Т аврический В естник И нформатики и М атематики

№ 4 (61) ' 2023

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:

- 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
- 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
- 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
- 1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
- 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
- 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.





T AURIDA J OURNAL OF C OMPUTER SCIENCE THEORY AND M ATHEMATICS

2023, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate ΠM No Φ C77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.

АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.

ВАТУЛЬЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.

ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.

ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.

ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.

ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.

ЗАДОРОЖНИЙ В. Г., проф., д. ф.-м. н.

КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.

КАРАПЕТЯНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.

КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,

КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,

МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.

МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.

ПОЛОВИНКИН И.П., доц., д.ф.-м.н.

РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.

РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.

СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.

СТОНЯКИН Ф. С, проф., д. ф.-м. н.

УТКИН А. В, в. н. с., д. т. н.

ЦИБУЛИН В. Г, доц., д. ф.-м. н.

ЧЕРНОВА Т. А, доц., д. т. н.

ЧИЛИН В. И, проф., д. ф.-м. н.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — главный редактор

РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — заместитель главного редактора

АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — ответственный редактор

БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — редактор сайта журнала

ГЕРМАНЧУК М. С., к. ф.-м. н. — секретарь журнала

ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.

КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — ответственный секретарь

ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — научный редактор

ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.

ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики

пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99 Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77 e-mail (гл. редактор): mustafa muratov@mail.ru

tvim-article@mail.ru e-mail (для переписки):

сайт журнала: www.tvim.su

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи

по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Машинное обучение, распознавание и

извлечение закономерностей

Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы Дедуктивные системы и базы знаний

Спектральные и эволюционные задачи

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Математические проблемы гидродинамики,

Синтез моделей принятия решений

жидкости и газа, теория упругости

при неполной начальной информации Системный анализ, управление и

Дискретная оптимизация

обработка информации

Вычислительная математика и математическое моделирование

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Протокол № 12 от 22 декабря 2023 г.

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., EngD

Natalia APATOVA, Prof., EdD

Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math. Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math.

Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

Yakov YERUSALIMSKY, Prof., EngD

Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math.

Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math.

Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math.

Vladislav KRAVCHENKO, Prof., EngD

Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., EngD,

Leonid MESTETSKIY, Prof., EngD

Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math.

Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.

Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.

Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math.

Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.

 $\textbf{Fedor STONYAKIN}, \ \mathsf{Prof.}, \ \mathsf{Dr. Phys.-Math}.$

Anton UTKIN, Senior Researcher, EngD

Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.

Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., EngD **Vladimir CHILIN**, Prof., Dr. Phys.-Math.

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — Editor-in-Chief

Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — Vice Chief Editor

Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — Managing Editor

Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — The Editor of the Cite

Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — Secretary

Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.

Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — Executive Secretary

Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — Science editor

Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.

Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University

Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.su

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,

Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU

Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

 ${\bf Tel.} \,\, + 7\,\, 978\,\, 782\,\, 31\,\, 99 - {\bf editor\text{-}in\text{-}chief}$

+7 978 837 82 77 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.su — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

| Кристалинский В. Р. Об анализе сетевых моделей со случайными продолжительностями работ с помощью системы Wolfram Mathematica | 7 |
|---|-----|
| Лукьяненко В. А. Приближенные решения уравнений, моделирующих нелинейные процессы | |
| Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Применение системы компьютерной математики в задачах прикладной нелинейной динамики | |
| Рудницкий О. И. О базисных инвариантах импримитивных групп $G(m,p,n), B_n^m, D_n^m$ | 81 |
| Селищев А. А., Цибулин В. Г. Разностная схема повышенного порядка для анализа фильтрационной конвекции | |
| Рефераты | 103 |
| Список авторов номера | .06 |

TABLE OF CONTENTS

| Kristalinskiy V. R. On the analysis of network models with random work durations using the Wolfram Mathematica system | 7 |
|--|-----|
| Lukianenko V. A. Approximate solutions of the equations which are simulating nonlinear processes | 21 |
| Kornuta A. A., Lukianenko V. A. Application of a computer mathematics system in problems of applied nonlinear dynamics | 56 |
| Rudnitskii O. I. On a basic invariants of the imprimitive groups $G(m, p, n), B_n^m, D_n^m$ | |
| Selischev A. A., Tsybulin V. G. High order finite difference scheme for the plane problem of convection in a porous medium | 92 |
| Abstracts | 103 |
| Authors | 106 |

УДК: 519.688 MSC2010: 05C90

ОБ АНАЛИЗЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЯМИ РАБОТ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA

© В. Р. Кристалинский

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000, Российская Федерация е-маіl: kristvr@rambler.ru

On the analysis of network models with random work durations using the Wolfram Mathematica system.

Kristalinskiy V. R.

Abstract. As you know, a network model is a plan for performing some complex of interrelated operations, given in the form of a network, the graphical representation of which is called a network graph. At the same time, all the interrelationships of the work to be performed require a clear definition. Network planning is one of the most well-known applications of graph theory and is widely used in practice.

In English-language literature, this technique is called the Project Evaluation and Review Technique (PERT). The tasks solved using the network planning method are to reduce the duration of the entire project to a minimum and rationally allocate labor and other resources throughout its execution.

Network planning can be used, for example, when solving the problem of creating long-range radar stations, when planning roadway reconstruction, in construction, in process management at enterprises, when planning maintenance of communication systems, when planning assembly operations and when solving a large number of other applied tasks. Thus, the development of methods for the computer implementation of algorithms for the study of network graphs is a very urgent task.

In the case when the duration of work is deterministic, the main task is to determine the critical path — the longest path along the graph. It is the length of this path that determines the duration of the entire project, and therefore its increase is unacceptable. In this regard, the most responsible and qualified specialists should be appointed to work on the critical path. However, in practice, this case is rare. More often there are cases when the actual time of completion of the work is not known to us exactly (by chance). In this case, the question arises: what is the probability that the actual execution time of the complex of works will not exceed a given value or will be in a given interval? The solution of these issues is obviously very important for practice, when planning real work packages.

Solving problems of this kind presents significant computational difficulties. Solving problems related to network graphs using the Wolfram Mathematica system turns out to be very effective. This system, especially its latest versions, contains a number of tools that allow you to study network graphs with random operation times. The use of these capabilities turns out to be very useful both in solving real-world applied problems, and in the educational process of economic and technical universities, in studying disciplines related to operations research and computer modeling.

This article is devoted to solving problems for the study of network graphs with random work time using the Wolfram Mathematica system.

Keywords: network model, Wolfram Mathematica system.

Введение

Как известно, сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных операций, заданный в специфической форме сети, графическое изображение которой называется сетевым графиком (сетевым графом). Отличительной особенностью сетевой модели является четкое определение всех взаимосвязей работ, которые должны быть проведены. Сетевое планирование, то есть планирование комплексов операций, основанное на разработке сетевых моделей, является одним из наиболее известных приложений теории графов. Оно широко применяется на практике. Задачи, решаемые с помощью метода сетевого планирования, сформулированы, например, в [1]. Эти задачи заключаются в сокращении до минимума длительности всего проекта и рациональном распределении трудовых и других ресурсов по всему времени его исполнения. Пример применения сетевого планирования к решению задачи создания радиолокационных станций дальнего обнаружения приведен в [2]. Статья [3] посвящена использованию сетевых графов при планировании работ по реконструкции дорожного полотна, статья [4] — сетевому планированию в строительстве, В работах [5]–[15] показаны возможности применения сетевого планирования в других областях. Таким образом, разработка методов компьютерной реализации алгоритмов исследования сетевых графов является весьма актуальной задачей.

Случай, когда время выполнения отдельных работ задано заранее, рассмотрен в [11]. Как известно, в этом случае основной задачей является определение критического пути — наиболее продолжительного пути по графу. Именно продолжительность этого пути определяет продолжительность всего проекта, и поэтому ее

увеличение недопустимо. Однако на практике этот случай встречается редко. Чаще встречаются случаи, когда фактическое время выполнения работы в точности неизвестно (случайно). В этом случае возникает вопрос: какова вероятность того, что фактическое время выполнения комплекса работ не превзойдет заданной величины? Рассмотрению случая, когда время выполнения работ случайно и посвящена настоящая статья.

Целью данной статьи является исследование возможностей системы. Mathematica по анализу сетевых графиков со случайным временем.

1. Анализ сетевых графиков со случайным временем

Пусть $t_{\text{опт}}$ — оптимистическая оценка длительности рассматриваемой работы, $t_{\text{пес}}$ — пессимистическая, $t_{\text{вер}}$ — вероятная оценка длительности этой работы. Тогда в качестве оценки математического ожидания продолжительности рассматриваемой работы используется следующая оценка (см. [16])

$$m = \frac{t_{\text{опт}} + 4t_{\text{вер}} + t_{\text{пес}}}{6},$$

а в качестве среднего квадратичного отклонения берется следующая оценка

$$\sigma = \frac{t_{\text{nec}} - t_{\text{опт}}}{6}.$$

В реальных исследованиях предполагается, что длительность работы есть случайная величина, имеющая гамма-распределение. Параметры этого распределения находятся следующим образом (см. например, [16]):

$$\beta = \frac{\sigma^2}{m};$$

$$\alpha = \frac{m^2}{\sigma^2}.$$

Длина каждого пути сетевого графика представляет собой сумму случайных величин, имеющих гамма-распределение. Система Mathematica позволяет оценивать вероятности событий, связанных с этой случайной величиной, в частности, вероятность того, что продолжительность комплекса работ не превысит определенного значения, или будет находиться в заданном интервале.

Исходными данными для алгоритма решения рассматриваемой задачи являются вероятные продолжительности всех работ. Сам алгоритм включает в себя следующие шаги.

Алгоритм вычисления характеристик комплекса работ

Вход: матрица детерминированных оценок продолжительности работ Выход: вероятности событий полных путей сетевого графа

1. Вычисление оптимистических и пессимистических оценок продолжительностей работ.

- 2. Вычисление оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения продолжительностей работ.
- 3. Построение параметров гамма распределений для всех продолжительностей работ.
- 4. Построение множества полных путей по сетевому графу.
- 5. Построение критического пути и вычисление его длины для соответствующего детерминированного сетевого графа.
- 6. Построение векторов, содержащих параметры гамма-распределения для всех работ, лежащих на критическом пути.
- 7. Построение массива реализаций случайной величины, представляющей суммарную временную протяженность работ, принадлежащих каждому полному пути.
- 8. Вычисление вероятностей интересующих нас событий, связанных с полными путями по сетевому графу.

2. Пример реализации алгоритма

Строим матрицу, соответствующую оценкам продолжительностей работ.

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

Строим матрицы, соответствующие оптимистическим и пессимистическим оценкам продолжительностей работ. Для построения пессимистических и оптимистических оценок продолжительности работы умножаем значение ожидаемой продолжительности работы на величину соответственно $1 + R1_{i,j}$ и $1 - R1_{i,j}$, где $R1_{i,j}$ — случайное число из промежутка [0,1;0,3].

```
R1 = Table[RandomReal[\{0.1, 0.3\}], \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}];
     табл... случайное действительное число
X1 = Table[0, {i, 1, 12}, {j, 1, 12}];
    таблица значений
Do[If[XX[[i,j]] > 0, X1[[i,j]] = XX[[i,j]] (1 + R1[[i,j]])], \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}]
... условный оператор
R1 = Table[RandomReal[\{0.1, 0.3\}], \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}];
    табл... случайное действительное число
X2 = Table[0, {i, 1, 12}, {j, 1, 12}];
    таблица значений
Do[If[XX[[i,j]] > 0, X2[[i,j]] = XX[[i,j]] (1 - R1[[i,j]))], \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}]
··· условный оператор
MX = (X1 + 4XX + X2) / 6; \sigma = ((X1 - X2) / 6);
 Строим матрицы параметров соответствующих гамма-распределений.
\beta = Table[0, \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}];
    таблица значений
Do[If[XX[[i, j]] > 0, \beta[[i, j]] = \sigma[[i, j]]^2 / MX[[i, j]], \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}];
 \alpha = Table[0, \{i, 1, 12\}, \{j, 1, 12\}];
     таблица значений
 Do[If[XX[[i,j]] > 0, \alpha[[i,j]] = MX[[i,j]]^2/\sigma[[i,j]]^2], \{i,1,12\}, \{j,1,12\}];
 ... условный оператор
```

После этого находим все пути по графу от вершины 1 до вершины 12 (полные пути). В версиях Wolfram Mathematica до девятой включительно возможности сделать

это непосредственно не было, вследствие чего приходилось использовать специальный алгоритм на основе матрицы смежности графа.

Сначала строим множество всех подмножеств множества вершин графа.

Затем выбираем из этого множества элементы, в которые входят вершины 1 и 12, соответствующие начальному и завершающему событиям.

Далее строим множество полных путей. Делается это следующим образом. Строим матрицу смежности соответствующего невзвешенного графа (в ней на пересечении i-й строки и j-го столбца будет стоять 1, если соответствующие вершины соединены между собой, и нуль в противном случае). Затем для всех элементов множества 2, в которое входят все множества вершин графа, включающие начальную и конечную, находим произведения значений элементов построенной матрицы смежности вдоль всего пути, соответствующего данному элементу. Очевидно, что если такой путь в графе существует, то это произведение не равно нулю. Добавляем его к множеству полных путей по сетевому графу, после чего находим его длину для случая, когда продолжительности работ равны ожидаемым (детерминированы).

```
A = Table[0, {i, 1, 12}, {j, 1, 12}];

|таблица значений

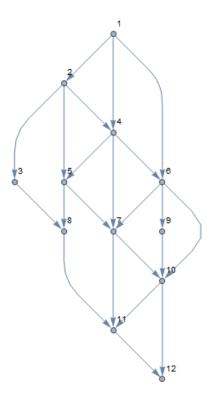
Do[If[XX[[i, j]] > 0, A[[i, j]] = 1], {i, 1, 12}, {j, 1, 12}]

| условный оператор
```

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

В версиях системы, начиная с десятой, появилась возможность решать эту задачу непосредственно.

Далее вводим команду, позволяющую построить граф по его матрице смежности, после чего система выводит его графическое представление. После этого вводится команда, по которой непосредственно строится множество всех полных путей. Таким образом, количество полных путей, построенных двумя описанными способами, совпадает.



```
TT3 = FindPath[g1, 1, 12, Infinity, All]
      найти путь
                            бесконеч… всё
      Length [TT3]
     длина
      40
      H = Table[Mean[T4[[j]]] Length[T4[[j]]], {j, 1, n}];
          табл… |среднее арифм… |длина
      Y = Flatten[Position[H, Max[H]]][[1]];
          уплост… позиция по о… максимум
      T3[[Y]]
       {1, 4, 5, 7, 10, 12}
      T4[[Y]]
       {13, 10, 6, 13, 19}
      Mean [T4[[Y]] Length [T4[[Y]]]]
      среднее ариф… длина
```

Найдем критический путь на графе и его длину, считая, что времена работ детерминированы.

Видно, что критический путь на графе проходит через вершины 1, 4, 5, 7, 10, 12 и его продолжительность при детерминированных временах работы составляет 61.

Для нахождения этого пути можно использовать и другой способ, описанный нами в [11], а именно, умножить длины всех дуг графа на -1 и найти кратчайший путь по вновь построенному графу с помощью специальной команды системы Mathematica, использующей алгоритм Форда-Беллмана.

Затем строим вектора, содержащие параметры распределения для работ каждого полного пути.

```
X = Table[x_i, \{i, 1, 12\}];
    таблица значений
 T5 = \{\};
 Do[u = T3[[j]]; r = Length[u]; T5 = Append[T5, Table[a[[u[[s]], u[[s+1]]]], \{s, 1, r-1\}]], \{j, 1, n\}]
                                      добавить в… таблица значений
 Length [T5]
длина
 40
 T6 = \{\};
 Do[u = T3[[j]]; r = Length[u]; T6 = Append[T6, Table[\beta[[u[[s]], u[[s+1]]]], \{s, 1, r-1\}]], \{j, 1, n\}]
оператор цикла
                     длина
                                     добавить в... таблица значений
u1 = Table[0, {j, 1, Length[T5]}];
     таблица значений длина
Do[m = Length[T5[[k]]]; u1[[k]] = TransformedDistribution[<math>\sum_{k=1}^{\infty} x[i],
                                         распределение функции случай
Table[x[i] \approx GammaDistribution[T5[[k]][[i]], T6[[k]][[i]]], \{i, 1, m\}] \Big], \{k, 1, Length[T5]\} \Big]
таблица знач… | гамма-распределение
                                                                                                   длина
```

Последняя команда строит массив реализаций случайной величины, представляющей суммарную временную протяженность работ, принадлежащих каждому полному пути. После этого рассчитываются вероятности интересующих событий.

Находим, например, вероятность того, что длина 16 пути в списке полных путей (то есть время выполнения работ, принадлежащих этому пути) не превзойдет 63. Этот путь будет включать в себя вершины с номерами 1, 4, 5, 7, 10, 12. Именно этот путь, как указано выше, был критическим в графе с детерминированными продолжительностями работ.

```
W = Timing[NProbability[Z < 63, Z ≈ u1[[16]]]]

| затра… | квадратурная оценка вероятности

{139.594, 0.752848}
```

Вычисление этой вероятности длится достаточно долго (139,6 секунд), при этом система выдает следующие сообщения:

NIntegrate::slwcon: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small.

NIntegrate::eincr: The global error of the strategy GlobalAdaptive has increased more than 2000 times. The global error is expected to decrease monotonically after a number of integrand evaluations. Suspect one of the following: the working precision is insufficient for the specified precision goal; the integrand is highly oscillatory or it is not a (piecewise) smooth function; or the true value of the integral is 0. Increasing the value of the GlobalAdaptive option MaxErrorIncreases might lead to a convergent numerical integration. NIntegrate obtained 0.8686657861290231' and 0.00020234133716988634' for the integral and error estimates.

Эти сообщения свидетельствуют о медленной сходимости процесса расчета интегралов, вычисление которых необходимо для расчета требуемой вероятности. Значок ≈, входящий в две последние команды, представляет собой специальный символ системы Mathematica и набирается последовательным нажатием клавиши ESC, вводом слова dist и снова нажатием клавиши ESC.

Найдем теперь вероятность того, что длина этого пути будет находиться в промежутке от 58 до 63.

```
W = NProbability[Z < 63 \land Z > 58, Z \approx u1[[16]]] 0.684654
```

Заключение

Система Wolfram Mathematica позволяет эффективно исследовать сетевые графы, в которых учитывается случайный характер длительностей работ.

Для вычислений можно использовать различные способы: как основанные на встроенных командах системы Mathematica, реализованные в ее новых версиях, так и способы, в ходе реализации которых лучше видно содержание задач, решаемых при анализе сетевых графов.

Первый подход лучше использовать при решении конкретных прикладных задач, второй — в ходе учебного процесса, когда студентам надо дать возможность увидеть суть рассматриваемой методики.

Список литературы

- 1. Гасанбеков, С. К. Сетевое планирование как инструмент управления проектами / С. К. Гасанбеков, Н. А. Лубенец // Известия МГТУ МАМИ. 2014. 5(1). С. 21–25.
 - GASANBEKOV, S. K. & LUBENECZ, N. A. (2014) Setevoe planirovanie kak instrument upravleniya proektami. *Izvestiya MGTU MAMI*. 5 (1). Pp. 21–25.
- 2. Боев, С. Ф. Применение сетевой модели на основе многовариантных графов с динамической структурой для формирования планов-графиков создания радиолокационных станций дальнего обнаружения / С. Ф. Боев, А. С. Логовский, А. М. Казанцев и др. // Радиопромышленность. 2020. 30(3). С. 8–20. ВОЕV, S. F., LODOVSKIJ, A. S. & KAZANCEV, A. M (2020) Primenenie
 - setevoj modeli na osnove mnogovariantnyx grafov s dinamicheskoj strukturoj dlya formirovaniya planov-grafikov sozdaniya radiolokacionnyx stancij dalnego obnaruzheniya . *Radiopromyshlennost.* 30 (3). Pp. 8–20.
- 3. Гельфанова, Д. Д. Принятие управленческих решений с помощью метода сетевого планирования / Д. Д. Гельфанова, А. М. Сухтаева // Современный менеджмент и управление: тенденции и перспективы развития : Сборник научных трудов, Симферополь, 20 ноября 2019 года / Под общей редакцией М.Н. Стефаненко. Симферополь: Общество с ограниченной ответственностью «Аэтерна». 2019. С. 171–176.
 - GELFANOVA, D. D. & SUXTAEVA, A. M (2019) Prinyatie upravlencheskix reshenij s pomoshhyu metoda setevogo planirovaniya. Sovremennyj menedzhment i upravlenie:

- tendencii i perspektivy razvitiya: Sbornik nauchnyx trudov, Simferopol, 20 noyabrya 2019. Pp. 171–176.
- 4. Киевский, И. Л. Методы сетевого планирования и управления при реализации проектов планировки территории / И. Л. Киевский, С. А. Семенов, И. Б. Гришутин и С. С. Минаков // Промышленное и гражданское строительство. 2019.-8.- С. 49–54.
 - KIEVSKIJ, I. L., SEMENOV, S. A., GRISHUTIN, I. B. & MINAKOV, S. S. (2019) Metody setevogo planirovaniya i upravleniya pri realizacii proektov planirovki territorii. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*. 8. Pp. 49–54.
- 5. Григорьева, А. Л. Математическая модель оптимизации системы управления процессами на предприятиях и судах ледового плавания на основе модели сетевого планирования / А. Л. Григорьева и др. // Ученые записки Комсомольскогона-Амуре государственного технического университета. 2021. 1. С. 19—28. GRIGOREVA, A. L. et al (2021) Matematicheskaya model optimizacii sistemy upravleniya processami na predpriyatiyax i sudax ledovogo plavaniya na osnove modeli setevogo planirovaniya. Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. 1. Pp. 19—28.
- 6. Плут, М. Н. Метод сетевого планирования и управления и его применение для проведения технического обслуживания на техники связи и автоматизированных систем управления стационарных узлов связи / М. Н. Плут, К. В. Федотов и А. В. Шаталов // Проблемы технического обеспечения войск в современных условиях. Труды IV Межвузовской НПК. СПб. 2019. С. 338—342. PLUT, М. N., FEDOTOV, K. V. & SHATALOV, A. V. (2019) Metod setevogo planirovaniya i upravleniya i ego primenenie dlya provedeniya texnicheskogo obsluzhivaniya na texniki svyazi i avtomatizirovannyx sistem upravleniya stacionarnyx uzlov svyazi. Problemy texnicheskogo obespecheniya vojsk v sovremennyx usloviyax. Trudy IV Mezhvuzovskoj NPK. SPb. Pp. 338—342.
- 7. Шибанов, А. П. Использование стохастических сетей при планировании сборочных операций с функциями от случайных величин / А. П. Шибанов и А. З. Нгуен // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. 69. С. 86—92.
 - SHIBANOV, A. P. & NGUEN, A. Z. (2019) Ispolzovanie stoxasticheskix setej pri planirovanii sborochnyx operacij s funkciyami ot sluchajnyx velichin. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotexnicheskogo universiteta*. 69. Pp. 86–92.

- 8. Катаргин, Н. В. Оптимизация сетевого графика комплекса работ и оценка длительности проекта методом Монте Карло / Н. В. Катаргин // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2021. 8(1). С. 310–319.
 - KATARGIN, N. V. (2021) Optimizaciya setevogo grafika kompleksa rabot i ocenka dlitelnosti proekta metodom Monte Karlo. Sovremennaya matematika i koncepcii innovacionnogo matematicheskogo obrazovaniya. 8 (1). Pp. 310–319.
- 9. Кабулов, А. В. Математические методы решения задачи календарного планирования в мелкосерийном и единичном производстве / А. В. Кабулов и И. И. Каландаров // Инновационные геотехнологии при разработке рудных и нерудных месторождений: Сборник докладов IX Международной научнотехнической конференции, Екатеринбург, 06-07 апреля 2020 года / Екатеринбург: Уральский государственный горный университет. 2020. С. 290—297.
 - KABULOV, A. V. & KALANDAROV, O. I. (2020) Matematicheskie metody resheniya zadachi kalendarnogo planirovaniya v melkoserijnom i edinichnom proizvodstve. *Innovacionnye geotexnologii pri razrabotke rudnyx i nerudnyx mestorozhdenij*. Sbornik dokladov IX Mezhdunarodnoj nauchno-texnicheskoj konferencii, Ekaterinburg, 06-07 aprelya 2020. Pp. 290–297.
- 10. Кузнецов, А. Л. Матричный метод поиска путей на взвешенных ориентированных графах в задачах сетевого планирования при проектировании и эксплуатации морских портов / А. Л. Кузнецов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2020. 12(2). С. 230–238.
 - KUZNECZOV, A. L. (2020) Matrichnyj metod poiska putej na vzveshennyx orientirovannyx grafax v zadachax setevogo planirovaniya pri proektirovanii i ekspluatacii morskix portov. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova. 12 (2). Pp. 230–238.
- 11. Кристалинский, В. Р. Разработка и анализ сетевых моделей в системе Mathematica / В. Р. Кристалинский и Д. В. Кристалинская // Системы компьютерной математики и их приложения. 2023. 24. C. 40–46.
 - KRISTALINSKIJ, V. R. (2023) Razrabotka i analiz setevyx modelej v sisteme Mathematica. Sistemy kompyuternoj matematiki i ix prilozheniya. 24. Pp. 40–46.

- 12. GONDIA, A., EZZELDIN, M. & El-Dakhakhni, W. (2022) Dynamic networks for resilience-driven management of infrastructure projects. *Automation in Construction*. 136. Pp. 104149.
- 13. GUPTA, S. et al (2022) Activity Time Variations and Its Influence on Realization of Different Critical Paths in a PERT Network: An Empirical Study Using Simulations. *International Civil Engineering and Architecture Conference*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. Pp. 674–680.
- PREGINA, K. & RAMESH KANNAN, M. (2021) Stochastic project network scheduling technique for construction projects using GERT. Advances in Construction Management: Select Proceedings of ACMM 2021. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. Pp. 381–392.
- 15. MOVAFAGHPOUT, M. (2022) Using Trended Regression Trees for Computing Unbiased Makespan of PERT Networks. *International Journal of Industrial Engineering and Management Science*. 9 (1). Pp. 2–14.
- 16. Волгин, Н. С. Исследование операций / Н. С. Волгин. С-Пб.: Военная Академия имени Адмирала Флота Н. С. Кузнецова, 1999. 366 с.
 - VOLGIN, N. S. (1999) *Issledovanie operacij.* N. S. Volgin. S-Pb.: Voennaya Akademiya imeni Admirala Flota N. S. Kuzneczova.

УДК: 517.957+517.928.7

MSC2010: 35K61, 35C07, 35C15, 35C20

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

© В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского Физико-технический институт просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация е-маіl: art-inf@yandex.ru

APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE EQUATIONS WHICH ARE SIMULATING NONLINEAR PROCESSES.

Lukianenko V. A.

Abstract. Nonlinear ordinary differential equations and partial differential equations have found application in many sections of physics: photonics and plasmonics, nonlinear optics, gasfree combustion theory, hydrodynamics and electrodynamics; biophysics; nonlinear population dynamics; nonlinear wave theory, etc. In terms of system analysis, the considered models contain evolutionary blocks, diffusion, diffraction, blocks of interaction, nonlinear blocks and others.

Within the framework of mathematics with broad interdisciplinary topics in the problems of applied nonlinear dynamics (AND) the existence and behavior of solutions (particularly, periodic and quasi-periodic solutions) of nonlinear equations with parameters, their stability are investigated, as well as spatially heterogeneous structures which are born by bifurcation.

Some historical information related to the research of the AND in Crimea is given, for example here was held the famous international Lyapunov Conference about stability problem, which was chaired by G. A. Leonov in 2018. Research in the field of linear and nonlinear equations such as equations of convolution type, singular integral equations with argument shifts, nonlinear Urysohn type equations have their origin from F. D. Gakhov students, namely G. S. Litvinchuk and Yu. I. Chersky. Here, in the Crimea, a monograph «Equations of convolution type» was written by F. D. Gakhov and Yu. I. Chersky.

Research in the field of applied non-linear dynamics in V. I. Vernadsky Crimean Federal university which were started by E. P. Belan, now develop in the following directions: quasi-linear parabolic equations of nonlinear optics with transformations of spatial variables (V. A. Lukianenko, Yu. A. Khazova and A. A. Kornuta); nonlinear models of propagation of surface plasmon-polaritons (V. A. Lukinaneko, M. S. Germanchuk and S. P. Plyshevskaya); mathematical model of the phenomenological equation of gas-free spin combustion as a singularly perturbed nonlinear parabolic Van der Pole equation (O. V. Shyian, V. A. Lukianenko and A. A. Grebeneva); nonlinear integral equation of the first Urysohn type and their approximate solutions (V. A. Lukianenko, M. G. Kozlova, V. A. Belozub and Yu. A. Khazova).

For the problem of propagation of phase wave of light modulation with transformation of reflection of spatial variable using the method of integral (central) manifolds the theorem about existence of spatially heterogeneous stationary solutions has been proved; applying the Galerkin method, the form and stability of rotating wave solutions, which are born as a result of Adronov-Hopf bifurcation, metastable structures have been investigated; integral representation of the problem with transformation of involution type on an infinite strip with boundary conditions with oblique derivative has been obtained.

Surface plasmon-polariton wave propagation is considered on the example of a system of two related nonlinear Schrodinger equations with cubic nonlinearity Kerr's type, as well as generalizing model of spin combustion in annular regions (circle, ring, thin ring and circumference) and the quasi-normal form of the problem is constructed and investigated. The dependence of the first spin waves which are born after bifurcation from the time is visualized.

The algorithm of solving of nonlinear integral equations of 1st kind of convolution type on example of Urysohn type equation arising in problems of applied nonlinear dynamics is introduced.

Constructed structures are consistent with light structures obtained during physical experiments. This section of mathematics is also reflected in the works oby Moscow, Yaroslavl, Rostov, Nizhny Novgorod and other schools of non-linear dynamics.

As the main methods of solving the studied problems of applied nonlinear dynamics the method of central manifold, bifurcation analysis, method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky-Samoilenko (KBMS), asymptotic decomposition of the solution according to eigen functions, averaging method, Jacobi elliptic function method, Galerkin method are offered. The solvability of the problems is based on the operator's approach of studying equations in Banach spaces.

The considered mathematical models are the basis of fundamental research on the development of new technologies of elemental electronics base, aimed at storage, transformation of information and creation of computational systems of intellectual processing of Big Data.

The results presented in the paper reflect the research about AND and integral equations within the development program "Crimean mathematical center".

Keywords: nonlinear equation, nonstationary effects, rotating waves, bifurcation analysis, integral representation

Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных нашли применение во многих разделах физики: фотонике и плазмонике, нелинейной оптике, теории горения, гидродинамике и электродинамике; биофизике; нелинейной популяционной динамике; теории нелинейных волн и др. С точки зрения системного анализа рассмотренные модели содержат эволюционные блоки, диффузионные, дифракционные, блоки взаимодействия, блоки нелинейностей и другие.

В рамках раздела математики с широкими междисциплинарными связями в задачах прикладной нелинейной динамики (ПНД) исследуется существование и поведение решений (в частности, периодических и квазипериодических) нелинейных уравнений с параметрами, их устойчивость, а также рождающиеся при бифуркации пространственно-неоднородные структуры.

Для изучения локальных семейств дифференциальных уравнений применяется теория бифуркации векторных полей. Теория центральных многообразий дает возможность сводить исходную задачу к задаче меньшей размерности, тогда как теория нормальных и квазинормальных форм позволяет представлять уравнения с нелинейными членами в наиболее простом виде.

Приведем исторические сведения, связанные с исследованием ПНД в Крыму. Программу нового развития теории бифуркаций В. И. Арнольд изложил в «Лекциях о бифуркации и версальных семействах» [1], прочитанных им на летней школе в Кацивели (рядом с Симеизом) в 1971 г. и опубликованных в УМН в 1972 г. В это же время были анонсированы результаты А. Н. Шошитайшвили и Р. И. Богданова.

Исследовательская программа В. И. Арнольда была направлена на систематизацию теории локальных бифуркаций с точки зрения теории особенностей с использованием леммы Сарда и теоремы трансверсальности. На этом пути исследований отмечаются результаты Р. И. Богданова, Ф. Такенса, Х. Жолондека, Э. И. Хорозова, Ф. С. Березанского, А. И. Хибника, Б. Краускопфа, Ю. С. Ильяшенко и др.

С Крымом связаны международные Ляпуновские конференции по устойчивости. Председателем одной из них (DSST-2018) был Γ . А. Леонов ¹. Работы Γ . А. Леонова и его школы оказывают существенное влияние на исследования устойчивости задач прикладной нелинейной динамики.

Исследования в области линейных и нелинейных уравнений типа свертки, сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, нелинейных уравнений типа Урысона берут свое начало от учеников Ф. Д. Гахова, а именно, Г. С. Литвинчука и Ю. И. Черского. Здесь же, в Крыму, была написана монография «Уравнения типа свертки» Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского.

Наряду с работой научной школы «Спектральные и эволюционные задачи» под руководством Н. Д. Копачевского, основными направлениями которой является исследование вопросов разрешимости задач гидродинамики с помощью спектральной теории операторов и операторных пучков, в Крымском федеральном университете

¹Имеется ввиду международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST), https://dsst.su

им. В. И. Вернадского (далее — $\mathrm{K}\Phi\mathrm{Y}$) развивалось направление прикладной нелинейной динамики.

Впервые данную тематику в КФУ предложил в своих работах Е. П. Белан [2] совместно с А. М. Самойленко [3] и О. Б. Лыковой [4], исследуя квазилинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных, задачи о бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия, проблемы бифуркации рождения периодических решений на гладкой области. Построенные структуры согласуются со световыми структурами, полученными в ходе физических экспериментов.

Данная проблематика также нашла свое отражение в работах московской, ярославской, ростовской, нижегородской и других школах нелинейной динамики.

Исследования в области прикладной нелинейной динамики в КФУ, начатые Е. П. Беланом, сейчас развиваются в следующих направлениях:

- 1. Квазилинейные параболические уравнения нелинейной оптики с преобразованиями пространственных переменных (В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова и А. А. Корнута [5]–[8]).
- 2. Нелинейные модели распространения поверхностных плазмон-поляритонов (В. А. Лукьяненко, М. С. Германчук и С. П. Плышевская [11]).
- 3. Математическая модель феноменологического уравнения безгазового спинового горения сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения ван-дер-полевского типа (О. В. Шиян, В. А. Лукьяненко и А. А. Гребенева [12]–[16]).
- 4. Нелинейные интегральные уравнения 1-го рода типа Урысона и их приближенные методы решения (В. А. Лукьяненко, М. Г. Козлова, В. А. Белозуб и Ю. А. Хазова [17]–[21]).

В качестве основных методов решения исследуемых задач прикладной нелинейной динамики предлагаются метод центрального многообразия, бифуркационный анализ, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского-Самойленко (КБМС), асимптотическое разложение решения по собственным функциям, метод усреднения, метод эллиптических функций Якоби, метод Галеркина. Разрешимость задач основана на операторном подходе исследования уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотренные математические модели лежат в основе фундаментальных исследований по разработке новых технологий элементной базы электроники, направленных на хранение, преобразование информации и создание вычислительных систем интеллектуализированной обработки больших данных (Big Data).

Приведенные в работе результаты отражают исследования по ПНД и интегральным уравнениям в рамках программы развития НО «Крымский математический центр» и, в частности, представлены в октябре 2023 г. в Майкопе на III Конференции Математических центров России и на VI Международном научном Форуме «Цифровые технологии: наука, образование, инновации» (ноябрь, 2023 г.).

1. Нелинейные уравнения параболического типа с преобразованием аргументов

В области S рассматривается начально-краевая задача [22]–[24]

$$u_t(x,t) + u(x,t) = D\Delta u(x,t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x,t)), x \in S \subset \mathbb{R}^2, t > 0,$$
 (1)

с краевыми условиями Неймана на границе S и начальным условием $u\left(x,0\right) =u_{0}\left(x\right) .$

Уравнение (1) описывает динамику фазовой модуляции u(x,t) световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием пространственных аргументов Qu(x,t)=u(q(x),t) в обратной связи.

Здесь Δ — оператор Лапласа, D>0 — эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0<\gamma\leqslant 1$ — контрастность интерференционной картины, K>0 — коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока.

Отметим, что достаточно общий тип преобразований изучался в работах [25]-[26]. В качестве области S рассматриваются:

- 1. Кольцо $S^r = \{(r, \theta) | 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \}.$
- 2. Kpyr $(r_1 = 0)$ $S^c = \{(r, \theta) | 0 \le r \le r_2; 0 \le \theta \le 2\pi\}.$
- 3. Окружность $S^1 = \{\theta | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$
- 4. Тонкое кольцо $S^{\delta} = \{(r,\theta)|\ 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2;\ r_2 r_1 = \delta << 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$

Для всех круговых областей функция $u=u\left(r,\theta,t\right)$ удовлетворяет условию периодичности $u\left(r,\theta+2\pi,t\right)=u\left(r,\theta,t\right);$ $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат.

Для круга и кольца оператор Q может содержать преобразование радиальной координаты и угловой $q(r,\theta)=(\kappa r,\theta+h),\ 0<\kappa<1,\ 0< h<2\pi,\ \mathrm{т.\,e.}$ операторы сжатия (растяжения) и поворота (отражения). Для модуляции световой волны на окружности рассматривается только поворот: $q(\theta)=(\theta+h)$. В случае, когда $Qu=Q_hu=u(r,\theta+h,t)$ — преобразование поворота на угол $h=\frac{2\pi}{p}$ $(p\in\mathbb{N})$ оператор Q_h — оператор инволюции $Q^p=I$ [9].

При исследовании задачи (1) используются следующие функциональные пространства: $H = H(S) = L_2^r(S)$ — пространство функций из $L_2(S)$, квадратично интегрируемых с весом r, со скалярным произведением и нормой соответственно S^r , S^c :

$$< u, v>_{H} = \int_{0}^{2\pi} \int_{r_{1}}^{r_{2}} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad ||u||_{H}^{2} = \int_{0}^{2\pi} \int_{r_{1}}^{r_{2}} |u(r, \theta)|^{2} r dr d\theta,$$

здесь <*,*> — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H; функциональное пространство H^2 — соболевское пространство комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой соответственно:

$$< u, v>_{H^2} = < u, v>_H + < (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{1}{2}}v>_H, \quad ||u||_{H^2}^2 = < u, u>_{H^2}.$$

Шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$ с учетом краевых условий обозначим $H^s, s \in \mathbb{Z}_+$. Норма в пространстве H^s определяется следующим образом: $||u||_s^2 = <(-\Delta)^s u, u>+< u, u>.$

Пространство Соболева $H^l(S)$ измеримых на S функций вводится стандартным образом. Скалярные произведения в $H^l(S)$ определяется формулой

$$\langle u, v \rangle_l = \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \int_S \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+, \partial^{\alpha} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$

Пространство $H^l = H^l(S) \cap \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0 \right\}$ является пополнением пространства бесконечно дифференцируемых на S функций, удовлетворяющих краевому условию, по норме пространства $H^l(S)$. Норму в пространстве H^l будем обозначать $||\cdot||_l$.

Обозначим H^{-1} — пространство, сопряженное пространству H^1 . Тогда

$$||u||_{-1} = \sup \left\{ \frac{\langle u, v \rangle}{||v||_{1}} \ \left(v \in H^{1}, v \neq 0 \right) \right\}.$$
 (3)

По теореме Соболева имеют место вложения $H^1\subset H\subset H^{-1}$, причем, вложение $H^1\subset H$ вполне непрерывно.

Отметим, что оператор $Q: H \to H$ $(Q: H^1 \to H^1)$, определяющий правую часть уравнения (1), является линейным и ограниченным и $\|Q\|_{Hom(H)} = \kappa^{-1}$.

Из работы [28] следует

Теорема 1. Для T > 0 начально-краевая задача (1) с условием $u|_{t=0} = u_0(r,\theta)$, $u_0 \in H$ имеет единственное решение $u(r,\theta,t)$, принадлежащее пространству $L_{\infty}(H,[0,T]) \cap L_2(H^1,[0,T])$.

В качестве фазового пространства выбирается пространство H^1 .

Корректность начально-краевой задачи (1) для круга S^c доказана в [17], для кольца S^r , окружности S^1 и тонкого кольца S^δ доказательство аналогично.

Легко показать, что если $u(r, \theta, t)$ — решение этой задачи, то функция $u(r, \theta + \alpha, t)$, где $0 \le \alpha \le 2\pi$, также является решением (1). Следовательно, математическая модель уравнения динамики фазовой модуляции световой волны с преобразованием пространственных аргументов в круговых областях S-эквивариантна.

В работе описана асимптотическая форма и проведен анализ устойчивости структур — решений, бифурцирующих из пространственно-однородного состояния равновесия, определяемого уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{4}$$

Согласно [29]–[30] рост K сопровождается увеличением количества одновременно существующих корней уравнения (4); кроме того, из-за появления новых состояний равновесия и исчезновения старых, происходит постоянное обновление их состава. То есть в зависимости от вида преобразования Q данная модель обладает широким спектром бифурцирующих структур.

Зафиксировав одну из непрерывных ветвей решения уравнения (1) w=w(K), $1+K\sin w(K)\neq 0$, предположим, что выполняется следующее условие

Условие 1. При $K=\widehat{K}$ существует такое решение $w=\widehat{w}$ уравнения (4), что $1+\widehat{K}\gamma\sin\widehat{w}\neq 0.$

В силу теоремы о неявной функции, следует, что найдется аналитическая в окрестности точки \widehat{K} функция $w=w(\widehat{K}+\nu)=w(\nu),\,w(0)=\widehat{w},$ удовлетворяющая уравнению (4) при $K=\widehat{K}+\nu$.

Пусть u=w=Const — одно из пространственно-однородных решений задачи (1), определяемое уравнением (4). В окрестности точки w, выполнив замену $u\left(r,\theta,t\right)=w+v\left(r,\theta,t\right)$, где $v(r,\theta,t)$ — новая неизвестная функция, относительно v получим следующую задачу:

$$v_t + v = D\Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v + f(Q_h v, w), \ (r, \theta) \in S, \ t \geqslant q0, \tag{5}$$

где $f(Q_hv,w)=K\gamma(\cos w(\cos Q_hv-1)-\sin w(\sin Q_hv-Q_hv)),$ с условиями Неймана на границе $\frac{\partial v}{\partial \nu}=0,\ \nu$ — единичная внутренняя нормаль к границе S, а также начальным условием

$$v(r,\theta,0) = v_0(r,\theta) \tag{6}$$

и условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \tag{7}$$

Раскладывая $f(Q_h v, w)$ в ряд и оставляя некоторое конечное число членов ряда, получим иерархию модельных уравнений, для которых исследуется задача нахождения приближенного пространственно-неоднородного решения, бифурцируещего из его пространственно-однородного решения при изменении бифуркационного параметра. Бифуркационными могут быть параметры D и K.

Запишем уравнение (1) в виде

$$v_t = L(D, K)v + B(Qv), \tag{8}$$

где $L(D, K) = \mu \Delta v - v - K\gamma \sin w Q_h v$, $B(Qv) = f(Q_h v, w)$.

Согласно лемме 3.1 [31], оператор L(D,K) в пространстве H с областью определения H^2 имеет компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Обозначим через λ_n , $n=1,2,\ldots$ собственные значения оператора L(D,K).

В работе [7] для оператора L(D,K) в пространстве $H(S^r)$ доказана лемма 1.

Лемма 1. Оператор L(D,K) имеет полную в $H(S^r)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r,\theta) = R_{n,m}(\lambda_{n,m}r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \ m = 1, 2, \dots,$$

такую, что

$$L(D,K)\psi_{n,m}(r,\theta) = (-1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_{n,m}(r,\theta),$$

$$R_{n,m}(r) = R_{n,m}(\lambda_{n,m}r) = J_n(\lambda_{n,m}r) \cdot Y_n'(\lambda_{n,m}r_1) - Y_n(\lambda_{n,m}r) \cdot J_n'(\lambda_{n,m}r_1).$$
(9)

Функции $R_{nm}(r)$ определяются через функции Бесселя J_n , Y_n [10], первого и второго рода соответственно, порядка n:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \widetilde{\psi}_n(x), \text{ где } \widetilde{\psi}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} \left(\operatorname{ctg} \pi \alpha \cdot J_\alpha(x) - \frac{1}{\sin \pi \alpha} \cdot J_{-\alpha}(x)\right),$$
(10)

где $\lambda_{n,m} = \widetilde{\lambda}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнения

$$J_n'\left(\widetilde{\lambda}r_1\right) \cdot Y_n'\left(\widetilde{\lambda}r_2\right) - J_n'\left(\widetilde{\lambda}r_2\right) \cdot Y_n'\left(\widetilde{\lambda}r_1\right) = 0. \tag{11}$$

Функции $R(r) = R_{n,m} (\lambda_{m,n})$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^{2}R''(r) + rR'(r) + \left(\widetilde{\lambda}^{2}r^{2} - n^{2}\right)R(r) = 0, \ R'(r_{1}) = 0, \ R'(r_{2}) = 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(12)

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

Собственным значениям оператора L(D, K) соответствует выражение вида:

$$\lambda_n = -D\lambda_{n,m}^2 - 1 + \Lambda \exp[inh],\tag{13}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., m = 1, 2, ..., \Lambda = -K\gamma \sin Q_h w = -K\gamma \sin w$ для w = const.

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1 (см. [7]), доказана

Лемма 2. Оператор L(D,K) имеет полную в $H(S^c)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r,\theta) = J_n(\lambda_{n,m}r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$L(D,K)\psi_{n,m}(r,\theta) = (-1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_{n,m}(r,\theta),$$

где $J_n\left(\lambda_{n,m}r\right)-$ функции Бесселя первого рода порядка $n,\,\lambda_{n,m}=\widetilde{\lambda}-$ упорядоченные по возрастанию корни уравнения

$$J_n'\left(\widetilde{\lambda}r_1\right) = 0. \tag{14}$$

Функции $R(r) = J_n\left(\lambda_{m,n}r\right)$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^{2}R''(r) + rR'(r) + \left(\tilde{\lambda}^{2}r^{2} - n^{2}\right)R(r) = 0, \ R'(r_{2}) = 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (15)

Собственные значения для оператора L(D,K): $\lambda_n = -1 - \mu \lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh],$ $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$ $m=1,2,\ldots$

Частным случаем леммы 1 является лемма 3.

Лемма 3. Оператор L(D,K) имеет полную в $H(S^1)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_n(r,\theta) = \exp[in\theta],$$

$$L(D,K)\psi_n(r,\theta) = (-1 - Dn^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_n(r,\theta) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Собственные значения для оператора L(D,K): $\lambda_n = -1 - Dn^2 + \Lambda \exp[inh],$ $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

В зависимости от значений действительной и мнимой частей λ_n могут существовать различные типы решений, бифурцирующие из пространственно-однородного решения, определяемого равенством (4). Так, в случае $Re\lambda_n \neq 0$, $Im\lambda_n = 0$ могут быть исследованы пространственно-неоднородные стационарные решения, в случае $Re\lambda_n = 0$, $Im\lambda_n \neq 0$ получим чисто периодические решения.

Линеаризуя уравнение (5) на выделенном стационарном пространственнооднородном решении \hat{w} , $u = v + \hat{w}$, рассмотрим одну из модельных постановок задачи (5)–(7):

$$v_t + v = D\Delta v - K\gamma \sin \widehat{w} \cdot Q_h v - \frac{K\gamma \cos \widehat{w}}{2!} \cdot Q_h v^2 + \frac{K\gamma \sin \widehat{w}}{3!} \cdot Q_h v^3,$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_2, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ t \geqslant 0,$$
(16)

с условиями второго рода на границе

$$v_r(r_2, \theta, t) = 0, (17)$$

начальным условием

$$v\left(r,\theta,0\right) = 0\tag{18}$$

и условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \tag{19}$$

Введем обозначения $\Lambda = -K\gamma\sin\widehat{w},~\Omega = \frac{\operatorname{ctg}\widehat{w}}{2}.$ Тогда задача (16) имеет вид

$$v_t = -v + D\Delta v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3,$$

$$0 \le r \le r_2, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ t \ge 0.$$
(20)

В работе [5] методом центрального многообразия исследовалось уравнение (20), линеаризованное в окрестности нулевого решения; здесь $v_t = L(D,K)v$, $Lv = -v + D\Delta v + \Lambda Q_h v$. Зафиксируем $h = \frac{\pi}{3}$ (другие случаи рассматриваются аналогично).

Интерес представляет, когда $\Lambda < -1$. Тогда для K выполняется условие

Условие 2.
$$\Lambda = \Lambda\left(\widehat{K}\right) < -1$$

Условие 2. $\Lambda=\Lambda\left(\widehat{K}\right)<-1.$ Обозначим $D_s=(-1-(-1)^s\Lambda)/\lambda_{3s,m}^2,\ s=1,2,\ldots.$ Если $D>D_1,$ то согласно лемме 2 нулевое решение задачи (20) является устойчивым. При убывании параметра D и его прохождении через значение D_1 собственное значение λ_1 пересекает мнимую ось.

Если $D_2 < D < D_1$, то индекс неустойчивости нулевого решения равен 1. Индекс неустойчивости нулевого решения повышается на единицу при уменьшении D и его прохождении через D_s , s = 2, 3,

Теорема 2. При выполнении условий 1 и 2 для $h = \pi/3$ существует $\mu > 0$, такое, что при фиксированном значении m=1 и для любых значений параметра D, удовлетворяющих неравенству $D_1 - \mu < D < D_1$, существует непрерывное по D

стационарное решение $\varphi(r,\theta,D)$ уравнения (20), определяемое равенством

$$\varphi(r,\theta,D) = \frac{3\theta + \gamma^2 P_r(r,\mu)\cos \theta\theta + \gamma^3 P_r(r,\mu)\cos \theta\theta + \xi(\gamma,r,\theta,\mu)}{2}$$
(21)

$$= zJ_3(\lambda_{3,1}r)\cos 3\theta + z^2P_6(r,\mu)\cos 6\theta + z^3P_9(r,\mu)\cos 9\theta + \xi(z,r,\theta,\mu)|_{z=z(\mu)},$$

$$P_6(r,D) = \frac{\Omega \gamma_2}{2(2\lambda_3 - \lambda_6) d_{6,1}^2} \cdot J_6(\lambda_{6,1}r), \qquad (22)$$

$$P_9(r,D) = \frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9) d_{9,1}^2} \left[-\frac{\Omega^2 \gamma_2 \gamma_3}{(2\lambda_3 - \lambda_6) d_{6,1}^2} + \frac{\Lambda \gamma_4}{12} \right] \cdot J_9(\lambda_{9,1}r). \tag{23}$$

 $3 десь \ \xi(z,r,\theta,D) = O(|z|^3), \ z(D) > 0 - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения$

$$\dot{z} = \lambda_3(D) + \frac{1}{2d_{3,1}^2} \left(\frac{\Lambda \gamma_1}{4} - \frac{\Omega^2 \gamma_2^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6) d_{6,1}^2} \right) z^3 + \dots, \tag{24}$$

где $J_{3s}(\lambda_{3s,1}r)$ определяется в (10), $d_{n,m}^2 = \int\limits_0^{r_2} r J_n^2(\lambda_{3,1}r) dr$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$,

$$\gamma_{1} = \int_{0}^{r_{2}} r J_{3}^{4}(\lambda_{3,1}r) dr, \quad \gamma_{2} = \int_{0}^{r_{2}} r J_{3}^{2}(\lambda_{3,1}r) J_{6}(\lambda_{6,1}r) dr,$$

$$\gamma_{3} = \int_{0}^{r_{2}} r J_{3}(\lambda_{3,1}r) J_{6}(\lambda_{6,1}r) J_{9}(\lambda_{9,1}r) dr, \quad \gamma_{4} = \int_{0}^{r_{2}} r J_{3}^{3}(\lambda_{3,1}r) J_{9}(\lambda_{9,1}r) dr.$$
(25)

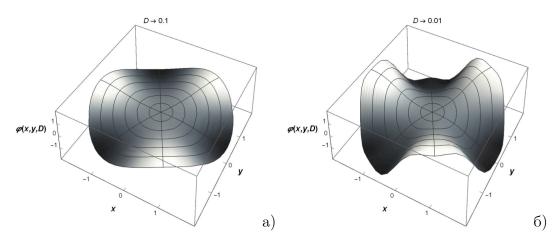
Таким образом, в некоторой полуокрестности D_1 существует решение $\varphi_1(r,\theta,D)$ уравнения (20), определяемое равенствами (20)–(23), где $\xi(z,r,D) = O(|z|^3)$, z(D) > 0 — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения (19). Решение $\varphi_1(r,\theta,D)$ — асимптотически устойчиво.

Отметим, что описанный процесс построения функции $\varphi(r,\theta,\mu)$ может быть продолжен.

В пакете символьных вычислений «Wolfram Mathematica 11.3» при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2, \ h = \pi/3$ построены приближенные стационарные решения $\varphi(x,y,D)$ для различных значений бифуркационного параметра D (рис. 1).

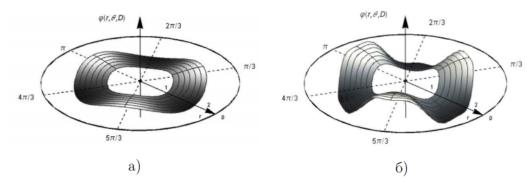
Задача (5)–(7) для круга характеризуется существованием периодических по t решений типа «бегущая волна», существование и асимптотическая форма которых подробно исследованы в [33].

Для кольца $S = S^r$ справедлива теорема аналогичная теореме 2 [7], [9].



Puc.~1.~ Приближенное стационарное решение $\varphi(x,y,D)$ для $\Lambda=-3/2,$ $h=\pi/3$ в цилиндрической системе координат: а) при D=0.1; б) при D=0.01

Используя пакет символьных вычислений, построено приближенное стационарное решение $\varphi(r, \theta, D)$ из класса W_1 для значений параметров $\Lambda = -3/2$, D = 0.1; 0.01 (рис. 2).



 $Puc.\ 2.\$ Приближенное решение для $\Lambda = -3/2,\ h = \pi/3$: а) при D = 0.1; б) при D = 0.01

В [3] для области фазовой модуляции волны окружности доказана теорема о существовании в окрестности бифуркационного значения параметра $D_1 = -1 + \Lambda \exp[ih]$ устойчивых пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (5)–(7), бифурцирующих из пространственно-однородного стационарного решения (4). При уменьшении параметра $D \in (0,1)$ были обнаружены два каскада седло-узловых бифуркаций, в результате которых происходило ответвление пары непрерывных по D пространственно-неоднородных стационарных решений (5)–(7).

Использование указанных решений в качестве начальных условий в задаче (5)–(7) привело к появлению метаустойчивых структур, которые на достаточно длительном промежутке времени не изменяются, а затем за сравнительно короткий промежуток времени переходят в окрестность одного из пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (5)–(7), бифурцирующих из пространственно-однородного стационарного решения (4) при $D_1 = -1 + \Lambda \exp[ih]$. Сценарий возникновения описан в [7]. Подобные структуры имеют место и для остальных областей.

Для уравнения (1) на окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ В. А. Лукьяненко совместно с Ю. А. Хазовой исследована параболическая задача с преобразованием поворота пространственной переменной $Qu(\theta,t) = u(\theta+h,t), 0 \le t \le 2\pi$:

$$u_t = \mu \Delta u - u - \Lambda Q u + \Lambda \frac{1}{2!} \operatorname{ctg} \omega \cdot Q u^2 + \frac{\Lambda}{6} Q u^3, \quad t > 0, \tag{26}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \tag{27}$$

где $\Lambda = \Lambda(K,\gamma) = -K\gamma\sin\omega$, $Qu(\varphi,t) = u(\varphi+h,t)$ — оператор поворота; угол поворота выбирается несоизмеримым с 2π . Зафиксируем $h = \frac{2\pi}{3}$. Здесь μ — бифуркационный параметр, Δ — одномерный оператор Лапласа.

Теорема 3. Пусть выполнено условие $\Lambda > 2$. Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что если $0 < \mu^* - \mu < \delta_0$, то задача (26)–(27) имеет приближенное решение типа бегущей волны вида:

$$u(\varphi,t) = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t}e^{i\varphi} + \rho_1(\mu)e^{-i\omega_1(\mu)t}e^{-i\varphi} + \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{3i\omega_1(\mu)t}e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{-3i\omega_1(\mu)t}e^{-3i\varphi}}{3\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_3} + \dots,$$

 $r\partial e \
ho_1(\mu) > 0$ является положительным корнем уравнения

$$Re \lambda_1(\mu) + (Re c_3)\rho_1^2(\mu) + (Re c_5)\rho_1^4(\mu) = 0,$$

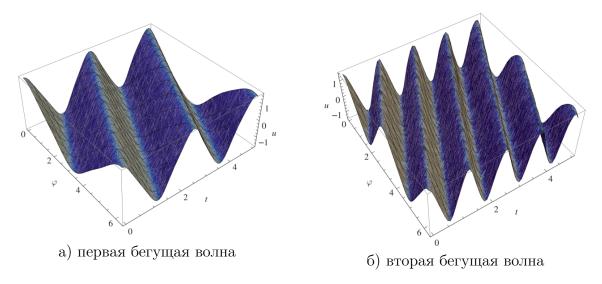
$$\omega_1(\mu) = Im \lambda_1(\mu) + (Im c_3)\rho_1^2(\mu) + (Im c_5)\rho_1^4(\mu).$$

 $Re c_3 < 0$, $Re \overline{c}_3 < 0$. Периодические по t решения $u(\varphi,t)$ орбитально устойчивые.

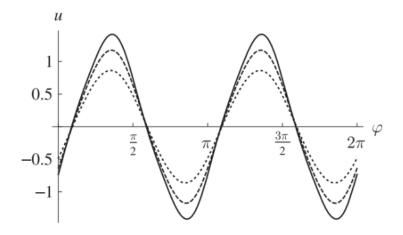
Для численных расчетов применялась модельная задача (26) с условием $\cos \omega = 0$, а также задача (26) с квадратичным и кубическим слагаемыми.

Первая бегущая волна при фиксированном значении N=6, рождающаяся орбитально устойчивой в результате бифуркации Андронова-Хопфа при переходе бифуркационного параметра μ через значение $\mu_1^*=0.5$ приведена на рис. 3, а).

Вторая бегущая волна при фиксированном значении N=6, рождающаяся неустойчивой, с индексом неустойчивости два, в результате бифуркации Андронова-Хопфа при переходе бифуркационного параметра μ через значение $\mu_2^*=0.125$ приведена на рис. 3, б).



Puc.~3.~ Результаты численных экспериментов. φ — пространственная переменная, t — переменная времени, u — значение функции $u(\varphi,t)$



Puc.~4. График роста амплитуды второй бегущей волны при фиксированном N=6 в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра $\mu=0.09,0.06,0.03;$ здесь φ — пространственная переменная, t — переменная времени, u — значение функции $u(\varphi,t)$

Для случая окружности:

- 1. С помощью метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения с преобразованием отражения пространственной переменной.
- 2. С помощью метода Галеркина исследованы форма и устойчивость пространственно неоднородных стационарных решений типа бегущая волна, рождающиеся в результате бифуркации Андронова–Хопфа.
- 3. Исследованы метаустойчивые структуры (медленно меняющиеся решения), возникающие в результате седло-узловых бифуркаций.

В [8] исследован вопрос существования, формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений. Изучены неустойчивые и метаустойчивые структуры параболического уравнения с квадратичным и кубическим слагаемыми на отрезке. Получено интегральное представление решения параболической задачи.

Исследована динамика диссипативных структур в параболической задаче с преобразованием отражения пространственной переменной. Математической моделью для такой оптической системы является полулинейное параболическое уравнение:

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t) = D\partial_{xx} u(x,t) + K(1 + \gamma \cos u(-x,t)), t > 0,$$
(28)

$$\partial_x u\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = \partial_x u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \tag{29}$$

Преобразование u = w + v приводит задачу (28)–(29) к виду

$$\dot{v} + L(D)v = N(Qv). \tag{30}$$

Справедливо следующее равенство

$$N(v) = \frac{1}{2}\Lambda_1 v^2 - \frac{1}{6}\Lambda v^3 + O(v^4), \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega.$$
 (31)

Для анализа динамики $v_1^{\pm}(x, D)$ при смещении параметра D в область надкритичности строятся галеркинские аппроксимации уравнения (30) при $\Lambda_1 = 0$ в виде

$$v = \sum_{k=0}^{4} z_{2k+1} \sin(2k+1)x. \tag{32}$$

В результате для $z = (z_1, z_3, \dots, z_9)$ получим градиентную систему

$$\dot{z}_{2k+1} = -\frac{\partial G_{1,0}(z,D)}{\partial z_{2k+1}}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{33}$$

«Таврический вестник информатики и математики», M4(61)' 2023

Качественно различающиеся фазовые портреты однопараметрического семейства систем уравнений (33), схематически изображенных на рис. 5.

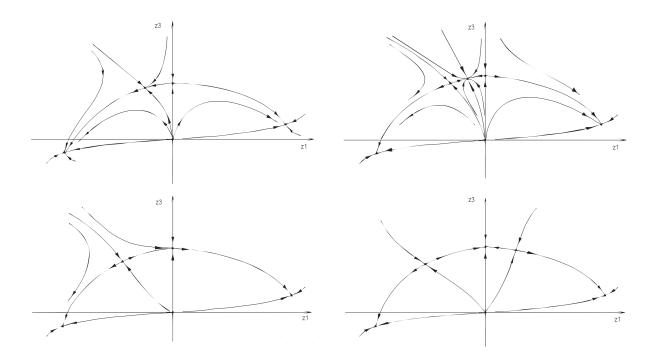


Рис. 5. Фазовый портрет градиентной системы

В работах В. А. Лукьяненко и А. А. Корнута [9]–[8] получено обобщение задачи для граничных условий с косой производной. В частности, рассмотрена начальнокраевая задача для нелинейного $\Phi Д Y$ параболического типа с преобразованием отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$ с косой производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad x \in \mathbb{R}, \ |y| \leqslant l, \ t > 0, \tag{34}$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{y=-l} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{y=l} = 0,$$
(35)

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), (36)$$

здесь $u = u(x, y, t), x \in \mathbb{R}, |y| \le l, Qu(x, y, t) = u(-x, y, t).$

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

Теорема 4. Начально-краевая задача (34)–(36) представима в виде нелинейного интегрального уравнения

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda(t-\tau) \exp\left[-\frac{(x+\xi)^{2}}{4(t-\tau)D} \right] + \right.$$

$$+ \operatorname{sh} \Lambda(t-\tau) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2}}{4(t-\tau)D} \right] \right) \frac{\exp\left[-(t-\tau) \right]}{2\sqrt{\pi(t-\tau)D}} \times$$

$$\times \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^{2}(t-\tau) \right] \cos\frac{k\pi}{2l}(y-\eta) \right] \times$$

$$\times \left(K(1+\gamma\cos u(\xi,\eta,\tau)) - \Lambda u(\xi,\eta,\tau) \right) d\eta d\xi d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left[-t \right]}{2\sqrt{\pi tD}} \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda t \exp\left[-\frac{(x-\xi)^{2}}{4tD} \right] + \operatorname{sh} \Lambda t \exp\left[-\frac{(x+\xi)^{2}}{4tD} \right] \right) \times$$

$$\times \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^{2} t \right] \cos\frac{k\pi}{2l}(y-\eta) \right] u_{0}(\xi,\eta) d\eta d\xi.$$

Полученное нелинейное уравнение подходит для итерационных вычислительных процедур.

Основные результаты:

- 1. Проведен бифуркационный анализ начально-краевой задачи для параболического ФДУ с преобразованием пространственных аргументов.
- 2. Исследованы форма и устойчивость стационарных неоднородных и периодических по времени структур.
- 3. Получено интегральное представление задачи с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косой производной.

В работе [34] (продолжение работ [35]–[36]) рассматривались «процессы формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе» (использовался тонкий слой нелинейной среды керровского типа).

Взаимодействие световой волны с нелинейной средой учитывает диффузию и дифракцию при распространении волны в резонаторе. Динамика нелинейной фазовой

модуляции u(r,t) описывается системой уравнений (аналогичной раннее рассматриваемым в данной работе)

$$\tau_0 \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} + u(r,t) = D\Delta u(r,t) + K|A(r,0,t)|^2,$$
(38)

$$A(r, z, t + t_r) = (1 - R)^{1/2} A_{in}(r) + Re^{i\varphi_0} \exp[iL\Delta(A(r, z, t)e^{in(r, t)})]\Big|_{z=0},$$
(39)

$$-2ik_0 \frac{\partial A(r,z,t)}{\partial z} = \Delta A(r,z,t), \ A(r,0,t) = A_0(r,t). \tag{40}$$

Здесь r=(x,y) — радиус поперечное сечение светового поля; z — продольная координата; t — время; τ_0 — характерное время релаксации нелинейности; Δ — лапласиан по переменным (x,y), описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D — нормированный коэффициент диффузии; K — коэффициент нелинейности среды; $|A(r,0,t)|^2$ — интенсивность светового поля, попадающего в нелинейную среду; A(r,z,t) — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора; R — коэффициент отражения зеркал по интенсивности; t_r — время распространение поля в резонаторе; $A_{in}(r)$ — комплексная амплитуда входной световой волны; φ_0 — постоянный фазовый сдвиг световой волны; L — длина резонатора (нормированная на дифракционную длину); $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число; l — толщина слоя нелинейной среды. Такая подстановка обобщает модели для уравнения (1).

При допущениях $l \ll L$, $t_r = L/c \ll \tau_0$ «медленной нелинейности» уравнение (38) является упрощенным вариантом уравнения Икеды [37]. В системе также могут присутствовать преобразования пространственных переменных Q.

Система (38)–(40) имеет пространственно-однородное стационарное решение

$$u_s = \frac{(1-R)KI_0}{1+R^2 - 2R\cos(u_s + \varphi_0)},\tag{41}$$

где $u_s = K|A_s|^2$, $I_0 = |A_{in}|^2$.

Дальнейшая линеаризация исходных уравнений проводится в окрестности u_s .

В результате вычислительных экспериментов показана вариативность динамики исследуемой системы, формирование сложных поперечных структур (flower like — структуры). Обнаружен особый режим, приводящий к динамическим фазовым пространственным структурам типа ролла и гексагона, являющихся результатом «соревновательной динамики нелинейных мод в резонаторе, а также сложных фазовых структур, формирующихся в результате кооперативной динамики нелинейных мод».

Еще один пример задачи для рассматриваемого в работе класса абстрактных параболических уравнений с преобразованием пространственных переменных (с приложениями не из нелинейной оптики) рассмотрен в работе Д. А. Куликова [38]. Уравнение указанного класса является моделью формирования рельефа на поверхности пластины под воздействием потока ионов. Процесс формирования волнового рельефа получается в результате решения бифуркационных задач, для которых используется метод центральных инвариантных многообразий и аппарат теории нормальных форм.

Показано, что в рассмотренной периодической краевой задачи для нелокального уравнения эрозии сохраняется механизм образования наноструктур, который был выявлен ранее для модели Бредли-Харпера (волновые структуры могут сформироваться при потере устойчивости плоского фронта обработки мишени ионов).

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

В работе [39] исследуется распространение поверхностных плазмонполяритонных (ППП) волн вдоль границы двух сред: металла или метаматериала с отрицательным показателем преломления и диэлектрика, обладающего оптической активностью или кубической нелинейностью.

Интерес к $\Pi\Pi\Pi$ связан также с возможным применением в передаче (обработке) информации и др.

Электромагнитное поле поверхностного плазмон-поляритонного пучка представляется в виде

$$E(x, y, z) = A(x, y) f(z) \exp[i\beta x], \tag{42}$$

где A(x,y) это медленно меняющаяся огибающая, f(z) описывает поперечное распределение поля

$$f(z) = f_0[\gamma_j(z-z_{j0})] - \text{в среде с керровской нелинейностью;}$$

$$f(z) = f_1 \exp[-\gamma_1|z|] + f_2 \exp[-\gamma_2|z|) - \text{в среде с оптической активностью.}$$
 (43)

Тогда уравнение огибающей

$$\frac{\partial A}{\partial x} - iD_{dif} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - i\alpha_{NL} |A|^2 A = 0, \tag{44}$$

где $D_{dif} = \frac{1}{2\beta}$ — коэффициент дифракции, α_{NL} — эффективный коэффициент нелинейности, знак и величина которого зависят от диэлектрической и магнитной проницаемости, нелинейности сред и коэффициентов локализация пучка γ_i .

Уравнение для A(x,y) с учетом дифракционных и дисперсионных явлений в случае плазмон-поляритонного импульсного пучка конечной ширины и длительности

$$E(x, y, z, \xi) = A(z, y, \xi) \exp[i\beta x - i\omega_0 t] f(z)$$

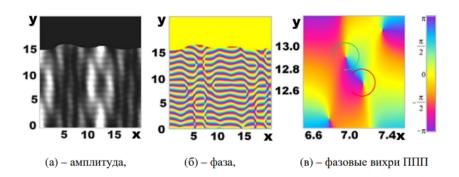
можно записать в виде нелинейного уравнения Шредингера, имеющего солитонные решения [40]

$$\frac{\partial A}{\partial x} + iD_{dis}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - iD_{dif}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - i\alpha_{NL}|A|^2 A = 0,$$
(45)

где $\xi = x - \nu_{g_{\sigma}} t$ — бегущая координата пучка, $\nu_{g_{\sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \beta}$ — групповая скорость пучка,

$$D_{dis} = \left. \frac{1}{2} \frac{d \nu_{g\sigma}^{-1}}{\partial \omega} \right|_{\iota} = k_0$$
 — коэффициент дисперсии.

В работе И. В. Дзедолика [41] рассмотрена задача конструирования и реализации логических элементов для обработки сигналов в процессорах оптического диапазона с помощью плазмонных устройств. И. В. Дзедоликом проведен эксперимент, когда на поверхности металла в интерференционном поле возникают сингулярные точки, в которых фаза вектора Пойнтинга поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) имеет винтовую дислокацию. На рис. 6 показана интерференционная картина нормальной к поверхности металла компоненты вектора Пойнтинга S_{zM} при отражении ППП от криволинейной границы неоднородности, $\lambda_0 = 0.6 \mu m$, $\varepsilon_M = -8.77 + i1.37$ (золото).



Puc. 6. Топологические заряды вихрей: +1 (красная стрелка, против часовой), -1 (зеленая стрелка, по часовой), размеры по осям отложены в микрометрах)

Из системы уравнений Максвелла получено приближенное уравнение для поперечной компоненты электрического поля нелинейных поверхностных плазмонполяритонов (ППП) [42] в виде

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + K^2 E_x + \chi |E_x|^2 E_x = 0, (46)$$

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

где K^2 , χ известные параметры.

Представляя $E_x = A(z) \exp[i\beta z]$, где A(z) это медленно меняющаяся амплитуда в масштабе скорости изменения фазы, выбирая амплитуды падающих и отраженных ППП в форме $A_{i,r} = \widetilde{A}_{i,r}(z) \exp[i\varphi_{i,r}(z)]$, где $\widetilde{A}_{i,r}, \, \varphi_{i,r}$ — действительные амплитуды и фазовые составляющие, получена система уравнений для $\varphi_{i,r}$. Ее решения имеют следующий вид $\varphi_{i,r} = \pm \arctan[\sqrt{a/b} \operatorname{tg}(\sqrt{abt})]$, где $a = Q + \chi + \beta, \, b = Q - \chi + \beta, \, Q = (KG^2 + \chi \widetilde{A}_i^2 + \chi \widetilde{A}_i^2)/2\beta, \, X = \chi \widetilde{A}_i \widetilde{A}_r/\beta.$

Нормальные компоненты электрических векторов нелинейных ППП (приближенные) могут быть представлены как $E_i = \widetilde{A}_i \exp[i\varphi_i - i\omega t + i\varphi_0/2]$ и $E_r = \widetilde{A}_r \exp[i\varphi_r - i\omega t + i\varphi_0/2]$.

Рассмотрено возможное плазмонное устройство, реализующее плазмонный логический элемент «ИЛИ-НЕ», необходимый для функционально полного логического базиса.

Более общая модель анонсирована в работе В. А. Лукьяненко и М. С. Германчук [11], в которой исследуется устойчивость системы из двух связанных нелинейных уравнений Шредингера для комплекснозначных функций с кубической нелинейностью Керра и периодическими условиями:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\beta}\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} + ilu + \kappa v = 0,$$

$$i\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2\beta}\frac{\partial^{2} v}{\partial y^{2}} + i(l - g)v + \gamma|v|^{2}v + \kappa u = 0,$$

$$u(-\frac{d}{2} + y, t) = u(\frac{d}{2} + y, t),$$

$$v(-\frac{d}{2} + y, t) = v(\frac{d}{2} + y, t),$$

$$v(-\frac{d}{2} + y, t) = v(\frac{d}{2} + y, t),$$

$$v(-\frac{d}{2} + y, t) = v(\frac{d}{2} + y, t),$$

$$v(y, 0) = u_{0}(y),$$

$$v(y, 0) = v_{0}(y).$$

$$\begin{cases} \forall y \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}], \end{cases}$$

$$(47)$$

где u(y,t), v(y,t) — искомые комплекснозначные функции; действительные параметры l, g и κ являются нормированными коэффициентами потерь, усиления и связи; $f\Upsilon = \gamma$, где $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, f — безразмерный масштабный параметр, Υ — параметр нелинейности Керра; d — это ширина области по оси y.

Начально-краевая задача (47) представима в следующей операторной форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw, \quad t > 0, \quad |y| \leqslant \frac{d}{2},$$

$$w(-\frac{d}{2} + y, t) = w(\frac{d}{2} + y, t),$$

$$w(y, 0) = w_0(y) = (u_0(y), v_0(y))^T,$$

$$(48)$$

где

$$A = L + N, \quad L = D\Delta - B, \quad Nw = G(w)w, \quad w = (u, v)^{T},$$

$$D\Delta = \frac{i}{2\beta} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} l & i\kappa \\ i\kappa & l - g \end{pmatrix},$$

$$G(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\gamma \end{pmatrix} |v|^{2},$$

 Δ — одномерный оператор Лапласа.

Лемма 4. Система уравнений (47) имеет решения, зависящие только от времени:

$$u_0 = ae^{i\omega_0 t}, \quad v_0 = be^{i\omega_0 t}, \tag{49}$$

где а, в удовлетворяют уравнениям

$$a = \frac{i\kappa b}{i\omega_0 + l},$$

$$(l + i\omega_0 - g) - i\gamma |b|^2 = -\frac{\kappa^2}{i\omega_0 + l},$$

$$|b|^2 = \frac{l^2 - \omega_0^2 - gl + \kappa^2}{-\gamma_1\omega_0 - \gamma_2 l} = \frac{2l\omega_0 - g\omega_0}{\gamma_1 l - \gamma_2\omega_0},$$
(50)

 $a \omega_0$ является корнем кубического уравнения

$$\omega^{3} - \frac{\gamma_{1}}{\gamma_{2}} \gamma_{1}(g - l)\omega^{2} + (l^{2} - \kappa^{2})\omega - \frac{\gamma_{1}}{\gamma_{2}} l((g - l)l - \kappa^{2}) = 0.$$
 (51)

Для исследования устойчивости (47) представим решения следующим образом:

$$v(y,t) = w(\xi,t)e^{i\frac{2\pi n}{d}y}e^{\frac{-i}{2\beta}(\frac{2\pi n}{d})^{2}t},$$

$$u(y,t) = q(\xi,t)e^{i\frac{2\pi n}{d}y}e^{\frac{-i}{2\beta}(\frac{2\pi n}{d})^{2}t},$$
(52)

где $\xi = y - \frac{1}{\beta} \frac{2\pi n}{d} t$, и получим

$$\begin{cases} q_t - q_{\xi\xi} + ilq = i\kappa \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}_t - \frac{i}{2\beta} \mathbf{w}_{\xi\xi} + (l-g)\mathbf{w} - i\gamma |\mathbf{w}|^2 \mathbf{w} = i\kappa q. \end{cases}$$
(53)

Так как система (53) такого же вида, что и система (47), то для того, чтобы исследовать на устойчивость бегущие волны $e^{i(\frac{2\pi n}{d}y-\frac{1}{2\beta}(\frac{2\pi n}{d})^2t)}$, достаточно исследовать только решение вида $u_0(t)=ae^{i\omega_0t},\,v_0(t)=be^{i\omega_0t}$. Как и ранее, в этой задаче обнаружение бегущих волн, вихревых и других структур, в первую очередь, актуально для практики.

3. Математическая модель спинового горения

Краевые задачи для феноменологической модели спинового горения, предложенной Я. Б. Зельдовичем, исследовались в работах Е. П. Белана и О. В. Шиян [12], продолжены В. А. Лукьяненко и А. А. Гребеневой [13]-[16] в случае кольцевых областей (круг, кольцо, тонкое кольцо и окружность) для более общей модели сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения ван-дер-полевского типа с условиями Неймана и с дробной степенью оператора Лапласа. С помощью спектральной теории и теории операторов доказана теорема о существовании и единственности решения для ограниченных областей, исследована устойчивость задач и соответствующие им квазинормальные формы, а также спектральные задачи. Получена связь модели спинового горения в кольце с моделью горения на окружности.

Математическая модель спинового горения была предложена Я. Б. Зельдовичем совместно с А. П. Алдушиным и Б. А. Маломедом:

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\varepsilon \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\beta \lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right]. \tag{54}$$

Здесь $\xi=\xi(x,t)$ — функция, описывающая фронт распространения реакции горения; $0<\varepsilon\ll 1$ — инкремент неустойчивости, $\lambda>0$ — корреляционная длина теплопроводности связей между соседними участками фронта, $\beta>0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта.

В работах В. А. Лукьяненко и А. А. Гребеневой рассмотрено обобщающее (54) феноменологическое уравнение безгазового спинового горения в круговых областях. В частности, в кольце $S^r = \{r, \varphi | r_1 < r < r_2, \ 0 < \varphi < 2\pi \}$ (цилиндрическая толстостенная труба):

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (-\Delta) \dot{u} + \frac{\beta \lambda}{2\pi} (-\Delta)^{\alpha} \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t),$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0.$$
(55)

Уравнение представляет сингулярно возмущенное нелинейное параболическое уравнение ван-дер-полевского типа.

Для первых спиновых волн построено асимптотическое разложение решения задачи (55) в виде комбинации бесселевых функций $J_{nm}(r)$:

$$u = \sum_{m=1}^{3} z_m J_{1m}(r) e^{-i\varphi} + \sum_{m=1}^{3} \bar{z}_m J_{1m}(r) e^{i\varphi} + \varepsilon \tilde{u}_1(z e^{-i\varphi}, \bar{z} e^{i\varphi}, r),$$
 (56)

где $z = (z_1, z_2, z_3)$, а z_m такие, что

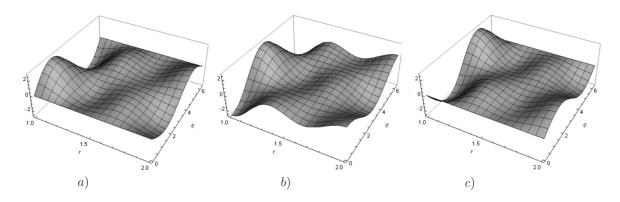
$$\dot{z}_m = z_m(i + \varepsilon q_{1m}) + \varepsilon a_m(z, \bar{z}), \quad m = 1, 2, 3. \tag{57}$$

Функции $a_m,\ m=1,2,3,$ являются S^1 -эквивариантными: $a_m(ze^{-i\varphi},\bar ze^{i\varphi},r)=e^{i\varphi}a_m(z,\bar z,r)$ для всех $\varphi\in\mathbb R/2\pi\mathbb Z.$

Задача (55) имеет приближенные решения

$$(u_1^s)^{\pm} = \sum_{m=1}^3 z_{1m}^s J_1(r) \cos(t \mp \varphi), \quad s = 1, 2.$$
 (58)

Решения $(u_1^2)^{\pm}$ являются неустойчивыми. Бегущая волна $(u_1^2)^+$ подавляется волной $(u_1^1)^+$ (рис. 7).



Puc. 7. Зависимость первых спиновых волн $(u_1^s)^+$ от времени для $a)\,t=\frac{\pi}{2};\ b)\,t=\pi;\ c)\,t=\frac{3\pi}{2}$

Аналогично строятся вторые спиновые волны, но в отличие от первых спиновых волн вторые рождаются и остаются неустойчивыми.

Теорема 5. Первая спиновая волна $(u_1^1)^+$ на $(\hat{\rho}_1(\beta), \hat{\rho}^1(\beta))$ (которые определяются из характеристического уравнения: $\omega_n^2 - 2\varepsilon q_n \omega_n + 1 = 0$) устойчива относительно давления $(u_m^i)^-$, $(u_{m+1}^j)^+$ для всех $m = 2, 3, \ldots, i, j = 1, 2, \ldots$

Получена квазинормальная форма задачи (55):

$$\dot{v} = v(1 - |v|^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta \lambda}{2\pi} (-\Delta)^{\alpha} v, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0.$$
 (59)

Замечание. Задача об устойчивости $(v_1^1)^{\pm}$ эквивалентна устойчивости решения $(u_1^1)^{\pm}$ задачи (55).

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

Также рассмотрена задача (55) для тонкого кольца $R\leqslant r\leqslant R+\delta,\,\delta\ll 1.$ Потребовав, чтобы решение совсем (почти совсем) не менялось в радиальном направлении (т. е. $\dot{u}_y=0$), и устремив $\delta\to 0$, получена одномерная модель феноменологического уравнения безгазового горения с оператором $\Delta \dot{u}=\frac{1}{R^2}\dot{u}_{\varphi\varphi}$. Исследованы периодические решения на окружности при $\varphi=\theta R$, соответствующие спиновым режимам горения тонкостенного цилиндра:

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2} \Delta \dot{u} + \frac{\beta \lambda}{2\pi R^{2\alpha}} (-\Delta)^{\alpha} \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t), \ u(\theta, 0) = u_0(\theta), \ \dot{u}(\theta, 0) = u_1(\theta) \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$
(60)

Лемма 5. Начально-краевая задача (60) представима в виде

$$u(\theta,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(K_1(\theta-s)u_0(s) + K_2(\theta-s)u_1(s) \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta-s,t-\tau)\dot{u}^3(s,\tau) ds d\tau,$$

$$(61)$$

$$-2\mu\varepsilon \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta-s,t-\tau)\dot{u}^3(s,\tau) ds d\tau,$$

$$\varepsilon de\left(k_1 \right)_n(t) = \frac{(\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} + (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}, \quad (k_2)_n(t) = \frac{e^{(\omega_2)_n t} + e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n},$$

$$(k_3)_n(t) = \frac{\sin\sqrt{1-\varepsilon^2 q_n^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 q_n^2}} t e^{\varepsilon q_n t}, \quad K_j(\theta,t) = W(k_j)_n(\theta,t), \quad j=1,2,$$

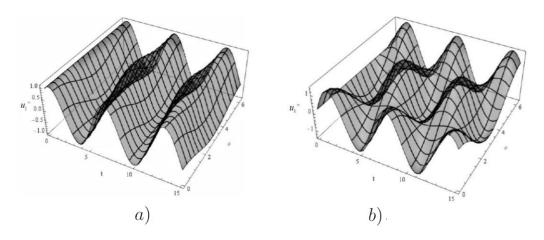
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta-s,t-\tau)\dot{u}^3(s,\tau) ds d\tau = W(k_3)_n g_n, \quad \varepsilon^2 q_n^2 - 1 < 0. \quad 3 dect \quad (\omega_{1,2})_n \quad \text{находятся}$$
из соответствующего характеристического уравнения: $\omega_n^2 - 2\varepsilon q_n \omega_n + 1 = 0.$

Асимптотический анализ в сочетании с методом Галеркина позволяет найти пару периодических устойчивых решений (при $\alpha = 1/2$):

$$u_1^{\pm} = \sqrt{3 - 2q_1}\cos t \pm 2\sqrt{q_1 - 1}\sin t\cos\theta + O(\varepsilon),$$

которые рождаются из нулевого решения $u_0 = \cos t + O(\varepsilon)$ при прохождении q_1 через критическое значение равное единице (рис. 8).

Дальнейший интерес представляет применение итерационных алгоритмов для нелинейных уравнений типа свертки (интегрального представления задачи безгазового спинового горения) и исследование моделей с запаздыванием по пространственной переменной.



Puc.~8.~ Решения u_1^+ при $a) q_1 = 1.06$ и $b) q_1 = 1.48$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО РОДА ТИПА СВЕРТКИ

В ряде задач прикладной нелинейной динамики при построении решений возникают нелинейные интегральные уравнения. Нелинейные интегральные уравнения 1-го рода типа Урысона и их приближенные методы решения рассматриваются в работах [17]–[21]. Для решения применяются методы регуляризации, интегральные преобразования Фурье \mathscr{F} и непрерывное вейвлет-преобразование (СWT), асимптотические методы и итерационные с использованием близких уравнений.

Рассмотрено применение вейвлет-преобразования W_{φ} для решения уравнения Урысона:

$$Az \equiv \int_{\mathbb{R}} f(s) n (t - z(s)) ds = u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(W_{\varphi}A)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(s) W_{\varphi} \{n(t - z(s))\} ds = U(a, b).$$

$$(62)$$

Из

$$W_{\varphi} \{n(t - z(s))\} (a, b) = |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F} \{n(t - z(s))\} (\xi) \bar{\Phi}(a\xi) e^{-ib\xi} =$$
$$= |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} N(\xi) e^{i\xi z(s)} \bar{\Phi}(a\xi) e^{-ib\xi} ds,$$

получим

$$|a|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s) e^{i\xi z(s) ds} \right) N(\xi) \bar{\Phi} \left(a\xi \right) e^{-ib\xi} = |a|^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} U(\xi) \overline{\Phi \left(a\xi \right)} e^{-ib\xi} ds.$$

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

Из этого следует

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{i\xi z(s)}ds = N^{-1}(\xi)U(\xi), \quad N(\xi) \neq 0$$

или в регуляризованной форме относительно ядра $N(\xi)$

$$\int\limits_{\mathbf{D}}f\left(s\right)e^{i\xi z\left(s\right)}ds=V(\xi)\equiv\frac{\overline{N(\xi)}U(\xi)}{\alpha+\left|N(\xi)\right|^{2}},$$

где α — параметр регуляризации.

Для монотонно возрастающих на интервале [a,b] функций z(s) таких, что

$$\alpha = \min z(s) \leqslant z(s) \leqslant \max z(s) = \beta,$$

уравнение (62) с заменой $\tau = z(s), \ s = \varphi(\tau)$ приводится к следующей форме

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) n(t-\tau) \varphi'(\tau) d\tau = u(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Для $n(t) = \delta(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(\varphi(\tau))\varphi'(t) = u(t).$$

Задача нахождения решения для уравнений типа свертки относительно CWT преобразования

$$Af \equiv k \# f = g \tag{63}$$

является некорректной. Регуляризирующий функционал А. Н. Тихонова имеет вид

$$J(f(\cdot)) = \alpha \|f\|_{L_2}^2 + \|k\#f - g\|_{L_2}^2 \to \inf,$$

где α — параметр регуляризации.

Здесь

$$(k \# f)(t) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} q(t, \tau, s) k(\tau) \ d\tau \ f(s) \ ds = \int_{\mathbb{T}} n(t, s) f(s) \ ds.$$

Из необходимых условий экстремума для функционала J(f) следует

$$\left[\alpha + \left| K_{\varphi}\left(a,b\right) \right|^{2} \right] F_{\varphi}\left(a,b\right) = \overline{K_{\varphi}}\left(a,b\right) G_{\varphi}\left(a,b\right).$$

Из этого уравнения получим

$$F_{\varphi}(a,b) = \overline{K_{\varphi}}(a,b) \left[\alpha + \left|K_{\varphi}(a,b)\right|^{2}\right]^{-1} G_{\varphi}(a,b) = R_{\alpha}(a,b) G_{\varphi}(a,b)$$

или

$$f_{\alpha}(t) = W_{\varphi}^{-1} \{ R_{\alpha}(a,b) G_{\varphi}(a,b) \} (t) = (r_{\alpha} \# g) (t).$$
 (64)

«Таврический вестник информатики и математики», M4(61)' 2023

На уравнение типа Урысона Az=u распространяются раннее полученные автором результаты [18]–[21] по итерационным алгоритмам, основанные на использовании близкого уравнения $\tilde{A}\tilde{z}=\tilde{u}$. В зависимости от наличия априорной и другой информации о решении и модели косвенных измерений можно воспользоваться всей гаммой известных алгоритмов регуляризации. Наиболее близкие результаты содержаться в работах В. В. Васина и его соавторов. Например, для метода регуляризации Лаврентьева $F(z)=Az-u+\alpha(z-z_m)$ итерационная процедура построения z_{n+1} приближения $z_{n+1}=z_n+h$ приводит к алгоритму нахождения h из линейного уравнения $[\alpha I+(A'z_n)]h-F(z_n)=0$ или

$$z_{n+1} = z_n - \gamma [\alpha I + (A'z_n)]^{-1} [Az_n - u + \alpha (z_n - z_m)].$$

В качестве близких уравнений следует рассматривать уравнения

$$\mathbb{K}h = \left[\alpha I + (A'z_n)\right]h = Az_n - u + \alpha(z_n - z_m) \equiv g,$$

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{h} = \left[\tilde{\alpha}I + (\tilde{A}'\tilde{z}_n)\right]\tilde{h} = \tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{u} + \tilde{\alpha}(\tilde{z}_n - \tilde{z}_m) \equiv \tilde{g},$$

где, обеспечив $\|\tilde{\mathbb{K}}^{-1}(\mathbb{K}-\tilde{\mathbb{K}})\| < 1$, можем найти решение уравнения $\mathbb{K}h = g$ через решение близкого уравнения $\tilde{\mathbb{K}}\tilde{h} = \tilde{g}$, более простого по своей структуре, или решение, которое уже найдено для различных уровней погрешности (прецедентная информация). Для модифицированного варианта метода Левенберга-Марквардта решения нелинейных уравнений типа Урысона в частном случае имеет вид

$$z_{n+1} = z_n - \gamma \left[\tilde{A}'(z_n)^* \tilde{A}'(z_n) + \alpha I \right]^{-1} \left[\tilde{A}'(z_n) (Az_n - u_\delta) + \alpha (z_n - \tilde{z}_m) \right].$$

Здесь \tilde{z}_m — начальное приближение для искомого решения,

$$(A'z_m)h = \int_{\mathbb{R}} n'(t - z(s), s)f(s)h(s)ds$$

и справедлива теорема об оценке погрешности.

Таким образом, наличие эффективно решаемых близких уравнений позволяет строить алгоритмы для исходных уравнений.

Заключение

В рамках направления прикладной нелинейной динамики, развивающейся в Крымском федеральном университете им. В. И. Вернадского с конца XX века, рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных с оператором дифференцирования по времени, оператором преобразования, оператором Лапласа и

дробным лапласианом. В основе лежит математическая формализация реальных физических процессов таких как задачи нелинейной оптики, плазмоники и теории так называемого «быстрого» горения и детонации.

Используются основные методы исследования квазилинейных параболических уравнений. Например, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского-Самойленко (КБМС), наиболее часто встречающийся для сведения исходного уравнения к градиентной системе с комплексно сопряженными уравнениями, сочетающийся с методом Галеркина (согласованным с интегральным (центральным) многообразием), а также асимптотическое разложение решения по собственным функциям, метод усреднения, метод эллиптических функций Якоби и операторный метод.

Для задачи распространения фазовой волны световой модуляции с преобразованием отражения пространственной переменной с помощью метода интегральных (центральных) многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений; применяя метод Галеркина, исследована форма и устойчивость решений типа бегущая волна, рождающихся в результате бифуркации Адронова-Хопфа; исследованы метаустойчивые структуры; получено интегральное представление задачи с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косой производной.

Рассмотрено распространение поверхностных плазмон-поляритонных волн на примере системы из двух связанных нелинейных уравнений Шредингера с кубической нелинейностью Керра, а также обобщенная модель спинового горения в круговых областях (круг, кольцо, тонкое кольцо и окружность), построена и исследована на устойчивость квазинормальная форма задачи. Визуализирована зависимость первых, рождающихся спиновых волн от времени.

Приведен алгоритм решения нелинейных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки на примере уравнения Урысона, возникающего в задачах восстановления решений по данным косвенных измерений.

Благодарности

Работа выполнена HO «Крымский математический центр» и поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Автор выражает признательность за плодотворную совместную работу своим соавторам.

Список литературы

- 1. Арнольд, В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН. 1972.-27(5).- С. 119–184.
 - ARNOLD, V I. (1972) Lectures on bifurcations in versal families. *Uspekhi Mat. Nauk.* 27 (5). Pp. 119–184.
- 2. Белан, Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журнал математической физики, анализа, геометрии. $2005.-1(1).-\mathrm{C.}$ 3–34.
 - BELAN, E P. (2005) On the dynamics of the running waves in the parabolic equation with the transformation of the shift of the space variable. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1 (1). Pp. 3–34.
- 3. Самойленко, А. М., Белан, Е. П. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // Доклады РАН. 2006. 406(6). С. 738–741. SAMOILENKO, A.M. & BELAN, E. P. (2006) Dynamics of traveling waves of the phenomenological equation of spin combustion. Reports of the Russian Academy of Sciences. 406 (6). Pp. 738–741.
- 4. Белан, Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Динамические системы. 2008. 25. С. 3–16. ВЕLAN, Е. Р. & LYKOVA, О. В. (2008) Bifurcations of rotating structures in a parabolic equation with transformation of rotation of a spatial variable. *Dynamic systems*. 25. Pp. 3–16.
- 5. KORNUTA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Stability of Structures and Asymptotics of Nonlinear Parabolic Type Equations Solutions with Transformation of Arguments. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42 (14). Pp. 3468–3485.
- 6. Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. 2014. 4(32). C. 59-75.
 - KORNUTA, A. A. (2014) Metastable structures in a parabolic equation with rotation of the spatial variable. *Dynamic systems*. 4 (32). Pp. 59–75.
- 7. KORNUTA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42. Pp. 911–930.

- 8. Хазова, Ю. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке // Динамические системы. 2017. 7(35). C. 119–129.
 - KHAZOVA, Yu. A. (2017) Meta-stable structures in a parabolic problem with the reflection of a spatial variable on a segment. *Dynamic systems*. 7 (35). Pp. 119-129.
- 9. Корнута, А. А. Динамика решений одного нелинейного функциональнодифференциального уравнения параболического типа / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2022. — 30(2). — С. 132–151.
 - KORNUTA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2022) Dynamics of solutions of a nonlinear functional differential equation of a parabolic type. *Izv. VUZov.* 30 (2). Pp. 132–151.
- 10. Корнута, А. А. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косой производной / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. 69(2). С. 276–288.
 - KORNUTA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2023) The problem of nonlinear optics with the transformation of a spatial variable and an oblique derivative. *Modern mathematics. Fundamental directions.* 69 (2). Pp. 276–288.
- 11. GERMANCHUK, M. S., LUKIANENKO, V. A. & PLYSHEVSKAYA, S. P. (2023) Modeling of the Propagation of Surface Plasmon Polaritons. *International Conference on «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications»* (PHENMA 2023): Abstracts and Schedule (Surabaya, Indonesia, October 3-8, 2023). I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang (Eds.); Southern Federal University (Rostovon-Don; Taganrog: Southern Federal University Press). Pp. 127–128.
- 12. Белан, Е. П. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы / Е. П. Белан, О. В. Шиян // Динамические системы. 2009. 27. С. 3–16.

 BELAN, E. P. & SHYIAN, O. V. (2009) Auto-oscillating regimes of combustion modes along the strip. *Dynamic systems*. 27. Pp. 3–16.
- 13. Хазова, Ю. А., Гребенева, А. А. Анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений уравнения спинового горения // Таврический вестник информатики и математики. 2022. 1(56). С. 75–87.

- KHAZOVA, Yu. A. & GREBENEVA, A.A. (2022) Analysis of stability and form of approximate periodic solutions of the equation of spin combustion. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1 (56). Pp. 75–87.
- 14. LUKIANENKO, V. A. Solvability of the phenomenological spin combustion equation / V. A. Lukianenko, A. A. Grebeneva // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2023.-15.- С. 194-195.
 - LUKIANENKO, V. A. & GREBENEVA, A. A. (2023) Solvability of the phenomenological spin combustion equation. *Mathematical Forum (Results of Science. South of Russia)*. 15. Pp. 194–195.
- 15. Гребенева, А. А. Некоторые задачи феноменологического уравнения спинового горения / А. А. Гребенева, В. А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. 2022. 3(58). C. 7-29.
 - GREBENEVA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2022) Some problems of the phenomenological equation of spin combustion. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 3 (58). Pp. 7–29.
- 16. GREBENEVA, A. A. & LUKIANENKO, V. A. (2023) Bifurcation of Solutions of the Phenomenological Equation of Spin Combustion. *International Conference on* «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications»: Abstracts and Schedule (Surabaya, Indonesia, October 3-8, 2023). I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang (Eds.); Southern Federal University (Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal University Press). Pp. 130.
- 17. Хазова, Ю. А., Лукьяненко, В. А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. 2019.-4.- С. 85–98.
 - KHAZOVA, Yu. A. & LUKIANENKO, V. A. (2019) Application of integral methods for the study of the parabolic problem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 27 (4). Pp. 85–98.
- 18. BELOZUB, V., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Approximated solution algorithms for Urysohn-type equations. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1902. Pp. 012051.
- 19. LUKIANENKO, V. A (2020) Approximate solution of the smooth transition equation. Sib. Elektron. Mat. Izv. 17. Pp. 1849–1862.

- 20. LUKIANENKO, V. A (2021) Applying Wavelet Transforms as a Solution for Convolution Type Equations. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Rostov-on-Don. Rostov-on-Don, 2021. Pp. 369–391.
- 21. LUKIANENKO, V A., KOZLOVA, M. G. & BELOZUB, V. A. (2023) Application of Wavelet Transform to Urysohn-Type Equations. *Mathematics*. 11. Pp. 3999.
- 22. Ахманов, С. А., Воронцов, М. А., Иванов, В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. Новые принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. 263—325 с.
 - AKHMANOV, S. A., VOROTSOV, M. A. & IVANOV, V. Yu. (1990) Generation of structures in two-dimensional feedback optical systems: towards the creation of nonlinear-optical analogues of neural networks. New principles of optical information processing. M.: Nauka.
- 23. VORONTSOV, M. A. & ZHELEZNYKH, N. I (1990) Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. *Matem. Mod.* 2:2. Pp. 31—38.
- 24. VORONTSOV, M. A., ZHELEZNYKH, N. I. & IVANOV, V. Yu. (1988) Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems. *Opt. and Quant. Electron.* 22. Pp. 301–318.
- 25. Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. МАКС Пресс Москва, МГУ, 2008. 204 с.
 - RAZGULIN, A. V. (2008) Nonlinear models of optical synergetics. M: MGU, MAKS Press.
- 26. SKUBACHEVSKII, A. L. (1998) Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. *Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications.* 12 (2). Pp. 261–278.
- 27. KARAPETYANTS,N. K. & SAMKO, S. G. (1988) Equations with invulative operators and their applications. Rostov: Rostov University Press.
- 28. Бабин, А. В., Вишек, М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. Москва: Наука, 1989. 470 с.
 - BABIN, A. V. & VISHIK, M. I. (1989) Attractors of Evolution Equations. Moscow: Nauka.

- 29. Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теоретическая и математическая физика. 140(1), 2004. С. 14–28. KOLESOV, A. Yu. & ROZOV, N. Kh. (2004) Optical Buffering and Mechanisms for Its Occurrence. *Theoretical and Mathematical Physics.* 140 (1). Pp. 14–28.
- 30. Мищенко, Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. М.: Физматлит, 2010.-395 с.
 - MISHCHENKO, E. F., SADOVNICII, V. A., KOLESOV, A. Yu. & ROZOV, N. Kh. (2010) Autowave processes in nonlinear media diffusion. M.: Fizmatlit.
- 31. Скубачевский, А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. $1998. 34:10. C.\ 1394–1401.$
 - SKUBACHEVSKIY, A. L. (1998) On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional differential equation. *Differ. Equ.* 34 (10). Pp. 1395–1402.
- 32. ABRAMOVITS, A. & STEGUN, I. (1972) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing.
- 33. Кубышкин, Е. П., Куликов, В. А. Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. 61:3. С. 428–449. KUBUSHKIN, E. P. & KULIKOV, V. A. (2021) Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay. *Comput. Math. Math. Phys.* 61 (3). Pp. 428–449.
- 34. Иванов, В. Ю., Иванова (Полякова), И. Б. Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе // Вестник Московского университета / Серия 03. Физика. Астрономия. 2016. 3. С. 48-53.
 - IVANOV, V. Yu. & IVANOVA (POLYAKOVA), I. B. (2016) Phase structures in nonlinear ring resonator. *Moscow University Physics Bulletin.* 71 (3). Pp. 266–271.
- 35. AKHAMANOV, S. A., VORONTSOV, M. A., IVANOV, V. Y. et al (1992) Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generation and interaction of spatiotemporal structures. *J. Opt. Soc. Amer.* 9. Pp. 78–90.

- 36. IVANOV, V. Y., IROSHNIKOV, N. G. & LACHINOVA, S. L. (1996) Cross interaction in a passive ring resonator. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 60 (12). Pp. 1964–1970.
- 37. IKEDA, K. (1979) Multiple-Valued Stationary State and Its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System. Opt. Commun.
- 38. Куликов, Д. А. Механизм формирования волновых диссипативных структур в одной из задач нано-технологий // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. 2013. 13(4). С. 23—31.
 - KULIKOV, D. A. (2013) Mechanism of the formation of the wave dissipative structures in one of the nanotechnological problems. *Vestnik RAEN*. 13 (4). Pp. 23—31.
- 39. SUKHORUKOV, A. P., SARAPINA, D. O. & KALISH, A. N. (2010) Surface plasmon-polariton terahertz waves in optically active media. *Vestnik NSU. Series: Physics.* 5 (4). Pp. 154–157.
- 40. SARAPINA, D. O. & SUKHORUKOV, A. P. (2009) Diffraction of surface waves in metals and metamaterials. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 73 (12). Pp. 1594–1597.
- 41. DZEDOLIK, I. V. (2016) Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons & Plasmon-Polaritons. New York: Nova Science Publishers Inc.
- 42. Климов, В. В. Наноплазмоника // УФН. 2008. 178:8. С. 875–880. KLIMOV V. V. (2008) Nanoplasmonics. *Phys. Usp.* 51 (8). Pp. 839–844.

УДК: 517.957

MSC2020: 35Q68, 65M60

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

© А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского Физико-технический институт просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация е-маіl: korn_57@mail.com, art-inf@yandex.ru

APPLICATION OF A COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM IN PROBLEMS OF APPLIED NONLINEAR DYNAMICS.

Kornuta A. A., Lukianenko V. A.

Abstract. Mathematical formalization of various natural processes leads to models that are described by nonlinear differential equations (ordinary, in partial derivatives and functional-differential equations) or nonlinear integral equations.

Their research takes place within the framework of applied non-linear dynamics. The issues of stability, bifurcation of solutions, the emergence of spatially inhomogeneous structures, quasi-periodic solutions, etc. are considered. Various theories, methods and algorithms are used (for example, the theory of bifurcation of vector fields, the theory of central manifolds, the theory of normal forms, etc.). An important and relevant aspect is the use of computer mathematics systems.

In the article, using the Wolfram Mathematica package, the nonlinear (quasi-linear) functional-differential equations of the parabolic type with transformation of spatial variables, which are simulating real physics experiments in nonlinear optical systems with Kerry nonlinearity, in which the transformation of a field in a two-dimensional feedback loop leads to the emergence of spatially heterogeneous, rotating and other structures, are investigated

The conditions under which new structures appear depend on several system parameters: the diffusion coefficient of the medium, the intensity of the signal source, the transformation in the feedback loop (for example, rotation, compression-stretching). For local analysis of structures and description of scenarios of their development asymptotic methods of research of local dynamics of solutions of functional-differential equations with small diffusion parameter, parameter of intensity and parameters of transformation of coordinates are used. The numerical solution and visualization of the results for various parameter values are of interest. Note that various models containing at least cubic nonlinearity with respect to the desired function of the form u^3 ($|u|^p u, p \ge 2$) are used to simulate the formation of rotating structures, travelling waves, vortices.

The importance of studying equations with low diffusion and other parameters is due to the modern problems of searching for innovative methods of storing, transmitting and processing information, modern issues of nanotechnology.

Keywords: applied nonlinear dynamics, functional differential equations, bifurcation, stationary solution, Wolfram Mathematica.

Введение

Математическая формализация процессов различной природы приводит к моделям, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнения (обыкновенными и в частных производных, а также функционально-дифференциальными уравнениями) или нелинейными интегральными уравнениями.

Их исследование проводится в рамках прикладной нелинейной динамики (ПНД). Рассматриваются вопросы устойчивости, бифуркации решений, возникновения пространственно-неоднородных структур, квазипериодических решений и др. При этом используются различные теории, методы и алгоритмы (теория бифуркации векторных полей, теория центральных многообразий, теория нормальных форм и др.). Важным и актуальным аспектом является использование систем компьютерной математики.

В работе с помощью пакета Wolfram Mathematica исследованы нелинейные (квазилинейные) функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с преобразованием пространственных переменных, моделирующие эксперименты в нелинейных оптических системах с нелинейностями керровского типа [1], в которых преобразование поля в двумерном контуре обратной связи приводит к возникновению пространственно-неоднородных, вращающихся и других структур. Условия, при которых появляются новые структуры, зависят от нескольких параметров системы: коэффициента диффузии среды, интенсивности источника сигнала, преобразования в контуре обратной связи (например, поворота, сжатия или растяжения). Для ло-кального анализа структур и описания сценариев их развития используются асимптотические методы исследования локальный динамики решений функциональнодифференциальных уравнений с малым параметром диффузии, большим параметром интенсивности и параметрами преобразования координат. Представляет интерес численное решение и визуализация результатов для различных значений параметров.

Отметим, что для моделирования процессов образования вращающихся структур, бегущих волн, вихрей (спиралей) применяются различные модели, содержащие по крайней мере кубическую нелинейность относительно искомой функции вида u^3 ($|u|^p u, p \geqslant q2$).

Необходимость исследования уравнений с малой диффузией и другими параметрами обусловлена актуальными задачами поиска инновационных методов хранения, передачи и обработки информации, современными задачами нанотехнологий.

Статья организована следующим образом: в первом разделе приводятся теоретические аспекты исследования с необходимыми результатами и описанием алгоритмов, во втором разделе приведена программная реализация представленных алгоритмов построения структур решений и анализ устойчивости в системе компьютерной математики (Wolfram Mathematica).

1. ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На области S рассматривается функционально-дифференциальное уравнение параболического типа с преобразованием пространственной переменной, описывающее фазовую модуляцию световой волны, которая в двумерном контуре обратной связи прошла тонкий слой нелинейной среды керровского типа [1]–[2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + u - \Lambda Q u = f(u) = K(1 + \gamma \cos Q u) - \Lambda Q u \equiv g(x, t), \quad x \in S, \ t > 0, \ (1)$$

где $u=u\left(x,t\right),\,x\in S,\,Qu$ — преобразование пространственной переменной. Заданы краевые условия Неймана [3]–[7] или с косой производной [8], а также начальное условие $u(x,0)=u_0(x)$ и условие 2π -периодичности по угловой переменной. Здесь Δ — оператор Лапласа, D>0 — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, Qu(x,t)=u(q(x),t) — гладкое преобразование пространственных переменных, K>0 — коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего потока, $\gamma\left(0<\gamma<1\right)$ — коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины, $\Lambda=-K\gamma\sin w$.

Пусть w=w(x,t) — одно из решений задачи (1), в окрестности которого представим (1) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Lv + Nv, \ x \in S, \ t \ge 0,$$

$$v(x,0) = v_0(x),$$
(2)

где v = v(x, t) — новая неизвестная функция, u = w + v [5],

$$Lv = -v + D\Delta v + \Lambda Qv, \ \Lambda = -K\gamma \sin w, \tag{3}$$

$$Nv = f(Qw, Qv) = K\gamma \left(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)\right). \tag{4}$$

Разложение нелинейной функции f(Qv,Qw) в ряд по степеням v начинается со слагаемого v^2 , удовлетворяющего условию f(0,Qw)=0. Далее рассматриваются модели с нелинейностью не выше кубической. В качестве w рассматриваются функции в виде $w=const, \ w=w(r), \ w=w(\theta), \ w=w(t)$ и др.

Оставляя некоторое количество слагаемых, получена иерархия моделей исходной задачи. В работах [5]–[7] исследованы пространственно-неоднородные стационарные решения и периодические по времени решения начально-краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - v + \Lambda Q v + \frac{\Omega}{2} (Q v)^2 - \frac{\Lambda}{6} (Q v)^3, \quad t > 0, \quad x \in S,
v(x,0) = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_S = 0 \quad \text{(условие Неймана)}.$$
(5)

Задача (5) при $\Omega = 0$ рассматривается в работе [3].

Проводится исследование пространственно-неоднородных решений или периодических по времени решений типа «бегущая волна», которые рождаются в процессе бифуркации из пространственно-однородного стационарного решения u(x,t)=w=const, определяемого уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{6}$$

Фиксируем гладкую ветвь $w = w(K, \gamma)$, которая соответствует одному из решений уравнения (6), при

$$1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0.$$

Линеаризуя задачу (2) в окрестности стационарного пространственнооднородного решения $w = w(K, \gamma) = const$, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Lv, \quad t > 0, \quad x \in S, \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{S} = 0, \qquad v(x,0) = v_0(x).$$
 (7)

В качестве области S рассматриваются

- 1. Кольцо $S^r = \{(r, \theta) | 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \}$ [7].
- 2. Kpyr $S^c = \{(r, \theta) | 0 \le r \le r_2; 0 \le \theta \le 2\pi\}$ [6].
- 3. Окружность $S^1 = \{\theta | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$
- 4. Тонкое кольцо $S^{\delta} = \{(r, \theta) | 0 < R \delta \leqslant r \leqslant R + \delta; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \delta \ll 1\}.$

Для круговых областей в качестве преобразования выбран поворот на угол h, $Qu=u(r,\theta+h,t)$, например, $h=\frac{2\pi}{p}$ $(p\in\mathbb{N})$. Преобразование поворота на угол $h=\frac{2\pi}{p}$ определяет оператор $Q=Q_h$, который является оператором инволюции $Q^p=I$ [9].

Разрешимость задачи опирается на изучении операторного уравнения $u_t = Au$, A = L + N в банаховых пространствах. Используются $H = L_2(S)$ гильбертово пространство измеримых на S функций, H^2 — функциональное пространство комплекснозначных функций вещественной переменной Соболева со стандартным скалярным

произведением и соответствующей нормой. Линейный оператор L с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H, является самосопряженным оператором.

Задача на кольце S^r исследуется в пространствах H и H^2 .

 $H=L_2^r(S)\times (0,2\pi)$ — пространство функций из L^2 квадратично интегрируемых с весом r, со скалярным произведением и нормой (для круга $r_1=0$):

$$< u, v>_{H} = \int_{0}^{2\pi} \int_{r_{1}}^{r_{2}} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad ||u||_{H}^{2} = \int_{0}^{2\pi} \int_{r_{1}}^{r_{2}} |u(r, \theta)|^{2} r dr d\theta.$$

 H^2 — соболевское пространство комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой:

$$< u, v>_{H^2} = < u, v>_H + < (-\Delta)^{1/2}u, (-\Delta)^{1/2}v>_H, \quad ||u||_{H^2}^2 = \sqrt{< u, u>_{H^2}};$$

 $H_{2\pi}^2 = \{u \in H^2 | u(\theta + 2\pi) = u(\theta)\}$ — замкнутое пространство 2π -периодичных функций.

В работе [7] найдена полная в $L_2(S^r)$ ортонормированная система собственных функций оператора L:

$$\psi_{n,m}(r,\theta) = R_{n,m}(\lambda_{n,m}r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$
 (8)

где

$$R_{n,m}(r) = R_{n,m}(\lambda_{n,m}r) = J_n(\lambda_{n,m}r) \cdot Y_n'(\lambda_{n,m}r_1) - Y_n(\lambda_{n,m}r) \cdot J_n'(\lambda_{n,m}r_1). \tag{9}$$

Здесь $J_n,\ Y_n$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка n соответственно [10], $\lambda_{n,m}=\widetilde{\lambda}$ — корни уравнения

$$J'_n\left(\widetilde{\lambda}r_1\right) \cdot Y'_n\left(\widetilde{\lambda}r_2\right) - J'_n\left(\widetilde{\lambda}r_2\right) \cdot Y'_n\left(\widetilde{\lambda}r_1\right) = 0, \tag{10}$$

функции $R(r)=R_{n,m}\left(\lambda_{m,n}r\right)$ — решения краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\widetilde{\lambda}^2 r^2 - n^2)R(r) = 0, \ R'(r_1) = 0, \ R'(r_2) = 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ (11)$$

собственные значения оператора L (7):

$$\lambda_{n,m}^* = -1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh],\tag{12}$$

где $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\,\Lambda$ определяется равенством (3) при w=const.

Решение линеаризованной задачи, соответствующей (5), при $h=\frac{2\pi}{p}$ может быть представлено в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n,m} R_{n,m}(r) \exp\left[-in\theta\right] \exp\left[\left(-1 - \mu \lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp\left[i\frac{2\pi n}{p}\right]\right) t\right].$$

В работе [6] получено аналогичное представление для круга.

Устойчивость решения v зависит от знака $Re\lambda_{n,m}^*$, где $\lambda_{n,m}^*$ определяются в (3): если $Re\lambda_{n,m}^* < 0$, то решение v устойчивое, если $Re\lambda_{n,m}^* > 0$, то решение v неустойчивое. В качестве бифуркационного параметра выбран коэффициент диффузии D, при этом Λ считаем фиксированным. В зависимости от значений $Re\lambda_{n,m}^*$ и $Im\lambda_{n,m}^*$ могут быть получены различные типы решений, в частности, при $Re\lambda_{n,m}^* = 0$, $Im\lambda_{n,m}^* \neq 0$ получаем чисто периодические решения. Более подробно рассмотрим случай $Re\lambda_{n,m}^* \neq 0$.

Для дальнейшего исследования используем иерархии упрощенных моделей, построенных в окрестности точек бифуркации [11]–[12], а именно, рассмотрим одну из моделей задачи (2):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v + D\Delta v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \quad \Lambda = -K\gamma \sin w, \ \Omega = -K\gamma \frac{\operatorname{ctg} w}{2},
0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 (\text{для кольца}), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_2 (\text{для круга}),
0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ t \geqslant 0,$$
(13)

с условиями второго рода на кольце

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0, \tag{14}$$

на круге

$$\frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0, \tag{15}$$

начальным условием $v\left(r,\theta,0\right)=0$ и условием периодичности $v\left(r,\theta+2\pi,t\right)=v\left(r,\theta,t\right).$

В численных экспериментах полагаем, что $h=\frac{\pi}{3}$ (аналогично можно рассмотреть другие случаи). Тогда $Re\lambda_{n,m}^* \neq 0$, $Im\lambda_{n,m}^* = K\gamma\sin w\sin\frac{\pi n}{3} = 0$, оператору L соответствует разложение в ряд по собственным функциям $\psi_{3s,m}(r,\theta) = R_{3s,m}\cos 3s\theta$, $s=1,2,\ldots$ с собственными значениями

$$\lambda_{3s,m}^* = -D\lambda_{3s,m}^2 - 1 + (-1)^s \Lambda, \tag{16}$$

где для кольца $\lambda_{3s,m}-m$ -корень уравнения (10), для круга это корни трансцендентного уравнения

$$J_n'\left(\widetilde{\lambda}r_2\right) = 0. \tag{17}$$

Будем считать, что m=1. Критические значения параметра D определяются равенством

$$D_s = \frac{-1 + (-1)^s \Lambda}{\lambda_{3s,1}^2}. (18)$$

С точки зрения бифуркационного анализа интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Для значений $D > D_1$ нулевое решение (13) устойчиво, при уменьшении параметра D и

переходе через значение D_1 нулевое решение становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. Происходит бифуркация типа «вилка» [11]. Имеет место следующая теорема для задачи на кольце [7]

Теорема 1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$ существует $\delta > 0$, такое что при фиксированном значении m = 1 и для любых значений параметра D, удовлетворяющих неравенству $D_1 - \delta < D < D_1$, где $D_s = (-1 + (-1)^s \Lambda)/\lambda_{3s,1}^2$, $s = 1, 2, \ldots$, существует непрерывная ветвь стационарных точек z(D) > 0 уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3(D)z + \frac{1}{2d_{3,1}^2} \left(\frac{\Lambda \gamma_1}{4} - \frac{\Omega^2 \gamma_2^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6) d_{6,1}^2} \right) z^3 + \dots, \tag{19}$$

которой соответствует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, D)$ уравнения (22), определяемое равенством

$$\varphi(r,\theta,D) = zR_{3,1}(r)\cos 3\theta + z^2R_{6,1}(r)\frac{\Omega\gamma_2}{2(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2}\cos 6\theta + z^3R_{9,1}(r)\frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9)d_{9,1}^2} \left[-\frac{\Omega^2\gamma_2\gamma_3}{(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} + \frac{\Lambda\gamma_4}{12} \right]\cos 9\theta + \xi(z,r,\theta,D) \mid_{z=z(D)},$$
(20)

 $\partial e \, \xi(z, r, \theta, D) = O(|z|^4), \, R_{3s,1} \, y \partial o$ влетворяет условию (9),

$$d_{3s,1}^{2} = \frac{2}{\pi^{2} \lambda_{3s,1}^{2} r_{1}^{2}} \left[\frac{\pi^{2} r_{1}^{2}}{4} \left(\lambda_{3s,1}^{2} r_{2}^{2} - (3s)^{2} \right) \left(R_{3s,1}(r_{2}) \right)^{2} - \left(\lambda_{3s,1}^{2} r_{1}^{2} - (3s)^{2} \right) \right],$$

$$\gamma_{1} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{4}(r) dr, \quad \gamma_{2} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{2}(r) R_{6,1}(r) dr,$$

$$\gamma_{3} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}(r) R_{6,1}(r) R_{9,1}(r) dr, \quad \gamma_{4} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{3}(r) R_{9,1}(r) dr,$$

$$(21)$$

 $r\partial e \ s = 1, 2, 3.$

Pешение $\varphi(r,\theta,D)$ — орбитально устойчиво.

Аналогичное утверждение для круга доказано в [6].

Теорема носит локальный характер. Доказательство проведено с применением центральных многообразий.

Для исследования асимптотики стационарных решений задачи (13)–(15) и проведения численных экспериментов с визуализацией результатов при уменьшении бифуркационного параметра D и его отходе от критического значения D_1 используется метод Галеркина, который согласован с методом центральных многообразий.

1.1. **Метод Галеркина.** В соответствии с методом Галеркина приближенные решения (13)–(15) представим в виде

$$\varphi^*(r,\theta) = \sum_{k=1}^{N} \left(z_k \exp[ik\theta] + \overline{z}_k \exp[-ik\theta] \right) R_{k,1}(r), \tag{22}$$

здесь z_k, \overline{z}_k — комплексно сопряженные выражения.

Так как функция $\varphi^*(r,\theta)$, определяемая равенством (22), удовлетворяет уравнению (13), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_{k,1}^* z_k + \sigma_k(z, \overline{z}),
\dot{\overline{z}}_k = \overline{\lambda_{k,1}^*} \overline{z}_k + \overline{\sigma}_k(z, \overline{z}),$$
(23)

где $\lambda_{k,1}^*(D) = -1 - D\lambda_{k,1}^2 + \exp[ikh]\Lambda$, $\overline{\lambda_{k,1}^*}(D) = -1 - D\lambda_{k,1}^2 + \exp[-ikh]\Lambda$, $\sigma_k(z,\overline{z})$, $\overline{\sigma}_k(z,\overline{z})$ — формы третьей степени от $z_k,\overline{z}_k,k=1,2,\ldots,N$.

Устойчивость нулевого решения системы (23) определяет спектр матрицы устойчивости $\{\lambda_{k,1}^*(D), \overline{\lambda_{k,1}^*}(D)\}.$

Как и выше $h=\frac{\pi}{3}$, тогда первое критическое значение параметра D, при котором нулевое стационарное решение системы (23) теряет устойчивость, определяется равенством $D_1=\frac{-\Lambda-1}{\lambda_{3,1}^2}$. В результате этого происходит бифуркация типа «вилка» и при $D < D_1$ рождается пара устойчивых стационарных точек $\pm z^*(D) = \{0,0,\pm z_3^*,0,0,\pm z_6^*,\ldots\}$, являющихся решениями алгебраической системы уравнений

$$\lambda_k z_k + \varepsilon_k(z_l) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \tag{24}$$

где $\varepsilon_k(z_l)$ — полином третьей степени, содержащий вторую и третью степень z_l .

Тогда пространственно-неоднородное стационарное решение задачи (13)–(15) определяется асимптотическим равенством

$$\varphi^*(r,\theta,D) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(D) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r).$$
(25)

Так, решение $z^*(D)$ при трехмодовой аппроксимации определяется системой

$$\lambda_3 z_1 + \frac{1}{8d_3^2} \left[\Lambda \left(\beta_3 z_1^3 + 2\delta_{36} z_2^2 z_1 + 2\delta_{39} z_3^2 z_1 + \zeta_{39} z_1^2 z_3 + \xi_{639} z_2^2 z_3 \right) - 8\Omega z_2 \left(\delta_{369} z_3 + \xi_{36} z_1 \right) \right] = 0,$$

$$\lambda_6 z_2 + \frac{1}{8d_6^2} \left[-\Lambda z_2 \left(\beta_6 z_2^2 + 2\delta_{36} z_1^2 + 2\delta_{69} z_3^2 + 2\xi_{639} z_1 z_3 \right) + \Omega z_1 \left(8\delta_{369} z_3 + 4\xi_{36} z_1 \right) \right] = 0,$$

$$\lambda_9 z_3 + \frac{1}{24d_6^2} \left[3\Lambda \left(\beta_9 z_3^3 + 2\delta_{39} z_1^2 z_3 + 2\delta_{69} z_2^2 z_3 + \zeta_{39} \Lambda z_1^3 + \xi_{639} z_2^2 z_1 \right) - 24\delta_{369} \Omega z_2 z_1 \right] = 0,$$

где

$$\beta_{k} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{k,1}^{4}(r) dr, \quad k = 3, 6, 9; \qquad \delta_{kl} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{k,1}^{2}(r) R_{l,1}^{2}(r) dr, \quad k, l = 3, 6, 9 \ (k < l);$$

$$\zeta_{39} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{3}(r) R_{9,1}(r) dr, \qquad \xi_{36} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{2}(r) R_{6,1}(r) dr,$$

$$\delta_{369} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{3,1}^{2}(r) R_{6,1}^{2}(r) R_{9,1}^{2}(r) dr, \qquad \xi_{639} = \int_{r_{1}}^{r_{2}} r R_{6,1}^{2}(r) R_{3,1}(r) R_{9,1}(r) dr.$$

$$(26)$$

Все этапы исследования начально-краевых задач (асимптотика, устойчивость и т. д.) сопровождаются разнообразными символьными преобразованиями, численным построением спектра, вычислением громоздких интегралов от произведений собственных функций и др. В следующем разделе вычислительные аспекты представленных теоретических выкладок реализуются алгоритмически с элементами визуализации. Для проведения численных экспериментов использована система компьютерной математики Wolfram Mathematica 11.3.

2. Применение системы компьютерной математики для решения задачи на круге

2.1. Построение пространственно-однородных стационарных решений. Пространственно-однородное решение уравнения (4) w = const — определяется уравнением

$$w = K (1 + \gamma \cos w),$$

$$K(1 - \gamma) \le w \le K(1 = \gamma).$$
(27)

Число решений уравнения (27) зависит от параметров K и γ . При возрастании значения K происходит увеличение числа решений. В пакете Wolfram Mathematica построена бифуркационная диаграмма для (27). Более подробно в пункте 2.2.2. рассматривается система таких уравнений.

2.2. Построение частных случаев решений. В программной реализации бифуркационный параметр D обозначим \widetilde{D} . Рассмотрим частные случаи: стационарное решение, зависящее от угловой координаты $u=u(\theta)$; стационарное решение, зависящее от радиальной координаты u=u(r); нестационарное решение, зависящее только от времени u=u(t); нестационарное решение, зависящее от времени и радиальной координаты u=u(r,t).

В окрестности таких решений возможны интересные структуры.

2.2.1. **Решения, зависящие от радиальной координаты.** Рассмотрим решение задачи (13)–(15), зависящее от радиальной переменной u = w(r). Для определения функции w(r) получим уравнение второго порядка

$$\widetilde{D}\left(w''(r) + \frac{w'(r)}{r}\right) - w(r) + K(1 + \gamma \cos w(r)) = 0, \ 0 \leqslant r \leqslant 1$$
(28)

с краевыми условиями

$$w(0) = 1, \ w'(1) = 0.$$
 (29)

Приближенные решения задачи (28)–(29) находим с помощью встроенной функции NDSolve[eqns,u,{x,x_{min},x_{max}}], которая возвращает численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений eqns для функции u с независимой переменной x в диапазоне от x_{min} до x_{max} . Для $\widetilde{D}=0.05, \ \gamma=0.5, \ K=\overline{1,10}$ находим и строим соответствующие приближенные решения:

2.2.2. Решения, зависящие от угловой координаты. Пусть $u = w(\theta)$ — стационарное решение (13)—(15), зависящее только от угловой координаты θ . Тогда функция $u = w(\theta)$ определяется уравнением

$$\widetilde{D}w''(\theta) - w(\theta) + K(1 + \gamma \cos Qw(\theta)) = 0$$
(30)

«Таврический вестник информатики и математики», M = 4 (61)' 2023

с условием периодичности

$$w(\theta + 2\pi) = w(\theta),$$

где $Qw(\theta)=w(\theta+h)$ — оператор поворота на некоторый угол h, являющийся оператором инволюции: $Q^mw=w$. В этом случае уравнение (30) в зависимости от оператора Q может быть сведено к равносильной системе m дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть, например, m=2, т. е. $Q^2w=w$. Следуя работе авторов [4], приходим к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$w_0' = v_0, \ w_1' = v_1,$$

$$v_0' = \widetilde{D}^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)), \ v_1' = \widetilde{D}^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)),$$
(31)

положения равновесия которой в плоскости (w_0, w_1) являются решениями системы уравнений

$$w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1) = 0, \ w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0) = 0.$$
 (32)

Из (32) следует, что

$$K(1 - \gamma) < w_j < K(1 + \gamma), \ j = 0, 1.$$
 (33)

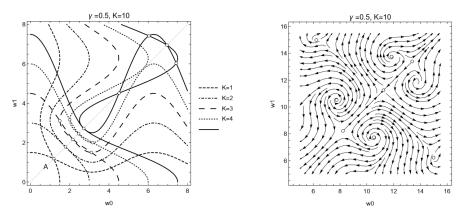
Задаем параметры $K=\overline{1,10}, \gamma=0.5$. Для маркировки точек равновесия на графике с помощью функции FindRoot [{eng₁,eng₂, ...}, {{x,x₀},{y,y₀},...}], где eng₁,eng₂, ... — уравнения системы, {{x,x₀},{y,y₀},...} — диапазоны значений неизвестных (решение ищется вблизи заданной точки), находим соответствующее каждой паре (K,γ) решение системы уравнений (32), удовлетворяющее условию (33):

Программа 2. Построение точек равновесия и векторного поля $\gamma = 0.5$; K = 1; FindRoot[$\{w0 - K (1 + \gamma Cos[w1]) = 0, w1 - K (1 + \gamma Cos[w0]) = 0\}$, $\{w0, K\}$, $\{w1, K\}$]

Для графического представления решения системы (32) используется функция ContourPlot[$\{f_1=g_1,f_2=g_2,\dots\},\{x,x_{\min},x_{\max}\},\{y,y_{\min},y_{\max}\}\}\]$ с различными опциями: PlotLabel (определяет общую метку для графика), FrameLabel (определяет метки осей координат), PlotLegends (определяет условные обозначения для различных контурных линий, которые изображаются в одной системе координат), ContourStyle (определяет стиль, в котором должны быть нарисованы контурные линии или поверхности), Epilog (предоставляет список графических параметров, которые могут быть отображены после визуализации основной части графики). Функция StreamPlot[$\{\{v_x,v_y\},\{w_x,w_y\},\dots\},\{x,x_{\min},x_{\max}\},\{y,y_{\min},y_{\max}\}$] позволяет получить векторное поле.

```
ContourPlot \{ w0 - w1 = 0, w0 - K (1 + \gamma \cos[w1]) = 0, w1 - K (1 + \gamma \cos[w0]) = 0 \}
     \{w0, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w1, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, FrameLabel \rightarrow \{w0, w1\}, \{w1, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, FrameLabel \rightarrow \{w0, w1\}, \{w1, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w1, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w2, K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w3, K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma), K(1+\gamma)\}, \{w4, K(1+\gamma), K(1+\gamma
    LabelStyle \rightarrow Directive[Black, 12], PlotLabel \rightarrow "\gamma =0.5, K=1",
    PlotLegends \rightarrow {"w0=w1", "w0=K(1+\gamma Cos[w1])", "w1=K(1+\gamma Cos[w0])"},
    ContourStyle → {{Gray, Dotted}, Black, Black}, Axes → True, Epilog →
          {{FaceForm[White], EdgeForm[Black],
                   Disk[{1.187151438466767, 1.187151438466767}, 0.01]},
              Text["(1.187; 1.187)", {1.25, 1.2}, {-1, -1}]}]
StreamPlot[\{w0 - K (1 + \gamma Cos[w1]), w1 - K (1 + \gamma Cos[w0])\}, \{w0, K (1 - \gamma), K (1 + \gamma)\}, \{w0, K (1 - \gamma), K (1 + \gamma)\}
     \{w1, K(1-\gamma), K(1+\gamma)\}, FrameLabel \rightarrow \{w0, w1\}, LabelStyle \rightarrow Directive[Black, 12],
    StreamColorFunction → (Blend[{Black, Black, Black}, #5] &),
    Epilog → { {FaceForm[White], EdgeForm[Black],
                   Disk[{1.187151438466767, 1.187151438466767}, 0.01]},
              Text["(1.187; 1.187)", {0.9, 1.52}, {-1, -1}]},
    StreamPoints \rightarrow 520, PlotLabel \rightarrow "\gamma =0.5, K=1",
    StreamPoints → {{{{1, 1}, Red}, {{1, 1.5}, Green}, Automatic}}
                                                                                                                                                                                                                                                                                               =0.5, K=1
                      ≨ 1.0
                                                                                                                                                                                 w0=K(1+γ Cos[w1])
                                                                                                                                                                                 w1=K(1+y Cos[w0])
                              8.0
                              0.6
                                                                                             1.0
                                                                                                                    1.2
```

Фиксируя $K=10, \gamma=0.5,$ получим графическое представление точек равновесия и векторное поле (см. рис. 1).



Puc.~1.~ Точки равновесия системы (20) для $\Lambda=-\frac{3}{2},~h=\frac{\pi}{3},~K=\overline{1,10}$ и векторное поле в их окрестности

2.2.3. **Решения, зависящие только от времени**. Рассмотрим решение задачи (13)–(15), зависящее от времени u=w(t). Для определения функции w(t) получим уравнение первого порядка

$$w'(t) = -w(t) + K(1 + \gamma \cos w(t))$$
(34)

с начальным условием $w(0) = w_0$.

Приближенные решения задачи (34) находим с помощью встроенной функции NDSolve[eqns,u,{x,x_{min},x_{max}], которая возвращает численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений eqns для функции u с независимой переменной x в диапазоне от x_{min} до x_{max} . Для $\widetilde{D}=0.05, \ \gamma=0.5, \ K=\overline{1,10}$ находим и строим соответствующие приближенные решения:

Программа 3. Решения, зависящие только от времени

```
γ = 0.5; Ď = 0.5;

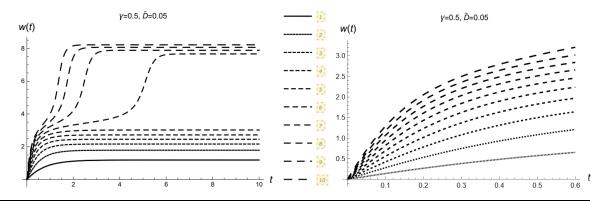
A = Table[NDSolve[{w'[t] == -w[t] + K (1 + γ * Cos[w[t]]), w[0] == 0}, w, {t, 0, 10}], {K, 10}];

Plot[Evaluate[{w[t] /. A}, {t, 0, 10}],

PlotStyle → {{Black, Dashing[0.003]}, {Black, Dashing[0.006]}, {Black, Dashing[0.009]}, {Black, Dashing[0.012]}, {Black, Dashing[0.015]}, {Black, Dashing[0.018]}, {Black, Dashing[0.021]}, {Black, Dashing[0.024]}, {Black, Dashing[0.027]}, {Black, Dashing[0.03]}},

PlotRange → All, AxesLabel → {Style[t, 14], Style[w[t], 14]},

PlotLegends → Automatic, PlotLabel → "γ=0.5, Ď=0.05"]
```



2.3. Линеаризация в окрестности выбранного стационарного решения. Фиксируем гладкую ветвь $w=w\left(K,\gamma\right)$, которая соответствует одному из решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w)$$
, при $1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0$.

Выполним замену u = w + v, где v = v(x,t) — новая неизвестная функция. Используя встроенную функцию Series[f,{x,x0,n}], которая генерирует разложение

в степенной ряд функции f в точке x_0 по $(x-x_0)^n$, раскладываем функцию

$$\cos(w + Qv(x,t))$$

в ряд по v(x,t) (при $v_0=0$ с учетом $\Lambda=-K\gamma\sin w,\ \Omega=-K\gamma\cos w$). Программная реализация:

Программа 4. Процедура линеаризации

```
(*Исходное уравнение Eq0=0:*)  D[u[x,t],t] + u[x,t] - \tilde{D} * D[u[x,t],x,x] - K \left(1 + \gamma Cos[Qu[x,t]]\right)  (*Выполняем замену u=w+v*)  \left(D\left[\left(u[x,t] /. u[x,t] -> w + v[x,t]\right),t\right] + \left(u[x,t] /. u[x,t] \to w + v[x,t]\right) - \tilde{D} * D\left[\left(u[x,t] /. u[x,t] -> w + v[x,t]\right),x,x\right] - K \left(1 + \gamma Cos[Qu[x,t] /. Qu[x,t] -> w + Qv[x,t]]\right) \right) /.   Cos[w+Qv[x,t]] -> Series[Cos[w+Qv[x,t]], \{Qv[x,t],0,5\}]  (*Выполняем замену K \gamma Sin[w] \to -\Lambda/.K \gamma Cos[w] \to -\Omega''] *)  Expand[% /. K \gamma Sin[w] \to -\Lambda/.K \gamma Cos[w] \to -\Omega]
```

Результат работы программы:

$$\begin{split} &- \mathsf{K} \, \left(1 + \gamma \, \mathsf{Cos} \, [\mathsf{Qu} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] \,] \, \right) + \mathsf{u} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] + \mathsf{u}^{(\theta, 1)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] - \tilde{\mathsf{D}} \, \mathsf{u}^{(2, \theta)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] \right) \\ &(\mathsf{w} + \mathsf{K} \, \left(-1 - \gamma \, \mathsf{Cos} \, [\mathsf{w}] \, \right) + \mathsf{v} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] + \mathsf{v}^{(\theta, 1)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] - \tilde{\mathsf{D}} \, \mathsf{v}^{(2, \theta)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] \, \right) + \\ &(\mathsf{K} \, \gamma \, \mathsf{Sin} \, [\mathsf{w}] \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] + \frac{1}{2} \, \mathsf{K} \, \gamma \, \mathsf{Cos} \, [\mathsf{w}] \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^2 - \frac{1}{6} \, \left(\mathsf{K} \, \gamma \, \mathsf{Sin} \, [\mathsf{w}] \, \right) \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^3 - \\ & \frac{1}{24} \, \left(\mathsf{K} \, \gamma \, \mathsf{Cos} \, [\mathsf{w}] \, \right) \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^4 + \frac{1}{120} \, \mathsf{K} \, \gamma \, \mathsf{Sin} \, [\mathsf{w}] \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^5 + \mathsf{O} \, [\mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] \,]^6 \\ & \left(\mathsf{w} + \mathsf{K} \, \left(-1 - \gamma \, \mathsf{Cos} \, [\mathsf{w}] \, \right) + \mathsf{v} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] + \mathsf{v}^{(\theta, 1)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] - \tilde{\mathsf{D}} \, \mathsf{v}^{(2, \theta)} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] \, \right) - \Delta \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}] - \\ & \frac{1}{2} \, \Omega \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^2 + \frac{1}{6} \, \Delta \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^3 + \frac{1}{24} \, \Omega \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^4 - \frac{1}{120} \, \Delta \, \mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]^5 + \mathsf{O} \, [\mathsf{Qv} \, [\mathsf{x}, \, \mathsf{t}]]^6 \end{split}$$

Таким образом,

$$\begin{split} \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v - v + \Lambda Q v + \frac{\Omega}{2} (Q v)^2 - \frac{\Lambda}{6} (Q v)^3 - \frac{\Omega}{24} (Q v)^4 + \\ &\quad + \frac{\Lambda}{120} (Q v)^5 + O\left((v)^6\right), \quad t > 0, \ x \in S \\ &\quad v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right), \end{split}$$

Линеаризуя задачу в окрестности стационарного пространственно-однородного решения $w(K,\gamma) = K(1+\gamma\cos w)$, получим $\frac{\partial v}{\partial t} = Lv$.

2.4. **Метод Галеркина, согласованный с центральным многообразием.** Для построения стационарного пространственно-неоднородного решения задаем

 $h = \pi/3$ и порядок аппроксимации p = 3. Используя встроенную функцию $Sum[f,\{i,i_{min},i_{max}\}]$, представим решение модельной задачи (5) в специальном виде. Для получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений воспользуемся встроенной функцией TrigReduce[expr], которая переписывает произведения и

степени тригонометрических функций в выражении **expr** в виде тригонометрических функций с комбинированными аргументами. В полученном результате, учитывая ортогональность системы собственных функций [5], приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Правые части $S2_k$, k=1,2,3 записаны с учетом того, что функции $R_{2k}(r)$ являются решениями краевой задача для уравнения Бесселя

$$r^{2}R''(r) + rR'(r) + \left(\tilde{\lambda}^{2}r^{2} - n^{2}\right)R(r) = 0, \ R'(r_{2}) = 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (35)

Программа 5. Формирование системы уравнений

```
(*Задаем параметра р-порядок аппроксимации и h-угол поворота*)
                                               p = 3;
                                             h = Pi/3;
                                               u[r_{,\theta_{}}] := Sum[R_{3k}[r] (z[k] * Cos[3k*\theta]), \{k, 1, p\}]
                                             U1 = TrigReduce[u[r, \theta + h]]; U2 = TrigReduce[u[r, \theta + h]^2];
                                             U3 = TrigReduce[u[r, \theta + h]^3];
                                            Pr = Expand \left[\tilde{D}\left(D[u[r,\theta],r,r] + \frac{1}{n}D[u[r,\theta],r] + \frac{1}{n^2}D[u[r,\theta],\theta,\theta]\right)\right]
                                                                                             -u[r, \theta] + \Lambda U1 + \Omega U2 - \frac{\Lambda}{\epsilon} * U3];
                                             Do[S[k] = Coefficient[Pr, Cos[\theta * 3k]], {k, 1, p}]
                                               (*Используем то, что R_{3k} \, [\, r\, ] решение уравнения Бесселя*)
                                               Do[Print["S1[", k, "]=",
                                                                  S1[k] = S[k] /. \frac{\tilde{D} z[k] R_{3k'}[r]}{r} + \tilde{D} z[k] R_{3k''}[r] - \frac{\tilde{D} (3k)^2 z[k] R_{3k}[r]}{r^2}
                                                                                                      \rightarrow -(\lambda_{3k,1})^2 \tilde{D} z[k] R_{3k}[r], \{k, 1, p\}]
\mathtt{S1[1]} = -\mathtt{z[1]} \ R_3[r] \ - \ \wedge \ \mathtt{z[1]} \ R_3[r] \ - \ \tilde{\mathsf{D}} \ \lambda_{3.1}^2 \ \mathtt{z[1]} \ R_3[r] \ + \ \frac{1}{-} \ \wedge \ \mathtt{z[1]}^3 \ R_3[r]^3 \ - \ \hat{\mathsf{D}} \ \lambda_{3.1}^2 \ \mathsf{D} 
               \Omega \, z \, [\, 1\, ] \, z \, [\, 2\, ] \, \, R_{3} \, [\, r\, ] \, \, R_{6} \, [\, r\, ] \, + \, \frac{1}{4} \, \wedge \, z \, [\, 1\, ] \, \, z \, [\, 2\, ] \,^{2} \, R_{3} \, [\, r\, ] \,^{8} \, R_{6} \, [\, r\, ] \,^{2} \, + \, \frac{1}{8} \, \wedge \, z \, [\, 1\, ] \,^{2} \, z \, [\, 3\, ] \, \, R_{3} \, [\, r\, ] \,^{2} \, R_{9} \, [\, r\, ] \, - \, \frac{1}{8} \, (\, r\, ) \,^{2} \, R_{9} \, [\, r\, ] 
              \Omega z[2] z[3] R_{6}[r] R_{9}[r] + \frac{1}{9} \triangle z[2]^{2} z[3] R_{6}[r]^{2} R_{9}[r] + \frac{1}{4} \triangle z[1] z[3]^{2} R_{3}[r] R_{9}[r]^{2}
                                         S1[2] = \frac{1}{2} \Omega z[1]^2 R_3[r]^2 - z[2] R_6[r] + \Lambda z[2] R_6[r] - \tilde{D} \lambda_{6,1}^2 z[2] R_6[r] -
                                                                    \frac{1}{4} \wedge z \, [1]^2 \, z \, [2] \, R_3 \, [r]^2 \, R_6 \, [r] \, - \, \frac{1}{8} \wedge z \, [2]^3 \, R_6 \, [r]^3 \, + \, \Omega \, z \, [1] \, z \, [3] \, R_3 \, [r] \, R_9 \, [r] \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_6 \, [r]^3 \, + \, \Omega \, z \, [2] \, Z \, [2] \, R_3 \, [r] \, R_9 \, [r] \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_6 \, [r]^3 \, + \, \Omega \, z \, [2] \, Z \, [2] \, R_3 \, [r]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, + \, \Omega \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, [r]^3 \, - \, \frac{1}{8} \, \alpha \, z \, [2]^3 \, R_9 \, 
                                                                \frac{1}{4} \wedge z[1] z[2] z[3] R_3[r] R_6[r] R_9[r] - \frac{1}{4} \wedge z[2] z[3]^2 R_6[r] R_9[r]^2
                                      S1[3] = \frac{1}{24} \Lambda z[1]^3 R_3[r]^3 - \Omega z[1] z[2] R_3[r] R_6[r] + \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_3[r] R_6[r]^2 - z[3] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_9[r] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2] R_9[r] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2] R_9[r] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2]^2 R_9[r] R_9[r] - \frac{1}{8} \Lambda z[1] z[2] R_9[r] R_
                                                                       \frac{1}{2} \wedge z [3]^3 R_9 [r]^3
```

Получим систему $\dot{z}_k R_{3k,1} = S1_k, \ k = 1, 2, 3$. Для определения точек равновесия необходимо умножить k-ое уравнение на $rR_{3k,1}$ и проинтегрировать на отрезке $[0, r_2]$. Для этого используем встроенную функцию Integrate[f, $\{x,x_{min},x_{max}\}$]:

Программа 6. Определение точек равновесия системы

```
Do [S2[k] = Distribute@Integrate[Expand[S1[k] * r * R<sub>3k</sub>[r]]],
        \{r, 0, r2\}] //. Integrate [q_* s_, \{v_, l_, t_\}] /;
       FreeQ[s, v] \Rightarrow s * Integrate[q, {v, l, t}], {k, 1, p}]
Do[Print["S3[", k, "]=", S3[k] = S2[k] /. R_3[r] \rightarrow R_3[\lambda_{3,1}r]
        /. R_6[r] \rightarrow R_6[\lambda_{6,1}r] /. R_9[r] \rightarrow R_9[\lambda_{9,1}r]], {k, 1, p}]
```

Результат работы программы:
$$\begin{aligned} & 53[1] = \left(-\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, dr\right) \, z[1] - \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, dr\right) \, z[1] - \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, dr\right) \, \tilde{D} \, \lambda_{3,1}^2 \, z[1] + \\ & \frac{1}{8} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^4 \, dr\right) \, z[1]^3 - \Omega \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_6[r\,\lambda_{6,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[2] + \\ & \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, dr\right) \, z[1] \, z[2]^2 + \frac{1}{8} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^3 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1]^2 \, z[3] - \\ & \Omega \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[2] \, z[3] + \\ & \frac{1}{8} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[2]^2 \, z[3] + \\ & \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}]^2 \, dr\right) \, z[1] \, z[3]^2 \\ & 53[2] & = \frac{1}{2} \Omega \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, dr\right) \, z[1]^2 - \left(\int_0^{r^2} r \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, dr\right) \, z[2] + \\ & \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, dr\right) \, z[1]^2 \, z[2] - \frac{1}{8} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^4 \, dr\right) \, z[2]^3 + \\ & \Omega \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, dr\right) \, z[1]^2 \, z[2] - \frac{1}{8} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^4 \, dr\right) \, z[2]^3 + \\ & \Omega \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[3] - \\ & \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[2] \, z[3] - \\ & \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[2]^2 - \\ & \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[2]^2 - \\ & \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}] \, dr\right) \, z[1] \, z[2]^2 - \\ & \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}] \, R_6[r\,\lambda_{6,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}]^2 \, dr\right) \, z[3] - \\ & \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^2 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}]^2 \, dr\right) \, z[3] - \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{3,1}]^3 \, R_9[r\,\lambda_{9,1}]^2 \, dr\right) \, z[3] + \frac{1}{4} \Lambda \left(\int_0^{r^2} r \, R_3[r\,\lambda_{9,1}]^2 \, dr\right) \, z$$

Введем обозначения (индексы $k,l,m,n=\overline{1,N}$): $d2_{3k}=\int_0^1 rR_{3k,1}^2(r)\,dr,\quad \beta_{3k}=\int_0^1 rR_{3k,1}^4(r)dr,\quad \delta_{3k,3l}=\int_0^1 rR_{3k,1}^2(r)R_{3l,1}^2(r)dr,$ $\xi_{3k,3l}=\int_0^1 rR_{3k,1}^2(r)R_{3l,1}(r)dr,\quad \zeta_{3k,3l}=\int_0^1 rR_{3k,1}^3(r)R_{3l,1}(r)dr$ при k< l, $\delta_{3k,3l,3m}=\int_0^1 rR_{3k,1}(r)R_{3l,1}(r)R_{3m,1}(r)dr$ при k< l< m, $\xi_{3k,3l,3m}=\int_0^1 rR_{3k,1}^2(r)R_{3l,1}(r)R_{3m,1}(r)dr$ при $k\neq l,m;l< m.$ Получим систему $\dot{z}_k\int_0^1 rR_{3k,1}^2(r)dr=S4_k,\ k=1,2,3$:

Do[Expand[$S4[k] = S3[k] / . \int_{0}^{r^{2}} (r R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{2}) dr \rightarrow d2_{3} / . \int_{0}^{r^{2}} (r R_{6}[\lambda_{6,1} r]^{2}) dr \rightarrow d2_{6}$

Программа 7. Продолжение работы программы 6

$$\begin{array}{l} /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} \left(r \ R_{9}[\lambda_{9,1} r]^{2} \right) dr \rightarrow d2_{9} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} \left(r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{4} \right) dr \rightarrow \beta_{3} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} \left(r \ R_{6}[\lambda_{6,1} r]^{4} \right) dr \rightarrow \beta_{6} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} \left(r \ R_{9}[\lambda_{9,1} r]^{4} \right) dr \rightarrow \beta_{9} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} \left(r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{2} \ R_{6}[\lambda_{6,1} r]^{2} \right) dr \rightarrow \delta_{36} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{2} \ R_{9}[r \ \lambda_{9,1}]^{2} dr \rightarrow \delta_{39} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{6}[\lambda_{6,1} r]^{2} \ R_{9}[r \ \lambda_{9,1}]^{2} dr \rightarrow \delta_{69} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{2} \ R_{6}[\lambda_{6,1} r] dr \rightarrow \delta_{36} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{3} \ R_{9}[\lambda_{9,1} r] dr \rightarrow \delta_{59} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r] \ R_{6}[\lambda_{6,1} r] dr \rightarrow \delta_{369} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r]^{3} \ R_{9}[\lambda_{9,1} r] dr \rightarrow \delta_{39} \ / \cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r] \ R_{6}[\lambda_{6,1} r] dr \rightarrow \delta_{369} \\ \\ /\cdot \int_{\theta}^{r^{2}} r \ R_{3}[\lambda_{3,1} r] \ R_{6}[\lambda_{6,1} r]^{2} \ R_{9}[\lambda_{9,1} r] dr \rightarrow \delta_{539} \ \Big] \ , \{k, 1, p\} \Big] \\ Do[S4[k], \{k, 1, p\}] \\ (\star Pasyleamin ha koo populueht B neboù vactu d2_{3k*}) \\ Do[Print["S5[", k, "]=", S5[k] = Expand[S4[k] / d2_{3k}]], \{k, 1, p\} \\ Pesyleata paooti inporpammbi: \\ S5[1]=-z[1] - \Delta z[1] - \tilde{D} \lambda_{3,1}^{2} z[1] + \frac{\Delta \beta_{3}}{8 d2_{3}} - \frac{\Omega \delta_{369} z[1] z[2]}{d2_{3}} + \frac{\Delta \delta_{639} z[2]^{2} z[3]}{8 d2_{3}} + \frac{\Delta \delta_{39} z[1] z[3]^{2}}{4 d2_{3}} \\ S5[2]= \frac{\Omega \xi_{36} z[1]^{2}}{2 d2_{6}} - z[2] + \Delta z[2] - \tilde{D} \lambda_{6,1}^{2} z[2] - \frac{\Delta \delta_{36} z[1]^{2} z[2]}{4 d2_{6}} - \frac{\Delta \delta_{69} z[2] z[3]}{4 d2_{6}} + \frac{\Delta \beta_{9} z[3]^{3}}{8 d2_{6}} \\ z[3] - \Delta z[3] - \tilde{D} \lambda_{9,1}^{2} z[3] + \frac{\Delta \delta_{39} z[1] z[2]}{4 d2_{9}} + \frac{\Delta \delta_{69} z[2]^{2} z[3]}{4 d2_{9}} + \frac{\Delta \beta_{9} z[3]^{3}}{8 d2_{6}} \\ z[3] - \Delta z[3] - \tilde{D} \lambda_{9,1}^{2} z[3] + \frac{\Delta \delta_{39} z[1] z[2]}{4 d2_{9}} + \frac{\Delta \delta_{69} z[2]^{2} z[3]}{4 d2_{9}} + \frac{\Delta \beta_{9} z[3]^{3}}{8 d2_{9}} + \frac{\Delta \delta_{9} z[3]^{3}}{8 d2_{9}} + \frac{\Delta \delta$$

Используя встроенные функции Do[expr,{i,i_{min},i_{max}},{j,j_{min},j_{max}},...] и Array[f,n,{a,b}] (генерирует список, используя n значений от a до b), составляем матрицу устойчивости системы $S5_k = 0, k = 1, 2, 3$.

Для проведения анализа устойчивости точек равновесия находим собственные значения матрицы матрицы устойчивости с помощью встроенной функции Eigenvalues[m]. С помощью MatrixForm[list] представляем элементы списка в виде обычной матрицы.

Программа 8. Нахождение собственных значений матрицы

```
Do[a[i, j] = D[S5[i], z[j]], \{i, 1, p+1\}, \{j, 1, p\}]; A = Array[a, \{p, p\}];
                            MatrixForm [% /. z[1] -> 0 /. z[2] -> 0 /. z[3] -> 0]
                              (*Cобственные значения*)
                            \sigma = Eigenvalues[%]
                          Результат работы программы:
                          \Big\{ \Big\{ -1 - \Lambda - \widetilde{D} \; \lambda_{3,1}^2 + \frac{3 \, \Lambda \, \beta_3 \, z \, [1]^2}{8 \, d2_3} - \frac{\Omega \, \xi_{36} \, z \, [2]}{d2_3} + \frac{\Lambda \, \delta_{36} \, z \, [2]^2}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d2_3} + \frac{\Lambda \, \xi_{39} \, z \, [1]}{4 \, d
                                                \frac{\triangle \delta_{39} z[3]^{2}}{4 d2_{3}}, -\frac{\Omega \xi_{36} z[1]}{d2_{3}} + \frac{\triangle \delta_{36} z[1] z[2]}{2 d2_{3}} - \frac{\Omega \delta_{369} z[3]}{d2_{2}} + \frac{\triangle \xi_{639} z[2] z[3]}{A d2_{2}},
                                           \left\{ \frac{\Omega \, \xi_{36} \, z \, [1]}{d \, 2_6} - \frac{\Lambda \, \delta_{36} \, z \, [1] \, z \, [2]}{2 \, d \, 2_6} + \frac{\Omega \, \delta_{369} \, z \, [3]}{d \, 2_6} - \frac{\Lambda \, \xi_{639} \, z \, [2] \, z \, [3]}{4 \, d \, 2_6} , \right. \\ \left. - 1 + \Lambda - \widetilde{D} \, \lambda_{6,1}^2 - \frac{\Lambda \, \delta_{36} \, z \, [1]^2}{4 \, d \, 2_6} - \frac{3 \, \Lambda \, \beta_6 \, z \, [2]^2}{8 \, d \, 2_6} - \frac{\Lambda \, \xi_{639} \, z \, [1] \, z \, [3]}{4 \, d \, 2_6} - \frac{\Lambda \, \delta_{69} \, z \, [3]^2}{4 \, d \, 2_6} , \right. 
              \frac{\Omega \, \delta_{369} \, z \, [1]}{d 2_6} - \frac{\Lambda \, \xi_{639} \, z \, [1] \, z \, [2]}{4 \, d 2_6} - \frac{\Lambda \, \delta_{69} \, z \, [2] \, z \, [3]}{2 \, d 2_6} \Big\},
         \left\{ \frac{ \stackrel{\wedge}{}\mathcal{\zeta}_{39} \, z \, [1]^2}{8 \, d2_9} - \frac{ \stackrel{\Omega}{}\mathcal{\delta}_{369} \, z \, [2]}{d2_9} + \frac{ \stackrel{\wedge}{}\mathcal{\epsilon}_{639} \, z \, [2]^2}{8 \, d2_9} + \frac{ \stackrel{\wedge}{}\mathcal{\delta}_{39} \, z \, [1] \, z \, [3]}{2 \, d2_9} \right\}
              -\frac{\Omega \delta_{369} z[1]}{12} + \frac{\Delta \xi_{639} z[1] z[2]}{12} + \frac{\Delta \delta_{69} z[2] z[3]}{12}
             -1 - \triangle - \widetilde{D} \ \lambda_{9,1}^2 + \frac{\triangle \ \delta_{39} \ z \left[1\right]^2}{4 \ d2_9} + \frac{\triangle \ \delta_{69} \ z \left[2\right]^2}{4 \ d2_9} + \frac{3 \ \triangle \ \beta_9 \ z \left[3\right]^2}{8 \ d2_9} \Big\} \Big\}
       \begin{pmatrix} -1 - \Lambda - \tilde{D} \lambda_{3,1}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \Lambda - \tilde{D} \lambda_{6,1}^{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \Lambda - \tilde{D} \lambda_{9,1}^{2} \end{pmatrix} 
\left\{-1 - \Lambda - \widetilde{D} \lambda_{3,1}^{2}, -1 + \Lambda - \widetilde{D} \lambda_{6,1}^{2}, -1 - \Lambda - \widetilde{D} \lambda_{9,1}^{2}\right\}
```

Задаем функции $R_{3k,1} = J_{3k}$ с помощью встроенной функции BesselJ[n,z], которая на выходе дает функцию Бесселя первого рода с индексом n. Находим решения соответствующей краевой задачи для уравнения Бесселя:

```
Do[R[3 k, 1] = BesselJ[3 k, x], {k, 1, p}]
Do[N\lambda[k] = D[R[3 k, 1], x] /. x \rightarrow \lambda r1, {k, 1, p}]
Do[Print["N\lambda[", k, "] = ", N\lambda[k] /. r1 \rightarrow 1], {k, 1, p}]
Do[Print[{NSolve[(N\lambda[k] /. r1 \rightarrow 1) == 0 && 0 < \lambda < 5 k, \lambda, Reals]}],
{k, 1, p}
Pезультат программы:
{{\{\lambda \rightarrow 4.20119\}}\}}
{{\{\{\lambda \rightarrow 7.50127\}\}\}}
```

Задаем найденные на предыдущем шаге собственные значения $\lambda_{3k,1}$.

Для визуализации результатов разложим функции Бесселя $J_{3k}(r)$, k=1,2,3 в степенной ряд, используя встроенную функцию Series[f,{x,x0,n}], которая генерирует разложение в степенной ряд f(x) в точке x₀ до n-го порядка.

Результат программы:

$$J_{3}(r) = \frac{r^{3}}{48} - \frac{r^{5}}{768} + \frac{r^{7}}{30720} - \frac{r^{9}}{2211840} + \frac{r^{11}}{247726080} - \frac{r^{13}}{39636172800} + O[r]^{14}$$

$$J_{6}(r) = \frac{r^{6}}{46080} - \frac{r^{8}}{1290240} + \frac{r^{10}}{82575360} - \frac{r^{12}}{8918138880} + O[r]^{14}$$

$$J_{9}(r) = \frac{r^{9}}{185794560} - \frac{r^{11}}{7431782400} + \frac{r^{13}}{653996851200} + O[r]^{14}$$

Задаем решения уравнения Бесселя с краевыми условиями на границе круга:

$$\begin{split} R_{3} \left[r \right] &= \frac{r^{3}}{48} - \frac{r^{5}}{768} + \frac{r^{7}}{30720} - \frac{r^{9}}{2211840} + \frac{r^{11}}{247726080} - \frac{r^{13}}{39636172800}; \\ R_{6} \left[r \right] &= \frac{r^{6}}{46080} - \frac{r^{8}}{1290240} + \frac{r^{10}}{82575360} - \frac{r^{12}}{8918138880}; \\ R_{9} \left[r \right] &= \frac{r^{9}}{185794560} - \frac{r^{11}}{7431782400} + \frac{r^{13}}{653996851200}; \end{split}$$

Вычислив приближенные значения интегралов, получим систему для нахождения точек равновесия:

Программа 9. Нахождение точек равновесия

```
Do[Print["S6[", k, "]=", S6[k] = S5[k] /. \lambda^*[3 k] \rightarrow \lambda[3 k]], {k, 1, p}]

Результат работы программы:
S6[1]=
-z[1] - \Lambda z[1] - 17.65\,\tilde{D}\,z[1] + 0.0179538\,\Lambda z[1]^3 - 0.0201489\,\Omega z[1]\,z[2] + 0.0116543\,\Lambda z[1]\,z[2]^2 + 0.244404\,\Lambda z[1]^2\,z[3] + 2.18021\,\Omega z[2]\,z[3] + 0.141148\,\Lambda z[2]^2\,z[3] + 11.8092\,\Lambda z[1]\,z[3]^2
S6[2]=0.0341502\Omegaz[1]<sup>2</sup> - z[2] + \Lambdaz[2] - 56.269\tilde{D}z[2] - 0.0395058 \Lambdaz[1]<sup>2</sup> z[2] - 0.0170237 \Lambdaz[2]<sup>3</sup> - 7.39045 \Omegaz[1] z[3] - 0.95692 \Lambdaz[1] z[2] z[3] - 33.1706 \Lambdaz[2] z[3]<sup>2</sup>
S6[3]=-1.47307×10<sup>-31</sup> \Lambdaz[1]<sup>3</sup> - 3.94216×10<sup>-30</sup> \Omegaz[1] z[2] - 2.55216×10<sup>-31</sup> \Lambdaz[1] z[2]<sup>2</sup> - z[3] - \Lambdaz[3] - 114.735 \tilde{D}z[3] - 2.13529×10<sup>-29</sup> \Lambdaz[1]<sup>2</sup>z[3] - 1.76936×10<sup>-29</sup> \Lambdaz[2]<sup>2</sup>z[3] - 1.0379×10<sup>-26</sup> \Lambdaz[3]<sup>3</sup>
```

В численных экспериментах заданы значения параметров $\Lambda = -\frac{3}{2}, K = 2$. Определим приближенные значения параметров γ, w, Ω в окрестности $\gamma = 0.1, w = 2$ из условия, что w = w(K) это решение уравнения $w = K(1 + \gamma \cos w), \Lambda = -K\gamma \sin w$.

Воспользуемся функцией FindRoot[eng₁, eng₂, ...}, {{x,x₀},{y,y₀},...}], которая выполняет одновременный поиск численного решения уравнений eng_i в окрестности точки (x₀,y₀,...). Вычисляем значения $\Omega = \frac{\Lambda}{2} \operatorname{ctg} w$ и $D_1 = \frac{-1-\Lambda}{\lambda_{3,1}^2}$, где $\lambda_{3,1} \approx 2.100594470605264$.

```
Программа 10. Численные решения в окрестности точки равновесия
```

```
Part [%, 2] \Omega = \left(\frac{\Lambda}{2} * \frac{\text{Cos}[w]}{\text{Sin}[w]}\right) / . \text{%; } \tilde{D} \to \frac{-1 - \Lambda}{\lambda_{3,1}^2} u[r, \theta] / . R_1[r] \to R1 / . R_2[r] \to R2 / . R_3[r] \to R3 \text{Результат работы программы:} w \to 1.74147 \tilde{D} \to 0.0283286 (9.99069 \, r^9 - 28.657 \, r^{11} + 37.3631 \, r^{13}) \, \text{Cos}[3 \, \theta] \, z[1] + \left(\frac{r^6}{46\,080} - \frac{r^8}{1\,290\,240} + \frac{r^{10}}{82\,575\,360} - \frac{r^{12}}{8\,918\,138\,880}\right) \, \text{Cos}[6 \, \theta] \, z[2] + \left(\frac{r^9}{185\,794\,560} - \frac{r^{11}}{7\,431\,782\,400} + \frac{r^{13}}{653\,996\,851\,200}\right) \, \text{Cos}[9 \, \theta] \, z[3]
```

 $\Lambda = -3/2$; K = 2; F1 = w - K - K γ Cos [w]; F2 = Λ + K γ Sin [w];

FindRoot[$\{F1 = 0, F2 = 0\}, \{\{\gamma, 0.1\}, \{w, 2\}\}\}$];

-0.01

r cos θ

На заключительном этапе производится визуализация полученных результатов. Выбирается значение параметра $D < D_1 \approx 0.028$, при котором решается система $S7_k = S6_{k,\widetilde{D}}$ и находится стационарная точка системы (24). Определятся матрицу устойчивости и ее спектр в точке равновесия. Воспользовавшись встроенной функцией RevolutionPlot3D[f,{t,tmin,tmax},{s,smin,smax}], визуализируем пространственно-неоднородное стационарное решение.

```
Программа 11. Визуализация пространственно-неоднородного решения
 m = 1; a[m] = 0.027; Do[S7[k] = S6[k] / . \tilde{D} \rightarrow a[m], \{k, 1, p\}];
 res = FindRoot[\{S7[1] = 0, S7[2] = 0, S7[3] = 0\}, \{\{z[1], 1\}, \{z[2], 0\}, \{z[3], 0\}\}]
 G[m] = u[r, \theta] / . res;
 Chop [A /. \tilde{D} \rightarrow a[m] /. res]
 Eigenvalues[%]
 RevolutionPlot3D[G[m], \{r, 0, 1\}, \{\theta, 0, 2Pi\},
  PlotRange → All, ColorFunction → "GrayTones",
  AxesLabel → {Style[r cosθ, 14, Bold, Italic], Style[r sinθ, 14, Bold, Italic]},
  PlotLabel → "Ď" -> a[m]
Результат работы программы:
\{z[1] \rightarrow 0.930376, z[2] \rightarrow 0.000927046, z[3] \rightarrow -7.09125 \times 10^{-28}\}
\{\{-0.046896, -0.00235371, 0.346623\}, \{0.00800975, -3.96753, 0.902312\}, \{0, 0, -2.59784\}\}
\{-3.96753, -2.59784, -0.0469008\}
                      \tilde{D} \rightarrow 0.027
0.01
 0.00
```

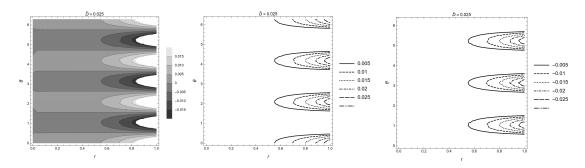
Используя встроенную функцию ContourPlot3D[f, $\{x,x_{min},x_{max}\}$, $\{y,y_{min},y_{max}\}$], позволяющую построить линии уровня поверхности, получим решения (см. рис. 2).

Программа 12. Построение линий уровня поверхности (решения)

 $r \sin \theta$

```
ContourPlot [\{G[1]\}, \{r, 0, 1\}, \{\theta, 0, 2\pi\}, PlotTheme \rightarrow "Monochrome", PlotLabel \rightarrow HoldForm [D = 0.025], LabelStyle \rightarrow {GrayLevel[0]}, FrameLabel \rightarrow {Style[r, 12], Style[\theta, 12]}, PlotLegends \rightarrow Automatic] ContourPlot | {G[1] == 0.005, G[1] == 0.01, G[1] == 0.015, G[1] == 0.02,
```

```
\begin{split} & \text{G[1]} == 0.025, \, \text{G[1]} == 0.03\}, \, \{r,\, \emptyset,\, 1\}, \, \{\theta,\, \emptyset,\, 2\,\pi\}, \\ & \text{PlotTheme} \rightarrow \text{"Monochrome", PlotLabel} \rightarrow \text{HoldForm}\big[\tilde{D} = 0.025\big], \\ & \text{LabelStyle} \rightarrow \{\text{GrayLevel}[\theta]\}, \, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{Style}[r,\, 12], \\ & \text{Style}[\theta,\, 12]\}, \, \text{PlotLegends} \rightarrow \{0.005,\, 0.01,\, 0.015,\, 0.02,\, 0.025,\, 0.03\}\big] \\ & \text{ContourPlot}\big[\{\text{G[1]} == -0.005,\, \text{G[1]} == -0.01,\, \text{G[1]} == -0.015,\, \text{G[1]} == -0.02, \\ & \text{G[1]} == -0.025,\, \text{G[1]} == 0.03\}, \, \{r,\, \theta,\, 1\}, \, \{\theta,\, \theta,\, 2\,\pi\}, \, \text{PlotTheme} \rightarrow \text{"Monochrome",} \\ & \text{PlotLabel} \rightarrow \text{HoldForm}\big[\tilde{D} = 0.025\big], \, \text{LabelStyle} \rightarrow \{\text{GrayLevel}[\theta]\}, \\ & \text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{Style}[r,\, 14],\, \text{Style}[\theta,\, 14]\}, \\ & \text{PlotLegends} \rightarrow \{-0.005,\, -0.01,\, -0.015,\, -0.02,\, -0.025,\, -0.03\}\big] \end{split}
```



Puc.~2.~ Линии уровня пространственно-неоднородных решений (20) для $\Lambda=-\frac{3}{2},~h=\frac{\pi}{3}$ при $\widetilde{D}=0.025.$

Заключение

Для выяснения поведения решений задач для нелинейного функциональнодифференциального уравнения параболического типа с преобразованием пространственных переменных используются различные методы асимптотического, бифуркационного анализов, теории возмущений, интегральных (центральных) многообразий и др. Такое исследование сопровождается разложением решений в ряд, преобразованием рядов, вычислением интегралов с собственными функциями соответствующих спектральных задач и т. п. Рационально использовать пакеты прикладных программ на основе символьных вычислений.

На примере задачи, моделирующей эксперименты в оптических системах с нелинейностями керровского типа для круговых областей, в которых преобразование поля в двумерном контуре обратной связи приводит к возникновению пространственно-неоднородных, вращающихся и других структур, приведены характерные программы. В первом разделе статьи содержатся основные теоретические аспекты, связанные с необходимыми для численного решения результатами и описанием алгоритмов (методов), во втором разделе приведена реализация алгоритмов построения структур решений и анализ устойчивости в системе компьютерной математики.

Большое внимание уделено построению частных случаев решений, таких как: решения, зависящие от радиальной координаты; от угловой координаты, от времени.

С помощью пакета Wolfram Mathematica, используя основные асимптотические методы прикладной нелинейной динамики (в частности, метод Галеркина), осуществлен локальный анализ рождающихся структур и описаны сценарии их развития, найдены точки равновесия систем и их фазовые траектории. Получено численное решение и его визуализация в зависимости от значений таких параметров, как малый параметр диффузии, большой параметр интенсивности и преобразования координат.

Данная методика применима к широкому кругу задач. Может предварять численные сеточные подходы.

Работа выполнена в рамках НО «Крымский математический центр» и поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Список литературы

- Ахманов, С. А. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.
 - AKHMANOV, S., VORONTSOV, M. & IVANOV, V. (1990) Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback. *New Physical Principles of Optical Information Processing*. Moscow: Nauka. Pp. 263–325.
- 2. Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин. М.: МАКС Пресс, 2008. 201 с.
 - RAZGULIN, A. V. (2008) Nonlinear models of optical synergetics. Moscow: MAX-Press.
- 3. Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. 2014. 4 (32):1-2. С. 59–75.
 - KORNUTA, A. (2014) Metastable structures in a parabolic equation with rotation of a spatial variable. *Dynamical Systems.* 4 (32). Pp. 59–75.
- 4. Корнута, А. А., Лукьяненко, В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции // Динамические системы. 2019. 9 (37):4. С. 390–409.

- KORNUTA, A. & LUKIANENKO, V. (2019) Functional-differential equations of parabolic type with the involution operator. *Din. Sist.* 9 (37). Pp. 390–409.
- 5. KORNUTA, A. & LUKIANENKO, V. (2021) Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42:5. Pp. 911–930.
- 6. KORNUTA, A. & LUKIANENKO, V. (2021) Stability of Structures and Asymptotics of Nonlinear Parabolic Type Equations Solutions with Transformation of Arguments. Lobachevskii Journal of Mathematics. 42. Pp. 3468-3485.
- 7. Корнута, А. А., Лукьяненко, В. А. Динамика решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа // Известия вузов. ПНД. 2022. 30:2. С. 132–151.
 - KORNUTA, A. & LUKIANENKO, V. (2022) Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 30:2. Pp. 132–151.
- 8. Корнута, А. А., Лукьяненко, В. А. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косой производной // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. 69 (2). С. 276—288.
 - KORNUTA, A. & LUKIANENKO, V. (2023) Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative. *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* 69 (2). Pp. 276–288.
- 9. Карапетянц, Н. К. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения / Н. К. Карапетянц, Самко С. Г. Ростов: Издательство Ростовского университета, 1988. 187 с.
 - KARAPETIANTS, N. & SAMKO, S. (1988) Equations with involutive operators and their applications. Rostov on Don. Rostov University Publishing House.
- Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, Н. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
 - ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. (1979) Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables. National Bureau of Standards, Washington. 1082.
- 11. HENRY, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag.

- 12. Белан, Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. математической физики, анализа, геометрии. $2005.-1(1).-\mathrm{C.}$ 3–34.
 - BELAN, E. P. (2005) On the dynamics of traveling waves in a parabolic equation with the transformation of the shift of the spatial variable. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry.* 1 (1). Pp. 3–34.

УДК: 514.7

MSC2020: 51F15, 14L24

О БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТАХ ИМПРИМИТИВНЫХ ГРУПП $G(m,p,n), B_n^m, D_n^m$

© О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского Физико-технический институт просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация е-маіl: oirud58@gmail.com

On a basic invariants of the imprimitive groups $G(m,p,n), B_n^m, D_n^m$.

Rudnitskii O. I.

Abstract. In *n*-dimensional unitary space U^n we introduce an coordinate system with origin O and the orthonormal basis vectors \vec{e}_i $(i = \overline{1,n})$; vector $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Let G be a finite irreducible unitary group generated by reflections with respect to hyperplanes with the common point O. A polynomial $f = f(\vec{x}) = f(x_i) \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ is called a invariant (G-invariant) of the group G if

$$\sigma \cdot f = \sigma \cdot f(\vec{x}) = f(\sigma^{-1}\vec{x}) = f, \ \forall \ \sigma \in G.$$

The set of all G-invariants forms an algebra, with is generated by n algebraically independent polynomials of degrees m_i , $i = \overline{1, n}$, called a basic invariants of group G (Shephard G. C., Todd J. A.).

In this paper, we study the properties of basic invariants of the imprimitive group G (the group of number 2 in the list of Shephard and Todd). These are the symmetry group G(m,p,n) of the complex polytope $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ and the symmetry group $G(m,1,n)=B_n^m$ of the generalized n-cube γ_n^m , as well as its subgroup $G(m,m,n)=D_n^m\subset B_n^m$.

In the paper provides an overview of known approaches to constructing in explicit form the basis invariants of these groups — of the methods of Shephard-Todd, of the Pogorelov polynomials, of the «vertex problem». Also in the paper we present a new method for constructing in explicit form the basis invariants of groups $G(m, p, n), B_n^m, D_n^m$. This method is based on the use of the differential operator for constructing in explicit form the basis invariants of the odd degrees.

Keywords: Unitary space, reflection, invariant, basic invariant, complex polytope.

Введение

Пусть в n-мерном унитарном пространстве U^n задана система координат началом O и ортонормированным базисом $\vec{e_i}$ ($i=\overline{1,n}$); вектор $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^n x_i\vec{e_i}$. Отражением σ порядка $l\geq 2$ в пространстве U^n называется унитарное преобразование порядка l, множество неподвижных точек которого является гиперплоскостью (плоскостью размерности n-1). Обозначим через G конечную неприводимую группу, порождённую отражениями σ относительно гиперплоскостей с общей точкой O. Классификация групп G впервые получена в работе [1].

Действие группы G в кольце $R = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ многочленов от n переменных над полем комплексных чисел определим с помощью равенства

$$\sigma \cdot f = \sigma \cdot f(\vec{x}) = f(\sigma^{-1}\vec{x}), \ \sigma \in G, f(\vec{x}) = f(x_i) \in R.$$

Многочлен $f \in R$ называется инвариантом группы G (G-инвариантом), если $\sigma \cdot f = f$ для всех $\sigma \in G$. Известно, что множество всех G-инвариантных многочленов $f \in R$ образует алгебру I^G , порождённую n алгебраически независимыми однородными многочленами (базисными инвариантами) f_i степеней m_i , $i = \overline{1,n}$ [1]. Отметим, что числа m_i для заданной группы G определяются однозначно, а сами базисные инварианты нет. Поэтому представляет интерес разработка и реализация конструктивных методов базиных инвариантов групп G, удовлетворяющих различным, наперед заданным, условиям.

Цель работы рассмотреть разничные подходы к построению в явном виде базисных инвариантов унитарных импримитивных групп G(m, p, n), как ранее известные так и новые, с использованием дифференциального оператора.

1. Постановка задачи

В 1954 году Шепард и Тодд [1] впервые опубликовали список всех конечных унитарных неприводимых групп G, поржденных отражениями относительно гиперплоскостей пространства U^n . В этой классификации отдельно изучаются импримитивные и примитивные группы G.

Настоящая статья посвящена изучению инвариантов трехпараметрического семейства импримитивных групп G, известных как G(m, p, n) в обозначениях Шепарда и Тодда [1](группа № 2 в списке Шепарда-Тодда [1]).

Для натуральных $m, p \ (m \geqslant 2, m = pq)$ группа $G(m, p, n) \ (p \neq 1, m)$ имеет порядок $qm^{n-1} \cdot n!$ и порождается в пространстве $U^n(n > 1)$ отражениями порядка $q = mp^{-1}$

относительно гиперплоскостей

$$x_i = 0, \ i = \overline{1, n},\tag{1}$$

и отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей

$$x_i - \theta^k x_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, n}, \quad i < j). \tag{2}$$

где θ — первообразный корень степени m из единицы, $k = \overline{1, m}$.

Степени базисных инвариантов $m_i = m, 2m, \dots, (n-1)m, nq$ [1].

Так как p делитель m, то естественно выделяют два случая p=1 и p=m.

При p=1, группа G(m,1,n), обозначаемая также B_n^m , имеет порядок $m^n \cdot n!$ и порождается отражениями порядка m относительно гиперплоскостей с уравнениями (1) и отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей (2) [2]. Это группа симметрий правильного комплесного многогранника γ_n^m пространства U^n , называемого обобщённым n-кубом [1, 3]. Его m^n вершин можно задать векторами [1]

$$\overrightarrow{OV_r} = \sum_{i=1}^n \theta^{k_i} \vec{e_i},\tag{3}$$

где $k_i = \overline{1,m}, r = \overline{1,m^n}.$

Обобщенный n-куб γ_n^m является естественным обобщением n-куба γ_n на унитарное пространство и при m=2 совпадает с ним: $\gamma_n^2=\gamma_n$. Соответственно, группа $B_n^2=B_n$ [3]

Числа m_i для группы B_n^m равны $m, 2m, \ldots, (n-1)m, nm$ [1].

Отметим, что группа G(m,p,n) является группой симметрий полуправильного комплесного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$. Его qm^{n-1} вершин могут быть заданы векторами (3) при условии $\sum_{i=1}^n k_i \equiv 0 \pmod p$ и $r=\overline{1,qm^{n-1}}$ [1].

Если p=m, то группа G(m,m,n), обозначаемая также D_n^m , является подгруппой группы симметрий B_n^m обобщенного n-куба, совпадающей при m=2 с группой $D_n \subset B_n$. Она порождается отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей (2), степени базисных инвариантов $m_i=m,2m,\ldots,(n-1)m,n$ [1].

Разичные подходы к построению в явном виде базисных инвариантов групп G(m, p, n), B_n^m , D_n^m рассмтривались в целом ряде работ, например, в [1, 2, 4–6].

В этой статье будет дан обзор ранее известных подходов к построению в явном виде базисных инвариантов указанных групп, а также предложен новый метод.

2. Различные методы построения базисных инвариантов групп $G(m,p,n),\ B_n^m,\ D_n^m$

- **1. Шепард-Тодд.** Впервые базисные инварианты групп G(m, p, n), B_n^m , D_n^m были найдены в работе [1]. Суть метода состоит в следующем. Проанализировав преобразования содержащиеся в группе G(m, p, n), Шепард и Тодд установили, что они порождаются преобразованиями следующих двух типов (см. также [7]):
 - 1) преобразование переставляющие базисные векторы \vec{e}_i ;
 - 2) преобразование g вида: $g\vec{e_i} = \theta_i \vec{e_i}$ $(i = \overline{1,n})$, где $\theta_i^m = 1, (\theta_1 \dots \theta_n)^q = 1$.

Отсюда следует вывод: множество базисных инвариантов группы G(m,p,n) состоит из элементарных симметрических функций от $x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m$, степеней $1, 2, \cdots, n-1$, и многочлена $(x_1x_2 \dots x_n)^q$.

Таким образом, степенные суммы

$$I_k = \sum_{i=1}^n x_i^{mk}, \ (k = \overline{1, n-1})$$
 (4)

и $I_n = (x_1 x_2 \dots x_n)^q$ являются базисными инвариантами для группы G(m,p,n).

Степенные суммы (4) и $I_n = (x_1 x_2 \dots x_n)^m$ или $I_n = \sum_{i=1}^n x_i^{mn}$ — базисные инварианты для группы B_n^m .

Степенные суммы (4) и $I_n = x_1 x_2 \dots x_n$ — базисные инварианты для группы D_n^m .

2. Многочлены Погорелова. В. Ф. Игнатенко (см., например, [8], [9]) построил, на основе многочленов Погорелова, геометрическую теорию инвариантов вещественных групп G и поставил задачу перенести результаты этой теории на случай унитарных групп G пространства U^n , а именно, применить многочлены Погорелова для построения базисных инвариантов унитарных групп G. Другими словами — найти все базисные инварианты групп G вида

$$J_{2r}^G = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^{2r}, \tag{5}$$

где σ — отражения относительно гиперплоскостей, \vec{s} — единичный вектор нормали (с началом O) одной из них, $(\vec{x}, \vec{s}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{s}_i$ — скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x_i)$ и $\vec{s} = (s_i)$.

Многочлены J_{2r} получили название многочленов Погорелова [9]. Нетрудно понять, что ненулевые многочлены Погорелова, подходящих четных степеней m_i , — инварианты группы G. Следовательно, решение поставленной задачи сводится к доказательству их алгебраической независимости. Эта задача для всех групп G была решена в работе [2].

Приведем здесь основные результаты, касающиеся инвариантов групп G(m, p, n), B_n^m , D_n^m . Так мы рассматриваем невещественные группы G(m, p, n), то m > 2.

Так как группа G(m, p, n) порождается отражениями относительно гиперплоскостей с уравнениями (1), (2), то G(m, p, n) — инвариантное множество $S = \{\sigma \vec{s}\}$ состоит из векторов [2], [6]

$$\theta^h \vec{e_i}, i = \overline{1, n}, h = \overline{1, m} \tag{6}$$

И

$$\pm \frac{\theta^h}{\sqrt{2}} (\vec{e}_i - \theta^k \vec{e}_j), \ i, j = \overline{1, n} \ (i < j), \ h, k = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Таким образом, многочлены Погорелова (5) четных степеней mt для группы $G(m,p,n), (p \neq 1,m),$ с точностью до постоянного множителя, могут быть записаны в виде [6]

$$J_{mt}^{G(m,p,n)} = \left(\frac{2^{\frac{mt}{2}-1}}{m} + n - 1\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^{mt} + R_{mt}^{\alpha}.$$
 (8)

где
$$R_{mt}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{n} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} x_i^{m(t-k)} x_j^{mk}.$$

Здесь $\alpha=0,$ если m четное и $t=\overline{1,n-1};$ $\alpha=1,$ если m нечетное и t=2,4, $6,\cdots,n-1-\rho,$ где $\rho=0(1)$ при нечетном (четном) n.

Отметим, что в случае четного nq многочлен J_{nq} $(nq \neq tm)$ равен 0 или совпадает с (8), если nq = tm $(t \leq n-1)$.

Инвариант $J_{mt}^{G(m,p,n)}$ — базисный, если его нельзя представить в виде многочлена от степенных сумм (4) степеней mk < mt. Чтобы в этом убедиться преобразуем R_{mt}^{α} :

$$\begin{split} R_{mt}^{\alpha} &= \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{n} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} x_i^{m(t-k)} x_j^{mk} = \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{n} x_i^{m(t-k)} x_j^{mk} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} (\sum_{i,j=1}^{n} x_i^{m(t-k)} x_j^{mk} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{mt}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} \sum_{i=1}^{n} x_i^{m(t-k)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{mk} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^{k\alpha} C_{mt}^{mk} \sum_{i=1}^{n} x_i^{mt}. \end{split}$$

Тогда многочлен $J_{mt}^{G(m,p,n)}$ можно записать в виде

$$J_{mt}^{G(m,p,n)} = b \sum_{i=1}^{n} x_i^{mt} + S_{mt}^{\alpha},$$

где для четного m

$$b = n - 1 + \frac{2^{\frac{mt}{2} - 1}}{m} - \delta \sum_{k=1}^{\frac{t - \tau - 1}{2}} C_{mt}^{mk} - \frac{\tau}{2} C_{mt}^{\frac{mt}{2}},$$

$$S_{mt}^{0} = \delta \sum_{k=1}^{\frac{t - \tau - 1}{2}} C_{mt}^{mk} \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{m(t-k)} \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{mk} + \frac{\tau}{2} C_{mt}^{\frac{mt}{2}} (\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\frac{mt}{2}})^{2},$$

и для нечетного m и четного t

$$b = n - 1 + \frac{2^{\frac{mt}{2} - 1}}{m} - \delta \sum_{k=1}^{\frac{t-2}{2}} (-1)^k C_{mt}^{mk} - \frac{(-1)^{\frac{mt}{2}}}{2} C_{mt}^{\frac{mt}{2}},$$

$$S_{mt}^1 = \delta \sum_{k=1}^{\frac{t-2}{2}} (-1)^k C_{mt}^{mk} \sum_{i=1}^n x_i^{m(t-k)} \sum_{i=1}^n x_i^{mk} + \frac{(-1)^{\frac{mt}{2}}}{2} C_{mt}^{\frac{mt}{2}} (\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{mt}{2}})^2;$$

здесь $\delta = 0(1)$ при t = 1, 2(>2) и $\tau = 1(0)$ при четном(нечетном) t.

Следовательно, $J_{mt}^{G(m,p,n)}$ — базисный только при тех значениях m,t,n, которые не удовлетворяют условию b=0. Так как n — натуральное, то условие b=0, которое можно преобразовать к виду

$$n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{t} C_{mt}^{mk} - \frac{2^{\frac{mt}{2}-1}}{m},\tag{9}$$

справедливо только в случае $m=2^l \ (l=2,3,\ldots).$

Таким образом, справедливо следующее утверждение [2]

Утверждение 1. Многочлены (5) являются базисными инвариантами четных степеней mt группы G(m, p, n) при всех соответствующих значениях t, если $m \neq 2^l$, u при $t = \overline{1, n-1}$, не удовлетворяющих условию (9), если $m = 2^l$.

Отметим, что в случае группы $B_n^m~(p=1)$, множество $S=\{\sigma\vec{s}\}$ совпадает с (6), (7), а многочлены $J_{mt}^{B_n^m}$ — с (8).

Таким образом, для группы B_n^m справедливо **Утверждение 1** при $t=\overline{1,n}$ [2].

В случае группы $D_n^m \ (p=m)$ множество $S=\{\sigma \vec{s}\}$ совпадает (7), и многочлены $J_{mt}^{D_n^m}$ имеют вид

$$J_{mt}^{D_n^m} = (n-1)\sum_{i=1}^n x_i^{mt} + R_{mt}^{\alpha}.$$

Как и ранее, нетрудно доказать справедливость утверждения

Утверждение 2. Многочлены (5) являются базисными инвариантами четных степеней mt группы D_n^m при всех значениях $t=\overline{1,n-1}$ (m четно) и при $t=2,4,\ldots,n-1-\rho$ (m нечетно), не удовлетворяющих условию

$$n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{t} (-1)^{mk} C_{mt}^{mk}.$$

Отметим [4], что формы R_{mt}^{α} (см.(8)) — базисные инварианты четных степеней mt групп G(m,p,n), B_n^m , D_n^m при всех соответствующих значениях m u t.

При рассмотрении многочленов Погорелова в вещественных пространствах важным, необходимым, условием была четность их степени. Это обусловлено тем, что для всех вещественных групп G множество $S = \{\sigma \vec{s}\}$, которое инвариантно относительно G, обладает следующим свойством: если вектор $\vec{s} \in S$, то и вектор $-\vec{s} \in S$. Поэтому многочлены Погорелова нечетной степени для вещественных групп G тожественно равны 0.

Для невещественных групп G множество $S = \{\sigma \vec{s}\}$ не всегда обладает этим свойством. Это дает возможность рассмотрения многочленов Погорелова произвольной, не обязательно четной, степени r [6].

В работе [6] было введено понятие m-множества. Множество S называется m-множеством при выполнении следующего условия: если вектор $\vec{s} \in S$, то и вектор $\theta^k \vec{s} \in S$ ($k = \overline{1,m}$), где θ , как и ранее, — первообразный корень степени m из единицы. Для вещественных групп G множество S-2-множество.

Лемма. [6] Многочлены Погорелова J_r^G степеней r=mt являются ненулевыми инвариантами группы G тогда и только тогда, когда множество $S=\{\sigma\vec{s}\}$ группы G есть m-множеством.

Применяя **Лемму** к группе G(m, p, n) можно сделать следующие выводы.

Множество векторов (6), (7) — m-множество. Следовательно, многочлены $J_{mt}^{G(m,p,n)}$ ($t=\overline{1,n-1}$) степеней mt являются ненулевыми инвариантами группы G(m,p,n).

При этом, если mt — нечетно, многочлены $J_{mt}^{G(m,p,n)}$, с точностью до постоянного множителя, совпадают со степенными суммами I_t (см.(4)), и, следовательно, являются базисными для любых m,t,n. Таким образом, **Утверждение 1** может быть преобразовано к виду [6]

Утверждение 3. Многочлены $J_{mt}^{G(m,p,n)}$ являются базисными инвариантами степеней mt группы G(m,p,n) при любом n, если $m \neq 2^l$, и при $t = \overline{1,n-1}$, не удовлетворяющих условию (9), если $m = 2^l$.

3. «Проблема вершин». Пусть M_n — правильный n-мерный многогранник с центром в начале координат O и вершинами $V_r, r = \overline{1,p}$. Его группа симметрий G есть конечная группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей с началом O [3]. Тогда многочлены

$$V_{m_i}^G = \sum_{r=1}^p (\vec{x}, \overrightarrow{OV_r})^{m_i} \tag{10}$$

инварианты группы G.

Естественно возникает вопрос: являются ли многочлены (10) базисными инвариантами группы или, другими словами, являются ли многочлены (10) алгебраически независимыми?

Впервые такая задача («проблема вершин») была сформулирована в работах Леопольда Флатто (см. [10–12]). Там же он дал ее положительное решение для групп G симметрий правильных вещественных многогранников, отличных от группы B_n симметрий n-куба γ_n , и высказал предположение об алгебраической независимости многочленов (10) в случае $G = B_n$. Его подтвердил Хейслейн [13], а также другим методом В. Ф. Игнатенко [14].

В [5] автор решил указанную задачу для групп симметрий правильных комплексных многогранников, при этом для решения задачи в случае группы $G(m,1,n)=B_n^m$ симметрий обобщенного n-куба γ_n^m был использован метод работы [14](см., также [15]). А именно, доказано: $ecnu\ G=B_n^m$, то многочлены (10) степеней $m_i=mt\ (t=\overline{1,n})$ алгебраически независимы и, следовательно, являются базисными для группы B_n^m .

Отметим, что для полуправильного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ с группой симметрий G(m,p,n) задача «проблема вершин» не имеет полного решения. В работе [15] дано решение этой задача для частного случая, доказано

Утверждение 4. Если G = G(m, p, n) есть группа симметрий многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ (n > 2), где n и p — взаимно простые, то многочлены (10) степеней $m_i = mt$ $(t = \overline{1, n-1})$ алгебраически независимы, то есть являются базисными инвариантами группы G(m, p, n).

4. Применение дифференциального оператора. Рассмотрим еще один, ранее не применяемый для групп G(m, p, n), B_n^m , D_n^m , способ построения базисных инвариантов. В п. 2 настоящей статьи (см. также [4]), установлено, что формы R_{mt}^{α} (см.(8)) четных степеней mt являются базисными инвариантами групп G(m, p, n), B_n^m , D_n^m для всех соответствующих значений m, t.

Пусть m — нечетное. Тогда многочлены R^1_{mt} являются базисными инвариантами группы G(m,p,n) для $t=2,4,6,\cdots,n-1-\rho$, где $\rho=0(1)$ при нечетном (четном) n. Найдем остальные базисные инварианты группы G(m,p,n) нечетных степеней mt, то есть для $t=1,3,5,\cdots,n-2-\rho$.

Вычислим $\delta(R_{mt}^1) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_l^m}(R_{mt}^1)$ при $t = 2, 4, \dots, n-1-\rho$ (m нечетно).

Для этого форму R_{mt}^1 представим в виде

$$R_{mt}^{1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^{n} (x_i - \theta^k x_j)^{mt} - (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^{mt}.$$

Таким образом,

$$\delta(R_{mt}^1) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_l^m} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i,j=1\\i < j}}^n (x_i - \theta^k x_j)^{mt} \right) - \sum_{l=1}^n \frac{\partial^m}{\partial x_l^m} \left((n-1) \sum_{i=1}^n x_i^{mt} \right).$$

Вычислим первое слагаемое. Для этого найдем

$$A_i = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} (x_i - \theta^k x_j)^{mt} = \beta (x_i - \theta^k x_j)^{m(t-1)}$$

И

$$A_j = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} (x_i - \theta^k x_j)^{mt} = \beta (-\theta^k)^m (x_i - \theta^k x_j)^{m(t-1)},$$

где $\beta = mt \cdot (mt - 1) \cdot (mt - 1) \cdot \ldots \cdot (mt - m + 1)$.

Так как $(-\theta^k)^m$ при нечетном m равно -1, то $A_i = -A_j$, следовательно, первое слагаемое равно 0.

Вычислим второе слагаемое:

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^{m}}{\partial x_{l}^{m}} \left((n-1) \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{mt} \right) = -(n-1)\beta \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{m(t-1)}.$$

Следовательно, $\delta(R_{mt}^1)$, с точностью до постоянного множителя, совпадает со степенной суммой I_k , нечетной степени k=m(t-1), а значит является базисным.

Таким образом, используя дифференциальный оператор δ , получены не достающие базисные инварианты группы G(m,p,n) нечетных степеней mt $(t=1,3,5,\cdots,n-2-\rho,\ m-$ нечетное). Следовательно, для нечетного m, инварианты R^1_{mt} $(t=2,4,6,\cdots,n-1-\rho,)$ и $\delta(R^1_{mt})$ $(t=1,3,5,\cdots,n-2-\rho)$ — базиные для группы G(m,p,n).

Отметим, что все вышесказанное справедливо и для групп $B_n^m(c)$ соответствующими значениями t) и D_n^m .

Заключение

В работе дан обзор известных подходов к построению в явном виде базисных инвариантов групп G(m, p, n), B_n^m и D_n^m , а также предложен новый способ построения базисных инвариантов этих групп с использованием дифференциального оператора.

Список литературы

- 1. SHEPHARD, G. C. Finite unitary reflection groups / G. C. Shephard, J. A. Todd // $Can.\ J.\ Math. 1954.$ Vol. 6. N_{2} 2. P. 274–304.
- 2. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физмат. наук. Минск, 1990. 115 с.
 - RUDNITSKII, O. I. (1990) Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Minsk.
- 3. COXETER, H. S. M. Regular complex polytopes. London Cambridge Univ. Press, 1974.-185 p.
- 4. RUDNITSKII, O. I. Some properties of basis invariants of the symmetry groups $G(m,p,n),\,B_n^m,\,D_n^m$ // Journal of Mathematical Sciences 1996. V. 82. № 2. P. 3395–3398.
- 5. RUDNITSKII, O. I. On invariants of symmetry groups of regular polytopes //Journal of Mathematical Sciences 1998. V. 90. № 6. P. 2505–2508.
- Рудницкий, О. И.Об одном классе многочленов Погорелова // Математическая физика, анализ, геометрия 1996. Т. 3 № 1/2. С. 142–145.
 RUDNITSKII, O. I. (1996A) On a class of Pogorelov polynomials. Matematicheskaya
- 7. Спрингер, Т. А. Теория инвариантов. М.: Изд-во "Мир 1981. 191 с. SPRINGER, Т. А. (1981) Invariant theory. Moscow, 1981. 191 р.

fizika, analiz, geometriya. — 1996. –V. 3. — \mathbb{N} 1/2. — P. 142–145.

8. Игнатенко, В. Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1980. — Т. 11. — С. 203 — 240. IGNATENKO, V. F. (1980) The geometry of algebraic surfaces with symmetries // Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom. — V. 11. — P. 203 — 240.

- 9. Игнатенко, В. Ф. Некоторые вопросыгеометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1984. Т. 16. С. 195 229.
 - IGNATENKO, V. F. (1984) Some problems in the geometric theory of invariants of groups generated by orthogonal and oblique reflections // Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom. -1984-V. 16. -P. 195 -229.
- 10. FLATTO, L. Functions with a mean value property // Amer. J. Math. 1963. V. 85. No 2. P. 248–270.
- 11. FLATTO, L. Basis sets of invariants for finite reflection groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. No. 4. P. 730–734.
- 12. FLATTO, L. Regular polytopes and harmonic polynomials // Canad. J. Math. 1970. V. 22. P. 7–21.
- 13. HAEUSLEIN, G. K. On the algebraic independence of symmetric functions // *Proc.* $Am.\ Math.\ Soc. -1970.$ V. 25. Nº 1. P. 179–182.
- 14. Игнатенко, В. Ф. Об одной системе базисных инвариантов группы B_n // Укр. геом. сб. 1986. № 29. Р. 54–55.
 - IGNATENKO, V. F. (1986) A system of basic invariants of the group B_n // Ukr. Geometr. Sb. - 1986. - No. 29. - P. 54-55.
- 15. Рудницкий, О. И. О базисных инвариантах группы симметрий многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 3(52). С. 72–78.
 - RUDNITSKII, O. I. (2021) On a basic invariants of the symmetry group of polyhedron $\frac{1}{p}\gamma_n^m$. TVIM. 2021. Nº 3(52). C. 72-78.

УДК: 519.634

MSC2010: 65M06,76R10

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ АНАЛИЗА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

© А. А. Селищев, В. Г. Цибулин

Южный Федеральный Университет Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, Ростовская обл., 344090, Российская Федерация e-mail: selishev@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

HIGH ORDER FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR THE PLANE PROBLEM OF CONVECTION IN A POROUS MEDIUM.

Selischev A. A., Tsybulin V. G.

Abstract. Modeling of convection in a porous medium saturated with incompressible fluid has applications in geophysics, technics, etc. The problem of convection in a porous medium has a feature that distinguishes it from the problem of free fluid convection. Discovered by D. V. Lyubimov branching off a family of stationary solutions for the plane Darcy convection [3] was explained by V. I. Yudovich based on the theory of cosymmetry [4]. Galerkin method was applied to study one-parameter families of stationary states in the Darcy problem for rectangles in [5]. Second-order finite-difference scheme ensuring cosymmetry for discrete analogue was presented in [6].

The problem of convection of a heat-conducting fluid in a rectangular porous region heated from below is under consideration. We introduce a compact finite-difference scheme to supply a higher order of accuracy in solving the equations for the stream function and temperature (Darcy model). Previously, various versions of effective compact schemes for parabolic and hyperbolic equations have been developed [7–9].

We built a compact finite difference approximation on nine-point stencil by using the balance method. The constructed scheme ensures cosymmetry for discrete analogues. In a numerical experiment, we study the spectral problem and calculate critical Raleigh numbers corresponding to the branching off a family of stationary convective flows. Reducing terms in Taylor series expansion, we improved the scheme by choosing parameters in the approximation of the Laplace operator and the first derivative in horizontal coordinate.

Our results show that the accuracy can be increased by choosing an optimal ratio of the step along horizontal and vertical coordinates. New finite-difference scheme allows to conduct computations of the family of steady states and its transformations more effectively.

This work was financially supported by the Russian Science Foundation, project 23-21-00221, https://rscf.ru/en/project/23-21-00221/.

Keywords: convection, porous medium, Darcy model, compact scheme, finite-difference method.

Введение

Моделирование конвективных движений в пористой среде, насыщенной несжимаемой жидкостью представляет интерес в задачах геофизики и в некоторых технических приложениях [1]. В постановке, использующей закон Дарси [2], задача обладает рядом особенностей отличающих ее от задачи свободной конвекции. Обнаруженное Д.В. Любимовым ответвление семейств стационарных решений [3] для плоской фильтрационной конвекции Дарси было объяснено В.И. Юдовичем на основе теории косимметрии [4]. Исследования однопараметрических семейств стационарных режимов плоской задачи Дарси для прямоугольников были выполнены на основе сохраняющих косимметрию методов Галёркина [5] и конечных-разностных схем второго порядка [6], обеспечивающих сохранение косимметрии для дискретных аналогов.

В настоящей работе развивается компактная разностная схема, позволяющая повысить порядок точности и обеспечить сохранение косимметрии. Компактные схемы записываются на шаблонах, не существенно отличающихся от традиционных для, но имеют более высокий порядок точности. Для уравнений параболического и гиперболического типа были развиты различные варианты эффективных компактных схем [7]–[9]. Вопрос о применении компактных схем для задачи фильтрационной конвекции, насколько известно авторам, не рассматривался [1].

1. Уравнения плоской задачи конвекции Дарси

Рассматривается пористый контейнер $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, насыщенный жидкостью. Осуществляется подогрев снизу, на боковых границах поддерживается линейный профиль распределения температуры. Для описания движения используются уравнения на основе закона Дарси [2]

$$\dot{\theta} = \Delta\theta + \lambda\psi_x + J(\psi, \theta) \tag{1}$$

$$\Delta \psi - \theta_x = 0, \quad J(\psi, \theta) = \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x$$
 (2)

с граничными условиями

$$\psi|_{\partial\Omega} = \theta|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

где $\theta(x,z,t)$ — отклонение температуры от равновесного линейного профиля на границе, λ — фильтрационное число Рэеля.

Для построения схемы более высокого порядка вводятся потоки тепла $q_1=- heta_x$ и $q_2 = -\theta_z$ и уравнение (1) перепишется в виде

$$-(q_1)_x - (q_2)_z + \lambda \psi_x + J(\psi, \theta) = \dot{\theta}.$$
 (4)

«Таврический вестник информатики и математики», № 4 (61)' 2023

Для решения нестационарной задачи необходимо задать начальные условия только для девиации температуры $\theta(x, z, 0) = \theta_0$. Распределение функции тока при t = 0 находится из задачи (2).

Косимметрией системы является функция $L = (\psi, -\theta)$.

Для определения критических чисел Рэлея формулируется линеаризованная стационарная задача с граничными условиями Дирихле

$$\Delta \psi - \theta_x = 0, \tag{5}$$

$$\Delta\theta + \lambda\psi_x = 0. \tag{6}$$

В работе [4] доказано, что существует бесконечная последовательность положительных характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, ...$, причем все они не менее, чем двукратны. В случае прямоугольника критические числа Рэлея даются формулой

$$\lambda_{nm} = 4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), \quad n, m = 1, 2, \dots$$
 (7)

2. Метод конечных разностей

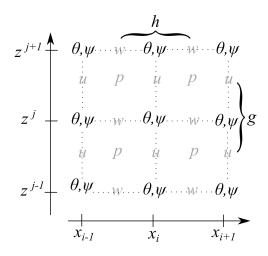
Для решения задачи проводится дискретизация на основе метода конечных разностей. По каждой из пространственных переменных вводятся равномерные сетки $\overline{\omega}_h = \{x_i = hi, i = 0, 1, ..., n+1\}$ с шагом $h = \frac{a}{n+1}$ и $\overline{\omega}_g = \{z_j = gj, j = 0, 1, ..., m+1\}$ с шагом $g = \frac{b}{m+1}$. Далее в работе верхний индекс используется для обозначения номеров узлов по z, а нижний — по x, вводятся также смещенные сетки, в узлах которых находятся значения скоростей и потоков тепла:

$$\omega_u = \left\{ u_i^{j+1/2}, \quad i = 0, 1, \dots n+1, \quad j = 0, 1, \dots, m \right\}$$

$$\omega_w = \left\{ u_{i+1/2}^j, \quad i = 0, 1, \dots n, \quad j = 0, 1, \dots, m+1 \right\}$$

$$\omega_\theta = \left\{ u_i^j, \quad i = 0, 1, \dots n+1, \quad j = 0, 1, \dots, m+1 \right\}$$

Схематичное расположение узлов в области показано на рис. 1, где представлены узлы для горизонтальной u и вертикальной w скоростей, которые связаны с функцией тока соотношениями $u=\psi_z, \ w=-\psi_x$. В этих же узлах определяются потоки температуры q_1 и q_2 .



Puc. 1. Дискретизация исходной области

Для конечно-разностной построения схемы воспользуемся интегроинтерполяционным Интегрируем (6)методом. прямоугольни-Ke $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [z^{j-1/2}, z^{j+1/2}].$

$$\int_{z^{j-1/2}}^{z^{j+1/2}} dz \left(-q_1 + \lambda \psi \right) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \left(-q_2 \right) \Big|_{z^{j-1/2}}^{z^{j+1/2}} = 0.$$
 (8)

Для второго интеграла в (8) применим формулу Симпсона

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \left(-q_2\right) \Big|_{z^{j-1/2}}^{z^{j+1/2}} \approx -\frac{h}{6} \left[(q_2)_{i-1/2}^{j+1/2} + 4(q_2)_i^{j+1/2} + (q_2)_{i+1/2}^{j+1/2} - (q_2)_{i-1/2}^{j-1/2} - 4(q_2)_i^{j-1/2} - (q_2)_{i+1/2}^{j-1/2} \right].$$

Заменив

$$(q_2)_{i\pm1/2}^{j\pm1/2} \approx \frac{(q_2)_i^{j\pm1/2} + (q_2)_{i\pm1}^{j\pm1/2}}{2}$$

и выразив q_2 через температуру θ , имеем

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \left(-q_2\right) \Big|_{z^{j+1/2}}^{z^{j+1/2}} \approx \frac{h}{12g} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & -20 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \theta_{i-1}^{j+1} & \theta_i^{j+1} & \theta_{i+1}^{j+1} \\ \theta_{i-1}^{j} & \theta_i^{j} & \theta_{i+1}^{j} \\ \theta_{i-1}^{j-1} & \theta_i^{j-1} & \theta_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix}.$$

где ⊙ — матричный оператор свёртки.

Аналогично выводим для первого интеграла в (8)

$$\int_{z^{j-1/2}}^{z^{j+1/2}} dz \left(-q_1 + \lambda \psi\right) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \approx \frac{g}{12h} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \theta_{i-1}^{j+1} & \theta_i^{j+1} & \theta_{i+1}^{j+1} \\ \theta_{i-1}^{j} & \theta_i^{j} & \theta_{i+1}^{j} \\ \theta_{i-1}^{j-1} & \theta_i^{j-1} & \theta_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix} +$$

«Таврический вестник информатики и математики», № 4 (61)' 2023

$$+\frac{\lambda g}{24} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{j+1} & \psi_{i}^{j+1} & \psi_{i+1}^{j+1} \\ \psi_{i-1}^{j} & \psi_{i}^{j} & \psi_{i+1}^{j} \\ \psi_{i-1}^{j-1} & \psi_{i}^{j-1} & \psi_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для уравнения (6) построен дискретный аналог на девятиточечном шаблоне

$$0 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{g^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & -20 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \odot \begin{bmatrix} \theta_{i-1}^{j+1} & \theta_{i}^{j+1} & \theta_{i+1}^{j+1} \\ \theta_{i-1}^{j} & \theta_{i}^{j} & \theta_{i+1}^{j} \\ \theta_{i-1}^{j-1} & \theta_{i}^{j-1} & \theta_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{24h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{j+1} & \psi_{i}^{j+1} & \psi_{i+1}^{j+1} \\ \psi_{i-1}^{j} & \psi_{i}^{j} & \psi_{i+1}^{j} \\ \psi_{i-1}^{j-1} & \psi_{i}^{j-1} & \psi_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix}.$$

$$(9)$$

Аналогично получается дискретный аналог уравнения (5)

$$0 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{g^2} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ -2 & -20 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & -20 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \odot \begin{bmatrix} \psi_{i-1}^{j+1} & \psi_{i}^{j+1} & \psi_{i+1}^{j+1} \\ \psi_{i-1}^{j} & \psi_{i}^{j} & \psi_{i+1}^{j} \\ \psi_{i-1}^{j-1} & \psi_{i}^{j-1} & \psi_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \theta_{i-1}^{j+1} & \theta_{i}^{j+1} & \theta_{i+1}^{j+1} \\ \theta_{i-1}^{j} & \theta_{i}^{j} & \theta_{i+1}^{j} \\ \theta_{i-1}^{j-1} & \theta_{i}^{j-1} & \theta_{i+1}^{j-1} \end{bmatrix}.$$

$$(10)$$

3. Повышение порядка аппроксимации

Разностный аналог оператора Лапласа на девятиточечном шаблоне можно записать в виде

$$\Delta^{\alpha,\beta} f_i^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 1 - 2\alpha & -2 + 4\alpha & 1 - 2\alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \end{bmatrix} + \frac{1}{g^2} \begin{bmatrix} \beta & 1 - 2\beta & \beta \\ -2\beta & -2 + 4\beta & -2\beta \\ \beta & 1 - 2\beta & \beta \end{bmatrix} \right) \odot F, \quad (11)$$

где F — матрица 3×3 . Аналогично для первой производной имеем

$$\delta_x^{\gamma} f_i^j \approx \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 2\gamma - 1 & 0 & 1 - 2\gamma \\ -\gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix} \odot F. \tag{12}$$

В уравнение (9) с неопределенными коэффициентами α, β, γ подставим точное решение θ, ψ и разложим полученное выражение в ряд Тейлора относительно точки (x, z).

$$\theta_{x,x} + \theta_{z,z} + \lambda \psi_x = \Phi(h,g),$$

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

где невязка выражается следующим образом

$$\Phi(h,g) = \frac{h^2}{12} \theta_{xxxx} + \beta h^2 \theta_{xxzz} + \frac{h^2}{6} \lambda \psi_{xxx} + \alpha g^2 \theta_{xxzz} + \frac{g^2}{12} \theta_{zzzz} + \lambda \gamma g^2 \psi_{xzz} + \frac{h^2 g^2}{6} \lambda \gamma \psi_{xxxzz} + \frac{h^2 g^2}{12} \alpha \theta_{xxxxzz} + \frac{h^2 g^2}{12} \beta \theta_{xxzzzz} + O(h^4) + O(g^4).$$

После дифференцирования уравнения (6) дважды по x и по z имеем

$$\psi_{xxx} = -\frac{1}{\lambda} \left(\theta_{xxxx} + \theta_{xxzz} \right), \quad \psi_{xzz} = -\frac{1}{\lambda} \left(\theta_{xxzz} + \theta_{zzzz} \right), \quad \psi_{xxxzz} = -\frac{1}{\lambda} \left(\theta_{xxxxz} + \theta_{xxzzzz} \right).$$

Исключив с помощью данных формул производные от переменной ψ и сгруппировав члены при одинаковых степенях шагов h и g, запишем выражение для невязки в виде

$$\Phi(x,z) = Ah^2 + Bg^2 + Ch^2g^2 + O(h^4) + O(g^4),$$

$$A = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right)\theta_{xxxx} + \left(\beta - \frac{1}{6}\right)\theta_{xxzz},$$

$$B = (\alpha - \gamma)\theta_{xxzz} + \left(\frac{1}{12} - \gamma\right)\theta_{zzzz},$$

$$C = \left(\frac{\alpha}{12} - \frac{\gamma}{6}\right)\theta_{xxxzz} + \left(\frac{\beta}{12} - \frac{\gamma}{6}\right)\theta_{xxzzzz}.$$
(13)

При $\alpha = \beta = \gamma = 1/12$, получается схема (9), а при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ — схема второго порядка [6].

4. Вычислительный эксперимент

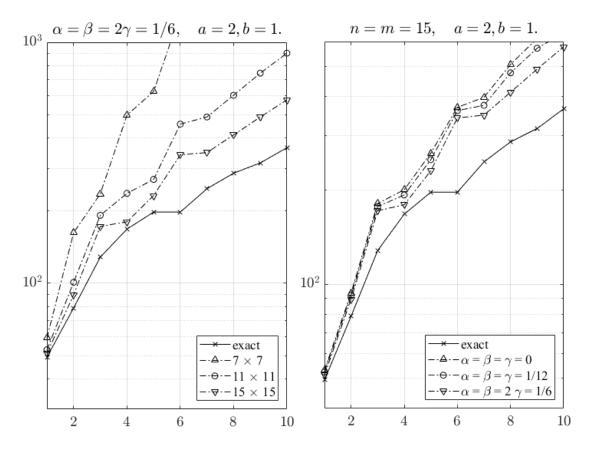
Задача вычисления критических чисел Рэлея λ , минимальное из которых отвечает возникновению стационарных колебательных режимов, сводится к системе разностных уравнений, которые записывается в виде

$$A\Psi - B\Theta = 0$$
, $A\Theta + \lambda B\Psi = 0$,

где A, B — матричные операторы Лапласа и дифференцирования по x, построенные на основе конечно-разностных операторов (11)–(12), Ψ, Θ — векторы узловых значений функции тока и температуры. Выразив $\Psi = A^{-1} \cdot B\Theta$, получим спектральную задачу

$$0 = A\Theta + \lambda B \cdot A^{-1} \cdot B\Theta.$$

В вычислительном эксперименте параметры α , β , γ выбирались таким образом, чтобы сократить число слагаемых в (13). Наибольшее сокращение главных членов невязки можно добиться при $\alpha = \beta = 2\gamma = 1/6$. Расчеты проводились на сетках $n \times m$, где n — число разбиений по оси x, m — по оси z.

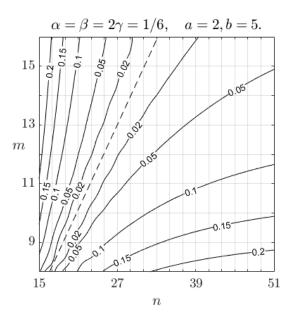


Puc. 2. Расчет первых десяти критических чисел Рэлея для различных сеток (слева) и схем (справа), точное решение (крестик).

На рис. 2 (слева) приведены результаты вычисления первых десяти критических чисел Рэлея для $\alpha=\beta=2\gamma=1/6$. Видно, что при увеличении числа узлов сходимость к точному решению наблюдается на достаточно грубой сетке. Из рис. 2 (справа) видно, что для одинаковых сеток схема (7) позволяет достичь большей точности, чем схемы второго порядка точности ($\alpha=\beta=\gamma=0$) и полученная интегроинтерполяционным методом.

На рис. 3 представлены результаты расчета первого критического числа Рэлея λ_{11} на различных сетках. Из графика относительной погрешности следуют два вывода: 1) точность результата вычислений на грубой сетке сильнее зависит от m, чем от n (для схемы второго порядка это было отмечено в [6]); 2) существует оптимальное отношение шагов $g/h=\kappa$, при котором достигается наиболее высокая точность при фиксированном числе узлов сетки.

В таблице 1 приведены значения λ_{11} , рассчитанные для близких к оптимальным отношениях шагов. Так, для прямоугольника с a=2, b=5 при $g/h\approx 5.192$ первое

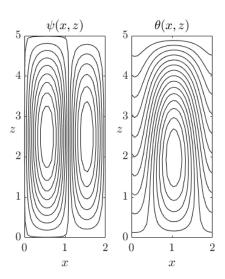


Puc. 3. Относительная погрешность вычисления λ_{11} на разных сетках; $\alpha = \beta = 2\gamma = 1/6; \ a = 2, b = 5.$

 $\it Taблица 1. \,$ Вычисление λ_{11} при $\alpha=\beta=2\gamma=1/6$ в области a=2,b=5на сетках с различным отношением шагов $\kappa = g/h$. $\lambda_{11}^{\rm exact} = 49.348;$ $\alpha = \beta = 2\gamma = 1/6; a = 2, b = 5.$

| $n \times m$ | $\lambda_{11}^{ m calc}$ | Отн. погр. $\lambda_{11}(\%)$ | κ |
|----------------|--------------------------|-------------------------------|----------|
| 19×7 | 49.6205 | 0.5521 | 1.357 |
| 21×7 | 49.3857 | 0.0763 | 1.5 |
| 23×7 | 49.2107 | 0.2782 | 1.643 |
| 25×9 | 49.4760 | 0.2594 | 1.388 |
| 27×9 | 49.3706 | 0.0457 | 1.5 |
| 29×9 | 49.2865 | 0.1247 | 1.611 |
| 31×11 | 49.4192 | 0.1443 | 1.409 |
| 33×11 | 49.3631 | 0.0305 | 1.5 |
| 35×11 | 49.3163 | 0.0643 | 1.591 |

критическое значение получается с наименьшей погрешностью. На рис. 4 представлены функции тока и распределение температуры, отвечающие λ_{11} . Эти результаты аналогичны характерным течениям, возникающим после потери устойчивости механического равновесия, см. [5, 6].



Puc. 4. Функция тока ψ и распределение температуры θ , соответствующие возникновению конвекции при переходе через λ_{11} .

Заключение

Для численного исследования фильтрационной конвекции Дарси предложена конечно-разностная схема на девятиточечном шаблоне, сохраняющая косимметрию исходной задачи. Выбором дополнительных параметров дискретных аналогов операторов Лапласа и первой производной получено повышение порядка аппроксимации уравнений по вертикальной координате. Это позволяет улучшить точность, проводя расчеты с более детальной сеткой по горизонтальной координате. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению спектральной задачи для прямоугольников, проведено сравнение со схемой на пятиточечном шаблоне, определены оптимальные соотношения шагов сетки.

Благодарности

Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке $PH\Phi$, грант № 23-21-00221.

Список литературы

- 1. NIELD D.A. and BEJAN A. (2006) Convection in Porous Media. Third Edition. New York: Springer.
- 2. Гершуни, Г. З., Жуховицкий, Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.-392 с.

"Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics", 2023, 4

- GERSHUNI, G. Z. and ZHUKHOVITSKY, E. M. (1972) Convective stability of an incompressible fluid. Moscow: Nauka.
- 3. Любимов, Д. В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная математика и техническая физика. 1975. № 2. С. 131–137. LYUBIMOV, D. V. (1975) Convective motions in a porous medium heated from below. Journal of applied mechanics and technical physics. vol. 16 (2). Pp. 257–261.
- 4. Юдович, В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
 - YUDOVICH, V. I. (1991) Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. vol. 49. Pp. 540–545.
- 5. Говорухин, В. Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче о плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1999. \mathbb{N} 5. С. 53–62. GOVORUKHIN, V. N. (1999) Analysis of families of secondary steady-state regimes in the problem of plane flow through a porous medium in a rectangular vessel. *Fluid Dynamics*. vol. 34 (5). Pp. 652–659.
- KARASOZEN, B. and TSYBULIN, V. G. (1999) Finite-difference approximations and cosymmetry conservation in filtration convection problem. *Physics Letters A.* vol. 262. Pp. 321–329.
- 7. Толстых, А. И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с. TOLSTYKH, A. I. (2015) Compact and high-precision multi-operator approximations
 - TOLSTYKH, A. I. (2015) Compact and high-precision multi-operator approximations for partial differential equations. Moscow: Nauka.
- 8. Матус, П. П., Утебаев, Б. Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Математическое моделирование. 2021. Т. 33, N = 4. С. 60–78.
 - MATUS, P. P. and Utebaev, B. D. (2021) Compact and monotone difference schemes for parabolic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*. vol. 13 (6). Pp. 1038–1048.

- 9. Рогов, Б. В., Брагин, М. Д. Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 4. С. 625–643.
 - BRAGIN, M. D., ROGOV, B. V. (2021) Bicompact schemes for the multidimensional convection-diffusion equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. vol. 61 (4). Pp. 607–624.

Кристалинский В. Р. Об анализе сетевых моделей со случайными продолжительностями работ с помощью системы Wolfram Mathematica / В. Р. Кристалинский // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — N = 4 (61). — С. 7 - 20.

УДК: 519.688

В статье описывается подход к вычислению вероятностных параметров сетевых моделей с использованием системы Wolfram Mathematica. Показано, что данный подход позволяет эффективно исследовать сетевые модели и может использоваться как на практике, так и в учебном процессе вузов.

Ключевые слова: сетевая модель, система Wolfram Mathematica.

Лукьяненко В. А. Приближенные решения уравнений, моделирующих нелинейные процессы / В. А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 4 (61). — С. 21–55.

УДК: 517.957+517.928.7

В рамках направления прикладной нелинейной динамики рассмотрены дифференциальные уравнения в частных производных с оператором дифференцирования по времени, оператором преобразования, оператором Лапласа и дробным лапласианом, нашедшие применение в различных областях физики: задачи нелинейной оптики (световой фазовой модуляции и оптического резонатора), плазмоники и теории так называемого «быстрого» горения. В работе используются основные методы исследования квазилинейных параболических уравнений (метод Крылова-Боголюбова-Митропольского-Самойленко (КБМС), метод Галеркина, асимптотическое разложение решения по собственным функциям, метод усреднения, метод эллиптических функций и операторный метод. Приведен алгоритм решения нелинейных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки на примере уравнения Урысона, возникающего в задачах прикладной нелинейной динамики при построении решений по данным косвенных измерений.

Ключевые слова: прикладная нелинейная динамика, метод центральных многообразий, метод Галеркина, бифуркационный анализ, асимптотические методы.

Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Применение системы компьютерной математики в задачах прикладной нелинейной динамики / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. — $2023. - \mathbb{N} \cdot 4 \cdot (61). - \mathrm{C}. \cdot 56 - 80.$

УДК: 517.957

В работе рассмотрено применение системы компьютерной математики для исследования нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа с преобразованием пространственных переменных, моделирующего эксперименты в оптических системах с нелинейностями керровского типа, в которых преобразование поля в двумерном контуре обратной связи приводит к возникновению пространственно-неоднородных, вращающихся и других структур. С помощью пакета Wolfram Mathematica, используя основные асимптотические методы прикладной нелинейной динамики, осуществлен локальный анализ рождающихся структур и описаны сценарии их развития. Пполучено численное решение и его визуализация в зависимости от значенийтаких параметров, как малый параметр диффузии, интенсивности и преобразования координат.

Ключевые слова: прикладная нелинейная динамика, функционально-дифференциальные уравнения, бифуркация, стационарное решение, Wolfram Mathematica.

Рудницкий О. И. О базисных инвариантах импримитивных групп $G(m,p,n), B_n^m, D_n^m$ / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 4 (61). — С. 81-91.

УДК: 514.7

В n-мерном унитарном пространстве изучаются инварианты импримитивных групп $G(m,p,n), B_n{}^m, D_n{}^m$. Дан обзор известных подходов к построению в явном виде базисных инвариантов указанных групп, а также предложен новый метод с использованием дифференциального оператора.

Ключевые слова: унитарное пространство, отражение, инвариант, базисный инвариант, комплексный многогранник.

Селищев А. А., Цибулин В. Г. Разностная схема повышенного порядка для анализа фильтрационной конвекции / А. А. Селищев, В. Г. Цибулин // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. - N 4(61). - C. 92-102.

УДК: 519.634

Рассматривается задача о конвекции теплопроводной жидкости в прямоугольной пористой области, подогреваемой снизу. Для решения уравнений относительно функции тока и температуры (модель Дарси) построена компактная конечно-разностная схема на девятиточечном шаблоне. Показано, что выбором параметров аппроксимации оператора Лапласа и первых производных можно обеспечить повышенный порядок точности по пространственным переменным за счет сокращения слагаемых в разложении Тейлора. Численный эксперимент продемонстрировал, что при оптимальном выборе дискретизации области получаются более точные решения, чем при использовании пятиточечного шаблона. Представлены результаты расчета спектральной задачи и вычисления критических чисел Рэлея, отвечающих возникновению семейства стационарных конвективных движений.

Ключевые слова: конвекция, пористая среда, модель Дарси, компактная схема, метод конечных разностей.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Корнута Анжелика

Александровна

старший преподаватель кафедры математического анализа Крымского федерального университета,

г. Симферополь, Российская Федерация.

e-mail: $korn_57@mail.ru$

Кристалинский

Владимир Романович

к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики и информатики, Смоленский государственный универ-

ситет, г. Смоленск, Российская Федерация.

 $e ext{-}mail: kristvr@rambler.ru$

Лукьяненко Владимир

Андреевич

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Крымского федерального университета, г. Симферо-

поль, Российская Федерация.

 $e\text{-}mail:\ art\text{-}inf@yandex.ru$

Рудницкий Олег

Иванович

к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь,

Российская Федерация. e-mail: oirud58@gmail.com

 $\it Ceлищев \ Aлександр$

Aндpеевич

магистрант ИММиКН им. И.И. Воровича Южного Федерального Университета, г. Ростов-на-Дону, Рос-

сийская Федерация.
e-mail: selishev@sfedu.ru

Цибулин Вячеслав

Георгиевич

д. ф.-м. н., заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики ИММиКН им. И. И. Воровича Южного Федерального Университета, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация.

e-mail: vqcibulin@sfedu.ru