_{jj}| = |d + jb| = d + jb > |\gamma| + j|\alpha| > |\gamma + j\alpha| = \Big|\sum_{k\neq j} A_{jk}\Big|,$$

$$j = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1.$$

Выразив из последнего уравнения неизвестную C через σ_N, с учетом очевидного неравенства $\xi_{N+1} > \xi_{N+2}$, легко придем и для N-ой строчки к неравенству

$$d + Nb > \gamma + N\alpha.$$

Таким образом, матрица системы (3.2) является не только трехдиагональной, но и диагонально доминирующей, что и доказывает (см., например, [7, гл. XIV, §1, Теорема 1]) разрешимость системы (3.2).

Если в (3.1) $\lambda \neq 0$, то система (3.2) — это система $N+1$ уравнения с $N+1$ неизвестными. В противном случае $C = 0$ (что равносильно тому, что $\sigma_k = 0$ при $k > N$, т. е. ряд (1.3) обрывается) и оставшиеся N уравнений определяют первые N коэффициентов. Например, при $N = 2$ имеем:

$$\sigma_1 = \frac{b}{b+d}\,, \qquad \sigma_2 = \frac{d\alpha - b\gamma}{2\,(d+b)(d+2b)}\,, \qquad \sigma_k = 0\,,\ k > 2\,.$$

Соответственно, решение уравнения Прандтля (0.1) имеет вид:

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2}(\sigma_1 + 2\sigma_2 x)\,,$$

а полагая $\alpha = \gamma = 0$, получим известную [2] формулу для циркуляции на эллиптическом крыле ($p(x) = p_0\sqrt{1-x^2}$, здесь $p_0 = b/d$):

$$\Gamma(x) = \frac{b}{b+d}\sqrt{1-x^2}\,.$$

Заметим, что в силу (0.4) $b + d \neq 0$.

4. Вопрос о расходимости интеграла (2.9) на верхнем пределе ($B \leqslant -1$) требует более детального рассмотрения.

Прежде всего, покажем, что

$$A + B > 0\,. \tag{4.1}$$

Действительно, полагая в (0.3) $x = -1$ и пользуясь (2.5) имеем последовательно:

$$0 < \frac{-\gamma + d}{-\alpha + b} = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{b\gamma - d\alpha}{|\alpha|(-\alpha + b)} < \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{b\gamma - d\alpha}{|\alpha|\sqrt{b^2 - \alpha^2}} = A + B\,.$$

Заметим, далее, что интеграл (2.9) является, фактически, представлением Эйлера для гипергеометрической функции [5]. Именно, делая в (2.9) замену $x = x_2 t$, получим:

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= C_1\, x_2^k \int\limits_0^1 \frac{t^{k+A-1}(1-t)^B}{(1-x_2^2 t)^B}\, dt \; = \\
&= C_2\, x_2^k \,\frac{\Gamma(k+A)\Gamma(B+1)}{\Gamma(A+B+k+1)}\, F(B,\, A+k;\, A+B+k+1;\, x_2^2) \; = \\
&= C_3\, x_2^k \,\frac{(A)_k (1)_k}{(A+B+1)_k k!}\, F(A+k,\, B;\, A+B+k+1;\, x_2^2)\, .
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

В силу неравенств (4.1) и (2.6) последнее представление (4.2) справедливо при любых значениях параметров A и B. В том числе и в рассмотренных в п.3 случаях $A < -1$ и $A = -N$. Коэффициенты σ_1, σ_2 и C_3 определяются из системы трех линейных алгебраических уравнений: (1.4) и (1.5) при $k = 3$. Пусть, например, $B = -1$. Тогда $\sigma_k = C x_2^k$ при $k = 3,\, 4 \ldots$. Решением уравнения (0.1) будет тогда функция:

$$
\Gamma(x) = \sigma(\varphi) = (\sigma_1 - C\, x_2)\sin\varphi + (\sigma_2 - C\, x_2^2)\sin 2\varphi + C\frac{x_2 \sin\varphi}{1 - 2x_2\cos\varphi + x_2^2}\, ,
$$

где σ_1, σ_2, C удовлетворяют упомянутой системе:

$$
\begin{pmatrix}
d+b & \frac{1}{2}(\gamma+2\alpha) & 0 \\
\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & d+2b & \frac{1}{2}(\gamma+3\alpha)x_2^3 \\
0 & \frac{1}{2}(\gamma+2\alpha) & \left[d+3b+\frac{1}{2}(\gamma+4\alpha)x_2\right] x_2^3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ C \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d \\ \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Отметим также, что и случай (3.1), и случай $B \leqslant -1$ физически достижимы. Например, при $B = -1$ хорда $p(x)$ будет положительна, если

$$
\gamma = \frac{d\alpha}{b} + \frac{\alpha}{b}\sqrt{b^2 - \alpha^2} < 0, \quad d > |\gamma|.
$$

В общем случае ряд суммируется [6, т.3, формула (6.7.1.6)] к гипергеометрической функции Аппеля двух переменных:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\varphi) = &C\, \mathrm{Im}\, F_1(A\,,\, B\,,\, 1\,;\, A+B+1\,;\, x_2^2\,,\, x_2\, e^{i\varphi}) + \\
&+ (\sigma_1 - C\mu_1)\, \sin\varphi + (\sigma_2 - C\mu_2)\, \sin 2\varphi,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{A}{A+B+1}\, x_2\, F(A+1\,,\, B\,;\, A+B+2\,;\, x_2^2), \\
\mu_2 &= \frac{A(A+1)}{(A+B+1)(A+B+2)}\, x_2^2\, F(A+2\,,\, B\,;\, A+B+3\,;\, x_2^2).
\end{aligned}
$$

В случае сходимости интеграла (2.9) можно дать интегральное представление решения, что, конечно, более удобно для целей вычислений:

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi) =&\sigma_1 \sin\varphi + \sigma_2 \sin 2\varphi + \\ &+ C \int\limits_0^{x_2} \frac{x^{A+3}(x_2 - x)^B \left(\sin 3\varphi - x \sin 2\varphi\right)}{\left(1 - 2x\cos\varphi + x^2\right)(x_1 - x)^B}\, dx\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

При расходимости на нижнем пределе можно воспользоваться решением системы (3.2). Тогда представление решения будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi) =&\sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sin k\varphi + \\ &+ C \int\limits_0^{x_2} x^{N+1+A} \left(\frac{x_2 - x}{x_1 - x}\right)^B \frac{\sin(N+1)\varphi - x\sin N\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}\, dx\,.\end{aligned}$$

Интегральное представление гипергеометрической функции [5]

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}\, dt \tag{4.5}$$

справедливо лишь при условиях

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0. \tag{4.6}$$

В иных случаях необходимо переходить к контурному интегрированию на римановой поверхности подынтегральной в (2.9) функции по замкнутому контуру [5]. Поэтому прямо представить (4.3) в виде интеграла Эйлера (4.5) при $B < -1$ нельзя. Покажем, однако, что условие (4.1) дает нам возможность "перекинуть"расходимость на нижний предел. Пользуясь равенством $x_2 = 1/x_1$, запишем представление (2.9) в виде:

$$\sigma_k = \frac{C_1}{k+A} \int\limits_0^{x_2} \left(x^{k+A}\right)' \left(\frac{x_2 - x}{1 - x x_2}\right)^B dx. \tag{4.7}$$

Обозначим

$$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда интегральное представление (4.7) можно записать:

$$\sigma_k = \frac{C_1}{k+A}\int\limits_{-1}^{1}\left(x_+^{k+A}\right)'\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)_+^{B}\,dx\Bigg|_{y=x_2}.$$

Заметим теперь, что интеграл является сверткой для интегрального преобразования на конечном отрезке $\mathscr{P}$ (см. [3]) функций

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}x_+^{k+A}, \quad x_+^{B}.$$

Если при этом $B=-m-\lambda,\ 0\leqslant\lambda<1$, то по общему правилу (см. [3], теорема 1.3) расходимость надо понимать, как

$$\sigma_k = \frac{C_2}{k+A}\Big((1-y^2)\frac{d}{dy}\Big)^m\int\limits_{-1}^{1}\left(x_+^{k+A}\right)'\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)_+^{-\lambda}\,dx\Bigg|_{y=x_2}.$$

Здесь нельзя вносить производную под знак интеграла. Однако свертка симметрична относительно свертываемых функций. Поэтому можно продолжить:

$$\sigma_k = \frac{C_2}{k+A}\Big((1-y^2)\frac{d}{dy}\Big)^m\int\limits_{-1}^{1}x_+^{-\lambda}(1-x^2)\frac{d}{dx}\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)_+^{k+A}\,dx\Bigg|_{y=x_2} =$$

$$= (-1)^m\,\frac{C_3}{k+A}\int\limits_{-1}^{1}x_+^{-\lambda}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)_+^{k+A}\,dx\Bigg|_{y=x_2} =$$

$$= -C_4(-k-A+1)_m\int\limits_{0}^{x_2}x^{-\lambda}\left(\frac{x_2-x}{1-xx_2}\right)^{k+A-m-1}\,dx.$$

Так как $A+B=A-m-\lambda>0$, последний интеграл сходится на обоих пределах при всех $k>0$. При проведении выкладки мы пользовались равенствами [3]:

$$\Big((1-y^2)\frac{d}{dy}\Big)^m f\left(\frac{y-x}{1-xy}\right) = (-1)^m\Big((1-x^2)\frac{d}{dx}\Big)^m f\left(\frac{y-x}{1-xy}\right) =$$

$$= f^{(m)}\left(\frac{y-x}{1-xy}\right),$$

и формулой дифференцирования $\left(z^{\mu}\right)^{(m)} = (-1)^m(-\mu)_m z^{\mu-m}$.

Рассмотрим теперь предельные случаи.

5. Пусть

$$p(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\gamma x+d}\geqslant 0\,,\quad d>|\gamma|. \tag{5.1}$$

В этом случае $A=B=\infty$ и формулами (2.9) и (4.2) пользоваться нельзя. Запишем рекуррентную систему (1.4) и (1.5) для рассматриваемой ситуации ($\alpha=0\,,\,b=1$):

$$(d+1)\,\sigma_1+\frac{\gamma}{2}\,\sigma_2=1\,, \tag{5.2}$$

$$(d+k)\,\sigma_k+\frac{\gamma}{2}\,(\sigma_{k-1}+\sigma_{k+1})=0\,,\quad k=2,3,\ldots \tag{5.3}$$

Для решения системы (5.3) заметим, что "похожему" рекуррентному соотношению удовлетворяют функции Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ [5]:

$$\begin{cases} J_{\nu+1}+J_{\nu-1}=2\nu x^{-1}J_\nu\,, \\ Y_{\nu+1}+Y_{\nu-1}=2\nu x^{-1}Y_\nu\,, \end{cases}$$

в терминах которых общее решение (5.3) можно представить следующим образом:

$$\sigma_k=C_1\,(-1)^kJ_{k+d}(\gamma)+C_2\,(-1)^k\,Y_{k+d}(\gamma)\,.$$

Очевидно, можно считать $\gamma>0$. Если это не так, в исходном уравнении (0.1) надо сделать замену $x\to -x$. Покажем, что с ростом порядка при фиксированном положительном аргументе функция $J_\nu(x)$ убывает, а $Y_\nu(x)$ неограниченно возрастает. Первое следует из интегрального представления Пуассона [5, т.2, 7.3.(3)]:

$$J_\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+\frac12)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\,\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi,$$

откуда имеем очевидную оценку:

$$|J_\nu(x)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+\frac12)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi\leqslant\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,.$$

Для оценки функции Неймана $Y_\nu(x)$ воспользуемся интегральным представлением Гублера [5, т.2, 7.3.(12)]:

$$Y_\nu(x)=\frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac12)}\left(\int\limits_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac12}\sin(xt)\,dt-\int\limits_0^\infty e^{-xt}(1+t^2)^{\nu-\frac12}\,dt\right).$$

При больших вещественных ν имеем:

$$\left|\frac{Y_\nu(x)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\int\limits_0^\infty e^{-xt}(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt + O\big(\nu^{-1/2}\big)\right| \geqslant \int\limits_0^\infty e^{-xt}t^{2\nu-1}\,dt = x^{-2\nu}\Gamma(2\nu),$$

- и поэтому при $\nu \to \infty$

$$Y_\nu(x) \geqslant \frac{\Gamma(\nu)}{\big(x/2\big)^\nu}.$$

В последних формулах $\Gamma(z)$ — это Г-функция Эйлера (а не циркуляция, как в уравнении (0.1)) Из этих оценок вытекает, что решением системы (5.3) является последовательность

$$\sigma_k = C\,(-1)^k J_{k+d}(\gamma) \qquad k \geqslant 2\,, \tag{5.4}$$

Коэффициенты σ_1 и C найдем из (5.2) и уравнения (5.3) при $k=2$:

$$\begin{cases} (d+1)\sigma_1 + \dfrac{\gamma}{2}\,J_{2+d}(\gamma)\,C = 1, \\ \dfrac{\gamma}{2}\,\sigma_1 + \big[(d+2)J_{d+2}(\gamma) - \dfrac{\gamma}{2}\,J_{d+3}(\gamma)\big]\,C = 0\,. \end{cases}$$

Ряд (1.3) с коэффициентами (5.4) суммируется [4, т.2, формула 5.7.10.1]:

$$\sigma(\varphi) = \sigma_1 \sin\varphi + C\,J_{d+1}(\gamma)\sin 2\varphi +$$
$$+\frac{C}{2}\int\limits_0^\gamma \left(\frac{d}{t} - \cos\varphi\right)\,\sin\big[(\gamma - t)\,\sin\varphi\big]\,J_d(t)\,dt\,,$$

и интеграл сходится для любого $d > 0$.

6. Рассмотрим теперь случай, когда $b = -\alpha$. Отметим, что здесь кромки уже не эллиптические, а на одной из них ($x = +1$) имеется точка возврата. Тем не менее, разработанная схема проходит. При ее применении следует учитывать предельный переход:

$$x_1 \searrow 1\,, \qquad x_2 \nearrow 1\,, \qquad B \to \infty\,.$$

В подынтегральном выражении в (2.9) возникает неопределенность типа 1^∞:

$$\lim_{|\alpha|\to b}\left(\frac{x_2 - x}{x_1 - x}\right)^B = \lim_{|\alpha|\to b}\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x}\right)^B =$$

$$= \lim_{|\alpha|\to b}\left(1 - \frac{2\sqrt{(b/\alpha)^2 - 1}}{1 - x}\right)^{\frac{d+\gamma}{|\alpha|\sqrt{(b/\alpha)^2-1}}} = \exp\left\{\frac{-2(d+\gamma)}{|\alpha|(1-x)}\right\}\,.$$

Таким образом в этом предельном случае имеем решение системы (1.5):

$$\sigma_k = C \int\limits_0^1 x^{k+A-1} \exp\left\{ \frac{-2(d+\gamma)}{|\alpha|(1-x)} \right\} dx\,. \tag{6.1}$$

Относительно решения (6.1) справедливы все построения п.3 при $A = -N + \lambda$.

Точно также, интегральному представлению (6.1) по аналогии с п.4 можно придать вид гипергеометрической функции (на этот раз, очевидно, вырожденной). Однако, в этом случае эти построения не носят «обязательного» характера, поскольку нет проблемы сходимости на верхнем пределе.

Заключение

Таким образом, в статье подробно исследован случай эллиптических кромок для уравнения Прандтля. В работе [4] для этого вида кромок предложен метод численного исследования, основанный на алгоритме Мультоппа. Обычно, этот метод применяют в случае симметричной хорды $\big(p(x) = p(-x)\big)$ и тестируют на примере эллиптического крыла $p(x) = p_0\sqrt{1-x^2}$. Явные решения, построенные в настоящей статье, могут стать важными тестами при проверке численных алгоритмов и в несимметричном случае. Отметим, что развитой в настоящей работе техникой можно рассмотреть и симметричное крыло, задав хорду в виде

$$p(x) = \frac{\alpha x^2 + b}{\gamma x^2 + d}.$$

В этом случае в рекуррентную систему будут входить $\sigma_k,\ \sigma_{k-2},\ \sigma_{k+2}$. Коэффициенты по-прежнему будут линейными. Поэтому, полагая индекс k четным и нечетным, сведем полученную систему к двум системам типа (1.5) на последовательности $u_k = \sigma_{2k},\ v_k = \sigma_{2k+1}$. Подчеркнем также, что алгоритм явного решения для эллиптических кромок $p(x) \sim p_0(x)\sqrt{1-x^2},\ p_0(\pm 1) \neq 0$, сводится к дискретной точно решаемой системе уравнений, тогда как случай параболических кромок $p(x) \sim p_0(x)(1-x^2),\ p_0(\pm 1) \neq 0$, (см. работы [1, 3]) сводится к уравнению свертки и типа свертки для интегрального преобразования $\mathscr{P}$ на конечном отрезке.

Список литературы

1. PETROV V. E., On explicit solutions of the Prandtl equation, Research Report No96/04, 1996, University of Sussex, Brighton.
2. Петров В. Э., Суслина Т. А. *О регулярности решения уравнения Прандтля*, Матем. заметки, 110:4 (2021), 550–568 // Math. Notes, 110:4 (2021), С. 543—559.

3. Петров В. Э., Интегральное преобразование на отрезке, Проблемы матанализа, вып. 31, 67-95 // Petrov V. E. , Integral transform on a segment, Probl. Mat. Anal. 31 (2005), 67–95; English transl., J. Math. Sci. (N. Y.) 132 (2006), no. 4, Pp. 451—481. MR 2197339 (2006i:44006).
4. Каландия А. И., Математические методы двухмерной упругости М., Наука, 1973. // Kalandia A. I. Mathematical methods of two-dimensional elasticity, M., “Nauka”, 1973.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции , М. Наука, 1965, т. 1; 1966, т. 2// Baitmen H., Erdelyi A., Higher Transcedental Functions, New York, Toronto, London McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, v. 1, v. 2.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды, М., Наука, 1981 т. 1, 1983 т. 2, 1985 т. 3 // Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Inregrals and Series, Gordon and Breach Science Publisher, 1994, v. 1, v. 2, v. 3.
7. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М. “Физматлит”, 2004// Gantmaher F., The Theory of Matrices, Transl, 2022, https://archive.org/details/gantmacher-the-theory-of-matrices-vol-1-1959

Цитирование: Петров В. Э. Уравнение несущей линии с эллиптическими кромками // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 61 – 73.

УДК: 517.45
MSC2010: 35B10

ОСОБЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© А. Н. Сахаров

Нижегородский государственый аграрно-технологический университет
инженерный факультет
просп. Гагарина, 97, Нижний Новгород, 603107, Российская Федерация
e-mail: *ansakharov2008@yandex.ru*

Singular periodic solutions of polynomial differential equations.

Sakharov A. N.

Abstract. We consider the problem of periodic solutions of the equation

$$\dot{z} = z^m + a_1(t)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(t)z + a_m(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

with coefficients $a_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$ periodic in t. It is known that equations of this type can have, in addition to ordinary periodic solutions, also special periodic solutions that have a finite number of discontinuities in the period. The compactification procedure for the phase space of an equation makes it possible to determine the conditions that limit the number of ordinary periodic solutions, as well as to describe the mechanism for changing the structure of periodic solutions in terms of rotation numbers.

Keywords: *compactification of phase space, periodic solutions, singular periodic solutions, rotation numbers, modromy mapping*

1. Особые периодические решения

Задача о числе периодических решений полиномиального дифференциального уравнения вида

$$\dot{z} = z^m + a_1(t,\varepsilon)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(t,\varepsilon)z + a_m(t,\varepsilon), \quad z \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $a_k(t,\varepsilon)$ — вещественные тригонометрические полиномы периода 2π, представляет собой ослабленный вариант 16-ой проблемы Гильберта[1]. Для решения этой задачи используются различные подходы: метод В.А. Плисса, заключающийся в комплексификации уравнения (1), геометрический метод [2], метод интегралов Дарбу [3].

---

[1] Задача о взаимном расположении ветвей действительной алгебраической кривой на плоскости.

Здесь рассматривается задача о бифуркациях периодических решений этого уравнения. Известно (В.А. Плисс, [1]), что изменение числа $2\pi-$периодических решений такого уравнения при изменении параметра ε связано с появлением так называемых *особых периодических решений*, имеющих конечное число разрывов на периоде. В настоящей работе предлагается описание этого феномена, основанное на процедуре компактификации фазового пространства уравнения (1).

Процедура компактификации позволяет свести задачу о существовании особых периодических решений к задаче существования замкнутых траекторий системы на компактном фазовом пространстве. Запишем уравнение (1) в виде автономной системы

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{z} = z^m + \sum_{k=1}^{m} a_k(\varphi, \varepsilon) z^{m-k}, \tag{2}$$

фазовое пространство которой либо $S^1 \times \mathbb{R}$, если $z \in \mathbb{R}$, либо $S^1 \times \mathbb{C}$, если $z \in \mathbb{C}$. Сделаем замену $z = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$, $-\pi < \theta < \pi$, после которой система (2) представляется в виде

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{\theta}\cos^{m-2}\frac{\theta}{2} = 2\left[\sin^m\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\varphi, \varepsilon)\sin^{m-k}\frac{\theta}{2}\cos^k\frac{\theta}{2}\right],$$

или, после замены времени

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \cos^{m-2}\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = 2\left[\sin^m\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\varphi, \varepsilon)\sin^{m-k}\frac{\theta}{2}\cos^k\frac{\theta}{2}\right], \tag{3}$$

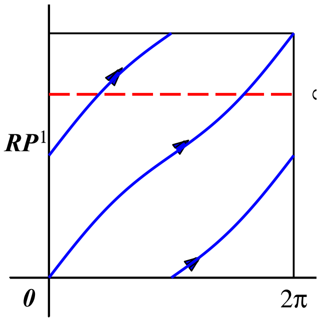

Рис. 1. Замкнутые траектории на торе, соответствующие периодическим решениям (1) с одним разрывом на периоде

Для удобства будем обозначать дифференцирование по новому времени τ также точкой над фазовой переменной. Система (3) определяет аналитическое векторное поле на $S^1 \times \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить векторное поле на компактном пространстве, необходимо отождествть окружности $\theta = \pm\pi$. Такое отождествление приводит к тору $\mathbb{T}^2$ при четном m, так как поле на этих окружностях согласовано, и к бутылке

Клейна K^2 при нечетном m, так как поле на окружностях $\theta = \pm\pi$ имеет противоположные знаки[2].

Ясно, что особым периодическим решениям (1) соответствуют замкнутые траектории системы (3), делающие несколько обротов по координате θ. Механизм появления осбых периодических решений придумал академик Я.Б. Зельдович, предложив идею компактификации фазового пространства уравнения Риккати. Он изучал особые периодические решения уравнения Риккати для моделирования взрывов (в астрофизике) и фактически переоткрыл теорию А. Пуанкаре, но не успел опубликовать свои результаты [4].

2. **Число вращения**

Уточним условия сущетвования числа вращения у потока на торе, порождаемое системой

$$\dot{\varphi} = u(\varphi, \theta), \qquad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta). \tag{4}$$

Допустим, что этот поток не имеет особых точек и, кроме того, не имеет ячеек Риба[3]. Тогда существует число вращения

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t, \varphi_0, \theta_0)}{\varphi(t, \varphi_0, \theta_0)},$$

не зависящее от начальных данных. Это следствие леммы 7.1.2 из [6]. Если система (4) непрерывно зависит от параметра, то число вращения его непрерывная функция.

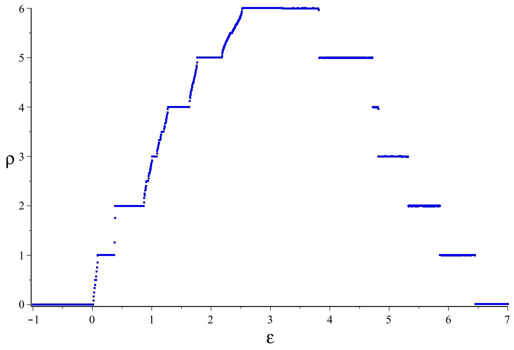

Рис. 2. Число вращения системы 9.

---

[2] Предполагается, что координата φ соответствует параллели тора, θ — меридиану.

[3] Так называется конструкция, введенная французским математиком Ж. Рибом в 1952 году для нужд теории трехмерных слоений. Двумерный случай подробно описан в книге [5], то есть гораздо раньше. Примером поля на торе с ячейками Риба дает система

$$\dot{\varphi} = \sin\theta, \quad \dot{\theta} = \cos^2\theta.$$

На графике зависимости числа вращения от параметра ε системы (3) наблюдаются ступеньки — интервалы постоянства числа вращения (интервалы устойчивости числа вращения по терминологии В.А. Плисса). В интервале постоянства число вращения всегда рационально ([8], лемма 11.1) . Критерий принадлежности числа вращения интервалу постоянства — отсутствие сопряжения линейной системе

$$\dot\varphi = p, \quad \dot\theta = q, \quad p/q \in \mathbb{Q}.$$

Это следствие предложения 2.1 из [7].

Теорема 1. *Пусть* (α, β) *— интервал постоянства числа вращения потока, порождаемого системой* (3). *Тогда для любого* $\varepsilon \in (\alpha, \beta)$ *поток структурно устойчив.*

Доказательство. Неособые структурно устойчивые потоки на торе имеют $2k$ замкнутых траекторий, причем k траекторий асимптотически устойчивы при $t \to \infty$ и k траекторий — при $t \to -\infty$ ([9], [10]). Все замкнутые траектории имеют одинаковый топологический тип. Единственно возможной бифуркацией в этом случае — это слияние устойчивой и неустойчивой траеторий, не изменяющее число вращения. Функция последования в окрестности образующейся полустойчивой траектории не меняет знак. Но согласно лемме 11.2 из [8] число вращения такой траектории не принадлежит интервалу постоянства. Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы следует, что при достижении парметра конца интервала постоянства числа вращения происходит бифуркация, сводящаяся к следующему: возникает одно полуустойчивое периодическое решение (параболический случай), либо континуум периодических решений (эллиптический случай).

Неособые периодические решения уравнение (1) имеет только при нулевом числе вращения системы (3), количество разрывов на периоде особого периодического решения определяет числитель числа вращения. Возникновение особых периодических решений при изменении параметров уравнения, иллюстрирует рис. 2. На бутылке Клейна неособый поток всегда имеет периодическое решение, то есть его число вращения всегда равно нулю и уравнение (1) не имеет особых периодических решений. Далее будем считать, что m четное число.

3. Уравнение Риккати

При $m = 2$ уравнение (1) не что иное, как уравнение Риккати

$$\dot z = z^2 + a_1(t, \varepsilon)z + a_2(t, \varepsilon). \tag{5}$$

Для вещественного случая процедура компактификации дает систему на торе

$$\dot\varphi = 1, \qquad \dot\theta = a_2(\varphi, \varepsilon) + 1 + (a_2(\varphi, \varepsilon) - 1)\cos\theta + a_1(\varphi, \varepsilon)\sin\theta. \tag{6}$$

Число вращения ситемы (8) является полным топологическим инвариантом [11]. Если число вращения целое, то поток на торе структурно устойчивый, неблуждающее множество состоит из двух замкнутых гиперболических траекторий. В случае нецелого числа вращения возможны две случая: либо все траектории замкнуты (число вращения ρ рационально, $\rho \neq 0$), либо все траектории всюду плотны (ρ — иррационально).

Естественной компактификацией фазового пространства комплексного уравнения (7) является многообразие $S^1 \times S^2$, получаемым при одноточечной компактификации комплексной плоскости. Поток на этом многообразиями действует дробно-линейными преобразованиями со значениями в группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$:

$$P_\varepsilon^t(z) = \frac{\alpha(t,\varepsilon)z+\beta(t,\varepsilon)}{\gamma(t,\varepsilon)z+\delta(t,\varepsilon)}, \qquad \alpha(t,\varepsilon)\delta(t,\varepsilon)-\beta(t,\varepsilon)\gamma(t,\varepsilon)=1.$$

Отображение монодромии $\mathscr{P}_\varepsilon(z) = P_\varepsilon^{2\pi}(z)$ является преобразованием Мёбиуса сферы Римана. Анализ динамики преобразования Мёбиуса основывается на следующих известных его свойствах.

1. Это преобразование всегда имеет неподвижные точки (две или одну), которым соответствуют 2π-периодические решения комплексного уравнения Риккати.
2. Любая окружность на сфере Римана преобразуется в окружность (круговое свойство).

Лемма 1. *Для любого отображения Мёбиуса $\mathscr{P}$ существует предел*

$$\gamma = \delta + i\rho = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln \mathscr{P}^n(z)}{n},$$

который не зависит от z.

Доказательство следует из известной теоремы анализа, которая утверждает, что любое пареобразование Мёбиуса сферы Римана линейным преобразованием может быть приведено к виду

1. $w = e^{\delta+i2\pi\rho}z, \quad \delta \neq 0, \quad \rho \notin \mathbb{Z}$, (локсодромический случай);
2. $w = e^{\delta}z, \quad \delta \neq 0$, (гиперболический случай);
3. $w = e^{i2\pi\rho}z$, (эллиптический случай);
4. $w = z + 1$, (параболический случай).

Число δ — это показатель Ляпунова гиперболической замкнутой траектории. Число ρ можно рассматривать как число вращения, определенное с точностью до целого.

Очевидно, что 2π-периодические решения уранения Риккати определяются неподвижными точками отображения монодромии, число которых не превышает двух.

Поэтому теорема о топологической структуре решений комплексного уравнения Риккати формулируется так.

Теорема 2. *Для потока на компактификации* $S^1 \times S^2$ *уравнения* (7) *выполняется одна из следующих альтернатив:*

1. *существуют два гиперболических* 2π*-периодических решения, другие решения стремятся к ним при* $t \to \pm\infty$*;*
2. *существует два устойчивых по Ляпунову комплексных* 2π*-периодических решения, остальные решения либо периодические, либо квазипериодические;*
3. *существует одно полустойчивое* 2π*-периодическое решение, остальные решения стремятся к нему при* $t \to \pm\infty$*.*

Доказательство. Если отображение монодромии гиперболическое или локсодромическое, то оно имеет две неподвижные точки, которым соответствуют два гиперболических 2π-периодических решения уравнения Риккати. Когда отображение монодромии гиперболично, то число вращения целое, а семейству инвариантных окружностей соответствует семейство инвариантных торов, пересекающихся по 2π-периодическим решениям. В локсодромическом случае инварианных торов нет, но имеется семейство инвариантных цилиндров, накручивающихся на эти периодические решения.

Если отображение монодромии эллиптическое, то двум его неподвижным точкам соответствует пара устойчивых по Ляпунову комплексных 2π-периодических решения. Кроме того, существует семейство вложенных непересекающихся инвариантных торов, движение на которых определяется линейным векторным полем $(1, \rho)$.

Третий случай соответствует параболичности отображения монодромии. Единственная неподвижная точка определяет полуустойчивое 2π-решение, других периодических решений нет. Это происходит, когда два периодических решени сливаются в одно. Существует семейство инвариантных торов, касающихся друг друга по периодическому решению. Теорема доказана.

В нашем случае уравнение Риккати в комплексной области имеет инвариантный цилиндр. Это позводяет его компактифицировать стандартным образом и определить число вращения (а также показатели Ляпунова). Такое уравнение не может определять локсодромическое отображение монодромии. В общем случае, если соответствующее преобразование Мёбиуса имеет семейство инвариантных окружностей, то существует инвариантная прямая, которая переводится линейным преобразование в действительную ось и применимы результаты для вещественного случая.

Заметим также, что отображение монодромии для потока на торе, не будет его полным топологическим инвариантом. Числа вращения потока и отображения монодромии одинаковы, но замкнутой траектории, делающей n оборотов по меридиану тора соответсвует просто неподвижная точка отображения, т. е. оно “забывает” гомотопический тип периодического решения.

4. Компактификация в комплексной области

Как уже отмечалось, процедура компатификации фазового пространства $S^1 \times \mathbb{C}$ уравнения (1) приводит к потоку $P^t_\varepsilon(z)$ на многобразии $S^1 \times S^2$, причем цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$ соответствует инвариантный тор. Фазовое пространство потока можно изобразить в виде двух концентрических сфер, у которых отождествляются точки, лежащие на лучах из общего центра. Кольцо, соединяющее диаметры сфер, соответствует вещественному инвариантному тору.

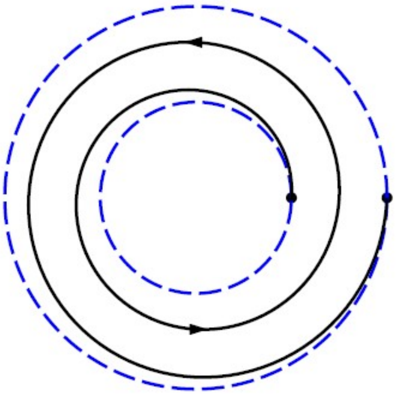

Рис. 3. Периодическая траектория на инвариантном торе, соответствующая периодическому решению с двмя разрывами на периоде. Пунктирные окружности, по которым склеивается кольцо, соответствуют координате θ в (3), ортогональные к ним отрезки — координате φ. Здесь координаты (φ, θ) поменялись ролями: φ определяет меридианы, θ — параллели тора.

Следовательно, отображение монодромии $\mathscr{P}_\varepsilon(z) = P^{2\pi}_\varepsilon(z)$ будет аналитическим гомеоморфизмом сферы S^2, имеющим инвариантную окружность. Чтобы понять, как отображение монодроми устроено вне инвариантного тора, сделаем преобразование

$$z \to \frac{z-i}{z+i}$$

отображает верхнюю полуплоскость в диск $D = \{z : |z| < 1\}$. Сужение отображения монодромии $\mathscr{P}_\varepsilon$ на этот диск — аналитический гомеоморфизм D. Поведение $\mathscr{P}_\varepsilon$ на D описывается теоремой Данжуа-Вольфа[4] ([12], теорема 5.4):

Теорема. *Пусть $f : D \to D$ — прозвольное голоморфное отображение, не являющееся автоморфизмом D. Тогда либо*

1. *f является “вращением” (относительно метрики Пуанкаре) вокруг некоторой неподвижной точки $z_0 \in D$, либо, в противном случае,*
2. *последовательные итерации f^n равномерно сходятся на компактных подмножествах D к постоянной функции $z \mapsto z_0$, где z_0 может принадлежать либо открытому диску D, либо его граничной окружности.*

Переведем эту теорему комплексного анализа на язык динамических систем. Отображение f оставляет неизменными гиперболические диски с центром в z_0, если $z_0 \in D$, и диски, касающиеся единичной окружности в z_0, если $z_0 \in \partial D$. Таким образом, z_0 является неподвижной точкой f, причем неподвижная точка асимптотически устойчива, когда $z_0 \in D$.

Будем называть отображение $\mathscr{P}_\varepsilon$ *эллиптическим*, если оно является вращением в смысле пункта 1) этой теоремы, *гиперболическим*, если $\mathscr{P}^n_\varepsilon(z) \to z_0,\ z_0 \in D$, *параболическим*, если $\mathscr{P}^n_\varepsilon(z) \to z_0,\ z_0 \in \partial D$ при $n \to \infty$. Переход от гиперболического случая к параблическому при изменении параметра ε описывается бифуркацией “седло-узел”. Рисунки 4, 5 представляют фазовые портреты $\mathscr{P}_\varepsilon$ для трех указанных случаев[5].

Качественное поведение траекторий на многообразии $S^1 \times S^2$ описывается следующим утверждением (сравните с теоремой 6.6 из [13]).

Теорема 3. *Компактификация системы* (2) *приводит к следующим альтернативам для потока на $S^1 \times S^2$.*

1. *Существуют $2k+2$ гиперболических периодических решений, из них $2k$ вещественные и лежат на инвариантном торе, 2 решения комплексные.*
2. *Существует одно полустойчивое периодическое решение, остальные решения стремятся к нему при $t \to \pm\infty$.*

---

[4] В настоящее время эта теорема переживает ренессанс, хотя она была доказана в 20-е годы прошедшего века. Это связано с появившимися приложениями в комплексном анализе и теории динамических систем.

[5] При построении фазовых портретов структурно устойчивых диффеоморфизмов используются общепринятые обозначения: α — источник, σ — седло, ω — сток. Кроме того, изображаются сепаратрисы седел.

3. *Существует два устойчивых по Ляпунову комплексных периодических решения, остальные решения либо периодические, либо квазипериодические.*

Доказательство. Небходимо отметить, что инвариатному тору потока соответствует инвариантная окружность отображения монодромии. Пусть число вращения потока на инвариатном торе рационально и поток структурно устойчивый (число вращения принадлежит интервалу постоянства). Тогда отображение монодромии гипрболично и его неблуждающее множество остоит из k источников, k седел и двух стоков (см. рис. 4), то есть $\mathscr{P}_\varepsilon$ — гомеоморфизм Морса-Смейла. Соответственно поток имеет k экспоненциально неустойчивых замкнутых траекторий, k — седловых замкнутых траекторий и две экспоненциально устойчивые замкнутые траектории.

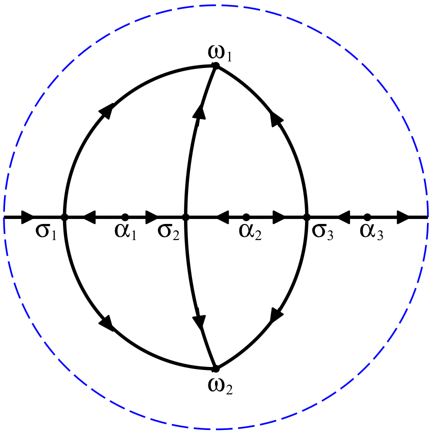

Рис. 4. Гиперболическое отображение монодромии $\mathscr{P}_\varepsilon$ с тремя источниками, тремя седлами и двумя стоками.

Если число вращения рационально и принадлежит границе интервала постоянства, то отображение монодромии параболично и поок на $S^1 \times S^2$ имеет единственное вещественное периодическое решение. Эту ситуацию иллюстрирует левая часть рис. 5.

Альтернативой для существования одного полуусойчивого периодического решения на границе постоянства числа вращения является существования континуума периодических решений на инвариантных торах потока (правая часть рис. 5). При этом существует пара устойчивых по Ляпунову комплексных периодических решений. Теорема доказана.

Изменение числа периодических траекторий системы (3) происходит либо в результате бифуркации "седло-узел", когда все периодические точки $\mathscr{P}_\varepsilon$ сливаются в

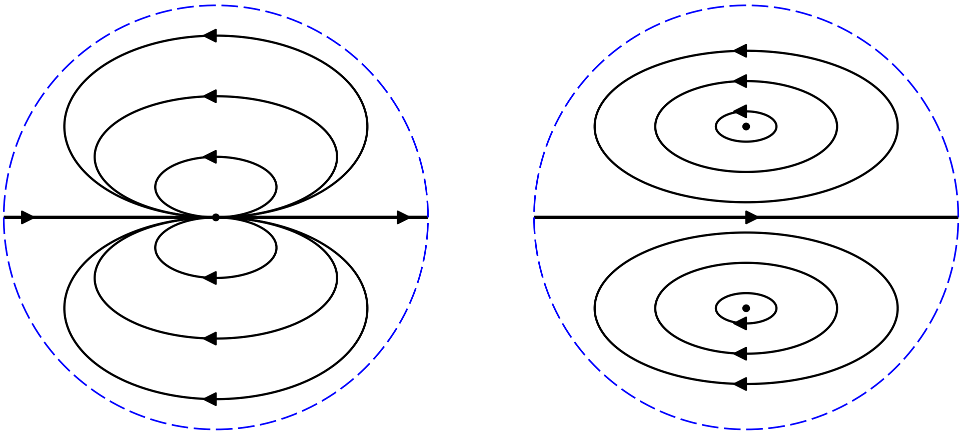

Рис. 5. Параболическое (слева) и эллиптическое (справа) отображение монодромии $\mathscr{P}_\varepsilon$.

одну на инвариантной окружности, либо в континуум периодических точек. Обоснование этого сценария фактически содержится в [17] после формулировки результатов на языке динамических систем.

Заметим, что в отличие от случая уравнения Риккати гиперболические периодические решения, о которых идет речь в формулировке теоремы, могут иметь период кратный 2π. Это так называемые субгармонические решения, соответстующие дробным значениям числа вращения.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как уже отмечалось, метод компактификации фазового пространства уравнения (1) не дает универсального подхода к оценке числа периодических решений этого уравнения. Целью данной работы является описание механизма появления особых периодических решений. Преимущество предложенного метода заключается в том, что уравнение $\mathscr{P}_\varepsilon(z) - z = 0$ для нахождения периодических решений определено на всей сфере. Метод комплексификации Плисса ([8], § 9) использует запись в координатах $z = re^{i\varphi}$ уравнения (1) и исследования отображения монодромии $g(c, \varepsilon)$ полученной системы. В данном случае уравнение $g(c, \varepsilon) - c = 0$ не разрешимо для особых периодических решений $z(t, c, \varepsilon)$. Кроме того, метод компактификации геометрически более нагляден, чем метод, предложенный Плиссом.

Предложенный метод позволяет единообразно и кратко описать с единой точки зрения полученные ранее результаты относительно периодических решений (1). Например, уравнение Риккати

$$\dot{z} = (\lambda^2 a(t) + b(t))z^2 + 1 \tag{7}$$

с 2π-периодическими коэффициентами является проективизацией линейного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + (\lambda^2 a(t) + b(t))x = 0. \tag{8}$$

Числа λ, при которых существуют 2π-периодические (2π-антипериодические) решения этого уравнения называются *собственными значениями* периодической краевой задачи. Очевидно, собственные значения — это граничные точки интервалов постоянства числа вращения $\rho(\lambda)$ потока, порождаемого компактификацией (7). Таким образом, задача об асимптотике собственных значений является, по существу, задачей об асимптотике границ интервалов устойчивости[6] уравнения (8). Этой тематике посвящено значительное число публикаций (см. [14], [15] и приведенную там литературу), в некоторых из которых используется редукция уравнения (8) к уравнению Риккати.

Метод компактификации позволяет также уточнить некоторые уже известные утверждения, касающиеся этой проблемы. Например, в теореме 5 из [16] утверждается, что уравнение вида

$$\dot{z} = z^{2m} + a(t)z^2 + b(t)z + c(t)$$

может иметь любое заданное число n гиперболических периодических траекторий, что противоречит теореме 4.1 (число n должно быть четным).

В некоторых случаях компактификация фазового пространства облегчает получить верхние оценки числа таких решений. Рассмотрим уравнение [2]

$$\dot{z} = (z^2 - 1)(z^2 + a(t)z + b(t)), \quad a(t + 2\pi) = a(t),\ b(t + 2\pi) = b(t).$$

Процедура компактификации дает систему

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), \quad \dot{\theta} = -\cos\theta(1 + b(\varphi) + a(\varphi)\sin\theta + (b(\varphi) - 1)\cos\theta).$$

Эта система имеет два периодических решения $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, гомотопных параллели тора, так что число вращения этой системы равно нулю. Эти решения разбивают тор на две инвариантные области, во внутренности котрых содержится четное число периодических траекторий[7]. Но сужение системы на эти области не может содержать более двух таких траекторий. Таким образом, эта система имеет не более шести 2π-периодических решений.

---

[6] Положив $a(t) \equiv 1$ получим задачу о границе лакун в спектре оператора Шредингера с периодическим потенциалом.

[7] Если система не сопряжена линейной.

6. Приложение: вычисление числа вращения

Вычисление числа вращения гомеоморфизма трансверсальной окружности не очень просто, поэтому предлагается алгоритм его вычисления при некоторых ограничениях на векторное поле (3). Система Maple позволяет достаточно эффективно вычислять числа вращения полиномиальных векторных полей на торе (конечно, на производительном компьютере). Здесь приводится рабочий лист для подсчета числа вращения системы

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = \cos^2 \tfrac{\theta}{2}, \\ &\dot{\theta} = 2\sin^4 \tfrac{\theta}{2} + 2(\varepsilon + \sin\varphi + \sin 2\varphi)\sin^3 \tfrac{\theta}{2} \cos \tfrac{\theta}{2} + \\ &\quad + 2(\varepsilon + \sin\varphi + \sin 2\varphi)\sin^2 \tfrac{\theta}{2} \cos^2 \tfrac{\theta}{2} - \\ &\quad - 2(\sin\varphi - \sin 2\varphi)\sin \tfrac{\theta}{2} \cos^3 \tfrac{\theta}{2} + 2(\cos 5\varphi + \varepsilon)\cos^4 \tfrac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{9}$$

в зависимости от параметра ε.

```
restart;
with(DEtools);

RotNum:=proc(p,q,step)
        local DS,dsol,ftheta,point,epsilon;
        global s;
        s:=NULL;
        for lambda from p by step to q do
         DS:={diff(phi(t),t)=.5+.5*cos(theta(t)),
                    diff(theta(t),t)=2*(sin(theta(t)/2)^4
                    +(epsilon+sin(phi(t))+sin(2*phi(t))
                    *sin(theta(t)/2)^3*cos(theta(t)/2)
                   +(epsilon+sin(phi(t))+sin(2*phi(t)))
                   *sin(theta(t)/2)^2*cos(theta(t)/2)^2
                   -(sin(phi(t))-sin(2*phi(t)))
                   *sin(theta(t)/2)*cos(theta(t)/2)^3
                  +(cos(5*phi(t))+epsilon)*cos(theta(t)/2)^4)};
         dsol := dsolve({op(DS),(phi(0)=0,theta(0)=1)},
         numeric,output=listprocedure,maxfun = 10000000);
         ftheta:=eval([phi(t),theta(t)],dsol);
```

```
         point:=ftheta(10000)/10000;
          s:=s, [epsilon,point[2]/point[1]];
        end do
end proc:
RotNum(-1,2,.005):
graph:=plot([s],style=POINT,axes=FRAMED,
                    labels=[e,r],labelfont=[SYMBOL,16],
                    symbol=POINT,color=BLUE):
plots[display]({graph},color=BLUE);
```

Аргументы процедуры `RotNum`: `p,q` — концы интервала изменения парамера ε, `step` — шаг. Точность вычисления задается параметром `maxfun`, который равен числу вычисляемых точек на выбранной траектории.

Список литературы

1. Плисс В.А. О числе периодических решений с полиномиальной правой частью // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 5. С. 965–968.

   PLISS V.A.(1959) On the number of periodic solutions with polynomial right part. Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 127(5). p. 965–968.

2. Панов А.А. О числе периодических решений полиномиальных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 5. С. 720–727.

   PANOV A.A. (1998) On the number of periodic solutions of polynomial differentials equations. Matem. notes. 64(5). p. 720–727.

3. Долов М. В., Круглов Е. В., О числе полуалгебраических частных интегралов одного класса динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 949–954.

   DOLOV M.V., KRUGLOV E.V. (1995) On the number of semi-algebraic partial integrals of one class of dynamic systems with cylindrical phase space. Diff. equations. 31(6). p. 949–954.

4. Арнольд В.И. ЯБ и математика // Природа. 1992. № 2. С. 105–108.

   ARNOLD V.I. YaB and mathematics. Priroda. 1992. n. 2. p. 105–108.

5. В.В. Немыцкий, В.В. Степанов (1947) Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ОГИЗ. 448 с.

   V.V. NEMYTSKY, V.V. STEPANOV (1947) Qualitative theory of differential equations. M.-L.: OGIZ. 448 p.

6. NIKOLAEV I., ZHUZHOMA E. (1999) Flows on 2-dimensional manifolds. Berlin. Springer. 294 p.

7. Глюцук А.А., Клепцын В.А., Филимонов Д.А., Щуров И.В. О квантовании перемычек в уравнении, моделирующем эффект Джозефсона // Функц. анализ и его прилож. 2014. Т. 48, № 4. С. 47–64.

   GLYTSUK A.A., KLEPTSYN V.A., FILIMONOV D.A., SHCHUROV I.V. (2014) About jumper quantization in the equation modeling the Josephson effect. Funk. analysis and its applications. 48(4). p. 47–64.

8. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука. 1964. 368 с.

   PLISS V.A. (1964) Nonlocal problems in the theory of oscillations. M.: Science. 368 p.

9. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. университета, 12 (1939), 215–229.

   MAYER A.G. (1939) Rough transformation of a circle into a circle. Uchenye zapiski Gorky. state University. 12. p. 215–229.

10. Колобянина А.Е., Ноздринова Е.В., Починка О.В. Современное изложение классификации грубых преобразований окружности // Журнал СВМО. 2018. Т. 20, № 4. С. 408–418.

    KOLOBYANINA A.E., NOZDRINOVA E.V., POCHINKA O.V. (2018) Modern presentation of the classification of rough transformations of a circle. SVMO Journal. 20(4). p. 408–418.

11. Мамаева Н. А., Сахаров А. Н. Геометрия областей устойчивости линейных канонических систем периодических дифференциальных уравнений // Сборник материалов IX международной научной молодежной школы–семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского. Саранск. 2020. С. 225–235.

    MAMAEVA N. A., SAKHAROV A. N. (2020) Geometry of stability domains of linear canonical systems of periodic differential equations. Collection of materials of the IX International Scientific Youth School - seminar “Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes” named after E.V. Voskresensky. Saransk. p. 225–235.

12. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ “РХД”. 2000. 320 с.

    MILNOR J. (2000) Holomorphic dynamics. Izhevsk: Research Center “RHD”. 320 p.

13. LLOYD N.G. (1973) The number of periodic solutions of the tquation $\dot{z} = z^N + p_1(t)z^{N-1} + \cdots + p_N(t)$. Proc. London Math. Soc. 27. p. 667–700.

14. Карасева Т. М. О скорости роста и об ограниченности решений дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 1. С. 41–70.

    KARASEVA T. M. (1965) On the growth rate and the boundedness of solutions of second-order differential equations with periodic coefficients. Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math. 29(1). p. 41–70.

15. Кащенко С. А. Асимптотические законы распределений собственных значений периодической и антипериодической краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 13–30.

    KASHCHENKO S. A. (2017) Asymptotic laws of distributions of eigenvalues for periodic and anti-periodic boundary value problems for second-order differential equations. Modeling and analysis of information systems. 24(1). p. 13–30.

16. GASULL A., GUILLAMON A. (2006) Limit cycles for generalized Abel equations. Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. 16. p. 3737–3745.

17. CHRISTODOULOU A., SHORT I. (2021) Stability of the Denjoy–Wolff theorem. Annales Fennici Mathematici. 46, n. 1. p. 421–431.

Цитирование: Сахаров А. Н. Особые периодические решения полиномиальных дифференциальных уравнений // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 74 – 88.

УДК: 517.55

MSC2010: 42B15, 42B30

ON SOME NEW EMBEDDINGS IN MINIMAL BOUNDED HOMOGENEOUS DOMAINS IN $\mathbb{C}^n$

© R. F. Shamoyan, N. M. Makhina

Bryansk State University
Faculty of Physics and Mathematics
Bezhitskaya St., 14, Bryansk, 241023, Russia
e-mail: *rshamoyan@gmail.com, makhina32@gmail.com*

In this article very general bounded minimal homogeneous domains are considered. Under certain natural additional conditions new sharp results on Bergman type analytic spaces in minimal bounded homogeneous domains are obtained. Domains we consider here are direct generalizations of the well-studied so-called bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$. In the unit disk and in the unit ball all our results were obtained by first author. Some results were obtained previously in tubular and bounded pseudoconvex domains. Our proofs are heavily based on properties of so called r-lattices for these general domains provided in recent papers of Yamaji. Our proofs are also based on arguments provided earlier in less general domains.We partially extend an embedding result from Yamaji's paper.

1. Introduction

The goal of this paper to obtain new sharp results on Bergman type analytic spaces in minimal bounded homogeneous domains. Our results previously were known only in very particular case of such type domains in the unit ball. Some results are known in tube domains and pseudoconvex domains (see [2, 4–6]). Tube domains are unbounded, pseudoconvex domains are not symmetric. Our results are heavily based on a series of subtle new estimates obtained recently in [9–12]. We note domains we consider here are direct generalizations of the well-studied so-called bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ (see [9]-[12]). Note, also, all mentioned domains and even polydisk are examples of minimal domains. To formulate our results we need some basic notations. We say the bounded $\mathscr{U}$ domain in $\mathbb{C}^n$ is a minimal domain with a center $t \in \mathscr{U}$ if the following condition is satisfied for every biholomorphism $\psi : \mathscr{U} \in \mathscr{U}'$ with $det J(\psi, t) = 1$ we have $Vol((U') \geqslant Vol(\mathscr{U})$ where $J(\psi, t)$ denotes the complex Jacobi matrix of ψ at t (see [9–12]). We denote constants by $C, C_1, ...$ We fix a minimal bounded homogeneous domain $\mathscr{U}$ with center t.

Let $dV_\beta(z) = K_{\mathscr{U}}(z, z)^{-\beta} dV(z)$, $\beta \in \mathbb{R}$, and dV denote the Lebesgue measure on $\mathscr{U}$ (see [9]-[12]). Let $L^p_{\alpha,\beta}(\mathscr{U}, dV_\beta) = L^p(\mathscr{U}, dV_\beta) \cap H(\mathscr{U})$, $0 < p \leqslant \infty$, where $H(\mathscr{U})$ is a class of all analytic functions on $\mathscr{U}$. The last spaces are non-trivial if and only if $\beta > \beta_{min}$ for some fixed β_{min} (see [9]-[12]). Note we will always assume this bellow. These are Banach spaces for $p \geqslant 1$. We bellow denote by $K^{(\beta)}_{\mathscr{U}}$ the reproducing kernel of $L^2_\alpha(\mathscr{U}, dV_\beta)$. L^2_α

is the Bergman spaces on $\mathscr{U}$ (unweighted) and $L^2_\alpha(\mathscr{U}, dV) = L^2(\mathscr{U}, dV) \cap H(\mathscr{U})$. It is known that $K_\beta = K^{(\beta)}_{\mathscr{U}}(z, \omega) = C_\beta K_{\mathscr{U}}(z, \omega)^{1+\beta}$ for some positive constant C_β (see [9]-[12]).

Yamaji (see [9]) give criteria for the boundedness of positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of a minimal bounded homogeneous domain in terms of the Berezin symbol or the averaging function of the symbol. Moreover, Yamaji estimate the essential norm of positive Toeplitz operators assuming that they are bounded. As an application of these estimates, also give necessary and sufficient conditions for the positive Toeplitz operators to be compact.

Using an integral formula on a homogeneous Siegel domain, Yamaji (see [10]) give a necessary and sufficient condition for composition operators on the weighted Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain to be compact in terms of a boundary behavior of the Bergman kernel.

In his paper [10] Yamaji introduced the so called Berezin symbol and the averaging function for a positive Borel measure μ on a minimal bounded homogeneous domain $\mathscr{U}$. These concepts were used by him in [10] to get a complete description of all so called Carleson measures for $L^p_a(\mathscr{U}, dV_\beta)$ analytic Bergman type spaces in minimal homogeneous domains for all positive values of p. Namely it was shown in [10] that both Berezin symbol and the averaging function in $\mathscr{U}$ must be bounded in $\mathscr{U}$ if and only if the positive Borel measure μ is a Carleson measure in $\mathscr{U}$ (see definition of Carleson measure in [10]). For analytic Bergman type function spaces we mentioned above.

We continue in this short note his investigation using and modifying his arguments providing various new embeddings in minimal bounded homogeneous domains for various new mixed norm Bergman spaces.

2. Main results

The Bergman kernel $K_{\mathscr{U}}(z, \omega)$ of $\mathscr{U}$ is playing very important in our theorems below. Let $d_{\mathscr{U}}(\cdot, \cdot)$ be the Bergman distance on $\mathscr{U}$. For any $z \in \mathscr{U}$, $r > 0$, let also $B(z, r) = \{\omega \in \mathscr{U} : d_{\mathscr{U}}(z, \omega) \leqslant r\}$ be the Bergman metric disk with center z and radius r.

The following result is a sharp result of distances on such domains (see [4]-[6] for other domains). The proof is close to the case of unit disk, based on estimates from [9]-[12] for such domains.

We formulate below our all main results of this short note namely new embedding theorems for minimal bounded homogeneous domains for some new mixed norm analytic Bergman type spaces. The first result contains only sufficient condition on positive Borel measure, the other two results are sharp embeddings. Proofs use arguments provided earlier in less general domains and properties of so called sampling sequences(see lemmas below). In all theorems we assume that Forelly-Rudin estimates are valid (see lemma 4 and the remark after it.)

The existence of so-called Bergman sampling sequence can be seen in [9]-[12] (see also Lemma 3 below). This sequence and estimates of Bergman kernel on $\{B(z_k, \rho)\}$ balls are very vital for this paper. We denote below the Lebesques measure of $B(z, \rho)$ ball by Vol. We denote by $Vol(E)$ the volume of E set.

Theorem 1. *Let* $1 \leqslant q, s, r < \infty$, $q \geqslant s$, $\alpha > -1$. *Let* $\{z_k\}$ *be a sampling sequence in* $\mathscr{U}$, μ *be a positive Borel measure in* $\mathscr{U}$. *Then*

$$\int\limits_{\mathscr{U}} |f(z)|^q d\mu(z) \leqslant C \int\limits_{\mathscr{U}} \left(\int\limits_{B(\omega,r)} |f(z)|^s dV_\alpha(z) \right)^{q/s} dV(\omega),$$

if $\mu(B(z_k, r)) \leqslant C(Vol(B(z_k, r))^\tau$, *for all* $\{z_k\}$, $k = 1, ...$, *and for some positive* τ, $\tau = \tau(s, \alpha, q)$.

The following theorem is a new sharp result on embeddings in $L^2_a(\mathscr{U}, dV_\beta)$ type analytic function spaces.

Theorem 2. *Let* $1 < p, q < \infty$, $1 < s \leqslant p < \infty$, $\beta > \beta_{min}$, $\rho > 0$. *Let* $\{z_k\}$ *be a sampling sequence in* $\mathscr{U}$, *let* μ *be positive Borel measure on* $\mathscr{U}$. *Then*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{B(z_k,\rho)} |f(z)|^q \, d\mu(z) \right)^{\frac{p}{q}} \leqslant C \, \|f\|_{L^s_\alpha(\mathscr{U}, dV_\beta)} \tag{1}$$

if and only if

$$\mu(B(z_k, \rho)) \leqslant C(Vol)(B(z_k, \rho))^{\beta_0}, \tag{2}$$

for all $\{z_k\} \in \mathscr{U}$, $\rho > 0$, $k = 1, 2, 3, ...$ *for some fixed* β_0, $\beta_0 = \beta_0(p, q, s, \beta)$.

Note that the sufficiency part in this theorem follows immediately from lemmas 2-3 which we formulated below as in case ofmuch simpler domain the unit ball (see [2], [8]).

Note it was shown in [9]-[12] that the similar to (2) condition holds if and only if

$$\int\limits_{\mathscr{U}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \leqslant \tilde{C} \int\limits_{\mathscr{U}} |f(z)|^p \, dV_\beta(z), \tag{3}$$

for all $p > 0$ and for all $f \in L^p_a(\mathscr{U}, dV_\beta)$.

Note the proofs of theorems of this paper can be obtained after careful study of estimates of the proof of the unit ball case and parallel estimates obtained recently in the case of bounded minimal homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ (see [2], [4]-[6], [9]-[12]).

The following theorem is another new sharp result on embeddings in $L^p_a(\mathscr{U}, dV_\beta)$ analytic function spaces in minimal bounded homogeneous domain in $\mathbb{C}^n$. The base of proof is Forelly - Rudin estimates and lower estimate for Bergman kernel (which we assume are valid for our general domains).

Theorem 3. *Let μ be a positive Borel measure on $\mathscr{U}$, and $\{z_k\}$ be a Bergman sampling sequence. Let $\alpha > \alpha_{min}$, $f_i \in H(\mathscr{U})$, $1 < p_i, q_i < \infty$, $i = 1, ..., m$, so that $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{q_i} = 1$. Then*

$$\int\limits_{\mathscr{U}} \prod_{i=1}^{m} |f_i(z)|^{p_i}\, d\mu(z) \leqslant \tilde{\tilde{C}} \prod_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{B(z_k,2r)} |f_i(z)|^{p_i}\, dV_\alpha(z) \right)^{q_i} \right]^{\frac{1}{q_i}} \tag{4}$$

if and only if $\mu(B(z_k, r)) \leqslant C(Vol(B(z_k, r)))^{\alpha_0}$ for every $k, k = 1, 2, ...,$ $r > 0$, for some fixed $\alpha_0, \alpha_0(p_1.., p_m, q_1, ...q_m, \alpha, m)$.

Note that the sufficiency part in this theorem follows immediately from lemmas 2-3 which we formulated below as in case ofmuch simpler domain the unit ball (see [2], [8]).

Very similar results with similar proofs were obtained by the first author in tubular domains over symmetric cones (unbounded domains) and bounded strictly pseudoconvex (nonsymmetric) domains (see [1], [2], [8], and references there).

Some words on proofs:

We supply three lemmas from [9]-[12] which are crucial for proofs. Analogues in tube and pseudoconvex domains can bee seen in [1], [2], [8].

Below in lemma 1 we provide an important for our proofs of theorem 2, and 3 estimate from below of Bergman kernel on Bergman balls (see [8]-[12]). Note also that they are also valid for many other general domains in $\mathbb{C}^n$.

Lemma 1. *(see [12]) Take $\rho > 0$. Then there exists $C_\rho > 0$ such that*

$$C_\rho^{-1} \leqslant \left| \frac{K_{\mathscr{U}}(z, a)}{K_{\mathscr{U}}(a, a)} \right| \leqslant C_\rho, z, a \in \mathscr{U}, \beta_{\mathscr{U}}(z, a) \leqslant \rho, \tag{5}$$

where $\beta_{\mathscr{U}}$ means the Bergman distance on $\mathscr{U}$.

Note that these estimates are valid also for weighted Bergman kernel (see [9]-[2]).

Lemma 2. *(see [9]) There exists a positive constant C such that*

$$|f(a)|^p \leqslant \frac{C}{Vol(B(a, \rho))} \int\limits_{B(a,\rho)} |f(z)|^p\, dV(z), \tag{6}$$

$f \in H(\mathscr{U})$, $p > 0$, $a \in \mathscr{U}$.

This lemma is valid also in more general form when we replace dV by dV_β (see [8]-[12]).

Lemma 3. *(see [12]) There exists a sequence* $\{\omega_j\} \in \mathscr{U}$ *satisfying the following conditions*

$$\mathscr{U} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(\omega_j, \rho), B(\omega_i, \rho/4) \cap B(\omega_j, \rho/4) = \emptyset, i \neq j.$$

There exists a positive integer n *such that for each point* $z \in \mathscr{U}$ *belongs to at most* n *of sets* $B(\omega_j, 2\rho)$.

Lemma 4. *(Forelly-Rudin estimates in* $\mathscr{U}$ *(see [8]-[12])) We have*

$$\int_{\mathscr{U}} |K_{\mathscr{U}}(z, z'')|^{1+\alpha} dV_\beta(z'') < c(\alpha, \beta)|K_{\mathscr{U}}(z, z)|^{\alpha-\beta},$$

$\alpha = 1 + 2\beta$, $\beta > \beta_0$, $z \in \mathscr{U}$, β_0 *is large enough.*

We assume that this lemma is valid in more general situation when indexes α and β are independent.

All results of this note with very similar proofs in context of bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary were proved earlier by the first author.

We obtained similar results concerning so-called distance function $dist_f(g, X)$ in these bounded minimal domains and they will be presented by us in another paper. Similar extremal (distance) problems and results for other domains were proved by the first author in [1, 3–6].

References

1. ARSENOVI'C, M., SHAMOYAN, R. (2015) On distance estimates and atomic decomposition on spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains. *Bull. Korean Math. Soc.*. 52 (1). Pp. 85–103.

2. LI, S., SHAMOYAN, R. (2008) On some properties of analytic spaces connected with Bergman metric ball. *Bull. Iran. Math. Soc.* 34 (2). Pp. 121–139.

3. SHAMOYAN, R. F., KURILENKO, S. M. (2014) On extremal problems in tubular domains over symmetric cones. *Issues of Analysis.* 3(21) (1). Pp. 44–65.

4. SHAMOYAN, R. F., MIHI´C, O. (2009) On new estimates for distances in analytic function spaces in higher dimensions. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 6. Pp. 514–517.

5. SHAMOYAN, R. F., MIHI´C, O. (2010) On new estimates for distances in analytic function spaces in the unit disK, polydisk and unit ball. *Bol. de la Asoc. Matematica Venezolana.* 17 (2). Pp. 89–103.
6. SHAMOYAN, R. F., MIHI´C, O. (2014) On distance function in some new analytic Bergman type spaces in $\mathbb{C}^n$. *Journal of Function Spaces.* 2014 (275416). Pp. 1–10.
7. SHAMOYAN, R., POVPRITS, E. (2013) Sharp theorems on traces in analytic spaces in tube domains over symmetric cones. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 6 (4). Pp. 527–538.
8. SHAMOYAN, R., POVPRITS, E. (2013) Multifunctional analytic spaces on products of bounded strictly pseudoconvex domains and embedding theorems. *Kragujevac Journal of Mathematics.* 37 (2). Pp. 221–244.
9. YAMAJI, S. (2013) Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of a minimal bounded homogeneous domain. *Journal of the Mathematical Society of Japan.* 65 (4). Pp. 1037–1372.
10. YAMAJI, S. (2013) Composition operators on the Bergman spaces of a minimal bounded homogeneous domain. *Hiroshima Math. Journal.* 43. Pp. 107–127.
11. YAMAJI, S. (2011) Essential norm estimates for positive Toeplitz operators on the weighted Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain. *arXiv.* 1109.4500v1. Pp. 1–11.
12. YAMAJI, S., ISHI, H. (2010) Some estimates of the Bergman kernel of minimal bounded homogeneous domains. *arXiv.* 1010.4370v2. Pp. 1–12.

Цитирование: Shamoyan R. F., Makhina N. M. On some new embeddings in minimal bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 89 – 94.

УДК: 517.956.5

MSC2010:30A10, 35J99, 35Q99

EVOLUTION INEQUALITIES OF HIGH ORDER WITH COMPLEX-VALUED

© Али Ханан

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы
математическ институте им. С. М. Никольского
Российская Федерация, г. Москва
e-mail: *alihanan29557@gmail.com*

Evolution inequalities of high order with complex-valued.

Hanan Ali

Abstract. This article studies the absence of solutions to n-th order evolutionary inequalities with complex values. The relevance of the study lies in the extension of the obtained results from the n-dimensional real space to the n-dimensional complex space.

In the first section of this paper studies the form of n-th order evolutionary inequalities in n-dimensional complex space, and the second section is devoted to finding the condition for the absence of a solution to n-th order Semilinear inequalities with complex-valued and with bounded coefficients.

As a result, we obtained conditions for the absence of weak non-trivial solutions to the problem under consideration. It turns out that there are two conditions for the absence of a solution, one of which is associated with the criterion index q, and the other with the argument of the complex function, which depends on q.

The proofs of the results on the absence of solutions in this work are based on the technique proposed by S. I. Pokhozhaev [10] and developed by E. L. Mitidieri and S. I. Pokhozhaev [8], which is based on the method of test functions. Their approach relies heavily primarily on a priori integral estimates for possible solutions to the problem under consideration and on deriving asymptotics for these estimates with respect to some parameter that tends to ∞ or to 0 depending on the nature of the problem. Finally, the absence of a solution is proven by contradiction. Namely, reaching the zero limit value in the corresponding a priori estimate guarantees that there is no nontrivial solution to this problem.

Keywords: *Absence of solutions, complex-valued inequalities*

Введение

Отсутствие слабого и нетривиального решения эволюции n-порядка с ограниченными коэффициентами в R^n уже изучалось Ф. А. Галактионовым, Ю. В. Егоров, Ф. Кондратьев ([2, 5, 12]) и получены следующие результаты.

Рассмотрим множество положительных функций $f(x,t)$, удовлетворяющих неравенству:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial t} \geqslant \sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha}(a_{\alpha}(x,t)f^p) + f^q; & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ f(x,0) = f_0(x) \geqslant 0; & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{1}$$

Функции $a_{\alpha}(x,t)$ ограниченные измеримые, определенные при $t \geqslant 0, z \in R^n$. И пусть $p \geqslant 1, q > 1$.

Определение 1. [2] На основе определения слабых производных неотрицательной функции $f(x,t)$, удовлетворяющих неравенству

$$-\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0\varphi(x,0)dx \geqslant \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^p L^*(\varphi)dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^q \varphi dxdt, \tag{2}$$

где

$$L^*(\varphi) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(z,t)(-D)^{\alpha}\varphi^p(z,t),$$

для любой функции $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^{n+1}), \varphi(x,t) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Если неотрицательная функция $f(x,t)$ из класса $L^1_{loc}(R^{n+1}_+) \cap L_loc^q(R^{n+1}_+)$ такая, что $f_0(x) \in L^1_{loc}(R^{n+1}_+)$, удовлетворяет неравенству (1) и верны неравенства $1 \leqslant p < q \leqslant p + \frac{m}{n}$, то $f(x,t) = 0$.*

Чтобы сравнить два комплексных числа, нам нужно сформулировать следующее определение:

Определение 2. Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — некоторые комплексные числа, то равенство и неравенство $z_1 \geqslant z_2$ верны, тогда и только тогда, когда:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 \geqslant x_2; \\ y_1 \geqslant y_2. \end{array}\right\} x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Определение 3. Определим следующие интегралы:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_S g(\rho,\theta)dS &= \int\limits_0^{+\infty}...\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}...\int\limits_0^{2\pi} g(\rho,\theta)\ d\rho_1...d\rho_n d\theta_1...d\theta_n,\\ \int\limits_V g(\rho,\theta)dV &= \int\limits_0^{T}\int\limits_0^{+\infty}..\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}..\int\limits_0^{2\pi} g(\rho,\theta)\ d\rho_1..d\rho_n d\theta_1..d\theta_n dt.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\rho \in \mathbb{R}^n, \theta \in [0,\pi]^n$ and $t \in (0,T)$.

1. Эволюционные неравенства n-порядка в C^n.

Комплекснозначные полулинейные неравенства n-порядка с ограниченными коэффициентами имеют вид,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \geqslant L(f^P(z,t)) + f^q(z,t); & (z,t) \in \mathbb{C}^n \times (0,\infty) \\ \quad f(z,0) = f_0(z) \geqslant 0; & z \in \mathbb{C}^n. \end{cases} \tag{5}$$

где

$$L(f^P(z,t)) = \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(a_\alpha(z,t)f^p(z,t)), \tag{6}$$

Функции $a_\alpha(z,t)-$ ограниченные измеримые, определенные при $t \geqslant 0, z \in \mathbb{C}^n$. И пусть $p \geqslant 1, q > 1$. Согласно определению (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} Re(\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}) &\geqslant Re(L(f^p(z,t))) + Re(f^p(z,t)),\\ Im(\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}) &\geqslant Im(L(f^p(z,t))) + Im(f^p(z,t)),\\ Re(f_0(z)) &\geqslant 0;\ Im(f_0(z)) \geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Чтобы упростить вычисление f^p, f^q, будем использовать полярные координаты.

Пусть $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^n$, $\rho \in \mathbb{R}^n_+$, $\theta \in ([0,2\pi])^n$, $f(z,t) = R(\rho,\theta,t)e^{i\vartheta(\rho,\theta,t)}$ и $a_\alpha(z,t) = A_\alpha(\rho,\theta,t)e^{i\phi_\alpha(\rho,\theta,t)}$. Тогда (7) будет,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(Rcos\vartheta)}{\partial t} &\geqslant L_{Re}(f) + R^q cos(q\vartheta),\\ \frac{\partial(Rsin\vartheta)}{\partial t} &\geqslant L_{Im}(f) + R^q sin(q\vartheta),\\ R_0cos(\vartheta_0) = R(\rho,\theta,0)&cos(\vartheta(\rho,\theta,0)) \geqslant 0,\\ R_0sin(\vartheta_0) = R(\rho,\theta,0)&sin(\vartheta(\rho,\theta,0)) \geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} L_{Re}(f) &= \sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha}\left(A_{\alpha}R^{p}cos(\phi_{\alpha}+p\vartheta)\right), \\ L_{Im}(f) &= \sum_{|\alpha|=m} D^{\alpha}\left(A_{\alpha}R^{p}sin(\phi_{\alpha}+p\vartheta)\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исходя из определения (1), неотрицательная функция $R(\rho,\theta,t)cos(\vartheta(\rho,\theta,t))$, $R(\rho,\theta,t)sin(\vartheta(\rho,\theta,t))$ удовлетворяет неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} -\int\limits_{V} Rcos\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV - \int\limits_{S} R_0cos(\vartheta_0)\varphi_0 dS \geqslant \int\limits_{V} R^{p}L_c(\varphi)dV + \int\limits_{V} R^{q}cos(q\vartheta)\varphi dV, \\ -\int\limits_{V} Rsin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV - \int\limits_{S} R_0sin(\vartheta_0)\varphi_0 dS \geqslant \int\limits_{V} R^{p}L_s(\varphi)dV + \int\limits_{V} R^{q}sin(q\vartheta)\varphi dV. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^{2n+1})$, $\varphi_0 = \varphi(\rho,\theta,0)$, и

$$\left.\begin{aligned} L_c(\varphi) &= \sum_{|\alpha|=m} \left(A_{\alpha}cos(\phi_{\alpha})(-D)^{\alpha}(\varphi)\right), \\ L_s(\varphi) &= \sum_{|\alpha|=m} \left(A_{\alpha}sin(\phi_{\alpha})(-D)^{\alpha}(\varphi)\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Определение 4. Функция $f(z,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^{n+1}) \cap L^q_{loc}(\mathbb{C}^{n+1})$ и $f_0(z) \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^{n})$, называется слабым решением задачи (5), если $arg(f) \in [0, \frac{\pi}{2q}]$ и неравенства (10) выполняются для любых функций $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^{2n+1}_{+})$.

2. Условие отсутствия решения

Теперь рассмотрим отсутствие решения задачи (5), эквивалентного неравенству (8). Если $p \geqslant 1$ и $p+1 < q$, то имеем следующее:

Теорема 2. *Если функция* $f(z,t)$ *принадлежит классу* $L^1_{loc}(\mathbb{C}^{n+1}) \cap L^q_{loc}(\mathbb{C}^{n+1})$, $f_0(z) \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^{n+1})$, $arg(f) \in [0, \frac{\pi}{2q}]$ *удовлетворяет* $q \leqslant \frac{m}{n} + p$ *и* $arg(f) \notin \frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{2q})$, *то* $f(z,t) \equiv 0$.

Доказательство. Шаг 1. Есть $arg(f) \in [0, \frac{\pi}{2q}] \subset [0, \frac{\pi}{2p}] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$ это значит,

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \epsilon_1 = cos(q\vartheta) \leqslant \epsilon_2 = cos(p\vartheta) \leqslant \epsilon_3 = cos(\vartheta) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varepsilon_1 = sin(\vartheta) \leqslant \varepsilon_2 = sin(p\vartheta) \leqslant \varepsilon_3 = sin(q\vartheta) \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

И есть $f_0 = R_0(cos\vartheta_0 + isin\vartheta_0) \geqslant 0 + i0$, то

$$-\int\limits_{S} R_0cos(\vartheta_0)\varphi(\rho,\theta,0)dS \leqslant 0, -\int\limits_{S} R_0sin(\vartheta_0)\varphi(\rho,\theta,0)dS \leqslant 0$$

где $\varphi_0 \geqslant 0$ будет указано ниже. Из определения (4) имеем

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \int\limits_V \epsilon_1 R^q \varphi dV \leqslant -\int\limits_V \epsilon_3 R \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV - \int\limits_V R^p L_c(\varphi) dV, \\ 0 \leqslant \int\limits_V \varepsilon_3 R^q \varphi dV \leqslant -\int\limits_V \varepsilon_1 R \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV - \int\limits_V R^p L_s(\varphi) dV. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in C_0^m(\mathbb{R}^{2n+1})$. Рассмотрим первое неравенство системы неравенств (13), из неравенства Юнга и $\epsilon_1 \neq 0$ имеем:

$$-\int\limits_V \epsilon_3 R \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_V \epsilon_1 R^q \varphi dV + \frac{1}{q^*} \int\limits_V \epsilon_3^{q^*} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{q^*} (\epsilon_1 \varphi)^{1-q^*} dV \tag{14}$$

$$-\int\limits_V R L_c(\varphi) dV \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_V \epsilon_1 R^q \varphi dV + \frac{1}{r^*} \int\limits_V |L_C|^{q^*} (\epsilon_1 \varphi)^{1-r^*} dV \tag{15}$$

где $q^* = \frac{q}{q-1}, r^* = \frac{r}{r-1}, r = \frac{q}{p}$. Тогда пусть,

$$\varphi(\rho, \theta, t) = \varphi_0 \left(\frac{t^{2/\mu} + \rho^2}{M^2}\right) \geqslant 0;\ \mu = \frac{m(q-1)}{q-p}. \tag{16}$$

Заменив переменные $t = M^\mu \tau$, и $\rho = M\zeta$ получим:

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_V \epsilon_1 R^q \varphi dV \leqslant c M^{n+\mu-r^* m},\ c = constants \tag{17}$$

При $M \to \infty$ и $n \leqslant r^* m - \mu = \frac{m}{q-p}$, то $\int_V R^q dV = 0,\ f = 0$ и (3,2) не имеет нетривиального слабого решения, когда $n \leqslant mq - p$.

Рассмотрим второе неравенство системы неравенств (13). Из неравенства Юнга и $\varepsilon_3 \neq 0$ следует

$$-\int\limits_V \varepsilon_1 R \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_V \varepsilon_3 R^q \varphi dV + \frac{1}{q^*} \int\limits_V \varepsilon_1^{q^*} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{q^*} (\varepsilon_3 \varphi)^{1-q^*} dV \tag{18}$$

$$-\int\limits_V R L_s(\varphi) dV \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_V \varepsilon_3 R^q \varphi dV + \frac{1}{r^*} \int\limits_V |L_s|^{q^*} (\varepsilon_3 \varphi)^{1-r^*} dV \tag{19}$$

Заменив переменные $t = M^\mu, \tau$ и $\rho = M\zeta$, получим:

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_V \varepsilon_3 R^q \varphi dV \leqslant c_1 M^{n+\mu-r^* m},\ c_1 = constants \tag{20}$$

При $M \to \infty$ и $n \leqslant r^* m - \mu = \frac{m}{q-p}$, то $\int_V R^q dV = 0$, и $f = 0$, следовательно, неравенства (13) не имеют решения при $n \leqslant m/(q-p)$ и $arg(f) \in [0, \pi/2q]$.

Шаг 2. Пусть $arg(f) \in (\pi/2q, \pi/q) \subset (0, \pi)$ это значит:

$$\left.\begin{aligned} -1 \leqslant -\epsilon = cos(q\vartheta) \leqslant 0 \\ 0 \leqslant \varepsilon = sin(\vartheta), sin(p\vartheta), sin(q\vartheta) \leqslant 1 \end{aligned}\right\} ; \epsilon, \varepsilon \in [0,1] \tag{21}$$

тогда неравенство (8) будет

$$\left.\begin{aligned} \epsilon R^q \geqslant L_{Re}(f) - \frac{\partial(R\ cos\theta)}{\partial t}, \\ \varepsilon R^q \geqslant -L_{Im}(f) - \frac{\partial(R\ sin\theta)}{\partial t}, \\ R_0\ cos\theta_0 \geqslant 0,\ R_0\ sin\theta_0 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Первое неравенство в (22) имеет нетривиальное слабое решение, независящее от q, p поскольку $\epsilon R^q > 0$ при $R \neq 0$. Следуя также, как и на шаге 1, находим, что второе неравенство в (22) не имеет нетривиального слабого решения при $n \leqslant \frac{m}{q-p}$, поэтому неравенства (22) не имеют решения когда $n \leqslant \frac{m}{q-p}$ и $arg(f) \in (\pi/2q, \pi/q)$.

Шаг 3. Если $arg(f) \in (\frac{\pi}{q}, \frac{3\pi}{2q}) \subset (0, \frac{3\pi}{2})$, то

$$\left.\begin{aligned} -1 \leqslant -\epsilon = cos(q\vartheta) \leqslant 0 \\ -1 \leqslant -\varepsilon = sin(q\vartheta) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} ; \epsilon, \varepsilon \in [0,1] \tag{23}$$

тогда неравенство (8) будет,

$$\left.\begin{aligned} \epsilon R^q \geqslant L_{Re}(f) - \frac{\partial(R\ cos\theta)}{\partial t}, \\ \varepsilon R^q \geqslant L_{Im}(f) - \frac{\partial(R\ sin\theta)}{\partial t}, \\ R_0\ cos\theta_0 \geqslant 0,\ R_0\ sin\theta_0 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

первое и второе неравенства в (24) имеют нетривиальное слабое решение, независящее от q, p.

Шаг 4. Если $arg(f) \in (\frac{3\pi}{2q}, \frac{2\pi}{q}]$, это значит:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \epsilon = cos(q\vartheta) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant -\varepsilon = sin(q\vartheta) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} ; \epsilon, \varepsilon \in (0,1) \tag{25}$$

тогда неравенство (8) будет,

$$\left.\begin{aligned} \epsilon R^q \leqslant -L_{Re}(f) + \frac{\partial(R\ cos\theta)}{\partial t}, \\ \varepsilon R^q \geqslant L_{Im}(f) - \frac{\partial(R\ sin\theta)}{\partial t}, \\ R_0\ cos\theta_0 \geqslant 0,\ R_0\ sin\theta_0 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Следуя тем же действиям, что и на шаге 1, мы находим, что первое неравенство в (26) не имеет нетривиального слабого решения при $n \leqslant m/(q-p)$, а второе — имеет нетривиальное слабое решение, которое не зависит от q, p. Следовательно, неравенства (26) не имеют нетривиального слабого решения, когда $n \leqslant m/(q-p)$ и $arg(f) \in \left(\frac{3\pi}{2q}, \frac{2\pi}{q}\right]$. Теорема доказана. ☐

Заключение

В работе получен следующий результат: отсутствие решения комплекснозначного полулинейного неравенства n-го порядка с ограниченными коэффициентами (5) зависит не только от критического показателя q, но и от $arg(f)$.

Список литературы

1. FARINA A. and SERRIN J., Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations, J. Diff. Eqns. 250,4408 (2011).

2. MITIDIERI E., POKHOZHAEV S. I., A priori estimates and the absence of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities, Tr. MIAN, 2001, volume 234, 3383.

3. GALAKHOV E. I., On some partial differential inequalities with gradient terms - 2013. - 283. 40-48.

4. GALAKHOV E. I., SALIEVA O. A. Blow-up of solutions of some nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets// Math. notes. — 2015. — 98. — S. 187–195.

5. EGOROV Y. V., GALAKTIONOV V. A., Kondratiev V.A., Pohozaev S.I. On the necessary condictions of global existence of solutions to a quasilinear inequality in the half-space // C. r. Acad. sci. Paris. S er. 1. 2000. V. 330. P. 93–98.

6. LAPTEV G. G., On the absence of solutions of elliptic differential inequalities in conic domains, Mat. notes, 2002, volume 71, issue 6,866.

7. KOVRIZHNYKH A. Yu. Differential and difference equations: account. settlement / A.Yu. Kovrizhnykh, O.O. Kovrizhnykh. - Yekaterinburg: Publishing house Ural, un-ta, 2014. — 148 p.

8. SALIEVA O. A., Absence of solutions of some non-linear inequalities with fractional powers of the Laplace operator// Math. notes. — 2017. — 101, No. 4. — S. 699–703.

9. FILIPPUCCI R., Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 70,2916 (2009).

10. FILIPPUCCI R., Pucci P., and Rigoli M., Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms, Commun. Contemp. Math. 12, 535 (2010).

11. YARUR C., “Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems”, Electron. J.Diff. Equat. 1996. V. 8. P. 22.

12. Галактионов В. А., Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., Похожаев С. И. Об условиях существования решений квазилинейного неравенства в полупространстве // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 1. С. 150–152.

    GALAKTIONOV V. A. et al. On conditions for the existence of solutions to a quasilinear inequality in a half-space. Mathematical Notes, 2000, Vol. 67, No. 1, pp. 150–152.

Цитирование: Ханан Али. Evolution inequalities of high order with complex-valued // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 95 – 102.

Жуковский В. И. и др. Существование равновесия по Бержу–Вайсману в одной дифференциальной позиционной игре двух лиц, в которой отсутствует равновесие по Нэшу // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 7 – 17.

УДК: 519.834

В статье выделен класс дифференциальных игр в которых при отсутствии ситуации равновесия по Нэшу существует равновесие по Бержу–Вайсману.

Ключевые слова: *бескоалиционные позиционные линейно-квадратичные игры, динамическое программирование, равновесие по Бержу-Вайсману, равновесие по Нэшу, метод малого параметра Пуанкаре.*

Zhukovskiy V. I. et al. Poincaré method of small parameter for construction of equilibria // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 18 – 43.

УДК: 519.62

Для дифференциальной линейно-квадратичной бескоалиционной позиционной игры с малым влиянием одного из игроков на скорость изменения фазового вектора найдены коэффициентные критерии существования и способ построения равновесия по Бержу и по Нэшу, базирующиеся на объединении методов динамического программирования и малого параметра.

Ключевые слова: *метод малого параметра, дифференциальная линейно-квадратичная бескоалиционная игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Бержу.*

Джабраилов А. Л. Исследование обобщенной краевой задачи для дифференциального уравнения бесконечного порядка // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 44 – 60.

УДК: 517.968

В статье изучаются различные аспекты существования решений линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Отмечено, что ранее исследователи не получили сколь-нибудь значимых результатов даже для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, посвященных исследованию краевых задач. Связанно это прежде всего с фактом отсутствия более-менее универсального метода сведения дифференциального уравнения бесконечного порядка к бесконечной системе дифференциальных уравнений, теория которых неплохо разработана в [3, 5]. Работа посвящена рассмотрению для общего дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)y^{(j)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right)$$

краевой задачи с многоточечно-функциональными условиями

$$y^{(k_i-1)}\left(x_{i,k_i}\right) = \Phi_{i,k_i}\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right),$$

где $x_{i,k_i} \in [a,b]$, $k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$, $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, n – конечное натуральное число, $n_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$;

$$y^{(i-1)}\left(x_i\right) = \Phi_i\left(y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \ldots\right), \;\; i = n+1, \; n+2, \ldots$$

Краевая задача в такой постановке еще никем не рассматривалась. То есть рассматривается проблема сведения одной обобщенной многоточечно-функциональной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения бесконечного порядка к краевой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений путем использования теорий бесконечных определений и разрешимости бесконечных систем алгебраических уравнений, обоснованных в работах Коха и Пуанкаре [4]. Автором применяется метод линейных отображений, устанавливающий связь между пространством бесконечно дифференцируемых функций $C^{(\infty)}\left(a,b\right)$ и пространством бесконечномерных непрерывных вектор-функций $C_\infty\left(a,b\right)$ с непрерывными производными на сегменте $[a,b]$ с помощью некоторой заданной невырожденной матрицы $A(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми элементами. Решение поставленной задачи и его производные до бесконечного порядка ищутся в виде некоторых функциональных рядов, составленных по матрице $A(x)$ и элементам пространства $C_\infty\left(a,b\right)$. Теоремы о существовании и единственности решений доказывается применяя результаты А. Пуанкаре, связанных со сходимостью определенных рядов для обеспечения разрешимости соответствующих бесконечных алгебраических систем в пространстве l_1 [8]. При использовании условий Коха с этой целью [3, 9], дающих решения таких систем в l_2 для построения системы интегрально-функциональных уравнений, после подстановки, доказательства соответствующей теоремы приводится в пространстве $C_\infty\left(a,b\right)$ с нормой $||\bar{y}|| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} ||\bar{y}||_{l_2} = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i(x)|^2\right)^{1/2}$ и необходимой метрикой.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение бесконечного порядка, бесконечные определители, системы дифференциальных и алгебраических уравнений, многоточечно-функциональные условия, линейные отображения, теоремы о существовании и единственности решения.*

Петров В. Э. Уравнение несущей линии с эллиптическими кромками // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 61 – 73.

УДК: 517.968.23

В статье рассматривается уравнение несущей линии Прандтля,

$$\Gamma(x) - \frac{p(x)}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x}\,dt = p(x)H_0(x), \qquad \Gamma(\pm 1) = 0, \tag{1}$$

описывающее циркуляцию $\Gamma(x)$ на тонком крыле с хордой $p(x)$ в однородном набегающем потоке $H_0(x) = 1$. К настоящему времени известен только один случай точного решения – это эллиптическое крыло, когда $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Мы рассматриваем обобщение этого случая, когда кромки крыла остаются эллиптическими, но геометрия может быть достаточно общей, а именно

$$p(x) = \frac{\alpha x + b}{\gamma x + d}\sqrt{1-x^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

Предполагается, что $p(x) \geqslant 0$. Уравнение в этом случае сводится к бесконечной рекуррентой системе с линейными коэффициентами. Она решается некоторой модификацией метода Лапласа. В результате получено интегральное представление для решения системы и с ее помощью представление самого решения уравнения (1). Также приведен вид решения в виде гипергеометрической функции Аппеля F_1. Отдельно рассмотрены предельные случаи $b = \alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Ключевые слова: *уравнение Прандтля, несущая линия.*

Сахаров А. Н. Особые периодические решения полиномиальных дифференциальных уравнений // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 74 – 88.

УДК: 517.45

Рассматривается задача о периодических решениях уравнения

$$\dot{z} \,=\, z^m + a_1(t)z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(t)z + a_m(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

с коэффициентами $a_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$ периодическими по t. Известно, что уравнения такого типа могут иметь, помимо обычных периодических решений, также специальные периодические решения, имеющие конечное число разрывов в периоде. Процедура компактификации фазового пространства уравнения позволяет определить

условия, ограничивающие число обычных периодических решений, а также описать механизм изменения структуры периодических решений в терминах чисел вращения.

Ключевые слова: *компактификация фазового пространства, периодические решения, особые периодические решения, отображение монодромии.*

Shamoyan R. F., Makhina N. M. On some new embeddings in minimal bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 89 – 94.

УДК: 517.55

В статье рассматриваются очень общие ограниченные минимальные однородные области. При некоторых естественных дополнительных условиях получены новые точные результаты об аналитических пространствах типа Бергмана в минимальных ограниченных однородных областях. Рассматриваемые нами области являются прямыми обобщениями хорошо изученных так называемых ограниченных симметрических областей в $\mathbb{C}^n$. В единичном круге и в единичном шаре все наши результаты были получены первым автором. Некоторые результаты были получены ранее для трубчатых и ограниченных псевдовыпуклых областей. Наши доказательства в значительной степени основаны на свойствах так называемых r-решеток для этих общих областей, представленных в последних работах Ямаджи. Наши доказательства также основаны на аргументах, приведенных ранее для менее общих областей. Мы частично расширяем результат о вложениях из работы Ямаджи.

Ключевые слова: *теоремы вложения, минимальные области, аналитические функции, пространства типа Бергмана.*

Ханан Али. Evolution inequalities of high order with complex-valued // Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — № 3 (64). — С. 95 – 102.

УДК: 517.956.5

Изучается отсутствие решений эволюционных неравенств n-го порядка с комплексными значениями. Актуальность исследования заключается в распространении полученных результатов с n-мерного действительного пространства на n-мерное комплексное пространство. Получены условия отсутствия слабых нетривиальных решений рассматриваемой задачи. Существует два условия отсутствия решения, одно из которых связано с индексом критерия q, а другое — с аргументом комплексной функции, зависящим от q. Доказательства результатов об отсутствии решений в данной работе основаны на методике, предложенной С. И. Похожаевым и развитой Э. Л. Митидиери и С. И. Похожаевым, которая базируется на методе пробных функций. Их подход в значительной степени опирается, прежде всего, на априорные интегральные оценки возможных решений рассматриваемой задачи и на вывод асимптотик этих оценок по некоторому параметру, стремящемуся к ∞ или к 0 в зависимости от характера задачи. Наконец, отсутствие решения доказывается от противного. А именно, достижение нулевого предельного значения в соответствующей априорной оценке гарантирует отсутствие нетривиального решения этой задачи.

Ключевые слова: *эволюционные неравенства n-го порядка, слабые нетривиальные решения, комплекснозначные неравенства.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Али Ханан	Исследователь математического института имени академика С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов РУДН, г. Москва, Российская Федерация. *e-mail: alihanan29557@gmail.com*
Бельских Юлия Анатольевна	к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и экономики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация. *e-mail: belskihja@gmail.com*
Джабраилов Ахмед Лечаевич	старший преподаватель Чеченского государственного университета им. А. А. Кадырова, г. Грозный, Российская Федерация. *e-mail: ahmed_ 0065@mail.ru*
Жуковская Лидия Владиславовна	д. э. н, к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Центрального экономико-математического института Российской академии наук (ЦЭМИ РАН), г. Москва, Российская Федерация. *e-mail: zhukovskaylv@mail.ru*
Жуковский Владислав Иосифович	д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. *e-mail: zhkvlad@yandex.ru*
Махина Наталья Михайловна	к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И. Г. Петровского, г. Брянск, Российская Федерация. *e-mail: makhina32@gmail.com*

Петров Владимир Эрнестович	к. ф.-м. н, Генеральный директор ООО «ТВЭЛЛ», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. *e-mail: petrov_ twell@list.ru*
Сахаров Александр Николаевич	доцент кафедры прикладной механики, физики и высшей математики инженерного факультета Нижегородского государственного аграрно-технологического университета, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. *e-mail: ansakharov2008@yandex.ru*
Сачков Сергей Николаевич	к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и экономики факультета математики, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация. *e-mail: snsachkov@yandex.ru*
Сачкова Елена Николаевна	к. ф.-м. н, доцент Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация. *e-mail: ensachkova@mail.ru*
Шамоян Роми Файзоевич	к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени академика И. Г. Петровского, г. Брянск, Российская Федерация *e-mail: rshamoyan@gmail.com*

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 10.09.2025.

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № 752. Тираж 25 экз. Формат А4.
Усл. печ. ед. 12,7. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.

Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7