

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 2 (59) ' 2023

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей:

- 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» (физ.-мат. науки),
- 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (физ.-мат. науки),
- 1.1.6. «Вычислительная математика (физико-математические науки)» (физ.-мат. науки),
- 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела» (физ.-мат. науки),
- 1.1.9. «Механика жидкости, газа и плазмы» (физ.-мат. науки),
- 1.2.1. «Искусственный интеллект и машинное обучение» (физ.-мат. науки),
- 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физ.-мат. науки),
- 1.2.3. «Теоретическая информатика, кибернетика» (физ.-мат. науки),
- 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации» (физ.-мат. науки),

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru

T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2023, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВИЧ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007
Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): tvim-article@mail.ru
сайт журнала: www.tvim.su

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Системный анализ, управление и обработка информации
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика и математическое моделирование

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., EngD	Leonid MESTETSKIY, Prof., EngD
Natalia APATOVA, Prof., EdD	Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math.
Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math.	Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Yakov YERUSALIMSKY, Prof., EngD	Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Fedor STONYAKIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math.	Anton UTKIN, Senior Researcher, EngD
Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math.	Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., EngD
Vladislav KRAVCHENKO, Prof., EngD	Vladimir CHILIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., EngD,	

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.su

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief

+7 978 837 82 77 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief

tvim-article@mail.ru — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V. I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S., Samsonov S. P. Guaranteed solution for risk-neutral decision maker: an analog of maximin in single-criterion choice problem	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. Synthesis of Equilibrium	30
Брюховецкий А. А., Моисеев Д. В. Программная модель формирования виртуальных кластеров сетевых узлов в мобильных транспортных сетях .	50
Калманович В. В., Серегина Е. В. О некоторых оценках решений задачи теплопроводности в многослойной среде матричным методом	60
Рыхлов В. С. Обобщенное решение простейшей начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения со смешанной производной	72
Чан М. Х., Юрков Н. К., Нгуен К. Т. О задаче оценки полноты аэродинамических характеристик БЛА в условиях неопределенности	89
Tashpulatov S. M. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Second singlet state	98
Рефераты	125
Список авторов номера	129

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S., Samsonov S. P. Guaranteed solution for risk-neutral decision maker: an analog of maximin in single-criterion choice problem	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. Synthesis of Equilib- rium	30
Bryukhovetskiy A. A., Moiseev D. V. A software model for the formation of network nodes virtual clusters in mobile transport networks.....	50
Kalmanovich V. V. and Seregina E. V. On some estimates of solutions to the problem of heat conduction in a multilayer medium by the matrix method	60
Rykhlov V. S. Generalized solution of the simplest initial boundary value prob- lem for a homogeneous hyperbolic equation with a mixed derivative.....	72
Tran M. H., Yurkov N. K., Nguyen Q. T. On the problem of estimating the completeness of the UAV aerodynamic characteristics under uncertainty	89
Tashpulatov S. M. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Second singlet state	98
Abstracts	125
Authors	129

УДК: 517.577.1

MSC2010: 91A10

**GUARANTEED SOLUTION FOR RISK-NEUTRAL DECISION MAKER:
AN ANALOG OF MAXIMIN IN SINGLE-CRITERION CHOICE
PROBLEM**

© V. I. Zhukovskiy¹, L. V. Zhukovskaya², Y. S. Mukhina³, S. P. Samsonov⁴

¹LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

²FEDERAL STATE BUDGETARY INSTITUTION OF SCIENCE CENTRAL ECONOMIC AND
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES (CEMI RAS)
NAKHIMOVSKII PROSP., 47, MOSCOW, 117418, RUSSIA
E-MAIL: zhukovskaylv@mail.ru

³LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF HIGHER ALGEBRA
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: js.mukhina@mail.ru

⁴LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: samsonov@cs.msu.ru

**GUARANTEED SOLUTION FOR RISK-NEUTRAL DECISION MAKER: AN ANALOG OF
MAXIMIN IN SINGLE-CRITERION CHOICE PROBLEM.**

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S., Samsonov S. P.

Abstract. In this article single-criterion choice problems under uncertainty (SCPU) are considered. The principle of minimax regret and the Savage–Niehans risk function are introduced. A possible approach to solving an SCPU for a decision-maker who simultaneously seeks to increase his outcome and reduce his risk (“to kill two birds with one stone”) is proposed. The explicit form of such a solution for the linear-quadratic setup of the SCPU is obtained.

Keywords: *guaranteed solution, single-criterion choice, Savage–Niehans risk, minimax regret, uncertainties.*

1. INTRODUCTION

In the middle of the twentieth century, American mathematician and statistician, professor Leonard Savage (the University of Michigan) and Swiss economist, professor Jurg Niehans (the University of Zurich) independently proposed an approach to solving a single-criterion problem under uncertainty (SCPU), later called the principle of minimax regret or the Savage–Niehans principle. Along with Wald’s principle of guaranteed outcome (maximin), the principle of minimax regret is crucial for guaranteed decision-making in SCPUs. The main role in this principle is played by the regret function, which determines the Savage–Niehans risk in SCPUs. In recent years, such a risk has been widely used in microeconomic analysis and applications. This article proposes a possible approach to solving SCPUs for a risk-neutral decision-maker, who simultaneously seeks to increase his outcome and reduce his risk (“to kill two birds with one stone”). The explicit form of such a solution for the linear-quadratic statement of the SCPU of a fairly general form is obtained.

2. INTERVAL UNCERTAINTIES

The mathematical model of decision-making under conflict considered below is described by the single-criterion choice problem under uncertainty (SCPU). Note that the case of interval uncertainty will be studied: the decision-maker knows only the ranges of admissible values of uncertain factors, and their probabilistic characteristics are absent, for one reason or another. The uncertainties occur due to the incomplete (inaccurate) information about the practical use of any strategies chosen by the decision maker. For example, an economic system is often subject to unexpected, difficult-to-predict disturbances, both of exogenous origin (the disruption and variation of the quantity (range) of supply, demand fluctuations for the products supplied by a given enterprise, etc.) and endogenous origin (the emergence of new technologies, breakdowns and replacement of equipment, etc.). The question naturally arises: how to take into account the presence of uncertainties when choosing strategies.

The following aspects are described in the economic literature.

Firstly, modern economic systems are characterized by a large number of elements and functional relations between them, a high degree of dynamism, the presence of nonfunctional relations between the elements, and the action of subjective factors due to the participation of individuals or their groups in the operation of such systems; in other words, an economic system usually operates under the uncertainty of its external and internal environment.

Second, as it has been already mentioned, the sources of uncertainties in economic systems are the incomplete or insufficient information about economic processes and their conditions; random or deliberate opposition from other economic agents; random factors that cannot be predicted due to the unexpectedness of their occurrence.

Third, the uncertainties are estimated using deterministic and probabilistic-statistical approaches as well as the approaches based on fuzzy logic.

Interval uncertainties were surveyed in the books [1–6] and other publications.

Each type of uncertainty requires its own approach for proper consideration. In this article, the analysis will be restricted to the class of interval uncertainties: only the ranges of admissible values of uncertain factors are known, without any probabilistic characteristics. The uncertainties will be taken into account using the method proposed by V. Zhukovskiy in [7–11]. This method allows passing from the original single-criterion choice problem under uncertainty (SCPU) to an equivalent single-criterion choice problem without uncertainty.

3. PRINCIPLE OF MINIMAX REGRET

Traditionally, one of the most important challenges in the mathematical theory of SCPUs is the development of optimality principles, i. e., the answer to the following questions: What behavior of the decision-maker should be considered optimal (reasonable, appropriate)? Does an optimal solution exist and how can it be constructed? This work gives a possible answer to both questions for SCPUs.

The mathematical theory of games recommends making the concept of stability the cornerstone of optimality: a player's deviation from the optimal strategy introduced below cannot improve but at the same time can worsen his payoff (as well as the associated risk).

Let us proceed to the formal statement. Consider a single-criterion choice problem under uncertainty $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$. In $\Gamma^{(1)}$, the decision-maker chooses his alternative $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$, seeking to maximize the value of a scalar criterion $f(x, y)$ for all possible realizations of the uncertainty $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$. Recall that only the range of admissible values of the uncertainty is known.

The presence of uncertainties leads to the set of outcomes

$$f(x, Y) = \{f(x, y) \mid \forall y \in Y\},$$

that is induced by $x \in X$. The set $f(x, Y)$ can be reduced using risks.

Risk management is a topical problem of economics: in 1990, H. Markowitz [12] was awarded the Nobel Prize in Economic Sciences “for having developed the theory of portfolio choice”. What is a proper comprehension of risk? A well-known Russian expert

in optimization, T. Sirazetdinov, claims that today there is no rigorous mathematical definition of risk [13, p. 31]. The monograph [14, p. 15] even suggested sixteen possible concepts of risk. Most of them require statistical data on uncertainty. However, in many cases the decision-maker does not possess such information for objective reasons.

Thus, here risks will be understood as possible deviations of realized values from the desired ones. Note that this definition (in particular, Savage–Niehans risk) is in good with the conventional notion of microeconomic; for example, see [15, pp. 40–50].

In 1939 A. Wald, a Romanian mathematician who emigrated to the USA in 1938, introduced the maximin principle, also known as the principle of guaranteed outcome [16, 17]. This principle allows finding a guaranteed outcome in a single-criterion choice problem under uncertainty (SCPU). Almost a decade later, Swiss economist J. Niehans (1948) and American mathematician, economist, and statistician L. Savage (1951) suggested the principle of minimax regret (PMR) for building guaranteed risks in the SCPUs [18, 19]. In the modern literature, this principle is also referred to as the Savage risk or the Savage–Niehans criterion. Interestingly, during World War II Savage worked as an assistant of J. von Neumann, which surely contributed to the appearance of the PMR. Note that the authors of two most remarkable dissertations in economics and statistics are annually awarded the Savage Prize, which was established in the USA as early as 1971.

For the single-criterion choice problem $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$, the principle of minimax regret is to construct a pair $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$ that satisfies the chain of equalities

$$R_f^r = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y) \quad (1)$$

where the Savage–Niehans risk function has the form

$$R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y) \quad (2)$$

The value R_f^r given by (1) is called the Savage–Niehans risk in the problem $\Gamma^{(1)}$. The risk function $R_f(x, y)$ assesses the difference between the realized value of the criterion $f(x, y)$ and its best-case value $\max_{z \in X} f(z, y)$ from the DM's view. Obviously, the DM strives for reducing $R_f(x, y)$ as much as possible with an appropriately chosen alternative $x \in X$, naturally expecting the strongest opposition from the uncertainty in accordance with the principle of guaranteed outcome; see formula (1). Therefore, following (1) and (2), the DM is an optimist who seeks for the best-case value $\max_{x \in X} f(x, y)$. In contrast, the pessimistic DM is oriented towards the worst-case outcome — the Wald maximin solution $(x^0, f^0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^0, y))$.

In the sequel, assume that the DM in the problem $\Gamma^{(1)}$ is optimistic: he constructs the Savage–Niehans risk function (2) for $f(x, y)$. Note two important aspects as follows. First, the criterion $f(x, y)$ from $\Gamma^{(1)}$ has its own risk $R_f(x, y)$; see (2). Second, the DM tries to choose alternatives $x \in X$ in order to reduce the risk $R_f(x, y)$, expecting any realization of the strategic uncertainty $y(\cdot) \in Y^X, y(x) : X \rightarrow Y$.

Remark 1. The models $\Gamma^{(1)}$ naturally arise, e. g., in economics: a seller in a market is interested to maximize his profits under import uncertainty.

In many publications on macroeconomics [15]-[6], all decision-makers are divided into three categories: risk-averse, risk-neutral, and risk-seeking. In this appendix, the DM is assumed to be a risk-neutral person and, as it has been mentioned above, an optimist.

4. HIERARCHICAL INTERPRETATION

4.1. Hierarchical interpretation of principle of minimax regret. Consider two hierarchical interpretations as follows. The first arises when the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ is constructed, whereas the second when the solution $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$ of the problem $\Gamma^{(1)}$ for the risk-seeking DM is obtained.

4.2. Hierarchical interpretation of Savage–Niehans risk function design. Hierarchical games represent a mathematical model of a conflict with a fixed sequence of moves and information exchange between its parties [20, p. 477]. In Russia, the intensive research of hierarchical games was initiated in the second half of the 20th century by Yu. Germeier [21, 22] (the founder of the Department of Operations Research at the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University) and then continued by his scholars. Hierarchical two-player games describe the interaction between the upper (Leader) and lower (Follower) levels of the hierarchy. Such games have a given sequence of moves, i. e., an order in which each player chooses his strategies and (possibly) reports them to the partner.

An important element of hierarchical games is to choose the class of admissible strategies depending on the information available to the players. In the theory of hierarchical games, the informational extension of the game was rigorously formulated in [23]. In a particular case, this extension leads the so-called strategic uncertainties, i. e., m -dimensional vector functions $y(x) : X \rightarrow Y, y(\cdot) \in Y^X$, which are used along with pure uncertainties $y \in Y$ in the game $\Gamma^{(1)}$.

Now, let us discuss the hierarchical interpretation of risk function design for the SCPU $\Gamma^{(1)}$. Assume that the lower-level player (Follower) can apply only his pure strategy $y \in Y$, whereas the upper-level player (Leader) can adopt “any conceivable

information" [23, p. 353]. Thus, further analysis will be confined to the Follower's pure strategies $y \in Y$ and the Leader's counterstrategies $x(y) : Y \rightarrow X$, $x(\cdot) \in X^Y$, i. e., the set of functions $x(y)$ with Y as the domain of definition and X as the codomain. For risk function design, consider the two-level two-stage hierarchical game

$$\Gamma_R = \langle X^Y, Y, f(x, y) \rangle$$

In this game, the first move is made by Follower (the lower-level player), who reports his admissible pure strategies to the upper level.

The second move belongs to Leader (the upper-level player), who performs the following actions. First, he analytically constructs the counterstrategy

$$x(y) \in Y(x) = \text{Arg} \max_{x \in X} f(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

i. e., finds the scalar function $f[y] = f(x(y), y) = \max_{x \in X} f(x, y)$; second, he designs the Savage–Niehans risk function

$$R_f(x, y) = f[y] - f(x, y).$$

Solution of choice problem $\Gamma^{(1)}$ for risk-seeking DM. Assume that the Savage–Niehans risk function has the explicit form $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$, and the problem is to construct a pair $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$ defined as the solution of the SCPU $\Gamma^{(1)}$ for the risk-seeking DM:

$$R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y)$$

In the problem $\Gamma^{(1)}$, suppose that Leader applies only a pure alternative (strategy) $x \in X$, whereas the other player (Follower) can adopt any conceivable information [24, 25], including his knowledge of the strategy $x \in X$, to form his strategy (uncertainty) as a function $y(x) : X \rightarrow Y$, $y(\cdot) \in Y^X$. (This hypothesis is well known as the informational discrimination of Leader.) As a result, the criterion in the choice problem $\Gamma^{(1)}$ is defined as the scalar function $f(x, y(x))$.

Recall that in the theory of differential games, the functions $y(\cdot) \in Y^X$ (the set of m -dimensional vector functions with the domain of definition X and the codomain Y) are called counterstrategies. The problem $\Gamma^{(1)}$ in which counterstrategies describe the behavior of uncertain factors is called the minimax game [24, 25].

Thus, consider the hierarchical two-level three-stage game of two players (Leader and Follower) in which, in contrast to Γ_R , Leader and Follower use a pure strategy $x \in X$ and a counterstrategy $y(x) : X \rightarrow Y$, $y(\cdot) \in Y^X$, respectively.

The first move is made by Leader, who reports his admissible strategies $x \in X$ to the lower level.

The second move is made by Follower, who analytically constructs $y(x)$ in accordance with

$$\max_{y(\cdot) \in Y^X} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x] \quad \forall x \in X$$

assuming that the vector function $y(x)$ is unique (e. g., for a scalar function $R_f(x, y)$ that is strictly concave in y for each $x \in X$), and then reports $R_f[x]$ to the upper level.

The third move is made by Leader, who constructs a strategy $x^r \in X$ such that $\min_{x \in X} R_f[x] = R_f[x^r] = R_f^r$

This three-move game-theoretic framework completely matches the concept of the Leader's guaranteed outcome in the problem $\Gamma^{(1)}$ (in the Germeier sense) if the Follower's payoff function considered in [10, 11, 27] is replaced by $-R_f(x, y)$. Moreover, in the game Γ_R , Leader can calculate the Follower's response and immediately implement the third move if he knows the behavioral rule of the opponent. Once again, note that the analog and modification of this three-move framework is convenient to design the guaranteed solution in outcomes and risks for the risk-seeking DM, both in noncooperative and cooperative conflicts.

Remark 2. The minimax solution for the risk-seeking DM is determined by the pair $(x^r, R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y(\cdot) \in Y^X} R_f(x, y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y))$ for two solutions as follows:

(1) For each alternative $x \in X$, the inner maximum $\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x]$ (see move 2) gives the greatest Savage–Niehans risk of the form

$$R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y) \geq R_f(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

In other words, $R_f(x, y)$ cannot exceed $R_f[x]$ for all $y \in Y$, and hence $R_f[x]$ can be considered the DM's guarantee obtained by choosing the alternative x . Note that due to (2), $R_f(x, y) \geq 0$; therefore, the Savage–Niehans risk function takes the values $R_f(x, y) \in [0, R_f[x]]$ for all $(x, y) \in X \times Y$.

(2) Like any DM, the risk-seeking one would like to implement his decisions (the choice of $x \in X$) with the smallest risk (ideally, zero!). This aspect explains his third move.

Therefore, in the problem $\Gamma^{(1)}$ the risk-seeking DM is suggested to use the alternative x^r to obtain the smallest (minimum) guarantee $R_f[x^r] = R_f(x^r, y(x^r)) \geq R(x^r, y) \quad \forall y \in Y$. The same technique can be applied to formalize the strongly-guaranteed solution in outcomes and risks of the problem $\Gamma^{(1)}$.

Here is an important result from operations research that concerns informed uncertainties and strategies.

Lemma 1. *If in the choice problem $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ the sets X and Y are compact and the criterion $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$, then the maximum (minimum) function $\max_{x \in X} f(x, y)$ ($\min_{y \in Y} f(x, y)$) is continuous on $Y(X)$.*

Lemma (1) is a well-known fact that can be found in almost any textbook on operations research; for example, see [27].

Remark 3. Lemma (1) implies the continuity of the risk function (2) on $X \times Y$ (of course, only if in the problem $\Gamma^{(1)}$ the sets X and Y are compact and the criterion $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$.)

Remark 4. Assume that in the problem $\Gamma^{(1)}$, $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n$, $Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$, and $f(\cdot) \in C(X \times Y)$. Then there exists the guaranteed solution in risks (x^r, R_f^r) of this problem.

Really, the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y)$ (2) is continuous on $X \times Y$ (see Remark (2)). In this case, by Lemma (1) the function $\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f[x]$ is also continuous on X . (There exists a Borel measurable counterstrategy (selector) $y(x) : X \rightarrow Y$ such that

$$\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x] \forall x \in X$$

and $R_f[x]$ is continuous on X). According to the Weierstrass extreme-value theorem, on a compact set X a continuous function $R_f[x]$ achieves minimum at the point $x^r \in X$. If both sets X and Y are compact and the function $f(x, y)$ is continuous, then the guaranteed solution in risks (x^r, R_f^r) defined by (1) exists.

Thus, using x^r , the risk-seeking DM obtains a guarantee in risks $R_f^r \geq R_f(x^r, y) \forall y \in Y$, and for all $x \in X$ this guarantee will be smallest among all other guarantees $R_f[x] \geq R_f(x, y)$ for all alternatives $x \in X$. Such a procedure is characteristic of the risk-seeking DM. In this article, we will consider a similar procedure for the risk-neutral DM.

New approach to SCPU for risk-neutral DM: Preliminaries. Let us utilize the approach proposed for noncooperative games in [29]. For this purpose, from the SCPU $\Gamma^{(1)}$ we will pass to the problem of guarantees without any uncertainties.

At conceptual level, the DM's goal so far has been to choose an appropriate alternative maximizing his outcome. But this is not enough for the risk-neutral DM! He seeks for an alternative that would not only increase his outcome but also reduce his risk, as much as possible. Recall that the DM forms the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y)$ (2), the value of which is called the DM's risk, and the Savage–Niehans risk R_f^r itself is determined by the chain of equalities (1). The pair (x^r, R_f^r) is the solution of the choice problem $\Gamma^{(1)}$

for the risk-seeking DM: the value $R_f(x, y)$ characterizes his risk when choosing and implementing the alternative $x \in X$, which he strives to minimize simultaneously with outcome improvement. In this context, two questions arise naturally:

- (1) How can we combine the two objectives of the decision-maker (outcome increase with simultaneous risk reduction) using only one criterion?
- (2) How can we implement these objectives in a single alternative, in such a way that uncertainty is also accounted for?

How to combine DM's desire to increase outcome and reduce risks? Recall that, according to the principle of minimax regret, the DM's risk is defined by the value of the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$, where $f(x, y)$ denotes the DM's criterion in the choice problem $\Gamma^{(1)}$. Thus, to construct the risk function $R_f(x, y)$ for the DM, first the dependent maximum $f[y] = \max_{x \in X} f(x, y) \forall y \in Y$ needs to be found. To calculate $f[y]$, following the theory of two-level hierarchical games, assume the discrimination of the lower-level player, who forms the uncertainty $y \in Y$ and sends this information to the upper level for constructing a counterstrategy $x(y) : Y \rightarrow X$ such that

$$\max_{x \in X} f(x, y) = f(x(y), y) = f[y] \forall y \in Y.$$

The set of such strategies is denoted by X^Y . (Actually, this set consists of n -dimensional vector functions $x(y) : Y \rightarrow X$ with the domain of definition Y and the codomain X). Thus, to construct the first term in (2) at the upper level of the hierarchy, we have to solve the single-criterion choice problem $(X^Y, Y, f(x, y))$ for each uncertainty $y \in Y$; here X^Y is the set of counterstrategies $x(y) : Y \rightarrow X$. The problem itself consists in determining the scalar function $f[y]$ defined by

$$f[y] = \max_{x(\cdot) \in X^Y} f(x, y) \forall y \in Y. \quad (3)$$

Then, the Savage–Niehans risk functions are constructed by formula (2).

Hereinafter, the collection of all compact sets of Euclidean space \mathbf{R}^k is denoted by $\text{comp } \mathbf{R}^k$, and if a scalar function $\psi(x)$ on the set X is continuous, we write $\psi(\cdot) \in C(X)$.

The main role in this paragraph will be played by the following result.

Proposition 1. If $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n$, $Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$, and $f(\cdot) \in C(X \times Y)$, then

- (1) the maximum function $\max_{x \in X} f(x, y)$ is continuous on Y ;
- (2) the minimum function $\min_{y \in Y} f(x, y)$ is continuous on X .

Corollary 1. If in the choice problem $\Gamma^{(1)}$ the sets $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n$ and $Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$ and the function $f(\cdot) \in C(X \times Y)$, then the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$ (also, see Remark (3)).

Let us proceed with the strongly-guaranteed outcome and risk in the SCPU $\Gamma^{(1)}$. In a series of papers [10, 11], three different ways to account for uncertain factors of decision-making in conflicts under uncertainty were proposed. Our analysis below will be confined to one of them presented in [11], based on the following method. We associate with the criterion $f(x, y)$ in the problem $\Gamma^{(1)}$ its strong guarantee $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$. As a consequence, choosing his alternatives $x \in X$, the DM ensures an outcome $f[x] \leq f(x, y) \forall y \in Y$ under any realized uncertainty $y \in Y$. Such a strongly-guaranteed outcome $f[x]$ seems natural for the interval uncertainties $y \in Y$ addressed in this appendix, because no additional probabilistic characteristics of y (except for information on the admissible set $Y \subseteq \mathbf{R}^m$) are available. Proposition (1), in combination with Corollary (1) as well as the continuity of $f(x, y)$ and $R_f(x, y)$ on $X \times Y$, leads to the following result.

Proposition 2. If in the SCPU $\Gamma^{(1)}$ the sets X and Y are compact and the criterion $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$, then the strongly-guaranteed outcome

$$f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y) \quad (4)$$

and the strongly-guaranteed risk

$$R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y) \quad (5)$$

are scalar functions that are continuous on X .

Remark 5. First, the meaning of the guaranteed outcome $f[x]$ from (4) is that, for any $y \in Y$, the realized outcome $f(x, y)$ is not smaller than $f[x]$. In other words, using his alternative $x \in X$ in the choice problem $\Gamma^{(1)}$, the DM ensures an outcome $f(x, y)$ of at least $f[x]$ under any uncertainty $y \in Y$. Therefore, the strongly-guaranteed outcome $f[x]$ gives a lower bound for all possible outcomes $f(x, y)$ occurring when the uncertainty y runs through all admissible values from Y . Second, the strongly-guaranteed risk $R_f[x]$ also gives an upper bound for all Savage–Niehans risks $R_f(x, y)$ that can be realized under any uncertainties $y \in Y$. Really, from (5) it immediately follows that

$$R_f[x] \geq R_f(x, y) \forall y \in Y.$$

Thus, adhering to his alternative $x \in X$, the DM obtains the strong guarantee in outcomes $f[x]$, and simultaneously the strong guarantee in risks $R_f[x]$.

Transition from single-criterion choice problem under uncertainty $\Gamma^{(1)}$ to bi-criteria vector optimization problem. The DM's desire to increase his outcome and simultaneously reduce his risk is described well by the new mathematical model of

a bi-criteria choice problem under uncertainty with the two-component vector criterion

$$\Gamma_2 = \langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle.$$

In this model, the sets X and Y are the same as in $\Gamma^{(1)}$. The novelty consists in the transition from the one-component criterion $f(x, y)$ to the two-component criterion $\{f(x, y), -R_f(x, y)\}$, in which $R_f(x, y)$ is the Savage–Niehans risk function for the DM. In the problem Γ_2 , the DM chooses an alternative $x \in X$ in order to increase as much as possible the values of both criteria simultaneously, which explains the minus sign of $R_f(x, y)$. Moreover, the DM must expect any realization of the uncertainty $y \in Y$. Note that due to $R_f(x, y) \geq 0$, for all $(x, y) \in X \times Y$ an increase of $-R_f(x, y)$ is equivalent to a decrease of $R_f(x, y)$.

The uncertainty $y \in Y$ in the choice problem Γ_2 is of the interval type. This feature compels the DM to use the available information about the uncertainty, i. e., the limits of its range, being guided by the strongly-guaranteed outcome $f[x]$ (4) and the strongly-guaranteed risk $R_f[x]$ (5). Therefore, it seems natural to pass from $\Gamma^{(1)}$ to the two-component vector optimization problem without uncertainty

$$\Gamma_2^g = \langle X, \{f[x], -R_f[x]\} \rangle$$

in which the DM chooses an appropriate alternative $x \in X$ for maximizing both criteria $f[x]$ and $-R_f[x]$ simultaneously.

For the practical design of the strongly-guaranteed outcome and risk in Γ_2^g , we will employ the mathematical theory of vector optimization, e. g., from [28], with its different approaches and results. Consider an optimal solution of multicriteria problems introduced in 1909 by Italian economist and sociologist V. Pareto [30]. For the problem Γ_2^g , the Pareto maximality (efficiency) of an alternative x^P is reduced to the inconsistency of the system of two inequalities $f[x] \geq f[x^P]$, $-R_f[x] \geq -R_f[x^P] \forall x \in X$, in which at least one inequality is strict. This leads to the following notion.

Definition 1. A triplet $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ is called a Pareto-maximal strongly-guaranteed solution in outcomes and risks (PSGOR) of the problem Γ_2^g if

- (1) the alternative x^P is Pareto-maximal in the problem Γ_2^g ;
- (2) $f[x^P]$ is the value of the strongly-guaranteed outcome $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$ in the problem Γ_2^g for $x = x^P$;
- (3) $R_f[x^P]$ is the value of the strongly-guaranteed risk $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$ in the problem Γ_2^g for $x = x^P$.

Remark 6. Definition (1) may also involve other optimality principles (Pareto, Geoffrion, Borwein, cone, A-optimality). All these principles as well as connections between different vector optimal solutions were considered in [31].

According to the definition of Pareto maximality,

- (1) if x^P is a Pareto-maximal alternative, then for $\bar{x} \neq x^P, \bar{x} \in X$ an increase of value of one criterion will inevitably reduce the value of the other;
- (2) there exists no alternative $x \in X$ for which the values of both criteria will increase in comparison with their values for $x = x^P$.

Perhaps the term ‘‘Slater maximality’’ appeared in the Russian literature after the translation [32] of a paper by Hurwitz.

If Pareto optimality is replaced by Slater maximality (weak efficiency), then Definition (1) takes the following form.

Definition 2. A triplet $(x^S, f[x^S], R_f[x^S])$ is called a Slater-strongly-guaranteed solution in outcomes and risks of the problem Γ_2^g if

- (1) the alternative $x^S \in X$ is Slater-maximal in the problem Γ_2^g , i. e., for any $x \in X$ the system of two strict inequalities

$$f[x] > f[x^S], -R_f[x] > -R_f[x^S]$$

is inconsistent;

- (2) $f[x^S]$ is the value of the strongly-guaranteed outcome in the problem Γ_2^g for $x = x^S$;
- (3) $R_f[x^S]$ is the value of the strongly-guaranteed risk in the problem Γ_2^g for $x = x^S$.

Any efficient (Pareto-maximal) alternative is also weakly efficient, which follows directly from Definitions (1) and (2). Generally speaking, the converse is false. Also, property (2) of Remark (6) remains valid for the Slater-strongly-guaranteed solution in outcomes and risks of the problem $\Gamma^{(1)}$. The next result seems quite obvious.

Proposition 3. If in the problem Γ_2^g there exists an alternative $x^P \in X$ and values $\alpha, \beta \in (0, 1)$ such that x^P maximizes the scalar function $\Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x]$, i. e.,

$$\Phi[x^P] = \max_{x \in X} (\alpha f[x] - \beta R_f[x]) \quad (6)$$

then x^P is the Pareto-maximal alternative in the problem Γ_2^g ; in other words, for any $x \in X$ the system of two inequalities

$$f[x] \geq f[x^P], \quad R_f[x] \leq R_f[x^P] \quad (7)$$

with at least one strict inequality, is inconsistent. (Here $\alpha = \beta = 1$.)

Remark 7. The combination of the criteria (4) and (5) in the form $\Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x]$ is of interest for two reasons. First, even if for $\bar{x} \neq x^P$ we have an increase of the guaranteed outcome $f[\bar{x}] > f[x^P]$, then due to the Pareto maximality of x^P and the fact that $R_f[\bar{x}] \geq 0$ such an improvement of the guaranteed outcome $f[\bar{x}] > f[x^P]$ will inevitably lead to an increase of the guaranteed risk $R_f[\bar{x}] > R_f[x^P]$; conversely, for the same reasons, a reduction of the guaranteed risk $R_f[\bar{x}] < R_f[x^P]$ will lead to a reduction of the guaranteed outcome $f[\bar{x}] < f[x^P]$ (both cases are undesirable for the DM). Therefore, the replacement of the bi-criteria choice problem Γ_2^g with the single-criterion choice problem $(X, \Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x])$ matches well the DM's desire to increase $f[x]$ and simultaneously reduce $R_f[x]$. Second, since $R_f[x] \geq 0$ and $\alpha, \beta \in (0, 1)$, an increase of the difference $\alpha f[x] - \beta R_f[x]$ also matches the DM's desire to increase the guaranteed outcome $f[x]$ and simultaneously reduce the guaranteed risk $R_f[x]$.

Now, let us answer the second question: how can we combine both objectives of the DM in a single alternative taking into account the existing interval uncertainty? To do this, from the problem $\Gamma^{(1)}$ we will pass sequentially to choice problems Γ_1, Γ_2 , and Γ_3 :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle \\ \Gamma_2 &= \langle X, \{f[x], -R_f[x]\} \rangle \\ \Gamma_3 &= \langle X, \{\Phi[x] = f[x] - R_f[x]\} \rangle\end{aligned}\tag{8}$$

In all the three choice problems, $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ denotes the alternative chosen by the DM; $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$ are uncertainties; the DM's criterion $f(x, y)$ is defined on the pairs $(x, y) \in X \times Y$; in (2), $R_f(x, y)$ means the Savage–Niehans risk function. In the choice problem Γ_1 , the criterion has two components — the original criterion $f(x, y)$ of the problem $\Gamma^{(1)}$ and the risk function $R_f(x, y)$ of (2). In the choice problem Γ_2 , the original criterion $f(x, y)$ and the risk function $R_f(x, y)$ are replaced by their guarantees $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$ and $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$, respectively. Finally, in the choice problem Γ_3 , the linear convolution of the guarantees $f[x]$ and $-R_f[x]$ (see Proposition (3)) is used instead of the two-component criterion.

Remark 8. Let us discuss the advantages of the solution formalized by Definitions (1) and (2). First, recall that economists divide all decision-makers into three categories: risk-averse, risk-neutral, and risk-seeking. In Definitions (1) and (2), the DM is assumed to be a risk-neutral person, who simultaneously considers the outcome and associated risk. Second, this solution imposes a lower bound on the outcomes and also an upper bound on the risks, $f[x] \leq f(x^P, y) \forall y \in Y$ and $R_f[x] \geq R_f(x^P, y) \forall y \in Y$, respectively. Note that the existence and continuity of the guarantees $f[x]$ and $R_f[x]$ are based on the hypotheses $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n, Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$, and $f(\cdot) \in C(X \times Y)$; see Proposition (1). Third, an

improvement of the Pareto-maximal guaranteed outcome (in comparison with $f[x^P]$) will inevitably increase the guaranteed risk (in comparison with $R_f[x^P]$); conversely, a reduction of the risk will inevitably decrease the guaranteed payoff.

Remark 9. Definitions (1) and (2) suggest a constructive method of SGPOR design. It consists of four steps as follows.

Step I. Using $f(x, y)$, find $f[y] = \max_{x \in X} f(x, y)$ and construct the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y) = f[y] - f(x, y)$ for the criterion $f(x, y)$.

Step II. Evaluate the strong guarantee in outcomes $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$ and also the strong guarantee in risks $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$.

Step III. For the auxiliary choice problem Γ_2 , calculate the Pareto-maximal alternative x^P . At this step, Proposition (3) is of assistance.

Then the Pareto-maximal alternative in the auxiliary choice problem Γ_3 is x^P for which

$$\max_{x \in X} (f[x] - R_f[x]) = f[x^P] - R_f[x^P]. \quad (9)$$

Step IV. Using x^P , evaluate the strong guarantees $f[x^P]$ and $R_f[x^P]$.

The resulting triplet $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ is the requisite SGPOR, which complies with Definition (1), i. e., for the original criterion $f(x, y)$ the alternative x^P leads to a guaranteed outcome $f[x^P]$ with a guaranteed Savage–Niehans risk $R_f[x^P]$.

Explicit form of Savage–Niehans risk for linear-quadratic SCPU. Consider the linear-quadratic single-criterion choice problem under uncertainty

$$\Gamma_{lq} = \langle \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, f(x, y) \rangle,$$

in which the set of alternatives x coincides with the n -dimensional Euclidean space \mathbf{R}^n , the set of uncertainties y is \mathbf{R}^m , and the linear-quadratic criterion is given by

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d.$$

Here A and C are constant and symmetric matrices of dimensions $n \times n$ and $m \times m$, respectively; B is rectangular constant matrix of dimensions $n \times m$; a and c are constant vectors of dimensions n and m , respectively; finally, d is a constant. As before, the prime denotes transposition. In the problem Γ_{lq} , the DM chooses an appropriate alternative $x \in \mathbf{R}^n$ in order to maximize the linear-quadratic criterion $f(x, y)$ and simultaneously minimize a risk function under any possible realizations of the uncertainty $y \in \mathbf{R}^m$.

The problem is to design an explicit form of the Savage–Niehans risk function for the linear-quadratic choice problem Γ_{lq} (see Remark (9)) and then to obtain the SGPOR. Hereinafter, for a square constant matrix A of dimensions $n \times n$, the inequality

$A > 0$ ($A < 0$) means that the quadratic form with the matrix A is positive definite (negative definite, respectively).

Also, the following notations will be used below:

– 0_n as a zero vector of dimension n ;

– $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ as the gradient of a scalar function $f(x, y)$ with respect to x under a fixed vector y ;

– $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$ as a Hessian of a scalar function $f(x, y)$ with respect to x under a fixed vector y ;

– $\det A$ as the determinant of a matrix A ;

– E_n as an identity matrix of dimensions $n \times n$.

Direct calculations show that

$$\frac{\partial}{\partial x} (x'Ax) = 2Ax, \quad \frac{\partial}{\partial x} (2x'By) = 2By, \quad \frac{\partial}{\partial x} (2a'x) = 2a, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x'Ax) = 2A.$$

Well, let us construct an explicit form of the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y)$ for the linear-quadratic choice problem Γ_{lq} ; see Stage I from Remark (9).

Step I. Explicit-form design of the the Savage–Niehans risk function $R_f(x, y)$ for the problem Γ_{lq} .

Proposition 4. In the linear-quadratic choice problem Γ_{lq} with a matrix $A < 0$, the Savage–Niehans risk function has the form

$$R_f(x, y) = -(x'A + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a).$$

Proof. An n -dimensional vector function $x(y)$ with the domain of definition \mathbf{R}^m and the codomain \mathbf{R}^n such that $\max_{z \in \mathbf{R}^n} f(z, y) = f(x(y), y)$, $\forall y \in \mathbf{R}^m$, exists under the sufficient conditions

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x(y)} = 2Ax(y) + 2By + 2a = 0_n; \quad \forall y \in \mathbf{R}^m$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=x(y)} = 2A < 0.$$

The second condition (inequality) holds due to $A < 0$; from the first condition (identity) it follows that

$$x(y) = -A^{-1}(By + a).$$

Substituting $x = x(y)$ into $f(x, y)$ gives

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathbf{R}^n} f(z, y) &= f(x(y), y) = (y'B' + a')A^{-1}(By + a) - 2(y'B' + a')A^{-1}By + y'Cy \\ &- 2a'A^{-1}(By + a) + 2c'y + d = -(y'B' + a')A^{-1}(By + a) + y'Cy + 2c'y + d \\ &= y'[C - B'A^{-1}B]y + 2(c' - a'A^{-1}B)y + (d - a'A^{-1}a) \end{aligned}$$

As a result, the Savage–Niehans risk function can be written as

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= f(x(y), y) - f(x, y) = -x'Ax - 2x'By - 2a'x - y'B'A^{-1}By \\ &- 2a'A^{-1}By - a'A^{-1}a = -(x'A + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a) \end{aligned}$$

The proof of this proposition is complete. \square

Step II. Construct the function $R_f[x] = \max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y)$.

Proposition 5. In the linear-quadratic choice problem Γ_{lq} with matrices

$$A < 0, \det B \neq 0,$$

the strong guarantee in risks is

$$R_f[x] = \max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y) \equiv 0, \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Proof. First of all, the condition $\det B \neq 0$ implies that B is a square matrix, i. e., $n = m$. For finding $R_f[x]$, define an n -dimensional vector function $y(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ such that

$$\max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x], \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Recall the sufficient conditions of maximum for $y = y(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} &= -2B'x - 2B'A^{-1}By(x) - 2B'A^{-1}a = 0_m, \forall x \in \mathbf{R}^n, \\ \left. \frac{\partial^2 R_f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=y(x)} &= -2B'A^{-1}B > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Since $A < 0$ and $\det B \neq 0$, the following chain of implications is the case:

$$A^{-1} < 0 \implies B'A^{-1}B < 0 \implies -B'A^{-1}B > 0 \implies -2B'A^{-1}B > 0.$$

(In other words, the second condition of (10) is satisfied.)

In view of

$$(B'A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A(B')^{-1},$$

the first condition of (10) gives

$$y(x) = -(B'A^{-1}B)^{-1}(B'x + B'A^{-1}a) = -B^{-1}A(x + A^{-1}a) = -B^{-1}(Ax + a).$$

Then, substituting $y = y(x)$ into $R_f[x]$ yields

$$R_f[x] = R_f(x, y(x)) = -(x'A - x'A - a' + a')A^{-1}(Ax - Ax - a + a) \equiv 0, \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

which finally establishes the identity $R_f[x] \equiv 0, \forall x \in \mathbf{R}^n$. \square

Continuing Step II (from Remark (9)), we find the strong guarantee in outcomes $\min_{y \in Y} f(x, y)$ for

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d,$$

that is, $f[x] = \min_{y \in \mathbf{R}^m} f(x, y)$, in the case $A < 0, C > 0$.

Lemma 2. [33] For any positive definite matrix C of dimensions $n \times n$, there exists a unique positive definite matrix S of dimensions $n \times n$ such that $S^2 = C$. The matrix S is called the square root of the matrix C and denoted by $C^{\frac{1}{2}}$. Moreover, the eigenvalues of the matrix C are the squares of the eigenvalues of the matrix $C^{\frac{1}{2}}$.

Lemma 3. For a symmetric matrix $C > 0$ of dimensions $n \times n$, $C^{-1} = [S^2]^{-1} = [S^{-1}]^2$.

Proof. Indeed, for $S = C^{\frac{1}{2}}$ it follows that

$$C = S \cdot S = S^2 \implies C^{-1} = [S \cdot S]^{-1} = S^{-1} \cdot S^{-1} = [S^{-1}]^2.$$

\square

Lemma 4. $A < 0 \wedge C > 0 \implies (A - BCB') < 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, where $\mathbf{R}^{n \times m}$ is the set of constant matrices of dimensions $n \times m$.

Proof. Really,

$$\begin{aligned} C > 0 \implies C^{-1} > 0 \implies BC^{-1}B' \geq 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m} \implies -BC^{-1}B' \leq 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m} \\ \implies A - BC^{-1}B' < 0, \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m}. \end{aligned}$$

\square

Proposition 6. If $A < 0$ and $C > 0$, then

$$f[x] = \min_{y \in \mathbf{R}^m} f(x, y) = x' [A - BC^{-1}B'] x + 2x' [a - BC^{-1}c] + d - c' C^{-1} c. \quad (11)$$

Proof. According to Lemma (2), there exists a matrix S such that $C = S^2$; moreover, $C > 0 \implies S > 0 \wedge S = S'$. Due to $S^{-1}S^{-1} = C^{-1}$ (Lemma (3)), $SS = C$, and $S^{-1}S = E_n$, it follows that

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d = \|S^{-1}B'x + Sy + S^{-1}c\|^2 \\ &- x'BC^{-1}B'x - 2x'BC^{-1}c - c' C^{-1} c - y'Cy - 2x'By - 2c'y + x'Ax + 2x'By \\ &+ 2a'x + d \geq x' [A - BC^{-1}B'] x + 2x' [a - BC^{-1}c] + d - c' C^{-1} c = f[x] \end{aligned}$$

for all $x \in \mathbf{R}^n$ and $y \in \mathbf{R}^m$, because $\|\cdot\| \geq 0$ by the properties of the Euclidean norm. Using the definition of the strong guarantee in outcomes,

$$f(x, y) \geq f[x] \forall x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m,$$

we finally arrive in (11). □

Steps III-IV (construction of the Pareto-maximal alternative x^P in the problem Γ_2 (5) and calculation of $f[x^P]$).

As it has been established (see Proposition (5)), in the linear-quadratic problem Γ_{lq} with

$$A < 0, m = n, \det B \neq 0, \quad (12)$$

the strong guarantee in risks is $R_f[x] = 0$ for all $x \in \mathbf{R}^n$. Hence, this is also the case for the Pareto-maximal alternative x^P in the problem Γ_3 (8). Therefore, the Pareto-maximal alternative in the linear-quadratic problem Γ_{lq} with the matrices (12) and $C < 0$ can be reduced to the maximization of $f[x]$, i. e.

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} f[x] = f[x^P]. \quad (13)$$

Proposition 7. In the linear-quadratic problem Γ_{lq} with

$$A < 0, C > 0, m = n, \det B \neq 0$$

the Pareto-maximal strongly-guaranteed solution is given by

$$x^P = -[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) \quad (14)$$

$$f[x^P] = -(a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c. \quad (15)$$

Proof. The alternative x^P defined by (13) exists under the sufficient conditions

$$\left. \frac{\partial f[x]}{\partial x} \right|_{x=x^P} = 2[A - BC^{-1}B']x^P + 2(a - BC^{-1}c) = 0_n, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f[x]}{\partial x^2} \right|_{x=x^P} = 2[A - BC^{-1}B']^{-1} < 0. \quad (17)$$

Note that (17) is satisfied due to Lemma (4) and $A < 0, C > 0$. In view of $A - BC^{-1}B' < 0$, equality (16) implies

$$x^P = -[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c).$$

Substituting this alternative x^P into (11) gives

$$\begin{aligned} f[x^P] &= (a' - c'C^{-1}B') [A - BC^{-1}B']^{-1} [A - BC^{-1}B'] \cdot [A - BC^{-1}B']^{-1} \\ &\quad \times (a - BC^{-1}c) - 2(a' - c'C^{-1}B') [A - BC^{-1}B']^{-1} (a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c \\ &= - (a' - c'C^{-1}B') [A - BC^{-1}B']^{-1} (a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c. \end{aligned}$$

□

Remark 10. Thus, the following result has been obtained for the class of linear-quadratic SCPUs Γ_{lq} : if the criterion in the linear-quadratic problem

$$\Gamma_{lq} = \langle \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d \rangle$$

satisfies the conditions $A < 0, C > 0$, and $\det B \neq 0$, then the triplet $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$, where

$$\begin{aligned} x^P &= - [A - BC^{-1}B']^{-1} (a - BC^{-1}c) \\ f[x^P] &= - (a' - c'C^{-1}B') [A - BC^{-1}B']^{-1} (a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c \end{aligned} \quad (18)$$

and

$$R_f[x^P] = 0$$

is the Pareto-maximal strongly-guaranteed solution of Γ_{lq} .

This result has the following interpretation in terms of game theory: choosing the alternative x^P (18) in the linear-quadratic SCPU Γ_{lq} , the DM obtains the strongly-guaranteed outcome $f[x^P]$ (18) with the (minimum possible) zero risk $R_f[x^P] = 0$ (i. e., surely!). Note that by Lemma (4) a considerable part of this outcome is

$$- (a' - c'C^{-1}B') [A - BC^{-1}B']^{-1} (a - BC^{-1}c) > 0.$$

CONCLUSIONS

The simplest conflict under uncertainty is “the game with nature”, where a person (player) has to choose an optimal action (strategy) for a given criterion (e. g., profit). Moreover, each action is accompanied by incomplete or inaccurate information (uncertainty) about the results (outcome) of such an action.

This raises the question of risk associated with the resultants. Here an area of intensive research is focused on a special type of uncertainties (interval), for which the only available information is the ranges of their admissible values, without any probabilistic characteristics. An example of such uncertainties is the diversification problem of a deposit into sub-deposits in different currencies [29].

In Russia, interval uncertainties were called “bad uncertainties” due to the unpredictability of their realizations [34–36]. The effect of such uncertainties can be assessed using the Savage–Niehans function for a particular alternative or strategy is a measure of risk.

In this article a solution of the single-criterion choice problem under uncertainty (SCPU) that takes into account, first, the effect of such uncertainties and, second, the DM’s desire to increase the outcome and simultaneously reduce the associated risk has been presented. More specifically, the concept of a strong guarantee from [10, 11] has been adopted for introducing a new approach that considers all the three factors of decision-making (uncertainty, outcome, and risk). This approach has been reduced to the construction of the game of guarantees, which contains no uncertainties. For the game of guarantees, a corresponding bi-criteria optimization problem has been designed and solved. In the future, a different approach based on vector guarantees [10, 11] can be used. For a fairly general class of linear-quadratic SCPUs, the new approach proposed above has anyway yielded an explicit form of the strongly-guaranteed solution in outcomes and risks in which the guaranteed risk (and hence any Savage–Niehans risk) is 0.

REFERENCES

1. Жуковский, В. И. Конфликты и риски. — М.: ЗосЗИТЛПИ, 2007. — 54 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2007) *Conflicts and Risks*. Moscow: Ross. Zaochn. Inst. Tekstil. Legk. Promysh.
2. Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Нэшу. — М.: URSS, 2010. — 65 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2010) *Introduction to Differential Games under Uncertainty. Nash Equilibrium*. Moscow: URSS.
3. Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз. — М.: URSS, 2010. — 70 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2010) *Introduction to Differential Games under Uncertainty. Equilibrium in Threats and Counter-Threats*. Moscow: URSS.
4. Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие Берга-Вайсмана. — М.: URSS, 2010. — 140 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2010) *Introduction to Differential Games under Uncertainty. Berge-Vaisman Equilibrium*. Moscow: URSS.

5. Жуковский, В. И. Риски при конфликтных ситуациях. — М.: УРСС, ЛЕНАНД, 2011. — 78 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2011) *Risks in Conflict Situations*. Moscow: URSS, LENAND.
6. Черемных, Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: Инфо-М, 2008. — 60 с.
CHEREMNYKH, Y. N. (2008) *Microeconomics: Advance Level*. Moscow: Info-M.
7. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Смирнова, Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: URSS, 2013. — 78 с.
ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. & SMIRNOVA, L. V. (2013) *Guaranteed Solutions of Conflicts and Applications*. Moscow: URSS.
8. ZHUKOVSKIY, V. I. & KUDRYAVTSEV, K. N. (2017) Mathematical Foundations of the Golden Rule. I. Static Case. *Automation and Remote Control*. 78 (10). Pp. 1920–1940.
9. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. — М.: URSS, 2012. — 278 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. & KUDRYAVTSEV, K. N. (2012) *Equilibrating Conflicts and Applications*. Moscow: URSS.
10. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 27–44.
ZHUKOVSKIY, V. I. & KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. I. Analog of a Saddle-Point. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (1). Pp. 27–44.
11. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2013. — Т. 5. — С. 3–45.
ZHUKOVSKIY, V. I. & KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. II. Analog of a Maximin. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (2). Pp. 3–45.
12. MARKOVITZ, H. M. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 7 (1). Pp. 77–89.
13. SIRAZETDINOV, T. K. & SIRAZETDINOV, R. T. (2007) The Problem of Risk and Its Modeling. *Problema Chelovecheskogo Riska*. 1. Pp. 31–43.
14. Шахов, В. В. Введение в страхование. Экономический аспект. — М.: Финансы и статистика, 1994. — 52 с.

- SHAKHOV, V. V. (1994) *Introduction to Insurance. Economic Aspect*. Moscow: Finansi i Statistika.
15. Цветкова, Е. В., Арлюкова, И. О. Риски в экономической деятельности. — Санкт-Петербург: СПбИВЭСЭП, 2002. — 76 с.
TSVETKOVA, E. V. & ARLYUKOVA, I. O. (2002) *Risks in Economic Activity*. St.-Peterburg: Inst. Vneshneekon. Svyav. Ekon. Prav.
16. WALD, A. (1939) Contribution to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypothesis. *Annals Math. Statist.* 10. Pp. 299–326.
17. WALD, A. (1950) *A Statistical Decision Functions*. N.Y.: Wiley.
18. NIEHANS, J. (1951) Zur Preisbildung bei Unterwissen. *Schweizerische Zeitschrift Association.* 46 (3). Pp. 55–67.
19. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of Statistical Decision. *J. American Statistic Assosiation.* 46. Pp. 55–67.
20. VATEL', I. A. & ERESHKO, F. I. (1979) A Game with a Hierarchical Structure. *Mathematical Encyclopedia.* 2. Pp. 477–481.
21. Гермейер, Ю. Б. Введение в исследование операций. — М.: Наука, 1971. — 34 с.
GERMEIER, Y. B. (1971) *Introduction to Operation Research*. Moscow: Nauka.
22. GERMEIER, Y. B. (1986) *Non-antagonistic Games*. Reidel.
23. Кукушкин, И. С., Морозов, В. В. Теория неантогонистических игр. — М.: Моск. Гос. Унив., 1984. — 60 с.
KUKUSHKIN, I. S. & MOROZOV, V. V. (1984) *Theory of Non-Antagonistic Games*. Moscow: Mosk. Gos. Univ.
24. Красовский, Н. Н., Субботин, А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1985. — 300 с.
KRASOVSKII, N. N. & SUBBOTIN, A. I. (1985) *Positional Differential Games*. Moscow: Nauka.
25. Красовский, Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 300 с.
KRASOVSKII, N. N. (1985) *Control of Dynamic System*. Moscow: Nauka.
26. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Горбатов, А. С. Равновесие по Бержу в модели олигополии Курно // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25. — С. 147–156.

- ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. & GORBATOV, A. S. (2015) The Berge Equilibrium in Cournot Oligopoly Model. *Vest. Udmurt. Univ. Ser. Math. Mech. Comp. Sci.* 25 (2). Pp. 147–156.
27. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1986. — 78 с.
MOROZOV, V. V., SUKHAREV, A. G. & FEDOROV, V. V. (1986) *Operations Research in Problems and Exercises*. Moscow: Vvysshaya Shkola.
28. Подиновский, В. В., Ногин, В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 100 с.
PODINOVSKII, V. V. & NOGIN, V. D. (2007) *Pareto Optimal Solutions of Multicriteria Problems*. Moscow: Fizmatlit.
29. ZHUKOVSKIY, V. I., MOLOSTVOV, V. S. & TOPCHISHVILI, A. L. (2014) Problem of Multicurrency Deposit Diversification — Three Possible Approaches to Risk Accounting. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. 20 (1). Pp. 1–14.
30. PARETO, V. (1909) *Manuel d'economie politique*. Paris: Geard.
31. ZHUKOVSKIY, V. I. & SALUKVADZE, M. E. (1994) *The vector-valued maximin*. N.Y. etc: Academic Press.
32. ARROW, K. J., HURWICZ, L. & UZAWA, H. (1958) *Studies in Linear and Non-linear programming*. Stanford Univ. Press.
33. Воеводин, В. В., Кузнецов, В. Д. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 89 с.
VOEVODIN, V. V. & KUZNETSOV, Y. A. (1984) *Matrices and Calculations*. Moscow: Nauka.
34. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 10 с.
VASIL'EV, F. P. (2002) *Optimization Methods*. Moscow: Faktorial Press.
35. Венцель, Е. С. Исследование операций. — М.: Знание, 1976. — 50 с.
WENTZEL, E. S. (1976) *Operations Research*. Moscow: Znanie.
36. Венцель, Е. С. Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964. — 10 с.
WENTZEL, E. S. (1964) *Elements of Dynamic Programming*. Moscow: Nauka.

УДК: 519.833.2

MSC2010: 91A10

SYNTHESIS OF EQUILIBRIUM

© V. I. Zhukovskiy¹, L. V. Zhukovskaya², L. V. Smirnova³

¹MOSCOW STATE UNIVERSITY NAMED AFTER LOMONOSOV
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

²FEDERAL STATE BUDGETARY INSTITUTION OF SCIENCE CENTRAL ECONOMIC AND
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES (CEMI RAS)
NAKHIMOVSKII PROSP., 47, MOSCOW, 117418, RUSSIA
E-MAIL: zhukovskaylv@mail.ru

³STATE UNIVERSITY OF HUMANITIES AND TECHNOLOGY
ZELENAYA, 22, OREKHOVO-ZUEVO, 142611, RUSSIA
E-MAIL: smirnovalidiya@rambler.ru

SYNTHESIS OF EQUILIBRIUM.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V.

Abstract. For a noncooperative N -player normal-form game, we introduce the concept of hybrid equilibrium (HE) by combining the concepts of Nash and Berge equilibria and Pareto maximum. Some properties of hybrid equilibria are explored and their existence in mixed strategies is established under standard assumptions of mathematical game theory (convex and compact strategy sets and continuous payoff functions). Similar results are obtained for noncooperative N -player normal-form games under uncertainty.

Keywords: *uncertainty, mixed strategies, equilibrium, saddle point, Pareto optimality*

INTRODUCTION

In 1949 twenty-one years old Princeton University postgraduate J. F. Nash suggested and proved the existence of a solution [1, 2], which subsequently became known as Nash equilibrium (NE). Nash equilibrium has been widely used in economics, military science, policy and sociology. After 45 years, J. Nash together with R. Selten and J. Harsanyi were awarded the Nobel Prize in Economic Sciences “for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”. The point is that NE has stability against arbitrary unilateral deviations of a single player, which explains its success in economic and political applications [3, 4].

Almost every issue of modern journals on operations research, systems analysis, or game theory contains papers involving the concept of Nash equilibrium. However, there are spots on the sun: an obvious drawback of NE is its pronounced selfishness, as each player seeks *to increase his own payoff only*.

The antipode of NE is the concept of Berge equilibrium (BE): each player makes every effort to maximize the payoffs of the other players, neglecting his individual interests. BE was formalized in 1985 by Zhukovskiy [5] as a possible solution of noncooperative N -player games, after a critical analysis of C. Berge's book *Théorie générale des jeux à n personnes* [6] published in 1957 (which explains the term "Berge equilibrium"). In 1995, Russian mathematician K. Vaisman defended his Candidate of Sciences Dissertation entitled "Berge equilibrium" [7] at Department of Applied Mathematics and Control Processes (St. Petersburg State University) under the scientific supervision of Zhukovskiy. This dissertation and Vaisman's early papers [8, 9] attracted the attention of researchers, first in Russia and then abroad. As of today, the number of publications related to this equilibrium has exceeded three hundreds. BE is a good mathematical model for the Golden Rule of ethics ("Behave to others as you would like them to behave to you"). BE is famed for its altruism.

Obviously, these features—selfishness and altruism — are intrinsic (in some proportion) to any individual, including a conflicting party. However, it seems delusive to expect that such a combined solution exists in pure strategies. Therefore, again employing the approach of Borel [10], von Neumann [11], Nash [1] and their followers, we will establish the existence of a combined Nash-Berge equilibrium in mixed strategies. This solution is called a hybrid equilibrium (HE). The main goal of this paper is to prove the existence of HE in mixed strategies. Also note a negative property of NE [12] and BE [13]: the sets of both types of equilibria are internally unstable, i. e., there may exist two (NE or BE) profiles such that the payoff of each player in one of them is strictly greater than in the other. We will remove this undesirable negative feature by adding the Pareto maximality of HE with respect to all other equilibria. Thus, our formalization combines three properties, namely, a HE is

first, a Nash equilibrium;

second, a Berge equilibrium;

third, Pareto-maximal with respect to the other equilibria.

This paper proves the following result: if a noncooperative N -player normal-form game has bounded convex and closed strategy sets of players and continuous payoff functions, then there exists a HE in mixed strategies in this game.

In addition, we obtain sufficient conditions for the existence of HE that are reduced to calculation of a saddle point for a special Germeier convolution of payoff functions.

Finally, the derived results are extended to the case of noncooperative N -player normal-form games under strategic uncertainty. A proper consideration of uncertain factors yields more adequate models of real conflicts, which is testified by numerous publications in this field (recall the over 1 million research works with keywords “mathematical modeling under uncertainty” in Google Scholar).

1. FORMALIZATION OF HYBRID EQUILIBRIUM

Consider the mathematical model of a conflict as a noncooperative N -player normal-form game described by an ordered triplet

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Here $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ denotes the set of players ($N > 1$); each of N players chooses his *strategy* $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, thereby forming a *strategy profile*

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^n \quad (n = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i)$$

in this game; a *payoff function* $f_i(x)$ is defined on the set X , which gives the *payoff* of player i ($i \in \mathbb{N}$). At a conceptual level, each player i in the game Γ is looking for a strategy x_i that would *maximize* his payoff.

A natural approach is to define a solution of the game Γ using a pair

$$(x^*, f(x^*) = f_1(x^*), \dots, f_N(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^N,$$

where the strategies of a profile $x^* = (x_1^*, \dots, x_N^*) \in X_1 \times \dots \times X_N = X$ are determined by an optimality principle while the components of the vector $f(x^*)$ specify the corresponding payoffs of players under these strategies.

As noted by N. Vorobiev, the founder of the largest national scientific school on game theory, “... the practice of games shows that all the optimality principles developed so far directly or indirectly reflect the idea of a stable strategy profile that satisfies these principles...” [14, pp. 94]. To introduce the concept of hybrid equilibrium, we will adopt three optimality principles, namely, Nash equilibrium, Berge equilibrium (from the theory of noncooperative games) and Pareto maximum (PM, from the theory of multicriteria choice problems). Interestingly, each of these principles has its own *type of stability*: NE is stable against the unilateral deviations of any player i (i. e., the deviations of x_i from x_i^*); BE is stable against the deviations of all players except for one player i with the payoff function $f_i(x)$ (i. e., the deviations of $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$

from $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_N^*)$); finally PM is stable against the deviations of all players (i. e., the deviation of the whole current profile x from the optimal solution x^*). Using the standard notation $(x||z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ of noncooperative games, we introduce the following notions.

Definition 1. A strategy profile $x^e = (x_1^e, \dots, x_i^e, \dots, x_N^e) \in X$ is called a Nash equilibrium in the game Γ if

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x^e || x_i) = f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (1)$$

Definition 2. A strategy profile $x^B = (x_1^B, \dots, x_i^B, \dots, x_N^B) \in X$ is called a Berge equilibrium in the game Γ if

$$\max_{x \in X} f_i(x || x_i^B) = f_i(x^B) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Let us associate with the game Γ the N -criteria choice problem

$$\Gamma_c = \langle X, f(x) \rangle,$$

where the set of alternatives X coincides with the set of strategy profiles X in the game Γ and the vector criterion has the form $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$, consisting of the payoff functions $f_i(x)$ of all players $i \in \mathbb{N}$ in the game Γ .

Definition 3. An alternative (here a strategy profile $x \in X$) is Slater (Pareto)-maximal in the problem Γ_c if, for all $x \in X$, the system of inequalities $f_i(x) > f_i(x^*)$ ($i \in \mathbb{N}$) ($f_i(x) \geq f_i(x^P)$ ($i \in \mathbb{N}$), respectively), with at least one strict inequality, is inconsistent.

Corollary 1. *The following sufficient condition of Pareto maximality is obvious: if*

$$\max_{x \in X} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x^*) \quad \forall x \in X, \quad (3)$$

then the strategy profile x^ is Pareto-maximal in the problem Γ_c .*

Now, we introduce the central concept.

Definition 4. A pair $(x^*, f(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^N$ is called a Pareto hybrid equilibrium (PHE) in the game Γ if the strategy profile x^* is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in this game, and also a Pareto-maximal alternative in the multicriteria choice problem Γ_c , i. e., the PHE x^* satisfies the following three conditions:

$$\begin{aligned} \max_{x_i \in X_i} f_i(x^* || x_i) &= f_i(x^*) \quad (i \in \mathbb{N}), \\ \max_{x \in X} f_i(x || x_i^*) &= f_i(x^*) \quad (i \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (4)$$

x^* is Pareto-maximal in Γ_c .

Remark 1. By Corollary 1, a strategy profile x^* is a PHE in the game Γ if it simultaneously satisfies the three optimality conditions (1)-(3).

Remark 2. By analogy with Definition 4, we may easily introduce the concept of Slater hybrid equilibrium (SHE), by simply replacing the Pareto maximality of x^* with its Slater maximality in the problem Γ_c .

2. PROPERTIES OF HYBRID EQUILIBRIA

Hereinafter, $\text{cocomp } \mathbb{R}^n$ stands for the set of convex and compact subsets of \mathbb{R}^n and we write $\phi(\cdot) \in C(X)$ if $\phi(\cdot)$ is a continuous scalar function defined on X .

In this section, the game Γ is assumed to satisfy the conditions

$$X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}, \quad f_i(\cdot) \in C(X) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (5)$$

Property 1. *Under conditions (5), any PHE in the game Γ is simultaneously a SHE; the set of all SHE is compact in $X \times \mathbb{R}^N$ (possibly, empty).*

Property 1 directly follows from the fact that a Pareto-maximal alternative in the choice problem Γ_c is also Slater-maximal (in general, the converse is not true), while the set of Slater-maximal alternatives X^S in Γ_c is nonempty and compact in X [15, pp. 142].

The sets of Nash and Berge equilibria, X^e and X^B , in the game Γ are also compact in X (perhaps, empty) if assumptions (5) hold. In this case, the intersection of the three compact sets $X^S \cap X^e \cap X^B = X^*$ is also a compact set in X (again, it may be empty). The compactness of $f(X^*) = \{f(x) | x \in X^*\}$ is an immediate consequence of the continuity of the payoff functions $f_i(x)$ on X ($i \in \mathbb{N}$).

Note that, generally speaking, the set of PHE can be noncompact due to the noncompactness of the set of all Pareto-maximal alternatives X^P in the choice problem Γ_c . Also keep in mind the inclusion $f(X^P) \subseteq f(X^S)$.

Property 2. *Under assumptions (5), the PHE x^* satisfies the individual rationality condition, i. e.,*

$$\begin{aligned} f_i(x^*) &\geq \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} \in X_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}} f_i(x_i, x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}) = \\ &= \min_{x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} \in X_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}} f_i(x_i^0, x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}) = f_i^0 \quad (i \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (6)$$

where $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = (x_i, x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}})$, $x_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$ and $X_{\mathbb{N} \setminus \{i\}} = \prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} X_j$ ($\mathbb{N} \setminus \{i\} = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N$).

Indeed, each Nash equilibrium x^* in the game Γ has property (6) (individual rationality), i. e., $f_i(x^*) \geq f_i^0$ ($i \in \mathbb{N}$), where x_i^0 and f_i^0 are the maximin strategy and the payoff of player i , respectively.

Remark 3. As illustrated by Vaisman’s counter-example [56, pp. 68–69], individual rationality generally fails for a Berge equilibrium x^B in the game Γ .

Property 3. *A PHE x^* is collectively rational in a cooperative N -player game without side payments. This is a consequence of the Pareto maximality of the alternative x^* in the choice problem Γ_c .*

Remark 4. Individual rationality imposes certain requirements to alliances (coalitions) with other players: player i joins a coalition only if his payoff guaranteed by the coalition is not smaller than the maximin value f_i^0 , which can be achieved by this player independently using the maximin strategy x_i^0 .

Collective rationality drives all players to the largest payoffs (in the vector sense!) — the Pareto maxima.

As x^* is a Nash equilibrium, each player seeks to maximize his payoff.

Berge equilibrium matches an altruistic aspiration of each player to maximize the payoffs of all other players.

Let us note that, the first two requirements (individual and collective rationality) are among the standard criteria of “good” solutions for cooperative N -player games without side payments. At the same time, the properties brought by the Nash and Berge equilibria are new for such games, which (we believe) makes the novel concept of PHE an efficient, “good” solution for the game Γ .

To formulate sufficient conditions for the existence of PHE in the game Γ , we will ensure Pareto maximality in terms of Definition 3 by satisfying equality (3). The sufficient conditions will be based on the original approach from [16]. Let us introduce an N -dimensional vector $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$ and the Germeier convolution [17, 18] of the form

$$\begin{aligned}
 \phi_i(x, z) &= f_i(z||x_i) - f_i(z) & (i \in \mathbb{N}), \\
 \phi_{i+N}(x, z) &= f_i(x||z_i) - f_i(z) & (i \in \mathbb{N}), \\
 \phi_{2N+1}(x, z) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) - \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(z), \\
 \psi(x, z) &= \max_{r=1, \dots, 2N+1} \phi_r(x, z).
 \end{aligned} \tag{7}$$

A saddle point $(x^0, z^*) \in X \times X$ of the scalar function $\psi(x, z)$ (7) is given by the chain of inequalities

$$\psi(x, z^*) \leq \psi(x^0, z^*) \leq \psi(x^0, z) \quad \forall x \in X, z \in X. \quad (8)$$

Theorem 1. *If (x^0, z^*) is a saddle point of the function $\phi(x, y)$ (8) in the zero-sum two-player game*

$$\Gamma_a = \langle X, Z = X, \psi(x, z) \rangle,$$

then the maximin strategy $z^ \in X$ is a PHE of the game Γ .*

Proof. Indeed, formula (7) with $z = x^0$ gives $\psi(x^0, x^0) = 0$. Then, by transitivity,

$$\psi(x, z^*) \leq 0 \quad \forall x \in X.$$

Using the fact that $\max_{r=1, \dots, 2N+1} \phi_r(x, z^*) \leq 0 \quad \forall x \in X$ and (7), we arrive at a set of $2N + 1$ inequalities of the form

$$\begin{aligned} f_i(z^* || x_i) &\leq f_i(z^*) & \forall x_i \in X_i \ (i \in \mathbb{N}), \\ f_i(x || z_i^*) &\leq f_i(z^*) & \forall x \in X \ (i \in \mathbb{N}), \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(z^*) & \forall x \in X. \end{aligned}$$

Here the first N inequalities make $z^* \in X$ a Nash equilibrium in the game Γ (see (1)); the second group of inequalities ensures that z^* is a Berge equilibrium as dictated by (2); finally, the last, $(2N + 1)$ th inequality means that z^* is a Pareto-maximal alternative in the choice problem Γ_c . \square

Remark 5. By Theorem 1, the construction of a PHE reduces to the calculation of a saddle point (x^0, z^*) for the Germeier convolution $\psi(x, z)$ (7). Thus, we have developed a *constructive method* of PHE design in the game Γ , which consists of the following steps:

- first*, define the scalar function $\psi(x, z)$ using formulas (7);
- second*, find a saddle point (x^0, z^*) of the function $\psi(x, z)$ (see the chain of inequalities (8));
- third*, calculate the values $f_i(z^*)$ ($i \in \mathbb{N}$).

Then the pair $(z^*, f(z^*) = (f_1(z^*), \dots, f_N(z^*)))$ is a PHE in the game Γ : each player $i \in \mathbb{N}$ should apply his strategy from the profile z^* , thereby obtaining the payoff $f_i(z^*)$.

Remark 6. The whole complexity of constructing a PHE in the game Γ lies in calculation of the saddle point (x^0, z^*) (8) for the Germeier convolution

$\psi(x, z) = \max_{r=1, \dots, 2N+1} \phi_r(x, z)$ (7). The reason is that the maximization of a finite number of functions $\phi_r(x, z)$ ($r = 1, \dots, 2N + 1$) spoils the differentiability and concavity (or convexity) of the functions $\phi_r(x, z)$, despite the fact that it preserves the continuity of this function on the product $X \times Z$ of the compact sets X and Z . Here we face a situation well described by C. Hermite: “I turn with terror and horror from this lamentable scourge of continuous functions with no derivatives”. Thus, it is necessary to develop numerical calculation methods for the saddle point (x^0, z^*) of the Germeier convolution $\max_{r=1, \dots, 2N+1} \phi_r(x, z)$. Unfortunately, to this date we were not able to find any literature devoted to this field of research. In particular, the saddle point calculation problem was not solved at the International Conference on Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017, St. Petersburg, May 22–27, 2017) dedicated to the Memory of Professor V. Demyanov.

One must be a rather optimistic person to look for a game Γ (especially with an explicit form of the payoff function) in which a PHE in pure strategies $x_i^* \in X_i$ ($i \in \mathbb{N}$) exists (by Definition 4, the desired strategy profile x^* must be simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in the game Γ and also a Pareto-maximal alternative in the corresponding choice problem). Thus, employing the approach of Borel [10], von Neumann [11], Nash [1] and their followers, we will extend the set X_i of pure strategies x_i to a set of mixed strategies. Then we will establish the existence of appropriately formalized mixed strategy profiles in the game Γ that satisfy the three requirements of hybrid equilibrium.

As before, $\text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}$ stands for the set of all convex and compact (closed and bounded) subsets of the Euclidean n_i -dimensional space \mathbb{R}^{n_i} while $f_i(\cdot) \in C(X)$ means that the scalar function $f_i(x)$ is continuous on X .

Consider again the noncooperative N -player game Γ without side payments. Without special mention, assume that the elements of the ordered triplet Γ satisfy requirements (5), i. e.,

$$X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}, \quad f_i(\cdot) \in C(X) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

For each compact set $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), consider the Borel σ -algebra $\mathfrak{B}(X_i)$. Further, consider the Borel σ -algebra $\mathfrak{B}(X)$ for the set $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ of all strategy profiles, such that $\mathfrak{B}(X)$ contains all Cartesian products of elements from the Borel σ -algebras $\mathfrak{B}(X_i)$ ($i \in \mathbb{N}$).

Within the framework of mathematical game theory, a mixed strategy $\nu_i(\cdot)$ of player i is identified with a *probability measure on the compact set* X_i . By definition [19, p. 271],

in the notations of [20, p. 284] a probability measure is a *nonnegative* scalar function $\nu_i(\cdot)$ defined on the Borel σ -algebra $\mathfrak{B}(X_i)$ that satisfies the following two conditions:

1. $\nu_i\left(\bigcup_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ for any sequence $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ of pairwise disjoint elements from $\mathfrak{B}(X_i)$ (*countable additivity*);
2. $\nu_i(X_i) = 1$ (normalization), which implies $\nu_i(Q^{(i)}) \leq 1$ for all $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$.

Denote by $\{\nu_i\}$ the set of all mixed strategies of player i ($i \in \mathbb{N}$).

The product measures $\nu(dx) = \nu_1(dx_1) \cdots \nu_N(dx_N)$, treated in the sense of the well-known definitions from [19, p. 370] (and in the notations of [20, p. 123]), are probability measures on the strategy profile set X . Let $\{\nu\}$ be the set of such probability measures (strategy profiles). Once again, we emphasize that in the construction of the product measure $\nu(dx)$, the role of the σ -algebra of all subsets of the set $X_1 \times \cdots \times X_N = X$ is played by the *smallest* σ -algebra $\mathfrak{B}(X)$ that contains all Cartesian products $Q^{(1)} \times \cdots \times Q^{(N)}$, where $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$ ($i \in \mathbb{N}$). The wellknown properties of probability measures [19, p. 254] imply that the sets of all possible measures $\nu_i(dx_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) and $\nu(dx)$ are *weakly closed and weakly compact* (see [19, pp. 212, 254]). As applied, e. g., to $\{\nu\}$, this means that from any infinite sequence $\{\nu^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) one can extract a subsequence $\{\nu^{(k_j)}\}$ ($j = 1, 2, \dots$) which *weakly converges* to a measure $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. In other words, for any continuous scalar function $\psi(x)$ on X ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \psi(x) \nu^{(k_j)}(dx) = \int_X \psi(x) \nu^{(0)}(dx)$$

and $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. Due to the continuity of $\psi(x)$, the $\int_X \psi(x) \nu(dx)$ (the expectations) are well defined; by Fubini's theorem,

$$\int_X \phi(x) \nu(dx) = \int_{X_1} \cdots \int_{X_N} \phi(x) \nu_N(dx_N) \cdots \nu_1(dx_1),$$

and the order of integration can be interchanged.

Let us associate with the game Γ in pure strategies its *mixed extension*

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{\nu_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[\nu] = \int_X f[x] \nu(dx)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \quad (9)$$

where, like in Γ , \mathbb{N} is the set of players while $\{\nu_i\}$ is the set of mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ of player i ; in game (9), each conflicting party $i \in \mathbb{N}$ chooses its mixed strategy $\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$, thereby forming a mixed strategy profile $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; the payoff function of each player i ,

i. e., the expectation

$$f_i[\nu] = \int_X f_i[x]\nu(dx),$$

is defined on the set $\{\nu\}$.

For game (9), the notion of a PHE x^* (see Definition 4) has the following analog.

Definition 5. A mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a hybrid equilibrium (HE) in the mixed extension (9) (equivalently, a hybrid equilibrium in mixed strategies in the game Γ) if

1. $\nu^*(\cdot)$ is a Nash equilibrium in the game $\tilde{\Gamma}$, i. e.,

$$\max_{\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}} f_i(\nu^* || \nu_i) = f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbb{N}); \quad (10)$$

2. $\nu^*(\cdot)$ is a Berge equilibrium in game (9), i. e.,

$$\max_{\nu_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}(\cdot) \in \{\nu_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}\}} f_i(\nu || \nu_i^*) = f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbb{N}); \quad (11)$$

3. $\nu^*(\cdot)$ is a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice problem

$$\tilde{\Gamma}_c = \langle \{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

i. e., for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, the system of inequalities

$$f_i(\nu) \geq f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Here and in the sequel,

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}(dx_{\mathbb{N} \setminus \{i\}}) &= \nu_1(dx_1) \cdots \nu_{i-1}(dx_{i-1}) \nu_{i+1}(dx_{i+1}) \cdots \nu_N(dx_N), \\ (\nu || \nu_i^*) &= \nu_1(dx_1) \cdots \nu_{i-1}(dx_{i-1}) \nu_i^*(dx_i) \nu_{i+1}(dx_{i+1}) \cdots \nu_N(dx_N), \\ \nu^*(dx) &= \nu_1^*(dx_1) \cdots \nu_N^*(dx_N); \end{aligned}$$

in addition, denote by $\{\nu^*\}$ the set of hybrid equilibria $\nu^*(\cdot)$, i. e., the set of strategy profiles that satisfy the three requirements of Definition 5.

Let us state several results used below for proving the existence of HE in mixed strategies. The following sufficient condition of Pareto maximality is obvious.

Proposition 1. A mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is a Pareto-maximal alternative in the choice problem $\Gamma_c = \langle \{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ if

$$\max_{\nu(\cdot) \in \{\nu\}} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\nu) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\nu^*). \quad (12)$$

Proposition 2. Consider the game Γ under conditions (5), i. e., the sets X_i are convex and compact and the payoff functions $f_i(x)$ are continuous on $X = X_1 \times \cdots \times X_N$. Let

$\{\nu^e\}$ be the set of Nash equilibria $\nu^e(\cdot)$ that satisfy (10) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^e(\cdot)$;

$\{\nu^B\}$ be the set of Berge equilibria $\nu^B(\cdot)$ that satisfy (11) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^B(\cdot)$;

$\{\nu^P\}$ be the set of alternatives $\nu^P(\cdot)$ that satisfy (12) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^P(\cdot)$ (i. e., ν^P is a Pareto-maximal alternative in mixed strategies in the N -criteria choice problem $\langle \{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$).

Then the set $\{\nu^*\}$ of hybrid equilibria $\nu^*(\cdot)$ in the mixed extension $\tilde{\Gamma}$ of the game Γ is a weakly compact subset of the set of mixed strategy profiles $\{\nu\}$ in the game $\Gamma\{\nu^*\}$ (may be empty).

Proof. Under conditions (5), we have $\{\nu^e\} \neq \emptyset$ as shown by Glikberg's theorem [30]. Next, the fact $\{\nu^B\} \neq \emptyset$ has been established in [13]. The non-emptiness of the set of Pareto-maximal alternatives, $\{\nu^P\} \neq \emptyset$, can be proved in analogous manner. The intersection of a finite number of weakly compact sets (in our case, three) is also weakly compact, possibly empty. \square

Corollary 2. Under conditions (5), the set

$$f(\{\nu^*\}) = \bigcup_{\nu(\cdot) \in \{\nu^*\}} f(\nu), \quad f = (f_1, \dots, f_N),$$

is compact (bounded and closed) in the N -dimensional Euclidean criterion space \mathbb{R}^N .

Theorem 2 below establishes the implication (5) \Rightarrow $\{\nu^*\} \neq \emptyset$, which is the central result of Sect. 2.

Proposition 3. Consider game (9) under conditions (5). Then the function $\phi_r(x, z)$ in the formula

$$\psi(x, z) = \max_{r=1, \dots, 2N, 2N+1} \phi_r(x, z) \quad (13)$$

satisfies the inequality

$$\max_{r=1, \dots, 2N, 2N+1} \int_{X \times X} \phi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 2N, 2N+1} \phi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \quad (14)$$

for any $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, where

$$\begin{aligned} \phi_i(x, z) &= f_i(x|z_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}), \\ \phi_j(x, z) &= f_j(z|x_i) - f_j(z) \quad (j \in \{N+1, \dots, 2N\}), \\ \phi_{2N+1}(x, z) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} [f_i(x) - f_i(z)]. \end{aligned} \quad (15)$$

This proposition was proved in [12].

Remark 7. In fact, formula (14) generalizes the well-known property of maximization: the maximum of a sum does not exceed the sum of the maxima.

Let us state an interesting fact from operations research, which plays a crucial role in the proof of Theorem 2. Consider $2N + 1$ scalar functions $\phi_r(x, z)$ ($r = 1, \dots, 2N, 2N + 1$), where $z = (z_1, \dots, z_N) \in Z = X$ and $\phi_j(x, z)$ ($j = 1, \dots, 2N + 1$) are defined by (15).

Proposition 4. If $2N + 1$ scalar functions $\phi_j(x, z)$ ($j = 1, \dots, 2N + 1$) are continuous on the product $X \times (Z = X)$ of compact sets, then the function

$$\psi(x, z) = \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z)$$

is also continuous on $X \times Z$.

The proof of a more general result can be found in many textbooks on operations research, e. g., [21].

Finally, let us establish the central result of Sect. 2 — the existence of a hybrid equilibrium (HE) in mixed strategies under conditions (5).

Theorem 2. *If in the game Γ the sets $X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}$ and $f_i(\cdot) \in C(X)$ ($i \in \mathbb{N}$), then there exists a hybrid equilibrium in mixed strategies in this game.*

Proof. Consider an auxiliary zero-sum two-player game

$$\Gamma^a = \langle \{1, 2\}, \{X, Z = X\}, \psi(x, z) \rangle.$$

In the game Γ^a , the set X of strategies x chosen by player 1 (seeking to maximize $\psi(x, z)$) coincides with the set of strategy profiles of the game Γ ; the set Z of strategies z chosen by player 2 (seeking to minimize $\psi(x, z)$) coincides with X . A solution of the game Γ^a is a *saddle point* $(x^0, z^B) \in X \times X$; for all $x \in X$ and each $z \in X$, it satisfies the chain of inequalities

$$\psi(x, z^B) \leq \psi(x^0, z^B) \leq \psi(x^0, z).$$

□

Now, associate with the game Γ^a its mixed extension

$$\tilde{\Gamma}^a = \langle \{1, 2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \psi(\mu, \nu) \rangle,$$

where $\{\nu\}$ and $\{\mu\} = \{\nu\}$ denote the sets of mixed strategies $\nu(\cdot)$ and $\mu(\cdot)$ of players 1 and 2, respectively. The payoff function of player 1 is the expectation

$$\psi(\mu, \nu) = \int_{X \times X} \psi(x, z) \mu(dx) \nu(dz).$$

The solution of the game $\tilde{\Gamma}^a$ is also a saddle point (μ^0, ν^*) defined by the two inequalities

$$\psi(\mu, \nu^*) \leq \psi(\mu^0, \nu^*) \leq \psi(\mu^0, \nu), \quad (16)$$

for any $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Sometimes, the pair (μ^0, ν^*) is also called the *solution of the game Γ^a in mixed strategies*.

Applying Glikhsberg's [22] existence theorem of a mixed strategy Nash equilibrium for a noncooperative game of $N \geq 2$ players to the zero-sum two-player game Γ^a , we obtain the following result. In the game Γ^a , suppose the set $X \subset \mathbb{R}^n$ is nonempty, convex and compact and the payoff function $\psi(x, z)$ of player 1 is continuous on $X \times X$ (note that the continuity of $\psi(x, z)$ is assumed in Proposition 4). Then the game Γ^a has a solution (μ^0, ν^*) defined by (16), i. e., there exists a saddle point in mixed strategies in this game.

Using (13), inequalities (16) can be written as

$$\begin{aligned} & \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq \\ & \leq \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu^0(dx) \nu^*(dz) \leq \\ & \leq \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu^0(dx) \nu(dz) \end{aligned} \quad (17)$$

for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Using the measure $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) (and hence $\nu(dz) = \mu^0(dx)$) in the expression

$$\psi(\mu^0, \nu) = \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu^0(dx) \nu(dz),$$

we obtain $\psi(\mu^0, \mu^0) = 0$ due to (13). Similarly, $\psi(\nu^*, \nu^*) = 0$, and then it follows from (16)

that

$$\psi(\mu^0, \nu^*) = 0.$$

The condition $\psi(\mu^0, \mu^0) = 0$ and the chain of inequalities (16) by transitivity give

$$\psi(\mu, \nu^*) = \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

By Proposition 3, we then have

$$0 \geq \int_{X \times X} \max_{j=1, \dots, 2N+1} \phi_j(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \geq \max_{j=1, \dots, 2N+1} \int_{X \times X} \phi_j(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz).$$

Therefore, for all $j = 1, \dots, 2N + 1$,

$$\int_{X \times X} \phi_j(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}. \tag{18}$$

Consider three cases as follows.

Case I ($j = N, \dots, 2N$) Here, by (18), (15) and the normalization of $\mu(\cdot)$, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{X \times X} \phi_{N+i}(x, z) \mu^0(dx) \nu(dz) = \int_{X \times X} [f_i(z|x_i) - f_i(z)] \mu^0(dx) \nu(dz) = \\ &= \int_{X \times X} f_i(z|x_i) \mu^0(dx) \nu(dz) - \int_X f_i(z) \mu^0(dx) \int_X \nu(dz) = \\ &= f_i(\mu^0|\nu_i) - f_i(\mu^0) \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\} \quad (i \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

By (10), $\mu^0(\cdot)$ is a Nash equilibrium in the game $\tilde{\Gamma}$ (equivalently, a Nash equilibrium in mixed strategies in the game Γ).

Case II ($j = 1, \dots, N$) Again, using (18), (15) and the normalization of $\nu(\cdot)$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{X \times X} \phi_i(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) = \int_{X \times X} [f_i(x|z_i) - f_i(z)] \mu(dx) \nu^*(dz) = \\ &= \int_{X \times X_i} f_i(x|z_i) \mu(dx) \nu_i^*(dz) - \int_X f_i(z) \mu(dz) \int_X \nu^*(dz) = \\ &= f_i(\mu|\nu_i^*) - f_i(\nu^*) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\} \quad (i \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

In view of (11), the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is a Berge equilibrium in the game Γ , by Definition 5.

Case III ($j = 2N + 1$) Again, using (18), (15) and the normalization of $\nu(\cdot)$ and $\mu(\cdot)$, we have

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{X \times X} \left[\sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z) \right] \mu(dx) \nu^*(dz) = \\ &= \int_X \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) \mu(dx) \int_X \nu^*(dz) - \int_X \mu(dx) \int_X \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z) \nu^*(dz) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(\mu) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(\nu^*) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

By Proposition 1 and (12), the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ of the game Γ is a Pareto-maximal alternative in the multicriteria choice problem

$$\tilde{\Gamma}_c = \langle \{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Thus, we have proved that the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ in the game Γ is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium that satisfies Pareto maximality. Hence, by Definition 5, the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is a hybrid equilibrium in the game Γ .

3. HYBRID EQUILIBRIUM IN GAMES UNDER UNCERTAINTY

Let us augment the mathematical model of a conflict

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$$

by including the influence of uncertain factors $y \in Y$. Assume that these factors take arbitrary values from given ranges without any probability characteristics (e. g., the distribution of y on Y is absent for some reasons). Once again, we emphasize that a proper consideration of uncertainties gives a more adequate description of the decision-making process in economics, ecology, sociology, management, trade, policy, security, and so on. Uncertain factors occur due to incomplete (inaccurate) knowledge about the realizations of strategies chosen by conflicting parties. “There is no such uncertainty as a sure thing” (R. Burns)¹. For example, an economic system is subject to almost unpredictable *exogenous disturbances* (forces of nature, disruption of supplies, low qualification or incompetence of economic partners, counteractions of rivals) as well as *endogenous disturbances* (breakdown and failure of industrial equipment, unplanned additional cost and losses of materials, innovations suggested by employees, etc.). New technologies and also anthropogenic and weather changes may cause uncertainty in ecological systems; in mechanical systems, among the sources of uncertainty are weather conditions. “The only thing that makes life possible is permanent, intolerable uncertainty; not knowing what comes next (Ursula K. Le Guin)². Possible approaches to take the effect of uncertain factors into account were the subject of investigations [23, 24] initiated

¹Robert Burns, (1759–1796), was a national poet of Scotland, who wrote lyrics and songs in Scots and in English.

²Ursula K. Le Guin, original name Ursula Kroeber, (1929–2018), was an American writer best known for tales of science fiction and fantasy

in 2013, which resulted in the book [25]. In this paper, we will use elementary methods to deal with uncertainty.

Consider a noncooperative N -player normal form game under uncertainty

$$\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle. \quad (19)$$

Compared with the game Γ (which shares the first two components of its ordered triplet with game (19), namely, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ and the set X_i of pure strategies x_i of player i , $i \in \mathbb{N}$), in this game we have an additional set $Y \subset \mathbb{R}^m$ of uncertain factors y and payoff functions $f_i(x, y)$ that depend on y .

Game (19) runs as follows. Each player $i \in \mathbb{N}$ chooses his individual strategy $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), which gives a strategy profile $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = \prod_{j \in \mathbb{N}} X_j \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \sum_{j \in \mathbb{N}} n_j$) in this game. Regardless of their choice, an arbitrary uncertainty $y \in Y$ figures in (19). For each player i ($i \in \mathbb{N}$), a payoff function $f_i(x, y)$ is defined on all such pairs $(x, y) \in X \times Y$. At a conceptual level, each player i seeks to maximize his *payoff* $f_i(x, y)$ under any unpredictable realization of the uncertainty $y \in Y$. This last requirement calls for estimating the set

$$f_i(x, Y) = \bigcup_{y \in Y} f_i(x, y)$$

for each player i ($i \in \mathbb{N}$). In turn, for such a multivalued function $f_i(x, Y)$ ($i \in \mathbb{N}$), it is necessary to choose another function $f_i[x]$ that would act as a *guarantee* for any element $f_i(x, y)$ from the set $f_i(x, Y)$. As defined by the Merriam-Webster dictionary, **guarantee is an assurance for the fulfillment of a condition**. A most obvious guarantee for player i in game (19) is the so-called *strong guarantee* [23], provided by the scalar function

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y). \quad (20)$$

Indeed, it follows from (20) that, for each strategy profile $x \in X$,

$$f_i[x] \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

i. e., in each strategy profile $x \in X$ the value $f_i(x, y)$ is not smaller than the guarantee $f_i[x]$ under any realization of the uncertainty $y \in Y$.

Proposition 5. If a scalar function $F(x, y)$ is continuous on the product $X \times Y$ of convex and compact sets X and Y , then the function $f[x] = \min_{y \in Y} F(x, y)$ is continuous on X .

Therefore, all the N strong guarantees $f_i[x]$ (20) are continuous on X under the assumptions $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$ and $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$.

This approach allows us to associate with game (19) under uncertainty the game of guarantees (without uncertainty)

$$\Gamma^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle, \quad (21)$$

which coincides with the game from Sect. 1 provided that $f_i(x)$ is replaced by the strong guarantee $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$.

In contrast to (19), here the performance of each player i is assessed using the strong guarantee $f_i[x]$ instead of the payoff function $f_i(x, y)$ itself (this seems quite natural for considering arbitrary realizations $y \in Y$).

Then the following analog of Definition 4 can be suggested for the game under uncertainty (19) with the strong guarantees (20).

Definition 6. A pair $(x^P, f[x^P] = (f_1[x^P], \dots, f_N[x^P])) \in X \times \mathbb{R}^N$ is called a strongly-guaranteed Pareto hybrid equilibrium in game (19) if

1. the strong guarantees $f_i[x]$ (20) are continuous on X ;
2. the strategy profile x^P is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in the game of guarantees (21), i. e.,

$$\max_{x_i \in X_i} f_i[x^P || x_i] = f_i[x^P] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

and

$$\max_{x \in X} f_i[x || x_i^P] = f_i[x^P] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

respectively;

3. the strategy profile x^P is a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice problem $\langle X, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$.

Similarly to Definition 5, we introduce an analog of Definition 6 with a feature that the players use mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ ($i \in \mathbb{N}$) in game (19).

Definition 7. A mixed strategy profile $\nu^P(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a strongly-guaranteed Pareto hybrid equilibrium in mixed strategies in game (19) if

1. for each player i ($i \in \mathbb{N}$), there exists the strong guarantee

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$$

that is continuous on X ;

2. ν^P is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in game (9), i. e., equalities (10) and (11) hold with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^P(\cdot)$;

3. ν^P in game (9) is a Pareto-maximal alternative in the N -criteria choice Problem $\tilde{\Gamma}_c = \langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$.

Finally, the combination of Proposition 5 and Theorem 1 directly leads to the following result on the existence of a strongly-guaranteed Pareto hybrid equilibrium in mixed strategies.

Theorem 3. *Consider game (19) with convex and compact sets X_i ($i \in \mathbb{N}$), compact set Y , and payoff functions $f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) continuous on $X \times Y$. Then there exists a strongly-guaranteed Pareto hybrid equilibrium in mixed strategies in this game.*

Remark 8. Our analysis in Sect. 3 has been confined to the strong guarantees $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ ($i \in \mathbb{N}$) as the smallest ones. It is possible to adopt the so-called vector guarantees: the components of an N -dimensional vector $f[x] = (f_1[x], \dots, f_N[x])$ form a vector guarantee for an N -dimensional vector $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_N(x, y))$ if, for all $y \in Y$ and each $x \in X$, the N strict inequalities

$$f_i(x, y) < f_i[x] \quad (i \in \mathbb{N})$$

are inconsistent. In other words, the vector guarantee $f[x]$ cannot be reduced simultaneously in all the components by choosing $y \in Y$. In terms of vector optimization, for each alternative $x \in X$ the vector $f[x]$ is a Slater minimum (weakly efficient) solution in the N -criteria choice problem $\Gamma(x) = \langle Y, f(x, y) \rangle$.

In the same fashion, using other concepts of vector optima (minima in the sense of Pareto, Geoffrion, Borwein, cone optimality), we may introduce a whole collection of vector guarantees. These guarantees have the remarkable property that their values, first, are not smaller than the corresponding components of the strong guarantee vector $f[x]$ (20) but, second, can be large. Recall that the goal is to increase the payoffs of players (in particular, by increasing their guarantees!). In this respect, the listed vector guarantees are preferable to their strong counterparts. However, one should keep in mind an important aspect: transition from the game under uncertainty (19) to the game of guarantees Γ^g (with subsequent application of Theorem 1) is possible only if the new payoff functions $f_i[x]$ ($i \in \mathbb{N}$) in the game Γ^g are continuous. This continuity can be ensured in the following way.

Let $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$, $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$ and $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$ ($i \in \mathbb{N}$) in game (19). In addition, require that for each $x \in X$ at least one $f_j(x, y)$ ($j \in \mathbb{N}$) is *strictly convex* in y on the set Y . Then the minimum in

$$\min_{y \in Y} f_j(x, y) = f_j[x] \quad (22)$$

is achieved at a unique point $y^*(x)$ for each $x \in X$, and the m -dimensional vector function $y^*(x)$ itself is continuous on X . In this case, the superposition of the continuous functions $f_i(x, y)$ and $y^*(x)$ implies the continuity of all scalar functions $f_i[x] = f_i(x, y^*(x))$ ($i \in \mathbb{N}$). We finalize the design of Γ^g with the following fact. Assume for each $x \in X$ the same function $f_j[x]$ is implemented by the minimum in (22). Then for all $x \in X$ the N -dimensional vector $f[x] = (f_1[x], \dots, f_N[x])$ is a Slater-minimal alternative in the current N -criteria choice problem $\Gamma(x) = \langle Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle$. In other words, it is impossible to find $\bar{y} \in Y$ such that $f_i(x, \bar{y}) < f_i[x]$ ($i \in \mathbb{N}$). A detailed treatment of these issues for Slater, Pareto, Geoffrion, Borwein, and cone optimality will be given in our future publications.

REFERENCES

1. NASH, J. F. (1951) Non-Cooperative Games. *Annales of Mathematics*. 54 (2). Pp. 286–295.
2. NASH, J. F. (1950) Equilibrium Points in N-Person Games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 36 (1). Pp. 48–49.
3. BASAR, T. and OLSDER, G. J. (1982) *Dynamic Noncooperative Game Theory*. London: Academic Press.
4. BELLMAN, R. (1956) On the Application of Dynamic Programming to Variational Problems Arising in Mathematical Economics. *Proc. Symposium in Calculus of Variations and Applications, New York: McGraw-Hill*. 184. Pp. 115–138.
5. ZHUKOVSKIY, V. I. (1985) Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Math. Methods in Operations Research, Institute of Mathematics with Union of Bulgarian Mathematicians, Rouse*. Pp. 103–195.
6. BERGE, C. (1957) *Théorie générale des jeux a n personnes*. Paris: Gauthier-Villar.
7. VAISMAN, K. (1995) *Berge Equilibrium, Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*. St. Petersburg: St. Petersburg. Gos. Univ.
8. ZHUKOVSKIY, V. I. and CHIKRII, A. A. (1994) *Linear-quadratic differential games*. Kiev: Naukova Dumka.
9. VAISMAN, K. S. and ZHUKOVSKIY, V. I. (1994) The Berge Equilibrium under Uncertainty. *The 3-rd Intern. Workshop on Multiple Criteria Problems under Uncertainty*. Pp. 97–98.
10. BOREL, E. (1927) Sur les systemes de formes lineares a determinant symetrique gauche et la theorie generale du jeu. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*. 184. Pp. 52–53.

11. VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Annalen.* 100 (1). Pp. 295–320.
12. ZHUKOVSKIY, V. I. (2011) *Risks in Conflict Situations*. Moscow: URSS, LENAND.
13. GUSEINOV, A. A., ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2016) *Mathematical foundations of the Golden Rule: the altruistic way of the conflict solution as opposed to the selfish Nash equilibrium*. Moscow: LENAND.
14. VOROBIEV, N. N. (1984) *Fundamentals of Game Theory. Noncooperative Games*. Moscow: Nauka.
15. PODINOVSKIY, V. V. and NOGIN, V. D. (2007) *Pareto Optimal Solutions of Multicriteria Problems*. Moscow: Fizmatlit.
16. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2016) Pareto-Optimal Nash Equilibrium: Sufficient Conditions and Existence in Mixed Strategies. *Automation and Remote Control.* 77 (8). Pp. 1500–1510.
17. GANTMAKHER, F. R. (1959) *The Theory of Matrices*. Vols. 1 and 2. New York: Chelsea Publishing.
18. GERMEYER, Yu. B (1971) *Introduction to Operations Research*. Moscow: Nauka.
19. LYUSTERNIK, L. A. and SOBOLEV, V. I. (1969) *Elements of Functional Analysis*. Moscow: Nauka.
20. KRASOVSKIY, N. N. and SUBBOTIN, A. I. (1985) *Positional Differential Games*. Moscow: Nauka.
21. DMITRUK, A. V (2012) *Convex Analysis. An Elementary Introductory Course*. Moscow: Makspress.
22. GLICKSBERG, I. L. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 3 (1). Pp. 170–174.
23. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. I. Analogue of a Saddle-Point. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (1). Pp. 27–44.
24. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Equilibrating Conflicts under Uncertainty. II. Analogue of a Maximin. *Mat. Teor. Igr Prilozh.* 5 (2). Pp. 3–45.
25. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2012) *Equilibrating Conflicts and Applications*. Moscow: URSS.

УДК: 004.89

MSC2010: 90C27

ПРОГРАММНАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ СЕТЕВЫХ УЗЛОВ В МОБИЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ

© А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев

ФГАОУ ВО «СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ», ул. Университетская 33, г.

СЕВАСТОПОЛЬ, 299053, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: bryukhovetskiy@mail.sevsu.ru, dmitriymoiseev@mail.ru

**A SOFTWARE MODEL FOR THE FORMATION OF NETWORK NODES VIRTUAL
CLUSTERS IN MOBILE TRANSPORT NETWORKS.**

Bryukhovetskiy A. A., Moiseev D. V.

Abstract. Ensuring the security of nodes in mobile networks, creating a universal model for detecting vulnerabilities in vehicle interfaces operating in an external stochastic, highly dynamic environment and in conditions of a lack of a priori information about the behavior of devices is associated with insoluble problems for constructing formal models and methods for determining reliable characteristics of devices.

The advent of intelligent transport systems such as intelligent driving, collaborative travel and mobile payments will contribute to the rapid development of the intelligent transport industry. The Automotive Peer To Peer Network (VANET) is considered the main system for deploying applications based on it that contribute to improving the quality of driving, inform drivers about road hazards, etc.

In practice, solving problems related to processing the characteristics of highly dynamic objects in a stochastic environment requires large computational costs. As a rule, with the practical interest of obtaining reliable estimates, researchers are faced with the dimensions of problems that belong to the class of NP-hard ones. Solving them is difficult in real time, as it requires a complete search of options. For most practical problems this is unacceptable due to the large dimension, limited time and insufficient resources.

The proposed approach is aimed at increasing the reliability of decisions made in a stochastic highly dynamic environment characterized by a rapidly changing network topology, its mobility, spatial density, and node localization. The method is focused on the formation of clusters with high stability, stable communication, and low message transmission latency. Cluster coordinators are selected based on the trust level of the vehicle.

The article presents a software model for the formation of virtual clusters of network nodes, which allows you to switch from processing a rapidly changing network topology structure to a quasi-permanent one. One of the variants of the network architecture, a graph model of virtual clusters, is presented, an algorithm for the formation of minimal coverages is given.

The results of modeling of the program system are presented. The model is implemented by means of the language JAVA 17, OS Windows 10, occupied volume 176 KB.

Keywords: *decentralized processing, virtual clusters, graph model, adjacency matrix, set coverage.*

ВВЕДЕНИЕ

Развитие беспроводной связи побуждает исследователей разрабатывать и внедрять идею автомобильных сетей, также известных как автомобильные специальные сети (VANETs). Безопасность в такой сети является обязательной из-за важной информации, которую использует транспортное средство при движении. Специальные сети для транспортных средств привлекают большое внимание как со стороны научных кругов, так и промышленности. Они рассматриваются в качестве основной системы для развертывания приложений на основе интеллектуальных транспортных систем. Эти сети обрабатывают различные типы данных, собираемых и (или) передаваемых от (к) транспортным средствам, для предоставления множества услуг, которые можно разделить на три класса:

- приложения для управления дорожным движением, такие как помощь водителю, управление светофорами, предоставление информации о дорожных знаках, дорожных условиях и планирование маршрута;
- приложения для обеспечения безопасности дорожного движения, такие как автономное вождение (или автономный автомобиль), предотвращение и предупреждение аварий и управление в чрезвычайных ситуациях (электронный вызов для экстренного вызова). Защита этих сетей является важной задачей, особенно при развертывании приложений для обеспечения безопасности дорожного движения. Фактически, с помощью этих приложений транспортные средства управляют важной и конфиденциальной информацией, привлекательной для злоумышленников. Механизм безопасности является обязательным для защиты;
- приложения мобильности и комфорта такие как службы поиска транспортных средств, услуги по экологичному вождению, услуги по управлению автопарками и другие.

Появление интеллектуальных транспортных систем, таких как интеллектуальное вождение, совместное путешествие и мобильные платежи, будет способствовать быстрому развитию индустрии интеллектуальных перевозок. Автомобильная одноранговая сеть (VANET) считается основной системой для развертывания приложений на ее основе, которые способствуют повышению качества вождения, информируют водителей об опасностях на дороге и т. д. [1].

Как частный случай мобильной одноранговой сети VANET обладает рядом специфических особенностей:

- высокодинамичная топология из-за высокой скорости движения транспортных средств;

- низкая доступность канала и ограниченный диапазон передачи приводят к частому отключению каналов связи;
- неоднородность различных приложений и системная архитектура.

Тем не менее, VANETs собирают большое количество ценных пользовательских данных, которые, в свою очередь, приводят к ненадежности и несвоевременности связи с транспортным средством, а затем создают серьезные проблемы для информационной безопасности и безопасности связи с транспортным средством. Так, например, атака Sybil является распространенным методом обманной атаки, при котором злоумышленник подрывает систему репутации путем подделки ложных идентификационных данных и использует их для проникновения в конфиденциальную информацию пользователей и нарушения доступности сети [2]. В поддельной информационной атаке [3] вредоносные транспортные средства могут распространять ложную информацию в сети VANET, чтобы ввести в заблуждение другие транспортные средства или привести к пробке. Атака черной дыры — это еще один вид атаки, который имеет место в VANET. При атаке с использованием черной дыры вредоносное средство подменяет свой протокол маршрутизации, поскольку у него есть кратчайший путь для пересылки пакета, чтобы перенаправить сетевые транспортные средства и отбросить сетевые пакеты [4].

Транспортные средства в сети VANET обмениваются контекстуальной информацией посредством поддержания сетевого взаимодействия. Эффективные, стабильные и надежные каналы связи необходимы для обеспечения безопасности дорожного движения. В результате проведенных исследований были представлены решения на основе системы обнаружения вторжений (IDS) для предотвращения вредоносных атак на связь с транспортными средствами VANETs. Например, в [5] для улучшения взаимодействия между транспортными средствами-участниками была предложена структура IDS, основанная на теории игр для VANETs.

В статье [6] N. Kumar и др. предлагают доверительные автоматы совместного обучения, которые принимают входные данные в виде плотности, мобильности и направления движения транспортного средства для выполнения алгоритма обучения автоматов. Кроме того, в других публикациях представлен полный обзор приложений, архитектур, протоколов и проблем, связанных с коммуникацией VANET [7]-[9]. Однако быстро меняющиеся модели поведения при атаках в мобильных сетях являются многоструктурными и многодоменными, так что традиционные технологии обнаружения вторжений не могут эффективно идентифицировать эти вредоносные действия при вторжении.

Как показывают результаты исследований по обеспечению безопасности узлов в мобильных сетях, создание универсальной модели обнаружения уязвимостей интерфейсов транспортных средств, функционирующих во внешней стохастической высокодинамической среде и в условиях дефицита априорной информации о поведении устройств, сопряжено с неразрешимыми проблемами для построения формальных моделей и методов определения достоверных характеристик устройств [10]-[11]. Для этого требуется проведение длительных и систематических экспериментов по обработке и накоплению апостериорной информации о функциональности устройств и их совместного взаимодействия. К сожалению, на практике такой мониторинг может быть осуществлен при разумных ограничениях на ресурсы и продолжительность, а значит он не будет отвечать требованиям полноты, адекватности и точности формальных моделей и методов.

В тоже время разработка универсальных подходов повышения достоверности информации о поведении мобильных средств должна быть направлена на снижение неопределенности внешней среды, учитывая:

- противоречивую функциональность устройств в условиях постоянно меняющейся топологии сети;
- распределенный характер транспортных средств;
- постоянное взаимодействие устройств друг с другом и другое.

В связи с этим разработка моделей на основе технологий 5G, обеспечивающих надежность и быстродействие механизма совместной работы устройств в условиях стохастической внешней среды, в значительной мере определяют достоверность оценок и эффективность принятия решений при обнаружении уязвимостей интерфейсов устройств в интеллектуальных мобильных сетях.

На практике решение задач, связанных с обработкой характеристик высокодинамических объектов в условиях стохастической среды, требует больших вычислительных затрат. Как правило, при практическом интересе получения достоверных оценок, исследователи сталкиваются с большими размерностями задач, т. е. с задачами, которые относятся к классу *NP*-сложных [12]-[13]. Их решение затруднено в реальном времени, так как требует полного перебора вариантов. Для большинства практических задач это неприемлемо из-за большой размерности 2^n , ограниченного времени и недостаточности ресурсов.

Целью статьи является разработка программной модели формирования виртуальных кластеров сетевых узлов в мобильных транспортных сетях, обеспечивающих высокую стабильность, устойчивую связь, низкую задержку передачи сообщений.

1. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

Типовая архитектура VANETs состоит из трех основных элементов, например, доверенного органа (TA), дорожного устройства (RSU) и бортового устройства (OBU). TA является третьей стороной и используется RSU и OBU, а также отвечает за контроль и управление всей сетью. RSU — это базовая станция, которая устанавливается вдоль магистралей и служит центральным узлом между TA и OBU и выполняет различные действия по проверке. OBU внедряется на транспортном средстве для получения, обработки и обмена данными о трафике, идентифицированными с различными транспортными средствами и RSU, через выделенные протоколы связи (DSRC). Таким образом, каждое транспортное средство через некоторое время (100–300 миллисекунд) получает сообщения, связанные с дорожным движением, и передается другим транспортным средствам или RSU.

Разрабатываемая модель состоит из следующих основных компонент:

- обычные узлы (TCn_j): узлы, осуществляющие взаимодействие между собой в пределах устойчивого диапазона связи. Эти узлы входят в состав виртуальных кластеров;
- узел координатор (KCh_i): узел с высоким приоритетом назначается в качестве узла координатора виртуального кластера. Он отслеживает функционирование TCn_j и передает контролируемые значения характеристик TCn_j базовой станции (RSU). KCh_i также вычисляет агрегированные значения показателей приоритета;
- базовая станция (RSU): принимает данные от KCh_i , обрабатывает их по специальному разработанному алгоритму, структура которого представлена на рис. 1.

После генерации исходного графа $G(TC, E, R, W)$ на основе заданного множества вершин $TC, R \in [1; |e|]$ — ранг вершины, включающего генерацию для каждой Ti значения R_i и связей $e(i, j)$, выполняется проверка корректности входных данных. Затем управление передается вычислительному блоку, который выполняет следующую последовательность действий:

- формирование матрицы смежности, построение безызбыточного покрытия;
- формирование минимальных покрытий на основе количественной оценки (число связей);
- формирование виртуальных кластеров (взвешенный случай) — учитывается вес W каждого свойства узла — репутация узла, которая оценивается качественными значениями характеристик узлов.

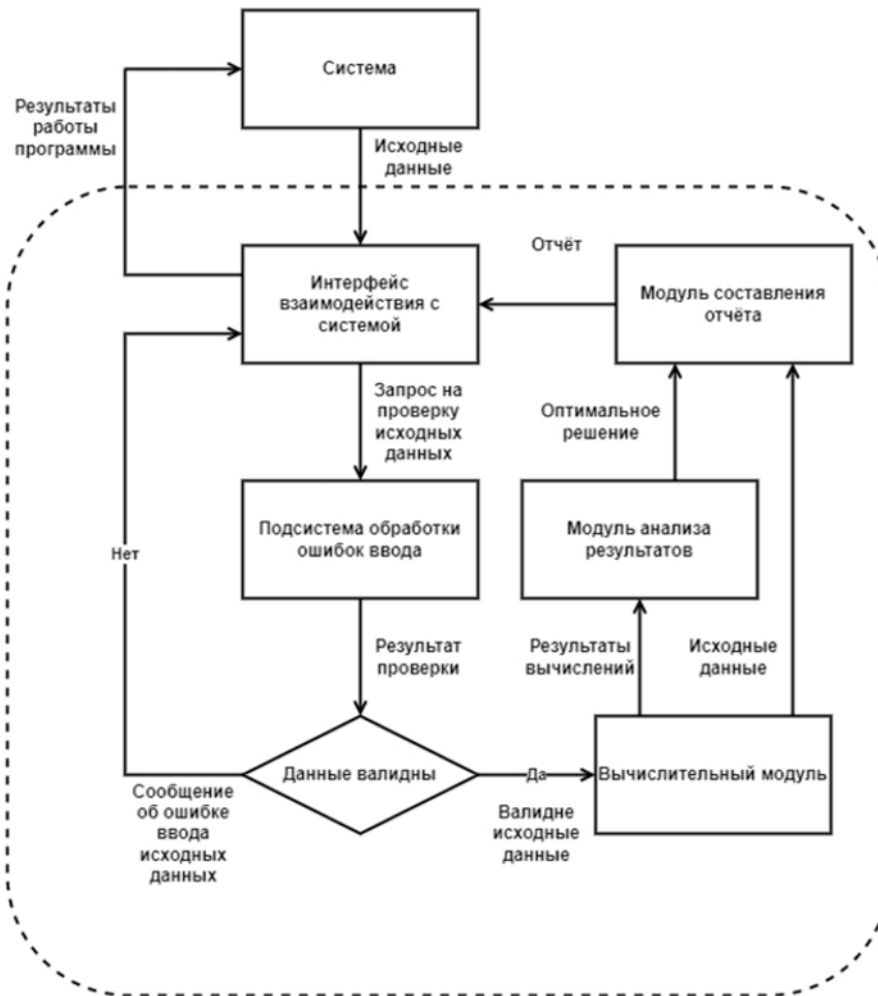


Рис. 1. Структура программной системы формирования виртуальных кластеров

Далее вычисляются агрегированные значения показателей приоритета для каждого виртуального кластера и принимается решение по выбору кластера с максимальным значением уровня доверия.

2. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

Первоначально задается исходный граф $G(TC, E, R, W)$ — рис. 2, который преобразуется в ориентированный двудольный граф $G = (TC(KCh, TCn), E, R, W, t)$, с единичной длиной пути достижимости, где TCn — множество узлов координаторов, TCn — множество обычных узлов, t — момент времени формирования виртуального кластера. Каждый координатор связан с несколькими узлами.

На рис. 3 построена матрица смежности $M(KCh, TSn, R)$ для заданного графа, где TCh — множество строк; TSn — множество столбцов, в которой крайний левый столбец содержит ранг вершины по строке.

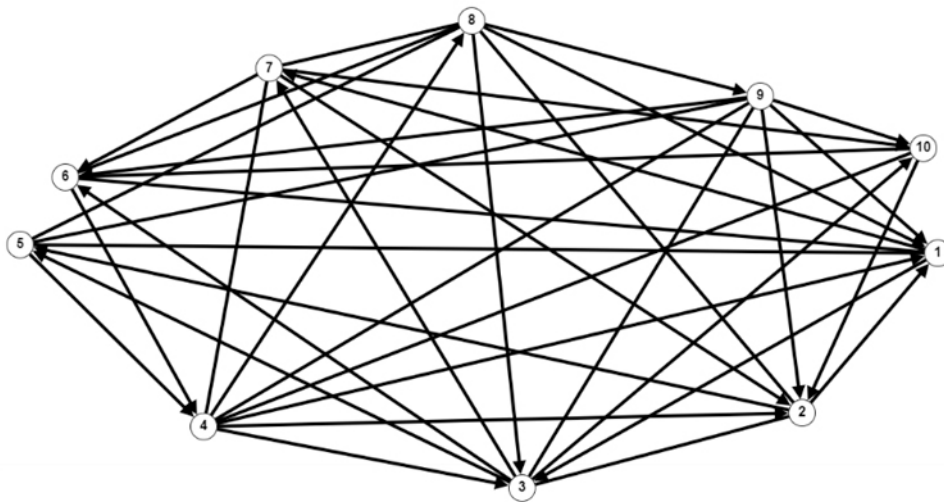


Рис. 2. Пример графа связей узлов в тестовой группе

4	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
4	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	2
6	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	3
7	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	4
4	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	5
4	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	6
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	7
7	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	8
7	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	9
3	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Рис. 3. Матрица смежности $M(i, j) \in \{0; 1\}$. «1» означает, что между узлами KCh_i и TSn_j установлена связь

Результат работы программы в виде подмножеств покрытий с минимальным числом элементов показан на рис. 4.

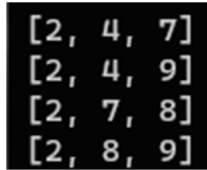


Рис. 4. Результат работы программы: подмножество покрытий с минимальным количеством элементов

На заключительном этапе (взвешенный случай) с использованием полученных значений характеристик V_j каждому ребру графа назначаются оценки R^w по каждому контролируемому свойству (например, задержка при передаче сообщений, скорость приема данных, отношение сигнал/шум, коэффициент отбрасывания пакетов и другие).

Выполняется агрегирование значений обработки характеристик $TСn_j$ на уровне узлов. Интегральная оценка уровня доверия DC_i вычисляется по формуле:

$$DC_i = \frac{R_{ij}^w}{\sum_{j=1}^l R_{ij}^w}.$$

В таблице 1 представлена структура для оценки уровня доверия DC_i к множеству $СК_i$. В результате осуществляется выбор виртуальных кластеров $СК_i$ с максимальной оценкой уровня доверия DC_i .

Таблица 1. Агрегирование значений обработки характеристик $TСn_j$ на уровне узлов для виртуальных кластеров

	C_1	C_1	...	C_r
V_1	R_{11}^w	R_{12}^w	...	R_{1r}^w
V_2	R_{21}^w	R_{22}^w	...	R_{2r}^w
...
V_l	R_{l1}^w	R_{l2}^w	...	R_{lr}^w
DC_i	DC_1	DC_2	...	DC_r

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана программная модель формирования виртуальных кластеров узлов сети в мобильных транспортных сетях. Представлен один из вариантов архитектуры сети, графовая модель виртуальных кластеров, приведен алгоритм формирования минимальных покрытий. Приведены результаты моделирования программной системы.

Модель реализована средствами языка JAVA 17, OS Windows 10, занимаемый объем 176 КБ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. HOEBEKE, J., MOERMAN, I., DHOEDT, B. & DEMEESTER, P. (2004) An overview of mobile ad hoc networks: applications and challenges. *J. Commun. Netw.* 3 (1). Pp. 60–66.
2. AYAIDA, M., MESSAI, N., NAJEH, S. & NDJORE, K. B. (2019) A macroscopic traffic model-based approach for sybil attack detection in vanets. *Ad Hoc Netw.* 90. Pp. 101845.
3. ARIF, M., WANG, D., BHUIYAN, M. Z. A., WANG, T. & CHEN, J. (2019) A survey on security attacks in VANETs: communication, applications and challenges. *Vehicul. Commun.* 19. Pp. 100179.
4. BIBHU, D., ROSHAN, K., SINGH, K. & SINGH, D. (2012) Performance analysis of black hole attack in VANET. *Int. J. Comput. Netw. Inf. Secur.* 4. Pp. 47–54.
5. SUBBA, S., BISWAS, S. & KARMAKAR, S. (2018) A game theory based multi layered intrusion detection framework for VANET. *Future Generat. Comput. Syst.* 82. Pp. 12–28.
6. KUMAR, N. & CHILAMKURTI, N. (2014) Collaborative trust aware intelligent intrusion detection in VANETs. *Comput. Electr. Eng.* 40. Pp. 1981–1996.
7. SAKIZ, F. & SEN, S. (2017) A Survey of Attacks and Detection Mechanisms on Intelligent Transportation Systems: VANETs and IoV. *Ad Hoc Networks.* (61). Pp. 1570–8705.
8. SEDJELMACI, H. & SENOUCI, S. M. (2015) An accurate and efficient collaborative intrusion detection framework to secure vehicular networks. *Comput. Electr. Eng.* 43. Pp. 33–47.
9. RUPPRECHT, D., DABROWSKI, A., HOLZ, T., WEIPPL, E. & POPPER, C. (2018) On security research towards future mobile network generations. *IEEE Communications Surveys & Tutorials.* 20 (3). Pp. 2518–2542.
10. CHOPRA, G., JAIN, S. & JHA, R. K. (2017) Possible security attack modeling in ultradense networks using high-speed handover management. *IEEE Transactions on Vehicular Technology.* 67 (3). Pp. 2178–2192.
11. CHEN, J. et al. (2017) Service-oriented dynamic connection management for software-defined internet of vehicles. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* 18 (10). Pp. 2826–2837.

12. Кормен, Т. Х. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. — М.: «Вильямс», 2005. — 1296 с.
CORMEN, T. H. et al. (2005) *Introduction to Algorithms*. Moscow: Vilyams.
13. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон. — М.: Вильямс, 2004. — 960 с.
ANDERSON, J. (2003) *Discrete Mathematics with Combinatorics*. Moscow: Vilyams.

УДК: 517.958, 51-73

MSC2010: 35K05, 35R05

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ

© В. В. Калманович

КАЛУЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО
КАФЕДРА ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ
УЛ. СТЕПАНА РАЗИНА, 26, КАЛУГА, 248023, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *v572264@yandex.ru*

© Е. В. Серегина

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Э. БАУМАНА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ), КАЛУЖСКИЙ ФИЛИАЛ
КАФЕДРА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
УЛ. БАЖЕНОВА, 2, КАЛУГА, 248000, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
КАЛУЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО
УЛ. СТЕПАНА РАЗИНА, 26, КАЛУГА, 248023, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *evfs@yandex.ru*

**ON SOME ESTIMATES OF SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION IN
A MULTILAYER MEDIUM BY THE MATRIX METHOD.**

Kalmanovich V. V. and Seregina E. V.

Abstract. In the study of real thermal processes by mathematical modeling it is important to have analytical or approximate analytical methods of solution, which can simplify the analysis of processes, give an opportunity to predict the behavior of individual materials of the design, to identify possible undesirable phenomena, etc. One such analytical method can be the joint application of the matrix method, the Fourier method and the Bers generalized degree method.

The paper considers a one-dimensional heat conduction process in a multilayer plate with continuous matching conditions at the contact points of the layers. The system consists of n flat layers that make up the plate. In each layer, the basic system of equations, which determines the process in a multilayer plate, consists of equations of thermal conductivity, with specified heat conductivity coefficient: density, specific heat, as well as conditions of agreement of type and contact, Consisting of continuous temperature and flow at the contact limits of the layers.

At the initial moment, the temperature is set and zero temperature is always maintained in each layer and on the boundaries of the first and last layers. An algorithm for solving the problem is briefly described. The algorithm is based on a combination of the method of separation of variables (Fourier method) and the matrix method. This algorithm makes it relatively easy to find exact analytical solutions in the form of an infinite series for any finite number of layers of the medium. Calculations were carried out using this algorithm.

Symmetric multilayer media were chosen for calculations, i.e. layers with the same thermophysical parameters were located in the plate symmetrically with respect to the middle of its thickness. The layers were chosen to be of equal thickness. The materials of the layers were chosen with a significant difference in the thermal conductivity, since it is this parameter that most affects the shape of the solution graph, and its sharp difference in neighboring layers makes it possible to qualitatively evaluate the result for compliance with the real physical process. The initial temperature distribution was also chosen to be symmetrical with respect to the middle of the plate thickness. In such media, the solution of the problem must also have a symmetrical form.

Estimates were obtained for the convergence of the found solutions with respect to the space norm L_2

$$\Delta_{k,r} = \frac{\|T_k(x, t) - T_r(x, t)\|_{L_2}}{\|T_k(x, t)\|_{L_2}} \cdot 100\%,$$

and also estimates of the convergence of the initial temperature distribution $T(x, 0)$

$$\Delta_{t=0; k,r} = \frac{\|T_k(x, 0) - T_r(x, 0)\|_{L_2}}{\|T_k(x, 0)\|_{L_2}} \cdot 100\%,$$

where the indices k and r indicate how many terms of the Fourier series are taken in the solution.

Keywords: *heat conduction equation, matrix method, multilayer medium, estimates of solutions.*

ВВЕДЕНИЕ

При изучении реальных тепловых процессов методами математического моделирования важно иметь аналитические или приближенные аналитические методы решения, которые могут упростить анализ процессов, дать возможность прогнозировать поведение отдельных материалов конструкции, выявить возможные нежелательные явления и др. Один из таких аналитических методов состоит в совместном применении матричного метода, метода Фурье и метода обобщенных степеней Берса [1, 2].

Идея матричного метода применительно к задачам теплопроводности в составных пластинах была описана в [3]. Однако для решения задач тепломассопереноса в многослойных средах такой подход не получил распространения, возможно, из-за того, что формулы аналитического решения получались очень громоздкими, а системы компьютерной алгебры в то время (середина XX в.) только начинали зарождаться, так что численные методы были предпочтительными. В настоящее время самые разные программные продукты успешно справляются с этой проблемой, что позволило нам применить матричный метод для моделирования стационарных [4, 5] и нестационарных процессов тепломассопереноса в многослойных средах с произвольным

конечным числом слоев, как в случае идеального [6, 7], так и неидеального [8] теплового контакта. В указанных работах матричный метод применяется в сочетании с методом разделения переменных (при решении нестационарных задач) и аппаратом обобщенных степеней Берса. Использование последнего позволило в единой аналитической форме получить алгоритм решения задачи тепломассопереноса в средах с различной геометрией, а именно обладающей сдвиговой, осевой или центральной симметрией.

В настоящей работе для данного подхода получены некоторые оценки сходимости решений задачи теплопроводности в многослойной планарной среде с идеальным тепловым контактом для различных теплофизических параметров слоев.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть система плоских слоев общим числом n составляет пластину. Направим ось x нормально к плоскости пластины. Координаты слоев обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, причем x_1, x_{n+1} — координаты внешних границ пластины.

Всем слоям и относящимся к ним величинам дадим номер левой координаты отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, определяющего слой. Номер слоя будем ставить в верхнем индексе в скобках. Например, $T^{(k)}(x, t)$ обозначает поле температур в k -ом слое.

Будем рассматривать одномерную задачу, когда плотность потока тепла $J^{(k)}(x, t)$ в слое направлена нормально к плоскости слоя и равна

$$J^{(k)} = -\lambda^{(k)} \frac{dT^{(k)}}{dx},$$

где $\lambda^{(k)}$ — коэффициент теплопроводности k -ого слоя.

Основная система уравнений, определяющая процесс в многослойной пластине, состоит из уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} \right) - \rho^{(k)} c^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial t} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $\rho^{(k)}$ — плотность, $c^{(k)}$ — удельная теплоемкость на k -м слое, а также условий согласования типа идеального контакта, состоящих в непрерывности температуры и потока на границах контакта слоев

$$T^{(k)}(x, t) \Big|_{x=x_{k+1}} = T^{(k+1)}(x, t) \Big|_{x=x_{k+1}}, \quad (2)$$

$$-\lambda^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1}} = -\lambda^{(k+1)} \frac{\partial T^{(k+1)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1}} \quad (3)$$

при любом моменте времени t , $k = \overline{1, n}$. В (2), (3) все величины понимаются как пределы слева и справа.

Пусть задано начальное распределение температуры

$$T^{(k)}(x, 0) = g(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{1, n}.$$

Поставим первую краевую задачу

$$T^{(1)}(x_1, t) = 0, \quad T^{(n)}(x_{n+1}, t) = 0.$$

Задача состоит в нахождении температуры системы во все моменты времени и во всех точках пластины.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ В СОЧЕТАНИИ С МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Частное решение уравнений (1) ищем в виде

$$T^{(k)}(x, t) = u^{(k)}(x)e^{-\mu^2 t}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда амплитудная функция $u^{(k)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^{(k)} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \right) + \mu^2 \rho^{(k)} c^{(k)} u^{(k)}(x) = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

а также условиям непрерывного согласования на контакте слоев

$$\begin{aligned} u^{(k+1)}(x_{k+1}) &= u^{(k)}(x_{k+1}), \quad k = \overline{1, n-1}, \\ j^{(k)}(x_{k+1}) &= j^{(k+1)}(x_{k+1}), \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1) = 0, \quad u^{(n)}(x_{n+1}) = 0,$$

где $j^{(k)}(x) = -\lambda^{(k)} \frac{dT^{(k)}}{dx}$, $k = \overline{1, n}$ — плотность потока координатной части.

Поставим на каждом слое задачу Коши, то есть зададим значения $u^{(k)}(x_k)$ и $j^{(k)}(x_k)$ в начальной точке x_k слоя. Тогда для случая плоских слоев среды получим

$$u^{(k)}(x) = u^{(k)}(x_k) \cos \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} + j^{(k)}(x_k) \left(-\frac{1}{\mu} \beta^{(k)} \sin \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} \right), \quad (4)$$

$$j^{(k)}(x) = u^{(k)}(x_k) \mu \beta^{(k)} \sin \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} + j^{(k)}(x_k) \cos \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}}, \quad (5)$$

где $\alpha^{(k)} = \sqrt{\lambda^{(k)}(c^{(k)}\rho^{(k)})^{-1}}$, $\beta^{(k)} = \sqrt{\lambda^{(k)}c^{(k)}\rho^{(k)}}$.

Запишем систему (4) – (5) в матричном виде

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i) V^{(i)}(x_i),$$

где

$$V^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} u^{(k)}(x) \\ j^{(k)}(x) \end{pmatrix}, \quad V^{(k)}(x_k) = \begin{pmatrix} u^{(k)}(x_k) \\ j^{(k)}(x_k) \end{pmatrix},$$

$$K^{(k)}(x, x_k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} & -\frac{1}{\mu} \beta^{(k)} \sin \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} \\ \mu \beta^{(k)} \sin \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} & \cos \frac{\mu(x-x_k)}{\alpha^{(k)}} \end{pmatrix}.$$

Далее решение задачи сводится к последовательному умножению введенных матриц по слоям, что возможно за счет выполнения условий непрерывного согласования на границе слоев

$$V^{(k+1)}(x_{k+1}) = V^{(k)}(x_{k+1}).$$

Выполняя последовательно по слоям такую подстановку, получаем

$$V^{(k+1)}(x) = K^{(k)}(x, x_k)K^{(k-1)}(x, x_{k-1})\dots K^{(1)}(x, x_1)V^{(1)}(x_1) =$$

$$= K^{(k,1)}(x, x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}.$$

В результате такого умножения приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными при любом конечном числе слоев, которая будет связывать граничные точки многослойной среды

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1)V^{(1)}(x_1).$$

Полученная система позволяет находить решение различных краевых задач, так как зная какую-либо пару из $u^{(1)}(x_1)$, $u^{(n)}(x_{n+1})$, $j^{(1)}(x_1)$, $j^{(n)}(x_{n+1})$ можно найти другую пару. Так, для решения поставленной первой краевой задачи при выполнении $u^{(1)}(x_1) = 0$, $u^{(n)}(x_{n+1}) = 0$ получим условие для определения собственных значений $k_{12}^{(n,1)} = 0$.

Обозначим $u_j^{(i)}(x)$ базисную функцию, соответствующую собственному значению μ_j . Условие нормировки имеет вид

$$N_j^2 = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho^{(k)} c^{(k)} \left(u_j^{(k)}(x) \right)^2 dx.$$

Тогда решение поставленной задачи

$$T^{(k)}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_j \frac{u_j^{(i)}(x)}{N_j} e^{-\mu_j^2 t}, \quad k = \overline{1, n},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) u_j^{(k)}(x) \rho^{(k)} c^{(k)} dx.$$

Более подробно этот метод решения задачи теплопроводности изложен в [8].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

По предлагаемому методу в математическом пакете Maple 2017.1 была составлена программа и проведены вычисления на устройстве с процессором Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz, оперативной памятью 6,00 ГБ, тип системы — 64-разрядная операционная система, процессор x64, Windows 10 домашняя.

Для расчетов выбирались симметричные многослойные среды, т. е. слои с одинаковыми теплофизическими параметрами располагались в пластине симметрично относительно середины ее толщины. Слои выбирались равной толщины. Материалы слоев выбирались с существенным отличием коэффициента теплопроводности, так как именно этот параметр больше всего влияет на форму графика решения, и резкое отличие его на соседних слоях позволяет качественно оценить результат на соответствие реальному физическому процессу. Начальное распределение температуры также выбиралось симметричным относительно середины толщины пластины. В таких средах и решение задачи должно иметь симметричную форму.

Получены оценки сходимости найденных решений по норме пространства L_2

$$\Delta_{k,r} = \frac{\|T_k(x, t) - T_r(x, t)\|_{L_2}}{\|T_k(x, t)\|_{L_2}} \cdot 100\%,$$

а также оценки сходимости начального распределения температуры $T(x, 0)$

$$\Delta_{t=0; k,r} = \frac{\|T_k(x, 0) - T_r(x, 0)\|_{L_2}}{\|T_k(x, 0)\|_{L_2}} \cdot 100\%,$$

где индексы k и r показывают, сколько членов ряда Фурье взято в решении. Ниже представлены некоторые полученные результаты. При этом, как это характерно для метода Фурье, наибольшая ошибка получается в момент времени $t = 0$, то есть для приближения начального распределения температуры.

Проведены расчеты для симметричной трехслойной среды с параметрами, характерными для кирпича (внешние слои) и стали (внутренний слой): $x_1 = 0$ м, $x_2 = 0,1$ м, $x_3 = 0,2$ м, $x_4 = 0,3$ м, т. е. толщина каждого слоя 0,1 м, коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = 0,7$ Вт/(м·К), $\lambda^{(2)} = 58$ Вт/(м·К), удельная теплоемкость $c^{(1)} = c^{(3)} = 800$ Дж/(кг·К), $c^{(2)} = 462$ Дж/(кг·К), плотность $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 1800$ кг/м³, $\rho^{(2)} = 7860$ кг/м³, с начальной функцией температуры $T(x, 0) = -1000x(x - 0,3)$. Затраты машинного времени расчета матричным методом составили 1,970 с для 5 слагаемых, 2,611 с для 15 слагаемых, 4,376 с для 25 слагаемых, 4,958 с для 35 слагаемых. Для этой модельной задачи получены следующие оценки решения матричным методом:

- 1) $\Delta_{5,4} = 0,18\%$ и $\Delta_{t=0;5,4} = 1,48\%$;
- 2) $\Delta_{15,14} = 0,018\%$ и $\Delta_{t=0;15,14} = 0,513\%$;
- 3) $\Delta_{25,24} = 0,047\%$ и $\Delta_{t=0;25,24} = 2,14\%$;
- 4) $\Delta_{25,15} = 0,064\%$ и $\Delta_{t=0;25,15} = 2,757\%$;
- 5) $\Delta_{35,15} = 0,067\%$ и $\Delta_{t=0;35,15} = 2,923\%$;
- 6) $\Delta_{35,25} = 0,020\%$ и $\Delta_{t=0;35,25} = 0,971\%$.

Полученные результаты говорят о том, что добавление не только одного слагаемого в разложение Фурье, но и даже десяти слагаемых уже не дает заметного уточнения решения, если изначально взято хотя бы 15 членов ряда, однако эти добавленные слагаемые могут заметно уточнить аппроксимацию начального распределения температуры.

Также проведены расчеты с такой же начальной функцией распределения температуры $T(x, 0) = -1000x(x - 0,3)$ и такой же толщиной слоев для трехслойной симметричной среды, когда, наоборот, внутренний слой имеет малый коэффициент теплопроводности (кирпич), а внешние слои — большой (сталь). Параметры слоев: $x_1 = 0$ м, $x_2 = 0,1$ м, $x_3 = 0,2$ м, $x_4 = 0,3$ м, коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = 58$ Вт/(м·К), $\lambda^{(2)} = 0,7$ Вт/(м·К), теплоемкость $c^{(1)} = c^{(3)} = 462$ Дж/(кг·К), $c^{(2)} = 800$ Дж/(кг·К), плотность $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = 7860$ кг/м³, $\rho^{(2)} = 1800$ кг/м³. Затраты машинного времени расчета матричным методом составили 2,150 с для 5 слагаемых, 2,817 с для 15 слагаемых, 4,703 с для 25 слагаемых, 5,588 с для 35 слагаемых. На рис. 1 изображены результаты моделирования для этого случая.

Слева — распределения температуры в зависимости от координаты и времени, справа — в начальный момент времени, построенные по 5 собственным значениям (а), по 15 собственным значениям (б) и по 25 собственным значениям (в). Для этой модельной задачи получены следующие оценки решения матричным методом:

- 1) $\Delta_{5,4} = 17,8\%$ и $\Delta_{t=0;5,4} = 39,5\%$;
- 2) $\Delta_{15,14} = 0,011\%$ и $\Delta_{t=0;15,14} = 0,084\%$;
- 3) $\Delta_{25,24} = 0,008\%$ и $\Delta_{t=0;25,24} = 0,106\%$;
- 4) $\Delta_{25,15} = 0,174\%$ и $\Delta_{t=0;25,15} = 1,709\%$;
- 5) $\Delta_{35,15} = 0,180\%$ и $\Delta_{t=0;35,15} = 1,855\%$;
- 6) $\Delta_{35,25} = 0,048\%$ и $\Delta_{t=0;35,25} = 0,721\%$.

В этом случае, когда слои с большой теплопроводностью являются внешними и изначально более холодными, при малом числе слагаемых ряда Фурье получается

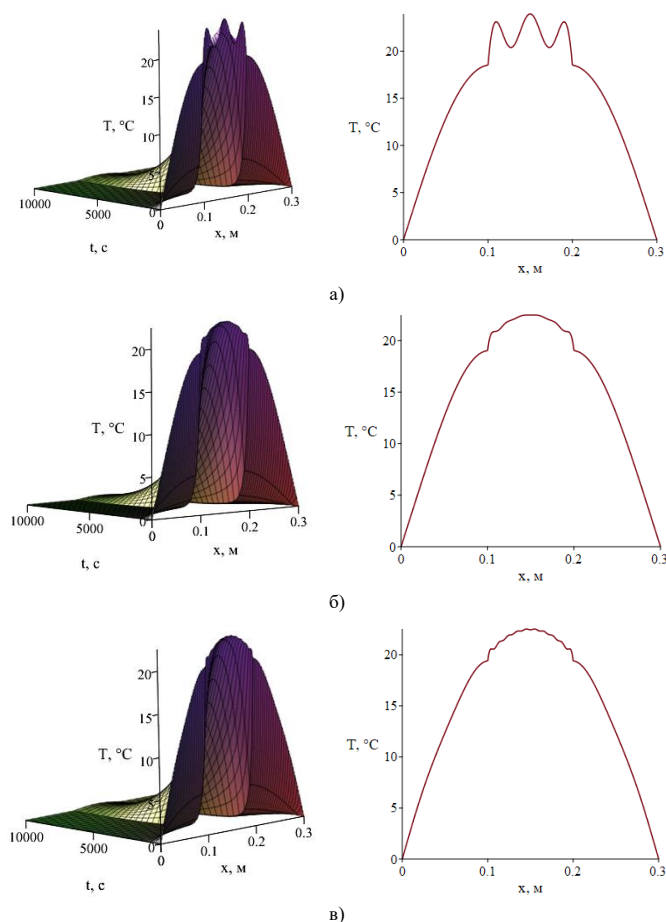


Рис. 1. Распределения температуры в трехслойной среде в зависимости от координаты и времени (слева) и в начальный момент времени (справа), построенные по 5 собственным значениям (а), по 15 собственным значениям (б) и по 25 собственным значениям (в).

очень большая погрешность, однако уже при 15 слагаемых в разложении Фурье добавление одного или нескольких слагаемых не дает сколько-нибудь заметного улучшения решения задачи.

Также проведены расчеты матричным методом для пятислойной симметричной среды с параметрами: $x_1 = 0$ м, $x_2 = 0,1$ м, $x_3 = 0,2$ м, $x_4 = 0,3$ м, $x_5 = 0,4$ м, $x_6 = 0,5$ м, т. е. толщина каждого слоя 0,1 м. Крайние и центральный слои с низким коэффициентом теплопроводности, два оставшихся слоя — с высоким, слои чередуются. Коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = \lambda^{(5)} = 0,7$ Вт/(м·К), $\lambda^{(2)} = \lambda^{(4)} = 58$ Вт/(м·К), значения теплотемкости $c^{(1)} = c^{(3)} = c^{(5)} = 800$ Дж/(кг·К), $c^{(2)} = c^{(4)} = 462$ Дж/(кг·К), плотность материалов $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = \rho^{(5)} = 1800$ кг/м³,

$\rho^{(2)} = \rho^{(4)} = 7860 \text{ кг/м}^3$. Начальная функция распределения температуры $T(x, 0) = -1000x(x - 0,5)$. Затраты машинного времени расчета матричным методом составили 2,344 с для 5 слагаемых, 3,719 с для 15 слагаемых, 5,031 с для 25 слагаемых, 6,625 с для 35 слагаемых. Для этой модельной задачи получены следующие оценки решения матричным методом:

- 1) $\Delta_{5,4} = 0,345\%$ и $\Delta_{t=0;5,4} = 2,178\%$;
- 2) $\Delta_{15,14} = 0,160\%$ и $\Delta_{t=0;15,14} = 4,450\%$;
- 3) $\Delta_{25,24} = 0,037\%$ и $\Delta_{t=0;25,24} = 1,496\%$;
- 4) $\Delta_{25,15} = 0,240\%$ и $\Delta_{t=0;25,15} = 7,928\%$;
- 5) $\Delta_{35,15} = 0,240\%$ и $\Delta_{t=0;35,15} = 7,970\%$;
- 6) $\Delta_{35,25} = 0,016\%$ и $\Delta_{t=0;35,25} = 0,820\%$.

Полученные оценки решений задачи теплопроводности в данной пятислойной среде показывают, что заметного улучшения результата при увеличении членов ряда в разложении Фурье не происходит, если взято примерно 20-25 слагаемых.

Также решена модельная задача, когда пять слоев симметричной среды чередуются в другом порядке, т. е. крайние и центральный слой с высоким коэффициентом теплопроводности, а два оставшихся слоя — с низким. Параметры слоев $x_1 = 0 \text{ м}$, $x_2 = 0,1 \text{ м}$, $x_3 = 0,2 \text{ м}$, $x_4 = 0,3 \text{ м}$, $x_5 = 0,4 \text{ м}$, $x_6 = 0,5 \text{ м}$, т. е. толщина каждого слоя 0,1 м. Крайние и центральный слой с низким коэффициентом теплопроводности, два оставшихся слоя — с высоким, слои чередуются. Коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} = \lambda^{(5)} = 58 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, $\lambda^{(2)} = \lambda^{(4)} = 0,7 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, значения теплоемкости $c^{(1)} = c^{(3)} = c^{(5)} = 462 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, $c^{(2)} = c^{(4)} = 800 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, плотность материалов $\rho^{(1)} = \rho^{(3)} = \rho^{(5)} = 7860 \text{ кг/м}^3$, $\rho^{(2)} = \rho^{(4)} = 1800 \text{ кг/м}^3$. Начальная функция распределения температуры $T(x, 0) = -1000x(x - 0,5)$. Затраты машинного времени расчета матричным методом составили 1,437 с для 5 слагаемых, 1,969 с для 15 слагаемых, 2,906 с для 25 слагаемых, 3,891 с для 35 слагаемых. На рис. 2 изображены результаты моделирования для этого случая.

Слева — распределения температуры в зависимости от координаты и времени, справа — в начальный момент времени, построенные по 5 собственным значениям (а), по 15 собственным значениям (б) и по 25 собственным значениям (в). Для этой модельной задачи получены следующие оценки решения матричным методом:

- 1) $\Delta_{5,4} = 2,356\%$ и $\Delta_{t=0;5,4} = 18,146\%$;
- 2) $\Delta_{15,14} = 0,001\%$ и $\Delta_{t=0;15,14} = 0,027\%$;
- 3) $\Delta_{25,24} = 0,0009\%$ и $\Delta_{t=0;25,24} = 0,031\%$;
- 4) $\Delta_{25,15} = 0,086\%$ и $\Delta_{t=0;25,15} = 2,620\%$;
- 5) $\Delta_{35,15} = 0,089\%$ и $\Delta_{t=0;35,15} = 2,798\%$;
- 6) $\Delta_{35,25} = 0,023\%$ и $\Delta_{t=0;35,25} = 0,981\%$.

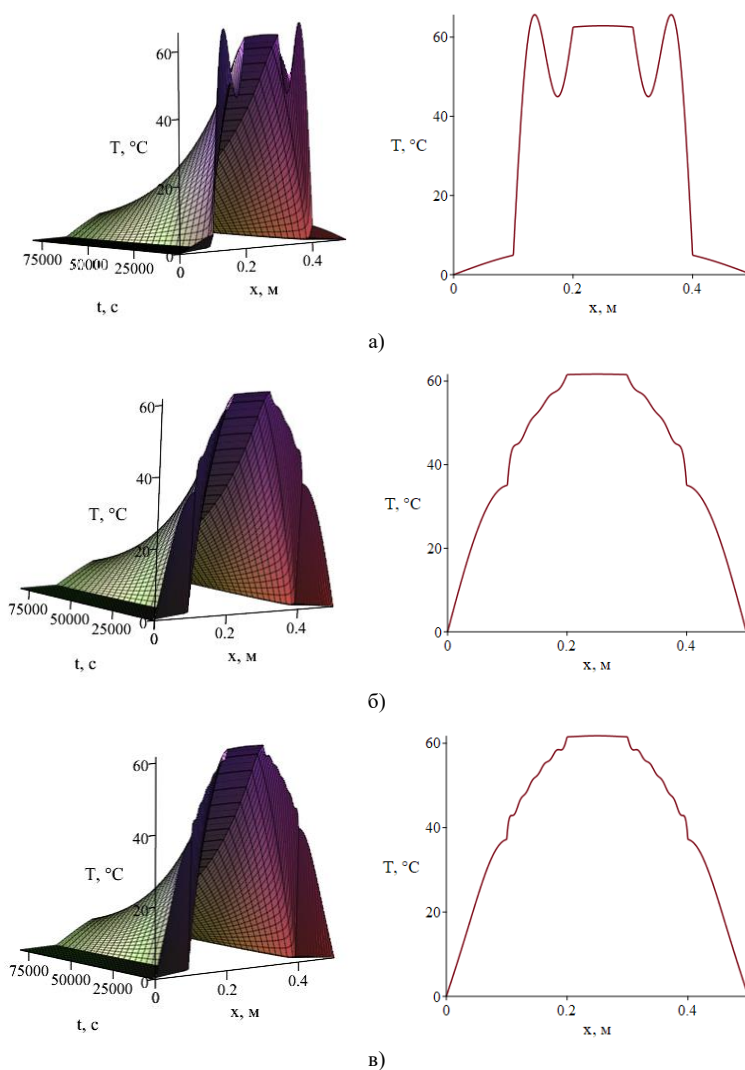


Рис. 2. Распределения температуры в пятислойной среде в зависимости от координаты и времени (слева) и в начальный момент времени (справа), построенные по 5 собственным значениям (а), по 15 собственным значениям (б) и по 25 собственным значениям (в).

Полученные оценки в этой задаче, так же как и для трехслойной среды, когда внешние слои имеют существенно более высокую теплопроводность, показывают, что при малом количестве слагаемых ряда решения имеем заметную погрешность, однако, как и при чередовании слоев в другом порядке, заметного улучшения результата при увеличении числа членов ряда не происходит, если взято уже 20–25 слагаемых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено решение первой краевой задачи теплопроводности в многослойной пластине матричным методом совместно с методом Фурье. Получены оценки некоторых решений модельных задач для трех- и пятислойной пластины в зависимости от числа членов ряда Фурье. Проведенные расчеты показывают, что такой подход может быть перспективен для моделирования теплопереноса и интересен для дальнейшего исследования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, <https://rscf.ru/project/23-21-10069/>, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10069/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. BERS, L. and GELBART, A. (1944) On a class of functions defined by partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*. 56 (1). Pp. 67–93.
2. Гладышев, Ю. А. О последовательности обобщенных степеней Берса с внутренней структурой // Математические заметки. — 1994. — Т. 55. — №3. — С. 21–34.
GLADYSHEV, Yu A. (1994) On a sequence of generalized Bers exponential functions with interior structure. *Mathematical Notes*. 55 (3). Pp. 251–261.
3. CARSLAW, H. S. and JAEGER, J. C. (1959) *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Oxford University Press.
4. Степович, М. А., Калманович, В. В., Серегина, Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №5. — С. 700–703.
STEPOVICH, M. A., KALMANOVICH, V. V. and SEREGINA, E. V. (2020) Possibility of applying the matrix method to modeling the cathodoluminescence caused by a wide electron beam in a planar multilayer semiconductor structures. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 84 (5). Pp. 576–579.
5. Калманович, В. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №7. — С. 1020–1026.

- KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V. and STEPOVICH, M. A. (2020) Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena caused by interaction between electron beams and planar semiconductor multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 84 (7). Pp. 844–850.
6. KALMANOVICH, V. V., KARTANOV, A. A. and STEPOVICH, M. A. (2021) On some problems of modelling the non-stationary heat conductivity process in an axisymmetric multilayer medium. *Journal of Physics: Conference Series*. 1902. Pp. 6012073.
7. Гладышев, Ю. А., Калманович, В. В. О решении задачи теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". — 2021. — Т. 192. — С. 46–54.
- GLADYSHEV, Y. A. and KALMANOVICH, V. V. (2022) On the Matrix Method for Solving Heat Conduction Problems in a Multilayer Medium in the Presence of Phase Transitions. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 267 (6). Pp. 698-705.
8. Калманович, В. В. О построении решения задачи теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом между слоями // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — №2. — С. 43–52.
- KALMANOVICH, V. V. (2021) On the construction of solution of the heat equation in a multilayer medium with imperfect contact between the layers. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2. Pp. 43–52.

УДК: 517.958, 517.956.32

MSC2010: 35L20

**ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ПРОСТЕЙШЕЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

© В. С. Рыхлов

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УЛ. АСТРАХАНСКАЯ, 83, САРАТОВ, 410012, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: rykhlovvs@yandex.ru

**GENERALIZED SOLUTION OF THE SIMPLEST INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A HOMOGENEOUS HYPERBOLIC EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE.**

Rykhlov V. S.

Abstract. An initial boundary value problem for a homogeneous second-order hyperbolic equation with constant coefficients and a mixed derivative is investigated in a half-strip of the plane.

The equation in question is the equation of transverse vibrations of a moving finite string. The case of zero initial velocity and fixed ends (Dirichlet conditions) is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin.

The main result of the article is formulated, namely, the theorem on the finite formula for the generalized solution and the method of obtaining this formula is briefly described. The main advantage of this formula is that it does not require any preliminary continuation of the initial function beyond the segment of its definition. The method is based on the idea of A. P. Khromov to use for this the theory of divergent series in the understanding of L. Euler (axiomatic approach). In the special case of the simplest string oscillation equation this formula for generalized solution has a different kind if compared with the formula, obtained earlier by A. P. Khromov.

Next, it is determined the classical solution of the initial boundary value problem under consideration.

The uniqueness theorem of the classical solution is formulated in the case of its existence and a formula is given for solving it in the form of a series whose members are contour integrals containing the initial data of the problem. Based on this formula, the concepts of a generalized initial boundary value problem and a generalized solution are introduced. Next, a detailed proof of the previously formulated main theorem of the article is given. The resulting formula for the generalized solution compared with the corresponding result for the classical solution.

At the end, a brief history of the problem is given.

Keywords: *hyperbolic equation, second order, constant coefficients, mixed derivative in the equation, half-bands, initial boundary value problem, zero initial velocity, fixed ends, classical solution, generalized initial boundary value problem, generalized solution, uniqueness classical solution, finite formulas for the generalized solution, divergent series*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим простейшую обобщенную начально-граничную задачу

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

в начальных условиях которой присутствует только один параметр — начальный профиль $\varphi(x)$ и рассматриваются самые простые граничные условия — закрепленные концы. Здесь $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_1[0, 1]$ и является комплекснозначной функцией. Для краткости используются обозначения

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \dots$$

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), то есть выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Возможны только две принципиально разные ситуации

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (4)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (5)$$

В случае (4) соответствующая спектральная задача (см. далее задачу (10)) является регулярной по Биркгофу [1, с. 66–67], а в случае (5) — нерегулярной. Случай (5) был рассмотрен в [2]. Метод доказательства там был отличным от метода настоящей статьи. Далее будет рассматриваться только случай (4).

Обобщенная начально-граничная задача (1)–(3) является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи (определение классической задачи и ее решения дается немного ниже). Внешний вид ее такой же, как и у классической задачи, но смысл совсем другой.

При $\varphi \in L_1[0, 1]$ задача (1)–(3) понимается чисто формально, так как ни о каком удовлетворении решения уравнению (1) и условиям (2) речь уже не может идти.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (4). Тогда функция $u(x, t)$, определенная для почти всех (п. в.) $(x, t) \in Q$ формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (6)$$

является решением обобщенной задачи (1)–(3). Здесь

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi \left(\frac{\xi}{a} \right), & \text{если } \xi \in [0, a); \\ \omega_1 \varphi \left(\frac{1 - \xi}{1 - a} \right), & \text{если } \xi \in [a, 1); \end{cases} \quad (7)$$

$a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ и $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

В оставшейся части статьи подробно излагается, как понимается обобщенное решение и как получается формула (6) для этого решения.

Для получения этого результата используется подход, предложенный А. П. Хромовым в [3] (подробное доказательство опубликовано в [4]). А именно, как и в [3, 4], используется теория расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера [5], который является основоположником теории суммирования расходящихся рядов.

Вопросы, касающиеся расходящихся рядов, а именно, какой смысл они имеют, как понимать и трактовать сумму расходящегося ряда, какими свойствами должны обладать суммы таких рядов и другие связанные с этими вопросами понятия активно обсуждались ведущими математиками еще во времена Эйлера, то есть в XVIII веке. Исторический обзор можно найти в монографии [6].

В частности, в [3, 4] при получении формулы для обобщенного решения важную роль играют естественные аксиомы для преобразования расходящихся рядов

- (A) $\sum a_n = s \implies \sum ka_n = ks$;
- (B) $\sum a_n = s, \sum b_n = t \implies \sum (a_n + b_n) = s + t$;
- (B) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$.

из монографии [6, с. 19]. А также существенно используется правило интегрирования расходящихся рядов, которое предложил А. П. Хромов в [3, 4],

$$\int \sum = \sum \int, \quad (8)$$

где \int — определенный интеграл. Это правило опирается на соответствующую теорему Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда в экспоненциальной форме (формулировку теоремы Лебега для тригонометрического ряда по синусам и косинусам можно найти в [7, с. 277, теорема 3]).

Перейдем к более подробному изложению результатов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ, ЕГО ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА

Под *классическим решением* или, как иногда говорят, *решением почти всюду* задачи (1)–(3) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая:

- а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , и п. в. в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t); \quad (9)$$

- б) удовлетворяет условиям (2)–(3) на границе множества Q и уравнению (1) п. в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (9) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tx}(x, t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [8].

Для классического решения задачи (1)–(3) по необходимости должны выполняться условия:

- 1) гладкости: $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны;
- 2) согласования: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Задача (1)–(3), в которой функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и ищется классическое решение, называется *классической* начально-граничной задачей.

В случае $\omega_1 = -1, \omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0, p_2 = -1$ и уравнение (1) является простейшим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [3, 4] рассматривался именно такой случай.

Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$. Интересно отметить, что из результатов статьи получается новая формула для уже полученного в [3, 4] обобщенного решения.

С задачей (1)–(3) тесно связана следующая спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \quad (10)$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \quad (11)$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \quad (12)$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ ее функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ возьмем систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ [1, с. 26] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1}$$

и его корни, очевидно, есть числа

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Результат данной статьи будет вытекать из результата, даваемого следующей теоремой единственности для классического решения и представления его рядом (полная версия теоремы опубликована в [9]).

Теорема 2. Если $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием (4) и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ (здесь $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$) при любом фиксированном $T > 0$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \right) \varphi d\lambda, \quad (14)$$

в которой ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Теорема 2 говорит о том, что формальный ряд (14) и начально-граничная задача (1)–(3) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (14). При этом функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям 1)–2). Аналогично [3, 4] расширим понятие этой связи.

Можно заметить, что ряд в (14) имеет смысл для любой функции $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$, хотя теперь он, вообще говоря, может быть и расходящимся. Будем считать, что этот ряд является формальным решением задачи (1)–(3), когда $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$. Как уже отмечалось, в этом случае задача (1)–(3) понимается чисто формально.

Эту задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ мы назвали ранее *обобщённой начально-граничной задачей*. Назовем ряд справа в (14) *обобщенным решением* этой задачи.

Можно попытаться найти сумму этого ряда, используя обычные правила анализа и накладывая дополнительно те или иные ограничения на начальную функцию $\varphi(x)$, обеспечивающие сходимость этого ряда к некоторой сумме, понимаемой в классическом смысле по Коши как предел последовательности частичных сумм. А затем, найдя эту сумму, попытаться ослабить наложенные ограничения на $\varphi(x)$.

Но можно, как и в [3, 4], использовать другой подход, упростив тем самым выкладки и при этом не накладывая никаких дополнительных ограничений на $\varphi(x)$, кроме того, что $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$. А именно, можно трактовать ряд справа в формуле (14) изначально как расходящийся (даже если он и сходится) и соответствующим образом определить (или, другими словами, назначить) «сумму» этого ряда («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

Таким образом, найти решение обобщенной начально-граничной задачи (1)–(3) — значит определить (или назначить) «сумму» ряда справа в (14).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ «СУММЫ» РАСХОДЯЩЕГОСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Далее будет показано, что с использованием только аксиом (А)-(В) без использования обычного определения суммы ряда по Коши, как предела его частичных сумм, ряд справа в (14) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где } a_k = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi, \quad (15)$$

а функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ выражаются по простым формулам через функцию $\varphi(x)$ и суммируемы в том и только в том случае, когда суммируема функция $\varphi(x)$.

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщенного решения, необходимо определить «сумму» ряда (15). Важную роль в этом играет теорема Лебега об интегрировании тригонометрического ряда [7, с. 277, теорема 3]. Нам эта теорема потребуется в следующей формулировке.

Теорема 3 (Лебега об интегрировании тригонометрического ряда). Пусть на промежутке $[0, 1]$ задана суммируемая функция $f(x)$, имеющая ряд (15) своим рядом Фурье. Если $[A, B] \subset [0, 1]$, то

$$\int_A^B f(x) dx = \sum_k \int_A^B a_k e^{2k\pi i x} dx.$$

Доказательство этой теоремы без особых затруднений получается из доказательства соответствующей теоремы, приведенной в [7, с. 277].

После формулировки этой теоремы в [7, с. 277] отмечено: «Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно *почленно интегрировать*. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться».

По сути эта теорема разрешает для тригонометрического ряда переставлять суммирование и интегрирование, даже если ряд расходится. Ввиду этого, как уже выше отмечалось, в [3, 4] было предложено дополнить сформулированные выше три аксиомы (А)–(В) для расходящихся рядов правилом (8).

Используя теорему 3, можно определить «сумму» расходящегося ряда (15).

Лемма 1. Если (15) есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$, то «сумма» ряда (15) есть функция $f(x)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство аналогичного результата из [3]–[4].

В самом деле, пусть «сумма» ряда (15) при $x \in [0, 1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L_1[0, 1]$ (мы ограничиваем себя именно суммируемыми функциями). Тогда в соответствии с правилом (8) имеем

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta. \quad (16)$$

По теореме 3 ряд в (16) сходится при любом $x \in [0, 1]$ и его сумма есть

$$\sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta. \quad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) получим, что

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta.$$

А отсюда следует, что $g(x) = f(x)$ для п. в. $x \in [0, 1]$, то есть функция $f(x)$ является «суммой» ряда (15). Лемма доказана. \square

Утверждение леммы 1 вполне согласуется с идеей Эйлера [5], что «сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд».

Описанный метод получения «суммы» расходящегося тригонометрического ряда (15) является «регулярным» [6], так как для сходящихся рядов эта «сумма» совпадает с обычной суммой ряда, то есть с функцией $f(x)$.

5. КОНЕЧНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

В этом разделе доказывается сформулированная выше основная теорема 1 о конечной формуле (6) для обобщенного решения. Исходим из формулы (14), которую запишем в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int_0^1 \left(-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) \right) d\xi \right) d\lambda, \quad (18)$$

Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ имеет место представление

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right),$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 1$ при $x \geq 0$, и $\chi(x) = 0$ при $x < 0$).

Для доказательства потребуются две леммы.

Так как числа λ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, определяемые формулой (13), являются простыми полюсами функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$, то для вычетов от функций $G(x, \xi, \lambda)$ и $G_\xi(x, \xi, \lambda)$ справедливы формулы, даваемые следующей леммой.

Лемма 2. *Справедливы формулы*

$$r_k(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right), \quad (19)$$

$$r_{1k}(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda_k} G_\xi(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(\omega_1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right). \quad (20)$$

Доказательство леммы получается непосредственным подсчетом по формуле для вычета отношения двух целых функций в случае простого полюса [10, с. 417].

В следующей лемме даются формулы преобразования интегралов от $e^{-\lambda_k \omega_j \xi} f(\xi)$, $j = 1, 2$, к коэффициентам Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi i x}\}$ некоторых преобразований функции $f(\xi)$, таких, что эти преобразованные функции суммируемы на $[0, 1]$, если суммируема на $[0, 1]$ функция $f(\xi)$.

Лемма 3. Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то справедливы формулы

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f^*(\xi) d\xi, \quad (21)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f_*(\xi) d\xi, \quad (22)$$

где обозначено

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [0, a), \\ f\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} \quad f_*(\xi) = \begin{cases} f\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ 0, & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство этой леммы получается в результате соответствующих замен переменных под знаками интегралов.

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.

Используя обозначения леммы 2, из (18) получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda t} (-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi)) \right) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 \left(e^{\lambda_k t} (-p_1 r_{1k}(x, \xi) + \lambda_k p_2 r_k(x, \xi)) \varphi(\xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

На основании формул (19)–(20) леммы 2, а также аксиом (А)–(Б) из (24) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{p_1 \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{p_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) \varphi(\xi) d\xi \Bigg).$$

Отсюда, используя формулы Виета: $p_1 = -(\omega_1 + \omega_2)$ и $p_2 = \omega_1 \omega_2$, найдем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_k (e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}) \times \\ &\times \left(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(-\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi \right) + \\ &+ \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi \right). \end{aligned}$$

Далее применяем лемму 3 и аксиому (A). В результате получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) + \\ &+ \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить конечную формулу для обобщенного решения, воспользуемся леммой 1 для определения «сумм» рядов, стоящих справа. Так как функция $e^{2k\pi i x}$ есть 1-периодическая функция, то в результате получим следующее представление для правой части последней формулы для п. в. $(x, t) \in Q$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) + \\ &+ \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Эту формулу можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\left(\omega_1 \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) + \omega_2 \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) - \right.$$

$$- \left(\omega_1 \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) + \omega_2 \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right). \quad (25)$$

Используя формулы (23) леммы 3, получим более простое представление для комбинации функций, стоящих в скобках в (25)

$$\omega_1 \varphi^*(\xi) + \omega_2 \varphi_*(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi \left(\frac{\xi}{a} \right), & \xi \in [0, a); \\ \omega_1 \varphi \left(\frac{1 - \xi}{1 - a} \right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} = \widehat{\varphi}(\xi),$$

где $\widehat{\varphi}(\xi)$ именно та функция, которая была определена в формулировке теоремы 1 формулой (7).

С учетом этого формулу (25) можно записать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (26)$$

а это и есть формула (6) из формулировки теоремы 1.

Таким образом, основная теорема 1 настоящей статьи доказана.

Для сравнения целесообразно привести следующий результат о формуле для классического решения из [9].

Теорема 4. Пусть выполняется условие (4). Для того, чтобы задача (1)–(3) имела единственное классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны, $\varphi''(x) \in L_1[0, 1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. При этом решение $u(x, t)$ определяется формулой (6) (или (26)).

Следовательно, и классическое и обобщенное решения выражаются одной и той же формулой. Этот факт подтверждает правильность изложенного подхода получения формулы (6) для обобщенного решения.

6. КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Восстановить полную историю исследований начально-граничной задачи (1)–(3) довольно трудно, так как очень много математиков рассматривали такую задачу на протяжении долгого времени под разными углами зрения и использовали разные методы.

Тем не менее, для полноты картины приведем некоторые исторические факты, которые в какой-то мере близки к обсуждаемым проблемам. Некоторые работы и авторы уже цитировались в процессе изложения.

Уравнение (1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна).

Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад в работах [11]–[13].

Излагаемые в настоящей статье результаты получены с использованием второго из двух подходов к решению начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым.

Первый подход, который можно назвать резольвентным, был применен впервые к решению начально-граничных задач для волнового уравнения в [14] и получил развитие в статьях [15]–[16]. Этот метод связан с разбиением формального решения на части, следуя рекомендациям А. Н. Крылова [17, гл. VI] по ускорению сходимости рядов Фурье

В дальнейшем А. П. Хромов дополнил резольвентный метод подходом, связанным с расходящимися рядами формальных решений. Расходящиеся ряды рассматриваются в понимании Л. Эйлера [5]–[6], который, как уже было отмечено выше, является основоположником суммирования расходящихся рядов. Такой подход был первоначально рассмотрен в [18], а затем получил развитие в работах [19]–[21]. Иногда такой подход называют аксиоматическим.

Наиболее просто второй подход А. П. Хромова описан в краткой статье [3], которая уже цитировалась. Развернутое изложение этой статьи, как уже было отмечено, дано в [4].

Историю формирования и развития этого метода, а также полученные с помощью этого метода результаты можно найти в указанных и других работах А. П. Хромова (например, в [22]).

Аналогичный подход к решению смешанных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях использовал И. С. Ломов. Одними из последних его работ являются статьи [23] и [24].

Другой подход, отличный от используемого А. П. Хромовым и И. С. Ломовым и при других постановках начально-граничных задач, получил развитие в работах Ф. Е. Ломовцева. Одна из последних его работ есть статья [25].

Рассматривались и другие задачи для уравнения (1). Например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны исследовалась в статье [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована начально-граничная задача для однородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и смешанной производной в полуполосе плоскости.

Рассмотрен случай нулевой начальной скорости и закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагалось, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат.

Сформулирован и доказан основной результат статьи, а именно, теорема о конечной формуле для обобщенного решения на основе предложенного А. П. Хромовым аксиоматического подхода. Главное достоинство этой формулы состоит в том, что в ней не требуется какое-либо предварительное продолжение начальной функции за пределы отрезка ее определения. Полученная формула для обобщенного решения совпадает с соответствующей формулой для классического решения.

В частном случае простейшего уравнения колебания струны эта формула для обобщенного решения имеет другой вид, если сравнивать с формулой, полученной ранее А. П. Хромовым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
NAIMARK, M. (1969) *Linear differential operators*. Moscow: Nauka.
2. Рыхлов, В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2022. — 204.. — С. 124–134.
RYKHLOV, V. S. (2022) Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with splitting boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions. *Results of science and technology. Series Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*. 204. Pp. 124–134.
3. Хромов, А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 319–324.

- KHROMOV, A. P. (2022) Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Modern problems of the theory of functions and their applications: materials of the 21st International Saratov Winter School*. Saratov: Saratov University. Pp. 319–324.
4. Хромов, А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — 22(3). — С. 322–331.
- KHROMOV, A. P. (2022) Divergent series and generalized mixed problem for the wave equation of the simplest kind. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 22 (3). Pp. 322–331.
5. Эйлер, Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. — 580 с.
- EULER, L. (1949) *Differential calculus*. Moscow; Leningrad: GITTL (State Publishing House of Technical and Theoretical Literature).
6. Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. — 505 с.
- HARDY, G. (1951) *Divergent series*. Moscow: Foreign Literature Publishing House.
7. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
- NATANSON, I. (1974) *Theory of functions of a real variable*. Moscow: Nauka.
8. Толстов, Г. П. О второй смешанной производной // Матем. сб. — 1949. — 24(66). — С. 27–51.
- TOLSTOV, G. P. (1949) On the second mixed derivative. *Sbornik: Mathematics*. 24(66) (1). Pp. 27–51.
9. Рыхлов, В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. — Саратов: Саратовский университет, 2022. — С. 252–255.
- RYKHLOV, V. S. (2022) Solution of the initial-boundary problem for an equation of hyperbolic type with a mixed derivative. *Modern problems of the theory of functions and their applications: materials of the 21st International Saratov Winter School*. Saratov: Saratov University. Pp. 252–255.

10. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории / А. И. Маркушевич. — М.: Наука, 1967. — 488 с.
MARKUSHEVICH, A. I. (1967) *Theory of analytic functions. Vol. 1. Beginnings of the theory*. Moscow: Nauka.
11. ARCHIBALD, F. R. & EMSLIE, A. G. (1958) The vibration of a string having a uniform motion along its length. *Journal of Applied Mechanics*. 25 (1). Pp. 347–348.
12. MAHALINGAM, S. (1957) Transverse vibrations of power transmission chains. *British Journal of Applied Physics*. 8 (4). Pp. 145–148.
13. SACK, R. A. (1954) Transverse oscillations in traveling strings. *British Journal of Applied Physics*. 5 (6). Pp. 224–226.
14. Бурлуцкая, М. Ш., Хромов, А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458(2). — С. 138–140.
BURLUTSKAYA, M. Sh. & KHROMOV, A. P. (2014) Resolvent approach in Fourier method. *Doklady Mathematics*. 458 (2). Pp. 138–140.
15. Бурлуцкая, М. Ш., Хромов, А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2015. — 55(2). — С. 229–241.
BURLUTSKAYA, M. Sh. & KHROMOV, A. P. (2015) Resolvent approach for wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55 (2). Pp. 229–241.
16. Хромов, А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2015. — 56(2). — С. 239–251.
KHROMOV, A. P. (2015) The formal solution behavior of the mixed problem for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56 (2). Pp. 239–251.
17. Крылов, А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А. Н. Крылов. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 368 с.
KRYLOV, A. N. (1950) *About some differential equations mathematical physics having applications in technical matters*. Moscow; Leningrad: GITTL (State Publishing House of Technical and Theoretical Literature).

18. Хромов, А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» — XXX. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 291–300.

KHROMOV, A. P. (2019) Divergent series and functional equations related to analogues of a geometric progression. *Modern methods of the theory of boundary value problems: Proceedings of the Intern. conference: Voronezh Spring Mathematical School "Pontryaginskie reading" XXX*. Voronezh: VSU Publishing House. Pp. 291–300.

19. Хромов, А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. — 2019. — 19(3). — С. 280–288.

KHROMOV, A. P. (2019) On the classical solution of mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial speed. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 19 (3). Pp. 280–288.

20. Хромов, А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: Математика. Механика / Вып. 21. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2019. — С. 62–67.

KHROMOV, A. P. (2019) Divergent series and mixed problem for the wave equation. *In: Mathematics. Mechanics*. Issue 21. Pp. 62–67.

21. Хромов, А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й междунар. Саратовской зимней школы. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 433–439.

KHROMOV, A. P. (2022) Divergent series and Fourier method for wave equation. *Modern problems of the theory of functions and their applications: materials of the 20th International Saratov Winter School*. Saratov: LLC Publishing House "Scientific Book". Pp. 433–439.

22. Хромов, А. П., Корнев, В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — 27(4). — С. 215–238.

KHROMOV, A. P. & KORNEV, V. V. (2021) Divergent series in the Fourier method for wave equation. *Proceedings of IMM UBr RAS*. 27 (4). Pp. 215–238.

23. Ломов, И. С. Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та / Сер. 15. Вычисл. матем.и киберн. — 2022. — (3). — С. 33–40.
LOMOV, I. S. (2022) A new method for constructing a generalized solution mixed problem for the telegraph equation. *Vestn. Moscow university. Ser. 15. Calc. Mathematics and Cybern* (3). Pp. 33–40.
24. Ломов, И. С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференциальные уравнения. — 2022. — 58(11). — С. 1471–1483.
LOMOV, I. S. (2022) Building a generalized solution of a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches. *Differential Equations*. 58 (11). Pp. 1471–1483.
25. Ломовцев, Ф. Е. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Проблемы физики, математики и техники. — 2022. — 1(50). — С. 62–73.
LOMOVTSEV, F. E. (2022) Global correctness theorem the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the segment. *Problems of physics, mathematics and technology*. 1 (50). Pp. 62–73.
26. Муравей, Л. А., Петров, В. М., Романенков, А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны // Вестник Мордовского ун-та. — 2018. — 28(4). — С. 472–485.
MURAVEY, L. A., PETROV, V. M. & ROMANENKOV, A. M. (2018) On the problem of damping transverse oscillations longitudinally moving string. *Bulletin of Mordovian University*. 28 (4). Pp. 472–485.

УДК: 621.396

MSC2010: 01-08

О ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ПОЛНОТЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БЛА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© М. Х. Чан¹, Н. К. Юрков², К. Т. Нгуен³

¹АКАДЕМИЯ ПВО и ВВС ВЬЕТНАМА
ОБШ. КИМ ШОН, ХАНОЙ, 12713, ВЬЕТНАМ
E-MAIL: *minhhai.kq80@gmail.com*

²ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
УЛ. КРАСНАЯ, 40, ПЕНЗА, 4400026, РОССИЯ
E-MAIL: *yurkov_nk@mail.ru*

³ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ЛЕ КУЙ ДОНА
УЛ. ХОАНГ КУОК ВЬЕТ, 100, Р. КАУ ЗЕЙ, ХАНОЙ, 11307, ВЬЕТНАМ
E-MAIL: *tikrus20.21@gmail.com*

ON THE PROBLEM OF ESTIMATING THE COMPLETENESS OF THE UAV
AERODYNAMIC CHARACTERISTICS UNDER UNCERTAINTY.

Tran M. H., Yurkov N. K., Nguyen Q. T.

Abstract. The article presents the formulation of the problem of clarifying the aerodynamic characteristics (ADC) of unmanned aerial vehicles (UAVs), obtained from the results of flight technical tests (LTI) or aerodynamic blowdowns, which is the task of multi-criteria multi-parameter multi-factor identification of indicators and characteristics of complex technical systems and their structural-parametric optimization.

In the presence of uncontrolled factors, i. e. conditions of uncertainty, the problem of estimating the completeness of the UAV aerodynamic characteristics under uncertainty is supplemented by operators of uncertainty disclosure. In design tasks two types of uncertainties are usually considered: multi-factor uncertainty (natural and (or) artificial origin) and multi-criteria uncertainty associated with design decisions, taking into account the interests of all the optimality criteria that have been set, which is difficult to formalize completely.

The problem of estimating the completeness of UAV characteristics under conditions of uncertainty is outlined. A software and methodological complex for the statistical synthesis of an aerodynamic UAV model is presented.

The following issues are addressed:

- to develop a method of statistical analysis of structural and parametric design relationships of aerodynamic characteristics of UAVs, which allows to restore design and functional relationships between design parameters and criteria assessments of the aerodynamic model of UAVs;
- to develop a method for statistically assessing the aerodynamic completeness of UAVs from experimental data, allowing to assess the completeness of the experimental (approximate) model developed by the UAV on determination criteria and Darbin-Watson, which differs from known topics, that this method summarizes the analytical procedures of the method

in the inverse function space, which show the extent to which the built approximation model explains the patterns contained in the statistical sample;

- to develop mathematical models and algorithms of synthesis of aerodynamic characteristics of UAVs on experimental data, which reduce the financial and time cost of aerodynamic blowing in a supersonic wind tunnel and full-scale testing in the development of new UAV samples and their modifications.

Keywords: aerodynamic characteristics (ADC), unmanned aerial vehicles (UAVs), identification, multicriteria optimization, structural-parametric synthesis.

ВВЕДЕНИЕ

Целью работы является разработка метода статистических оценок полноты аэродинамических характеристик беспилотных летательных аппаратов (БЛА) в условиях неопределенности по экспериментальным данным для сокращения финансовых и временных затрат натурных испытаний при разработке новых образцов БЛА и их модификации.

Задача структурно-параметрического синтеза СТС представлена оптимизационной процедурой в виде [2]:

$$J^{opt} = \max_{\substack{a \in A \\ z(t) \in Z}} \max_{b \in B} J(a, z(t), b), \quad (1)$$

где J — принятый критерий оптимальности, a — вектор проектных параметров, A — область допустимых проектных параметров, $z(t)$ — вектор режимов движения системы, Z — область допустимых режимов движения системы, b — вектор параметров, описывающих структурные состояния систем, B — область допустимых структурных состояний системы.

Для данной задачи сначала проводится структурный выбор (шаг структурной оптимизации) критерием $\max_{b \in B} J(a, z(t), b)$, и в рамках выбранной структуры проводится параметрическая оптимизация $\max_{\substack{a \in A \\ z(t) \in Z}} J(a, z(t), b^*)$ по варьируемым параметрам системы.

При наличии неконтролируемых факторов, т. е. условий неопределенности задача (1) дополняется операторами раскрытия неопределенностей. В проектных задачах обычно рассматривают два вида неопределенностей: многофакторную неопределенность (природного и/или искусственного происхождения) и многокритериальную неопределенность, связанную с принятием проектных решений, с учетом интересов

одновременно всех заданных критериев оптимальности, что трудно полностью формализовать. Задача (1) для этого случая будет иметь вид [2]–[5]:

$$J^{opt} = \max_{\substack{a \in A \\ z(t) \in Z}} \max_{b \in B} \inf_{\omega \in W} opt J(a, z(t), b, \omega), \quad (2)$$

здесь $J(a, z(t), b, \omega)$ – векторный критерий, $opt J(\cdot)$ – оператор, реализующий проектные оптимальные параметры, $inf(\cdot)$ – оператор, реализующий свертки неконтролируемых факторов (объединение или комбинирование), где ω – вектор неконтролируемых факторов, W – область возможных состояний среды.

Качество восстанавливаемых аэродинамических зависимостей в программном комплексе оценивается по двум статистическим критериям [2], [8]:

1. Задача оптимизации по критерию регулярности:

$$\Delta^2(B) = \sum_{i=1}^{N_A} (J_M - J_T)_i^2 / \sum_{i=1}^{N_B} (J_T)_i^2 \Rightarrow \min.$$

2. Задача оптимизации по критерию несмещенности:

$$n_{CM} = \sum_{i=1}^N (J_A - J_B)_i^2 / \sum_{i=1}^N (J_T)_i^2 \Rightarrow \min,$$

здесь N – объем статистической выборки.

Характеристики и перекрестные связи аэродинамической модели БЛА, представлены в явном виде [2, 6–8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_x^M = c_{x_0} + r_1(\alpha^2 + \beta^2) + r_2(\delta_\theta^2 + \delta_\Psi^2) + r_3\delta_\gamma^2 + r_4(\alpha\delta_\theta + \beta\delta_\Psi) \\ \quad + r_5(\alpha^2 + \beta^2) + r_6(\alpha^2\beta^2), \\ c_y^M = c_y^\alpha\alpha + c_y^\delta\delta_\theta + c_{10}\alpha^3 + c_{11}\alpha\beta^2 + c_{12}\alpha^2\delta_\theta + c_{13}\beta^2\delta_\theta + c_{14}\alpha\beta\delta_\Psi \\ \quad + c_{20}\alpha\delta_\gamma + c_y^{\omega_z}w_z, \\ c_z^M = -c_z^\alpha\beta - c_z^\delta\delta_\Psi - c_{10}\beta^3 - c_{11}\beta\alpha^2 - c_{12}\beta^2\delta_\Psi - c_{13}\alpha^2\delta_\Psi - c_{14}\alpha\beta\delta_\theta \\ \quad + c_{20}\alpha\beta + c_z^{\omega_y}w_y, \\ m_y^M = m_z^\alpha\beta + m_z^\delta\delta_\Psi + b_{10}\beta^3 + b_{11}\beta\alpha^2 + b_{12}\beta^2\delta_\Psi + b_{13}\alpha^2\delta_\Psi + b_{14}\alpha\beta\delta_\theta \\ \quad + b_{20}\alpha\beta, \\ m_z^M = m_z^\alpha\beta + m_z^\delta\delta_\Psi + b_{10}\alpha^3 + b_{11}\alpha\beta^2 + b_{12}\alpha^2\delta_\theta + b_{13}\beta^2\delta_\theta + b_{14}\alpha\beta\delta_\Psi \\ \quad + b_{20}\beta\delta_\gamma, \end{array} \right. \quad (3)$$

здесь: $c_x^M, c_y^M, c_z^M, m_x^M, m_y^M, m_z^M$ — модельные значения аэродинамических коэффициентов, α — угол атаки, β — угол скольжения БЛА; $\delta_\theta = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_4)$ — угол отклонения рулей в вертикальной плоскости; $\delta_\psi = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3)$ — угол отклонения рулей в горизонтальной плоскости; $\delta_s = \frac{1}{4}(\delta_3 - \delta_1 + \delta_4 - \delta_2)$ — угол отклонения рулей по крену, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ — углы отклонения рулей БЛА по траекториям движения (рис. 1) [2].

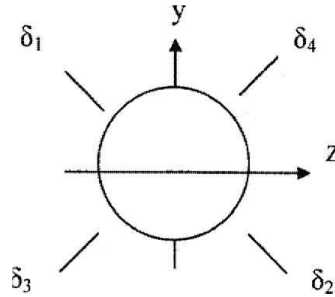


Рис. 1. Углы отклонения рулей БЛА по траекториям движения

Линейные параметры $c_{x_0}, c_x^\alpha, c_y^\delta, m_z^\alpha, m_z^\delta, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{14}, c_{20}, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{14}, b_{20}$ подлежат определению из условия минимума критерия регулярности. Для данной аэродинамической модели минимизация по критерию регулярности соответствует процессу структурного выбора, так как выбор производственных аэродинамических коэффициентов $c_{x_0}, c_y^\delta, m_z^\alpha, m_z^\delta$ показывает, какая должна быть аэродинамическая схема БЛА, какие должны быть режимы его движения и т.п.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПОЛНОТЫ ХАРАКТЕРИСТИК БЛА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Совокупность требований, ограничений и критериев, предъявляемых к БЛА по формальным признакам, образует векторный критерий, имеющий следующий состав: $J = (\rho_{\text{прол}}, (\varphi - \frac{\pi}{2}), V, \Delta^2(B))$, где $\rho_{\text{прол}}$ — величина промаха БЛА, $\rho_{\text{прол}} \Rightarrow \min$, $(\varphi - \frac{\pi}{2})^2$ — требование по углу подлета к цели, $(\varphi - \frac{\pi}{2})^2 \Rightarrow \min$, V — скорость подлета к цели, $V \Rightarrow \max$, $\Delta^2(B)$ статистический критерий регулярности $\Delta^2(B) \Rightarrow \min$.

Задача идентификации характеристик БЛА состоит в выборе такого проектного решения d , которое удовлетворяет системе функциональных ограничений [10]:

$$\begin{cases} \rho(d) \leq \rho^*, & \varphi(d) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, & V(d) \geq V^*, \\ \Delta^2(c_x) \leq \Delta^2(c_x)^*, & \Delta^2(c_y) \leq \Delta^2(c_y)^*, & \Delta^2(c_z) \leq \Delta^2(c_z)^*, \\ \Delta^2(m_y) \leq \Delta^2(m_y)^*, & \Delta^2(m_z) \leq \Delta^2(m_z)^*, & \end{cases} \quad (4)$$

где $\rho^*, V^*, \Delta^2(c_x)^*, \Delta^2(c_y)^*, \Delta^2(c_z)^*, \Delta^2(m_y)^*, \Delta^2(m_z)^*$ — заданные уровни критериальных ограничений, которые выбираются из условия обеспечения безопасных режимов движения. Здесь $\Delta^2(\bullet)$ есть критерии регулярности, рассчитываемые для всех аэродинамических коэффициентов.

Система функциональных ограничений содержит девять частных критериев оптимальности [11]:

$$J_{opt} = (\rho, \varphi - \frac{\pi}{2}, V, \Delta^2(c_x), \Delta^2(c_y), \Delta^2(c_z), \Delta^2(m_y), \Delta^2(m_z), \Delta^2(m_y)),$$

что приводит к проблеме многокритериальной оптимизации.

Используя аддитивный принцип оптимальности приведенный выше векторный критерий можно представить в виде:

$$J_1 = \min_{d \in D} \left[\alpha_1 \cdot \rho + \alpha_2 \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \alpha_3 (V) + \alpha_4 \cdot \Delta^2(B) \right], \quad (5)$$

где α_i — весовые коэффициенты, $\alpha_i \geq 0, i = \overline{1, 7}; \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1; d$ — вектор проектного решения; D — область допустимых решений. По найденным аэродинамическим производным восстанавливается экспериментальная аэродинамическая модель БЛА в следующем полиномиальном базисе

$$\left\{ \begin{array}{l} c_x = c_{x_0} + \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial c_x}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_x}{\partial \omega_z} \omega_z + \frac{\partial c_x}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial c_x}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial c_x}{\partial \delta_2} \delta_2 + \frac{\partial c_x}{\partial M} M; \\ c_y = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial c_y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_y}{\partial \omega_z} \omega_z + \frac{\partial c_y}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial c_y}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial c_y}{\partial \delta_2} \delta_2 + \frac{\partial c_y}{\partial M} M; \\ c_z = \frac{\partial c_z}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial c_z}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial c_z}{\partial \omega_z} \omega_z + \frac{\partial c_z}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial c_z}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial c_z}{\partial \delta_2} \delta_2 + \frac{\partial c_z}{\partial M} M; \\ M_y = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial M_y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_z} \omega_z + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_y}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial M_y}{\partial \delta_2} \delta_2 + \frac{\partial M_y}{\partial M} M; \\ M_z = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial M_z}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_z}{\partial \omega_z} \omega_z + \frac{\partial M_z}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_z}{\partial \delta_1} \delta_1 + \frac{\partial M_z}{\partial \delta_2} \delta_2 + \frac{\partial M_z}{\partial M} M; \end{array} \right. \quad (6)$$

Векторный критерий оценки качества БЛА представлен в форме:

$$J_2 = \alpha_1 \rho + \alpha_2 (\varphi - \pi/2) + \alpha_3 \left[\Delta^2(B)_{c_x} + \Delta^2(B)_{c_y} + \Delta^2(B)_{c_z} + \Delta^2(B)_{m_y} + \Delta^2(B)_{m_z} \right] + \alpha_4 \mu \quad (7)$$

где ρ — промах, φ — угол тангажа, α_i — весовые коэффициенты, сумма которых равняется 1, μ — мера области достижимости.

Программно-методический комплекс статистического синтеза аэродинамической модели БЛА представлен на рис. 2 [12].

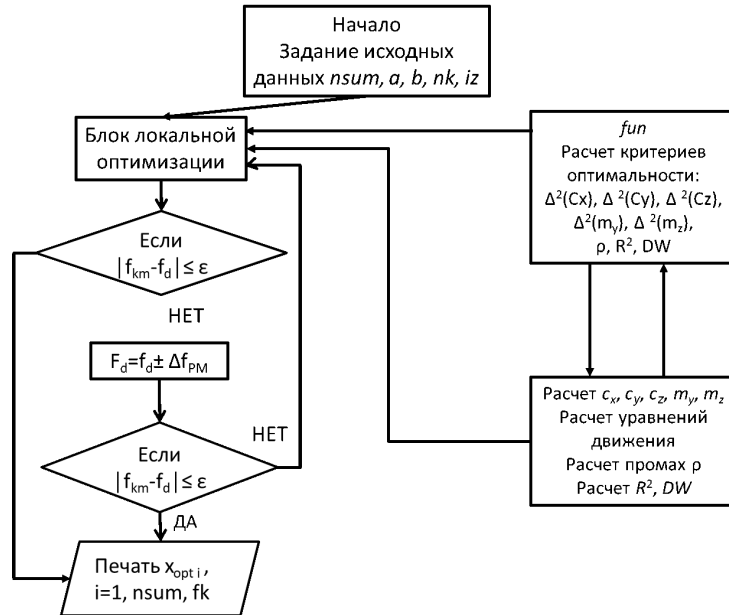


Рис. 2. Программно-методический комплекс статистического синтеза аэродинамической модели БЛА

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение поставленной задачи позволяет:

- разработать методику статистического анализа структурно-параметрических проектных связей аэродинамических характеристик БЛА, которая позволяет восстановить проектно-функциональные связи между проектными параметрами и критериальными оценками аэродинамической модели БЛА;
- разработать метод статистической оценки полноты аэродинамических характеристик БЛА по экспериментальным данным, позволяющий оценить полноту экспериментальной (аппроксимирующей) модели разработанного БЛА по критериям детерминации и Дарбина-Уотсона, отличающийся от известных тем, что данный метод обобщает аналитические процедуры метода в пространстве обратных функций, которые показывают насколько построенная аппроксимирующая модель объясняет закономерности, содержащиеся в статистической выборке;

- разработать математические модели и алгоритмы синтеза аэродинамических характеристик БЛА по экспериментальным данным, которые позволяют сократить финансовые и временные затраты на аэродинамическую продувку в сверхзвуковой аэродинамической трубе и натурные испытания при разработке новых образцов БЛА и их модификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берестов, Л. М. Частотные методы идентификации летательных аппаратов / Л. М. Берестов, Б. К. Поплавский, Л. Я. Мирошниченко. — М.: Машиностроение, 1985. — 184 с.
BERESTOV, L. M., POPLAVSKY, B. K. & MIROSHNICHENKO, L. YA. (1985) *Frequency methods for identifying aircraft*. Moscow: Mechanical Engineering. 184.
2. Балык, В. М. Статистический синтез проектных решений при разработке сложных систем / В. М. Балык. — М.: МАИ, 2011. — 278 с.
BALYK, V. M. (2011) *Statistical synthesis of design solutions in the development of complex systems*. Moscow: MAI. 278.
3. Васильченко, К. К. Структурная идентификация математической модели движения самолета / К. К. Васильченко, Ю. А. Кочетков, В. А. Леонов, Б. К. Поплавский. — М.: Машиностроение, 1993. — 351 с.
VASILCHENKO, K. K., KOCHETKOV, YU. A., LEONOV, V. A. & POPLAVSKY, B. K. (1993) *Structural identification of a mathematical model of aircraft movement*. Moscow: Mashinostroenie. 351.
4. Гуляев В. В. Математическое моделирование при формировании облика летательного аппарата / В. В. Гуляев [и др.]; под ред. В. А. Подобедова. — Москва: Машиностроение — Полет, 2005. — 494 с.
GULYAEV, V. V., DEMCHENKO, O. F., DOLZHENKOV, N. N. et al (2005) *Mathematical modeling in shaping the appearance of an aircraft*. М.: Mechanical Engineering. 494.
5. Дубов, Ю. А. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. — Москва: Наука, 1986. — 294 с.
DUBOV, YU. A. et. al (1986) *Multicriteria models for the formation and selection of system options*. Moscow: Nauka. 294.

6. Калугин, В. Т. Численный метод расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов при сверхзвуковом обтекании: учебное пособие / В. Т. Калугин, Г. Г. Мордвинцев, П. А. Чернуха. — Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. — 34 с.

KALUGIN, V. T. et al (2007) *Numerical method for calculating the aerodynamic characteristics of aircraft during supersonic flow: textbook, manual*. Moscow: Publishing house of MSTU im. N. E. Bauman. 34.

7. Качанов, Б. О. Метод спектрально-временной идентификации продольного и бокового движения самолета / Б. О. Качанов, К. Б. Хролович // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 1993. — 1. — С. 22–26.

KACHANOV, B. O. & KHROLOVICH, K. B. (1993) Method of spectral-temporal identification of longitudinal and lateral motion of an aircraft. *News of higher educational institutions. Aviation technology*. (1). Pp. 22–26.

8. Корянов, В. В. Математическая модель информационно-статистического синтеза беспилотных летательных аппаратов по экспериментальным данным / В. В. Корянов, В. Т. Нгуен // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2016. — 2. — С. 1.

KORYANOV, V. V. & NGUYEN, V. T. (2016) Mathematical model of information statistical synthesis of unmanned aerial vehicles based on experimental data. *Engineering journal: science and innovation*. (2). Pp. 1.

9. Куприков, М. Ю. Структурно-параметрический синтез геометрического облика самолета при «жестких» ограничениях: Учеб. пособие / М. Ю. Куприков. — Москва: Изд-во МАИ, 2003. — 63 с.

KUPRIKOV, M. YU. (2003) *Structural-parametric synthesis of the geometric appearance of an aircraft under "hard" restrictions*. Moscow: MAI. 63.

10. Нгуен, К. Т. Многофакторная и многокритериальная неопределенность при аэродинамическом моделировании БЛА по летным данным / К. Т. Нгуен, А. Н. Назаров, М. Х. Чан // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2017. — Т. 22(1). — С. 59–68.

NGUYEN, Q. TH., NAZAROV A. N. & TRAN, M, H. (2017) Multifactor and multicriteria uncertainty in aerodynamic modeling of UAVs based on flight data. *Moscow: Journal "Electromagnetic waves and electronic systems"*. 22 (1). Pp. 59–68.

11. Нгуен, К. Т. Статистический подход к задаче идентификации аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата по экспериментальным данным / К. Т. Нгуен, А. Н. Назаров, М. Х. Чан // Успехи современной радиоэлектроники. — 2017. — 1. — С. 10–16.

NGUYEN, Q. TH., NAZAROV, A. N. & TRAN, M. H. (2017) Statistical approach to the problem of identifying the aerodynamic characteristics of an unmanned aerial vehicle from experimental data. *Moscow: Journal "Advances of Modern Radio Electronics"*. (1). Pp. 10–16.

12. Нгуен, К. Т. Подход к исследованию задачи идентификации аэродинамических характеристик летательного аппарата по экспериментальным данным / К. Т. Нгуен, М. Х. Чан // Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надежности, устойчивости и эффективности систем: материалы международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию со дня рождения выдающегося ученого академика АН СССР (РАН) Всеволода Сергеевича Авдеевского, Елец, 01–04 февраля 2017 года / Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина. — 2017. — С. 259–265.

NGUYEN, K. T. & TRAN, M. H. (2017) An approach to studying the problem of identifying the aerodynamic characteristics of an aircraft from experimental data. *Yelets: conference: "Fundamental-Applied Problems of Safety, Survivability, Reliability, Stability and Efficiency of Systems" dedicated to the 95th anniversary of the birth of an outstanding scientist academician USSR Academy of Sciences (RAN) Vsevolod Sergeevich Avduevsky February 1–4*. Pp. 259–265.

УДК: 517.984

MSC2010: 46L60, 47L90, 70H06, 70F05

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. SECOND SINGLET STATE

© S. M. Tashpulatov

INSTITUTE OF NUCLEAR PHYSICS OF ACADEMY OF SCIENCE OF REPUBLIC OF UZBEKISTAN
100214, REPUBLIC OF UZBEKISTAN, TASHKENT, M. ULUGBEK REGION, M. ULUGBEK VILLAGE, U. GULYAMOV ST. 1.
E-MAIL: *sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru, togaymurodota@gmail.com*

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. SECOND SINGLET STATE.

Tashpulatov S. M.

Abstract. We consider the energy operator of six electron systems in the Hubbard model and investigate the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the second singlet state of the system. It is shown that in one-dimensional and two-dimensional cases, the essential spectrum of the operator of the six-electron second singlet state consists of the union of seven segments, and the discrete spectrum of the six-electron second singlet state consists of a single eigenvalue, lying below (above) the domain of the lower (upper) edge of the essential spectrum of this operator. And, in the three-dimensional case, the following situations occur: a) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of the union of seven segments, and the discrete spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of a single eigenvalue; b) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of the union of four segments, and the discrete spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of an empty set; c) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of the union of two segments, and the discrete spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of an empty set; d) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of single segment, and the discrete spectrum of the six-electron second singlet state operator is empty set; provided that every situation occurs. Found the conditions when every situation to take place.

Keywords: *Hubbard model, six-electron system, essential spectra, discrete spectrum, octet state, quintet state, triplet state, singlet state.*

INTRODUCTION

In the early 1970s, three papers [2, 3, 8], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems, appeared almost simultaneously and independently. In that model, a single nondegenerate electron band with a local Coulomb interaction is considered. The

model Hamiltonian contains only two parameters: the parameter B of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter U of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian can be written as

$$H = B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}, \quad (1)$$

where B is the transfer integral between neighboring sites, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, \uparrow and \downarrow denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a_{m,\gamma}^+$ and $a_{m,\gamma}$ denote Fermi operators of creation and annihilation of an electron with spin γ on a site $m \in Z^\nu$, here Z^ν ν - dimensional integer valued lattice, ν - lattice dimensionality.

The model proposed in [2, 3, 8] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system, although the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [1]. We also recall that the Hubbard model is a particular case of the Shubin–Wonsowsky polaron model [15], which had appeared 30 years before [2, 3, 8]. In the Shubin–Wonsowsky model, along with the on-site Coulomb interaction, the interaction of electrons on neighboring sites is also taken into account. The simplicity and sufficiency of Hamiltonian (1) have made the Hubbard model very popular and effective for describing strongly correlated electron systems. The Hubbard model is an approximation used in solid-state physics to describe transition between conducting and insulating state. It is the simplest model describing particle interaction on a lattice.

The Hubbard model well describes the behavior of particles in a periodic potential at sufficiently low temperatures such that all particles are in the lower Bloch band and long-range interactions can be neglected. If the interaction between particles on different sites is taken into account, then the model is often called the extended Hubbard model. It was proposed for describing electrons in solids, and it remains especially interesting since then for studying high-temperature superconductivity. Later, the extended Hubbard model also found applications in describing the behavior of ultracold atoms in optical lattices. In considering electrons in solids, the Hubbard model can be considered a sophisticated version of the model of strongly bound electrons, involving only the electron hopping term in the Hamiltonian. In the case of strong interactions, these two models can give essentially different results. The Hubbard model exactly predicts the existence of so-called Mott insulators, where conductance is absent due to strong repulsion between particles. The Hubbard model is based on the approximation of strongly coupled electrons. In

the strongcoupling approximation, electrons initially occupy orbital's in atoms (lattice sites) and then hop over to other atoms, thus conducting the current. Mathematically, this is represented by the so-called hopping integral. This process can be considered the physical phenomenon underlying the occurrence of electron bands in crystal materials. But the interaction between electrons is not considered in more general band theories. In addition to the hopping integral, which explains the conductance of the material, the Hubbard model contains the so-called on-site repulsion, corresponding to the Coulomb repulsion between electrons. This leads to a competition between the hopping integral, which depends on the mutual position of lattice sites, and the on-site repulsion, which is independent of the atom positions. As a result, the Hubbard model explains the metal–insulator transition in oxides of some transition metals. When such a material is heated, the distance between nearest-neighbor sites increases, the hopping integral decreases, and on-site repulsion becomes dominant.

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [4, 9–11, 16]. Therefore, obtaining exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model is of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [9]. In the work [9] is considered the Hamiltonian of the form

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (2)$$

Here A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, \uparrow and \downarrow denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a_{m,\gamma}^+$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. It is known that two-electron systems can be in two states, triplet and singlet [4, 9–11, 16]. It was proved in [9] that the spectrum of the system Hamiltonian H^t in the triplet state is purely continuous and coincides with a segment $[m, M] = [2A - 4B\nu, 2A + 4B\nu]$, where ν is the lattice dimensionality, and the operator H^s of the system in the singlet state, in addition to the continuous spectrum $[m, M]$, has a unique antibound state for some values of the quasimomentum. For the antibound state, correlated motion of the electrons is realized under which the contribution of binary states is large. Because the system is closed, the energy must remain constant and large. This prevents the electrons from being separated by long distances. Next, an essential point is that bound states (sometimes called scattering-type states)

do not form below the continuous spectrum. This can be easily understood because the interaction is repulsive. We note that a converse situation is realized for $U < 0$: below the continuous spectrum, there is a bound state (antibound states are absent) because the electrons are then attracted to one another.

For the first band, the spectrum is independent of the parameter U of the on-site Coulomb interaction of two electrons and corresponds to the energy of two noninteracting electrons, being exactly equal to the triplet band. The second band is determined by Coulomb interaction to a much greater degree: both the amplitudes and the energy of two electrons depend on U , and the band itself disappears as $U \rightarrow 0$ and increases without bound as $U \rightarrow \infty$. The second band largely corresponds to a one-particle state, namely, the motion of the doublet, i. e., two-electron bound states.

The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [17]. In the three-electron systems are exists quartet state, and two type doublet states. The quartet state corresponds to the free motion of three electrons over the lattice with the basic functions $q_{m,n,p}^{3/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0$. In the work [17] is proved that the essential spectrum of the system in a quartet state consists of a single segment and the three-electron bound state or the three-electron antibound state is absent. The doublet state corresponds to the basic functions ${}^1d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0$, and ${}^2d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ \varphi_0$. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of first doublet state operator \tilde{H}_1^d is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of \tilde{H}_1^d consists of a single point, i. e., in the system exists unique antibound state. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator \tilde{H}_1^d is the union of three segments and the discrete spectrum of operator \tilde{H}_1^d consists of a single point, i. e., in the system exists only one antibound state, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator \tilde{H}_1^d is the union of two segments and the discrete spectrum of the operator \tilde{H}_1^d is empty, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator \tilde{H}_1^d consists of a single segment, and discrete spectrum is empty, i. e., in the system the antibound state is absent. In the one-dimensional case, the essential spectrum of the operator \tilde{H}_2^d of second doublet state is the union of three segments, and the discrete spectrum of operator \tilde{H}_2^d consists of no more than one point. In the two-dimensional case, we have analogous results. In the three-dimensional case, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator \tilde{H}_2^d is the union of three segments and the discrete spectrum of operator \tilde{H}_2^d consists of no more than one point, i. e., in the system exists no more than one antibound state, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator \tilde{H}_2^d

is the union of two segments and the discrete spectrum of the operator \tilde{H}_2^d is empty, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator \tilde{H}_2^d consists of a single segment, and discrete spectrum is empty, i. e., in the system the antibound state is absent.

The spectrum of the energy operator of system of four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state were studied in [18]. In the four-electron systems are exists quintet state, and three type triplet states, and two type singlet states. The triplet state corresponds to the basic functions ${}^1t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\downarrow}^+ \varphi_0$, ${}^2t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0$, ${}^3t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0$.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system first triplet state operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is exactly the union of two segments and the discrete spectrum of operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is empty. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system first triplet-state operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is the union of two segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is empty, or the essential spectrum of the system first triplet-state operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is single segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\tilde{H}_t^1$ is empty. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system second triplet state operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ consists no more than one point. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ consists no more than one point, or the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ is the union of two segments and the discrete spectrum of the system second triplet state operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ is empty, or the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ consists of single segment and the discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_t^1$ is empty.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ consists no more than one point. In two-dimensional case, we have analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ is the union of three segments, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ consists no more than one point or the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ is the union of two segments, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ is empty, or the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ consists of single segment, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\tilde{H}_t^1$ is empty. We see that there are three triplet states, and they have different origins.

The spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard model in the quintet, and singlet states were studied in [19]. The quintet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice with the basic functions $q_{m,n,p,r}^2 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0$. In the work [19] proved, that the spectrum of the system in a quintet state is purely continuous and coincides with the segment $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, and the four-electron bound states or the four-electron antibound states is absent. The singlet state corresponds to the basic functions ${}^1s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\uparrow}^+ a_{r,\downarrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$, ${}^2s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0$, and these two singlet states have different origins.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ consists only one point. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system first singlet-state operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ consists only one point, or the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ is the union of two segment and the discrete spectrum of the operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ is empty, or the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ consists of single segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\tilde{H}_4^s$ is empty. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ consists only one point. In two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system second singlet-state operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is consists only one point, or the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is the union of two segment and the discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is empty, or the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ consists of single segment and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_4^s$ is empty.

The structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model in the fifth doublet state were studied in [20].

In the five-electron systems exists the sextet state, and five type doublet states, and four type quartet states.

The structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model in the doublet state were investigated in [21] and [22].

The structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of five electron systems in the Hubbard model in a sextet and quartet states were studied in [23].

1. HAMILTONIAN OF THE SYSTEM

We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for second singlet state in the lattice. The Hamiltonian of the chosen model has the form (2).

In the six electron systems has a octet state, and quintet states, and triplet states, and singlet states. The energy of the system depends on its total spin S . Along with the Hamiltonian, the N_e electron system is characterized by the total spin S , $S = S_{max}, S_{max} - 1, \dots, S_{min}, S_{max} = \frac{N_e}{2}, S_{min} = 0, \frac{1}{2}$.

Hamiltonian (2) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S . The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $H_{as} = l_2^{as}((Z^\nu)^6)$, where $l_2^{as}((Z^\nu)^6)$ is the subspace of antisymmetric functions of $l_2((Z^\nu)^6)$. Below we give the constructions of the Fock space $F(H)$.

Let H be a Hilbert space and denote by H^n the n -fold tensor product $H^n = H \otimes H \otimes \dots \otimes H$. We set $H^0 = C$ and $F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n$. The $F(H)$ is called the Fock space over H ; it will be separably, if H is. For example, if $H = L_2(R)$, then an element $\psi \in F(H)$ is a sequence of functions $\psi = \{\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \psi_3(x_1, x_2, x_3), \dots\}$, so that $|\psi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^n} |\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n < \infty$. Actually, it is not $F(H)$, itself, but two of its subspaces which are used most frequently in quantum field theory. These two subspaces are constructed as follows: Let P_n be the permutation group on n elements, and let $\{\psi_n\}$ be a basis for space H . For each $\sigma \in P_n$, we define an operator (which we also denote by σ) on basis elements H^n , by $\sigma(\varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{k_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}}$. The operator σ extends by linearity to a bounded operator (of norm one) on space H^n , so we can define $S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \sigma$. That the operator S_n is the operator of orthogonal projection: $S_n^2 = S_n$, and $S_n^* = S_n$. The range of S_n is called n -fold symmetric tensor product of H . In the case, where $H = L_2(R)$ and $H^n = L_2(R) \otimes L_2(R) \otimes \dots \otimes L_2(R) = L_2(R^n)$, $S_n H^n$ is just the subspace of $L_2(R^n)$, of all functions, left invariant under any permutation of the variables. We now define $F_s(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n H^n$. The space $F_s(H)$ is called the symmetrical Fock space over H , or Boson Fock space over H .

Let $\varepsilon(\cdot)$ is function from P_n to $\{1, -1\}$, which is one on even permutations and minus one on odd permutations. Define $A_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \sigma$; then A_n is an orthogonal projector on H^n . $A_n H^n$ is called the n -fold antisymmetrical tensor product of H . In the case where $H = L_2(R)$, $A_n H^n$ is just the subspace of $L_2(R^n)$, consisting of those functions odd under interchange of two coordinates. The subspace $F_a(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n H^n$ is called the antisymmetrical Fock space over H , or the Fermion Fock space over H .

2. SIX-ELECTRON SECOND SINGLET STATE IN THE HUBBARD MODEL

Let φ_0 be the vacuum vector in the space H_{as} . The second singlet state corresponds to the free motion of six electrons over the lattice and their interactions with the basic functions

$${}^2s_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0.$$

The subspace ${}^2H_s^0$, corresponding to the second singlet state is the set of all vectors of the form

$${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu} f(p, q, r, t, k, n) {}^2s_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu}^0, f \in l_2^{as},$$

where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^6)$. We denote by ${}^2H_s^0$ the restriction of operator H to the subspace ${}^2H_s^0$.

An invariant subspace W of Hilbert space V with respect to a linear operator $T : V \rightarrow V$ is a subspace such that for arbitrary $x \in W$ $T(x) \in W$, in other words $T(W) \subset W$. Invariant subspace is one of the key concepts of linear algebra and functional analysis, which plays an important role in the study of linear maps operating in finite-dimensional and infinite-dimensional linear spaces.

Theorem 1. *The subspace ${}^2H_s^0$ is invariant under the operator H , and the restriction ${}^2H_s^0$ of operator H to the subspace ${}^2H_s^0$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^2\overline{H}_s^0$ acting in the space l_2^{as} as*

$$\begin{aligned} {}^2\overline{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 &= 6A f(p, q, t, t, k, n) + B \sum_{\tau} [f(p + \tau, q, r, t, k, n) + \\ &+ f(p, q + \tau, r, t, k, n) + f(p, q, r + \tau, t, k, n) + f(p, q, r, t + \tau, k, n) + \\ &f(p, q, r, t, k + \tau, n) + f(p, q, r, k, n + \tau)] + U[\delta_{p,q} + \delta_{q,r} + \delta_{p,t} + \delta_{q,k} + \delta_{p,n} + \\ &+ \delta_{r,n} + \delta_{r,t} + \delta_{k,n} + \delta_{t,k}] f(p, q, r, t, k, n). \end{aligned} \quad (3)$$

The operator ${}^2H_s^0$ acts on a vector ${}^2\psi_s^0 \in {}^2H_s^0$ as

$${}^2H_s^0 {}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu} ({}^2\overline{H}_s^0 f)(p, q, r, t, k, n) {}^2s_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu}^0. \quad (4)$$

Proof. We act with the Hamiltonian H on vectors ${}^2\psi_s^0 \in {}^2H_s^0$ using the standard anticommutation relations between electron creation and annihilation operators at lattice sites, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}^+\} = \delta_{m,n} \delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a_{m,\gamma}^+, a_{n,\beta}^+\} = \theta$, and also take into account that $a_{m,\gamma} \varphi_0 = \theta$, where θ is the zero element of ${}^2H_s^0$. This yields the statement of the theorem. \square

Lemma 1. *The spectra of the operators ${}^2H_s^0$ and ${}^2\overline{H}_s^0$ coincide.*

Proof. Because the operators ${}^2H_s^0$ and ${}^2\overline{H}_s^0$ are bounded self-adjoint operators, it follows that if $\lambda \in \sigma({}^2H_s^0)$, then the Weyl criterion ([13, Chap. VII, § 3, pp. 262-263]) implies that there is a sequence $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ such that $\|\psi_i\| = 1$ and $\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\| = 0$. We set $\psi_i = \sum_{p,q,r,t,k,n} f_i(p, q, r, t, k, n) a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0$. Then

$$\begin{aligned} \|({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i\|^2 &= ({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i, ({}^2H_s^0 - \lambda)\psi_i = \sum_{p,q,r,t,k,n} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda) \times \\ &\times f_i(p, q, r, t, k, n)\|^2 (a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0, a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t,k,n} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)F_i(p, q, r, t, k, n)\|^2 (a_{n,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \times \\ &\times a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0, \varphi_0) = \sum_{p,q,r,t,k,n} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)F_i(p, q, r, t, k, n)\|^2 (\varphi_0, \varphi_0) = \\ &= \sum_{p,q,r,t,k,n} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \lambda)F_i(p, q, r, t, k, n)\|^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

as $i \rightarrow \infty$, where $F_i = \sum_{p,q,r,t,k,n} f_i(p, q, r, t, k, n)$. It follows that $\lambda \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Consequently, $\sigma({}^2H_s^0) \subset \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$.

Conversely, let $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. Then, by the Weyl criterion, there is a sequence $\{F_i\}_{i=1}^\infty$ such that $\|F_i\| = 1$ and $\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| = 0$. Setting $F_i = \sum_{p,q,r,t,k,n} f_i(p, q, r, t, k, n)$, $\|F_i\| = (\sum_{p,q,r,t,k,n} |f_i(p, q, r, t, k, n)|^2)^{\frac{1}{2}}$, we conclude that $\|\psi_i\| = \|F_i\| = 1$ and $\|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})F_i\| = \|({}^2\overline{H}_s^0 - \bar{\lambda})\psi_i\| \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$. This means that $\bar{\lambda} \in \sigma({}^2H_s^0)$ and hence $\sigma({}^2\overline{H}_s^0) \subset \sigma({}^2H_s^0)$. These two relations imply $\sigma({}^2H_s^0) = \sigma({}^2\overline{H}_s^0)$. \square

We call the operator ${}^2H_s^0$ the six-electron second singlet state operator in the Hubbard model.

Let $\mathbf{F} : l_2((Z^\nu)^6) \rightarrow L_2((T^\nu)^6) \equiv {}^2\tilde{H}_s^0$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i. e., $\lambda(T^\nu) = 1$.

We set ${}^2\tilde{H}_s^0 = \mathbf{F} {}^2\overline{H}_s^0 \mathbf{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^6)$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

Theorem 2. *The Fourier transform of operator ${}^2\overline{H}_s^0$ is an operator ${}^2\tilde{H}_s^0 = \mathbf{F} {}^2\overline{H}_s^0 \mathbf{F}^{-1}$ acting in the space ${}^2\tilde{H}_s^0$ be the formula*

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 &= h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + U \int_{T^\nu} [f(t, \lambda + \mu - t, \gamma, \theta, \eta, \xi) + \\ &+ f(t, \mu, \gamma, \lambda + \theta - t, \eta, \xi) + f(t, \mu, \gamma, \theta, \eta, \lambda + \xi - t) + f(\lambda, t, \mu + \gamma - t, \theta, \eta, \xi) + \end{aligned}$$

$$+f(\lambda, t, \gamma, \theta, \mu + \eta - t, \xi) + f(\lambda, \mu, t, \gamma + \theta - t, \eta, \xi) + f(\lambda, \mu, t, \theta, \eta, \gamma + \xi - t) + f(\lambda, \mu, \gamma, t, \theta + \eta - t, \xi) + f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, t, \eta + \xi - t) dt, \tag{5}$$

where $h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) = 6A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i + \cos \eta_i + \cos \xi_i]$.

Proof. If $\tilde{f} \in L_2((T^\nu)^6)$, then $({}^2\tilde{H}_s^0 \tilde{f})(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) =$

$$= F {}^2\tilde{H}_s^0 \left(\int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[(\tilde{\lambda}, p) + (\tilde{\mu}, q) + (\tilde{\gamma}, r) + (\tilde{\theta}, t) + (\tilde{\eta}, k) + (\tilde{\xi}, n)]} d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} \times \right. \\ \left. \times d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} \right\}_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} = \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} \tilde{g}(p, q, r, t, k, n) \times \\ \times e^{-i[(\lambda, p) + (\mu, q) + (\gamma, r) + (\theta, t) + (\eta, k) + (\xi, n)]},$$

where $\tilde{g}(p, q, r, t, k, n) = {}^2\tilde{H}_s^0 \left(\int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \times \right. \\ \left. \times e^{i[(\tilde{\lambda}, p) + (\tilde{\mu}, q) + (\tilde{\gamma}, r) + (\tilde{\theta}, t) + (\tilde{\eta}, k) + (\tilde{\xi}, n)]} d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} \right\}_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu}$.

As, since F is a linear transformation, then, the find in (3) direct image of every component, while subsequently sum up take, we have

(a) for $(T_1 f)(p, q, r, t, k, n) = 6A f(p, q, r, t, k, n)$, $f \in l_2((Z^\nu)^6)$ is true of equality

$$\begin{aligned} (FT_1F^{-1})(f)(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) &= F(6A \left\{ \int_{(T^\nu)^6} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \times \right. \\ &\times e^{i[(\tilde{\lambda}, p) + (\tilde{\mu}, q) + (\tilde{\gamma}, r) + (\tilde{\theta}, t) + (\tilde{\eta}, k) + (\tilde{\xi}, n)]} d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} \left. \right\}_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu}) = \\ &= 6A \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} \int_{(T^\nu)^6} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[(\tilde{\lambda}, p) + (\tilde{\mu}, q) + (\tilde{\gamma}, r) + (\tilde{\theta}, t) + (\tilde{\eta}, k) + (\tilde{\xi}, n)]} \times \\ &\times d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} e^{-i[(\lambda, p) + (\mu, q) + (\gamma, r) + (\theta, t) + (\eta, k) + (\xi, n)]} = \\ &= 6A \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} \int_{(T^\nu)^6} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[(\tilde{\lambda} - \lambda, p) + (\tilde{\mu} - \mu, q) + (\tilde{\gamma} - \gamma, r)]} \times \\ &\times [e^{i[(\tilde{\theta} - \theta, t) + (\tilde{\eta} - \eta, k) + (\tilde{\xi} - \xi, n)]} d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} = 6A \int_{(T^\nu)^6} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \times \\ &\times \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} e^{i[(\tilde{\lambda} - \lambda, p) + (\tilde{\mu} - \mu, q) + (\tilde{\gamma} - \gamma, r) + (\tilde{\theta} - \theta, t) + (\tilde{\eta} - \eta, k) + (\tilde{\xi} - \xi, n)]} d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} = \\ &= 6A \int_{(T^\nu)^6} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \delta(\tilde{\lambda} - \lambda) \delta(\tilde{\mu} - \mu) \delta(\tilde{\gamma} - \gamma) \delta(\tilde{\theta} - \theta) \delta(\tilde{\eta} - \eta) \delta(\tilde{\xi} - \xi) \times \\ &\times d\tilde{\lambda} d\tilde{\mu} d\tilde{\gamma} d\tilde{\theta} d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} = 6A \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi), \end{aligned}$$

where $\tilde{f} \in L_2((T^\nu)^6)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu) \in T^\nu$, $\delta(\lambda) = \delta_0(\lambda_1)\delta_0(\lambda_2)\dots\delta_0(\lambda_\nu)$, $\delta_0(x) = 0$, if $x \neq 0$, and $\delta_0(x) = +\infty$, if $x = 0$, and $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = 1$ are the Dirak function.

(b) for $(T_2f)(p, q, r, t, n, k) = B \sum_{\tau} f(p+\tau, q, r, t, k, n)$, $p, q, r, t, k, n \in Z^\nu$, $f \in l_2((Z^\nu)^6)$ is true of equality

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}T_2\mathbf{F}^{-1})(f)(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) &= \mathbf{F}(B\{ \int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[\tilde{\lambda}, p+\tau]+(\tilde{\mu}, q)]} \times \\ &\quad \times e^{i[\tilde{\gamma}, r]+(\tilde{\theta}, t)+(\tilde{\eta}, n)+(\tilde{\xi}, \xi)]} d\tilde{\lambda}d\tilde{\mu}d\tilde{\gamma}d\tilde{\theta}d\tilde{\eta}d\tilde{\xi} \}_{p, q, r, t, n, k \in Z^\nu}) = \\ &= B \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[(\tilde{\lambda}, p)+(\tilde{\mu}, q)+(\tilde{\gamma}, r)+(\tilde{\theta}, t)+(\tilde{\eta}, n)+(\tilde{\xi}, \xi)]} \times \\ &\quad \times \sum_{\tau} e^{i(\tilde{\lambda}, \tau)} d\tilde{\lambda}d\tilde{\mu}d\tilde{\gamma}d\tilde{\theta}d\tilde{\eta}d\tilde{\xi} e^{-i[(\lambda, p)+(\mu, q)+(\gamma, r)+(\theta, t)+(\eta, k)+(\xi, n)]} = \\ &= B \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) e^{i[(\tilde{\lambda}-\lambda, p)+(\tilde{\mu}-\mu, q)+(\tilde{\gamma}-\gamma, r)+(\tilde{\theta}-\theta, t)]} \times \\ &\quad \times e^{i[(\tilde{\eta}-\eta, k)+(\tilde{\xi}-\xi, n)]} \sum_{\tau} e^{i(\tilde{\lambda}, \tau)} d\tilde{\lambda}d\tilde{\mu}d\tilde{\gamma}d\tilde{\theta}d\tilde{\eta}d\tilde{\xi} = B \int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \times \\ &\quad \times \sum_{p, q, r, t, k, n \in Z^\nu} e^{i[(\tilde{\lambda}-\lambda, p)+(\tilde{\mu}-\mu, q)+(\tilde{\gamma}-\gamma, r)+(\tilde{\theta}-\theta, t)+(\tilde{\eta}-\eta, k)+(\tilde{\xi}-\xi, n)]} 2 \sum_{k=1}^{\nu} \cos \tilde{\lambda}_k \times \\ &\quad \times d\tilde{\lambda}d\tilde{\mu}d\tilde{\gamma}d\tilde{\theta}d\tilde{\eta}d\tilde{\xi} = 2B \int_{T^\nu} \tilde{f}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \delta(\tilde{\lambda} - \lambda) \delta(\tilde{\mu} - \mu) \delta(\tilde{\gamma} - \gamma) \delta(\tilde{\theta} - \theta) \times \\ &\quad \times \delta(\tilde{\eta} - \eta) \delta(\tilde{\xi} - \xi) \sum_{k=1}^{\nu} \cos \tilde{\lambda}_k d\tilde{\lambda}d\tilde{\mu}d\tilde{\gamma}d\tilde{\theta}d\tilde{\eta}d\tilde{\xi} = 2B \sum_{k=1}^{\nu} \cos \tilde{\lambda}_k \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi); \end{aligned}$$

Similar equalities are also true for the other terms. From here we get the required formula (5). \square

The operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ has a partial integral operator in the space $L_2((T^\nu)^6)$.

3. MAIN RESULTS OF THE WORK

Using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces [14] and taking into account that the function $f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \chi)$ is an antisymmetric function, we can verify that the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ can be represented in the form

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 &= \{(\tilde{H}_2^1 f)(\lambda, \mu)\} \otimes I \otimes I + I \otimes \{(\tilde{H}_2^2 f)(\gamma, \theta)\} \otimes I + \\ &\quad + I \otimes I \otimes \{(\tilde{H}_2^3 f)(\eta, \xi)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$(\tilde{H}_2^1 f)(\lambda, \mu) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu) + U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds + \\ + U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \theta - s) ds + U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \xi - s) ds,$$

$$(\tilde{H}_2^2 f)(\gamma, \theta) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i]\} f(\gamma, \theta) + U \int_{T^\nu} f(s, \gamma + \theta - s) ds + \\ + U \int_{T^\nu} f(s, \mu + \gamma - s) ds + U \int_{T^\nu} f(s, \mu + \theta - s) ds,$$

and

$$(\tilde{H}_2^3 f)(\eta, \xi) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \eta_i + \cos \xi_i]\} f(\eta, \xi) + U \int_{T^\nu} f(s, \eta + \xi - s) ds + \\ + U \int_{T^\nu} f(s, \gamma + \xi - s) ds + U \int_{T^\nu} f(s, \theta + \eta - s) ds,$$

and I is the unit operator in the space of two-electron states \tilde{H}_2 .

In fact, what

$${}^2\tilde{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 = \{6A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i + \cos \eta_i + \cos \xi_i]\} \times \\ \times f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + U \int_{T^\nu} [f(t, \lambda + \mu - t, \gamma, \theta, \eta, \xi) + f(t, \mu, \gamma, \lambda + \theta - t, \eta, \xi) + \\ + f(t, \lambda + \xi - t, \mu, \gamma, \theta, \eta) + f(\lambda, t, \mu + \gamma - t, \theta, \eta, \xi) + f(\lambda, t, \gamma, \theta, \mu + \eta - t, \xi) + \\ + f(\lambda, \mu, t, \gamma + \theta - t, \eta, \xi) + f(\lambda, \mu, t, \theta, \eta, \gamma + \xi - t) + f(\lambda, \mu, \gamma, t, \theta + \eta - t, \xi) + \\ + f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, t, \eta + \xi - t)] dt = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + \\ + U \int_{T^\nu} [f(t, \lambda + \mu - t, \gamma, \theta, \eta, \xi) + f(t, \lambda + \theta - t, \mu, \gamma, \eta, \xi) + f(t, \lambda + \xi - t, \mu, \gamma, \theta, \eta)] \times \\ \times dt + \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i]\} f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + U \int_{T^\nu} [f(\lambda, \mu, t, \gamma + \theta - t, \eta, \xi) + \\ + f(\lambda, \theta, t, \mu + \gamma - t, \eta, \xi) + f(\lambda, \gamma, t, \mu + \eta - t, \theta, \eta)] dt + \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \eta_i + \cos \xi_i]\} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + U \int_{T^\nu} [f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, t, \eta + \xi - t) + f(\lambda, \mu, \theta, \eta, t, \gamma + \xi - t) + \\
& + f(\lambda, \mu, \gamma, \xi, t, \theta + \eta - t)] dt = [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu) + \\
& + U \int_{T^\nu} [f(t, \lambda + \mu - t) dt + f(t, \lambda + \theta - t) dt + f(t, \lambda + \xi - t) dt] \otimes I \otimes I + \\
& + I \otimes [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i]\} f(\gamma, \theta) + U \int_{T^\nu} [f(t, \gamma + \theta - t) dt + \\
& + f(t, \mu + \gamma - t) dt + f(t, \mu + \eta - t) dt] \otimes I + I \otimes I \otimes [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \eta_i + \\
& + \cos \xi_i]\} f(\eta, \xi) + U \int_{T^\nu} [f(t, \eta + \xi - t) dt + f(t, \gamma + \xi - t) dt + f(t, \theta + \eta - t) dt].
\end{aligned}$$

Therefore, we must investigate the spectrum of operators \tilde{H}_2^1 , \tilde{H}_2^2 , and \tilde{H}_2^3 . Since all parameters $\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi$, and t a changed in the ν - dimensional torus T^ν , therefore, you can write as

$$\begin{aligned}
{}^2\tilde{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 &= [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu) + 3U \int_{T^\nu} f(t, \lambda + \mu - t) \times \\
& \times dt] \otimes I \otimes I + I \otimes [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i]\} f(\gamma, \theta) + \\
& + 3U \int_{T^\nu} f(t, \gamma + \theta - t) dt] \otimes I + I \otimes I \otimes [\{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \eta_i + \cos \xi_i]\} \times \\
& \times f(\eta, \xi) + 3U \int_{T^\nu} f(t, \eta + \xi - t) dt].
\end{aligned}$$

Consequently, operator's \tilde{H}_2^1 , \tilde{H}_2^2 , and \tilde{H}_2^3 , expressing in the form

$$(\tilde{H}_2^1 f)(\lambda, \mu) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu) + 3U \int_{T^\nu} f(s, \lambda + \mu - s) ds,$$

$$(\tilde{H}_2^2 f)(\gamma, \theta) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \gamma_i + \cos \theta_i]\} f(\gamma, \theta) + 3U \int_{T^\nu} f(s, \gamma + \theta - s) ds,$$

and

$$(\tilde{H}_2^3 f)(\eta, \xi) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \eta_i + \cos \xi_i]\} f(\eta, \xi) + 3U \int_{T^\nu} f(s, \eta + \xi - s) ds.$$

The spectrum of the operator $A \otimes I + I \otimes B$, where A and B are densely defined bounded linear operators, was studied in [5–7]. In this work explicit formulas were given there that express the essential spectrum $\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B)$ of $A \otimes I + I \otimes B$ and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B)$ in terms of the spectrum $\sigma(A)$ of A and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(A)$ of A and in terms of the spectrum $\sigma(B)$ of B and the discrete spectrum $\sigma_{disc}(B)$ of B :

$$\sigma_{disc}(A \otimes I + I \otimes B) = \{\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{ess}(B)\} \setminus \{(\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B))\}, \tag{7}$$

$$\sigma_{ess}(A \otimes I + I \otimes B) = (\sigma_{ess}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{ess}(B)). \tag{8}$$

It is clear that $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$.

Consequently, we must investigate the spectrum of the operators $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$.

Let the total quasimomentum of the two-electron system $\lambda + \mu = \Lambda_1$ be fixed. We let $L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$ denote the space of functions that are square integrable on the manifold $\Gamma_{\Lambda_1} = \{(\lambda, \mu) : \lambda + \mu = \Lambda_1\}$. It is known [12] that the operator \tilde{H}_2^1 and the space $\tilde{H}_2^1 \equiv L_2((T^\nu)^2)$ can be decomposed into a direct integral $\tilde{H}_2^1 = \bigoplus \int_{T^\nu} \tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 d\Lambda_1$, $\tilde{H}_2^1 = \bigoplus \int_{T^\nu} \tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 d\Lambda_1$ of operators $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ and spaces $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 = L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$, such that the spaces $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ are invariant under the operators $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ and each operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ acts in $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ according to the formula $(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 f_{\Lambda_1})(\lambda) = \{2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i)\} f_{\Lambda_1}(\lambda) + 3U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s) ds$, where $f_{\Lambda_1}(x) = f(x, \Lambda_1 - x)$.

First, we investigate the spectrum of the operator

$$(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 f_{\Lambda_1})(\lambda) = \{2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i)\} f_{\Lambda_1}(\lambda) + 3U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s) ds.$$

It is known that the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ is independent of the parameter U and consists of the intervals

$$\sigma_{cont}(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1) = G_{\Lambda_1}^\nu = [m_{\Lambda_1}^\nu, M_{\Lambda_1}^\nu] = [2A - 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}].$$

Definition 1. The eigenfunction $\varphi_{\Lambda_1} \in L_2(T^\nu \times T^\nu)$ of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ corresponding to an eigenvalue $z_{\Lambda_1} \notin G_{\Lambda_1}^\nu$ is called a bound state (BS) (antibound state (ABS)) of $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ with the quasi momentum Λ_1 , and the quantity z_{Λ_1} is called the energy of this state.

We consider the operator K_{Λ_1} acting the space $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ according to the formula

$$(K_{\Lambda_1}(z)f_{\Lambda_1})(x) = \int_{T^\nu} \frac{3U}{2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - t_i) - z} f_{\Lambda_1}(t) dt.$$

It is a completely continuous operator in $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ for

$$z \notin G_{\Lambda_1}^\nu = [2A - 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, 2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}].$$

We set $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 1 + 3U \int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - s_i) - z}$.

Lemma 2. A number $z_0 \notin G_{\Lambda_1}^\nu$ is an eigenvalue of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ if and only if it is a zero of the function $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$, i. e., $D_{\Lambda_1}^\nu(z_0) = 0$.

Proof. Let the number $z = z_0 \notin G_{\Lambda_1}^\nu$ be an eigenvalue of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, and $\varphi_{\Lambda_1}(x)$ be the corresponding eigenfunction, i. e.,

$$\{2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i)\} \varphi_{\Lambda_1}(\lambda) + 3U \int_{T^\nu} \varphi_{\Lambda_1}(s) ds = z_0 \varphi_{\Lambda_1}(\lambda).$$

Let $\psi_{\Lambda_1}(x) = [2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i) - z] \varphi_{\Lambda_1}(x)$. Then

$$\psi_{\Lambda_1}(x) + 3U \int_{T^\nu} \frac{1}{2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i) - z} \psi_{\Lambda_1}(s) ds = 0,$$

i. e., the number $\mu = -1$ is an eigenvalue of the operator $K_{\Lambda_1}(z)$. It then follows that $D_{\Lambda_1}^\nu(z_0) = 0$.

Now let $z = z_0$ be a zero of the function $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$, i. e., $D_{\Lambda_1}^\nu(z_0) = 0$. It follows from the Fredholm theorem than the homogeneous equation

$$\psi_{\Lambda_1}(x) + 3U \int_{T^\nu} \frac{1}{2A + 4B \sum_{i=1}^\nu \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i) - z} \psi_{\Lambda_1}(s) ds = 0$$

has a nontrivial solution. This means that the number $z = z_0$ is an eigenvalue of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. \square

We consider the one-dimensional case.

Theorem 3.

(a) Let $\nu = 1$ and $U < 0$, then for all values of parameters of the Hamiltonian, the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique eigenvalue $z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$, that is below the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., $z_1 < m_{\Lambda_1}^1$.

(b) Let $\nu = 1$ and $U > 0$, then for all values of parameters of the Hamiltonian, the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique eigenvalue $\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$, that is above the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., $\tilde{z}_1 > M_{\Lambda_1}^1$.

Proof. If $U < 0$, then in the one-dimensional case, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ decreases monotonically outside the continuous spectrum domain of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., in the intervals $(-\infty, m_{\Lambda_1}^1)$ and $(M_{\Lambda_1}^1, +\infty)$. For $z < m_{\Lambda_1}^1$ the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ decreases from 1 to $-\infty$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow -\infty$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow -\infty$ as $z \rightarrow m_{\Lambda_1}^1 - 0$. Therefore, below the value $m_{\Lambda_1}^1$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ has a single zero at the point $z = z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}} < m_{\Lambda_1}^1$. For $z > M_{\Lambda_1}^1$, and $U < 0$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ decreases from $+\infty$ to 1, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow +\infty$ as $z \rightarrow M_{\Lambda_1}^1 + 0$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow +\infty$. Therefore, above the value $M_{\Lambda_1}^1$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ cannot vanish. If $U > 0$, and $z < m_{\Lambda_1}^1$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ increases from 1 to $+\infty$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow -\infty$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow +\infty$ as $z \rightarrow m_{\Lambda_1}^1 - 0$. Therefore, below the value $m_{\Lambda_1}^1$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ cannot vanish. For $z > M_{\Lambda_1}^1$, and $U > 0$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ increases from $-\infty$ to 1, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow +\infty$, $D_{\Lambda_1}^1(z) \rightarrow -\infty$ as $z \rightarrow M_{\Lambda_1}^1 + 0$. Therefore, above the value $M_{\Lambda_1}^1$, the function $D_{\Lambda_1}^1(z)$ vanishes on a single point $z = \tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$. \square

In two-dimensional case, we have analogously results.

Here and hereafter, we denote $M'_{\Lambda_k} = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_k^i}{2} (1 - \cos(\frac{\Lambda_k^i}{2} - s_i))}$ and $m'_{\Lambda_k} = \int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_k^i}{2} (1 + \cos(\frac{\Lambda_k^i}{2} - s_i))}$, $k = 1, 2, 3$.

Now we consider three-dimensional case.

Theorem 4. Let $\nu = 3$ and $U < 0$. The following statements hold:

(a) If $U < -\frac{4B}{3m_{\Lambda_1}}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique bound state φ_{Λ_1} with the energy value \tilde{z}_1 , that is below the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., $\tilde{z}_1 < m_{\Lambda_1}^3$.

(b) If $-\frac{4B}{3m_{\Lambda_1}} \leq U < 0$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has no bound state with the energy value, that is below the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

Proof. Let $\nu = 3$ and $U < 0$. Then the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ is consists of segment $[2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}, 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}]$. In the three-dimensional case, if $U < 0$, then the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ are monotonically decreasing function of z the outside of continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., in $(-\infty, m_{\Lambda_1}^3)$ and in $(M_{\Lambda_1}^3, +\infty)$. For $z < m_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ decreasing from 1 to $1 + \frac{3Um'_{\Lambda_1}}{4B}$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow -\infty$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1 + \frac{3Um'_{\Lambda_1}}{4B}$ as $z \rightarrow m_{\Lambda_1}^3 - 0$. Therefore, the below of values $m_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ has a single zero at the point \tilde{z}_1 , if $1 + \frac{3Um'_{\Lambda_1}}{4B} < 0$, i. e., $U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$. For $z > M_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ decreasing from $1 - \frac{3UM'_{\Lambda_1}}{4B} > 1$ to 1, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1 - \frac{3UM'_{\Lambda_1}}{4B}$ as $z \rightarrow M_{\Lambda_1}^3 + 0$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow +\infty$. Therefore, the above of values $M_{\Lambda_1}^3$ function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ cannot vanish. \square

Theorem 5. Let $\nu = 3$ and $U > 0$. The following statements hold:

(a) If $U > \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique bound state φ_{Λ_1} with the energy value \tilde{z}_1 , that is above the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., $\tilde{z}_1 > M_{\Lambda_1}^3$.

(b) If $0 < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has no bound state with the energy value, that is above the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

Proof. Let $\nu = 3$ and $U > 0$. Then the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ is consists of segment $[2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}, 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}]$. In the three-dimensional case, if $U > 0$, then the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ are monotonically decreasing function of z the outside of continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, i. e., in $(-\infty, m_{\Lambda_1}^3)$ and in $(M_{\Lambda_1}^3, +\infty)$. For $z > M_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ decreasing from $1 - \frac{3UM'_{\Lambda_1}}{4B}$, to 1, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow +\infty$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1 - \frac{3UM'_{\Lambda_1}}{4B}$ as $z \rightarrow M_{\Lambda_1}^3 + 0$. Therefore, the above of values $M_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ has a single zero at the point \tilde{z}_1 , if $1 - \frac{3UM'_{\Lambda_1}}{4B} < 0$, i. e., $U > \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$. For $z < m_{\Lambda_1}^3$ the function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ decreasing from 1 to $1 + \frac{3Um'_{\Lambda_1}}{4B} > 1$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1 + \frac{3Um'_{\Lambda_1}}{4B}$ as $z \rightarrow m_{\Lambda_1}^3 - 0$, $\Delta_{\Lambda_1}^3(z) \rightarrow 1$ as $z \rightarrow -\infty$. Therefore, the below of values $m_{\Lambda_1}^3$ function $\Delta_{\Lambda_1}^3(z)$ cannot vanish. \square

To occur the analogue of Theorems 3–5 for operator's $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, only, replace Λ_1 , from Λ_2 , and Λ_3 , correspondingly.

Now, using the obtained results and representation (6), we describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of six electron systems in the Hubbard model in the second singlet state.

Theorem 6.

(a) Let $\nu = 1$, and $U < 0$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segment's:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3] \cup \\ \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2],$$

and discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is consists of a unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, what lies to the below than the left edge of the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$. Here

$$a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, \quad b = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, \quad c = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, \quad d = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, \\ e = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, \quad f = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, \quad z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, \\ z_2 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}, \quad z_3 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}.$$

(b) Let $\nu = 1$, and $U > 0$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segment's:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup \\ \cup [a+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3, b+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [c+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3, d+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3] \cup \\ \cup [e+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2, f+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2],$$

and discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of a unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$, what lies to the above than the right edge of the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$. Here $\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$, $\tilde{z}_2 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$, $\tilde{z}_3 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}$.

Proof. In the one-dimensional case, the continuous spectrum of operator's $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ consists of the segment's $[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}]$, $[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}]$, and $[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}]$, and this operators has a eigenvalues z_1, z_2 and z_3 , correspondingly. Therefore, the spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the set [22] $\{\lambda + \mu + \gamma : \lambda \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2), \gamma \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3)\}$. Hence and from representation (6) it follows, that $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0)$ consists of the union of seven segments, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists only one eigenvalue $\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3$, i. e., $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$. \square

In the two-dimensional case, we have the analogously results.

Theorem 7. *Let $\nu = 3$, and $U < 0$. The following statements hold:*

(a) *If $U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}}$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3}$, or $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3}$, or $U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}}$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2}$ or $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2}$, or $U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1}$, or $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segments:*

$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup [a+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3, b+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [c+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3, d+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3] \cup [e+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2, f+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$, what lies to the below than the left edge of the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$. Here and hereafter

$$a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, \quad b = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, \quad c = 2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2},$$

$$d = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2}, \quad e = 2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}, \quad f = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2},$$

and \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 and \tilde{z}_3 , are the eigenvalues of the operator's $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, correspondingly.

(b) *If $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}}$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2}$ or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}}$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}}$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}}$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [e+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2, f+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [c+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3, d+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup$$

$$[a + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(c) If $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}}$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}}$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2}$ or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}}$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}}$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}} \leq U < -\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}}$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of two segments:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(d) If $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_1}} \leq U < 0$, and $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3}$, or $m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_2}} \leq U < 0$, and $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_3}$, or $m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1}$, or $-\frac{4B}{3m'_{\Lambda_3}} \leq U < 0$, and $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_1} > m'_{\Lambda_2}$, or $m'_{\Lambda_3} > m'_{\Lambda_2} > m'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the segment:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

The Theorem 7 is proved similarly to Theorem 6.

Theorem 8. Let $\nu = 3$, and $U > 0$. The following statements hold:

(a) If $U > \frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}}$, and $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3}$, or $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3}$, or $U > \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2}$ or $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2}$, or $U > \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1}$, or $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segments:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [a + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [c + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3] \cup [e + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$, what lies to the above than the right edge of the

essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$. Here and hereafter

$$a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, \quad b = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, \quad c = 2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2},$$

$$d = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2}, \quad e = 2A - 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}, \quad f = 2A + 4B \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2},$$

and \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 and \tilde{z}_3 , are the eigenvalues of the operator's $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, correspondingly.

(b) If $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}}$, and $M'_{\Lambda_3} < M'_{\Lambda_2} < M'_{\Lambda_1}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_2} < M'_{\Lambda_3} < M'_{\Lambda_1}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_3} < M'_{\Lambda_1} < M'_{\Lambda_2}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of four segments:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [e + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup [c + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [a + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(c) If $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}}$, and $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}}$, and $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2}$, or $\frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}} < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of two segments:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2],$$

or

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(d) If $0 < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_1}}$, and $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3}$, or $M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2}$, or $0 < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_2}}$, and $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_3}$, or $M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1}$, or $0 < U \leq \frac{4B}{3M'_{\Lambda_3}}$, and $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_1} > M'_{\Lambda_2}$, or $M'_{\Lambda_3} > M'_{\Lambda_2} > M'_{\Lambda_1}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the segment:

$$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a + c + e, b + d + f],$$

and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

If $\nu = 3$ and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, then $\sigma_{cont}(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1) = [2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}]$.

We denote by W the Watson integral [24]: $W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3dxdydz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 1,516$.

Because the measure λ is normalized,

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dxdydz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dxdydz}{3 + \cos x + \cos y + \cos z} = \frac{W}{3}.$$

Theorem 9. Let $\nu = 3$ and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$. Then

(A) If $U < 0$, and $U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique eigenvalue z the below of the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. If $U < 0$, and $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has no eigenvalue of the below the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

(B) If $U > 0$, and $U > \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has a unique eigenvalue \tilde{z}_1 the above of the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. If $U > 0$, and $0 < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, then the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ has no eigenvalue of the above the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

To occur the analogue of Theorems 9 for operator's $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, and $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, only, replace Λ_1 , from Λ_2 , and Λ_3 , correspondingly.

Theorem 10. Let $\nu = 3$ and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$, and $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$. Then

(A) If $U < 0$, and $U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, and

$\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of seven intervals:

$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$. Here and hereafter $a_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $e_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, $f_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, and z_1, z_2 , and z_3 are the eigenvalues of the operators $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \tilde{H}_{2\Lambda_2}^2, \tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, correspondingly.

(B) If $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of four intervals: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(C) If $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of two intervals: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(D) If $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$,

and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of unique interval: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

Theorem 11. Let $\nu = 3$ and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$, and $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$. Then

(A) If $U > 0$, $U > \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U > 0$, $U > \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U > 0$, $U > \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of seven intervals:

$\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3, b_1 + d_1 + \tilde{z}_3] \cup [a_1 + e_1 + \tilde{z}_2, b_1 + f_1 + \tilde{z}_2] \cup [a_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3] \cup [c_1 + e_1 + \tilde{z}_1, d_1 + f_1 + \tilde{z}_1] \cup [c_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3] \cup [e_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$. Here and hereafter $a_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, $e_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, $f_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, and \tilde{z}_1 , \tilde{z}_2 , and \tilde{z}_3 are the eigenvalues of the operators $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \tilde{H}_{2\Lambda_2}^2, \tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, correspondingly.

(B) If $U > 0$, and $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$ or $U > 0$, and $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$ or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of four intervals: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + \tilde{z}_2, b_1 + f_1 + \tilde{z}_2] \cup [c_1 + e_1 + \tilde{z}_1, d_1 + f_1 + \tilde{z}_1] \cup [e_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3, b_1 + d_1 + \tilde{z}_3] \cup [c_1 + e_1 + \tilde{z}_1, d_1 + f_1 + \tilde{z}_1] \cup [c_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3, d_1 + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3, b_1 + d_1 + \tilde{z}_3] \cup [a_1 + e_1 + \tilde{z}_2, b_1 + d_1 + \tilde{z}_2] \cup [a_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3, b_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(C) If $U > 0$, and $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U > 0$, $\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of two intervals: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + \tilde{z}_1, d_1 + f_1 + \tilde{z}_1]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + \tilde{z}_2, b_1 + f_1 + \tilde{z}_2]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3, b_1 + d_1 + \tilde{z}_3]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

(D) If $U > 0$, and $0 < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U > 0$, $0 < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \frac{1}{2} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$ and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U > 0$, $0 < U \leq \frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the unique interval: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1]$, and discrete spectrum of the operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

REFERENCES

1. ANDERSON, P. W. (1961) Localized Magnetic States in Metals. *Physical Review*. 124(1). p. 41–53. doi:10.1103/physrev.124.41.
2. GUTZWILLER, M. C. (1963) Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals. *Physical Review Letters*. 10(5). p. 159–162. doi:10.1103/physrevlett.10.159.
3. HUBBARD, J. (1963) Electron Correlations in Narrow Energy Bands. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 276(1365). p. 238–257. doi:10.1098/rspa.1963.0204.
4. IZYUMOV, YU. A. & SKRYABIN YU. N. (1987) *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems*. Moscow: Nauka.
5. ICHINOSE, T. (1978) Spectral Properties of Tensor Products of Linear Operators. I. *Transactions of the American Mathematical Society*. 235. p. 75–113. doi:10.2307/1998209.

6. ICHINOSE, T. (1978) Spectral Properties of Tensor Products of Linear Operators. II. the Approximate Point Spectrum and Kato Essential Spectrum. *Transactions of the American Mathematical Society*. 237. p. 223–223. doi:10.1090/s0002-9947-1978-0479372-0.
7. ICHINOSE, T. (1982) Tensor Products of Linear Operators. Spectral Theory. *Banach Center Publications, PWN-Polish Scientific Publishers*. Warsaw. Vol. 8. p. 294–300.
8. KANAMORI, J. (1963) Electron Correlation and Ferromagnetism of Transition Metals. *Progress of Theoretical Physics*. 30. p. 275–289.
9. KARPENKO, B. V., DYAKIN, V. V., & BUDRINA, G. L. (1986) Two Electrons in the Hubbard Model. *Phys. Metal. Phys. Metallurgy*. 61, No. 4. p. 702–706.
10. LIEB, E. H. (1989) Two Theorems on the Hubbard Model. *Physical Review Letters*. 62(10). p. 1201–1204. doi:10.1103/physrevlett.62.1201.
11. MATTIS, D. (1986) The Few-Body Problems on a Lattice. *Rev. Mod. Phys.* vol. 58. p. 370–379.
12. NEIMARK, M. A. (1968) *Normed Rings*. Nauka, Moscow.
13. REED, M., and SIMON, B. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics. vol. 1. Functional Analysis*. Acad. Press, New York.
14. REED, M. & SIMON, B. (1982) *Methods of Modern Mathematical Physics. vol. 4. Operator Analysis*. Acad. Press, New York.
15. SHUBIN, S. P. & WONSOWSKY, S. V. (1934) On the Electron Theory of Metals. *Proceedings of the Royal Society A*. 145. p. 159–172. doi:10.1098/rspa.1934.0089.
16. TSVELICK, A. M. & WIEGMANN, P. B. (1983) Exact Results in the Theory of Magnetic Alloys. *Advances in Physics*. 32(4). p. 453–713. doi:10.1080/00018738300101581.
17. TASHPULATOV, S. (2014) Spectral Properties of Three-Electron Systems in the Hubbard Model. *Theoretical and Mathematical Physics*. 179. p. 712–728. doi:10.1007/s11232-014-0173-y.
18. TASHPULATOV, S. (2016) Spectra of the Energy Operator of Four-Electron Systems in the Triplet State in the Hubbard Model. *Journal of Physics: Conference Series*. 697. p. 1–25.
19. TASHPULATOV, S. M. (2017) The Structure of Essential Spectra and Discrete Spectrum of Four-Electron Systems in the Hubbard Model in a Singlet State. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 38(3). p. 530–541.

20. TASHPULATOV, S. M. (2018) The Structure of Essential Spectra and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Five-Electron Systems in the Hubbard Model. Fifth Doublet State. *Bulletin of the Institute of Mathematics*. No 5. p. 43–52.
21. TASHPULATOV, S. M. (2021) Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectra of the Energy Operator of Five-Electron Systems in the Hubbard Model. Doublet State. Series «Trends in Mathematics», «Operator Theory and Differential Equations». Springer Nature, Switzerland. p. 275–301.
22. TASHPULATOV, S. M. (2020) Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectra of the Energy Operator of Five-Electron Systems in the Hubbard Model. Third and Fourth Doublet States. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. vol. 8, No 12. p. 2886–2918.
23. TASHPULATOV, S. M. (2021) Structure of Essential Spectra and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Five Electron Systems in the Hubbard Model. Sextet and Quartet States. *American Review of Mathematics and Statistics*. vol. 9, No 12. p. 12–40.
24. VAL'KOV V. V., OVCHINNIKOV S. G. & PETRAKOVSKII O. P. (1988) The Excitation Spectra of Two-Magnon Systems in Easy-Axis Quasidimensional Ferromagnets. *Sov. Phys. Solid State*. 30. p. 3044–3047.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Mukhina Y. S., Samsonov S. P. Guaranteed solution for risk-neutral decision maker: an analog of maximin in single-criterion choice problem / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, Y. S. Mukhina, S. P. Samsonov // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 7–29.

УДК: 517.577.1

В настоящей статье рассматриваются задачи однокритериального выбора в условиях неопределенности. Предлагается подход к решению задачи однокритериального выбора в условиях неопределенности для лица, принимающего решения, которое одновременно стремится повысить свой результат и снизить свой риск.

Ключевые слова: гарантированное решение, однокритериальный выбор, риск по Нихансу-Сэвиджу, минимаксное сожаление, неопределенность.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. Synthesis of Equilibrium / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, L. V. Smirnova // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 30–49.

УДК: 519.833.2

Для бескоалиционной игры N лиц в нормальной форме вводится понятие гибридного равновесия на основе объединения концепций равновесия по Нэшу, равновесия по Берджу и максимума по Парето. Исследуются некоторые свойства гибридных равновесий и устанавливается их существование в смешанных стратегиях при стандартных ограничениях в математической теории игр (выпуклые и компактные множества стратегий и непрерывные функции выигрыша). Аналогичные результаты получены для бескоалиционных игр N лиц в нормальной форме при неопределенности.

Ключевые слова: неопределенность, смешанные стратегии, равновесие, седловая точка, оптимальность по Парето.

Брюховецкий А. А., Моисеев Д. В. Программная модель формирования виртуальных кластеров сетевых узлов в мобильных транспортных сетях / А. А. Брюховецкий, Д. В. Моисеев // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 50–59.

УДК: 004.89

Предлагаемый подход ориентирован на повышение достоверности принимаемых решений в условиях стохастической высокодинамичной среды, характеризующейся

быстро изменяющейся топологией сети, ее мобильностью, пространственной плотностью, локализацией узлов. Метод ориентирован на формирование кластеров с высокой стабильностью, устойчивой связью, низкой задержкой передачи сообщений. Координаторы кластеров выбираются на основе уровня доверия транспортного средства. В статье представлена программная модель формирования виртуальных кластеров узлов сети, которая позволяет перейти от обработки быстро меняющейся структуры топологии сети к квазипостоянной. Представлен один из вариантов архитектуры сети, графовая модель виртуальных кластеров, приведен алгоритм формирования минимальных покрытий. Приведены результаты моделирования программной системы.

Ключевые слова: децентрализованная обработка, виртуальные кластеры, графовая модель, матрица смежности, покрытие множеств.

Калманович В. В., Серегина Е. В. О некоторых оценках решений задачи теплопроводности в многослойной среде матричным методом / В. В. Калманович, Е. В. Серегина // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 60 – 71.

УДК: 517.958, 51-73

Рассматриваются задача теплопроводности в многослойной среде с непрерывными условиями согласования в точках контакта слоев и метод ее решения, представляющий собой сочетание метода Фурье и матричного метода. Для первой краевой задачи теплопроводности получены некоторые оценки сходимости решений указанным методом для различных теплофизических параметров слоев по норме пространства L_2 .

Ключевые слова: задача теплопроводности, матричный метод, многослойная среда, оценки решений.

Рыхлов В. С. Обобщенное решение простейшей начально-граничной задачи для однородного гиперболического уравнения со смешанной производной / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 72 – 88.

УДК: 517.958, 517.956.32

Исследуется начально-граничная задача для однородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и смешанной производной в полуполосе плоскости. Рассматриваемое уравнение является уравнением поперечных

колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай нулевой начальной скорости и закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Формулируется основной результат статьи, а именно, теорема о конечной формуле для обобщенного решения и кратко описывается метод получения этой формулы. Главное достоинство этой формулы состоит в том, что в ней не требуется какое-либо предварительного продолжения начальной функции за пределы отрезка ее определения. Метод опирается на идею А. П. Хромова использовать для этого теорию расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера (аксиоматический подход). Далее определяется классическое решение рассматриваемой начально-граничной задачи. Формулируется теорема единственности классического решения в случае его существования и дается формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. На основе этой формулы вводятся понятия обобщенной начально-граничной задачи и обобщенного решения. Далее дается подробное доказательство ранее сформулированной основной теоремы статьи. Полученная формула для обобщенного решения сравнивается с соответствующим результатом для классического решения. В конце дается краткая история вопроса.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, второй порядок, постоянные коэффициенты, смешанная производная в уравнении, полуплоскость, начально-граничная задача, нулевая начальная скорость, закрепленные концы, классическое решение, обобщенная начально-граничная задача, обобщенное решение, единственность классического решения, конечная формула для обобщенного решения, расходящиеся ряды.

Чан М. Х., Юрков Н. К., Нгуен К. Т. О задаче оценки полноты аэродинамических характеристик БЛА в условиях неопределенности / М. Х. Чан, Н. К. Юрков, К. Т. Нгуен // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 89–97.

УДК: 621.396

В статье представлена постановка задачи уточнения аэродинамических характеристик (АДХ) беспилотных летательных аппаратов (БЛА), полученные по результатам летно-технических испытаний (ЛТИ) или аэродинамических продувок, которая является задачей многокритериальной многопараметрической многофакторной идентификации показателей и характеристик сложных технических систем и их

структурно-параметрической оптимизации. Изложена задачи оценки полноты характеристик БЛА в условиях неопределенности. Представлен программно-методический комплекс статистического синтеза аэродинамической модели БЛА.

Ключевые слова: аэродинамические характеристики (АДХ), беспилотные летательные аппараты (БЛА), идентификация, многокритериальная оптимизация, структурно-параметрический синтез.

Tashpulatov S. M. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Second singlet state / S. M. Tashpulatov // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — № 2 (59). — С. 98 – 124.

УДК: 517.984

Рассматривается оператор энергии шестиэлектронной системы в модели Хаббарда, исследуется структура существенных спектров и дискретного спектра системы во втором синглетном состоянии. Показано, что в одномерном и двумерном случаях существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из объединения семи сегментов, а дискретный спектр шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из одного собственного значения, находящегося ниже (выше) области нижнего (верхнего) края существенного спектра этого оператора. В трехмерном случае происходят следующие ситуации: а) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из объединения семи сегментов, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из одного собственного значения; б) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из объединения четырех сегментов, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния пуст; в) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из объединения двух сегментов, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния пуст; г) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния состоит из одного сегмента, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглетного состояния пуст; при условии, что каждая из ситуаций имеет место быть. Найдены условия, при которых каждая из ситуаций происходит.

Ключевые слова: модель Хаббарда, шестиэлектронная система, существенный спектр, дискретный спектр, октетное состояние, квинтетное состояние, триплетное состояние, синглетное состояние.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

- Брюховецкий Алексей Алексеевич** к. т. н, доцент, доцент кафедры «Информационные технологии и компьютерные системы» ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: bryukhovetskiy@mail.sevsu.ru
- Жуковская Лидия Владиславовна** д. э. н, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Центрального экономико-математического института Российской академии наук (ЦЭМИ РАН), г. Москва, Российская Федерация.
e-mail: zhukovskaylv@mail.ru
- Жуковский Владислав Иосифович** д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация.
e-mail: zhkvlad@yandex.ru
- Калманович Вероника Валерьевна** старший преподаватель кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Российская Федерация.
e-mail: v572264@yandex.ru
- Моисеев Дмитрий Владимирович** д. т. н., доцент, доцент кафедры «Информационные технологии и компьютерные системы» ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: dmitriymoiseev@mail.ru
- Мухина Юлия Сергеевна** студент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация.
e-mail: js.mukhina@mail.ru

- Нгуен Куанг
Тхонг** д. т. н., Государственный технический университет им. Ле Куй Дона, г. Ханой, Вьетнам.
e-mail: tikrus20.21@gmail.com
- Рыхлов Виктор
Сергеевич** к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация.
e-mail: rykhlovvs@yandex.ru
- Самсонов Сергей
Петрович** к. ф.-м. н., доцент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация.
e-mail: samsonov@cs.msu.ru
- Серегина Елена
Владимировна** к. ф.-м. н., доцент кафедры систем автоматического управления Калужского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета), г. Калуга, Российская Федерация.
e-mail: evfs@yandex.ru
- Смирнова Лидия
Викторовна** к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация.
e-mail: smirnovvalidiya@rambler.ru
- Ташпулатов Сагдулла
Мамаражабович** д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник лаборатории «Физика многочастичных систем» института ядерной физики АН РУз., г. Ташкент, Республика Узбекистан.
e-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru
- Чан Минь
Хай** преподаватель Академии ПВО и ВВС Вьетнама, г. Ханой, Вьетнам.
e-mail: minhhai.kq80@gmail.com
- Юрков Николай
Кондратьевич** д. т. н., профессор, Пензенский государственный университет, г. Пенза, Российская Федерация.
e-mail: yurkov_nk@mail.ru

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 11.03.2024 .
Издательский дом ФГАОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского».

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № ВВФР-000506 . Тираж 25 экз. Формат 60x90/16.
Усл. печ. ед. 5,2. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.
Типография ИП Павлюков В. В., ИНН 250209756491. 295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, 44,
тел. +7 (978) 823-31-73, E-mail: zakaz@krimpoligraf.ru