

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 3 (60) ' 2023

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:

- 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
- 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
- 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
- 1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
- 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
- 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2023, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВНИЙ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007
Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): tvim-article@mail.ru
сайт журнала: www.tvim.su

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Системный анализ, управление и обработка информации
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика и математическое моделирование

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., EngD	Leonid MESTETSKIY, Prof., EngD
Natalia APATOVA, Prof., EdD	Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math.
Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math.	Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Yakov YERUSALIMSKY, Prof., EngD	Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Fedor STONYAKIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math.	Anton UTKIN, Senior Researcher, EngD
Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math.	Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., EngD
Vladislav KRAVCHENKO, Prof., EngD	Vladimir CHILIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., EngD,	

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.su

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief

+7 978 837 82 77 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief

tvim-article@mail.ru — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

Аблаев С. С., Баран И. В. О методах зеркального спуска для некоторых типов задач композитной оптимизации с функциональными ограничениями	7
Анашкин О. В., Юсупова О. В. О вычислении первой ляпуновской величины периодической импульсной системы	19
Беспалов М. С. Краткий вывод алгоритма Кули–Тьюки	40
Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А. Структура решений нелинейных уравнений кольцевого резонатора	49
Моисеев Д. В., Шокин А. Г. Математическая модель оптимизации информационной логистики в стохастической постановке	67
Сергеев А. Э., Бушуева В. О. NICE-многочлены	83
Третьяков Д. В. J-самосопряженные дилатации общего вида: минимальность и изоморфизм	92
Рефераты	119
Список авторов номера	123

TABLE OF CONTENTS

Ablaev S. S., Baran I. V. On mirror descent methods for some types of composite optimization problems with functional constraints.....	7
Anashkin O. V., Yusupova O. V. On the calculation of the first Lyapunov quantity of a periodic impulsive system.....	19
Bespalov M. S. Brief derivation of the Cooley-Tukey algorithm.....	40
Lukianenko V. A., Khazova Yu. A. Structure of solutions of the nonlinear equations in ring resonator.....	49
Moiseev D. V., Shokin A. G. Mathematical model of optimization of information logistics in stochastic statement.....	67
Sergeev A. E., Bushueva V. O. Nice-polynomials.....	83
Tretyakov D. V. J-selfadjoint dilations of common form: minimality and isomorphism.....	92
Abstracts.....	119
Authors.....	123

УДК: 519.85

MSC2010: 90C25, 90C06, 49J52

О МЕТОДАХ ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ КОМПОЗИТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© С. С. Аблаев¹, И. В. Баран²

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: ¹seydamet.ablaev@yandex.ru, ²matemain@mail.ru

ON MIRROR DESCENT METHODS FOR SOME TYPES OF COMPOSITE OPTIMIZATION
PROBLEMS WITH FUNCTIONAL CONSTRAINTS.

Ablaev S. S., Baran I. V.

Abstract. The paper is devoted to some methods of mirror descent and theoretical estimates of their rate of convergence for problems of convex composite optimization, where the functionals f and g are convex, and r and ν have a simple structure.

On the class of Lipschitz functionals, we propose a modified mirror descent algorithm with adaptively chosen steps and a stopping criterion. The mirror descent operator is defined as standart. In this case, both problems with Lipschitz functionalities and problems with functionalities that satisfy substantially more general Lipschitz «relative Lipschitz property» to some not necessarily strongly convex prox function, which was recently proposed by Y. E. Nesterov and H. Lu.

For example, this condition is applicable to such applied problems as Support Vector Machine, Truss Topology Design, and to the problem of finding a common point for a system of ellipsoids.

For a more general class of relatively Lipschitz problems, a method with constant steps but with an adaptive stopping criterion is proposed. This made it possible to obtain estimates for the rate of convergence of the mirror descent method that are optimal for the class of problems with relatively Lipschitz objective functionals and constraint functionals.

In paper was also considered a generalization of the last result to the case of the assumption that δ -subgradients of functionals are available instead of ordinary subgradients, and an estimate for the corresponding mirror descent algorithm is obtained.

Keywords: *Lipschitz functional, subgradient, composite optimization problems, mirror descent methods*

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена некоторым методам зеркального спуска для задач выпуклой композитной оптимизации вида

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) \rightarrow \min, \quad g(x) = \xi(x) + \nu(x) \leq 0, \quad (1)$$

где $f, g, \varphi, \xi, r, \nu : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, функционалы f и g выпуклы, причем r и ν имеют простую структуру (то есть операция проектирования на множество уровня в произвольной точке менее затратна по сравнению с нахождением субградиента в этой точке). Известно, что задачи композитной оптимизации возникают во многих прикладных задачах [1], в том числе при моделировании транспортных потоков.

Работа посвящена развитию исследований [5], [2]-[6] (особенно развитию замечания 4 из [5]). При этом аналогично [5], [6] рассматриваются методы для задач с относительно липшицевыми функционалами. Относительная липшицевость введена недавно в [7], [8]. Напомним это понятие. Для этого нам потребуется ввести вспомогательную прокс-функцию, порождающую расстояние (*функция, порождающая расстояние, вводится для оценки качества решения*).

Пусть $d : Q \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная выпуклая и непрерывно дифференцируемая функция. Тогда далее при анализе алгоритмов для оценки расстояния от текущей точки до решения можно использовать *дивергенцию Брэгмана* вида

$$V_d(y, x) = d(y) - d(x) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in Q, \quad (2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^n .

Условие относительной липшицевости функционала связано с релаксацией условия Липшица, которая предполагает замену ограниченности нормы субградиента $\|\nabla f(x)\|_* \leq M_f$ так называемой *относительной липшицевостью (непрерывностью)* [7]:

$$\|\nabla f(x)\|_* \leq \frac{M_f \sqrt{2V_d(y, x)}}{\|y - x\|} \quad \forall x, y \in Q, y \neq x. \quad (3)$$

Как отмечено в [7], при подходящем выборе прокс-функции такое условие покрывает существенно больший класс задач по сравнению с классом задач с липшицевой целевой функцией.

Например, такому условию удовлетворяют негладкие и, вообще говоря, нелипшицевы функционалы, равные максимуму конечного набора функционалов с липшицевым градиентом. Такие функционалы возникают в таких прикладных задачах, как

Truss Topology Design, в задаче нахождения общей точки нескольких эллипсоидов и других.

Отметим, что мы вслед за [7] рассматриваем следующий аналог условия (3):

$$\langle \nabla f(x), x - y \rangle \leq M_f \sqrt{2V_d(y, x)} \quad \forall x, y \in Q.$$

Напомним важное вспомогательное понятие из [5].

Определение 1. Пусть $\delta > 0$. Будем говорить, что f и g допускают (δ, ϕ, V) -модель в точке $y \in Q$, если

$$f(x) + \psi_f(y, x) \leq f(y), \quad -\psi_f(y, x) \leq \sqrt{2V_d(y, x)} + \delta \quad (4)$$

$$g(x) + \psi_g(y, x) \leq g(y), \quad -\psi_g(y, x) \leq \sqrt{2V_d(y, x)} + \delta, \quad (5)$$

где $\psi_f(y, x)$ и $\psi_g(y, x)$ — выпуклые функционалы по y и $\psi_f(x, x) = \psi_g(x, x) = 0$ для любого $x \in Q$.

Мы далее будем рассматривать случай $\delta = 0$ и для постановки задачи (1) использовать функции-модели следующего типа:

$$\begin{aligned} \psi_f(y, x) &= \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + r(y) - r(x), \\ \psi_g(y, x) &= \langle \nabla \xi(x), y - x \rangle + \nu(y) - \nu(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Всюду далее через x^* будем обозначать точное решение поставленной задачи. Пусть $h > 0$. Для задач, допускающих в произвольной точке (δ, ϕ, V) -модель, оператор проксимального отображения (шаг зеркального спуска) можно определить следующим образом [5]:

$$Mirr_h(x, \psi) = \arg \min_{y \in Q} \left\{ \psi(y, x) + \frac{1}{h} V_d(y, x) \right\}.$$

Перечислим ключевые результаты настоящей работы.

В первом разделе рассмотрен класс задач композитной оптимизации (1) с липшицевыми функционалами. Для этого случая предложен метод с адаптивно подобранными шагами и критерием останковки, приведена оценка скорости сходимости метода.

Во втором разделе рассмотрен уже более общий класс задач с относительно липшицевыми функционалами. Для такого класса описан метод зеркального спуска с постоянными шагами, но с адаптивным критерием останковки. Приведены доказанные авторами оценки скорости сходимости метода [5], [6] (при $\delta = 0$), оптимальные на классе задач с относительно липшицевыми целевыми функционалами и функционалами ограничений.

В третьем разделе рассмотрено обобщение результата пункта 2 на предположение о доступности на итерациях зеркального спуска вместо субградиентов функционалов их δ -субградиентов (см., например главу 5 из [10]) и выведена оценка качества выдаваемого таким алгоритмом решения.

1. СЛУЧАЙ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ. АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА

Рассмотрим сначала ситуацию, когда функционалы φ и ξ удовлетворяют обычному условию Липшица и мы используем их субградиенты, ограниченные по норме. В этом случае, если выбрать 1-сильно выпуклую относительно рассматриваемой нормы прокс-функцию d , то можно адаптивно выбирать шаги по аналогии с [2].

Приведем вспомогательную лемму для задач с функционалами, допускающими (δ, φ, V) -модель [5] при $\delta = 0$.

Лемма 1. Пусть функционал f M_f -липшицев, а простой функционал g M_g -липшицев и $x^+ = \text{Mirr}_h(x, \psi_f)$. Тогда $\forall h > 0$ верны неравенства:

$$h(f(x) - f(y)) \leq -h\psi_f(y, x) \leq \frac{h^2}{2} (\|\nabla\varphi(x)\|_* + M_r)^2 + V_d(y, x) - V_d(y, x^+) \quad \forall y \in Q.$$

Для задачи (1) в случае липшицевых функционалов рассмотрим следующий алгоритм. Если $g(x_k) \leq \varepsilon$, то шаг называется продуктивным (шаг по функции), в ином случае, $g(x^k) > \varepsilon$, шаг называется непродуктивным (шаг по ограничению). Через I и J обозначим множество индексов продуктивных и непродуктивных шагов соответственно.

Для алгоритма 1 справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число и выполнен критерий остановки алгоритма 1, причём функционал f M_f -липшицев, а g — M_g -липшицев. Тогда \hat{x} есть ε -решение задачи (1):

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon, \quad g(\hat{x}) \leq \varepsilon.$$

При этом предложенный алгоритм работает не более $N = \left\lceil \frac{2 \max\{M_f^2, M_g^2\} \theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$ итераций.

Доказательство. По лемме 1 имеем $\forall x \in Q$

$$h_k^f (f(x^k) - f(x)) \leq \frac{(h_k^f)^2}{2} (\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2 + V_d(x, x^k) - V_d(x, x^{k+1}), \quad k \in I$$

$$h_k^g (g(x^k) - g(x)) \leq \frac{(h_k^g)^2}{2} (\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2 + V_d(x, x^k) - V_d(x, x^{k+1}), \quad k \in J.$$

Алгоритм 1 Зеркальный спуск для задач композитной оптимизации, липшицевы функционалы

Require: $\varepsilon > 0, M_r > 0, M_\nu > 0, \theta_0 : d(x^*) \leq \theta_0^2$.

- 1: $x^0 = \arg \min_{x \in Q} d(x)$.
- 2: $I =: \emptyset$ и $J =: \emptyset$
- 3: $N \leftarrow 0$
- 4: **repeat**
- 5: **if** $g(x^N) \leq \varepsilon$ **then**
- 6: $h_N = \frac{\varepsilon}{(\|\nabla\varphi(x^N)\|_* + M_r)^2}, \quad x^{N+1} = \text{Mirr}_{h_N}(x, \psi_f)$
- 7: $N \rightarrow I$
- 8: **else**
- 9: $h_N = \frac{\varepsilon}{(\|\nabla\xi(x^N)\|_* + M_\nu)^2}, \quad x^{N+1} = \text{Mirr}_{h_N}(x, \psi_g)$
- 10: $N \rightarrow J$
- 11: $N \leftarrow N + 1$
- 12: **until** $\frac{2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \leq \sum_{k \in I} \frac{1}{(\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2} + \sum_{k \in J} \frac{1}{(\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2}$.

Ensure: $\hat{x} := \frac{\sum_{k \in I} x^k h_k}{\sum_{k \in I} h_k}$.

После суммирования последних неравенств, получим при $x = x_*$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I} h_k^f (f(x^k) - f(x_*)) + \sum_{k \in J} h_k^g (g(x^k) - g(x_*)) \leq \\ \leq & \sum_{k \in I} \frac{(h_k^f)^2 (\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2}{2} + \sum_{k \in J} \frac{(h_k^g)^2 (\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2}{2} + \sum_k (V_d(x_*, x^k) - V_d(x_*, x^{k+1})) \leq \\ & \leq \sum_{k \in I} \frac{(h_k^f)^2 (\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2}{2} + \sum_{k \in J} \frac{(h_k^g)^2 (\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2}{2} + \theta_0^2 \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_k h_k + \theta_0^2. \end{aligned}$$

На всяком непродуктивном шаге имеем $g(x^k) - g(x_*) > \varepsilon$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} h_k^f (f(x^k) - f(x_*)) & < \frac{\varepsilon}{2} \sum_k h_k + \theta_0^2 - \varepsilon \sum_{k \in J} h_k^g = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in I} h_k^f - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in J} h_k^g + \theta_0^2 = \\ & = \varepsilon \sum_{k \in I} h_k^f - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in I} h_k^f - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in J} h_k^g + \theta_0^2 \leq \varepsilon \sum_{k \in I} h_k^f, \end{aligned}$$

то есть необходимо выполнение неравенства

$$\theta_0^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in I} h_k^f + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in J} h_k^g = \frac{\varepsilon}{2} \sum_k h_k = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k \in I} \frac{1}{(\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k \in J} \frac{1}{(\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2}.$$

Поэтому критерий останковки имеет вид

$$\frac{2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \leq \sum_{k \in I} \frac{1}{(\|\nabla\varphi(x^k)\|_* + M_r)^2} + \sum_{k \in J} \frac{1}{(\|\nabla\xi(x^k)\|_* + M_\nu)^2},$$

который заведомо выполнится при

$$N \geq \frac{2 \max\{M_f^2, M_g^2\} \theta_0^2}{\varepsilon^2}.$$

□

2. СЛУЧАЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ. ЗЕРКАЛЬНЫЙ СПУСК С ПОСТОЯННЫМИ ШАГАМИ

В этом пункте рассматривается случай относительно липшицевых функционалов, поэтому сильная выпуклость прокс-функции уже не требуется. Алгоритм 2 и теорема 2 уже были анонсированы в [5] без доказательств (см. [5], Algorithm 3 и Remark 2.4). Здесь мы приводим их с полным обоснованием.

Пусть функционалы f и g удовлетворяют соотношениям:

$$f(x) + \psi_f(y, x) \leq f(y), \quad -\psi_f(y, x) \leq M_f \sqrt{2V_d(y, x)}, \quad (7)$$

$$g(x) + \psi_g(y, x) \leq g(y), \quad -\psi_g(y, x) \leq M_g \sqrt{2V_d(y, x)}. \quad (8)$$

Для случая относительно липшицевых функционалов мы рассмотрим аналог алгоритма 1.

Алгоритм 2 Зеркальный спуск для относительно липшицевых функционалов

Require: $\varepsilon > 0, M_f > 0, M_g > 0, \theta_0 : d(x^*) \leq \theta_0^2$.

- 1: $x^0 = \arg \min_{x \in Q} d(x)$.
 - 2: $I =: \emptyset$ и $J =: \emptyset$
 - 3: $N \leftarrow 0$
 - 4: **repeat**
 - 5: **if** $g(x^N) \leq \varepsilon$ **then**
 - 6: $h^f = \frac{\varepsilon}{M_f^2}, \quad x^{k+1} = \text{Mirr}_{h^f}(x^N, \psi_f),$
 - 7: $N \rightarrow I$
 - 8: **else**
 - 9: $h^g = \frac{\varepsilon}{M_g^2}, \quad x^{N+1} = \text{Mirr}_{h^g}(x^N, \psi_g),$
 - 10: $N \rightarrow J$
 - 11: $N \leftarrow N + 1$
 - 12: **until** $\frac{2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{|I|}{M_f^2} + \frac{|J|}{M_g^2}$.
- Ensure:** $\hat{x} := \frac{1}{|I|} \sum_{k \in I} x^k$.
-

Разница между алгоритмами 1 и 2 заключается в выборе шагов (постоянные) и критерия останова. Для этого алгоритма справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть f и g — это выпуклые функционалы, удовлетворяющие (7) и (8) при некоторых $M_f > 0$ и $M_g > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное положительное число. Предположим, что $\theta_0 > 0$ — известная константа, такая, что $d(x^*) \leq \theta_0^2$. Тогда после останова алгоритма 2 выполняются следующие неравенства:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad g(\hat{x}) \leq \varepsilon.$$

При этом необходимое число итераций алгоритма 2 не превышает

$$N = \left\lceil \frac{2M^2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil, \quad \text{где } M = \max\{M_f, M_g\}.$$

Доказательство. Имеют место неравенства

$$h_f(f(x^k) - f(y)) \leq \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + V_d(y, x^k) - V_d(y, x^{k+1}),$$

$$h_g(g(x^k) - g(y)) \leq \frac{M_g^2 h_g^2}{2} + V_d(y, x^k) - V_d(y, x^{k+1}).$$

После суммирования этих неравенств по k получим при $y = x_*$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I} h_f(f(x^k) - f(x_*)) + \sum_{k \in J} h_g(g(x^k) - g(x_*)) \leq \\ & \leq \sum_{k \in I} \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + \sum_{k \in J} \frac{M_g^2 h_g^2}{2} + \sum_k (V_d(x_*, x^k) - V_d(x_*, x^{k+1})) \leq \\ & \leq \sum_{k \in I} \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + \sum_{k \in J} \frac{M_g^2 h_g^2}{2} + \theta_0^2. \end{aligned}$$

На всяком непродуктивном шаге имеем $g(x^k) - g(x_*) > \varepsilon$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} h_f(f(x^k) - f(x_*)) & < \sum_{k \in I} \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + \sum_{k \in J} \frac{M_g^2 h_g^2}{2} + \theta_0^2 - \varepsilon \sum_{k \in J} h_g = \\ & = |I| \frac{\varepsilon^2}{2M_f^2} - |J| \frac{\varepsilon^2}{2M_g^2} + \theta_0^2 \leq \varepsilon \sum_{k \in I} h_f. \end{aligned}$$

Наконец, имеем

$$\theta_0^2 \leq |I| \frac{\varepsilon^2}{2M_f^2} + |J| \frac{\varepsilon^2}{2M_g^2},$$

откуда

$$\frac{2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{|I|}{M_f^2} + \frac{|J|}{M_g^2}.$$

□

3. ВАРИАНТ ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИПШИЦЕВЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НА ИТЕРАЦИЯХ δ -СУБГРАДИЕНТОВ ФУНКЦИОНАЛОВ

В работе [9] были рассмотрены некоторые варианты метода зеркального спуска на классе липшицевых выпуклых задач в предположении использования на итерациях δ -субградиентов функций [10] ($\delta > 0$) вместо точных значений субградиентов. В этом разделе мы рассмотрим зеркальный спуск уже для задач композитной оптимизации вида (1) с использованием δ -субградиентов для случая относительно липшицевых функционалов, допускающих (δ, ϕ, V) -модель при $\delta > 0$.

Пусть рассматриваются задачи композитной оптимизации вида:

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) \rightarrow \min,$$

$$g(x) = \xi(x) + \nu(x) \leq 0,$$

где r и ν — функционалы простой структуры. Для этого случая мы вводим такие обозначения

$$\psi_f(y, x) = \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + r(y) - r(x)$$

$$\psi_g(y, x) = \langle \nabla \xi(x), y - x \rangle + \nu(y) - \nu(x).$$

Покажем, какой вид метода зеркального спуска можно использовать для следующей ситуации. Допустим, что нам доступны не обычные субградиенты ∇f и ∇g , а δ -субградиенты $\nabla_\delta \varphi$ и $\nabla_\delta \xi$, то есть

$$r(y) \geq r(x) + \langle \nabla_\delta \varphi(x), y - x \rangle - \delta,$$

$$\nu(y) \geq \nu(x) + \langle \nabla_\delta \xi(x), y - x \rangle - \delta,$$

для любых $x, y \in Q$ при фиксированном $\delta > 0$.

Тогда естественно рассмотреть такие предположения на ψ_f и ψ_g в (4) и (5):

$$f(x) - f(y) - \delta \leq -\psi_f(y, x) \leq M_f \sqrt{2V_d(y, x)} + \delta, \quad (9)$$

$$g(x) - g(y) - \delta \leq -\psi_g(y, x) \leq M_g \sqrt{2V_d(y, x)} + \delta. \quad (10)$$

При указанных предположениях можно сформулировать следующий аналог базовой леммы 1 для зеркальных спусков.

Лемма 2. Пусть f — выпуклый функционал, удовлетворяющий (9), $h > 0$ и $x^+ = \text{Mirr}_h(x, \psi_f)$. Тогда

$$h(f(x) - f(y) - \delta) \leq -h\psi_f(y, x) \leq \frac{M_f^2 h^2}{2} + V_d(y, x) - V_d(y, x^+) + h\delta.$$

Доказательство. Имеем $\forall y \in Q$

$$h\psi_f(y, x) - h\psi_f(x^+, x) + \langle \nabla d(x^+) - \nabla d(x), y - x^+ \rangle \geq 0.$$

Отталкиваясь от этого неравенства и неравенства (9), возможно выписать следующие выкладки:

$$\begin{aligned} h(f(x) - f(y) - \delta) &\leq -h\psi_f(y, x) \leq -h\psi_f(x^+, x) + \langle \nabla d(x^+) - \nabla d(x), y - x^+ \rangle = \\ &= -h\psi_f(x^+, x) + V_d(y, x) - V_d(y, x^+) - V_d(x^+, x) \leq \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + V_d(y, x) - V_d(y, x^+) + h\delta. \end{aligned}$$

Наконец, получим

$$h(f(x) - f(y) - \delta) \leq -h\psi_f(y, x) \leq \frac{M_f^2 h_f^2}{2} + V_d(y, x) - V_d(y, x^+) + h\delta.$$

□

Скажем несколько слов о свойствах δ -субградиентов выпуклого функционала $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x [10]. Геометрически δ -субградиент соответствует гиперплоскостям в \mathbb{R}^{n+1} , разделяющим надграфик $f(x)$ и точку $(f(x) - \delta, x)$. В отличие от субградиента, δ -субградиент при $\delta > 0$ не определяется локальными свойствами $f(x)$. Правила вычисления δ -субградиентов могут оказаться сложнее, чем в случае обычных субградиентов. Однако необходимость в использовании δ -субградиентов возникает, например, в задачах следующего типа (см. [9] и цитированную там литературу).

Пусть

$$f(x) = \max_{y \in Q} \phi(x, y),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, Q — компактное множество, $\phi(x, y)$ непрерывна по y и выпукла по x . В частности, Q может состоять из конечного числа элементов. Очевидно, что $f(x)$ определена на \mathbb{R}^n и выпукла. Пусть \tilde{y} — произвольная точка из Q , такая, что $\phi(x, \tilde{y}) \geq f(x) - \delta$. Иначе говоря, \tilde{y} — произвольная точка, в которой приближенно (с точностью до δ) достигается максимум $\phi(x, y)$ по $y \in Q$. Тогда

$$\partial_x \phi(x, \tilde{y}) \subset \partial_\delta f(x).$$

Таким образом, чтобы найти один из δ -субградиентов $f(x)$, достаточно приближенно отыскать максимум по y и взять субградиент соответствующей функции ϕ . Вычисление же субградиента $f(x)$ требует точной максимизации ϕ по y .

Опишем аналог алгоритма 2 с использованием δ -субградиентов.

Алгоритм 3 Зеркальный спуск для относительно липшицевых функционалов с δ -субградиентами

Require: $\varepsilon > 0, \delta > 0, M_f > 0, M_g > 0, \theta_0 : d(x^*) \leq \theta_0^2$.

1: $x^0 = \arg \min_{x \in Q} d(x)$.
 2: $I =: \emptyset$ и $J =: \emptyset$
 3: $N \leftarrow 0$
 4: **repeat**
 5: **if** $g(x^N) \leq \varepsilon + 2\delta$ **then**
 6: $h^f = \frac{\varepsilon}{M_f^2}, \quad x^{k+1} = \text{Mirr}_{h^f}(x^N, \psi_f),$
 7: $N \rightarrow I$
 8: **else**
 9: $h^g = \frac{\varepsilon}{M_g^2}, \quad x^{N+1} = \text{Mirr}_{h^g}(x^N, \psi_g),$
 10: $N \rightarrow J$
 11: $N \leftarrow N + 1$
 12: **until** $\frac{2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{|I|}{M_f^2} + \frac{|J|}{M_g^2}$.
Ensure: $\hat{x} := \frac{1}{|I|} \sum_{k \in I} x^k$.

Из леммы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть f и g — выпуклые функционалы, удовлетворяющие (9) и (10) для некоторых $M_f > 0$ и $M_g > 0$. Пусть $\varepsilon > 0, \delta > 0$ — фиксированные положительные числа, $\theta_0 > 0$ — известная константа, такая, что $d(x^*) \leq \theta_0^2$. Тогда после остановки алгоритма 3 справедливы следующие неравенства:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon + 2\delta \quad \text{и} \quad g(\hat{x}) \leq \varepsilon + 2\delta.$$

При этом необходимое число итераций алгоритма 3 не превышает

$$N = \left\lceil \frac{2M^2\theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil, \quad \text{где } M = \max\{M_f, M_g\}.$$

Доказательство. Выводится из леммы 2 по аналогии с теоремой 2. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены методы зеркального спуска для задач композитной оптимизации вида $f(x) = \varphi(x) + r(x) \rightarrow \min, g(x) = \xi(x) + \nu(x) \leq 0$, где функционалы f и g выпуклы, а r и ν имеют простую структуру. При этом, исследования проводились в предположении о том, что функционалы f и g допускают (δ, ϕ, V) -модель

в произвольной точке $y \in Q$.

$$\psi_f(y, x) = \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + r(y) - r(x),$$

$$\psi_g(y, x) = \langle \nabla \xi(x), y - x \rangle + \nu(y) - \nu(x).$$

На классе липшицевых задач предложен метод с адаптивным подбором шагов и адаптивным критерием остановки. Для этого алгоритма получена теорема, описывающая его сложность и качество выдаваемого решения: ε -точность $f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon$, $g(\hat{x}) \leq \varepsilon$ достигается за $N = \left\lceil \frac{2 \max\{M_f^2, M_g^2\} \theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$ итераций.

Для существенно более общей ситуации относительно липшицевых задач исследован предложенный ранее в [5] вариант зеркального спуска с неадаптивными шагами, но с адаптивным правилом остановки. Доказана теорема, отображающая оценку этого алгоритма: для относительно липшицевых функционалов ε -точность $f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon$, $g(\hat{x}) \leq \varepsilon$ приближенного решения задачи (1) достигается за $N = \left\lceil \frac{2 \max\{M_f, M_g\}^2 \theta_0^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$ итераций алгоритма 2.

Рассмотрено обобщение последнего результата на случай предположения о доступности δ -субградиентов функционалов вместо обычных субградиентов.

Сформулирована и доказана базовая лемма зеркальных спусков в случае δ -субградиентов, и получена теорема, которая показывает влияние параметра δ на работу соответствующего алгоритма зеркального спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NESTEROV, Y. (2013) Gradient methods for minimizing composite functions. *Math. Program.* 140. Pp. 125-161.
2. BAYANDINA, A., DVURECHENSKY, P., GASNIKOV, A., STONYAKIN, F., TITOV, A. (2018) Mirror descent and convex optimization problems with non-smooth inequality constraints. In: *Giselsson, P., Rantzer, A. (eds.) Large-Scale and Distributed Optimization. LNM, Springer, Cham.* 2227. Pp. 181-213.
3. STONYAKIN, F., ALKOUSA, M., STEPANOV, A., TITOV, A. (2019) Adaptive mirror descent algorithms for convex and strongly convex optimization problems with functional constraints. *J. Appl. Ind. Math.* 13(3). Pp. 557-574.
4. STONYAKIN, F., STEPANOV, A., GASNIKOV, A., TITOV, A. (2020) Mirror descent for constrained optimization problems with large subgradient values of functional constraints. *Comput. Res. Model.* 12(2). Pp. 301-317.

5. TITOV, A., STONYAKIN, F., GASNIKOV, A., ALKOUSA, M., ABLAEV, S. (2020) Analogues of Switching Subgradient Schemes for Relatively Lipschitz-Continuous Convex Programming Problems. *MOTOR-2020: Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Communications in Computer and Information Science*. 1275. Pp. 133–149.
6. TITOV, A., STONYAKIN, F., GASNIKOV, A., ALKOUSA, M., ABLAEV, S. (2020) Analogues of Switching Subgradient Schemes for Relatively Lipschitz-Continuous Convex Programming Problems. *Library Review*. [Online] arXiv . Pp. . Available from: <http://arxiv.org/pdf/2003.09147.pdf>. [Accessed: 6th May 2021].
7. LU, H. (2019) Relative continuity for Non-Lipschitz nonsmooth convex optimization using stochastic (or deterministic) mirror descent. *INFORMS J. Optim.* 1(4). Pp. 288–303.
8. NESTEROV, Y. (2019) *Relative smoothness: new paradigm in convex optimization*. In: Conference report, EUSIPCO-2019, A Coruna, Spain, 4 September 2019.
9. СТОНЯКИН, Ф. С. Адаптивные зеркальные спуски для задач выпуклого программирования с использованием δ -субградиентов [Электронный ресурс] / Ф. С. Стонякин // Препринт. Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2012.12856.pdf>
STONYAKIN, F. S. (2023) *Adaptive mirror descents for convex programming problems using δ -subgradients*. .Preprint
10. ПОЛЯК, Б. Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
POLYAK, B. T. (1987) *Introduction to optimization*. New York: Optimization software inc., Publications division. 438 p.

УДК: 517.925.51

MSC2020: 34A37

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЕРВОЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ

© О. В. Анашкин, О. В. Юсупова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: oanashkin@yandex.ru, olgayusupova@mail.ru

ON THE CALCULATION OF THE FIRST LYAPUNOV QUANTITY OF A PERIODIC
IMPULSIVE SYSTEM.

Anashkin O. V., Yusupova O. V.

Abstract. Impulsive systems have become increasingly popular in recent decades because they provide a natural toolkit for mathematical modeling of many phenomena in the real world and industrial processes. Applications of impulsive systems can be found in a wide variety of fields, such as aeronautics, environmental science, economics, epidemiology, finance, medicine, and robotics, to name a few. Solutions of impulsive systems are discontinuous and this makes some standard methods of analysis and control ineffective. However, much progress has been made in recent years, and many interesting results in stability, manifold theory and bifurcation analysis have been published for such systems. Extensive literature is devoted to the stability conditions for solutions of impulsive systems. But the critical case of stability has not yet been sufficiently studied.

The paper concerns in periodic impulsive systems with fixed moments of impulse actions. Such a system consists of two elements: a continuous system of differential equations that governs the state of the system between moments of impulsive events, and a system of difference equations, which specifies a method for instantly changing the state of the system.

The critical case of stability is considered for a periodic impulsive system of the second order of general form with an autonomous differential equation and an autonomous impulsive action operator. It is assumed that the linear approximation monodromy matrix has a pair of complex conjugate multipliers on the unit circle of the complex plane.

The algorithm for calculating the first Lyapunov quantity is described in detail. The reliability of the algorithm formulas is confirmed by the results of test analytical calculations for two illustrative examples.

Keywords: *periodic impulsive systems, reduction to discrete time, critical case of stability, first Lyapunov quantity, monodromy matrix, complex conjugate multipliers.*

ВВЕДЕНИЕ

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) становятся все более популярными в последние десятилетия, поскольку они обеспечивают естественный инструмент для математического моделирования многих явлений в реальном мире и промышленных процессах.

Приложения импульсных систем можно найти в самых различных областях, таких как авионавтика, экология, экономика, эпидемиология, финансы, медицина и робототехника, и это лишь некоторые из них.

Импульсная система в общем виде состоит из трех компонент: непрерывной системы дифференциальных уравнений, которая управляет состоянием системы между моментами импульсных воздействий; системы разностных уравнений, которая задает способ мгновенного изменения состояния системы, и критерия, задающего моменты времени, когда состояние системы резко (мгновенно) меняется.

Решения импульсных систем являются разрывными и это делает мало эффективными некоторые стандартные методы анализа и управления. Тем не менее, за последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в теории и применении импульсных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В статье рассматриваются импульсные системы с фиксированными моментами импульсного воздействия

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad x(\tau_k^+) = h_k(x(\tau_k)), \quad (1)$$

где $f(t, x)$ — непрерывная по x и кусочно-непрерывная по t функция с разрывами первого рода, $x(t^+) = \lim_{s \rightarrow t+0} x(s)$ — правое предельное значение функции в точке t , $h_k(x)$ — непрерывные функции, $k \in \mathbb{Z}$, последовательность $\{\tau_k\}$ строго возрастает и не имеет конечных точек сгущения.

Традиционно предполагается, что решение импульсной системы непрерывно слева, но в некоторых математических моделях, например, учитывающих влияние запаздывания, удобнее предполагать решения непрерывными справа.

Импульсные системы вида (1) имеют много общего с системами обыкновенных дифференциальных уравнений и потому вполне естественно, что на начальном этапе, в 1970-х, теория импульсных систем развивалась по аналогии с хорошо развитой теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, решение начальной задачи для импульсной системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ удовлетворяет

интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} [x(\tau_k) + h_k(x(\tau_k))] \quad (2)$$

и по сути данное представление решения импульсной системы лежит в основе большей части современной теории импульсных систем, восходящей к классической монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [1] 1987 года (английский перевод [2] с дополнениями вышел в 1995-м), и до последнего времени эта точка зрения доминирует в большинстве книг и статей [3]–[8]. Вместе с тем нетрудно заметить, что импульсная система с фиксированными моментами импульсных воздействий естественным образом сводится к системе разностных уравнений.

Пусть правая часть системы (1) задана всюду в соответствующих метрических пространствах. Обозначим через $\varphi(t; t_0, x_0)$ решение дифференциального уравнения в системе (1) и предположим, что для $t_0 \in [\tau_{k_0}, \tau_{k_0+1})$ и любого $k \geq k_0$ решение $\varphi(t; \tau_k, x(\tau_k^+))$ продолжимо на весь сегмент $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда решения импульсной системы неограниченно продолжимы вправо и значения $x_k = x(\tau_k; t_0, x_0)$ решения импульсной системы в соседних моментах импульсного воздействия связаны рекуррентным соотношением

$$x_{k+1} = F_k(x_k) = \varphi(\tau_{k+1} - \tau_k; \tau_k, h_k(x(\tau_k))), \quad k > k_0. \quad (3)$$

Поведение последовательности $\{x_k = x(\tau_k; t_0, x_0)\}_{k > k_0}$ полностью характеризует поведение решения $x(t; t_0, x_0)$ при $t > t_0$.

Таким образом, исследование свойств решений импульсной системы (1) формально сводится к исследованию свойств решений разностного уравнения (3). Разумеется, в общем случае записать соотношение (3) в явном виде не представляется возможным и свойства последовательности $\{x_k = x(\tau_k; t_0, x_0)\}_{k > k_0}$ описать нельзя. Однако для находящих широкие приложения периодических импульсных систем вида (1) этот подход является весьма перспективным.

Напомним, что импульсная система (1) называется *периодической*, если для некоторых $0 < T \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{N}$ функция $f(t, x)$ T -периодична по t , функция $h_k(x)$ p -периодична по k и при этом имеет место равенство: $\tau_{k+p} - \tau_k = T$ для $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что в периодической системе последовательность положительных интервалов $\{\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k\}$ между соседними моментами импульсного воздействия является p -периодической. Не ограничивая общности, всегда можно предполагать, что $\tau_0 = 0$.

Пусть система (1) периодическая и $x(t) = x(t; 0, x_0)$ — её решение. Для простоты описания предположим, что $p = 2$, следовательно, $T = \theta_0 + \theta_1$. Тогда для значений

$x_k = x(\tau_k; 0, x_0)$ получим следующее рекуррентное уравнение

$$x_{k+2} = F(x_k), \quad F(x) = \varphi(\theta_0 + \theta_1; \theta_0, h_1(\varphi(\theta_0; 0, h_0(x))))), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Таким образом, исследование периодической импульсной системы вида (1) естественным образом сводится к исследованию дискретной динамической системы (4). Конечно, в общем случае решение $\varphi(t; t_0, x_0)$ не может быть описано в явном виде, но имеются хорошо разработанные приближенные методы, например, представление в виде степенного ряда по начальным значениям.

В последние два десятилетия значительное развитие получила теория импульсных функционально дифференциальных уравнений, в частности, теория бифуркаций. Современное состояние этого направления теории импульсных систем изложено в монографии [9] канадских математиков Kevin Church и Xinzhi Liu. В контексте статьи особый интерес представляет вторая глава этой монографии, где представлен очень содержательный обзор современного состояния качественной теории импульсных систем вида (1).

Настоящая статья посвящена проблеме устойчивости стационарного решения периодической системы импульсных уравнений второго порядка в критическом случае, когда матрица монодромии линейного приближения имеет пару комплексно сопряженных мультипликаторов, лежащих на единичной окружности. *Критическим случаем устойчивости* стационарного решения импульсной системы (1), в свете известных фактов об устойчивости по линейному приближению, назовем ситуацию, когда линеаризация системы (1) в окрестности стационарного решения устойчива, но не асимптотически. Условиям устойчивости решений импульсных систем посвящена обширная литература, в частности, монографии [3, 4, 10, 11]. Но критический случай устойчивости пока недостаточно изучен, библиография насчитывает лишь несколько десятков статей. Большую работу в этом направлении выполнил В. И. Слынько с соавторами. Укажем лишь несколько непосредственно относящихся к настоящей работе статей [12]–[15].

Основная цель — верификация формул алгоритма вычисления первой ляпуновской величины, кратко изложенного в статье авторов [15]. В первой части настоящей работы (разделы 1–4) этот алгоритм описан более детально, исправлены замеченные опечатки и внесены необходимые уточнения в формулы. Но полная формулировка теоремы об устойчивости дана в [15] и здесь не приводится. В пятом разделе для двух иллюстративных примеров найдены значения первой ляпуновской величины двумя различными способами. Второй способ непосредственно реализует полученные в первой части формулы формулы. Совпадение итоговых числовых значений вселяет надежду, что теперь все формулы верные.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим импульсную систему второго порядка с фиксированными моментами импульсного воздействия $\tau_k, k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\dot{x} = Ax + \sum_{|m| \geq 2} f_m x^m, \quad t \neq \tau_k, \tag{5}$$

$$x(t^+) = Bx(t) + \sum_{|m| \geq 2} g_m x^m, \quad t = \tau_k, \tag{6}$$

где $m = (m_1, m_2) \geq 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2, x = (x_1, x_2)^T, x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}, A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — постоянные матрицы с вещественными элементами, $\det B \neq 0, f_m = (f_m^{(1)}, f_m^{(2)})^T, g_m = (g_m^{(1)}, g_m^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2$. Ряды в правой части системы предполагаются абсолютно сходящимися в некоторой окрестности нуля.

Предположим, что последовательность интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами импульсных воздействий периодическая. Тогда импульсная система (5)–(6) будет периодической. Для краткости изложения ограничимся простейшим случаем $p = 1$ регулярной последовательности $\tau_k = k\theta, \theta > 0$. Общий случай рассматривается аналогично.

Наряду с нелинейной системой (5)–(6) рассмотрим её *линеаризацию* в нуле

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad t \neq \tau_k, \quad \xi(t^+) = B\xi(t), \quad t = \tau_k. \tag{7}$$

Если спектральный радиус матрицы монодромии $M = e^{\theta A} B$ линеаризации меньше 1, то нулевое решение импульсной системы (5)–(6) асимптотически (экспоненциально) устойчиво, а если спектральный радиус больше 1, то нулевое решение системы неустойчиво.

Рассмотрим критический случай, когда матрица монодромии $M = e^{\theta A} B$ линеаризации (7) имеет комплексно сопряженные собственные значения (мультипликаторы)

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\gamma}, \quad 0 < \gamma < \pi.$$

Значения $\xi(\tau_k)$ любого решения $\xi(t)$ линейной системы (7) связаны соотношением

$$\xi(\tau_{k+1}) = M\xi(\tau_k). \tag{8}$$

Принимая во внимание тот факт, что в рассматриваемом случае матрица монодромии $M = e^{\theta A} B$ подобна матрице $\begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$ поворота на угол γ , заключаем, что точки $\xi(\tau_k)$ находятся на некотором эллипсе с центром в начале координат фазовой

плоскости. Поэтому траектория любого решения линеаризации (7) в случае *общего положения*, когда отношение γ/π есть число иррациональное, заполняет всюду плотно некоторую кольцевую область, окружающую начало координат.

В исключительном случае соизмеримости чисел γ и π все решения линеаризации (7) являются периодическими функциями одного периода.

Таким образом, в рассматриваемой системе реализуется *критический случай* устойчивости нулевого решения. В критическом случае характер устойчивости нулевого решения системы (5)–(6) определяют коэффициенты f_m, g_m одночленов второй и более высоких степеней в правой части.

Рассматриваемый критический случай устойчивости импульсной системы (5)–(6) является аналогом критического случая пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$ матрицы линейного приближения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Будем предполагать, что матрица A в дифференциальном уравнении (5) имеет каноническую форму и её собственные значения различные, т. е. матрица диагональная: $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Пусть собственные значения вещественные, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $e^{\theta A} = \text{diag}(e^{\lambda_1 \theta}, e^{\lambda_2 \theta})$ и матрица монодромии $M = e^{\theta A} B$, $B = (b_{ij})$, будет иметь вид

$$M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \theta} b_{11} & e^{\lambda_1 \theta} b_{12} \\ e^{\lambda_2 \theta} b_{21} & e^{\lambda_2 \theta} b_{22} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что собственные значения (мультипликаторы) ρ_1, ρ_2 матрицы монодромии M представимы в виде $\rho_{1,2} = e^{\pm i\gamma}$ с $0 < \gamma < \pi$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1^0) b_{12}b_{21} = b_{11}b_{22} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}, \quad 2^0) b_{11}b_{22} < e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\theta}, \quad 3^0) |e^{\lambda_1 \theta} b_{11} + e^{\lambda_2 \theta} b_{22}| < 2. \quad (10)$$

Для упрощения дальнейших действий произведем в исходной импульсной системе (5)–(6) линейную замену переменных

$$x = \Psi(t)y \quad (11)$$

так, чтобы в новых переменных система приняла вид

$$\dot{y} = \sum_{|m| \geq 2} \tilde{f}_m(t)y^m, \quad t \neq \tau_k, \quad (12)$$

$$y(\tau_k^+) = My(\tau_k) + \sum_{|m| \geq 2} \tilde{g}_m [y(\tau_k)]^m. \quad (13)$$

Производя замену переменных (11) в дифференциальном уравнении (5), получим

$$\dot{\Psi}(t)y + \Psi(t)\dot{y} = A\Psi(t)y + \sum_{|m|\geq 2} f_m [\Psi(t)y]^m, \quad t \neq \tau_k.$$

Следовательно,

$$\dot{y} = \Psi^{-1}(t) \left[A\Psi(t) - \dot{\Psi}(t) \right] y + \sum_{|m|\geq 2} \Psi^{-1}(t) f_m [\Psi(t)y]^m, \quad t \neq \tau_k. \quad (14)$$

Заменяя переменные в импульсном операторе (6), получим

$$\Psi(\tau_k^+)y(\tau_k^+) = B\Psi(\tau_k)y(\tau_k) + \sum_{|m|\geq 2} g_m [\Psi(\tau_k)y(\tau_k)]^m.$$

Отсюда выводим:

$$y(\tau_k^+) = \Psi^{-1}(\tau_k^+)B\Psi(\tau_k)y(\tau_k) + \sum_{|m|\geq 2} \Psi^{-1}(\tau_k^+)g_m [\Psi(\tau_k)y(\tau_k)]^m. \quad (15)$$

Сравнивая систему (14)–(15) с искомым результатом (12)–(13), находим условия, которым должна удовлетворять матрица $\Psi(t)$:

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t), \quad t \neq \tau_k, \quad \Psi^{-1}(\tau_k^+)B\Psi(\tau_k) = M.$$

Иными словами, матрица $\Psi(t)$ должна быть решением матричного импульсного уравнения

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t), \quad t \neq \tau_k, \quad \Psi(\tau_k^+) = B\Psi(\tau_k)M^{-1}. \quad (16)$$

Положим $\Psi(0) = I$, где I есть единичная матрица. Тогда

$$\Psi(t) = e^{tA}BM^{-1} = e^{tA}B(e^{\theta A}B)^{-1} = e^{tA}BB^{-1}e^{-\theta A} = e^{(t-\theta)A} \quad \text{при } 0 < t \leq \theta.$$

Таким образом, $\Psi(t)$ есть θ -периодическая кусочно-гладкая неособая матрица с разрывами первого рода в точках τ_k , а именно,

$$\Psi(t) = e^{(t-\tau_{k+1})A} \quad \text{при } \tau_k < t \leq \tau_{k+1}, \quad \Psi(\tau_k) = I, \quad \Psi(\tau_k^+) = e^{-\theta A}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Отсюда, учитывая (15), получаем искомые коэффициенты импульсного оператора в новых переменных:

$$\tilde{g}_m = \Psi^{-1}(\tau_k^+)g_m = e^{\theta A}g_m = \begin{pmatrix} g_m^{(1)} e^{\lambda_1 \theta} \\ g_m^{(2)} e^{\lambda_2 \theta} \end{pmatrix}, \quad |m| \geq 2. \quad (18)$$

Согласно (17), на интервале $0 < t \leq \theta$ матрица преобразования (11) имеет вид

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\theta)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-\theta)} \end{pmatrix}, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (19)$$

поэтому на интервале $0 < t \leq \theta$ замена переменных (11) примет вид:

$$x_1 = e^{\lambda_1(t-\theta)}y_1, \quad x_2 = e^{\lambda_2(t-\theta)}y_2. \quad (20)$$

Теперь из (14) нетрудно найти формулы для коэффициентов $\tilde{f}_m(t)$ на интервале $0 < t \leq \theta$. Положим

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad (m, \lambda) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2. \quad (21)$$

Учитывая явное представление (19) матрицы $\Psi(t)$, находим:

$$[\Psi(t)y]^m = (e^{(t-\theta)\lambda_1}y_1)^{m_1}(e^{(t-\theta)\lambda_2}y_2)^{m_2} = e^{(m,\lambda)(t-\theta)}y^m,$$

следовательно,

$$\tilde{f}_m(t) = \Psi^{-1}(t)f_m[\Psi(t)y]^m = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(\theta-t)}f_m^{(1)} \\ e^{\lambda_2(\theta-t)}f_m^{(2)} \end{pmatrix} e^{(m,\lambda)(t-\theta)}y^m, \quad (22)$$

или в покоординатной записи:

$$\tilde{f}_m^{(j)}(t) = f_m^{(j)}e^{[\lambda_j - (m,\lambda)](\theta-t)} = f_m^{(j)}e^{D_{mj}(\theta-t)}, \quad j = 1, 2, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (23)$$

где

$$D_{mj} = \lambda_j - (m, \lambda), \quad j = 1, 2, \quad |m| \geq 2. \quad (24)$$

3. СВЕДЕНИЕ ГЛАДКОЙ ЗАДАЧИ К ДИСКРЕТНОЙ

Обозначим через $y(t, y_0)$ решение дифференциального уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $y(0^+) = y_0$. Разложение решения $y(t, y_0)$ в ряд по степеням начальных данных имеет вид

$$y(t, y_0) = y_0 + \sum_{m \geq 2} s_m(t)y_0^m, \quad s_m(0) = 0, \quad |m| \geq 2. \quad (25)$$

Найдем приближенное значение величины $y(\theta, y_0)$, оставляя в ряду (25) слагаемые до третьей степени включительно. Благодаря существенной нелинейности уравнения (12), для значений $s_m(\theta)$ имеем простые рекуррентные соотношения:

$$s_m(\theta) = \int_0^\theta \tilde{f}_m(t) dt, \quad \text{для } |m| = 2, \quad (26)$$

$$s_m(\theta) = \int_0^\theta \tilde{f}_m(t) dt + \int_0^\theta r_m(t) dt, \quad \text{для } |m| = 3, \quad (27)$$

где функции $r_m(t)$ зависят только от $s_n(t)$ с $|n| = 2$, точнее,

$$\begin{aligned} r_{30}(t) &= 2s_{20}^{(1)}(t)\tilde{f}_{20}(t) + s_{20}^{(2)}(t)\tilde{f}_{11}(t), \\ r_{21}(t) &= 2s_{11}^{(1)}(t)\tilde{f}_{20}(t) + \left(s_{20}^{(1)}(t) + s_{11}^{(2)}(t)\right)\tilde{f}_{11}(t) + 2s_{20}^{(2)}(t)\tilde{f}_{02}(t), \\ r_{12}(t) &= 2s_{02}^{(1)}(t)\tilde{f}_{20}(t) + \left(s_{02}^{(2)}(t) + s_{11}^{(1)}(t)\right)\tilde{f}_{11}(t) + 2s_{11}^{(2)}(t)\tilde{f}_{02}(t), \\ r_{03}(t) &= 2s_{02}^{(2)}(t)\tilde{f}_{02}(t) + s_{02}^{(1)}(t)\tilde{f}_{11}(t). \end{aligned} \quad (28)$$

Интегрируя функции (23) от 0 до t , получим

$$s_m^{(j)}(t) = \frac{e^{D_{mj}t}}{D_{mj}} f_m^{(j)} (1 - e^{-D_{mj}t}), \quad |m| = 2, \quad j = 1, 2. \quad (29)$$

Поэтому

$$s_m^{(j)}(\theta) = \frac{f_m^{(j)}}{D_{mj}} (e^{D_{mj}\theta} - 1), \quad |m| = 2, \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Чтобы вывести формулы для $s_m^{(j)}(\theta)$ с $|m| = 3$, $j = 1, 2$, потребуются значения интегралов

$$\int_0^\theta s_n^{(k)}(t)\tilde{f}_l^{(j)}(t) dt = C_{(n,k;l,j)} f_n^{(k)} f_l^{(j)}, \quad (31)$$

где

$$C_{(n,k;l,j)} = \frac{e^{D_{nk}\theta} [D_{lj}(e^{-D_{nk}\theta} - 1) + D_{nk}(e^{D_{lj}\theta} - 1)]}{D_{nk}D_{lj}(D_{nk} + D_{lj})}, \quad |n| = |l| = 2, \quad k, j = 1, 2. \quad (32)$$

Заметим, что коэффициенты $C(n, k; l, j)$ зависят только от спектра λ_1, λ_2 матрицы A и периода θ исследуемой импульсной системы.

Теперь, опираясь на (31) и (28), выпишем явные формулы для коэффициентов $s_m^{(j)}(\theta)$ разложения $y(\theta, y_0)$ с $|m| = 3$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} s_{30}^{(j)}(\theta) &= f_{30}^{(j)} \frac{e^{D_{30j}\theta} - 1}{D_{30j}} + 2C_{(20,1;20,j)} f_{20}^{(1)} f_{20}^{(j)} + C_{(20,2;11,j)} f_{20}^{(2)} f_{11}^{(j)}, \\ s_{21}^{(j)}(\theta) &= f_{21}^{(j)} \frac{e^{D_{21j}\theta} - 1}{D_{21j}} + 2C_{(11,1;20,j)} f_{11}^{(1)} f_{20}^{(j)} + \\ &\quad + \left(C_{(20,1;11,j)} f_{20}^{(1)} + C_{(11,2;11,j)} f_{11}^{(2)}\right) f_{11}^{(j)} + 2C_{(20,2;02,j)} f_{20}^{(2)} f_{02}^{(j)}, \\ s_{12}^{(j)}(\theta) &= f_{12}^{(j)} \frac{e^{D_{12j}\theta} - 1}{D_{12j}} + 2C_{(11,2;02,j)} f_{11}^{(2)} f_{02}^{(j)} + \\ &\quad + \left(C_{(02,2;11,j)} f_{02}^{(2)} + C_{(11,1;11,j)} f_{11}^{(1)}\right) f_{11}^{(j)} + 2C_{(02,1;20,j)} f_{02}^{(1)} f_{20}^{(j)}, \\ s_{03}^{(j)}(\theta) &= f_{03}^{(j)} \frac{e^{D_{03j}\theta} - 1}{D_{03j}} + 2C_{(02,2;02,j)} f_{02}^{(2)} f_{02}^{(j)} + C_{(02,1;11,j)} f_{02}^{(1)} f_{11}^{(j)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Примечание. Формулы (30), (33) верны, если исходная система является системой общего положения, когда спектр матрицы A в исходной системе заведомо не является резонансным и потому все $D_{mj} = \lambda_j - (m, \lambda) \neq 0$. Следует заметить, что во-первых, в системе второго порядка вообще возможно лишь очень небольшое количество резонансов второго и третьего порядка, во-вторых, формулы (30), (33) легко модифицируются в случае наличия резонансов.

Подставляя разложение $y(\theta, y_0) = y_0 + \sum_{m \geq 2} s_m(\theta) y_0^m$ в формулу оператора импульсного воздействия системы (13), найдем приближение для правого предельного значения $y(\theta^+, y_0)$ решения системы (12)-(13) в точке θ , а именно

$$y(\theta^+, y_0) \approx M y_0 + \sum_{|m|=2}^3 p_m y_0^m, \quad (34)$$

где

$$p_m = \tilde{g}_m + M s_m(\theta), \quad \text{если } |m| = 2; \quad (35)$$

$$p_{30} = \tilde{g}_{30} + M s_{30}(\theta) + 2s_{20}^{(1)} \tilde{g}_{20} + s_{20}^{(2)} \tilde{g}_{11},$$

$$p_{21} = \tilde{g}_{21} + M s_{21}(\theta) + 2s_{11}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{20} + \left(s_{20}^{(1)}(\theta) + s_{11}^{(2)}(\theta) \right) \tilde{g}_{11} + 2s_{20}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02}, \quad (36)$$

$$p_{12} = \tilde{g}_{12} + M s_{12}(\theta) + 2s_{02}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{20} + \left(s_{02}^{(2)}(\theta) + s_{11}^{(1)}(\theta) \right) \tilde{g}_{11} + 2s_{11}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02},$$

$$p_{03} = \tilde{g}_{03} + M s_{03}(\theta) + 2s_{02}^{(2)}(\theta) \tilde{g}_{02} + s_{02}^{(1)}(\theta) \tilde{g}_{11}.$$

Рассмотрим гладкое отображение

$$\tilde{u} = P(u) = M u + \sum_{|m|=2}^3 p_m u^m, \quad u = (u_1, u_2)^T, \quad p_m = (p_m^{(1)}, p_m^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2. \quad (37)$$

Это отображение аппроксимирует нелинейный оператор «отображения за период» периодической импульсной системы (12)-(13), действующий в фазовом пространстве. Таким образом, проблема устойчивости нулевого решения системы (12)-(13) сводится к проблеме устойчивости неподвижной точки двумерного полиномиального отображения (37) в критическом случае, когда матрица линеаризации отображения в нуле имеет комплексно сопряженные собственные значения, равные по модулю единице. Этот случай хорошо изучен и результаты кратко изложены в монографии Л. Г. Хазина и Э. Э. Шноля [16, с. 197].

4. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Для исследования устойчивости нулевой неподвижной точки отображения (37) приведем его к нормальной форме до слагаемых третьей степени. Сначала будет удобно перейти к комплексно сопряженным переменным z, \bar{z} с помощью линейного

преобразования

$$u_1 = v_1 z + \bar{v}_1 \bar{z}, \quad u_2 = v_2 z + \bar{v}_2 \bar{z}, \quad (38)$$

где

$$v_1 = e^{\lambda_1 \theta} b_{12}, \quad v_2 = e^{i\gamma} - e^{\lambda_1 \theta} b_{11}, \quad (39)$$

и $v = (v_1, v_2)^T$ есть собственный вектор матрицы монодромии M : $Mv = e^{i\gamma} v$, где

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} (e^{\lambda_1 \theta} b_{11} + e^{\lambda_2 \theta} b_{22}).$$

Обозначим

$$\eta_n = \frac{i}{2\text{Im}(v_1 \bar{v}_2)} (\bar{v}_1 p_n^{(2)} - \bar{v}_2 p_n^{(1)}), \quad |n| \geq 2. \quad (40)$$

Из (39) находим:

$$\text{Im}(v_1 \bar{v}_2) = -e^{\lambda_1 \theta} b_{12} \sin \gamma.$$

В новых комплексно сопряженных переменных z, \bar{z} двумерному отображению (37) соответствует скалярное

$$\tilde{z} = F(z) = e^{i\gamma} z + \sum_{|m|=2}^3 F_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2} = e^{i\gamma} z + F_2(z) + F_3(z), \quad (41)$$

где $F_s(z) = \sum_{|m|=s} F_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2}$, $s = 2, 3$.

Выпишем выражения для F_m с $|m| = 2$:

$$\begin{aligned} F_{20} &= v_1^2 \eta_{20} + v_1 v_2 \eta_{11} + v_2^2 \eta_{02}, \\ F_{11} &= 2|v_1|^2 \eta_{20} + 2\text{Re}(v_1 \bar{v}_2) \eta_{11} + 2|v_2|^2 \eta_{02}, \\ F_{02} &= \bar{v}_1^2 \eta_{20} + \bar{v}_1 \bar{v}_2 \eta_{11} + \bar{v}_2^2 \eta_{02}, \end{aligned} \quad (42)$$

В дальнейшем понадобится лишь один коэффициент при резонансном мономе третьей степени:

$$F_{21} = 3|v_1|^2 v_1 \eta_{30} + (2|v_1|^2 v_2 + v_1^2 \bar{v}_2) \eta_{21} + (2|v_2|^2 v_1 + v_2^2 \bar{v}_1) \eta_{12} + 3|v_2|^2 v_2 \eta_{03}. \quad (43)$$

Уничтожим квадратичные слагаемые в (41) с помощью квадратичной замены переменных

$$z = H(w) = w + H_2(w, \bar{w}), \quad H_2 = \sum_{|m|=2} h_m w^{m_1} \bar{w}^{m_2}, \quad h_m \in \mathbb{C}. \quad (44)$$

Обратное отображение вычисляем с точностью до кубических слагаемых

$$w = H^{-1}(z) = z - H_2(z, \bar{z}) + Q_3(z, \bar{z}) + \dots \quad (45)$$

Для дальнейших преобразований полезно следующее утверждение, которое доказывается прямым вычислением.

Лемма. Пусть a и b — комплексные числа, $H_2(z) = \sum_{|m|=2} h_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2}$, $F_2(z) = \sum_{|m|=2} F_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2}$ — однородные многочлены второй степени относительно комплексно сопряженных переменных z, \bar{z} с комплексными коэффициентами.

Тогда

$$H_2(az + bF_2(z)) = H_2(az) + H_3^{(F)}(a, b; z) + \dots,$$

где многоточие обозначает сумму одночленов 4-й степени, а коэффициенты однородного многочлена третьей степени

$$H_3^{(F)}(a, b; z) = \sum_{|m|=3} H_m^{(F)}(a, b) z^{m_1} \bar{z}^{m_2},$$

определяются формулами

$$\begin{aligned} H_{30}^{(F)}(a, b) &= 2abh_{20}F_{20} + a\bar{b}h_{11}\bar{F}_{02}, \\ H_{21}^{(F)}(a, b) &= 2abh_{20}F_{11} + 2\bar{a}\bar{b}h_{02}\bar{F}_{02} + a\bar{b}h_{11}\bar{F}_{11} + \bar{a}bh_{11}F_{20}, \\ H_{12}^{(F)}(a, b) &= 2abh_{20}F_{02} + 2\bar{a}\bar{b}h_{02}\bar{F}_{11} + a\bar{b}h_{11}\bar{F}_{20} + \bar{a}bh_{11}F_{11}, \\ H_{03}^{(F)}(a, b) &= 2\bar{a}\bar{b}h_{02}\bar{F}_{20} + \bar{a}bh_{11}F_{02}. \end{aligned} \tag{46}$$

Комплексные коэффициенты однородного многочлена $Q_3(z, \bar{z}) = \sum_{|m|=3} q_m z^{m_1} \bar{z}^{m_2}$ в (45) определяются по формулам

$$\begin{aligned} q_{30} &= 2h_{20}^2 + h_{11}\bar{h}_{02}, \\ q_{21} &= 3h_{20}h_{11} + |h_{11}|^2 + 2|h_{02}|^2, \\ q_{12} &= 2h_{20}(\bar{h}_{11} + h_{02}) + h_{11}(\bar{h}_{20} + h_{11}), \\ q_{03} &= 2h_{02}\bar{h}_{20} + h_{11}h_{02}. \end{aligned} \tag{47}$$

Коэффициенты многочлена H_2 в (44) находим, решая гомологическое уравнение

$$e^{i\gamma} H_2(w, \bar{w}) - H_2(e^{i\gamma} w, e^{-i\gamma} \bar{w}) + \mathcal{G}_2(w, \bar{w}) = 0.$$

В итоге получим такие выражения

$$h_{20} = \frac{G_{20}}{e^{2i\gamma} - e^{i\gamma}}, \quad h_{11} = \frac{G_{11}}{1 - e^{i\gamma}}, \quad h_{02} = \frac{G_{02}}{e^{-2i\gamma} - e^{i\gamma}}. \tag{48}$$

В новых переменных отображение (41) примет вид

$$\tilde{w} = H^{-1} \circ F \circ H(w) = e^{i\gamma} w + \sum_{|m| \geq 3} W_m w^{m_1} \bar{w}^{m_2}. \tag{49}$$

Учитывая наличие резонансов третьего порядка $i(m_1 - m_2)\gamma = \pm i\gamma$, $|m| = 3$, и отбрасывая на основании теоремы Пуанкаре-Дюлака нерезонансные одночлены третьей

степени и все одночлены более высоких степеней, получим так называемое *модельное отображение*

$$\hat{w} = e^{i\gamma} w(1 + \mathcal{A}|w|^2), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & W_{21}e^{-i\gamma} = F_{21}e^{-i\gamma} + \\ & + F_{20}F_{11} \frac{(1 - e^{-i\gamma})(2 - e^{-i\gamma})e^{-i\gamma}}{|e^{i\gamma} - 1|^2} + |F_{11}|^2 \frac{e^{-i\gamma} - 1}{|e^{i\gamma} - 1|^2} + |F_{02}|^2 \frac{2(e^{-i3\gamma} - 1)}{|e^{i3\gamma} - 1|^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

Знак первой ляпуновской величины $L = \operatorname{Re} \mathcal{A}$ определяет характер устойчивости нулевого решения исходной импульсной системы по Ляпунову, а именно, решение устойчиво асимптотически, если $L < 0$ и неустойчиво, если $L > 0$.

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим иллюстративные примеры. При этом будем производить расчеты двумя способами. Сначала напрямую применим алгоритм исследования устойчивости, описанный в предыдущих разделах: найдем разложение решения дифференциального уравнения импульсной системы в ряд по начальным значениям; подставляя это разложение в импульсный оператор, получим полиномиальную аппроксимацию отображения Пуанкаре и, наконец, ограничиваясь одночленами не выше третьей степени, вычислим первую ляпуновскую величину полученного полиномиального отображения, пользуясь известными формулами.

Второй способ отличается тем, что коэффициенты полиномиального отображения (37), аппроксимирующего отображение Пуанкаре, можно найти, используя готовые формулы, выведенные в предыдущих разделах. Таким путем проведем достоверную верификацию этих формул.

5.1. Пусть импульсная система имеет простейшую кубическую нелинейность

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + ax_1^3, \quad \dot{x}_2 = 2x_2, \quad t \neq \tau_k = k\theta, \\ x_1(\tau_k^+) &= \frac{1}{2}e^\theta x_1(\tau_k) + e^{-\theta} x_2(\tau_k), \quad x_2(\tau_k^+) = -x_1(\tau_k). \end{aligned} \quad (52)$$

В этом примере два параметра: $a \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$. Матрица монодромии линейного приближения в нуле

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & e^{-2\theta} \\ -e^{2\theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

имеет критический спектр

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\gamma} = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad (54)$$

то есть

$$\cos \gamma = \frac{1}{4}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Заметим, что в данном примере мультипликаторы $\rho_{1,2}$ не зависят от θ , хотя матрица монодромии от θ явно зависит.

Для приведения матрицы монодромии к канонической форме понадобятся комплексно сопряженные собственные векторы матрицы M с собственными значениями $e^{\pm i\gamma}$:

$$v = (e^{i\gamma}, -e^{2\theta})^T, \quad \bar{v} = (e^{-i\gamma}, -e^{2\theta})^T. \quad (55)$$

После линейного преобразования (11) система (52) принимает вид:

$$\dot{y}_1 = ay_1^3 e^{2(\tau_{k+1}-t)}, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \quad (56)$$

$$y_1(\tau_k^+) = \frac{1}{2}y_1(\tau_k) + e^{-2\theta}y_2(\tau_k), \quad y_2(\tau_k^+) = -e^{2\theta}y_1(\tau_k). \quad (57)$$

Заметим, что нетрудно найти точное решение $y(t, y^0)$, $y(0, y^0) = y^0$, дифференциального уравнения (56).

Найдем разложение решения дифференциального уравнения по начальным значениям. Поскольку нелинейность в уравнении кубическая, а интерес представляют коэффициенты при одночленах до третьей степени включительно, то, подставляя ряд (25) в уравнение (56), получим на интервале $0 < t \leq \theta$

$$\sum_{|m| \geq 2} \dot{s}_m^{(1)}(t) [y_1^0]^{m_1} [y_2^0]^{m_2} = ae^{2(\theta-t)} [y_1^0]^3 + \dots, \quad (58)$$

$$\sum_{|m| \geq 2} \dot{s}_m^{(2)}(t) [y_1^0]^{m_1} [y_2^0]^{m_2} = 0, \quad s_m(0) = 0, \quad |m| \geq 2. \quad (59)$$

Отметим, что здесь y^0 есть правое предельное значение решения импульсной системы (56)-(57) в момент импульсного воздействия $\tau_0 = 0$, $y(0^+) = y^0$. Из (59) следует, что $s_m^{(2)}(t) = 0$ для всех $|m| \geq 2$, а из (58) следует, что $\dot{s}_m^{(1)}(t) = 0$ для $|m| \geq 2$ за исключением $m = (3, 0)$: $\dot{s}_{30}^{(1)}(t) = ae^{2(\theta-t)}$, поэтому

$$s_{30}^{(1)}(t) = \frac{1}{2}ae^{2\theta}(1 - e^{-2t}), \quad 0 < t \leq \theta.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} y_1(\theta, y^0) &= y_1^0 + \frac{1}{2}a(e^{2\theta} - 1)[y_1^0]^3 + \dots, \\ y_2(\theta, y^0) &= y_2^0. \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляя эти значения в импульсный оператор (57), находим приближение для отображения за период (отображение Пуанкаре):

$$\begin{aligned} y_1(\theta^+, y^0) &= \frac{1}{2}y_1^0 + e^{-2\theta}y_2^0 + \frac{1}{4}a(e^{2\theta} - 1)[y_1^0]^3 + \dots, \\ y_2(\theta^+, y^0) &= -e^{2\theta}y_1^0 - \frac{1}{2}a(e^{2\theta} - 1)e^{2\theta}[y_1^0]^3 + \dots \end{aligned} \quad (61)$$

Отбрасывая в (61) мономы выше третьей степени, получим полиномиальное отображение $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2}u_1 + e^{-2\theta}u_2 + \frac{1}{4}a(e^{2\theta} - 1)u_1^3, \quad \tilde{u}_2 = -e^{2\theta}u_1 - \frac{e^{2\theta}}{2}a(e^{2\theta} - 1)u_1^3. \quad (62)$$

Используя собственные векторы (55) матрицы монодромии, сделаем линейную замену переменных

$$u_1 = e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z}, \quad u_2 = -e^{2\theta}z - e^{2\theta}\bar{z}, \quad (63)$$

приводящую линейную часть этого отображения к диагональному виду. Произведя эту замену в (62), получим

$$\begin{aligned} e^{i\gamma}\tilde{z} + e^{-i\gamma}\bar{\tilde{z}} &= \frac{1}{2}(e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z}) - (z + \bar{z}) + \frac{1}{4}a(e^{2\theta} - 1)(e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z})^3, \\ -e^{2\theta}\tilde{z} - e^{2\theta}\bar{\tilde{z}} &= -e^{2\theta}(e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z}) - \frac{e^{2\theta}}{2}a(e^{2\theta} - 1)(e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z})^3. \end{aligned} \quad (64)$$

После очевидных преобразований приходим к следующему равенству для \tilde{z} :

$$(e^{i2\gamma} - 1)e^{-i\gamma}\tilde{z} = \left(\frac{1}{2}e^{i\gamma} - 2\right)z + \frac{1}{4}a(e^{2\theta} - 1)(1 - 2e^{-i\gamma})(e^{i3\gamma}z^3 + 3e^{i\gamma}z^2\bar{z} + 3e^{-i\gamma}z\bar{z}^2 + e^{-i3\gamma}\bar{z}^3).$$

Учитывая, что для данного γ справедливы равенства:

$$e^{i2\gamma} = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = -\frac{7}{8} + i\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{1}{2}e^{i\gamma} - 1, \quad 1 - 2e^{-i\gamma} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2} = 2e^{i\gamma},$$

окончательно получим

$$\tilde{z} = e^{i\gamma}z + \frac{2e^{i\gamma}}{4(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})}a(e^{2\theta} - 1)(e^{i3\gamma}z^3 + 3e^{i\gamma}z^2\bar{z} + 3e^{-i\gamma}z\bar{z}^2 + e^{-i3\gamma}\bar{z}^3). \quad (65)$$

Интерес представляет только коэффициент F_{21} при резонансном одночлене $z^2\bar{z}$, так как первая ляпуновская величина в данном примере равна $L = \text{Re}(F_{21}e^{-i\gamma})$. Поскольку

$$F_{21}e^{-i\gamma} = \frac{3}{2}a(e^{2\theta} - 1)\frac{e^{i\gamma}}{(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})} = \frac{3 \sin \gamma}{\sqrt{15}}a(e^{2\theta} - 1) + i \dots = \frac{3}{4}a(e^{2\theta} - 1) + i \dots,$$

то

$$L = \text{Re}(F_{21}e^{-i\gamma}) = \frac{3}{4}a(e^{2\theta} - 1). \quad (66)$$

Следовательно, нулевое решение импульсной системы (56)-(57) асимптотически устойчиво при $a < 0$ и неустойчиво при $a > 0$.

Второй способ. Теперь найдем значение первой ляпуновской величины, используя формулы, выведенные в предыдущих разделах. Поскольку есть только один нелинейный одночлен и только в первом уравнении, то потребуется лишь $D_{301} = \lambda_1 - 3\lambda_1 = 2$, поэтому

$$s_{30}^{(1)}(\theta) = \frac{a}{2}(e^{2\theta} - 1), \quad s_{30}^{(2)}(\theta) = 0.$$

Следовательно, в нелинейной части отображения (37) только один векторный одночлен $p_{30}u_1^3$,

$$p_{30} = Ms_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & e^{-2\theta} \\ -e^{2\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(e^{2\theta} - 1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}(e^{2\theta} - 1) \\ -\frac{a}{2}e^{2\theta}(e^{2\theta} - 1) \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Формула (39) задает собственный вектор матрицы монодромии M с собственным значением $e^{i\gamma}$:

$$v = (e^{-2\theta}, -e^{-i\gamma})^T. \quad (68)$$

Сразу заметим, что он существенно отличается от вектора (55), выбранного в первом варианте расчета.

Конечно, среди чисел η_n , $|n| \geq 2$, только $\eta_{30} \neq 0$. Учитывая (67), (68), из (40) получим:

$$\eta_{30} = i \frac{ae^{2\theta}(e^{2\theta} - 1)}{2\sqrt{15}}(2 - e^{i\gamma}). \quad (69)$$

Теперь из (43) следует

$$F_{21} = 3e^{-4\theta}e^{-2\theta}i \frac{ae^{2\theta}(e^{2\theta} - 1)}{2\sqrt{15}}(2 - e^{i\gamma}) = i \frac{3}{2\sqrt{15}}e^{-4\theta}a(e^{2\theta} - 1)(2 - e^{i\gamma}). \quad (70)$$

В итоге получаем следующее значение первой ляпуновской величины:

$$L = \operatorname{Re}(F_{21}e^{-i\gamma}) = \frac{3}{2\sqrt{15}}e^{-4\theta}a(e^{2\theta} - 1)\operatorname{Re}[i(2e^{-i\gamma} - 1)] = \frac{3}{4}a(e^{2\theta} - 1)e^{-4\theta}. \quad (71)$$

Как видим, это значение отличается от первого варианта (66) положительным множителем $e^{-4\theta}$. Понятно, что вывод о характере устойчивости такой же, так как знаки ляпуновских величин (66) и (71) совпадают.

Причина разницы абсолютных величин рассмотренных вариантов заключается в том, что для преобразования матрицы монодромии к диагональному виду выбраны различные собственные векторы этой матрицы. Если вместо вектора (68) взять вектор v из (55), то множитель $e^{-4\theta}$ в итоговом выражении (71) исчезнет.

5.2. Теперь заменим в системе (52) из первого примера кубическую нелинейность на квадратичную:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + ax_1x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2, \quad t \neq \tau_k = k\theta, \\ x_1(\tau_k^+) &= \frac{e^\theta}{2}x_1(\tau_k) + e^{-\theta}x_2(\tau_k), \quad x_2(\tau_k^+) = -x_1(\tau_k). \end{aligned} \quad (72)$$

И в этом примере два параметра: $a \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$.

После линейного преобразования (11) система (72) принимает вид:

$$\dot{y}_1 = ae^{2(t-\tau_{k+1})}y_1y_2, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \quad (73)$$

$$y_1(\tau_k^+) = \frac{1}{2}y_1(\tau_k) + e^{-2\theta}y_2(\tau_k), \quad y_2(\tau_k^+) = -e^{2\theta}y_1(\tau_k). \quad (74)$$

Здесь также нетрудно найти точное решение $y(t, y^0)$, $y(0, y^0) = y^0$, дифференциального уравнения (73). Но достаточно найти разложение этого решения в ряд (25) по начальным значениям до одночленов третьей степени. Подставляя ряд (25) в уравнение (73), получим на интервале $0 < t < \theta$

$$\sum_{|m| \geq 2} \dot{s}_m^{(1)}(t)[y_1^0]^{m_1}[y_2^0]^{m_2} = ae^{2(t-\theta)}y_1^0y_2^0 + ae^{2(t-\theta)}y_1^0[y_2^0]^2 + \dots, \quad (75)$$

$$\sum_{|m| \geq 2} \dot{s}_m^{(2)}(t)[y_1^0]^{m_1}[y_2^0]^{m_2} = 0, \quad s_m(0) = 0, \quad |m| \geq 2. \quad (76)$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} y_1(\theta, y^0) &= y_1^0 + \frac{1}{2}a(1 - e^{-2\theta})y_1^0y_2^0 + \frac{1}{8}a^2(1 - e^{-2\theta})^2y_1^0[y_2^0]^2 + \dots, \\ y_2(\theta, y^0) &= y_2^0. \end{aligned} \quad (77)$$

Подставляя эти значения в импульсный оператор (74), находим приближение для отображения за период (отображение Пуанкаре):

$$\begin{aligned} y_1(\theta^+, y^0) &= \frac{1}{2}y_1^0 + e^{-2\theta}y_2^0 + \frac{1}{4}a(1 - e^{-2\theta})y_1^0y_2^0 + \frac{1}{16}a^2(1 - e^{-2\theta})^2y_1^0[y_2^0]^2 + \dots, \\ y_2(\theta^+, y^0) &= -e^{2\theta}y_1^0 + \frac{1}{2}a(1 - e^{2\theta})y_1^0y_2^0 - \frac{1}{8}a^2e^{2\theta}(1 - e^{-2\theta})^2y_1^0[y_2^0]^2 + \dots \end{aligned} \quad (78)$$

Отбрасывая в (78) мономы выше третьей степени, получим полиномиальное отображение $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \tilde{u} = P(u)$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2}u_1 + e^{-2\theta}u_2 + \frac{1}{4}a(1 - e^{-2\theta})u_1u_2 + \frac{1}{16}a^2(1 - e^{-2\theta})^2u_1u_2^2, \\ \tilde{u}_2 &= -e^{2\theta}u_1 + \frac{1}{2}a(1 - e^{2\theta})u_1u_2 - \frac{1}{8}a^2e^{2\theta}(1 - e^{-2\theta})^2u_1u_2^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Используя собственные векторы (55) матрицы монодромии, сделаем линейную замену переменных

$$u_1 = e^{i\gamma}z + e^{-i\gamma}\bar{z}, \quad u_2 = -e^{2\theta}z - e^{2\theta}\bar{z}, \quad (80)$$

приводящую линейную часть этого отображения к диагональному виду. После перехода к комплексно сопряженным переменным z, \bar{z} полиномиальное отображение (79) представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{z} = e^{i\gamma} z + \frac{a(1 - e^{2\theta})e^{i\gamma}}{2(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})} (e^{i\gamma} z^2 + \frac{1}{2} z \bar{z} + e^{-i\gamma} \bar{z}^2) + \\ + \frac{a^2(e^{2\theta} - 1)^2 e^{i\gamma}}{8(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})} [e^{i\gamma} z^3 + (2e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) z^2 \bar{z} + (2e^{-i\gamma} + e^{i\gamma}) z \bar{z}^2 + e^{-i\gamma} \bar{z}^3]. \end{aligned} \quad (81)$$

Выпишем коэффициенты при одночленах:

$$\begin{aligned} F_{20} = a(1 - e^{2\theta}) \frac{e^{i2\gamma}}{i\sqrt{15}}, \quad F_{11} = a(1 - e^{2\theta}) \frac{e^{i\gamma}}{i2\sqrt{15}}, \quad F_{02} = a(1 - e^{2\theta}) \frac{1}{i\sqrt{15}}; \\ F_{21} = a^2(1 - e^{2\theta})^2 \frac{2e^{i2\gamma} + 1}{i4\sqrt{15}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Поскольку $\gamma = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$, то

$$|e^{i\gamma} - 1|^2 = 3/2, \quad |e^{i3\gamma} - 1|^2 = 27/8.$$

Поэтому из (51) получим:

$$W_{21}e^{-i\gamma} = a^2(1 - e^{2\theta})^2 \left[\frac{2e^{i\gamma} + 1}{i8\sqrt{15}} - \frac{2e^{i2\gamma} + 1 - 3e^{i\gamma}}{45} + \frac{e^{-i\gamma} - 1}{90} + \frac{16(e^{-i3\gamma} - 1)}{27 \cdot 15} \right]. \quad (83)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} 2e^{i2\gamma} + 1 - 3e^{i\gamma} = 2e^{i2\gamma} - 4e^{i\gamma} + e^{i\gamma} + 2 - 1 = 2(e^{i\gamma} - 1)^2 + e^{i\gamma} - 1 = \\ = (e^{i\gamma} - 1)(2e^{i\gamma} - 1) = (e^{i\gamma} - 1)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2} - 1\right) = 2(e^{-i\gamma} - 1), \end{aligned}$$

находим, что первая ляпуновская величина

$$L = \operatorname{Re}\{W_{21}e^{-i\gamma}\} = \frac{a^2(1 - e^{2\theta})^2}{48} \quad (84)$$

имеет положительное значение при любом ненулевом значении параметра $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, нулевое решение импульсной системы (72) неустойчиво при любых значениях параметров $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \theta > 0$.

Второй способ. В порядке верификации найдем значение первой ляпуновской величины, применяя готовые формулы из предыдущих разделов.

Поскольку нелинейный (векторный) одночлен $f_{11}x_1x_2$ только один и $f_{11} = (a, 0)^T$, то потребуется лишь $D_{111} = \lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = -2$. Соответственно, при $0 < t \leq \theta$,

$\tilde{f}_{11}^{(1)}(t) = ae^{-2(\theta-t)}$, поэтому

$$s_{11}^{(1)}(\theta) = -\frac{a}{2}(e^{-2\theta} - 1), \quad s_{12}^{(1)}(\theta) = \frac{a^2(1 - e^{-2\theta})^2}{8},$$

$$s_{11}^{(2)}(\theta) = 0, \quad s_{12}^{(2)}(\theta) = 0.$$

Все остальные коэффициенты $s_m(\theta)$ равны нулю.

В результате находим лишь два ненулевых коэффициента в правой части (34):

$$p_{11} = Ms_{11} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4}(1 - e^{-2\theta}) \\ \frac{a}{2}(1 - e^{-2\theta}) \end{pmatrix}, \quad p_{12} = Ms_{12} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{16}(1 - e^{-2\theta})^2 \\ -\frac{a^2}{8}e^{2\theta}(1 - e^{-2\theta})^2 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

в точности такие же, как и в (79).

Линейным преобразованием перейдем к комплексно сопряженным переменным и найдем коэффициенты полинома (41) $\tilde{z} = F(z)$ по готовым формулам (40)–(43).

Согласно (40) и (85) все $\eta_n = 0$ с $|n| = 2, 3$, кроме,

$$\eta_{11} = \frac{-i2e^{2\theta}}{\sqrt{15}} \left[e^{i\gamma} \frac{a}{4}(1 - e^{-2\theta}) - \frac{a}{2}(1 - e^{-2\theta}) \right] = \frac{iae^{2i\gamma}}{\sqrt{15}}(1 - e^{2\theta}),$$

$$\eta_{12} = \frac{-i2e^{2\theta}}{\sqrt{15}} \left[e^{i\gamma} \frac{a^2}{16}(1 - e^{-2\theta})^2 - \frac{a^2}{8}(1 - e^{-2\theta})^2 \right] = -i \frac{a^2 e^{2\theta} (1 - e^{-2\theta})^2}{4\sqrt{15}} e^{2i\gamma}. \quad (86)$$

Учитывая, что $v_1 = e^{-2\theta}$, $v_2 = -e^{-i\gamma}$, из (42) получим

$$F_{20} = i \frac{a(1 - e^{-2\theta})}{\sqrt{15}} e^{i\gamma}, \quad F_{11} = i \frac{a(1 - e^{-2\theta})}{2\sqrt{15}} e^{2i\gamma}, \quad F_{02} = i \frac{a(1 - e^{-2\theta})}{\sqrt{15}} e^{i\gamma}. \quad (87)$$

Из (43) и (85) находим

$$F_{21} = -i \frac{a^2(1 - e^{-2\theta})^2}{4\sqrt{15}} (2e^{i2\gamma} + 1) = i \frac{a^2(1 - e^{-2\theta})^2}{4\sqrt{15}} (1 - e^{i\gamma}). \quad (88)$$

В итоге получаем следующее значение первой ляпуновской величины:

$$L = \operatorname{Re}(W_{21}e^{-i\gamma}) = a^2(1 - e^{-2\theta})^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{30} - \frac{1}{120} - \frac{1}{15} \right) = \frac{a^2(1 - e^{-2\theta})^2}{48} e^{-4\theta} \quad (89)$$

Как и в предыдущем примере, оно отличается от первого варианта (84) положительным множителем $e^{-4\theta}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы описан алгоритм вычисления первой ляпуновской величины для периодической импульсной системы второго порядка в критическом случае, когда матрица монодромии линеаризации имеет комплексно сопряженные мультипликаторы, лежащие на единичной окружности комплексной плоскости. Препежние

публикации авторов [13–15], посвященные этому алгоритму, содержали опечатки и неточности. Основной целью настоящей работы была верификация расчетных формул. Во второй части статьи приведены результаты аналитических вычислений для двух тестовых примеров двумя независимыми способами. Совпадение итоговых значений обосновывает правильность приведенных формул алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко, А. М.; Перестюк, Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
SAMOILENKO, A. M. & PERESTYUK M. O. (1987) *Impulsive differential equations*. Kyiv: Vuscha shkola.
2. SAMOILENKO, A. M. & PERESTYUK M. O. (1995) *Impulsive differential equations*. River Edge: World Scientific.
3. BAINOV, D. D. & SIMEONOV P. S. (1989) *Systems with impulse effect: stability, theory and applications*. N.-Y., Halsted Press.
4. LAKSHMIKANTHAM, V., BAINOV, D. D. & SIMEONOV, P. S. (1989) *Theory of impulsive differential equations*. World Scientific, Singapore. — New Jersey. — London.
5. BAINOV, D. D. & SIMEONOV P. S. (1993) *Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*. New York: Longman Scientific & Technical.
6. AKHMET, M. (2010) *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New-York: Springer.
7. HRISTOVA, S. G. (2009) *Qualitative investigations and approximate methods for impulsive equations*. New York: Nova Science Publishers, Inc.
8. STAMOV, G. T. (2012) *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*. Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer.
9. CHURCH, K. E. M. & LIU, X. (2021) *Bifurcation theory of impulsive dynamical systems*. IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, Vol. 34. Springer Nature.
10. HADDAD, W. M., CHELLABOINA, V. & NERSESOV, S. G. (2006) *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability Dissipativity and Control*. Princeton: Princeton University Press.

11. STAMOVA, I. (2009) *Stability analysis of impulsive functional differential equations*. Berlin-New York: de Gruyter.
12. Бабенко, С. В.; Слынько В. И. Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием второго порядка в критических случаях // Доповіді НАНУ. — 2008. — 6. — С. 46–52.
BABENKO, S. V. & SLYN'KO, V. I. (2008) Stability of motion of nonlinear systems with impulsive action of the second order in critical cases. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* 6. Pp. 46–52.
13. ANASHKIN, O. (2018) Bifurcations of solutions of impulsive differential equations. *2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"*. (Pyatnitskiy's Conference (STAB)). Pp. 1–3.
14. ANASHKIN, O. & YUSUPOVA, O. (2020) Sufficient conditions for stability of the equilibrium position of an impulsive system. *15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems*. (Pyatnitskiy's Conference (STAB)). Pp. 1–4.
15. ANASHKIN, O. V. & YUSUPOVA, O. V. (2021) Stability in the Critical Case and Bifurcations in Impulsive Systems. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 42 (15). Pp. 3574–3583.
16. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия / Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль. — Пуццино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. — 215 с.
KHAZIN, L. G. & SHNOL, E. E. (1991) *Stability of Critical Equilibrium States (NONLINEAR SCIENCE)*. Manchester Univ Pr.

УДК: 517.58

MSC2010: 65T50

КРАТКИЙ ВЫВОД АЛГОРИТМА КУЛИ–ТЬЮКИ

© М. С. Беспалов

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АЛЕКСАНДРА ГРИГОРЬЕВИЧА И НИКОЛАЯ ГРИГОРЬЕВИЧА СТОЛЕТОВЫХ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ
УЛ. ГОРЬКОГО, 87, ВЛАДИМИР, 600000, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *bespalov@vlsu.ru*

BRIEF DERIVATION OF THE COOLEY–TUKEY ALGORITHM.

Bespalov M. S.

Abstract. In the development of digital information processing are distinguished the emergence of a fast algorithm for the implementation of the discrete Fourier transform (DFT), known as the Fast Fourier Transform (FFT).

The description of this famous algorithm appeared in a paper by Cooley and Tukey, and is a flow of concepts from Good's ideas for the discrete Walsh transform to DFT.

The paper gives the final form of the matrix notation of the FFT algorithm for an arbitrary composite order. It is proposed that the algorithm should start with a reverse permutation rather than include a perfect reshuffle in each step of the algorithm.

The inverse permutation matrix is presented as a b-product of unit matrices (the b-product is a new type of tensor product of matrices introduced earlier by the author). The complete derivation of the FFT algorithm is given.

The methodical aspect of the article is that it can be used in the educational process, the practical significance is in that the results can be used for software development.

The new in the matrix form of FFT is the representation of the L permutation matrix as the b -product of the identity matrices. This allows the algorithm to start with a reverse rearrangement, without being distracted by subsequent permutations. In the algorithms which are presented in the Internet FFT permutation in the form of the perfect shuffle offer to do at every step.

The program and algorithm of the composite order FFT is based on theorem 1 or its consequences, similar to theorem 2. The flowchart for $N = 16$ was represented earlier.

Keywords: *Fast Fourier Transform, tensor product of matrices.*

ВВЕДЕНИЕ

В качестве революционного скачка в развитии цифровой обработки информации выделяют появление быстрого алгоритма реализации дискретного преобразования Фурье (ДПФ), известного под названием быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Описание этого знаменитого алгоритма появилось в статье [1] Кули и Тьюки и является переносом идей, предложенных Гудом [2] для дискретного преобразования Уолша, на ДПФ.

При практическом применении чаще рассматривают ДПФ порядка $N = 2^n$. В статье предлагается короткий (за счет формализации) вывод этого знаменитого алгоритма для общего случая составного порядка $N = n_1 n_2 \dots n_k$. Матричная форма ДПФ из обзора [3], изложенная в [4], дополнена новым вариантом тензорного произведения матриц, введенным в [5], и новым подходом к доказательству.

В качестве основного аппарата используются два вида тензорного произведения матриц, сравнительная характеристика которых приведена в [6]. Это кронекерово произведение $A \otimes B$ и b -произведение $A \circ B$. Напомним, что кронекерово произведение матриц $A = (a_{kj})$ и B представляется [7] в виде блочной матрицы с блоками вида $a_{kj} \cdot B$. Также в виде блочной матрицы с блоками в виде произведения столбца первой на строку второй матриц определяется [5] и b -произведение. Поясним определение с помощью примера с матрицами

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad (1)$$

$$H \otimes E = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (10) & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (10) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (01) & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (01) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

То есть, в блок-строке меняется столбец первого сомножителя, а в блок-столбце меняется строка второго сомножителя.

В [6] доказано, что каждое из этих двух видов тензорного произведения ассоциативно и для них справедлива

Лемма. Если размеры матрицы таковы, что обычные умножения возможны, то

$$(A \cdot B) \otimes (C \cdot D) = (A \otimes C) \cdot (B \otimes D), \quad (3)$$

$$(A \cdot B) \circ (C \cdot D) = (A \circ C) \cdot (B \otimes D) = (C \otimes A) \cdot (B \circ D). \quad (4)$$

Эта лемма применяется для факторизации, рассматриваемой в данной статье, матрицы Фурье, являющейся матрицей обратного ДПФ

$$F_N = \left(\omega_N^{jk} \right)_{j,k=0}^{N-1}, \quad \text{где } \omega_N = \exp \frac{2\pi i}{N}. \quad (5)$$

Прямое ДПФ задается матрицей \overline{F}_N или формулой (5) с заменой ω_N на $\overline{\omega}_N = \omega_N^{-1}$. ДПФ вида (5) переводит входной сигнал x , представленный в виде N -мерного столбца, в сигнал на выходе по формуле

$$y = F_N \cdot x,$$

что в координатной форме записывается так

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

При анализе ДПФ и в других сферах часто встречается перестановочная матрица идеальной тасовки (perfect shuffles) [8], которая $N = nm$ упорядоченных чисел от 0 до $N-1$ переводит из одного лексикографического порядка (относительно двухразрядной по основаниям n и m системы счисления) в другой. А именно, число $k + sm$ переходит в $s + kn$, где k пробегает от 0 до $m-1$, а s пробегает от 0 до $n-1$. В докладе [4] эти матрицы обозначены $L_{mn}^{(n)}$. Легко заметить, что матрица идеальной тасовки выражается через b -произведение единичных матриц

$$L_{mn}^{(n)} = I_m \otimes I_n.$$

При умножении этой матрицы на массив x выбираются из x подмассивы объема m с шагом n и помещаются подряд.

1. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ БПФ СОСТАВНОГО ПОРЯДКА

Пусть $N = nm$. Применяя соотношение $\omega_N^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)^n = \omega_m$ к формуле (6) для начальных m координат выходного сигнала, получим

$$y_k = \sum_{j_2=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} x_{j_2n+j_1} \omega_N^{k(j_2n+j_1)} = \sum_{j_2=0}^{m-1} \left(\sum_{j_1=0}^{n-1} x_{j_2n+j_1} \omega_N^{kj_1} \right) \omega_m^{kj_2}.$$

Общий вид номера отсчета возьмем $sm+k$, где $0 \leq k < m$, $0 \leq s < n$, и, используя сокращение $a_j = x_j \omega_n^{sj}$ и соотношение $\omega_n^n = 1$, получим:

$$\begin{aligned} y_{k+sm} &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{kj+smj} = \sum_{j=0}^{N-1} (x_j \omega_n^{sj}) \omega_N^{kj} = \sum_{j_2=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{n-1} a_{j_2n+j_1} \omega_N^{k(j_2n+j_1)}. \\ y_{k+sm} &= \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{m-1} a_{j_2n+j_1} \omega_N^{kj_1} \omega_m^{kj_2} = \sum_{j_1=0}^{n-1} \omega_n^{sj_1} \omega_N^{kj_1} \sum_{j_2=0}^{m-1} x_{j_2n+j_1} \omega_m^{kj_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Запись данной формулы (7) в матричном виде и составляет основное

Предложение. Матрица ДПФ порядка $N = nm$ факторизуется (раскладывается на множители) в виде

$$F_{nm} = (F_n \otimes I_m) \cdot T_{nm}^{(n)} \cdot (I_n \otimes F_m) \cdot (I_m \otimes I_n), \quad (8)$$

где $T_{nm}^{(n)}$ — диагональная матрица порядка $N = nm$ с элементами на диагонали $t_{k+jm} = \omega_N^{kj}$, I_n — единичная матрица порядка n .

Поясним этот переход. Внутренняя сумма в (7) равная $\sum_{j_2=0}^{m-1} x_{j_2n+j_1} \omega_m^{kj_2}$ в матричном виде вычисляется по формуле

$$(I_n \otimes F_m) \cdot (I_m \otimes I_n) \cdot x.$$

Сначала осуществляется перестановка элементов в виде идеальной тасовки, а потом ДПФ порядка m для каждой из n пачек.

Умножение в (7) на поправочные множители $\omega_N^{kj_1}$ в матричном виде записывается с помощью умножения на диагональную матрицу $T_{nm}^{(n)}$ с этими элементами на диагонали.

Внешняя сумма в (7) есть m раз повторенное ДПФ порядка n с выбором элементов с шагом m и размещением результата вычислений в те же ячейки. Это параллельное вычисление в матричном виде оформляется с использованием операции кронекерова произведения в виде оператора с матрицей $F_n \otimes I_m$. При этом результат вычисления получается в нужном порядке: сначала при $s = 0$ для всех k от 0 до $m - 1$, потом при $s = 1$ при том же наборе k и т. д.

Формулу (8) можно немного сократить применением свойства (4), до

$$F_{nm} = (F_n \otimes I_m) \cdot T_{nm}^{(n)} \cdot (F_m \otimes I_n).$$

Приведенный вывод БПФ отличен от предложенного в [4]. Формула (7) удобнее (8) при составлении алгоритма, а описанный переход полезен при построении блок-схемы в виде стандартных многокрылых «бабочек».

2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ БПФ СОСТАВНОГО ПОРЯДКА

Пусть $N = n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1$.

Введем обозначения $m_j = n_1 n_2 \dots n_j$, $M_j = n_{j+1} n_{j+2} \dots n_k$, где $m_0 = 1$, $M_k = 1$, $N = m_j M_j$. Для предыдущего уровня обозначим $\tilde{N} = n_{k-1} \dots n_2 n_1$ и $\tilde{M}_j = n_{j+1} n_{j+2} \dots n_{k-1}$, где $\tilde{M}_{k-1} = 1$.

Теорема 1. Матрица ДПФ порядка $N = n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1$ факторизуется в виде

$$F_N = S_k \cdot S_{k-1} \cdot \dots \cdot S_1 \cdot L, \quad (9)$$

где $S_j = (I_{M_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}}) \cdot (I_{M_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)})$, $L = I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \dots \otimes I_{n_k}$.

Доказательство. Формула (8) при $n_1 = m$, $n_2 = n$ составляет базу индукции. Индуктивное предположение состоит в верности формулы

$$F_{\tilde{N}} = \tilde{S}_{k-1} \cdot \tilde{S}_{k-2} \cdot \dots \cdot \tilde{S}_1 \cdot \tilde{L}, \quad (10)$$

где $\tilde{S}_j = (I_{\tilde{M}_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}}) \cdot (I_{\tilde{M}_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)})$, $\tilde{L} = I_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \dots \otimes I_{n_{k-1}}$.

Так как $N = n_k \tilde{N}$, то по (8)

$$F_N = (F_{n_k} \otimes I_{\tilde{N}}) \cdot T_N^{(n_k)} \cdot (I_{n_k} \otimes F_{\tilde{N}}) \cdot (I_{\tilde{N}} \otimes I_{n_k}). \quad (11)$$

Первые два сомножителя (11) составляют S_k . В третий сомножитель подставим (9) и k раз применим формулу (3)

$$\begin{aligned} I_{n_k} \otimes F_{\tilde{N}} &= (I_{n_k})^k \otimes (\tilde{S}_{k-1} \cdot \tilde{S}_{k-2} \cdot \dots \cdot \tilde{S}_1 \cdot \tilde{L}) = \\ &= (I_{n_k} \otimes \tilde{S}_{k-1}) \cdot (I_{n_k} \otimes \tilde{S}_{k-2}) \cdot \dots \cdot (I_{n_k} \otimes \tilde{S}_1) \cdot (I_{n_k} \otimes \tilde{L}). \end{aligned}$$

Каждый, кроме последнего, множитель при j от 0 до $k-1$ по формуле (3) приводит к

$$\begin{aligned} I_{n_k} \otimes \tilde{S}_j &= (I_{n_k})^2 \otimes \left((I_{\tilde{M}_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}}) \cdot (I_{\tilde{M}_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)}) \right) = \\ &= (I_{n_k} \otimes I_{\tilde{M}_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}}) \cdot (I_{n_k} \otimes I_{\tilde{M}_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)}) = S_j, \end{aligned}$$

так как $I_{n_k} \otimes I_{\tilde{M}_j} = I_{M_j}$.

А последний объединим с последним из (11) и применим (4)

$$(I_{n_k} \otimes \tilde{L}) \cdot (I_{\tilde{N}} \otimes I_{n_k}) = (\tilde{L} \cdot I_{\tilde{N}}) \otimes (I_{n_k})^2 = \tilde{L} \otimes I_{n_k} = L. \quad \square$$

Следствие 1. Основную формулу БПФ (9) можно слегка сократить за счет совмещения предварительной перестановки L с S_1 — первым шагом вычислений (формула (2) есть простейший пример этого совмещения):

$$S_1 \cdot L = F_{n_1} \otimes I_{n_2} \otimes \dots \otimes I_{n_k}.$$

Доказательство. Так как $T_{m_1}^{(n_1)} = T_{n_1}^{(n_1)} = I_{n_1}$, то $S_1 = I_{M_1} \otimes F_{n_1}$. Обозначим $L_1 = I_{n_2} \otimes \dots \otimes I_{n_k}$. По формуле (4)

$$S_1 \cdot L = (I_{M_1} \otimes F_{n_1}) \cdot (I_{n_1} \otimes L_1) = F_{n_1} \otimes L_1.$$

Следствие 2. При $N = n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1$ возможен следующий метод факторизации в обратном порядке

$$F_N = L^T \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_k, \quad (12)$$

где $S_j = (I_{M_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)}) \cdot (I_{M_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}})$, $L^T = I_{n_k} \otimes \dots \otimes I_{n_2} \otimes I_{n_1}$.

Доказательство. Относительно операции транспонирования различные виды умножения ведут себя по разному, что для тензорных произведений доказано в [6]:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \quad (A \oslash B)^T = B^T \oslash A^T.$$

Изменим обозначение на $R_j = (I_{M_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}}) \cdot (I_{M_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)})$ в (9) и протранспонируем

$$F_N = (F_N)^T = (R_k \cdot R_{k-1} \cdot \dots \cdot R_1 \cdot L)^T = L^T \cdot (R_1)^T \cdot \dots \cdot (S_k)^T.$$

Так как матрицы I_n и F_n симметричны, то

$$(R_j)^T = (I_{M_j} \otimes T_{m_j}^{(n_j)})^T \cdot (I_{M_j} \otimes F_{n_j} \otimes I_{m_{j-1}})^T = S_j.$$

3. НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫЙ СЛУЧАЙ БПФ

На практике наибольшую популярность получил случай БПФ порядка $N = 2^n$. Если будем использовать обозначения H и E из (1) и сокращения $E_j = E^{j \otimes} = I_{2^j}$, то формулы (9) и (12) переписутся в виде.

Следствие 3. При $N = 2^n$ верны формулы факторизации

$$F_N = S_n \cdot S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_1 \cdot L,$$

где $S_j = E_{n-j-1} \otimes ((H \otimes E_{j-1}) \cdot T_{2^j}^{(2)})$, $L = E^{n \otimes}$;

$$F_N = L \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_n,$$

где $S_j = E_{n-j-1} \otimes (T_{2^j}^{(2)} \cdot (H \otimes E_{j-1}))$, $L = E^{n \otimes}$.

В [6] доказано, что преобразование с матрицей L есть перестановка реверс, подробное описание которой приведено в [9]. Если ввести обозначение $x + 1$ для операции добавления ко всем элементам массива x единицы, то программа построения перестановки в реверсном порядке множества чисел $\{0, 1, \dots, N - 1\}$, где $N = 2^n$, выглядит так:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{для } j \text{ от } 1 \text{ до } n - 1 \quad \text{выполняем} \quad x := \begin{pmatrix} 2x \\ 2x + 1 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование с матрицей $H = F_2$ служит не только ДПФ порядка 2, но и примитивным дискретным преобразованием Хаара, и представляет собой переход от входного вектора $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ к вектору на выходе $y = \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$ по формуле умножения матриц $y = H \cdot x$, что обозначим $y = H(x)$. Условно это преобразование можно записать в виде перехода

$$(a, b) \xrightarrow{H} (a + b, a - b). \tag{13}$$

Кроме (13) в дальнейшем будем использовать *поправленное дискретное преобразование Хаара* $y = H_\lambda(x)$ с поправкой λ с условным обозначением

$$(a, b)_\lambda \xrightarrow{H} (a + \lambda b, a - \lambda b).$$

Введем для произвольного сигнала x длины 2^n (то есть уровня n) понятие *подсигнала* длины 2 с *уровнем прореживания* k , который указывает на шаг при выборе координат подсигнала.

То есть исходный сигнал x при каждом заданном j будем разбивать на 2^{n-1} непересекающихся подсигнала (дизъюнктивное разбиение).

Если $j = 0$, то прореживание отсутствует. Тогда определим

$$x_m[0] := (x_{2m} \ x_{2m+1}) \quad \text{для } m \in 0 : 2^{n-1} - 1.$$

Координаты в подсигнал брали с шагом $2^0 = 1$.

В общем случае прореживания уровня j координаты в подсигнал берем с шагом 2^j и организуем сквозную нумерацию подсигналов так, что сигнал с меньшими координатами получает меньший номер:

$$x_{m2^j+k}[j] := (x_{m2^{j+1}+k} \ x_{m2^{j+1}+k+2^j}) \quad \text{для } m \in 0 : 2^{n-j-1} - 1, \ k \in 0 : 2^j - 1.$$

Теорема 2. Алгоритмический вид быстрого алгоритма дискретного преобразования Фурье порядка $N = 2^n$ состоит из предварительного шага в виде реверсной перестановки и следующих основных шагов быстрого алгоритма:

для j от 0 до $n - 1$, для m от 0 до $2^{n-j-1} - 1$ и для k от 0 до $2^j - 1$ выполняем

$$a_{m2^j+k}[j] := H_{\omega_{2^{j+1}}^k} (a_{m2^j+k}[j]).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методический аспект статьи состоит в том, что ее можно использовать в учебном процессе, практическая значимость — результаты можно применять для разработки программного обеспечения.

Новым в матричной записи БПФ служит представление перестановочной матрицы L в виде b -произведений единичных матриц. Это позволяет начать алгоритм с реверсной перестановки, не отвлекаясь в дальнейшем на перестановки. В представленных в интернете вариантах БПФ перестановку в виде идеальной тасовки предлагают делать на каждом шаге.

Программа и алгоритм БПФ составного порядка строится на основе теоремы 1 или ее следствий по аналогии с теоремой 2. Блок-схема для $N = 16$ представлена в [10, с. 65].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. COOLEY, J. W. & TUKEY, J. W. (1965) An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*. 19 (90). Pp. 297–301.
2. GOOD, I. J. (1958) The interaction algorithm and practical Fourier analysis. *J. Royal Stat. Soc.*. Ser.B. (20). Pp. 361–372.
3. JOHNSON, J., JOHNSON, R. W., RODRIGUEZ, D. & TOLIMIERI, R. (1990) A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures. *Circuits, Systems and Signal Processing*. 9 (4). Pp. 449–500.
4. Малоземов, В. Н., Просеков, О. В. Факторизация Кули-Тьюки матрицы Фурье / Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Часть первая. Изд. 2-е. Под ред. проф. В. Н. Малоземова // СПб.: Изд-во ВВМ. — 2014. — С. 20–29.
MALOZEMOV, V. N. & PROSEKOV, J. V. (2014) Cooley–Tukey factorization of the Fourier matrix. *Selected chapters of discrete harmonic analysis and geometric modeling. Part one. Ed. prof. V. N. Malozemov*. St.Petersburg: VVM. Pp. 20–29.
5. Беспалов, М. С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 2. Введение в прикладной гармонический анализ / М. С. Беспалов. — Владимир: ВлГУ, 2007. — 244 с.
BESPALOV, M. S. (2007) *Mathematical methods in informatics and computer science. Part two. Introduction to applied harmonic analysis*. Vladimir: VISU..
6. Беспалов, М. С. О свойствах тензорного произведения матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — 54(4). — С. 547–561.
BESPALOV, M. S. (2014) On the Properties of a New Tensor Product of Matrices. *Computation Mathematics and Mathematical Physics*. 54 (4). Pp. 531–574.
7. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. — М.: Наука, . — с.1969368
BELLMAN, R. (1960) *Introduction to Matrix Analysis*. New York, Toronto, London: MCGRAY-HILL BOOK COMPANY.
8. DIACONIS, P., GRAHAM, R. L. & KANTOR, W. M. (1983) The mathematics of perfect shuffles. *Adv. in Appl. Math.*. 4 (2). Pp. 175–196.

9. Малоземов, В. Н. Основы дискретного гармонического анализа / В. Н. Малоземов, С. М. Машарский. — СПб.: Лань, 2012. — 304 с.
MALOZEMOV, V. N. & MASHARSKI, S. M. (2012) *Discrete harmonic analysis basics*. St.Petersburg: Lan..
10. Беспалов, М. С. Дискретные и вероятностные модели / М. С. Беспалов. — Владимир: ВлГУ, 2017. — 84 с.
BESPALOV, M. S. (2017) *Discrete and probabilistic models*. Vladimir: VISU.

УДК: 517:957

MSC2010: 35K55, 35K61, 35C15

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

© В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: art-inf@yandex.ru, khazova.yuliya@hotmail.com

STRUCTURE OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR EQUATIONS IN RING RESONATOR.

Lukianenko V. A., Khazova Yu. A.

Abstract. A mathematical model of the process of formation of phase spatial structures in the cross section of a coherent light beam in a non-linear optical system with spatially distributed feedback as a nonlinear ring resonator is considered.

The simultaneous consideration of diffraction and non-linearity results in a variety of spatial structures. Nonlinear wave dynamics of spatially distributed optical systems is represented by the following phenomena: spatial bistability and multi-stability, formation of regular spatial diffraction structures, formation of optical vortices, solitons, dissipative structures, etc.

The model of a ring resonator containing a layer of a nonlinear medium with cubic nonlinearity is based on the study of two related equations: the equation which are describing the time dynamics of phase modulation of a light wave in a nonlinear medium, and equations which are describing the time dynamics of the complex amplitude of the light field within the resonator, taking into account the diffraction.

This model takes into account the local transverse interactions of the light wave with the nonlinear medium caused by both the diffusion of the particles of the nonlinear medium and the diffraction of the light wave. Due to simultaneous action of two physical processes in the system there are spatio-temporal phase structures.

The nonlinear functional-differential equations of the parabolic type with feedback and transformation of spatial variables (which is given by involution operator) were previously considered. The involution operator property (rotation, reflection) allows to reduce the original equation to a system of equations without transformation of spatial variables. The set of solutions of such equations is determined by two parameters: low diffusion coefficient, and high flow rate. Also considered are the initial boundary problems for a circle, circle, ring with involution operator.

This article considers a mathematical model of a ring resonator, consisting of a system of linear and nonlinear equations in partial derivatives. Stationary solutions are analyzed and stability zones of the corresponding linearized problem solutions are studied. For the case of a thin ring (circle), the problem is represented as a nonlinear integral equation.

Keywords: *nonlinear ring resonator, spatial mode, phase pattern.*

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается математическая модель процесса формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе.

Одновременный учет дифракции и нелинейности приводит к возникновению многообразия пространственных структур. Нелинейная волновая динамика пространственно распределенных оптических систем представлена следующими явлениями: пространственная бистабильность и мультистабильность, формирование регулярных пространственных дифракционных структур, образование оптических вихрей, солитонов, диссипативных структур и т. д.

Модель кольцевого резонатора, содержащего слой нелинейной среды с кубической нелинейностью [1], основана на изучении двух связанных друг с другом уравнений: уравнения, описывающего временную динамику фазовой модуляции световой волны в нелинейной среде, и уравнения, описывающего временную динамику комплексной амплитуды светового поля внутри резонатора с учетом дифракции. Оптическая схема исследуемой системы показана на рис. 1.

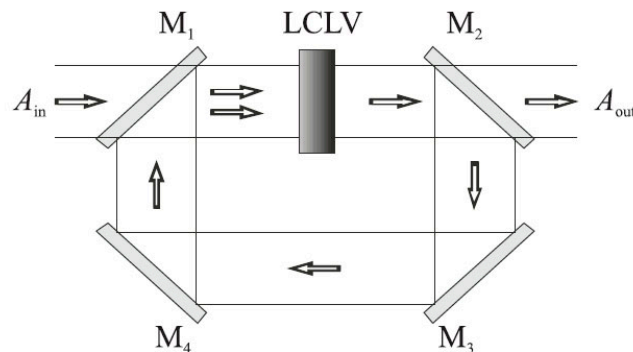


Рис. 1. Схема пассивного нелинейного кольцевого резонатора: M_1 – M_4 — зеркала, LCLV (liquid crystal light valve) — нелинейная среда, A_{in} и A_{out} — комплексные амплитуды входного и выходного полей соответственно. Зеркала M_3 и M_4 обладают 100%-м отражением, а зеркала M_1 и M_2 имеют коэффициент отражения R по интенсивности [1]

Данная модель учитывает локальные поперечные взаимодействия световой волны с нелинейной средой, вызванные как диффузией частиц нелинейной среды, так и дифракцией световой волны. Благодаря одновременному действию двух физических процессов в системе возникают пространственно-временные фазовые структуры.

В работах [2–7] для исследования подобных оптических систем в качестве математической модели использовалось нелинейное параболическое уравнение с преобразованием пространственной переменной: для случая отражения в [2–5] и поворота в [6, 7] пространственной переменной. Уравнения рассматривались на окружности и отрезке с условиями периодичности. Построение разложений периодических решений в такого рода задачах основывалось на методе центрального многообразия [2, 3], методе Галеркина [4–6] и методе сведения к нелинейному интегральному уравнению [7].

В [8, 9] рассматривались нелинейные функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с обратной связью и преобразованием пространственных переменных (которое задает оператор инволюции). Свойство оператора инволюции (поворот, отражение) позволяет свести исходное уравнение к системе уравнений без преобразования пространственных переменных. Множество решений таких уравнений определяется двумя параметрами: малым — коэффициентом диффузии, и большим — коэффициентом интенсивности потока. Также рассматривались начально-краевые задачи для окружности, круга, кольца с оператором инволюции.

В работах [11, 12] изучались ротационные и вращающиеся волны в параболических функционально-дифференциальных уравнениях с преобразованием поворота и запаздыванием. В [13] исследована смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, интегральные представления решения функционально-дифференциального параболического уравнения изучены в [14].

В данной статье рассматривается математическая модель кольцевого резонатора, состоящая из системы линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Анализируются стационарные решения и исследуются зоны устойчивости решений соответствующей линейаризованной задачи. Для случая тонкого кольца (окружности) задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КООРДИНАТ

Динамика нелинейной фазовой модуляции $u(r, t)$ характеризует набег фазы световой волны в нелинейной среде. Предполагается, что поляризованность среды подчиняется релаксационному уравнению дебаевского типа, учитывающему конечность времени релаксации нелинейности и наличие в среде поперечных взаимодействий диффузионного характера

$$u_t + u = D\Delta u + K|A(r, 0, t)|^2. \quad (1)$$

Здесь $r = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечном сечении светового поля; z — продольная координата; t — время; Δ — лапласиан, описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D — нормированный коэффициент диффузии; K — коэффициент нелинейности среды, $|A(r, 0, t)|^2$ — интенсивность светового поля, попадающего в нелинейную среду; $A(r, z, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора, которая перед слоем нелинейной среды складывается из двух частей: комплексной амплитуды входного поля после прохождения зеркала M_1 и комплексной амплитуды поля после распространения в резонаторе.

Динамика комплексной амплитуды поля $A(r, z, t)$ непосредственно перед слоем нелинейной среды описывается следующим образом:

$$A(r, z, t + t_r) = (1 - R)^{\frac{1}{2}} A_{in}(r) + R e^{i\varphi_0} \exp(iL\Delta\{A(r, z, t)e^{iu(r,t)}\}) \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

Здесь R — коэффициент отражения зеркал по интенсивности; $A_{in}(r)$ — комплексная амплитуда входной световой волны; t_r — время распространения поля в резонаторе; φ_0 — постоянный фазовый сдвиг световой волны в резонаторе; L — длина резонатора, нормированная на дифракционную длину, которая определяется диаметром апертуры резонатора или входного пучка.

Процесс дифракционного распространения поля в резонаторе представлен в уравнении (2) оператором распространения $\exp(iL\Delta)$ и описывается обычным уравнением дифракции в приближении квазиоптики с граничным условием, которое определяется полем непосредственно после слоя нелинейной среды:

$$-2ik_0 \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial z} = \Delta A(r, z, t), \quad A(r, 0, t) = A_0(r, t). \quad (3)$$

Сделаем несколько предположений, упрощающих модель. Во-первых, если толщина слоя нелинейной среды много меньше длины резонатора, т. е. $l \ll L$, то можно пренебречь поглощением света в нелинейной среде. Это значит, что нелинейная среда оказывает влияние только на фазу распространяющейся световой волны. Во-вторых, можно считать, что время распространения световой волны в резонаторе много меньше, чем время релаксации нелинейности, т. е. $t_r = L/c \ll \tau_0$. Таким образом, анализируется случай «медленной» нелинейности без учета эффектов, связанных с временным запаздыванием поля в резонаторе [1].

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим область $\Omega = \{(r, \varphi) | 0 \leq qr \leq qr_0, 0 \leq q\varphi \leq q2\pi\}$. Система уравнений (1)–(3) имеет пространственно-однородное стационарное решение. Обозначая u_s и A_s соответственно как стационарные значения фазы $u(r, \varphi, t)$ и амплитуды

$A(r, \varphi, z, t)$ поля в нелинейной среде, найдем их структуры. Для этого подставим $u = u_s$, $A = A_s$ и $A_{in} = A_{ins}$ в уравнения (1) и (2). Уравнение (3) выполняется автоматически. Получим

$$u_s = K|A_s|^2, \\ A_s = (1 - R)^{1/2} A_{ins} + Re^{i\varphi_0} \exp iL\Delta\{A_s \exp iu_s\},$$

или

$$A_s = (1 - R)^{1/2} A_{ins} + Re^{i\varphi_0} A_s e^{iu_s}.$$

Откуда следует, что

$$A_s = (1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)})^{-1} \sqrt{1 - R} A_{ins}. \quad (4)$$

С учетом (1) уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$|A_s|^2 = A_s \bar{A}_s = \frac{\sqrt{1 - R} A_{ins} \bar{A}_{ins} \sqrt{1 - R}}{(1 - Re^{i(u_s + \varphi_0)})(1 - Re^{-i(u_s + \varphi_0)})} = \frac{(1 - R) |A_{ins}|^2}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}, \\ K|A_s|^2 = \frac{(1 - R) K I_0}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2} = u_s.$$

Получим

$$u_s = \frac{(1 - R)k}{1 - 2R \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}, \quad (5) \\ u_s = K|A_s|^2, \quad k = K I_0, \quad I_0 = |A_{ins}|^2.$$

В зависимости от изменения параметров k , R , φ_0 уравнение (5) может иметь разные значения корней u_s , а следовательно и A_s (4). На рис. 2 решения уравнения (5) представлены в виде пересечения графиков $\cos(u_s + \varphi_0)$ и $\frac{1 + R^2}{2R} - \frac{1 - R}{2R} \frac{k}{u_s}$ для значений параметров $\varphi_0 = 0$, $R = 0.5$.

С ростом $k \rightarrow \infty$ количество корней u_s постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Такое состояние системы говорит о наличии большого количества пространственно-неоднородных структур.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Линеаризуем уравнения (1)–(3) в окрестности стационарных решений u_s , A_s , A_{ins} . Здесь оператор Лапласа определяется следующим образом: $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{\varphi\varphi}$.

Пусть $A_{in}(r) = A_{ins} + f(r)$, $A_{ins} = const$, $f(r) = 0$, тогда

$$u = u_s + v(r, t), \\ A = A_s + B(r, z, t). \quad (6)$$

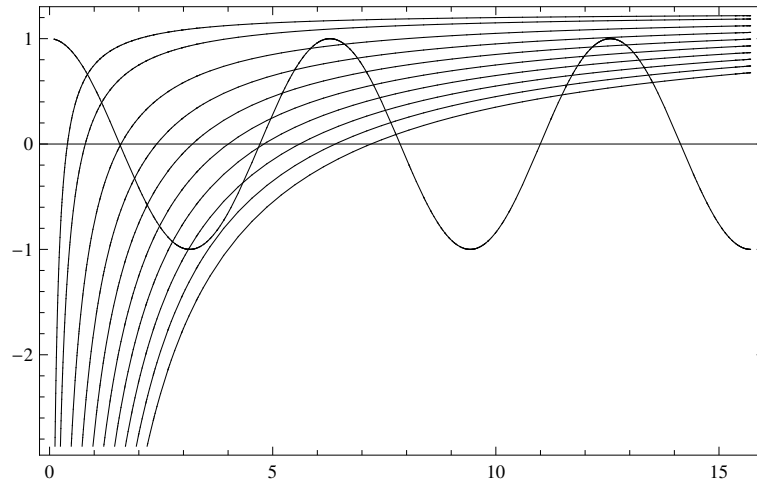


Рис. 2. Графическое построение решений u_s при увеличении k

Подставим (6) в (1):

$$\begin{aligned} v_t + v + u_s &= D\Delta v + K|A_s + B(r, 0, t)|^2, \\ v_t + v + u_s - K|A_s|^2 &= D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B} + |B|^2). \end{aligned}$$

С учетом (5) и

$$|A_s + B|^2 = (A_s + B)(\bar{A}_s + \bar{B}) = |A_s|^2 + \bar{A}_s B + A_s \bar{B} + |B|^2$$

линеаризованное уравнение имеет вид

$$v_t + v = D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}). \quad (7)$$

Заметим также, что

$$\bar{A}_s B + A_s \bar{B} = \operatorname{Re}(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}).$$

Линеризуем теперь уравнение (2). Операторная экспонента представима в виде

$$\exp(iL\Delta) \approx 1 + iL\Delta + \frac{(iL)^2}{2}\Delta^2 + \dots$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \exp(iL\Delta\{Ae^{iu}\}) &= e^{iu_s} [(A_s + iA_s v + B) + iL(iA_s \Delta v + \Delta B) + \dots] = \\ &= e^{iu_s} [A_s + iA_s(v + iL\Delta v) + (B + iL\Delta B)] + \dots = \\ &= A_s e^{iu_s} + iA_s e^{iu_s}(v + iL\Delta v) + e^{iu_s}(B + iL\Delta B) + \dots \end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} Ae^{iu} &= (A_s + B)e^{i(u_s+v)} = (A_s + B)e^{iu_s}e^{iv} = \\ &= e^{iu_s}(A_s + B)\left(1 + iv + \frac{(iv)^2}{2} + \dots\right) = e^{iu_s}(A_s + iA_s v + B + iBv + \dots). \end{aligned}$$

В результате из (2) получим:

$$\begin{aligned} A_s + B &= (1 - R)^{1/2}A_{in} + Re^{i\varphi_0}\{A_s + iA_s(v + iL\Delta v) + (B + iL\Delta B)\}e^{iu_s} + \dots, \\ A_s - Re^{i(u_s+\varphi_0)}A_s - (1 - R)^{1/2}A_{in} + B &= Re^{i(u_s+\varphi_0)}\{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\}, \\ A_s(1 - Re^{i(u_s+\varphi_0)}) - (1 - R)^{1/2}A_{in} + B &= Re^{i(u_s+\varphi_0)}\{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\}, \\ (1 - Re^{i(u_s+\varphi_0)})A_s &= (1 - R)^{1/2}A_{in} + Re^{i(u_s+\varphi_0)}\{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\} - B, \\ &\quad -B + Re^{i(u_s+\varphi_0)}\{iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B\} + (1 - R)^{1/2}f(r) = 0. \end{aligned}$$

Убедимся, что если $v = 0$, $B = 0$, $f = 0$, то получим формулы (5):

$$\begin{aligned} A_s(1 - Re^{i(u_s+\varphi_0)}) - (1 - R)^{1/2}A_{ins} &= 0, \tag{8} \\ A_s &= \frac{(1 - R)^{1/2}A_{ins}}{1 - Re^{i(u_s+\varphi_0)}}, \quad \bar{A}_s = \frac{(1 - R)^{1/2}\bar{A}_{ins}}{1 - Re^{-i(u_s+\varphi_0)}}, \\ |A_s|^2 &= \frac{(1 - R)|A_{ins}|^2}{1 - 2R\cos(u_s + \varphi_0) + R^2}, \end{aligned}$$

Из (5) в случае $\cos(u_s + \varphi_0) = 0$ следует

$$|A_s|^2 = \frac{(1 - R)|A_{ins}|^2}{1 + R^2}, \quad K|A_s|^2 = u_s = \frac{(1 - R)K|A_{ins}|^2}{1 + R^2}.$$

В итоге начально-краевая задача для линеаризованных уравнений примет вид:

$$B - Re^{i(u_s+\varphi_0)}(iA_s(v + iL\Delta v) + B + iL\Delta B) = (1 - R)^{1/2}f(r), \tag{9}$$

$$-2ik_0 \frac{\partial B(r, \varphi, z, t)}{\partial z} = \Delta B(r, \varphi, z, t), \tag{10}$$

$$v_t + v = D\Delta v + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}), \tag{11}$$

$$v(r, \varphi, z, 0) = v_0(r, z), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0.$$

В (9)–(11) обозначено $B(r, \varphi, 0, t) \equiv B$.

4. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА НА ОКРУЖНОСТИ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим линеаризованную задачу (9)–(11) с условиями на окружности (аналог задачи для тонкого кольца) и построим ее периодические решения.

Лемма 1. Для линеаризованной задачи в окрестности стационарного решения u_s и A_s : $u = u_s + v$, $A = A_s + B$ в случае окружности с радиусом r_0 справедливо следующее представление:

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)}[iA_s(v + i\rho v_{\theta\theta}) + B + i\rho B_{\theta\theta}] = (1 - R)^{1/2} f(\theta),$$

$$A_{in}(\theta) = A_{ins} + f(\theta), \quad A_{ins} = const, \quad \rho = \frac{1}{r_0^2}, \quad (12)$$

$$-2ik_0 \frac{\partial B(\theta, z, t)}{\partial z} = \Delta B(\theta, z, t), \quad (13)$$

$$v_t + v = \mu^2 v_{\theta\theta} + K(\bar{A}_s B + A_s \bar{B}), \quad \mu^2 = \frac{D}{r_0^2},$$

$$v = v(\theta, t), \quad B = B(\theta, 0, t) \equiv B(\theta, t), \quad (14)$$

$$v(\theta + 2\pi, t) = v(\theta), \quad B(\theta + 2\pi, z, t) = B(\theta, z, t).$$

При этом $\bar{A}_s B + A_s \bar{B} = Re(\bar{A}_s B + A_s \bar{B})$ – действительная функция.

Доказательство. Утверждение следует из (9)–(11) и представления оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ в случае зависимости функций v и B от (θ, t) и линеаризации оператора $\exp iL\Delta\{(A_s + B(\theta, t)) \exp[i(u_s + v(\theta, t))]\}$ в окрестности (u_s, A_s) . \square

Лемма 2. Приближенные решения, функции v и B , задачи (12)–(14) представимы в виде ряда по собственным функциям $X(\theta) = e^{in\theta}$ задачи Штурма-Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta). \quad (15)$$

Доказательство. Разделяя переменные в (13)

$$-2ik_0 X(\theta) T(t) Z'(z) = X''(\theta) T(t) Z(z), \quad T(t) \neq 0,$$

$$-2ik_0 \frac{Z'(z)}{Z(z)} = \frac{X''(\theta)}{X(\theta)} = -\lambda, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta),$$

приходим к задаче Штурма-Лиувилля для $X(\theta)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(\theta + 2\pi) = X(\theta),$$

решением которой является

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (16)$$

или в вещественной форме

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для функции $Z(z)$ получаем, что

$$Z'(z) - \frac{in^2}{2k_0}Z(z) = 0,$$

откуда следует

$$Z(z) = Z_0 \exp \left[-\frac{in^2}{2k_0}z \right]. \quad (17)$$

Так как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для B по переменной z , то функция $T(t)$ произвольна. Выберем ее в виде $T(t) = e^{\omega t}$. Таким образом, каждый член ряда для функций v и $B(\theta, t)$ представим в виде ($B_0 = B_0(n)$, $v_0 = v_0(n)$, $\omega = \omega(n)$):

$$B = B_0 e^{in\theta} e^{\omega t}, \quad v = v_0 e^{in\theta} e^{\omega t}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (14)

$$v_0(1 + \omega + \mu^2 n^2) e^{in\theta} = K(\bar{A}_s B_0 e^{in\theta} + A_s \bar{B}_0 e^{-in\theta}).$$

Так как выражение $\bar{A}_s B_0 e^{in\theta} + A_s \bar{B}_0 e^{-in\theta}$ вещественно, то приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} (1 + \omega + \mu^2 n^2) \cos n\theta = 2K(\bar{A}_s \lambda + A_s \bar{\lambda}) \cos n\theta, \\ (1 + \omega + \mu^2 n^2) \sin n\theta = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $\lambda = \lambda_n = \frac{B_0(n)}{v_0(n)}$.

Из уравнения (12) (после подстановки (18)) получим

$$G_n(v_0, B_0) \equiv B_0 - R e^{i(u_s + \varphi_0)} [i A_s (1 - i \rho n^2) v_0 + (1 - i \rho n^2) B_0] = (1 - R)^{1/2} f_n. \quad (20)$$

Параметр $\lambda = \lambda_n$ определим из однородного уравнения $G_n(v_0, B_0) = 0$:

$$\lambda - R e^{i(u_s + \varphi_0)} [i A_s (1 - i \rho n^2) + (1 - i \rho n^2) \lambda] = 0.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \lambda_n = \frac{i A_s R (1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}, \\ \bar{A}_s \lambda + A_s \bar{\lambda} &= \frac{i |A_s|^2 R (1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}} + \frac{-i |A_s|^2 R (1 + i \rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 + i \rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}} = \\ &= \frac{i |A_s|^2 (2i R (\rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0) - \sin(u_s + \varphi_0)))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2} = \\ &= \frac{2R |A_s|^2 (\sin(u_s + \varphi_0) - \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}. \end{aligned}$$

□

Множитель $e^{\omega t}$ определяет устойчивость решения задачи.

При $\cos n\theta$:

$$\omega = \omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4RK|A_s|^2(\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}.$$

При $\sin n\theta$:

$$\omega = \omega_s(n) = -1 - \mu^2 n^2 < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Исследуем, как зависит знак

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4Ru_s(\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2}$$

от параметров R , $\mu^2 = \frac{D}{r_0^2}$, A_s , φ_0 ($u_s = K|A_s|^2$).

Для этого рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\omega_c(0) = -1 + \frac{4Ru_s^2 \sin(u_s + \varphi_0)}{(1 - R)KI_0}$$

и

$$\cos(u_s + \varphi_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad u_s + \varphi_0 = \frac{2n + 1}{2}\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sin(u_s + \varphi_0) = \sin\left(\frac{2n + 1}{2}\pi\right) = (-1)^n,$$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + (-1)^n \frac{4R(1 - R)k}{(1 + R^2)^2}.$$

Если

$$\sin(u_s + \varphi_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad u_s + \varphi_0 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то

$$\cos(u_s + \varphi_0) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4Ru_s \rho n^2 (-1)^n}{1 - 2R(1 + \rho n^2)(-1)^2 + R^2}, \quad u_s = \frac{(1 - R)k}{1 - 2R(-1)^2 + R^2}.$$

Указанные случаи возможны только при четном n .

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ЗАДАЧИ

Согласуясь с выражением для стационарных решений (5), исследуем выражение для $\omega_c(n)$. Найдем зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при различных значениях параметров.

На рис. 3–5 показаны изменения значений $\omega_c(n)$ при различных R и ρ и приведены области устойчивости с отрицательными $\omega_c(n)$.

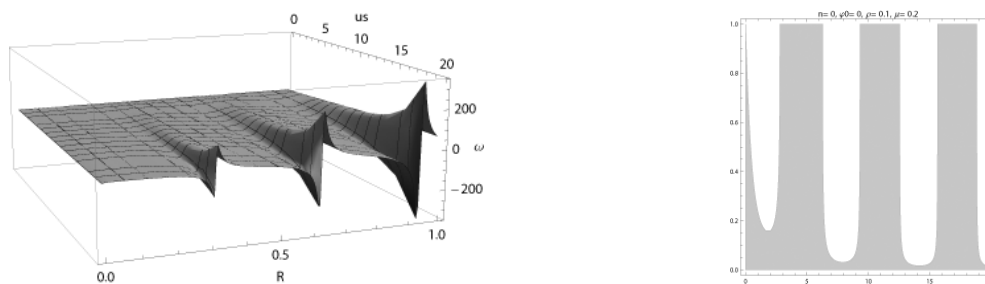


Рис. 3. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 0$, $\rho = 0.1$, $\varphi_0 = 0$, $\mu = 0.2$ и изменяющихся R и u_s

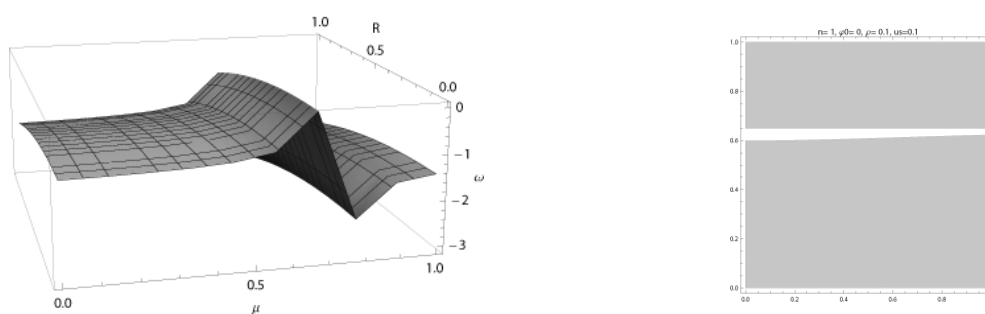


Рис. 4. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 1$, $\rho = 0.1$, $\varphi_0 = 0$, $u_s = 0.1$ и изменяющихся R и μ

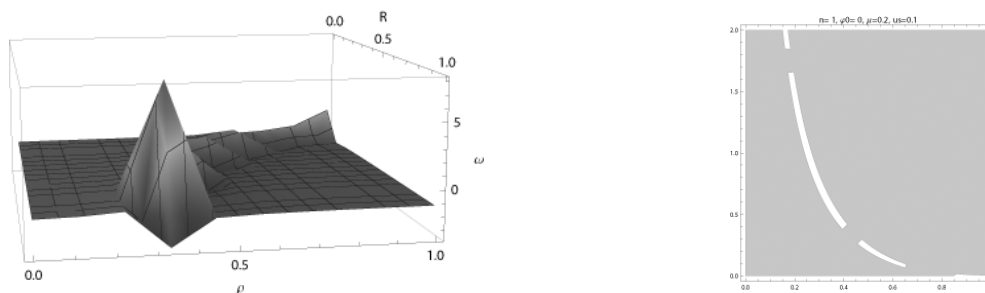


Рис. 5. Значения и зоны устойчивости $\omega_c(n)$ при фиксированных $n = 1$, $\mu = 0.2$, $\varphi_0 = 0$, $u_s = 0.1$ и изменяющихся ρ и R

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ В ВИДЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение линейного неоднородного уравнения (12) состоит из общего решения однородного $v(\theta, t)$, $B(\theta, t)$ и частного решения неоднородного $v(\theta)$, $B(\theta)$, зависящего от одной переменной θ .

Лемма 3. *Общее решение соответствующего однородного уравнения (12)*

$$B - Re^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(v + i\rho\Delta v) + B + i\rho\Delta B] = 0$$

представимо в виде

$$B(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n v_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t}, \quad (21)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta} e^{\omega(n)t}, \quad b_n = \lambda_n v_n,$$

$$\lambda_n = \frac{iA_s R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}. \quad (22)$$

Доказательство. Действительно, подставляя (21) в уравнение (3), для каждого члена ряда получим

$$b_n = R e^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(1 - i\rho n^2)v_n + (1 - i\rho n^2)b_n]$$

или с учетом $b_n = \lambda_n v_n$

$$\lambda_n = R e^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(1 - i\rho n^2) + (1 - i\rho n^2)\lambda].$$

Откуда и следует выражение (22) для λ_n . Преобразуем (22), выделяя $Re\lambda_n$ и $Im\lambda_n$:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{iA_s R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)} [1 - R(1 + i\rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}]}{[1 - R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}] [1 - R(1 + i\rho n^2) e^{-i(u_s + \varphi_0)}]} = \\ &= \frac{iA_s [R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)} - R^2(1 + i\rho n^2)]}{1 - 2R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0)] + R^2(1 + i\rho n^2)} = \\ &= \frac{iA_s [R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0) + i(\sin(u_s + \varphi_0) - \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))]]}{1 - 2R[\cos(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \sin(u_s + \varphi_0)] + R^2(1 + \rho^2 n^4)}. \end{aligned}$$

□

Лемма 4. Частное решение неоднородного уравнения (20)

$$B - R e^{i(u_s + \varphi_0)} [iA_s(v + i\rho\Delta v) + B + i\rho\Delta B] = (1 - R)^{1/2} f(\theta) \equiv g(\theta) \quad (23)$$

$A_{in}(\theta) = A_{ins} + f(\theta)$ зависит только от θ и представимо в виде

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}, \quad (24)$$

где $v_n = f_n$, $b_n = \alpha_n v_n$,

$$\alpha_n = \frac{(1 - R)^{1/2} + iA_s R(1 - \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1 - i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}} \rightarrow -iA_s \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Доказательство. Действительно, подставляя частное решение $v(\theta)$, $B(\theta)$ в неоднородное уравнение (23), с учетом

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}, \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}, \quad (26)$$

получим

$$\alpha_n v_n - R e^{i(u_s + \varphi_0)} [i A_s (1 - i \rho n^2) v_n + \alpha_n v_n (1 - i \rho n^2)] = (1 - R)^{1/2} f_n$$

или

$$v_n [\alpha_n [1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}] - i A_s R (1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}] = (1 - R)^{1/2} f_n.$$

Выбирая α_n в таком виде, что выражение в квадратных скобках равно $(1 - R)^{1/2}$, приходим к наиболее простому соотношению для $v_n = f_n$. \square

Преобразуем выражение для α_n

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{(1 - R)^{1/2} - i A_s [-1 + 1 - R(1 - \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}]}{1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}} = \\ &= \frac{(1 - R)^{1/2} + i A_s}{1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}} - i A_s = \frac{(1 - R)^{1/2}}{1 - R(1 - i \rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}} + \lambda_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Общее решение $v = v(\theta, t) + v(\theta)$, $B = B(\theta, t) + B(\theta)$, где $v(\theta, t)$, $B(\theta, t)$ определяются формулами (21), (22), а частные решения $v(\theta)$, $B(\theta)$ формулами (24)–(25).

Для полученных решений запишем интегральные представления. Используем дискретное преобразование Фурье W [10]:

$$B(\theta, 0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n v_n e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n) e^{in\theta}, \quad (28)$$

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_n e^{\omega(n)t} + f_n) e^{in\theta} = f(\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{\omega(n)t + in\theta}, \quad (29)$$

$$(W \alpha_n f_n)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta - \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{где } a(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\theta}. \quad (30)$$

Здесь v_n — произвольные последовательности (такие, чтобы ряды сходились). Если обозначить

$$\begin{aligned} \lambda_n e^{\omega(n)t} &= k_n(t) = \lambda_n e_n(t), \quad e_n(t) = e^{\omega(n)t}, \\ (W k_n v_n)(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} v_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$(Wk_n(t)) = k(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(t)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta},$$

$$(Wv_n)(\xi) = v(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\xi}$$

ИЛИ

$$W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta - \varphi) E(\varphi, t) d\varphi,$$

$$(W\lambda_n)(\theta) = \Lambda(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{in\theta},$$

$$E(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(t) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t} e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t + in\varphi},$$

ТО

$$B(\theta, t) = B(\theta, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta - \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$v(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\xi, t) v(\xi) d\xi + f(\theta).$$

Теорема 1. Решение задачи (9)–(11) представимо в виде

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_n e^{\omega(n)t} + f_n) e^{in\theta} = f(\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{\omega(n)t + in\theta},$$

$$B(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n v_n e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n) e^{in\theta}$$

или в виде интегрального представления

$$v(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + f(\theta),$$

$$B(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\theta - \xi, t) v(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta - \xi) f(\xi) d\xi,$$

где

$$k(\theta, t) = W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(t) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{\omega(n)t} e^{in\theta},$$

$$k(\theta, t) = W\{\lambda_n e^{\omega(n)t}\}(\theta, t) \equiv W\{\lambda_n e_n(t)\}(\theta, t) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\theta - \varphi) E(\varphi, t) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E(\theta - \xi) \Lambda(\xi) d\xi,$$

$$\Lambda(\theta) = (W\lambda_n)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{in\theta},$$

$$E(\varphi, t) = W\{e_n(t)\}(\varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(t) e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\omega(n)t + in\varphi},$$

$$\alpha_n = \frac{(1-R)^{1/2} + iA_s R(1-i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1-i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}},$$

$$\lambda_n = \frac{iA_s R(1-\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}}{1 - R(1-i\rho n^2) e^{i(u_s + \varphi_0)}},$$

$\omega(n) = \{\omega_c(n), \omega_s(n)\}$, $e^{\omega_c(n)}$ – множитель при $\cos n\theta$, $e^{\omega_s(n)}$ – множитель при $\sin n\theta$

$$\omega_c(n) = -1 - \mu^2 n^2 + \frac{4RK|A_s|^2(\sin(u_s + \varphi_0) + \rho n^2 \cos(u_s + \varphi_0))}{1 - 2R(1 + \rho n^2) \cos(u_s + \varphi_0) + R^2},$$

$$\omega_s(n) = -1 - \mu^2 n^2 < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \mu^2 = \frac{D}{r_0^2}.$$

Доказательство. В полученном представлении для $v(\theta, t)$ и $B(\theta, t)$ вектор v_n , $n = 0, \pm 1, \dots$ может быть выбран через начальные условия для функции $v(\theta, t)$:

$$v(\theta, t) = v_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{0n} e^{in\theta}$$

$$v_{0n} = v_n + f_n, \quad v_n = v_{0n} - f_n.$$

Откуда

$$v(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(v_{0n} - f_n) e^{\omega(n)t} + f_n] e^{in\theta}.$$

В свою очередь, если заданы начальные условия для $B(\theta, t)$:

$$B(\theta, 0) = v_0(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{0n} e^{in\theta},$$

тогда

$$b_{0n} = \lambda_n v_n + \alpha_n f_n, \quad v_n = \frac{b_{0n} - \alpha_n f_n}{\lambda_n}.$$

С другой стороны b_{0n} и v_{0n} связаны между собой следующим образом:

$$b_{0n} = \lambda_n (v_{0n} - f_n) + \alpha_n f_n, \quad b_{0n} = \lambda_n v_{0n} + (\alpha_n - \lambda_n) f_n.$$

Так как $b_n = \lambda_n v_n$ выбиралось ранее, то

$$\begin{aligned} B(\theta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\lambda_n \frac{b_{0n} - \alpha_n f_n}{\lambda_n} e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n \right] e^{in\theta} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(b_{0n} - \alpha_n f_n) e^{\omega(n)t} + \alpha_n f_n] e^{in\theta}. \end{aligned}$$

□

Аналогичная теорема справедлива для круга, но с более громоздкими выражениями. Интегральное представление задачи позволяет строить приближенные решения на базе итерационных алгоритмов (метод последовательных приближений и т. п.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован процесс формирования фазовых пространственных структур в нелинейной оптической системе, моделирующей кольцевой резонатор. Сформулирована начально-краевая задача для общей области $\Omega \subset R^2$ и конкретизирована для круга и окружности. Исследована соответствующая линеаризованная задача.

С помощью бифуркационного анализа и численного исследования спектра задачи при изменениях значений параметров найдены зоны устойчивости для стационарного решения линеаризованной задачи на окружности в классе периодических функций.

Построено интегральное представление исходной нелинейной системы в виде нелинейного интегрального уравнения, доказана соответствующая теорема о его существовании.

В дальнейшем планируется уточнить исследования асимптотики решений в областях вида тонкое кольцо и круг.

Работа выполнена в рамках НО «Крымский математический центр» и поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, В. Ю., Иванова (Полякова), И. Б. Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе // Вестник Московского университета / Серия 3. Физика. Астрономия. — Изд-во Моск. ун-та (М.), 2016. — 3. — С. 49–55.
IVANOV, V. Yu. & IVANOVA, I. B. (2016) Phase patterns in a nonlinear ring resonator. *Moscow University Physics Bulletin*. 71 (3). Pp. 266–271.

2. Белан, Е. П., Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // *Динамические системы*. — 2014. — 4(1-2). — С. 43–57.
BELAN, E. P. & KHAZOVA, Yu. A. (2014) Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy*. 4 (1–2). Pp. 43–57.
3. Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // *Динамические системы*. — 2014. — 4 (3–4). — С. 245–257.
KHAZOVA, Yu. A. (2014) Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a segment. *Dinamicheskie Sistemy*. 32 (3–4). Pp. 245–257.
4. Хазова, Ю. А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2015. — 3(28). — С. 82–94.
KHAZOVA, Yu. A. (2015) Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 28. Pp. 82–95.
5. Хазова, Ю. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке // *Динамические системы*. — 2017. — 35(2). — С. 119–129.
KHAZOVA, Yu. A. (2017) Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on an interval. *Dinamicheskie Sistemy*. 35 (2). Pp. 119–129.
6. Хазова, Ю. А. Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2017. — 9(5). — С. 705–716.
KHAZOVA, Yu. A. (2017) Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle. *Computer research and modeling*. 9 (5). Pp. 705–716.
7. Хазова, Ю. А., Лукьяненко, В. А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2019. — 27(4). — С. 85–98.
LUKIANENKO, V. A. & KHAZOVA, Yu. A. (2019) Application of integral methods for the study of the parabolic problem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 27 (4). Pp. 85–98.

8. Корнута, А. А., Лукьяненко, В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции // *Динамические системы*. — 2019. — 37(4). — С. 390–409.
LUKIANENKO, V. A. & KORNUTA, A. A. (2019) Functional differential equations of parabolic type with the involution operator. *Dinamicheskie Sistemy*. 37 (4). Pp. 390–409.
9. LUKIANENKO, V. A. & KORNUTA, A. A. (2021) Stable Structures of Nonlinear Parabolic Equations with Transformation of Spatial Variables. *Lobachevskii J. Math.* 42 (5). Pp. 911–930.
10. Гахов, Ф. Д., Черский, Ю. И. Уравнения типа свертки. — Москва: Наука, Главная редакция физико-математической лит, 1978. — 295 с.
GAHOV, F. D. & CHERSKI, Ju. I. (1978) *Equations of convolution type*. Nauka, Moscow.
11. Варфоломеев, Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2007. — 21. — С. 5–36.
VARFOLOMEEV, E. M. (2007) On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics. *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* 21. Pp. 5–36.
12. Акимова, И. Г., Разгулин, А. В. Ротационные волны в оптической системе с дифракцией и поворотом пространственных аргументов // *Вестник Московского университета / Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. — Изд-во Моск. ун-та (М.), 2. — 20–25. — С. .RAZGULIN, A. V. & ROMANENKO, T. E. (2013) Rotating waves in a parabolic functional differential equation with rotation of the spatial argument and delay. *Comput. Math. Math. Phys.* 53 (11). Pp. 1626–1643.
13. Скубачевский, А. Л. Шамин Р. В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // *Матем. заметки*. — 1999. — 66:1. — С. 145–153.
SKUBACHEVSKII, A. L. & SHAMIN, R. V. (1999) First mixed problem for a parabolic difference-differential equation. *Math. Notes*. 66 (1). Pp. 113–119.
14. MURAVNIK, A. B. (2016) Functional-differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem. *J. Math. Sci. (N.Y.)*. 216. Pp. 345–496.

УДК: 004.9

MSC2010: 90B15

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЛОГИСТИКИ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

© Д. В. Моисеев, А. Г. Шокин

ФГАОУ ВО «СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ», УЛ. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ 33,

Г. СЕВАСТОПОЛЬ, 299053, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *dymoisessev@sevsu.ru, agshokin@sevsu.ru*

**MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION OF INFORMATION LOGISTICS IN
STACHOSTIC STATEMENT.**

Moiseev D. V., Shokin A. G.

Abstract. The management of network infrastructures of swarm-like systems using network centric structures requires solving a wide range of problems of reliability and bandwidth. The problem arises from the use of different technologies and dissemination media in the construction and operation of infrastructure. Solving the complex problem of information infrastructure management and dispatching causes the problem of accounting for many dynamic, heterogeneous characteristics. For the most part, the characteristics are stochastic, which in turn further increases the level of complexity of the problem, emphasizing the already high level of its relevance.

The article provides a solution to the problems of optimizing information logistics in systems built on the principle of "swarm" using network-centric control in a stochastic formulation. Solving the complex task of managing and dispatching information infrastructure raises the problem of taking into account a variety of dynamic, heterogeneous characteristics. For the most part, the characteristics are of a stochastic nature, which in turn further increases the level of complexity of the problem being solved, emphasizing the already high level of its relevance.

The set of stochastic models completes a similar list of deterministic models and makes the system as a whole as complete, without excluding the possibility of supplementing the composition of the informative description of the input factor space and the output — criterion.

Solving real-time problems in the paradigm of logistics information technology, when circumstances require not just a solution, but the fastest, most balanced and at the same time the most effective approach, the need to develop new methods of applied mathematics and informatics. These methods include such problems as the theory of timetables, solution of integer and nonlinear problems, network theory, study of problems in fuzzy setting, modeling, decision-making under uncertainty with consideration of risks.

On the basis of conceptual description, multi-agent model, is provided a complex of stochastic models of ensuring a guaranteed level of information exchange through communication

channels in the following directions: a model of time loss minimization, related to the provision of information exchange (ensuring the criticality of information exchange in different situations); model of maximization of reliable functions of providing information volume; model of maximization of indicators of noise protection of transmitted messages (guarantee reliability of data transmitted via information channels under conditions of destabilizing effects of natural and artificial character); model of minimization of cost indicators of channels of information exchange.

Keywords: *geocentric model, logistics information-intelligent system, model for minimizing the cost indicators of information traffic, model for minimizing time losses, communication with the provision of information exchange, model for maximizing reliable functions for ensuring network traffic, model for maximizing the noise immunity indicators of operator messages*

ВВЕДЕНИЕ

Менеджмент сетевых инфраструктур «рое»-подобных систем, использующих сетцентрические структуры, требует решения большого спектра задач обеспечения надежности и пропускной способности. Проблематика обусловлена использованием в процессе создания и эксплуатации инфраструктуры различных технологий и сред распространения. Решение сложной задачи управления и диспетчеризации информационной инфраструктуры вызывает проблему учета множества динамических, разнородных характеристик. В большинстве своем, характеристики носят стохастический характер, что в свою очередь дополнительно повышает уровень сложности решаемой задачи, подчеркивая и ее актуальность [1]-[6].

Наличие большого числа характеристик, влияющих на эксплуатационные характеристики сетевых транспортных потоков, требует развития новых специфических методов моделирования и принятия решения, численных методов, принятия решений в условиях неопределенности, рисков, исследования операций в нечеткой постановке с использованием вероятностных критериев оценивания [7]-[10].

Системы, основанные на принципе «роя» с применением сетцентрического управления, используют весь перечень доступных систем связи, образуя сложную неоднородную по своим параметрам и характеристикам структуру, к которой предъявляются требования надежности и пропускной способности, обуславливающие само существование таких систем.

Сам принцип «рое»-подобных систем, на базе сетцентрической модели, предполагает высокую динамичность состояний, параметров и характеристик, которые часто невозможно описать точно. Прежде всего этот факт требует наличия в системе менеджмента стохастических подходов к решению данного класса задач [2], [11]-[13].

Решение задач реального времени в парадигме логистических информационных технологий, когда обстоятельства требуют не просто решения, а максимально быстрого, взвешенного и при этом максимально эффективного подхода, возникает необходимость развития новых методов прикладной математики и информатики. К данным методам относят такие задачи, как задачи теории расписаний, решение целочисленных и нелинейных задач, теории сетей, исследование задач в нечеткой постановке, моделирования, принятия решений в условиях неопределенности с учетом рисков.

1. ПОЛИМОДЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЛОГИСТИКИ

Использование логистических информационно-интеллектуальных систем (ЛИИС) [2, 3], позволяет резко повысить скорость и качество принимаемых решений особенно для систем реального времени, обеспечить снижение рутинной нагрузки на операторов, снизить загруженность каналов информационного обмена, соблюдать напряженные графики поставок компонент технического обеспечения, получить высокую реактивность процессов корректировки условий и требований выполнения задач, системно и комплексно решать многие часто возникающие проблемные вопросы.

В рамках данной работы выполнено построение комплекса математических моделей для распределительных задач векторной оптимизации по совокупности скалярных критериев:

- стоимость передачи информации;
- время доставки сообщений;
- помехоустойчивость;
- вероятность безотказной работы (надежность).

Наиболее общей формальной моделью для задачи информационной логистики, по видимому, являются двудольные графы $G = \langle A, B \rangle$ с множествами вершин (долями графа) X и Y ($X, Y \neq \emptyset$, $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \emptyset$), каждое ребро G инцидентно определенной вершине из X и некоторой вершине из Y . В графе G важен основной структурный элемент, подлежащий определению при решении оптимизационных задач, — паросочетание — это подграф графа G , состоящий из двух смежных вершин и ребра между ними. Множеству паросочетаний соответствует бинарная матрица элементов, подлежащая определению в процессе решения оптимизационной задачи. Известным образом определяются максимальное и совершенное паросочетания, играющие важную роль в построении алгоритмических процедур, ориентированных на программную реализацию.

Каждое ребро двудольного графа, определяющее некоторое паросочетание, является элементом сетевого трафика, обеспечивающего прохождение информации по каналу связи с помехой с использованием функционального маршрута: <подготовка информации; первичное избыточное кодирование — сжатие; кодирование информации с использованием выбранного метода обеспечения помехоустойчивости; передача по каналу связи с помехами; восстановление информации; декодирование информации; информация в первичном виде>.

В полимодельный базовый комплекс оптимизации функциональных задач информационной логистики входят следующие модели:

1. Модель минимизации стоимостных показателей информационного трафика.
2. Модель минимизации временных потерь, связанных с обеспечением информационного обмена.
3. Модель максимизации надежностных функций обеспечения сетевого трафика.
4. Модель максимизации показателей помехоустойчивости передаваемых сообщений.

1.1. Описание модельных идентификаторов. Все вышеперечисленные модели имеют сквозные идентификаторы, описывающие связывающие их характеристики

M — множество узлов — источников (передатчиков) информации $M \{m_r\}$.

$r = 1, \dots, |R_0|$ или $r \in R_0$.

N — множество доступных каналов передачи информации $N \{n_s\}$.

$s = 1, \dots, |S_0|$ или $s \in S_0$.

O — множество узлов — потребителей (приемников) информации $O \{o_h\}$.

$h = 1, \dots, |H_0|$ или $h \in H_0$.

L — множество доступных средств помехоустойчивого кодирования $\{l_u\} L$.

$u = 1, \dots, |U_0|$ или $u \in U_0$.

R_0, S_0, H_0 — опорные множества допустимых индексов.

Основные переменные, образующие исходный факторный базис:

I_{rshu} — объем передачи данных от r -ого источника к o -му приемнику посредством n -го канала за операционную единицу времени с использованием кода типа u ;

V_{rshu} — скорость передачи данных от r -ого источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

t_{tshu} — время передачи данных от r -ого источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

C_{rshu} — стоимость передачи единицы объема данных от r -ого источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

λi_{rshu} — интенсивность отказов (сбоев) при подготовке информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

λc_{rshu} — интенсивность отказов (сбоев) в канале при передаче информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

λg_{rshu} — интенсивность отказов (сбоев) при приеме информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

$p_{rstu}(t) = p i_{rschu}(t) \cdot p c_{rschu}(t) \cdot p g_{rschu}(t)$ — вероятность безотказной передачи информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u , где $p i_{rschu}(t)$ — вероятность безотказной работы источника информации; $p c_{rschu}(t)$ — вероятность безотказной работы канала связи; $p g_{rschu}(t)$ — вероятность безотказной работы приемника информации.

1.2. Матрица модельных решений. Матрица модельных решений X , в зависимости от начальных условий и особенностей конкретной задачи, может быть вырожденной. $X \subset A_0$ — пустое множество (в случае особо жестких требований и условий), содержащее либо несколько решений, являющихся эффективными ($X \subset A_0$), либо единственное решение — оптимальное ($X \subset A_{opt}$). Первоначально матрица X определена на множестве допустимых решений ($X \subset A_d$), подмножеством которого является множество доступных ($X \subset A_m$) для реализации в данный момент решений.

Структура матрицы X существенно неоднородна, геометрически ее можно интерпретировать как четырехмерный параллелепипед размерности R_0, S, H_0, U_0 , содержащий только координаты целочисленных точек, принадлежащих ему. Исходя из содержательного смысла для элементов матрицы X обязательно одновременное выполнение следующих условий равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in U : \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} x_{rshu} = 1, \\ \forall h \in H : \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{u \in U} x_{rshu} = 1, \\ \forall s \in S : \sum_{r \in R} \sum_{u \in U} x_{rshu} = 1, \\ \forall r \in R : \sum_{s \in S} \sum_{u \in U} x_{rshu} = 1. \end{array} \right. \quad (1)$$

Для примера приведем интерпретацию последнего равенства системы (1): для каждого источника информации необходимо осуществить выбор единственных (уникальных для него) приемника информации, канала передачи и способа кодирования.

Равенства (1) интерпретируются как единственность использования для каждой пары передатчик-приемник выбранных канала передачи $s \in S_0$ и кода $u \in U_0$, т. е. в

каждой размерности четырехмерной матрицы X имеется один и только один единичный элемент $x_{rshu} \in B$, где B — множество булевых чисел. Для краткости в моделях условие (1) совместно с условием $x_{rshu} \in B$ будем обозначать как

$$\left(\sum_{r \in R} \left| \sum_{s \in S} \left| \sum_{h \in H} \left| \sum_{u \in U} x_{rshu} \right. \right. \right. \right) \cap (x_{rshu} \in B) = 1. \quad (2)$$

В наиболее простом случае пуассоновских потоков отказов, которые чаще всего используются для анализа надежности технических систем, имеем:

$p_{rshu}(t) = \exp(-\lambda_{rshu}t)$ — вероятность безотказной передачи информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

$p_{i_{rshu}}(t) = \exp(-\lambda_{i_{rshu}}t)$ — вероятность безотказной работы источника информации;

$p_{c_{rshu}}(t) = \exp(-\lambda_{c_{rshu}}t)$ — вероятность безотказной работы канала связи;

$p_{g_{rshu}}(t) = \exp(-\lambda_{g_{rshu}}t)$ — вероятность безотказной работы приемника информации, $r \in R_0, s \in S_0, h \in H_0, u \in U_0$.

Если считать, что отказы в передатчике, канале и приемнике мало зависимы в совокупности, то:

$$\forall u \in U : \lambda_{rshu} = \lambda_{i_{rshu}} + \lambda_{c_{rshu}} + \lambda_{g_{rshu}}.$$

Таким образом вероятность безотказной работы с точностью до бесконечно малых второго порядка равна

$$P_{rshu} = \exp(\lambda_{rshu} \cdot t_{rshu}) = 1 - \lambda_{rshu} \cdot t_{rshu}.$$

Определим суммарную стоимость передачи информации от всех источников ко всем приемникам за один цикл:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} c_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} = \\ &= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (c_{i_{rshu}} + c_{c_{rshu}} + c_{g_{rshu}}) \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu}, \end{aligned} \quad (3)$$

где:

$c_{i_{rshu}}$ — стоимость подготовки единицы объема информации при передаче от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

$c_{c_{rshu}}$ — стоимость использования выбранного канала при передаче единицы объема информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u ;

$c_{g_{rshu}}$ — стоимость обеспечения приема единицы объема информации при передаче от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u .

Определим суммарное время передачи информации от r -го источника к o -му приемнику посредством n -го канала с использованием кода u .

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot x_{rshu} \cdot i_{rshu} =$$

$$= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (t_{i_{rshu}} + t_{c_{rshu}} + t_{g_{rshu}}) \cdot x_{rshu} \cdot i_{rshu}.$$

Суммарная системная вероятность P безотказной работы:

$$P = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \exp [(-\lambda_{i_{rshu}} - \lambda_{c_{rshu}} - \lambda_{g_{rshu}}) \cdot t_{rshu} \cdot x_{rshu}].$$

Уровень помехоустойчивости при использовании помехоустойчивого кода:

$$K_{rshu} = KI_{rshu} \cdot KC_{rshu} \cdot KG_{rshu},$$

где K_{rshu} — уровень помехоустойчивости для источника информации r , канала s , приемника h с использованием кода u .

При решении оптимизационных задач экстремум функции линейной формы и ее логарифма в интересующей нас области совпадают, поэтому вместо показателя K_{rshu} далее будем использовать его логарифм:

$$KL_{rshu} = \ln K_{rshu} = \ln KI_{rshu} + \ln KC_{rshu} + \ln KG_{rshu} =$$

$$= KIL_{rshu} + KCL_{rshu} + KGL_{rshu}.$$

$$Q = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (KIL_{rshu} + KCL_{rshu} + KGL_{rshu}) \cdot x_{rshu} \cdot t_{rshu}.$$

1.3. Базовые стохастические модели полимодельного комплекса. В отличие от детерминированных систем, где все параметры определены точно, стохастические модели описывают случайные процессы или ситуации, при этом подразумевается, что случайность тех или иных явлений выражается в терминах теории вероятностей. Так же, как и детерминированные, стохастические модели бывают дискретные и непрерывные.

Непрерывно-стохастические модели. Основной схемой формализованного описания систем, для которых характерны непрерывный характер изменения времени и наличие случайностей в поведении, служит аппарат систем массового обслуживания. То есть это набор математических схем, разработанных для формализации процессов функционирования систем, которые являются процессами обслуживания. Именно

этим системам присущи стохастический характер функционирования (случайное появление заявок на обслуживание), завершение обслуживания в случайные моменты времени, наличие входного и выходного потока заявок, наличие приборов обслуживания, поток событий, существование очереди на обслуживание, определение некоторого порядка обслуживания и т. п. Исходя из описания непрерывно-стохастических моделей для описания функционирования систем, работающих в режиме «роя», на базе сетецентрической модели не подходят.

Дискретно-стохастические модели. Данный тип моделей подходит для описания функционирования систем, работающих в режиме «роя», на базе сетецентрической модели, поскольку они обладают следующими характеристиками — время в них дискретно, и они проявляют статически закономерное случайное поведение. Модели систем такого рода могут быть построены на основе двух схем формализованного описания:

- конечно-разностные уравнения, среди переменных которых используют функции, задающие случайные процессы;
- вероятностные автоматы.

В данной работе при переходе от детерминированных моделей к стохастической (СМ) будем использовать М-постановку. Используется математическое ожидание (МО) случайной величины.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИНИМИЗАЦИИ СТОИМОСТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННОГО ТРАФИКА. СМ-МОДЕЛЬ, С-МОДЕЛЬ В М-ПОСТАНОВКЕ

Будем считать: t_{rshu} , I_{rshu} и C_{rshu} — случайные величины с математическими ожиданиями $M[t_{rshu}]$, $M[I_{rshu}]$ и $M[C_{rshu}]$ соответственно.

Тогда целевая функция С-модели в М-постановке имеет вид:

$$C = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} M[t_{rshu}] \cdot M[I_{rshu}] \cdot M[C_{rshu}] \cdot x_{rshu} \rightarrow \min_{x_{rshu} \in X}.$$

Если случайная величина C представима в виде суммы попарно независимых случайных величин ci_{rshu} , cc_{rshu} и cg_{rshu} с математическим ожиданием $m[ci_{rshu}]$, $m[cc_{rshu}]$ и $m[cg_{rshu}]$ соответственно, то целевую функцию С-модели в М-постановке можно представить в виде:

$$C = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (m[ci_{rshu}] + m[cc_{rshu}] + m[cg_{rshu}]) \cdot M[t_{rshu}] \cdot M[I_{rshu}] \cdot x_{rshu} \rightarrow \min_{x_{rshu} \in X}.$$

Вероятностные ограничения С-модели в М-постановке.

Первое ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot t_{rshu} = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (t_{i_{rshu}} + t_{c_{rshu}} + t_{g_{rshu}}) \cdot x_{rshu} < T_0.$$

Второе ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$P = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \exp [(-\lambda i_{rshu} - \lambda c_{rshu} - \lambda g_{rshu}) t_{rshu} \cdot x_{rshu}] > P_0.$$

Третье ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$Q = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (KIL_{rshu} + KCL_{rshu} + KGL_{rshu}) \cdot x_{rshu} \cdot t_{rshu} > K_0.$$

Решение этой задачи, если оно существует, позволяет найти план использования заданной сети каналов с таким назначением каналов передачи информации между всеми источниками и приемниками, который минимизирует стоимость телекоммуникации при обеспечении требуемого уровня отказоустойчивости, помехоустойчивости, а также времени передачи.

3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕННЫХ ПОТЕРЬ, СВЯЗАННЫХ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБМЕНА. ТМ-МОДЕЛЬ (Т-МОДЕЛЬ В М-ПОСТАНОВКЕ)

Будем считать, что t_{rshu} — случайная величина с математическим ожиданием $M[t_{rshu}]$. Тогда целевая функция Т-модели в М-постановке имеет вид:

$$T = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} M[t_{ijkl}] \cdot x_{ijkl} \rightarrow \min_{x_{ijkl} \in X}.$$

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} M[t_{rshu}] \cdot x_{rshu} \rightarrow \min_{x_{rshu} \in X}.$$

Если случайная величина T представима в виде суммы попарно независимых случайных величин $t_{i_{rshu}}$, $t_{c_{rshu}}$ и $t_{g_{rshu}}$ с математическим ожиданием $m[t_{i_{rshu}}]$, $m[t_{c_{rshu}}]$ и $m[t_{g_{rshu}}]$ соответственно, то целевую функцию Т-модели в М-постановке можно представить в виде:

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (m[t_{i_{rshu}}] + m[t_{c_{rshu}}] + m[t_{g_{rshu}}]) \cdot M[t_{rshu}] \cdot M[i_{rshu}] \cdot x_{rshu} \rightarrow \min_{x_{rshu} \in X}.$$

Вероятностные ограничения Т-модели в М-постановке.

Первое ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot c_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} = \\ &= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (c_{i_{rshu}} + c_{c_{rshu}} + c_{g_{rshu}}) \cdot t_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} < C_0. \end{aligned}$$

Второе ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$P = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \exp [(-\lambda i_{rshu} - \lambda c_{rshu} - \lambda g_{rshu}) \cdot t_{rshu} \cdot x_{rshu}] > P_0.$$

Третье ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$Q = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (K_{I L_{rshu}} + K_{C L_{rshu}} + K_{G L_{rshu}}) \cdot t_{rshu} \cdot x_{rshu} > K_0.$$

Решение этой задачи, если оно существует, позволяет найти план использования заданной сети каналов с таким назначением каналов передачи информации между всеми источниками и приемниками, который минимизирует время передачи информации при обеспечении требуемого уровня стоимости телекоммуникации, отказоустойчивости, помехоустойчивости.

4. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКСИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТНЫХ ФУНКЦИЙ ОБЕСПЕЧЕНИЯ СЕТЕВОГО ТРАФИКА. РМ-МОДЕЛЬ (Р-МОДЕЛЬ В М-ПОСТАНОВКЕ)

Используется для максимизации Р путем выбора оптимального источника сообщений, канала связи, приемника сообщений и способа кодирования при выполнении ограничений на суммарную стоимость передачи информации, время передачи информации, уровень помехоустойчивости.

Если случайная величина Р представима в виде суммы попарно независимых случайных величин $-\lambda i_{rshu}$, $-\lambda c_{rshu}$ и $-\lambda g_{rshu}$ с математическим ожиданием $m[-\lambda i_{rshu}]$, $m[-\lambda c_{rshu}]$ и $m[-\lambda g_{rshu}]$ соответственно, то целевую функцию Р-модели в М-постановке можно представить в виде:

$$P = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \exp [(m[-\lambda i_{rshu}] + m[-\lambda c_{rshu}] + m[-\lambda g_{rshu}]) t_{rshu} \cdot M[x_{rshu}]] \rightarrow \max_{x_{rshu} \in X}.$$

Вероятностные ограничения Р-модели в М-постановке. Первое ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$C = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot c_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} =$$

$$= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (ci_{rshu} + cc_{rshu} + cg_{rshu}) \cdot t_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} < C_0.$$

Второе ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot t_{rshu} = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (ti_{rshu} + tc_{rshu} + tg_{rshu}) \cdot x_{rshu} < T_0.$$

Третье ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$Q = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (KIL_{rshu} + KCL_{rshu} + KGL_{rshu}) \cdot t_{rshu} \cdot x_{rshu} > K_0.$$

5. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАКСИМИЗАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕДАВАЕМЫХ СООБЩЕНИЙ. КМ-МОДЕЛЬ, К-МОДЕЛЬ В М-ПОСТАНОВКЕ

КМ-модель используется для максимизации К путем выбора такого кода l при выполнении ограничений на суммарную стоимость передачи информации, время передачи информации, вероятность безотказной работы.

Если случайная величина К представима в виде суммы попарно независимых случайных величин KIL_{rshu} , KCL_{rshu} , KGL_{rshu} с математическим ожиданием $m[KIL_{rshu}]$, $m[KCL_{rshu}]$ и $m[KGL_{rshu}]$ соответственно, то целевую функцию К-модели в М-постановке можно представить в виде:

$$K = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (m[KIL_{rshu}] + m[KCL_{rshu}] + m[KGL_{rshu}]) \rightarrow \max_{x_{rshu} \in X}.$$

Вероятностные ограничения К-модели в М-постановке.

Первое ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$C = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot c_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} =$$

$$= \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (ci_{rshu} + cc_{rshu} + cg_{rshu}) \cdot t_{rshu} \cdot i_{rshu} \cdot x_{rshu} < C_0.$$

Второе ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$T = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} t_{rshu} \cdot t_{rshu} = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} (t_{i_{rshu}} + t_{c_{rshu}} + t_{g_{rshu}}) \cdot x_{rshu} < T_0.$$

Третье ограничение для детерминированного случая имеет вид:

$$P = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{h \in H} \sum_{u \in U} \exp [(-\lambda_{i_{rshu}} - \lambda_{c_{rshu}} - \lambda_{g_{rshu}})t_{rshu}] > P_0.$$

Решение этой задачи, если оно существует, позволяет найти план использования каналов информационного обмена, систем, основанных на принципе «роя» с применением сетцентрического управления, который максимизирует помехоустойчивость передаваемой информации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Быстрый рост и повсеместное внедрение вычислительных систем сегодня, позволяет покорять ранее не доступные горизонты, открывая неисчерпаемые возможности для повышения оперативности и обоснованности решений, вырабатываемых в процессе управления сложными, динамичными и неоднородными системами. Поэтому работы над созданием методов, моделей, приемов и алгоритмов, позволяющих функционировать таким системам на качественно новом уровне, приоткрывая занавес взору в «прекрасное завтра», является весьма актуальным.

В рамках работы произведена формализация стохастических моделей полимодельного комплекса, включающий в себя такие показатели как стоимостные показатели информационного трафика, временные потери на обеспечение информационного обмена, надежность функции обеспечения сетевого трафика, показателей помехоустойчивости передаваемых сообщений ориентированные на применение в полимодельном комплексе для решения задачах эксплуатации и использования каналов информационного обмена, систем основанных на принципе «роя» с применением сетцентрического управления.

Набор стохастических моделей дополняет аналогичный перечень детерминированных моделей и делает в целом систему максимально полной, не исключая при этом возможности дополнения по составу информационного описания входного факторного пространства и выходного — критериального.

На основе концептуального описания, мультиагентной модели, разработан комплекс стохастических моделей обеспечения гарантированного уровня информационного обмена по каналам связи в следующих направлениях: модель минимизации временных потерь, связанных с обеспечением информационного обмена (обеспечение

критичности информационного обмена в различных ситуациях); модель максимизации надежностных функций обеспечения информационного объема; модель максимизации показателей помехозащищенности передаваемых сообщений (гарантийная достоверность передаваемых по информационным каналам данных в условиях дестабилизирующих воздействий естественного и искусственного характера); модель минимизации стоимостных показателей каналов информационного обмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кащенко, А. Г. Методика решения нечетких многокритериальных задач выбора вариантов информационно-телекоммуникационных систем / А. Г. Кащенко, Р. В. Семенов // Научные ведомости Белгородского государственного университета / Серия: Экономика. Информатика. — 2012. — 19(138). — С. 161–164.
KASCHEENKO, A. G. & SEMENOS, R. V. (2012) Method of solving fuzzy multi-criteria problems of selecting options for information and telecommunication systems. *Scientific Journal of Belgorod State University. Series: Economics. Informatics.* 19 (138). Pp. 161–164.
2. Скатков, А. В. Роевой интеллект в задачах обнаружения аномалий и состояний природно-технических систем и объектов / А. В. Скатков, А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев, И. А. Скатков // Системы контроля окружающей среды. — 2021. — 3(45). — С. 119–126.
SKATKOV, A. V., BRYUKHOVETSKIY, A. A., & MOISEEV, D. V. (2021) Swarm intelligence in the tasks of detection of anomalies and states of natural-technical systems and objects. *Environmental control systems.* 3 (45). Pp. 119–126.
3. Скатков, А. В. Разработка полимодельного комплекса оптимизации структурного синтеза каналов информационного обмена БТС / А. В. Скатков, Д. В. Моисеев, А. А. Брюховецкий // Дистанционные образовательные технологии: Сборник трудов VI Международной научно-практической конференции, Ялта, 20-22 сентября 2021 года. — Симферополь: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство Типография «Ариал»». — 2021. — С. 284–288.
SKATKOV, A. V., MOISEEV, D. V. & BRYUKHOVETSKIY, A. A. (2021) Development of a polymodel complex of optimization of structural synthesis of BTS information exchange channels. *Distance education technologies: Collection of works VI International scientific and practical conference, Yalta.* Pp. 284–288.

4. Скатков, А. В. Адаптивный метод обнаружения уязвимостей интерфейсов беспилотных транспортных средств в инфраструктуре умного города / А. В. Скатков, А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев, В. И. Шевченко // *Инфокоммуникационные технологии*. — 2020. — 18(1). — С. 45–50.

SKATKOV, A. V., BRYUKHOVETSKIY, A. A. & MOISEEV, D. V. (2020) Adaptive method for detecting vulnerabilities of unmanned vehicle interfaces in smart city infrastructure. *Infocommunication technologies*. 18 (1). Pp. 45–50.

5. Флегонтов, А. В. Моделирование динамических систем: структурно-инвариантный подход: Монография / А. В. Флегонтов. — Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2022. — 216 с.

FLEGONTOV, A. V. (2022) *Dynamic system modeling: structural invariant approach: Monograph*. St. Petersburg: A. I. Herzen Russian State Pedagogical University.

6. Шокин, А. Г. Новые методы помехоустойчивого кодирования информации / А. Г. Шокин, Н. Е. Сапожников, Д. В. Моисеев // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. — 2012. — 6(9). — С. 26–30.

SHOKIN, A. G., SAPOZHNIKOV, N. E. & MOISEEV, D. V. (2012) New methods of noise-resistant coding. *Eastern European Journal of Advanced Technologies*. 6 (9). Pp. 26–30.

7. Гуляницкий, Л. Ф. Решение задач комбинаторной оптимизации алгоритмами ускоренного вероятностного моделирования / Л. Ф. Гуляницкий // *Компьютерная математика*. — К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины. — 2004. — 1. — С. 65–72.

GULYANITSII, L. F. (2004) Solving problems of combinatorial optimization by algorithms of accelerated probabilistic modeling. *Computer mathematics*. — K.: V. M. Glushkova In-t OF cybernetics of NAS of Ukraine. 1. Pp. 64–72.

8. Скатков, А. В. Мониторинг структурно-неоднородных объектов в облачных вычислительных средах / А. В. Скатков, А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев // *Экологическая, промышленная и энергетическая безопасность — 2017: Сборник статей по материалам научно-практической конференции с международным участием, Севастополь, 11-15 сентября 2017 года / Под редакцией Ю. А. Омельчук,*

- Н. В. Ляминой, Г. В. Кучерик. — Севастополь: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет». — 2017. — С. 1236–1238.
- SKATKOV, A. V., BRYUKHOVETSKIY, A. A. & MOISEEV, D. V. (2017) Monitoring structurally heterogeneous objects in cloud computing environments. *Environmental, industrial and energy security – 2017: Collection of articles on the materials of scientific and practical conference with international participation, Sevastopol*. Pp. 1236–1238.
9. Макаренко, С. И. Перспективы и проблемные вопросы развития сетей связи специального назначения / С. И. Макаренко // Системы управления, связи и безопасности. — 2017. — 2. — С. 18–68.
- МАКАРЕНКО, S. I. (2017) Prospects and challenges for the development of special-purpose communication networks. *Management, communications and security systems*. 2. Pp. 18–68.
10. Скатков, А. В. Мультивариантный многоканальный программно-измерительный комплекс обнаружения аномальных состояний природно-технических объектов и систем / А. В. Скатков, А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев // Системы контроля окружающей среды. — 2021. — 2(44). — С. 119–130.
- SKATKOV, A. V., BRYUKHOVETSKIY, A. A. & MOISEEV, D. V. (2021) Multivariant multi-channel program and measuring complex of detection of abnormal states of natural-technical objects and systems. *Environmental control systems*. 2 (44). Pp. 119–130.
11. Лосев, Е. Ф. Оптимизация управленческих задач технического обеспечения флота с помощью логистических систем / Е. Ф. Лосев, Э. И. Мухитов // Военная мысль. — 2008. — 8. — С. 53–58.
- LOSEV, E. F. & MUKHITOV, E. I. (2008) Optimization of fleet technical support management tasks with logistics systems. *Voennaya misl*. 8. Pp. 53–58.
12. SKATKOV, A. V., MOISEEV, D. V. & BRYUKHOVETSKIY, A. A. (2020) Model for vulnerabilities detection in unmanned vehicle interfaces based on artificial immune systems. *JOP Conference Series: Metrological Support of Innovative Technologies, Krasnoyarsk, 04 march 2020*. — Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Vol. 1515. — Krasnoyarsk, Russia: Institute of Physics and IOP Publishing Limited. Pp. 22043.

13. Скатков, А. В. Оценивание состояний природно-технических систем на основе динамической кластеризации / А. В. Скатков, А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев, В. И. Шевченко // Системы контроля окружающей среды. — 2020. — 1(39). — С. 135–144.

SKATKOV, A. V., BRYUKHOVETSKIY, A. A., MOISEEV, D. V. & SCHEVCHENKO, V. I. (2020) Assessment of the state of natural and technical systems based on dynamic clustering. *Environmental control systems*. 1 (39). Pp. 135–144.

УДК: 519.115.1

MSC2020: 12E10

НИСЕ-МНОГОЧЛЕНЫ

© А. Э. Сергеев, В. О. Бушуева

КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. Т. ТРУБИЛИНА

УЛ. КАЛИНИНА, 13, КРАСНОДАР, 350004, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *galua1979@yandex.ru*

НИСЕ-POLYNOMIALS.

Sergeev A. E., Bushueva V. O.

Abstract. Decomposition of polynomials into multipliers and finding their roots is one of the main problems of algebra. For an arbitrary polynomial of arbitrary degree, it is quite difficult to find all the roots.

In the present paper nice-polynomials, i.e., polynomials whose all roots are integers, but the roots of the derivative is also integers.

It is known how to obtain and construct a general nice polynomial of the second, third and fourth degrees over the field of rational numbers \mathbb{Q} . The problem of obtaining and constructing even concrete (not general) nice polynomials is not simple, since in general this problem is reduced to solving general Diophantine equations, the solution of which, most often, is impossible (in integers). Therefore, for degree 5 and higher, in general, very cumbersome Diophantine equations are obtained, in which even partial solutions are not easy to obtain and the question of constructing a general nice-polynomial remains open until now.

In this paper, we provide particular examples of constructing nice polynomials of 5th degree. Specific examples are given for each case. This method allows finding private nice polynomials of higher degree.

Has been hypothesized that for any natural n , a larger than one, there are nice-polynomials of the degree n .

At the same time, the question of finding polynomials of arbitrary degree in which the roots of the polynomial itself, its derivative and second derivative would be different integers remains unresolved.

Keywords: *polynomial, the root of polynomial, decomposition of a polynomial, nice-polynomial*

ВВЕДЕНИЕ

Многочлен степени n с целыми коэффициентами называется «nice», если он сам имеет n целых корней, и его производная имеет $n - 1$ целых корней.

Возникает вопрос: для каждого ли натурального n существует nice-многочлен степени n с различными целыми корнями? Этот вопрос был впервые поставлен в 1986 году Ф. Шмидтом в журнале «Mathematical Intelligencer» и до сих пор не решен.

Чтобы найти пiсе-многочлены второй степени достаточно, чтобы сумма корней была четной.

Общие многочлены третьей степени были впервые найдены в 1988 году S. H. Weintraub [1], а ещё раньше их можно найти в работе К. Zuser [2].

Построение пiсе-многочленов в общем случае NP-полная задача, которая сводится к диофантовым уравнениям, методы решения которых не тривиальны. Существование пiсе-многочленов четвертой степени было доказано в 1990 году Caldwell [3]. В настоящее время получены параметрические пiсе-многочлены 3-ей и 4-ой степеней [4]-[7], однако вопрос о пiсе-многочленах степени выше 4 вопрос пока остается открытым и имеются лишь некоторые частные примеры их построения [8].

Основной целью работы является построение пiсе-многочленов 5-ой степени над полем \mathbb{Q} для случаев: $(4,1)$, $(3,2)$, $(2,2,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,1,1,1,1)$, где, например, под случаем $(4,1)$ понимается многочлен 5-ой степени, имеющий два различных корня, причем один корень имеет кратность четыре, а другой — кратность один и т. д.

Заметим, что задача о факторизации многочленов над произвольным полем произвольной степени в общем случае очень сложна. Частичный ответ на решение этой задачи для конечных полей рассмотрен в [9]. Другие результаты Сергеева А. Э. были опубликованы в работах [10, 11].

1. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПИСЕ-МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 1. Пусть многочлен

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ является пiсе-многочленом. Тогда, если $t \in \mathbb{Z}$, то многочлен вида $g(x) = (x - (a_1 - t)) \cdot (x - (a_2 - t)) \cdots (x - (a_n - t))$ является пiсе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $k = 2$. Докажем, что если многочлен $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ является пiсе-многочленом, то при любом $t \in \mathbb{Z}$ многочлен вида $g(x) = (x - (a_1 - t)) \cdot (x - (a_2 - t))$ также является пiсе-многочленом. Производная этого многочлена имеет вид:

$$g'(x) = 2x - (a_1 + a_2) + 2t.$$

Этот многочлен, очевидно, имеет корень $x = \frac{a_1 + a_2}{2} - t$, и так как многочлен $f(x)$ по условию является пiсе, то сумма его корней чётная (т. е. $a_1 + a_2 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$), т. е. $x \in \mathbb{Z}$. Таким образом, многочлен $g(x)$, действительно, является пiсе-многочленом.

Пусть $k = 3$. Докажем, что если многочлен $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ является нісе-многочленом, то при любом $t \in \mathbb{Z}$ многочлен вида:

$$g(x) = (x - (a_1 - t))(x - (a_2 - t))(x - (a_3 - t))$$

также является нісе-многочленом. Многочлен $f'(x)$ имеет вид:

$$3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Так как по условию $f(x)$ — нісе-многочлен, то предположим, что существуют такие $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, для которых:

$$3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = (x - y_1)(x - y_2).$$

Производная многочлена $g(x)$ имеет вид:

$$3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = (x - y_1)(x - y_2) - 2t(x_1 + x_2 + x_3) + 3t^2.$$

Непосредственные вычисления показывают, что корнями многочлена $g'(x)$ являются целые числа: $y_1 - t$ и $y_2 - t$.

Таким образом, многочлен вида $g(x) = (x - (a_1 - t)) \cdot (x - (a_2 - t))(x - (a_3 - t))$, действительно, является нісе-многочленом.

Докажем это утверждение при любом натуральном k .

Предположим, что многочлен

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_k)$$

является нісе-многочленом. Тогда существуют такие $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{Z}$, что:

$$f'(x) = (x - b_1) \cdot \dots \cdot (x - b_{k-1}).$$

Докажем, что многочлен вида: $g(x) = (x - (a_1 - t)) \cdot (x - (a_2 - t)) \cdot \dots \cdot (x - (a_k - t))$ также является нісе-многочленом.

Непосредственные вычисления показывают, что если $b_1 - t, b_2 - t, \dots, b_{k-1} - t$ — целые корни многочлена $f'(x)$, то $b_1 - t, b_2 - t, \dots, b_{k-1} - t$ — целые корни многочлена $g'(x)$. Следовательно, многочлен $g(x) = (x - (a_1 - t)) \cdot (x - (a_2 - t)) \cdot \dots \cdot (x - (a_k - t))$, действительно, является нісе-многочленом.

Таким образом, теорема доказана.

С помощью этой теоремы мы будем строить однопараметрические семейства нісе-многочленов 5-ой степени.

2. ПРИМЕРЫ ПИСЕ-МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 2. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x - (5 - t))^4(x - (10 - t)),$$

где $t \in \mathbb{Z}$.

Тогда такой многочлен является пiсе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $f(x) = (x - x_1)^4(x - x_2)$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Найдем условие на x_1, x_2 , при котором многочлен $f(x)$ является пiсе-многочленом.

Имеем:

$$f'(x) = 4(x - x_1)^3(x - x_2) + (x - x_1)^4 = (x - x_1)^3(5x - 4x_2 - x_1).$$

Многочлен $f'(x)$ имеет корни: $x = x_1, x = \frac{4x_2 + x_1}{5}$. Для того, чтобы все корни многочлена $f'(x)$ были целыми, мы можем взять $x_1 = 5x'_1, x_2 = 5x'_2$, где $x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = (4x'_2 + x'_1) \in \mathbb{Z}$. Значит, многочлен $f(x)$ имеет вид: $f(x) = (x - 5x'_1)^4(x - 5x'_2)$, где $x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}$ и является пiсе-многочленом, т. к. производная $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = 5(x - 5x'_1)^3(x - (4x'_2 + x'_1)),$$

где $x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Пусть $x'_1 = 1, x'_2 = 2$, тогда $f(x) = (x - 5)^4(x - 10)$ и $f'(x) = 5(x - 5)^3(x - 9)$. По теореме 1 получаем параметрическое семейство пiсе-многочленов 5-ой степени для случая (4,1):

$$f(x) = (x - (5 - t))^4(x - (10 - t)),$$

где $t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x - (5 - t))^3(x - (10 - t))^2, \text{ где } t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда такой многочлен является пiсе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $f(x) = (x - x_1)^3(x - x_2)^2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Найдем условие на x_1, x_2 , при котором многочлен $f(x)$ является пiсе-многочленом. Имеем:

$$f'(x) = 3(x - x_1)^2(x - x_2)^2 + 2(x - x_2)(x - x_1)^3 = (x - x_1)^2(x - x_2)(5x - 3x_2 - 2x_1).$$

Многочлен $f(x)$ имеет корни: $x = x_1$, $x = x_2$, $x = \frac{3x_2 + 2x_1}{5}$. Для того, чтобы все корни многочлена $f'(x)$ были целыми, мы можем взять: $x_1 = 5x'_1$, $x_2 = 5x'_2$, где $x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = (3x'_2 + 2x'_1) \in \mathbb{Z}$. Поэтому многочлен $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = (x - 5x'_1)^3(x - 5x'_2)^2$$

и является нисе-многочленом, т. к. производная $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = 5(x - 5x'_1)^2(x - 5x'_2)(x - (3x'_2 + 2x'_1)), \quad x'_1, x'_2 \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Пусть $x'_1 = 1$, $x'_2 = 2$, тогда $f(x) = (x - 5)^3(x - 10)^2$ и $f'(x) = 5(x - 5)^2(x - 10)(x - 8)$. По теореме 1 получаем параметрическое семейство нисе-многочленов 5-ой степени для случая (3,2):

$$f(x) = (x - (5 - t))^3(x - (10 - t))^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 4. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x + t)^2(x - (15 - t))^2(x - (5 - t))^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда такой многочлен является нисе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $f(x) = x^2(x - x_1)^2(x - x_2)$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Найдем условие на x_1, x_2 , при котором многочлен $f(x)$ является нисе-многочленом. Имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x(x - x_1)^2 + 2x^2(x - x_1))(x - x_2) + x^2(x - x_1)^2 = \\ &= x(x - x_1)(5x^2 - x(4x_2 + 3x_1) + 2x_1x_2). \end{aligned}$$

Для того, чтобы уравнение $f'(x) = 0$ было разрешимо в целых числах необходимо и достаточно, чтобы дискриминант выражения $5x^2 - x(4x_2 + 3x_1) + 2x_1x_2$ являлся квадратом некоторого целого числа, т. е.:

$$D = (4x_2 + 3x_1)^2 - 40x_1x_2 = 16x_2^2 + 9x_1^2 - 16x_1x_2 = m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Положим $x_1 = 3x_2$, тогда $D = 49x_2^2 = m^2$, т. е. $\pm 7x_2 = m$. Значит, квадратный трехчлен имеет следующие корни: $x = \frac{13x_2 + 7x_2}{10} = 2x_2$, $x = \frac{13x_2 - 7x_2}{10} = \frac{3}{5}x_2$. Приняв $x_2 = 5\tilde{x}_2$, где $\tilde{x}_2 \in \mathbb{Z}$, получаем, что производная $f'(x)$ имеет все целые корни. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = x^2(x - 15\tilde{x}_2)^2(x - 5\tilde{x}_2),$$

где \tilde{x}_2 является пiсе-многочленом, т. к. производная $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = 5x(x - 15\tilde{x}_2)(x - 10\tilde{x}_2)(x - 3\tilde{x}_2), \tilde{x}_2 \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Пусть $\tilde{x}_2 = 1$, тогда $f(x) = x^2(x - 15)^2(x - 5)$ и $f'(x) = 5x(x - 15)(x - 10)(x - 3)$. По теореме 1 получаем параметрическое семейство пiсе-многочленов 5-ой степени для случая $(2, 2, 1)$, где

$$f(x) = (x + t)^2(x - (15 - t))^2(x - (5 - t)), t \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 5. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x - (20 - t))^3(x - (5 - t))(x + t), t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда такой многочлен является пiсе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $f(x) = (x - x_1)^3(x - x_2)x$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Найдем условие на x_1, x_2 , при котором многочлен $f(x)$ является пiсе-многочленом. Имеем:

$$f'(x) = (x - x_1)^2(5x^2 - x(4x_2 + 2x_1) + x_1x_2).$$

Для того, чтобы уравнение $f'(x) = 0$ было разрешимо в целых числах необходимо и достаточно, чтобы дискриминант выражения $5x^2 - x(4x_2 + 2x_1) + x_1x_2$ являлся квадратом некоторого целого числа, т. е.:

$$D = (4x_2 + 2x_1)^2 - 20x_1x_2 = 16x_2^2 + 4x_1^2 - 4x_1x_2 = m^2, m \in \mathbb{Z}.$$

Положим $x_1 = 4x_2$, тогда $D = 64x_2^2 = m^2$, т. е. $\pm 8x_2 = m$. Значит, квадратный трехчлен имеет следующие корни:

$$x = \frac{12x_2 + 8x_2}{10} = 2x_2, \quad x = \frac{12x_2 - 8x_2}{10} = \frac{2}{5}x_2.$$

Приняв $x_2 = 5\tilde{x}_2$, где $\tilde{x}_2 \in \mathbb{Z}$, получаем, что все корни производной $f'(x)$ целые.

Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = (x - 20\tilde{x}_2)^3(x - 5\tilde{x}_2)x, \text{ где } \tilde{x}_2 \in \mathbb{Z}$$

и является пiсе-многочленом, т. к. производная $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = 5(x - 20\tilde{x}_2)^2(x - 10\tilde{x}_2)(x - 2\tilde{x}_2), \text{ где } \tilde{x}_2 \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Пусть $\tilde{x}_2 = 1$, тогда $f(x) = (x - 20)^3(x - 5)x$ и

$$f'(x) = 5(x - 20)^2(x - 10)(x - 2).$$

По теореме 1 получаем параметрическое семейство нисе-многочленов 5-ой степени для случая (3, 1, 1): $f(x) = (x - (20 - t))^3(x - (5 - t))(x + t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 6. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x + t)^2(x - (35 - t))(x - (75 - t))(x - (210 - t)), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда такой многочлен является нисе-многочленом.

Доказательство.

Пусть $f(x) = x^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Тогда многочлен $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = x(5x^3 - x^2(4x_1 + 4x_2 + 4x_3) + x(3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3) - 2x_1x_2x_3).$$

Для того, чтобы уравнение $f'(x) = 0$ было разрешимо в целых числах необходимо и достаточно, чтобы диофантово уравнение

$$5x^3 - 4x^2(x_1 + x_2 + x_3) + 3x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - 2x_1x_2x_3 = 0$$

также было разрешимо в целых числах.

В общем виде найти все решения этого уравнения в целых числах затруднительно. Однако, это диофантово уравнение при фиксированных $x_1 = 35, x_2 = 75, x_3 = 210$ имеет решение: $y_1 = 21, y_2 = 175, y_3 = 60$. Поэтому многочлен

$$f(x) = x^2(x - 35)(x - 75)(x - 210)$$

является нисе-многочленом, т. к. его производная имеет вид:

$$f'(x) = 5x(x - 21)(x - 175)(x - 60).$$

Таким образом, по теореме 1 получаем параметрическое семейство нисе-многочленов 5-ой степени для случая (2,1,1,1):

$$f(x) = (x + t)^2(x - (35 - t))(x - (75 - t))(x - (210 - t)), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 7. *Рассмотрим многочлен вида:*

$$f(x) = (x + t)(x - (180 - t))(x - (285 - t))(x - (460 - t))(x - (780 - t)), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Тогда такой многочлен является нисе-многочленом.

Доказательство. Пусть $f(x) = x^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Тогда многочлен $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3(x_3 + x_4) + 3x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - 2x(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4.$$

Для того, чтобы уравнение $f'(x) = 0$ было разрешимо в целых числах необходимо и достаточно, чтобы диофантово уравнение

$$5x^4 - 4x^3(x_3 + x_4) + 3x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - \\ - 2x(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4 = 0$$

также было разрешимо в целых числах.

В общем виде найти все решения этого уравнения в целых числах затруднительно. При фиксированных $x_1 = 180$, $x_2 = 285$, $x_3 = 460$, $x_4 = 780$ уравнение $f'(x) = 0$ имеет решение: $y_1 = 230$, $y_2 = 60$, $y_3 = 390$, $y_4 = 684$.

Поэтому $f(x) = x(x - 180)(x - 285)(x - 460)(x - 780)$ является пiсе-многочленом, а, следовательно, производная имеет вид:

$$f'(x) = 5x(x - 230)(x - 60)(x - 390)(x - 684).$$

Таким образом, по теореме 1 получаем параметрическое семейство пiсе-многочленов 5-ой степени для случая (1,1,1,1,1):

$$f(x) = (x + t)(x - (180 - t))(x - (285 - t))(x - (460 - t))(x - (780 - t)), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены примеры и построены однопараметрические семейства пiсе-многочленов пятой степени на все случаи кратности корней многочлена.

Задача нахождения пiсе-многочленов относится к NP-полным задачам, так как не существует явного алгоритма решения диофантовых уравнений. Тем не менее, принимая во внимание полученные результаты, можно выделить следующую

Гипотеза. Для любого натурального n , большего единицы, существуют пiсе-многочлены степени n .

В то же время остается нерешенным вопрос о нахождении многочленов произвольной степени, у которых корни самого многочлена, его производной и второй производной являлись бы различными целыми числами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. WEINTRAUB, S. H. (1988) Partial solution to problem 87-9. *Mathematical Intelligencer*. 2 (10). Pp. 55.
2. ZUSER, K. (1963) Uber eine gewisse Klasse von ganzen rationalen Funktionen 3. *Grades, Elemente der Mathematik*. 18. Pp. 101–104.

3. CALDWELL, C. K. (1990) Nice polynomials of degree 4. *Math. Spectrum*. 23 (2). Pp. 36–39.
4. ANTON, H., SAPAR, S. H. & JOHAR, M. A. (2019) The parameterization of nice and Q-nice polynomials with four roots. *Journal of Physics: Conf. Series*. 1132. Pp. 1–7.
5. GROVES, J. (2007) D-nice symmetric polynomials with four roots over integral domains D of any characteristic. *J. of Algebra*. 2. Pp. 208–225.
6. GROVES, J. (2008) Nice polynomials with three roots. *Math. Gazette*. 525. Pp. 1–7.
7. GROVES, J. (2012) Nice polynomials with four roots. *Far East J. Math. Sci*. 27. Pp. 27–29.
8. CHOUNDRY, A. (2015) A Diophantine problem from calculus. *J. of Number Theory*. 153. Pp. 354–363.
9. Сергеев, А. Э. Факторизация многочленов над конечными полями / Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества // / 3. — 2018. — С. 6–11.
SERGEEV, A. E. (2018) Factorization of polynomials over finite fields. *Environmental Bulletin of Black Sea Economic Cooperation Research Centres*. (3). Pp. 6–11.
10. Патов, А. М., Сергеев, А. Э. Экономико-математические модели и методы в землеустройстве / Сборник статей «Студенческие научные работы инженерно-землеустроительного факультета» по материалам студенческой научно-практической конференции // . — 2017. — С. 95–100.
PATOV, A. M. & SERGEEV, A. E. (2017) Economic-mathematical models and methods in land management. *Collection of articles «Student scientific works of Engineering and Land Management Faculty» on materials of student scientific and practical conference*. Pp. 95–100.
11. Лаптев, В. Н., Сергеев, А. Э., Сергеев, Э. А. Основная теорема арифметики и некоторые ее приложения / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета // / 113. — 2015. — С. 127–132.
LAPTEV, V. N., SERGEEV, A. E. & SERGEEV, E. A. (2015) The basic theorem of arithmetic and some of its applications. *Political Network Electronic Journal of the Kuban State Agrarian University*. (113). Pp. 127–132.

УДК: 517.432

MSC2010: 46C20;47B50

J-САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИЛАТАЦИИ ОБЩЕГО ВИДА: МИНИМАЛЬНОСТЬ И ИЗОМОРФИЗМ

© Д. В. Третьяков

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: dottvd@mail.ru

J-SELFADJOINT DILATIONS OF COMMON FORM: MINIMALITY AND ISOMORPHISM.

Tretyakov D. V.

Abstract.

So-called minimum dilation plays an important role in dilation theory. The analysis of the known results leads to the study problem of the J-self-adjusted general dilation at a minimum. This gives rise to the natural problem of isomorphism of two arbitrary J-self-adjust minimum S dilations of a linear operator A with a non-empty set of regular points.

The common approach to construction of J-self-adjoint dilation for linear operator with nonempty regular point set is considered in this article.

To construct the dilation, operators conjugated to maximal simple symmetric operators and boundary doubles of these operators were used. The most common cases of construct the dilation are the previously known J-self-adjust dilations.

Minimum criteria of constructed dilation have been proved, one of which is formulated in terms of simplicity of operators. connected to maximally simple symmetric operators.

In addition, the theorem of isomorphism of two arbitrary minimum J-self-defined dilatations of the original operator has been proved by means of the obtained minimum criteria and a description of the areas of definition of operators connected to the maximal simple symmetric operators.

For linear operator A with nonempty regular point set and dense domain in Hilbert space were proved such theorems:

1. Operator S is a J-self-adjoint dilation for operator A .

This dilation called the J-self-adjoint dilation of common form. Different private cases of dilation S were considered too. Solved the problem for minimality of J-self-adjoint dilation.

2. Arbitrary J-self-adjoint dilation for operator A of a common form is minimality iff operators F_{\pm} are simple.
3. Arbitrary minimal J_1 - and J_2 -self-adjoint dilations for operator A of a common form are isomorphic.

Keywords: *J-self-adjoint dilation, maximal symmetric operator, symmetric simple operator, defect operators, minimal J-self-adjoint dilation, isomorphism of minimal J-self-adjoint dilations*

ВВЕДЕНИЕ

Фактически понятие дилатации линейного оператора впервые появляется у М. А. Наймарка [1] в 1940 году. Идея дилатации базируется на растяжении заданного оператора до оператора с более хорошими свойствами в более широком пространстве.

Унитарную дилатацию сжатия впервые построил Б. Секефальви-Надь [2]. Идея построения дилатации оказалась очень плодотворной, она принесла многочисленные приложения в различных математических дисциплинах (см., напр., [3]). Отметим, что в [4] была построена унитарная дилатация *общего вида* для оператора сжатия.

Далее, Л. А. Сахнович [5], А. В. Кужель [6] и Ch. Davis [7] независимо друг от друга построили *J*-унитарные дилатации произвольного ограниченного оператора.

В 1977 году в [8] вышла в свет пионерская работа Б. С. Павлова, в которой была построена самосопряженная дилатация оператора Шредингера. При этом область определения исходного оператора совпадала с областью определения сопряженного оператора.

Полученные результаты были обобщены в работах А. В. Кужеля [9] и Ю. Л. Кудряшова [10], в которых были построены трансляционная и спектральная формы самосопряженной дилатации произвольного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Этими же авторами были построены трансляционная [9] и спектральная [11] формы *J*-самосопряженной дилатации произвольного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. Позже вторым автором был доказан изоморфизм трансляционных и спектральных форм в случае самосопряженных дилатаций [12].

В работе [14] была построена *J*-самосопряженная дилатация *общего вида* для произвольного плотно заданного линейного оператора с непустым множеством регулярных точек, частными случаями которой являются дилатации А. В. Кужеля [9] и Ю. Л. Кудряшова [11].

К сожалению, в работах автора [14], [15] были допущены неточности, *не повлиявшие на основные результаты работ*, однако, несколько изменившие правильную структуру построенной *J*-самосопряженной дилатации и некоторые этапы доказательства изоморфизма двух произвольных *J*-дилатаций. По этой причине в начале предлагаемой работы приводятся правильные формулы для *J*-самосопряженной дилатации. Приведены также обоснования этих формул.

Важную роль в теории дилатаций играют так называемые минимальные дилатации. Анализ известных результатов приводит к задаче исследования построенной

J-самосопряженной дилатации общего вида на минимальность. В связи с этим возникает естественная задача об изоморфизме двух произвольных J-самосопряженных минимальных дилатаций линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. Решению всех этих вопросов посвящена данная работа.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть \mathfrak{H} — гильбертово пространство (ГП), A — плотно заданный линейный оператор, причем, без ограничения общности, $-i \in \rho(A)$, $R_{-i} = (A + i)^{-1}$. Рассмотрим самосопряженные операторы [6]

$$B_+ = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}, \quad B_- = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*$$

и их полярные разложения $B_{\pm} = \mathcal{J}_{\pm}|B_{\pm}|$. Пусть $Q_{\pm} = \sqrt{|B_{\pm}|}$, $\mathfrak{Q}_{\pm} = \text{Clos}(Q_{\pm}\mathfrak{H})$ — дефектные подпространства оператора A .

Рассмотрим произвольные ГП \mathfrak{Q}_{\pm} , в которых действуют произвольные простые максимальные симметрические операторы F_{\pm} с индексами дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно, где $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm}$, а \mathfrak{N}_{\pm} — дефектные подпространства операторов F_{\pm} , $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$ — изометрии.

Пусть V_{\pm} изометрические простые операторы — преобразования Кэли операторов F_{\pm} :

$$V_- = (F_- + i)(F_- - i)^{-1} \quad V_+ = (F_+ - i)(F_+ + i)^{-1}. \quad (1)$$

Формулы обращения имеют вид:

$$F_- = i(V_- + 1)(V_- - 1)^{-1} \quad F_+ = -i(V_+ + 1)(V_+ - 1)^{-1} \quad (2)$$

Определение 1. Пары $\langle \mathcal{H}_{\pm}, \Gamma_{\pm} \rangle$, где \mathcal{H}_{\pm} -ГП со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{\pm}}$, $\Gamma_{\pm} : \text{dom}(F_{\pm}^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}$ — операторы, называются *граничными двойками* операторов F_{\pm}^* , если:

1. $\forall f, g \in \text{dom}(F_{\pm}^*) \quad (F_{\pm}^*f, g)_{\mathfrak{Q}_{\pm}} - (f, F_{\pm}^*g)_{\mathfrak{Q}_{\pm}} = \mp 2i(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}g)_{\mathcal{H}_{\pm}}. \quad (3)$
2. Отображения $\text{dom}(F_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}f \in \mathcal{H}_{\pm}$ сюръективны.

Существование граничных двоек вытекает из формул фон Неймана. Отсюда же следует, что в нашем случае в качестве \mathcal{H}_{\pm} можно взять подпространства \mathfrak{N}_{\pm} .

Отметим, что понятие *граничных троек для равных дефектных чисел* было введено в работах А. Н. Кочубея и В. М. Брауна (см., напр., [24] и [25]) и развивалось в многочисленных работах В. И. Горбачука, В. М. Брука, С. Н. Набоко, М. М. Маламуда, В. А. Деркача, В Рыжова. и др.(см., напр., [18], [20], [25], [19], [26]).

В связи с *неравными дефектными числами* в определении 1 необходимо упомянуть работы В. И. Могилевского, который обобщил ряд положений теории граничных троек на этот случай (см, напр., [27]).

Пусть в формулах (3) $g = f \in \text{dom}(F_{\pm})$. Тогда $\|\Gamma_{\pm}f\| = 0$, то есть $\text{dom}(F_{\pm}) \subseteq \ker \Gamma_{\pm}$. Обратно, пусть, к примеру, $h_+ = h_+^0 + n_+ \in \ker \Gamma_+$, где $h_+^0 \in \text{dom}(F_+)$, $n_+ \in \mathfrak{N}_+$. Тогда по формулам фон Неймана

$$\begin{aligned} 0 = \|\Gamma_+h_+\|^2 &= (F_+^*h_+, h_+)_{\mathfrak{D}_+} - (h_+, F_+^*h_+)_{\mathfrak{D}_+} = (F_+h_+^0 - in_+, h_+^0 + n_+)_{\mathfrak{D}_+} - \\ &- (h_+^0 + n_+, F_+h_+^0 - in_+)_{\mathfrak{D}_+} = (F_+h_+^0, n_+)_{\mathfrak{D}_+} - i(n_+, h_+^0)_{\mathfrak{D}_+} - 2i\|n_+\|^2 - \\ &- i(h_+^0, n_+)_{\mathfrak{D}_+} - (n_+, F_+h_+^0)_{\mathfrak{D}_+} = -2i\|n_+\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $n_+ = 0$ и $h_+ = h_+^0 \in \text{dom}(F_{\pm})$. Таким образом, $\text{dom}(F_+) = \ker \Gamma_+$. Аналогично $\text{dom}(F_-) = \ker \Gamma_-$. Доказана

Лемма 1. *Имеют место равенства $\text{dom}(F_{\pm}) = \ker \Gamma_{\pm}$.*

Лемма 2. *Пусть $h_{\pm} = h_{\pm}^0 + n_{\pm}$, где $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$, $h_{\pm}^0 \in \text{dom}(F_{\pm})$, $n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$, $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm}$, $h_{\pm}^0 = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k m_k^{\pm}$, $n_k^{\pm}, m_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm} \forall k \geq 0$. Тогда $\Gamma_{\pm}h_{\pm} = n_0^{\pm} - m_0^{\pm}$.*

Доказательство. Так как $h_{\pm} = h_{\pm}^0 + \Gamma_{\pm}h_{\pm}$, то обозначив через $P_{\pm} : \mathfrak{D}_{\pm} \rightarrow \mathfrak{N}_{\pm}$ ортопроекторы, с учетом включений

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm}, \sum_{k=1}^{\infty} V_{\pm}^k m_k^{\pm} \right\} \subset \mathfrak{N}_{\pm}^{\perp}$$

получим $\Gamma_{\pm}h_{\pm} = P_{\pm}\Gamma_{\pm}h_{\pm} = P_{\pm}(h_{\pm} - h_{\pm}^0) = n_0^{\pm} - m_0^{\pm}$. □

Следствие 1. *Имеют место равенства: $\Gamma_{\pm} = P_{\pm}|_{\text{dom}(F_{\pm}^*)} - P_{\pm}|_{\text{dom}(F_{\pm})}$.*

Построим теперь ГП $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ и определим в \mathbb{H} оператор $J = J_- \oplus I \oplus J_+$, где:

$$\forall h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}, n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}, J_{\pm} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm} \quad (4)$$

Имеет место следующее предложение.

Лемма 3. $J_{\pm}V_{\pm} = V_{\pm}J_{\pm}$, $J_{\pm}\Gamma_{\pm} \subseteq \Gamma_{\pm}J_{\pm}$, $J_{\pm}F_{\pm} \subseteq F_{\pm}J_{\pm}$.

Доказательство. В силу (4) для любых векторов $n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$, для любых $k \in \mathbb{N}$

$$J_{\pm}V_{\pm}^k n_{\pm} = V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_{\pm} = V_{\pm}^k J_{\pm} n_{\pm}.$$

Отсюда для любых векторов $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}$

$$J_{\pm} V_{\pm} h_{\pm} = J_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^{k+1} n_k^{\pm} = V_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm} = V_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}.$$

Аналогично для произвольных векторов $h_{\pm} = h_{\pm}^0 + n_{\pm}$ в силу леммы 2

$$J_{\pm} \Gamma_{\pm} h_{\pm} = J_{\pm} (n_0^{\pm} - m_0^{\pm}) = \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} (n_0^{\pm} - m_0^{\pm}) = \Gamma_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}.$$

Оставшиеся включения доказываются с помощью равенств (2):

$$J_{\pm} F_{\pm} = \mp i J_{\pm} (I + 2(V_{\pm} - 1))^{-1} \subseteq F_{\pm} J_{\pm}.$$

При этом для любых векторов $h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$ имеем $J_{\pm} h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$ так как из уже доказанной части данной леммы $\Gamma_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}^0 = J_{\pm} \Gamma_{\pm} h_{\pm}^0 = 0$. \square

Следствие 2. $J_{\pm} F_{\pm}^* \subseteq F_{\pm}^* J_{\pm}$.

Доказательство. По формулам фон Неймана для любых векторов $h_{\pm} \in \text{dom} F_{\pm}^*$ имеют место равенства $h_{\pm} = h_{\pm}^0 + n_{\pm}$, где $h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$, $n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$ и $F_{\pm}^* h_{\pm} = F_{\pm}^* h_{\pm}^0 \mp i n_{\pm}$. Отсюда

$$J_{\pm} F_{\pm}^* h_{\pm} = J_{\pm} (F_{\pm}^* h_{\pm}^0 \mp i n_{\pm}) = F_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}^0 \mp i J_{\pm} n_{\pm}. \quad (5)$$

Так как $J_{\pm} n_{\pm} = \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$ и $J_{\pm} h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$, то из равенства (5) вытекает, что $J_{\pm} F_{\pm}^* h_{\pm} = F_{\pm}^* J_{\pm} h_{\pm}$ для любых $h_{\pm} \in \text{dom} F_{\pm}^*$. \square

Лемма 4. Для любого натурального k

$$F_{\pm}^* V_{\pm}^k n_{\pm} = \mp i V_{\pm}^k n_{\pm} \mp 2i \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\pm}^r \right) n_{\pm}, \quad \forall n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}. \quad (6)$$

Доказательство. Отметим вначале, что $F_{\pm}^* n_{\pm} = \mp i n_{\pm}$. Проведем доказательство для оператора F_{+}^* .

В силу (1)

$$\begin{aligned} F_{+}^* V_{+} n_{+} &= F_{+}^* (n_{+} - 2i R_{-i}(F_{+}) n_{+}) = -i n_{+} - 2i (F_{+} + i - i) R_{-i}(F_{+}) n_{+} = \\ &= -i n_{+} - 2i n_{+} - 2R_{-i}(F_{+}) n_{+} = -i (n_{+} - 2i R_{-i}(F_{+}) n_{+}) - 2i n_{+} = -i V_{+} n_{+} - 2i n_{+}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} F_{+}^* V_{+}^2 n_{+} &= F_{+}^* (n_{+} - 4i R_{-i}(F_{+}) n_{+} - 4R_{-i}^2(F_{+}) n_{+}) = -i n_{+} - 4i (F_{+} + i - i) R_{-i}(F_{+}) n_{+} - \\ &- 4(F_{+} + i - i) R_{-i}^2(F_{+}) n_{+} = -i V_{+}^2 n_{+} - 2i (n_{+} + V_{+} n_{+}). \end{aligned}$$

Если равенство (6) верно при некотором $k \in \mathbb{N}$, то

$$F_{+}^* V_{+}^{k+1} n_{+} = F_{+}^* V_{+} V_{+}^k n_{+} = F_{+}^* V_{+}^k n_{+} - 2i F_{+}^* R_{-i}(F_{+}) V_{+}^k n_{+} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -iV_+^k n_+ - 2i \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_+^r \right) n_+ - 2i(F_+ + i - i)R_{-i}(F_+)V_+^k n_+ = \\
 &= -iV_+^k n_+ - 2i \left(\sum_{r=0}^k V_+^r \right) n_+ - 2R_{-i}(F_+)V_+^k n_+ = -iV_+^{k+1} n_+ - 2i \left(\sum_{r=0}^k V_+^r \right) n_+.
 \end{aligned}$$

Случай оператора F_-^* рассматривается аналогично. □

2. J-САМОСОПРЯЖЕННАЯ ДИЛАТАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение 2. *J*-самосопряженный оператор S , действующий в ГП \mathbb{H} , называется *J-самосопряженной дилатацией* линейного, плотно заданного оператора A с непустым множеством регулярных точек $(\lambda_0 \in \rho(A))$, действующего в ГП \mathfrak{H} , если:

1. $\mathfrak{H} \subset \mathbb{H}$;
2. $(A - \lambda)^{-1}h = P(S - \lambda)^{-1}h \forall h \in \mathfrak{H}, \forall \lambda \in \rho(A) \cap \rho(S)$ из любой связной компоненты некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(S)$ $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ - ортопроектор, где $\rho(A), \rho(S)$ - множества регулярных точек операторов A и S .

В пространстве $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ определим оператор S .

Будем говорить, что вектор $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \mathbb{H}$ принадлежит $\text{dom}(S)$ тогда и только тогда, когда:

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$;
2. $\varphi = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $\sqrt{2}\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = \sqrt{2}T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+(A + i)\varphi$, где $T^* = I + 2iR_{-i}^*$, I -единичный оператор в \mathfrak{H} .

Для любого вектора $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$ положим

$$Sh = S(h_-, h_0, h_+)^T := (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi, F_+^* h_+)^T. \tag{7}$$

Вначале докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 5. *Если вектор $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$, то*

$$\psi = h_0 + \sqrt{2}Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*) \text{ и } (A + i)\varphi - (A^* - i)\psi = 2ih_0$$

Доказательство. Подействуем на обе части условия 3 на $\text{dom}(S)$ оператором Q_+ с учетом равенства $Q_+ T^* = T^* Q_-$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ &= \sqrt{2}T^* Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+^2 (A + i)\varphi = \sqrt{2}(I + 2iR_{-i}^*)Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + \\
 &+ iB_+(A + i)\varphi = \sqrt{2}(I + 2iR_{-i}^*)Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i(iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^* R_{-i})(A + i)\varphi = \\
 &= \sqrt{2}(I + 2iR_{-i}^*)Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- - \varphi + R_{-i}^*(A + i)\varphi - 2iR_{-i}^* \varphi = (I + 2iR_{-i}^*)(\sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- - \varphi) +
 \end{aligned}$$

$$+R_{-i}^*(A+i)\varphi = -(I+2iR_{-i}^*)h_0 + R_{-i}^*(A+i)\varphi \quad (8)$$

Из равенства (8) получаем:

$$2iR_{-i}^*h_0 + (h_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+h_+) = R_{-i}^*(A+i)\varphi \quad (9)$$

Так как $\{R_{-i}^*h_0, R_{-i}^*(A+i)\varphi\} \subset \text{dom}(A^*)$, то вектор $\psi = h_0 + \sqrt{2}Q_+\Phi_+\Gamma_+h_+ \in \text{dom}(A^*)$. Подействуем теперь на обе части равенства (9) оператором $(A^* - i)$:

$$2ih_0 + (A^* - i)\psi = (A+i)\varphi,$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 6. Дефинитный сопряженный оператор S^* определяется следующим образом. Вектор $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \mathbb{H}$ принадлежит $\text{dom}(S^*)$ тогда и только тогда, когда:

$$1^*. g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*);$$

$$2^*. \psi = g_0 + \sqrt{2}\mathcal{J}_+Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+ \in \text{dom}(A^*);$$

$$3^*. \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_- = \sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+ - iQ_-(A^* - i)\psi, \text{ где } T = I - 2iR_{-i}.$$

Если $g \in \text{dom}(S^*)$, то

$$S^*g = S^*(g_-, g_0, g_+)^T = (F_-^*g_-, ig_0 + (A^* - i)\psi, F_+^*g_+)^T. \quad (10)$$

Доказательство. Легко проверить, что оператор S плотно задан. Для любых векторов $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$ и $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \mathbb{H}$, где $g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$

$$\begin{aligned} (Sh, g)_{\mathbb{H}} &= (F_-^*h_-, g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (-ih_0 + (A+i)\varphi, g_0) + (F_+^*h_+, g_+)_{\mathfrak{D}_+} = \\ &= (h_-, F_-^*g_-)_{\mathfrak{D}_-} + i(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_-) + (h_+, F_+^*g_+)_{\mathfrak{D}_+} - \\ &- i(\sqrt{2}T^*\Phi_-\Gamma_-h_- + i\mathcal{J}_+Q_+(A+i)\varphi, \sqrt{2}\Phi_+\Gamma_+g_+) + (h_0, ig_0) + ((A+i)\varphi, g_0) = \\ &= (h_-, F_-^*g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^*g_+)_{\mathfrak{D}_+} + i(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_- - \sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+) + \\ &+ ((A+i)\varphi, g_0 + \sqrt{2}\mathcal{J}_+Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+) + (h_0, ig_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Из равенства (11) вытекает, что вектор $\psi = g_0 + \sqrt{2}\mathcal{J}_+Q_+\Phi_+\Gamma_+g_+$ должен принадлежать $\text{dom}(A^*)$. Тогда используя условие 2 на $\text{dom}(S)$, получим:

$$\begin{aligned} (Sh, g)_{\mathbb{H}} &= (h_-, F_-^*g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^*g_+)_{\mathfrak{D}_+} + i(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_- - \sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+) + \\ &+ (h_0 + \sqrt{2}Q_-\Phi_-\Gamma_-h_-, (A^* - i)\psi) + (h_0, ig_0) = (h_-, F_-^*g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^*g_+)_{\mathfrak{D}_+} + \\ &+ (h_0, ig_0 + (A^* - i)\psi) + i(\sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-h_-, \sqrt{2}\Phi_-\Gamma_-g_- - \sqrt{2}T\Phi_+\Gamma_+g_+ + iQ_-(A^* - i)\psi)_{\mathfrak{N}_-} = (h, g^*)_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда вектор $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \mathbb{H}$ удовлетворяет условиям леммы 6. При этом справедливо равенство (10). \square

Так же как и лемма 5 доказывается

Лемма 7. Если вектор $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \text{dom}(S^*)$, то

$$\varphi = g_0 + \sqrt{2} \mathcal{J}_- Q_- \Phi_- \Gamma_- g_- \in \text{dom}(A) \text{ и } (A + i)\varphi - (A^* - i)\psi = 2ig_0$$

Теорема 1. Оператор S является *J*-самосопряженной дилатацией оператора A .

Доказательство. Так как оператор $S^{[*]}$, сопряженный к S в метрике J , удовлетворяет равенству $S^{[*]} = JS^*J$ [16], то достаточно доказать, что $S = JS^*J$.

Проверим вначале, что $J \text{dom}(S) = \text{dom}(S^*)$. Пусть $h \in \text{dom}(S)$. Тогда, в частности, $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$. Но $J_{\pm}h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$, что вытекает из доказательства следствия 2. Рассмотрим вектор $Jh = (J_-h_-, h_0, J_+h_+)^T$. Проверим условия 2* и 3*.

Условие 2*. $\psi = h_0 + \sqrt{2} \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ J_+h_+ = h_0 + \sqrt{2} \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ (\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+) (n_0^+ - m_0^+) =$
 $= h_0 + \sqrt{2} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$ в силу лемм 5 и 2. Аналогично проверяется

Условие 3*. Так как $\Phi_- \Gamma_- J_-h_- = \Phi_- (\Phi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_-) (n_0^- - m_0^-) = \mathcal{J}_- \Phi_- (n_0^- - m_0^-) =$
 $= \mathcal{J}_- \Phi_- \Gamma_- h_-$, то с помощью определения $\text{dom}(S)$, равенства $I - TT^* = 2B_-$ и леммы 7 получаем:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \Phi_- \Gamma_- J_-h_- - \sqrt{2} T \Phi_+ \Gamma_+ J_+h_+ + iQ_-(A^* - i)\psi = \\ & = \sqrt{2} \mathcal{J}_- (I - TT^*) \Phi_- \Gamma_- h_- - iTQ_+(A + i)\varphi + iQ_-(A^* - i)\psi = \\ & = 2\sqrt{2} \mathcal{J}_- B_- \Phi_- \Gamma_- h_- - iQ_-(I - 2iR_-)(A + i)\varphi + iQ_-(A^* - i)\psi = \\ & = 2\sqrt{2} Q_-^2 \Phi_- \Gamma_- h_- - iQ_-((A + i)\varphi - (A^* - i)\psi) - 2Q_- \varphi = \\ & = 2\sqrt{2} Q_-^2 \Phi_- \Gamma_- h_- + 2Q_-(h_0 - \varphi) = 0, \end{aligned}$$

где $\psi = h_0 + \sqrt{2} \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ J_+h_+ = h_0 + \sqrt{2} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$.

Это доказывает включение $J \text{dom}(S) \subseteq \text{dom}(S^*)$.

Обратное включение доказывается аналогично с помощью леммы 6 и леммы 7. Следовательно, справедливо равенство $J \text{dom}(S) = \text{dom}(S^*)$, опираясь на которое, легко убедиться в *J*-самосопряженности оператора S . В самом деле, для любого вектора $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$ на основании следствия 2 и леммы 5

$$Sh = J(J_-F_-^*h_-, ih_0 + (A^* - i)\psi, J_+F_+^*h_+)^T = JS^*J(h_-, h_0, h_+)^T = JS^*Jh.$$

Здесь $\psi = h_0 + \sqrt{2} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$, $\varphi = h_0 + \sqrt{2} Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$.

Предположим теперь, что $\lambda \in \mathbb{C}^-$ и принадлежит произвольной связной компоненте некоторой окрестности $w(-i; \varepsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(S)$ точки $-i$. Обозначим это множество через $SC^-(-i)$. Найдем резольвенту оператора S . Для этого составим следующее уравнение $((F_-^* - \lambda)h_-, -(i + \lambda)h_0 + (A + i)\varphi, (F_+^* - \lambda)h_+)^T = (g_-, g_0, g_+)^T$, которое эквивалентно системе:

$$\begin{cases} (F_-^* - \lambda)h_- = g_- \\ -(i + \lambda)h_0 + (A + i)\varphi = g_0 \\ (F_+^* - \lambda)h_+ = g_+ \end{cases} \quad (12)$$

Так как F_- симметрический оператор с индексом дефекта $(\mathfrak{q}_-, 0)$, то нижняя полуплоскость не содержит собственных значений оператора F_-^* , поэтому $h_- = (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-$. Второе уравнение перепишем так: $(A - \lambda)\varphi + (i + \lambda)(\varphi - h_0) = g_0$ или

$$(A - \lambda)\varphi = g_0 - \sqrt{2}(i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- h_-.$$

Так как $\lambda \in \mathbb{S}\mathbb{C}^-(-i)$, то

$$\varphi = R_\lambda(g_0 - \sqrt{2}(i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-). \quad (13)$$

Из равенства (13) находим вектор h_0 :

$$h_0 = R_\lambda g_0 - \sqrt{2}(I + (i + \lambda)R_\lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-.$$

Из условия 3. на $\text{dom}(\mathbf{S})$ следует равенство

$$\Gamma_+ h_+ = \Phi_+^{-1} \left(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi \right) \quad (14)$$

По формулам фон Неймана $h_+ = h_+^0 + n_+$, $h_+^0 \in \text{dom}(F_+)$, $n_+ \in \mathfrak{N}_+$, причем, $\Gamma_+ h_+ = n_+$. Ввиду формулы (14)

$$n_+ = \Phi_+^{-1} \left(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi \right). \quad (15)$$

Перепишем теперь третье уравнение системы (12) следующим образом:

$$(F_+ - \lambda)h_+^0 - (i + \lambda)n_+ = g_+.$$

Находим вектор h_+^0 :

$$\begin{aligned} h_+^0 &= (F_+ - \lambda)^{-1}(g_+ + (i + \lambda)n_+) = \\ &= (F_+ - \lambda)^{-1} \left(g_+ + (i + \lambda)\Phi_+^{-1} \left(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h_+ &= h_+^0 + n_+ = (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})n_+ = \\ &= (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})\Phi_+^{-1} \left(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})\Phi_+^{-1} \left(T^*\Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_- + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)R_\lambda(g_0 - \sqrt{2}(i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-) \right) = \\
 &= R_\lambda(F_+)g_+ + \frac{i}{\sqrt{2}}(I + (i + \lambda)R_\lambda(F_+))\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)R_\lambda g_0 + \\
 &+ (I + (i + \lambda)R_\lambda(F_+))\Phi_+^{-1}(T^* - i(\lambda + i)) \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)R_\lambda Q_- \Phi_- \Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими обозначениями: для любого линейного оператора L , для которого существует $(L - \lambda)^{-1}$, обозначим через $M_{\mu, \lambda}(L)$ оператор $I + (\lambda - \mu)R_\lambda(L)$. Тогда

$$h_+ = R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i, \lambda}(F_+)\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}Q_+ M_{-i, \lambda}(A)g_0 + W_A^*(\bar{\lambda})\Phi_- \Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_- \right),$$

где

$$W_A(\lambda) : \mathfrak{Q}_+ \rightarrow \mathfrak{Q}_-, \quad W_A(\lambda) = \mathcal{J}_- T + i(\lambda - i)Q_- M_{i, \lambda}(A^*)Q_+ -$$

характеристическая оператор-функция оператора A (см., напр., [21]).

Кроме того положим

$$v_-(\lambda) := \Phi_- \Gamma_- R_\lambda(F_-^*)g_-, \quad v_+(\lambda) := \frac{i}{\sqrt{2}}Q_+ M_{-i, \lambda}(A)g_0.$$

Отсюда получаем формулу

$$h_+ = R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i, \lambda}(F_+)\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ (W_A^*(\bar{\lambda})v_-(\lambda) + v_+(\lambda)). \quad (16)$$

Используя (15) и (16), находим решение системы (12):

$$\begin{cases} h_- = R_\lambda(F_-^*)g_- \\ h_0 = R_\lambda g_0 - \sqrt{2}M_{-i, \lambda}(A)Q_- v_-(\lambda) \\ h_+ = R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i, \lambda}(F_+)\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ (W_A^*(\bar{\lambda})v_-(\lambda) + v_+(\lambda)) \end{cases}$$

Таким образом, резольвента оператора S имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &R_\lambda(S)(g_-, g_0, g_+)^T = (R_\lambda(F_-^*)g_-, \\
 &R_\lambda g_0 - \sqrt{2}M_{-i, \lambda}(A)Q_- v_-(\lambda), R_\lambda(F_+)g_+ + M_{-i, \lambda}(F_+)\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ (W_A^*(\bar{\lambda})v_-(\lambda) + v_+(\lambda)))^T.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим через $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ ортопроектор. Тогда

$$PR_\lambda(S)(0, g_0, 0)^T = P(0, R_\lambda g_0, M_{-i, \lambda}(F_+)\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ v_+(\lambda))^T = R_\lambda g_0.$$

Теорема доказана. □

Аналогично рассуждая, приходим к справедливости следующего предложения.

Следствие 3. Для любого $\lambda \in \mathbb{S}C^-(-i)$ имеет место равенство

$$R_{\bar{\lambda}}(\mathcal{S})(g_-, g_0, g_+)^T = (R_{\bar{\lambda}}(F_-)g_- + M_{i,\bar{\lambda}}(F_-)\Phi^{-1}(W_A(\bar{\lambda})w_+(\bar{\lambda}) - w_-(\bar{\lambda})), \\ R_{\bar{\lambda}}^*g_0 - \sqrt{2}M_{i,\bar{\lambda}}(A^*)Q_+w_+(\bar{\lambda}), R_{\bar{\lambda}}(F_+^*)g_+)^T,$$

где $w_+(\bar{\lambda}) = \mathcal{J}_+\Phi_+\Gamma_+R_{\bar{\lambda}}(F_+^*)g_+$, $w_-(\bar{\lambda}) = \frac{i}{\sqrt{2}}Q_-M_{i,\bar{\lambda}}(A^*)g_0$.

3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим некоторые частные случаи построенной дилатации.

3.1. Спектральное представление дилатации. Пусть $\mathfrak{D}_{\pm} = L_2(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. В пространствах \mathfrak{D}_{\pm} рассмотрим симметрические операторы F_{\pm} , которые определяются следующим образом:

$$\text{dom}(F_{\pm}) = \{h_{\pm} \in W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm}) | h_{\pm}(0) = 0\}, \quad (F_{\pm}h_{\pm}) = ih'_{\pm}(t), \quad h_{\pm}(t) \in \text{dom}(F_{\pm}),$$

где $W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$ — классы Соболева. Операторы F_{\pm} , очевидно, являются простыми и максимальными с индексом дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно. Сопряженные операторы F_{\pm}^* задаются такими же дифференциальными выражениями на линеалах $\text{dom}(F_{\pm}^*) = W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$.

Дефектные подпространства операторов F_{\pm} задаются равенствами

$$\mathfrak{N}_{\pm} = \{e^{\mp t}q_{\pm} \mid q_{\pm} \in \mathfrak{Q}_{\pm}\}.$$

Для любых векторов $f_{\pm}, g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$

$$(F_{\pm}^*f_{\pm}, g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (f_{\pm}, F_{\pm}^*g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \int_{\mathbb{R}_{\pm}} ((if'_{\pm}(t), g_{\pm}(t))_{\mathfrak{Q}_{\pm}} - (f_{\pm}(t), ig'_{\pm}(t))_{\mathfrak{Q}_{\pm}}) dt = \\ = \mp i(f_{\pm}(0), g_{\pm}(0))_{\mathfrak{Q}_{\pm}} = \mp 2i(\Gamma_{\pm}f_{\pm}, \Gamma_{\pm}g_{\pm}).$$

Отсюда получаем равенства для граничных операторов: $(\Gamma_{\pm}f_{\pm})(t) = e^{\mp t}f_{\pm}(0)$. Легко найти операторы Φ_{\pm} :

$$\Phi_{\pm}(e^{\mp t}q_{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}q_{\pm}, \quad q_{\pm} \in \mathfrak{Q}_{\pm}.$$

По формулам (1) находим операторы V_{\pm} :

$$(V_+y)(t) = y(t) - 2 \int_0^t e^{u-t}y(u)du, \quad (V_-y)(t) = y(t) - 2 \int_{-\infty}^t e^{t-u}y(u)du.$$

Дефектное подпространство \mathfrak{N}_+ запишем в виде: $\mathfrak{N}_+ = \text{span}\{\omega_0(t)q_+ | q_+ \in \mathfrak{Q}_+\}$, где

$$\omega_n(t) = \sqrt{2} \frac{e^t(t^n e^{-2t})^{(n)}}{n!} = \sqrt{2}w_n(2t), \left(w_n(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}(t^n e^{-t})^{(n)}}{n!} \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

ортонормированные функции Чебышева-Лагерра двойного аргумента [17]. При этом, как легко проверить, справедливы равенства $V_+^n(\omega_0(t)q_+) = \omega_n(t)q_+$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Так как оператор F_+ простой, максимальный и симметрический, то V_+ -односторонний сдвиг (см., напр., [2], [3]) и, поэтому, для любой функции $h_+(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Q}_+)$ справедливо разложение

$$h_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(t)q_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} V_+^n(\omega_0(t)q_n^+), q_n^+ = \int_0^{\infty} \omega_n(t)h_+(t)dt \in \mathfrak{Q}_+, n \geq 0.$$

С помощью равенства (4) зададим оператор J_+ :

$$(J_+h_+)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(t) \mathcal{J}_+q_n^+ = \mathcal{J}_+ \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(t)q_n^+ = \mathcal{J}_+h_+(t),$$

то есть, оператор \mathcal{J}_+ действует на функцию $h_+(t)$ при каждом t .

Аналогичная ситуация обстоит с представлением дефектного подпространства \mathfrak{N}_- и определением оператора J_- . Продолжим вначале ортонормированную систему функций Чебышева-Лагерра на \mathbb{R}_- :

$$\tilde{\omega}_{-n}(t) := \omega_n(-t), n = 0, 1, 2, \dots, \text{ тогда } \mathfrak{N}_- = \text{span}\{\tilde{\omega}_0(t)q_- | q_- \in \mathfrak{Q}_-\}.$$

Справедливы следующие равенства $V_-^n(\tilde{\omega}_0(t)q_-) = \tilde{\omega}_{-n}(t)q_-$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где V_- -односторонний сдвиг, $\mathfrak{N}_- = \text{span}\{\tilde{\omega}_0(t)q_- | q_- \in \mathfrak{Q}_-\}$. Для любой функции $h_-(t) \in L_2(\mathbb{R}_-; \mathfrak{Q}_-)$ имеет место разложение

$$h_-(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_{-n}(t)q_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} V_-^n(\tilde{\omega}_0(t)q_n^-), q_n^- = \int_{-\infty}^0 \tilde{\omega}_{-n}(t)h_-(t)dt \in \mathfrak{Q}_-, n \geq 0.$$

По равенству (4)

$$(J_-h_-)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_{-n}(t) \mathcal{J}_-q_n^- = \mathcal{J}_- \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_{-n}(t)q_n^- = \mathcal{J}_-h_-(t).$$

Оператор \mathcal{J}_- , таким образом, действует на функцию $h_-(t)$ при каждом t . Отсюда вытекает формула

$$Jh = (\mathcal{J}_-h_-(t), h_0, \mathcal{J}_+h_+(t))^T.$$

В пространстве $\mathbb{H} = L_2(\mathbb{R}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus L_2(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Q}_+)$ определим оператор S_{sp} .

Вектор $\mathbf{h} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T$ принадлежит $\text{dom}(\mathbf{S}_{sp})$ тогда и только тогда, когда:

1. $h_{\pm}(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$
2. $\varphi = h_0 + Q_- h_-(0) \in \text{dom}(A)$;
3. $h_+(0) = T^* h_-(0) + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi$, где $T^* = I + 2iR_{-i}$.

Для любого вектора $\mathbf{h} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T \in \text{dom}(\mathbf{S}_{sp})$ положим

$$\mathbf{S}_{sp} \mathbf{h} = \mathbf{S}_{sp}(h_-(t), h_0, h_+(t))^T := (ih'_-(t), -ih_0 + (A + i)\varphi, ih'_+(t))^T.$$

В результате получаем J-самосопряженную дилатацию, построенную в [11].

3.2. Трансляционное представление дилатации. Пусть $\mathfrak{D}_{\pm} = l_2(\mathbb{Z}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$, где $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. В пространствах \mathfrak{D}_{\pm} рассмотрим симметрические максимальные операторы F_{\pm} с индексом дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$, которые определим следующим образом. Пусть $h_+ = (h_1, h_1, \dots) \in \mathfrak{D}_+$, $h_- = (\dots, h_{-2}, h_{-1}) \in \mathfrak{D}_-$.

Рассмотрим операторы $S_{\pm} : \text{dom}(S_{\pm}) \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$, $S_{\pm n} : \text{dom}(S_{\pm n}) \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$, действующие по формулам:

$$S_{\pm} h_{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} h_{\pm k}, \quad S_{\pm n} h_{\pm} = \sum_{k=n}^{+\infty} h_{\pm k} - \frac{1}{2} h_{\pm n},$$

причем

$$\text{dom}(S_{\pm}) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} h_{\pm k} \in \mathfrak{Q}_{\pm} \right\} = \text{dom}(S_{\pm n}).$$

С помощью операторов S_{\pm} и $S_{\pm n}$ определим операторы F_{\pm} :

$$\text{dom}(F_{\pm}) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \|S_{\pm n} h_{\pm}\|^2 < +\infty, S_{\pm} h_{\pm} = 0 \right\},$$

$$F_+ h_+ = -2i(S_1 h_+, S_2 h_+, \dots), \quad F_- h_- = 2i(\dots, S_{-2} h_-, S_{-1} h_-). \quad (18)$$

Операторы F_{\pm} замкнуты, симметричность этих операторов вытекает из легко проверяемых равенств [6]:

$$(F_{\pm} h_{\pm}, g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (h_{\pm}, F_{\pm} g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp 2i(S_{\pm} h_{\pm}, S_{\pm} g_{\pm})_{\mathfrak{Q}_{\pm}}.$$

Сопряженные операторы F_{\pm}^* действуют по формулам (18) на линеалах

$$\text{dom}(F_{\pm}^*) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \|S_{\pm n} h_{\pm}\|^2 < +\infty \right\}.$$

Дефектные подпространства операторов F_{\pm} имеют вид:

$$\mathfrak{N}_+ = \{(h_1, 0, 0, \dots) \mid h_1 \in \mathfrak{Q}_+, S_+ h_+ = h_1\}, \quad \mathfrak{N}_- = \{(\dots, 0, 0, h_{-1}) \mid h_{-1} \in \mathfrak{Q}_-, S_- h_- = h_{-1}\}.$$

Для любых векторов $h_{\pm}, g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ имеем:

$$(F_{\pm}^*h_{\pm}, g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (h_{\pm}, F_{\pm}^*g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp 2i(S_{\pm}h_{\pm}, S_{\pm}g_{\pm})_{\mathfrak{Q}_{\pm}} = \mp 2i(h_{\pm 1}, g_{\pm 1})_{\mathfrak{Q}_{\pm}}.$$

следовательно, для граничных операторов получаем следующие равенства: $\Gamma_+h_+ = (h_1, 0, 0, \dots)$, $\Gamma_-h_- = (\dots, 0, 0, h_{-1})$, $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$. Определим теперь операторы Φ_{\pm} :

$$\Phi_+(h_1, 0, 0, \dots) = h_1, \quad \Phi_-(\dots, 0, 0, h_{-1}) = h_{-1}, \quad h_{\pm} \in \mathfrak{Q}_{\pm}.$$

По формулам (1) находим операторы V_{\pm} :

$$V_-h_- = (\dots, h_{-2}, h_{-1}, 0), \quad V_+h_+ = (0, h_1, h_2, \dots), \quad h_{\pm k} \in \mathfrak{Q}_{\pm}$$

это односторонние сдвиги в \mathfrak{D}_{\pm} .

В пространстве $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ зададим оператор J :

$$J(h_-, h_0, h_+)^T = (J_-h_-, h_0, J_+h_+)^T,$$

где $J_-h_- = (\dots, \mathcal{J}_-h_{-2}, \mathcal{J}_-h_{-1})$, $J_+h_+ = (\mathcal{J}_+h_1, \mathcal{J}_+h_2, \dots)$.

Определим теперь оператор S_{tr} в пространстве \mathbb{H} . Вектор $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S_{tr})$ тогда и только тогда, когда:

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$
2. $\varphi' = h_0 + \sqrt{2}Q_-S_-h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $\sqrt{2}S_+h_+ = \sqrt{2}T^*S_-h_- + i\mathcal{J}_+Q_+(A+i)\varphi'$, где $T^* = I + 2iR_{-i}$.

Для любого $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S_{tr})$

$$S_{tr}(h_-, h_0, h_+)^T = (F_-^*h_-, -ih_0 + (A+i)\varphi', F_+^*h_+)^T$$

Условия 1.-3. принадлежности вектора $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S_{tr})$ области определения оператора S_{tr} запишем следующим образом:

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}h_0 + Q_-S_-h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $S_+h_+ = T^*S_-h_- + i\mathcal{J}_+Q_+(A+i)(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi')$.

Положим $\varphi = (\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi')$. Тогда получаем условия на $\text{dom}(S_{tr})$ и формулу для оператора S_{tr} :

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$
2. $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}h_0 + Q_-S_-h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $S_+h_+ = T^*S_-h_- + i\mathcal{J}_+Q_+(A+i)\varphi$,

$$S_{tr}(h_-, h_0, h_+)^T = (F_-^*h_-, -ih_0 + \sqrt{2}(A+i)\varphi, F_+^*h_+)^T.$$

Это и есть J -самосопряженная дилатация из [6].

4. МИНИМАЛЬНОСТЬ J-САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ.

Пусть, по-прежнему, A — плотно заданный линейный оператор, действующий в сепарабельном ГП \mathfrak{H} , причем $-i \in \rho(A)$.

Определение 3. [22] J-самосопряженная дилатация S линейного, плотно заданного оператора A с непустым множеством регулярных точек ($\lambda_0 \in \rho(A)$), действующего в ГП \mathfrak{H} , называется *минимальной*, если

$$\mathbb{H}_{min} := \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{\lambda_0}(S)\mathfrak{H}, R_{\overline{\lambda_0}}(S)\mathfrak{H}\} = \mathfrak{H},$$

где $\bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_n$ обозначает линейную замкнутую оболочку линеалов или подпространств \mathfrak{G}_n , $R_{\lambda_0}(S) = (S - \lambda_0)^{-1}$.

Отметим, что в [22] доказаны минимальности J-самосопряженных дилатаций из разделов 3.1 и 3.2 при условии, что исходное пространство \mathfrak{H} сепарабельно.

Из формулы (17) при $\lambda = -i$

$$\begin{aligned} R_{-i}(S) (g_-, g_0, g_+)^T &= \left(R_{-i}(F_-^*)g_-, R_{-i}g_0 - \sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_- R_{-i}(F_-^*)g_-, \right. \\ &\left. R_{-i}(F_+)g_+ + \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}Q_+g_0 + T^* \Phi_- \Gamma_- R_{-i}(F_-^*)g_- \right) \right)^T. \end{aligned} \quad (19)$$

Частный случай формулы (19):

$$R_{-i}(S) (0, g_0, 0)^T = \left(0, R_{-i}g_0, \frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ Q_+ g_0 \right)^T. \quad (20)$$

Из (19) и (20) получаем для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{-i}^n(S) (0, g_0, 0)^T = \left(0, R_{-i}^n g_0, \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sum_{r=0}^{n-1} R_{-i}^{n-1-r}(F_+) \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ Q_+ R_{-i}^r g_0 \right) \right)^T. \quad (21)$$

Аналогично, с помощью следствия 3, получаем следующее равенство ($n \in \mathbb{N}$):

$$R_i^n(S) (0, g_0, 0)^T = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \left(\sum_{r=0}^{n-1} R_i^{n-1-r}(F_-) \Phi_-^{-1} Q_- R_i^{*r} g_0 \right), R_{-i}^{*n} g_0, 0 \right)^T. \quad (22)$$

Рассмотрим подпространства $\mathfrak{B}_{\pm} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{\mp i}^n(S)\mathfrak{H}\}$. Очевидно, что $\mathbb{H}_{min} = \mathfrak{B}_- \vee \mathfrak{B}_+$ и, в силу (21) и (22), $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_- \cap \mathfrak{B}_+$.

Тогда подпространство \mathbb{H}_{min} можно представить в виде ортогональной суммы:

$$\mathbb{H}_{min} = \mathfrak{D}_-^{min} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+^{min}, \quad \text{где } \mathfrak{D}_{\pm}^{min} = \mathfrak{B}_{\pm} \ominus \mathfrak{H}. \quad (23)$$

Из равенств (21) и (22) вытекает, что *J*-самосопряженная дилатация *S* оператора *A* является минимальной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}_{\pm}^{min} = \mathfrak{D}_{\pm}$.

Рассмотрим подробно случай подпространства \mathfrak{D}_{+}^{min} . Из равенства (21) вытекает следующее очевидное включение

$$\mathfrak{D}_{+}^{min} \subseteq \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{-i}^n(F_{+})\mathfrak{N}_{+}\} = \mathfrak{D}'_{+} .$$

Обратно, пусть $(0, 0, f_{+})^T \in \mathfrak{D}'_{+}$. Поскольку линейал $\Phi_{+}^{-1} \mathcal{J}_{+} Q_{+}(A + i) \text{dom}(A)$ всюду плотен в \mathfrak{N}_{+} , то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такой полином $p \in \mathbb{C}[z]$ степени $N = N(\varepsilon)$ и вектор $g_0 \in \text{dom}(A)$, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|(0, 0, f_{+})^T - (0, 0, p(R_{-i}(F_{+})) \Phi_{+}^{-1} \mathcal{J}_{+} Q_{+}(A + i) g_0)^T\| = \\ &= \left\| (0, 0, f_{+})^T - \left(0, 0, \sum_{m=0}^N \alpha_m R_{-i}^m(F_{+}) \Phi_{+}^{-1} \mathcal{J}_{+} Q_{+}(A + i) g_0 \right)^T \right\| = \\ &= \left\| (0, 0, f_{+})^T - (-i\sqrt{2}) \sum_{m=0}^N \alpha_m [R_{-i}^{m+1}(S)(0, (A + i)g_0, 0)^T - R_{-i}^m(S)(0, g_0, 0)^T] \right\| . \end{aligned}$$

Следовательно, доказано обратное включение $\mathfrak{D}'_{+} \subseteq \mathfrak{D}_{+}^{min}$. Случай подпространства \mathfrak{D}_{-}^{min} рассматривается аналогично.

Мы обосновали справедливость следующих равенств:

$$\mathfrak{D}_{\pm}^{min} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{\mp i}^n(F_{\pm})\mathfrak{N}_{\pm}\} ,$$

и была доказана

Лемма 8. *J*-самосопряженная дилатация *S* общего вида оператора *A* с непустым множеством регулярных точек ($-i \in \rho(A)$) минимальна тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\mathfrak{D}_{\pm} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \{R_{\mp i}^n(F_{\pm})\mathfrak{N}_{\pm}\} . \tag{24}$$

По построению дилатации *S* операторы F_{\pm} — простые.

Обратно, если *S* — минимальная *J*-самосопряженная дилатация общего вида оператора *A*, то на основании леммы 8 справедливы равенства (24). Предположим, что, хотя бы один из операторов F_{\pm} , к примеру оператор F_{+} , не является простым. Это означает, что существует подпространство \mathfrak{D}_{+}^0 , приводящее F_{+} ($Q_{+}^0 F_{+} \subseteq F_{+} Q_{+}^0$, $Q_{+}^0 : \mathfrak{D}_{+} \rightarrow \mathfrak{D}_{+}^0$ — ортопроектор) к самосопряженному оператору $F_{+}^0 = F_{+}|_{\mathfrak{D}_{+}^0}$. Тогда \mathfrak{D}_{+}^0 приводит также преобразование Кэли V_{+} оператора F_{+} к унитарному оператору

и по теореме Вольда (см., напр., [4])

$$\mathfrak{D}_+^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_+^n \mathfrak{D}_+ \perp \sum_{n=0}^{\infty} \oplus V_+^n \mathfrak{N}_+.$$

Пусть $h_+^0 \in \mathfrak{D}_+^0$ — ненулевой вектор. Тогда, для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $h_+^0 \perp V_+^n \mathfrak{N}_+ = (I - 2iR_{-i}(F_+))^n \mathfrak{N}_+$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= (h_+^0, n_+ - 2iR_{-i}(F_+)n_+) = (h_+^0, n_+) - 2i(h_+^0, R_{-i}(F_+)n_+) = \\ &= -2i(h_+^0, R_{-i}(F_+)n_+) \quad \forall n_+ \in \mathfrak{N}_+, \text{ откуда } h_+^0 \perp R_{-i}(F_+)\mathfrak{N}_+. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 0 &= (h_+^0, (I - 2iR_{-i}(F_+))^2 n_+) = (h_+^0, n_+) - 4i(h_+^0, R_{-i}(F_+)n_+) - 4(h_+^0, R_{-i}^2(F_+)n_+) = \\ &= -4(h_+^0, R_{-i}^2(F_+)n_+), \text{ то есть } h_+^0 \perp R_{-i}^2(F_+)\mathfrak{N}_+ \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Таким образом, $h_+^0 \perp R_{-i}^n(F_+)\mathfrak{N}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и, в силу, (24) h_+^0 — нулевой вектор — противоречие. Таким образом, $\mathfrak{D}_+^0 = \{0\}$. Отсюда V_+ — односторонний сдвиг и, следовательно, F_+ — простой симметрический оператор. Случай оператора F_- аналогичен. Таким образом, доказана

Теорема 2. *J-самосопряженная дилатация общего вида оператора A с непустым множеством регулярных точек ($-i \in \rho(A)$) является минимальной тогда и только тогда, когда операторы F_{\pm} простые.*

Следствие 4. *Дилатации S_{sp} и S_{tr} оператора A минимальны.*

5. ИЗОМОРФИЗМ J-САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИЛАТАЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Определение 4. (см., напр., [22]) Пусть A — плотно заданный линейный оператор с непустым множеством регулярных точек, действующий в ГП \mathfrak{H} , L_1 и L_2 — J_1 -самосопряженная и J_2 -самосопряженная дилатации этого оператора в ГП \mathbb{H}_1 и \mathbb{H}_2 соответственно. Операторы L_1 и L_2 называются *изоморфными*, если существует унитарный оператор $\mathcal{U} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$, $\mathbb{H}_r = \mathfrak{D}_-^{(r)} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+^{(r)}$, $r = 1, 2$, такой, что

1. $\mathcal{U}(0, h_0, 0)^T = (0, h_0, 0)^T \quad \forall h_0 \in \mathfrak{H}$;
2. $\mathcal{U}L_1 \subseteq L_2\mathcal{U}$;
3. $\forall h_1 \in \mathbb{H}_1 : \mathcal{U}J_1h_1 = J_2\mathcal{U}h_1$.

С помощью определения 4 исследуем вопрос об *изоморфизме двух произвольных минимальных J-самосопряженных дилатаций оператора A в сепарабельном ГП*.

Начнем с более детального изучения областей определения операторов F_{\pm}^* .

Для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ векторы $V_{\pm}^k n_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$, $\forall n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$. Следовательно, любая линейная комбинация таких векторов также лежит в $\text{dom}(F_{\pm}^*)$. Так как любой вектор $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ представим в виде $\sum_{k=0}^N V_{\pm}^k n_{\pm}^k$, $N \leq \infty$, то необходимо найти критерии включений $\sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_{\pm}^k \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$. Рассмотрим подробно случай оператора F_+^* .

Пусть $h_m^+ = \sum_{k=0}^m V_+^k n_k^+ \xrightarrow{s} \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 4

$$\begin{aligned} F_+^* \sum_{k=0}^m V_+^k n_k^+ &= \sum_{k=0}^m F_+^* V_+^k n_k^+ = -in_0^+ + \sum_{k=1}^m F_+^* V_+^k n_k^+ = \\ &= -in_0^+ + \sum_{k=1}^m \left(-iV_+^k n_k^+ - 2i \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_+^r \right) n_k^+ \right) = -i(n_0^+ + 2n_1^+ + \dots + 2n_m^+) - \\ &\quad -iV_+(n_1^+ + 2n_2^+ + \dots + 2n_m^+) - iV_+^2(n_2^+ + 2n_3^+ + \dots + 2n_m^+) - \dots - \\ -iV_+^{m-1}(n_{m-1}^+ + 2n_m^+) - iV_+^m n_m^+ &= -2i \left(\sum_{k=0}^m n_k^+ - \frac{1}{2}n_0^+ \right) - 2iV_+ \left(\sum_{k=1}^m n_k^+ - \frac{1}{2}n_1^+ \right) - \dots - \\ -2iV_+^j \left(\sum_{k=j}^m n_k^+ - \frac{1}{2}n_j^+ \right) - \dots - &2iV_+^{m-1} \left(\sum_{k=m-1}^m n_k^+ - \frac{1}{2}n_{m-1}^+ \right) - iV_+^m n_m^+ \quad (25) \end{aligned}$$

Равенство (25) дает основание утверждать, что при $m \rightarrow \infty$ последовательность $F_+^* h_m^+ = F_+^* \sum_{k=0}^m V_+^k n_k^+$ сильно сходится тогда и только тогда, когда

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k^+ \in \mathfrak{N}_+ \right) \wedge \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{r=k}^{\infty} n_r^+ - \frac{1}{2}n_k^+ \right\|^2 < \infty \right) \quad (26)$$

Рассмотрим плотно заданные операторы $S_k^+ : \text{dom}(S_k^+) \rightarrow \mathfrak{N}_+$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где

$$\text{dom}(S_k^+) = \left\{ h_+ \in \mathfrak{D}_+ \mid \sum_{r=0}^{\infty} n_r^+ \in \mathfrak{N}_+ \right\}, \quad S_k^+ h_+ = \sum_{r=k}^{\infty} n_r^+ - \frac{1}{2}n_k^+ \quad \forall h_+ \in \text{dom}(S_k^+).$$

Если $h_m^+ = \sum_{k=0}^m V_+^k n_k^+ \xrightarrow{s} h_+ = \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+$ и $F_+^* h_m^+ \xrightarrow{s} g_+$ при $m \rightarrow \infty$, то в силу замкнутости оператора F_+^* вектор $h_+ = \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ \in \text{dom}(F_+^*)$ и $F_+^* h_+ = -2i \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k S_k^+ h_+$.

Условия (26) и проведенные рассуждения убеждают нас в справедливости следующей эквиваленции

$$\left(h_+ = \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ \in \text{dom}(F_+^*) \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k^+ \in \mathfrak{N}_+ \right) \wedge \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|S_k^+ h_+\|^2 < \infty \right). \quad (27)$$

Если эквиваленция (27) верна, то

$$F_+^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ \right) = -2i \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k S_k^+ \left(\sum_{r=0}^{\infty} V_+^r n_r^+ \right).$$

Случай оператора F_-^* рассматривается аналогично. Таким образом доказана

Лемма 9. Включения $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ имеют место в том и только в том случае, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm} \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \|S_k^{\pm} h_{\pm}\|^2 < \infty,$$

где операторы S_k^{\pm} , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определяются равенствами:

$$\text{dom}(S_k^{\pm}) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{r=0}^{\infty} n_r^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm} \right\}, \quad S_k^{\pm} h_{\pm} = \sum_{r=k}^{\infty} n_r^{\pm} - \frac{1}{2} n_k^{\pm} \quad \forall h_{\pm} \in \text{dom}(S_k^{\pm}).$$

При этом

$$F_{\pm}^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) = \mp 2i \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k S_k^{\pm} \left(\sum_{r=0}^{\infty} V_{\pm}^r n_r^{\pm} \right).$$

Следствие 5. Векторы $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm}$ из $\text{dom}(F_{\pm}^*)$ принадлежат $\text{dom}(F_{\pm})$ тогда и только тогда, когда $\sum_{r=0}^{\infty} n_r^{\pm} = 0$ (ср. с аналогичным свойством из п. 3.2).

Доказательство. В линейалах $\text{dom}(F_{\pm}^*)$ рассмотрим новые скалярные произведения

$$(h_{\pm}, g_{\pm})_{\pm} := (h_{\pm}, g_{\pm}) + (F_{\pm}^* h_{\pm}, F_{\pm}^* g_{\pm}),$$

причем нормы $\|h_{\pm}\|_{\pm} = \sqrt{(h_{\pm}, h_{\pm})_{\pm}}$ превращают $\text{dom}(F_{\pm}^*)$ в ГП и справедливы ортогональные разложения:

$$\text{dom}(F_{\pm}^*) = \text{dom}(F_{\pm}) \oplus_{\pm} \mathfrak{N}_{\pm}$$

(см., напр., [13]). Таким образом, векторы $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ принадлежат $\text{dom}(F_{\pm})$ только лишь в случае, когда они \pm — ортогональны подпространствам \mathfrak{N}_{\pm} .

Рассмотрим подробно случай линейала $\text{dom}(F_-)$. Для любого вектора $n_- \in \mathfrak{N}_-$ и вектора $h_- = \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-$ из $\text{dom}(F_-)$ с помощью леммы 9 получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-, n_- \right)_- = (n_0^-, n_-) + \left(F_-^* \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-, i n_- \right) = \\ &= (n_0^-, n_-) + 2i \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_-^k S_k^- \left(\sum_{r=0}^{\infty} V_-^r n_r^- \right), i n_- \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(n_0^- + 2S_0^- \left(\sum_{r=0}^{\infty} V_-^r n_r^- \right), n_- \right) = 2 \left(\sum_{r=0}^{\infty} n_r^-, n_- \right).$$

Случай линейала $\text{dom}(F_+)$ рассматривается аналогично. □

Пусть $\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}$ - ГП. Обозначим через F_{\pm} и G_{\pm} максимальные простые симметрические операторы, действующие в пространствах $\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}$ соответственно, причем, $(0, \mathfrak{q}_+)$ - индекс дефекта операторов F_+ и G_+ , $(\mathfrak{q}_-, 0)$ - индекс дефекта операторов F_- и G_- , $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{D}_{\pm}$, $\mathfrak{N}_{\pm}^{(r)}$ - дефектные подпространства. Пусть $\langle \mathfrak{N}_{\pm}^{(r)}, \Gamma_{\pm}^{(r)} \rangle$, $r = 1; 2$ - граничные двойки операторов F_{\pm}^* и G_{\pm}^* , V_{\pm}, W_{\pm} - преобразования Кэли операторов F_{\pm} и G_{\pm} .

В ГП $\mathbb{H}_r = \mathfrak{D}_-^{(r)} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+^{(r)}$ определим операторы $J_r = J_-^{(r)} \oplus I \oplus J_+^{(r)}$, где $J_{\pm}^{(r)}$, $r = 1; 2$ задаются равенствами:

$$\forall h_{\pm}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}, n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)}, J_{\pm}^{(1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm},$$

$$\forall h_{\pm}^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\pm}^k m_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}, m_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)}, J_{\pm}^{(2)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_{\pm}^k m_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} W_{\pm}^k \Psi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Psi_{\pm} m_k^{\pm},$$

где $\Psi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)} \rightarrow \mathfrak{D}_{\pm}$ - изометрии.

В пространствах \mathbb{H}_r определим операторы $S_r, r = 1; 2$. Векторы $\mathbf{h}_r = \left(h_-^{(r)}, h_0, h_+^{(r)} \right)^T$, где $h_{\pm}^{(r)} \in \mathfrak{D}_{\pm}^{(r)}, h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежат областям определения операторов S_r , соответственно, тогда и только тогда, когда

- 1) $h_{\pm}^{(1)} \in \text{dom}(F_{\pm}^*); h_{\pm}^{(2)} \in \text{dom}(G_{\pm}^*);$
- 2) $\varphi_1 = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} \in \text{dom}(A); \varphi_2 = h_0 + \sqrt{2}Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} \in \text{dom}(A);$
- 3) $\sqrt{2}\Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)} = \sqrt{2}T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi_1;$
 $\sqrt{2}\Psi_+ \Gamma_+^{(2)} h_+^{(2)} = \sqrt{2}T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi_2,$ где $T^* = I + 2iR_{-i}^*$.

Для любых векторов $\mathbf{h}_r = \left(h_-^{(r)}, h_0, h_+^{(r)} \right)^T \in \text{dom}(S_r)$ положим

$$S_1 \mathbf{h}_1 = S_1 \left(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)} \right)^T := \left(F_-^* h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i) \varphi_1, F_+^* h_+^{(1)} \right)^T;$$

$$S_2 \mathbf{h}_2 = S_2 \left(h_-^{(2)}, h_0, h_+^{(2)} \right)^T := \left(G_-^* h_-^{(2)}, -ih_0 + (A + i) \varphi_2, G_+^* h_+^{(2)} \right)^T.$$

По теоремам 1 и 2 операторы $S_r, r = 1, 2$ являются J_r -самосопряженными минимальными дилатациями оператора A .

Теорема 3. *Операторы S_1 и S_2 изоморфны.*

Доказательство. Определим оператор $\mathcal{U} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T &= \mathcal{U}\left(\sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+\right)^T := \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+\right)^T, \text{ где } \Delta_{\pm} = \Psi_{\pm}^{-1} \Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, операторы Δ_{\pm} — изометрии, а \mathcal{U} — унитарный оператор. Из (28) вытекает, что $\mathcal{U}(0, h_0, 0)^T = (0, h_0, 0)^T$ для любого $h_0 \in \mathfrak{H}$.

Кроме того

$$\begin{aligned} \mathcal{U} J_1(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- \Phi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+\right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+\right)^T. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} J_2 \mathcal{U}(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T &= J_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+\right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Psi_- \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Psi_+ \Delta_+ n_k^+\right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+\right)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall \mathbf{h}_1 \in \mathbb{H}_1 : \mathcal{U} J_1 \mathbf{h}_1 = J_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1$.

Проверим теперь, что $\mathcal{U} S_1 \mathbf{h}_1 = S_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1 \forall \mathbf{h}_1 \in \text{dom}(S_1)$. Вначале необходимо установить, что $\mathcal{U} \mathbf{h}_1 = (\mathcal{U} h_-^{(1)}, h_0, \mathcal{U} h_+^{(1)})^T \in \text{dom}(S_2) \forall \mathbf{h}_1 \in \text{dom}(S_1)$. Так как $\mathbf{h}_1 \in \text{dom}(S_1)$, то должны выполняться условия:

- 1_u) $\mathcal{U}_{\pm} h_{\pm}^{(1)} \in \text{dom}(G_{\pm}^*)$;
- 2_u) $\psi = h_0 + \sqrt{2} Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \mathcal{U} h_-^{(1)} \in \text{dom}(A)$;
- 3_u) $\sqrt{2} \Psi_+ \Gamma_+^{(2)} \mathcal{U} h_+^{(1)} = \sqrt{2} T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \mathcal{U} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \psi$.

Поскольку

$$\mathcal{U} \mathbf{h}_1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+\right)^T,$$

то по лемме 9

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} W_{\pm}^k \Delta_{\pm} n_k^{\pm} \in \text{dom}(G_{\pm}^*) \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{\pm} n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)} \right) \wedge \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|S_{2,k}^{\pm} \mathcal{U}_{\pm} h_{\pm}^{(1)}\|^2 < \infty \right),$$

где $S_{m,k}^{\pm}$, $m = 1; 2$ — операторы из этой леммы.

Проверим справедливость указанных в эквиваленции условий. Первое условие эквиваленции, очевидно, выполняется. Для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\|S_{2,k}^{\pm} \mathcal{U}_{\pm} h_{\pm}^{(1)}\|^2 = \left\| S_{2,k}^{\pm} \left(\sum_{r=0}^{\infty} W_{\pm}^r \Delta_{\pm} n_r^{\pm} \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{r=k}^{\infty} \Delta_{\pm} n_r^{\pm} - \frac{1}{2} \Delta_{\pm} n_k^{\pm} \right\|^2 = \|S_{1,k}^{\pm} h_{\pm}^{(1)}\|^2.$$

Проверка условия $1_{\mathcal{U}}$ завершена. Проверим условие $2_{\mathcal{U}}$. Пусть $h_{\pm}^{(1)} = h_{\pm}^{0(1)} + \Gamma_{\pm}^{(1)} h_{\pm}^{(1)}$, где $h_{\pm}^{0(1)} \in \text{dom}(F_{\pm})$. Если $h_{\pm}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm}$, $h_{\pm}^{0(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \tilde{n}_k^{\pm}$, то по лемме 2 $\Gamma_{\pm}^{(1)} h_{\pm}^{(1)} = n_0^{\pm} - \tilde{n}_0^{\pm}$. Аналогичные формулы имеют место для $\Gamma_{\pm}^{(2)} h_{\pm}^{(2)}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \psi &= h_0 + \sqrt{2} Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \mathcal{U}_- h_-^{(1)} = h_0 + \sqrt{2} Q_- \Psi_- \Delta_- (n_0^- - \tilde{n}_0^-) = \\ &= h_0 + \sqrt{2} Q_- \Phi_- (n_0^- - \tilde{n}_0^-) = h_0 + \sqrt{2} Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} = \varphi_1 \in \text{dom}(A), \end{aligned} \quad (29)$$

таким образом, условие $2_{\mathcal{U}}$ также выполнено.

Условие $3_{\mathcal{U}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\Psi_+ \Gamma_+^{(2)} \mathcal{U}_+ h_+^{(1)} - T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \mathcal{U}_- h_-^{(1)}) &= \sqrt{2}(\Psi_+ \Delta_+ (n_0^+ - \tilde{n}_0^+) - T^* \Psi_- \Delta_- (n_0^- - \tilde{n}_0^-)) = \\ &= \sqrt{2}(\Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)} - T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)}) = i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi_1 = i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \psi. \end{aligned}$$

Приходим к выводу, что $\mathcal{U} h_1 \in \text{dom}(S_2) \forall h_1 \in \text{dom}(S_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_2 \mathcal{U} h_1 &= S_2(\mathcal{U}_- h_-^{(1)}, h_0, \mathcal{U}_+ h_+^{(1)})^T = \\ &= \left(2i \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k S_{2,k}^- \mathcal{U}_- h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i)\psi, -2i \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k S_{2,k}^+ \mathcal{U}_+ h_+^{(1)} \right)^T \end{aligned} \quad (30)$$

С другой стороны, в силу (29)

$$\begin{aligned} \mathcal{U} S_1 h_1 &= \mathcal{U} \left(2i \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k S_{1,k}^- h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i)\varphi_1, -2i \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k S_{1,k}^+ h_+^{(1)} \right)^T = \\ &= \left(2i \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- S_{1,k}^- h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i)\psi, -2i \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ S_{1,k}^+ h_+^{(1)} \right)^T \end{aligned} \quad (31)$$

При этом для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\Delta_{\pm} S_{1,k}^{\pm} h_{\pm}^{(1)} = \sum_{r=k}^{\infty} \Delta_{\pm} n_r^{\pm} - \frac{1}{2} \Delta_{\pm} n_k^{\pm} = S_{2,k}^{\pm} \mathcal{U}_{\pm} h_{\pm}^{(1)},$$

поэтому, в силу (31)

$$\mathcal{U} S_1 \mathbf{h}_1 = \left(2i \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k S_{2,k}^- \mathcal{U}_- h_-^{(1)}, -ih_0 + (A+i)\psi, -2i \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k S_{2,k}^+ \mathcal{U}_+ h_+^{(1)} \right)^T = S_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1$$

из-за формулы (30).

По определению 4 дилатации S_1 и S_2 изоморфны. Теорема доказана. \square

Следствие 6. Дилатации S_{sp} и S_{tr} из п.3 изоморфны.

Следствие 7. Оператор \mathcal{U} является (J_1, J_2) -унитарным (см., напр., [16]).

Доказательство. В самом деле, для любого $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{H}_1$

$$[\mathcal{U} \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1]_{\mathbb{H}_2} = (J_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1)_{\mathbb{H}_2} = (\mathcal{U} J_1 \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1)_{\mathbb{H}_2} = (J_1 \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1)_{\mathbb{H}_1} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1]_{\mathbb{H}_1}.$$

\square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена J -самосопряженная дилатация общего вида произвольного линейного, плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Для построения дилатации использовались операторы F_{\pm}^* , сопряженные к максимальным простым симметрическим операторам и граничные двойки операторов F_{\pm}^* . Частными случаями построенной дилатации являются известные ранее J -самосопряженные дилатации.

Доказаны критерии минимальности построенной дилатации, один из которых формулируется в терминах простоты операторов F_{\pm}^* .

Кроме того, с помощью полученных критериев минимальности и описания областей определения операторов F_{\pm}^* доказана теорема об изоморфизме двух произвольных минимальных J -самосопряженных дилатаций исходного оператора.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена НО «Крымский математический центр» и поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк, М. А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. — 1940. — 4(3). — С. 277–318.
NAYMARK, M. A. (1940) Spectral functions of symmetric operator. *Izvestiya AN SSSR*. 4 (3). Pp. 277–318.
2. SG.-NAGY, B. (1953) Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math.* 15. Pp. 87–92.
3. Никольский, Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
NIKOLSKY, N. K. (1980) *Lectures on shift operator*. Moscow: Nauka.
4. Никольский, Н. К. Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций / Н. К. Никольский, С. В. Хрущев // Труды Математ. института АН СССР. — 1974. — 176. — С. 97–210.
NIKOLSKY, N. K., & KHRUSCHOV, S. V. (1987) Functional model and some problems of spectral function theory. *Works of Mathematical institute. Academy of Science USSR*. 176. Pp. 97–210.
5. Сахнович, Л. А. О *J*-унитарной дилатации ограниченного оператора // Функц. анализ и его приложения. — 1974. — 8(3). — С. 83–84.
SAKHNOVICH, L. A. (1974) On *J*-unitary dilation of bounded operator. *Func. analyz i ego prilozheniya*. 8 (3). Pp. 83–84.
6. Кужель, А. В. *J*-самосопряженные и *J*-унитарные дилатации линейных операторов // Функц. анализ и его приложения. — 1983. — 17(1). — С. 75–76.
KUZHEL, A. V. (1983) *J*-self-adjoint and *J*-unitary dilations of linear operators. *Func. analyz i ego prilozheniya*. 17 (1). Pp. 75–76.
7. DAVIS, CH. (1970) *J*-unitary dilation of a general operators. *Acta Sci. Math.* 31 (1-2). Pp. 75–86.
8. Павлов, Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб. — 1977. — 102(144). — С. 511–536.
PAVLOV, B. S. (1977) Self-adjoint dilations of dissipative Shredinger operator and its eigenfunctions decomposition. *Mat. sb.* 102(144) (4). Pp. 511–536.

9. Кузель, А. В. Самосопряженные и J -самосопряженные дилатации линейных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — 37. — С. 54–62.
KUZHEL, A. V. (1982) Self-adjoint and J -self-adjoint dilations of linear operators. *Teoriya funktsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. 37. Pp. 54–62.
10. Кудряшов, Ю. Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — 37. — С. 51–54.
KUDRYASHOV, Yu. L. (1982) Symmetric and self-adjoint dilations of dissipative operators. *Teoriya funktsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. 37. Pp. 51–54.
11. Кудряшов, Ю. Л. J -эрмитовы и J -самосопряженные дилатации линейных операторов // Динам. системы. — 1984. — 3. — С. 94–98.
KUDRYASHOV, Yu. L. (1984) J -Hermite and J -self-adjoint dilations of linear operators. *Dynam. sistemy*. 3. Pp. 94–98.
12. Кудряшов, Ю. Л. Изоморфизм спектрального и трансляционного представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора // ТВИМ. — 2018. — 1. — С. 40–47.
KUDRYASHOV, Yu. L. (2018) Isomorphism of spectral and translation representations for self-adjoint dilations of dissipative operator. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1. Pp. 40–47.
13. REED, M. & SIMON, B. (1975) *Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness*. New York, San Francisco, London: Academic Press, Inc. 395
14. Третьяков, Д. В. Об общем подходе к построению J -самосопряженной дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек // ТВИМ. — 2019. — 4. — С. 92–106.
ТРЕТЯКОВ, Д. В. (2019) On common approach to construction of J -self-adjoint dilation for linear operator with nonempty regular points set. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4. Pp. 92–106.
15. Третьяков, Д. В. Изоморфизм J -самосопряженных дилатаций общего вида линейного оператора с непустым множеством регулярных точек // ТВИМ. — 2020. — 2. — С. 76–87.

- TRETYAKOV, D. V. (2020) On isomorphism of common type *J*-self-adjoint dilations for linear operator with nonempty regular points set. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2. Pp. 76–87.
16. BOGNAR, J. (1974) *Indefinite inner product spaces*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.
17. Ахиезер, Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1 / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — Харьков.: Выща школа, 1977. — 315 с.
AKHIEZER, N. I., & GLAZMAN, I. M. (1980) *Theory of linear operators in Hilbert space*. V. 1. Kharkov: Vyscha shkola.
18. Горбачук, В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук. — К.: Наукова думка, 1984. — 284 с.
GORBACHUK, V. I. (1984) *Boundary value problems for differential-operator equations*. Kiev: Naukova dumka.
19. DERKACH, V. A., & MALAMUD, M. M. (1999) Non-self-adjoint extensions of a Hermitian operator and their characteristic functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 97 (5). Pp. 4461–4499.
20. BRUK, V. M. (2014) On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the indefinite-dimensional case. *Journal of Math. Physics and Analysis, Geometry*. 10 (2). Pp. 163–188.
21. KUZHEL, A. V. (1996) *Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators*. Kluwer Academic Publishers.
22. Кудряшов, Ю. Л. О минимальности *J*-симметрической и *J*-самосопряженной дилатаций линейного оператора с непустым множеством регулярных точек / Ю. Л. Кудряшов, Д. В. Третьяков // Динамические системы. — 2015. — 5(33). — С. 69–75.
KUDRYASHOV, Yu. L., & TRETYAKOV, D. V. (2015) On minimality of *J*-symmetric and *J*-self-adjoint dilations of linear operator with nonempty regular points set. *Dinamicheskie sistemy*. 5(33) (1-2). Pp. 69–75.
23. Третьяков, Д. В. Об общем подходе к построению самосопряженной дилатации диссипативного оператора / Д. В. Третьяков, Ю. Л. Кудряшов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — 503. — С. 121–136.

- TRETYAKOV, D. V., & KUDRYASHOV, Yu. L. (2021) On a general approach to construction of a self-adjoint dilation for a dissipative operator. *Zap. nauchn. sem. POMI.* 503. Pp. 121–136.
24. Кочубей, А. М. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А. М. Кочубей // Мат. заметки. — 1975. — 17. — С. 41–48.
KOCHUBEY, A. M. (1975) On an extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. *Mat. zametky.* 17. Pp. 41–48.
25. BROWN, M., MARLETTA, M., NABOKO, S. & WOOD, I. (2008) Boundary triplets and M-functions for self-adjoint operators with applications elliptic PDEs and block operator matrices. *Journal of the London Mathematical Society.* 77 (3). Pp. 700–718.
26. RYZHOV, V. (2007) Functional model of a class non-selfadjoint extension of symmetric operators. *Oper. Theory Adv. Appl.* Birkhuser, Basel (174). Pp. 117–158.
27. MOGILEVSKII, V. (2006) Boundary triplets and Krein type resolvent formula for symmetric operators with unequal defect numbers. *Methods of Functional Analysis and Topology.* 12 (3). Pp. 258–280.

Аблаев С. С., Баран И. В. О методах зеркального спуска для некоторых типов задач композитной оптимизации с функциональными ограничениями / С. С. Аблаев, И. В. Баран // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 7–18.

УДК: 519.85

Работа посвящена некоторым методам зеркального спуска для задач выпуклой композитной оптимизации, а также теоретическим оценкам скорости сходимости для них. На классе липшицевых функционалов предлагается метод с адаптивно подбираемыми шагами и критерием остановки. Для более общего класса относительно липшицевых задач предложен метод с постоянными шагами, но с адаптивным критерием остановки. Для более общего класса относительно липшицевых задач предложен метод с постоянными шагами, но с адаптивным критерием остановки. Рассмотрено также обобщение результата на случай предположения о доступности δ -субградиентов функционалов вместо обычных субградиентов, и получена оценка соответствующего алгоритма зеркального спуска.

Ключевые слова: липшицевый функционал, субградиент, задачи композитной оптимизации, метод зеркального спуска.

Анашкин О. В., Юсупова О. В. О вычислении первой ляпуновской величины периодической импульсной системы / О. В. Анашкин, О. В. Юсупова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 19–39.

УДК: 517.925.51

Рассматривается один критический случай устойчивости для периодической импульсной системы второго порядка общего вида с автономным дифференциальным уравнением и автономным оператором импульсного воздействия. Предполагается, что матрица монодромии линейного приближения имеет пару комплексно сопряженных мультипликаторов на единичной окружности комплексной плоскости. Подробно описан алгоритм вычисления первой ляпуновской величины. Достоверность формул алгоритма подтверждают результаты тестовых аналитических расчетов для двух иллюстративных примеров.

Ключевые слова: периодические импульсные системы, сведение к дискретному времени, критический случай устойчивости, первая ляпуновская величина, матрица монодромии, комплексно сопряженные множители.

Беспалов М. С. Краткий вывод алгоритма Кули–Тьюки / М. С. Беспалов // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 40–48.

УДК: 517.58

В статье предложена окончательная форма матричной записи алгоритма быстрого преобразования Фурье (Fast Fourier Transform, FFT) для произвольного составного порядка. Предлагается, чтобы алгоритм начинался с обратной перестановки, а не включал совершенную перестановку на каждом шаге алгоритма. Обратная матрица перестановок представлена как b -произведение единичных матриц (b -произведение является новым типом тензорного произведения матриц, введенным автором ранее).

Ключевые слова: быстрое преобразование Фурье, тензорное произведение матриц.

Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А. Структура решений нелинейных уравнений кольцевого резонатора / В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 49–66.

УДК: 517:957

В работе рассмотрена математическая модель процесса формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе. Одновременный учет дифракции и нелинейности приводит к возникновению многообразия пространственных структур. Проведен бифуркационный анализ и исследованы зоны устойчивости стационарных решений, соответствующей линеаризованной задачи. Для случая тонкого кольца задача сведена к решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: нелинейный кольцевой резонатор, пространственное преобразование, фазовая модуляция.

Моисеев Д. В., Шокин А. Г. Математическая модель оптимизации информационной логистики в стохастической постановке / Д. В. Моисеев, А. Г. Шокин // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 67–82.

УДК: 004.9

В статье приводится решение задач оптимизации информационной логистики в системах, построенных по принципу «роя», с применением сетецентрического управления в стохастической постановке. Решение сложной задачи управления и диспетчеризации информационной инфраструктуры вызывает проблему учета множества динамических, разнородных характеристик. В большинстве своем, характеристики носят стохастический характер, что в свою очередь дополнительно повышает уровень сложности решаемой задачи, подчеркивая ее актуальность. На основе концептуального описания мультиагентной модели разработан комплекс стохастических моделей обеспечения гарантированного уровня информационного обмена по каналам связи.

Ключевые слова: сетевая модель, логистические информационно-интеллектуальные системы, модель минимизации стоимостных показателей информационного трафика, модель минимизации временных потерь, связанных с обеспечением информационного обмена, модель максимизации надежностных функций обеспечения сетевого трафика, модель максимизации показателей помехоустойчивости передаваемых сообщений.

Сергеев А. Э., Бушуева В. О. NICE-многочлены / А. Э. Сергеев, В. О. Бушуева // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 83–91.

УДК: 519.115.1

Разложение многочленов на множители и нахождение их корней — одна из основных задач алгебры. Для произвольного многочлена произвольной степени довольно сложно найти все корни. В настоящей работе рассматриваются nice-многочлены, т. е. такие многочлены, у которых не только все корни — целые числа, но и корни производной — тоже целые числа. Получение и построение nice-многочленов является NP-полной задачей, так как в общем случае она сводится к общим диофантовым уравнениям, решение которых, чаще всего, невозможно (в целых числах). Поэтому вопрос о построении общего nice-многочлена остается открытым до сих пор, так как

для степени равной 5 и выше в общем случае получаются громоздкие диофантовые уравнения. В статье приведены частные примеры построения пiсе-многочленов 5-ой степени. Предложенный метод позволяет находить частные пiсе-многочлены более высокой степени.

Ключевые слова: *многочлен, корень многочлена, разложение многочлена, пiсе-многочлен.*

Третьяков Д. В. J -самосопряженные дилатации общего вида: минимальность и изоморфизм / Д. В. Третьяков // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 3 (60). — С. 92–118.

УДК: 517.432

В работе получены критерии минимальности J -самосопряженной дилатации общего вида линейного, плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек в терминах максимальных симметрических операторов, порождающих дилатацию. С помощью одного из критериев доказан изоморфизм двух минимальных J -самосопряженных дилатаций общего вида.

Ключевые слова: *J -самосопряженная дилатация, максимальный симметрический оператор, симметрический простой оператор, дефектные операторы, минимальная J -самосопряженная дилатация, изоморфизм минимальных J -самосопряженных дилатаций.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Аблаев Сейдамет
Серверович*

ассистент кафедры алгебры и функционального анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: seydamet.ablaev@yandex.ru

*Анашкин Олег
Васильевич*

д. ф.-м. н, профессор кафедры математического анализа Крымского федерального университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: oanashkin@yandex.ru

*Баран Инна
Викторовна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: matemain@mail.ru

*Беспалов Михаил
Сергеевич*

д. ф.-м. н., доцент кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и В. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация
e-mail: bespalov@vslu.ru

*Бушуева Виолетта
Олеговна*

студент, Кубанский государственный аграрный университет, г. Краснодар, Российская Федерация

*Лукьяненко Владимир
Андреевич*

к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: art-inf@yandex.ru

- Моисеев Дмитрий Владимирович** д. т. н., доцент, заведующий кафедрой «Информационные технологии и компьютерные системы», ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь, Российская Федерация
e-mail: dymoiessev@sevsu.ru
- Сергеев Александр Эдуардович** к. ф.-м. н., доцент Кубанского государственного аграрного университета, г. Краснодар, Российская Федерация
e-mail: galua1979@yandex.ru
- Третьяков Дмитрий Вадимович** к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: dvttvd@mail.ru
- Хазова Юлия Александровна** к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: hazova.yuliya@hotmail.com
- Шокин Александр Геннадьевич** доцент кафедры «Информационные технологии и компьютерные системы», ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь, Российская Федерация
e-mail: agshokin@sevsu.ru
- Юсупова Ольга Владимировна** старший преподаватель кафедры математического анализа Крымского федерального университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: olgayusupova@mail.ru

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 11.03.2024 .
Издательский дом ФГАОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского».

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № ВВФР-000506 . Тираж 25 экз. Формат 60x90/16.
Усл. печ. ед. 5,2. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.
Типография ИП Павлюков В. В., ИНН 250209756491. 295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, 44,
тел. +7 (978) 823-31-73, E-mail: zakaz@krimpoligraf.ru