

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 4 (57) ' 2022

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел», 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика», 05.13.17 «Теоретические основы информатики», 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», 1.1.9 «Механика жидкости, газа и плазмы», 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации» (физико-математические науки).

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru

T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2022, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВИЧ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007
Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.su
сайт журнала: www.tvim.su

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные и дифференциальные уравнения, математическая физика и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики, жидкости и газа, теория упругости	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Системный анализ, управление и обработка информации
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика и математическое моделирование

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., EngD	Leonid MESTETSKIY, Prof., EngD
Natalia APATOVA, Prof., EdD	Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math.
Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math.	Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Yakov YERUSALIMSKY, Prof., EngD	Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Fedor STONYAKIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math.	Anton UTKIN, Senior Researcher, EngD
Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math.	Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., EngD
Vladislav KRAVCHENKO, Prof., EngD	Vladimir CHILIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., EngD,	

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief

+7 978 837 82 77 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models, Mathematical Modeling, Numerical Analysis, Software Suites, Systems Analysis, Control, and Information Processing.

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The Mathematical Problems of Hydrodynamics, Fluid, Gas, and Plasma Mechanics.

СОДЕРЖАНИЕ

Бербат Э. А., Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Обобщенные симметричные F-пространства Орлича.....	7
Гельфанова Д. Д., Шнарева Г. В., Донченко Я. А. Применение GeoGebra при изучении нелинейного программирования.....	23
Матковский В. А. Анализ данных торможения поездов метрополитена....	40
Чехов В. В. Визуализация работы алгоритма полной напряженности на модельной задаче с учетом нелинейностей.....	70
Ярошенко А. А., Маленко Ж. В., Маркина Е. В., Костюкова Л. О., Бабилов И. И. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, генерируемые движущимися возмущениями.....	84
Рефераты.....	97
Список авторов номера.....	101

TABLE OF CONTENTS

Berbat E. A., Muratov M. A., Pashkova Yu. S. Generalized symmetric Orlicz F-spaces.....	7
Gelfanova D. D., Shnareva G. V., Donchenko Y. A. application of GeoGebra to the study of nonlinear programming by future economists.....	23
Matkovsky V. A. Analysis of braking data of metro trains	40
Chekhov V. V. Visualization of behaviour of the FSD algorithm for the model problem taking into account nonlinearities.....	70
Yaroshenko A. A. , Malenko Zh. V., Markina E. V. Kostyukova L. O., Babikov I. I. Three-dimensional Bending gravitational Waves Generated by moving perturbations.....	84
Abstracts.....	97
Authors	101

УДК: 519.55/56

MSC2010: 46E30, 46E35, 46D10

ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ F -ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

© Э. А. Бербат, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *berbat2001@mail.ru, mamuratov@gmail.com, pashkova.j@yandex.ua*

GENERALIZED SYMMETRIC ORLICZ F -SPACES.

Berbat E. A., Muratov M. A., Pashkova Yu. S.

Abstract. The paper is devoted to the consideration of a class of examples of symmetric F -spaces of measurable functions on spaces with finite or infinite σ -finite non-atomic measure.

We do not assume separability conditions for the measure. Moreover, we use the correspondence between symmetric spaces on general spaces with a measure and their «standard» copies on a semiaxis or segment.

Every symmetric F -space is a linear metric space. The definition of linear metric spaces was first given by Frechet in 1926. Later, Stefan Banach and his students proved the basic facts of the theory of linear metric and Banach spaces.

At the beginning, normalized and locally convex spaces were studied.

The development of the theory of integral operators and the theory of random processes aroused interest in the theory of non-locally convex spaces. The theory of non-locally convex spaces has been intensively developed. New applications have been obtained in probability theory, integral operator theory, and analytic function theory.

Recently, many papers have appeared on quasi-normalized spaces, non-interpolation spaces, and spaces that do not have the property of local convexity. A general view of such spaces led to the study of F -spaces of measurable functions on spaces with finite and infinite measure. In the works of E. M. Semenov, connected with the theory of interpolation of linear operators in spaces of measurable functions, symmetric Banach spaces were investigated, which in the foreign literature were called rearrangement invariant spaces. The theory of symmetric spaces has been intensively developing over the last century, contains many interesting and profound results and has important applications in various fields of function theory and functional analysis, in particular in ergodic theory, harmonic analysis and mathematical physics. Therefore, it is natural to study symmetric F -spaces of measurable functions.

In this paper, as well as for symmetric Banach spaces, for symmetric F -spaces, the concept of equimeasurability is introduced. It is proved that each class of equimeasurable symmetric F -spaces contains a standard symmetric space, while all equimeasurable standard symmetric spaces coincide.

Classical examples of symmetric Banach spaces of measurable functions are the Banach Orlicz spaces. The Orlicz spaces are described in detail in the paper M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutitskii «Convex functions and Orlicz spaces» (1961). When constructing the Orlicz space, the so-called N -function, which is convex, plays an essential role. The paper considers a class of examples of F -spaces called generalized Orlicz spaces, which are constructed by functions that are not generally convex, but have only the monotonicity property.

Keywords: *symmetric F -space, measurable function, Orlicz space, σ -finite measure, F -norm*

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена рассмотрению симметричных F -пространств измеримых функций на пространствах с конечной или бесконечной σ -конечной не атомической мерой и построению класса примеров таких пространств.

Никаких условий сепарабельности меры не предполагается. Более того, мы используем соответствие между симметричными пространствами на общих пространствах с мерой и их «стандартными» копиями на полупрямой или отрезке.

Каждое симметричное F -пространство является линейным метрическим пространством. Определение линейных метрических пространств впервые было дано Фреше в 1926 г. [1]. Позднее Стефаном Банахом и его учениками были доказаны основные факты теории линейных метрических и банаховых пространств [2]. Соответствующие ссылки можно найти также, например, в работах [3] и [4].

Первоначально, главным образом, исследовались нормированные и локально выпуклые пространства. Новые приложения были получены в теории вероятностей, теории интегральных операторов и теории аналитических функций.

В последнее время появилось много работ, посвященных квазинормированным пространствам, не интерполяционным пространствам и пространствам, которые не обладают свойством локальной выпуклости [5, 6]. Общий взгляд на такого рода пространства привел к исследованию F -пространств измеримых функций на пространствах с конечной и бесконечной мерой [7]. В работах Е. М. Семенова, связанных с теорией интерполяции линейных операторов в пространствах измеримых функций, были исследованы симметричные банаховы пространства, которые в иностранной литературе получили название перестановочно инвариантных пространств [8]–[10]. Теория симметричных пространств последнее столетие интенсивно развивается, содержит множество интересных и глубоких результатов и имеет важные приложения в различных областях теории функций и функционального анализа, в частности в эргодической теории, гармоническом анализе и математической физике [11]–[13].

Поэтому естественным является изучение симметричных F -пространств измеримых функций.

В работе, так же как для симметричных банаховых пространств, для симметричных F -пространств введено понятие равноизмеримости. Доказано, что каждый класс равноизмеримых симметричных F -пространств содержит стандартное симметричное пространство, в то время как все равноизмеримые стандартные симметричные пространства совпадают.

Классическими примерами симметричных банаховых пространств измеримых функций являются банаховы пространства Орлича. Впервые они появились в работах Орлича [14, 15]. Пространства Орлича подробно описаны в [16]–[20]. При построении пространства Орлича существенную роль играет так называемая N -функция, которая является выпуклой.

В работе рассматривается класс примеров F -пространств, называемых обобщенными пространствами Орлича, которые строятся по функциям, не являющимся в общем случае выпуклыми, а обладающим только свойством монотонности.

1. СИММЕТРИЧНЫЕ F -ПРОСТРАНСТВА

Пусть \mathbf{X} — линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или полем действительных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Определение 1. Неотрицательная функция

$$\mathbf{X} \ni x \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$$

называется F -нормой, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) $\|ax\| = \|x\|$ для любого $x \in \mathbf{X}$ и любого $a \in \mathbb{K}$ такого, что $|a| = 1$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbf{X}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n x\| = 0$ для любого $x \in \mathbf{X}$ и $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a x_n\| = 0$ для любого $a \in \mathbb{K}$ и $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n x_n\| \rightarrow 0$ для $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ и $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$.

Линейное пространство \mathbf{X} с F -нормой $\|\cdot\|$ называется F -пространством, если оно полно относительно метрики $\delta(x, y) = \|x - y\|$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с конечной или бесконечной σ -конечной не атомической мерой μ , $\mathbf{S}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых функций на Ω , эквивалентных по $\text{mod } \mu$.

Соответствующее пространству $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ стандартное пространство с мерой (I, \mathcal{B}_m, m) определяется как $I = [0, \infty)$, если $\mu(\Omega) = \infty$, и $I = [0, a]$, если $\mu(\Omega) = a < \infty$, где m — обычная мера Лебега на I , и \mathcal{B}_m — m -пополнение борелевской σ -алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I)$ относительно меры m .

Для каждой функции $f \in \mathbf{S}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ функция распределения $\eta_{f,\mu}$ модуля $|f|$ определяется следующим образом:

$$\eta_{f,\mu}(x) := \mu \{ |f| > x \}, \quad x \geq 0,$$

где

$$\{ |f| > x \} := \{ \omega \in \Omega : |f(\omega)| > x \}.$$

Функция $\eta_{f,\mu}$ — убывающая непрерывная справа функция на $[0, +\infty)$, такая, что $\eta_{f,\mu}(x) \in [0, \mu(\Omega)]$ для всех $0 \leq x < \infty$.

В случае $\mu(\Omega) = \infty$ возможно, что $\eta_{f,\mu}(x) = \infty$ для некоторых и даже для всех $x \in [0, \infty)$.

Обозначим через $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ пространство всех функций $f \in \mathbf{S}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ таких, что $\eta_{f,\mu}(x) < \infty$ для некоторого $x > 0$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ существует единственная функция $\xi_{f,\mu}$ на $[0, \infty)$, которая является убывающей, непрерывной справа и $\eta_{\xi_{f,\mu}, m} = \eta_{f,\mu}$, $\xi_{\xi_{f,\mu}, m} = \xi_{f,\mu}$. Функция $\xi_{f,\mu}$ называется убывающей перестановкой функции f .

Определение 2. Нетривиальное F -пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}}) = (\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)})$ измеримых функций на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется *симметричным*, если $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_0$ и выполнены следующие два условия:

1. Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f| \leq |g|$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|g\|_{\mathbf{E}}$.
2. Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $\eta_{f,\mu} = \eta_{g,\mu}$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Пространство $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с обычными линейными операциями и порядком на функциях является K -пространством, т. е. условно полной векторной подрешеткой решетки $\mathbf{S}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. С другой стороны, существует естественная метрика $\delta_{\mathbf{L}_0}$ на $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, такая, что $(\mathbf{L}_0, \delta_{\mathbf{L}_0})$ — полное линейное метрическое пространство. Метрика $\delta_{\mathbf{L}_0}$, в свою очередь, индуцирована F -нормой

$$\|f\|_{\mathbf{L}_0} = \int_I \frac{\xi_{f,\mu}(x)}{1 + \xi_{f,\mu}(x)} \frac{1}{(1+x)^2} dm(x), \quad f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu),$$

т. е.

$$\delta_{\mathbf{L}_0}(f, g) = \|f - g\|_{\mathbf{L}_0}.$$

Теорема 1. Верны следующие утверждения:

1. $(\mathbf{L}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_0})$ является симметричным F -пространством.
2. Топология, индуцированная метрикой $\delta_{\mathbf{L}_0}$ на \mathbf{L}_0 , совпадает с топологией сходимости по мере на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и, в свою очередь, с порядковой топологией K -пространства $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
3. Пространство $(\mathbf{L}_0, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_0})$ не является нормируемым и даже квазинормируемым. Более того, соответствующая топология не является локально выпуклой и локально ограниченной.

Определение 3. Симметричное F -пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *стандартным*, если соответствующее пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартно.

Для симметричного F -пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ рассмотрим множество

$$\Xi(\mathbf{E}) := \{\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) : f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}.$$

Функция $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \rightarrow [0, \infty)$ индуцирует отображение

$$\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E})} : \Xi(\mathbf{E}) \rightarrow [0, \infty)$$

на множестве $\Xi(\mathbf{E})$, где $\|g\|_{\Xi(\mathbf{E})} = \|f\|_{\mathbf{E}}$, если $g = \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Определение 4. Два симметричных F -пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ называется равноизмеримыми, если

$$\Xi(\mathbf{E}_1) = \Xi(\mathbf{E}_2).$$

Если помимо условия равноизмеримости

$$\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_1)} = \|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_2)},$$

то пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ называются строго равноизмеримыми.

Следующие две теоремы показывают, что каждый класс равноизмеримых симметричных F -пространств содержит стандартное симметричное F -пространство, в то время как все равноизмеримые стандартные симметричные F -пространства совпадают.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ стандартное симметричное F -пространство и $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ произвольное измеримое пространство с (конечной или бесконечной σ -конечной неатомической) мерой μ , и пусть

$$\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) : \xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}, f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)})$ является симметричным F -пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. При этом симметричные F -пространства $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ строго равноизмеримы.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ симметричное F -пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и пусть

$$\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m) := \{g \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) : \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ для некоторой функции } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}$$

и

$$\|g\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)} = \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)}, \text{ если } \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ и } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)})$ является стандартным F -симметричным пространством. При этом симметричные F -пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ строго равноизмеримы.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

Пусть $N(u)$ — непрерывная неотрицательная неубывающая функция действительного переменного, определенная для $u > 0$ и такая, что

$$N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Определим на $\mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ функцию

$$\rho_N(f) = \int_{\Omega} N(|f(\omega)|) d\mu.$$

В следующих теоремах доказываются основные свойства функции $\rho_N(f)$.

Предложение 1. Функция $\rho_N(f)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\rho_N(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$;
- 2) $\rho_N(af) = \rho_N(f)$ при $|a| = 1$;
- 3) $\rho_N(af + bg) \leq \rho_N(f) + \rho_N(g)$ при $a, b \geq 0, a + b = 1$;
- 4) $\rho_N(a_n f) \rightarrow 0$, если $a_n \rightarrow 0$ и $\rho_N(f) < +\infty$.

Доказательство. 1. Так как

$$N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

то

$$N(f(\omega)) = 0 \iff f(\omega) = 0.$$

Поэтому

$$\rho_N(f) = 0 \iff f = 0,$$

т. е., когда

$$\mu(\{\omega : f(\omega) \neq 0\}) = 0.$$

2. Пусть $|a| = 1$. Тогда

$$\rho_N(af) = \int_{\Omega} N(|af(\omega)|)d\mu = \int_{\Omega} N(|f(\omega)|)d\mu = \rho_N(f).$$

3. Пусть $a, b \geq 0, a + b = 1$. Рассмотрим два множества:

$$\Omega_1 = \{\omega : |f(\omega)| \geq |g(\omega)|\}, \quad \Omega_2 = \{\omega : |f(\omega)| < |g(\omega)|\}.$$

Ясно, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ и $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$.

Функция $N(u)$ неубывающая. Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho_N(af + bg) &= \int_{\Omega} N(|af(\omega) + bg(\omega)|)d\mu \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left| N(|af(\omega) + bg(\omega)|) \leq N(|af(\omega)| + |bg(\omega)|) \right| d\mu \leq \\ &\leq \int_{\Omega} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu = \\ &= \int_{\Omega_1} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu + \int_{\Omega_2} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для $\omega \in \Omega_1$ выполнено неравенство $|f(\omega)| \geq |g(\omega)|$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_1} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu \leq \int_{\Omega_1} N(a|f(\omega)| + b|f(\omega)|)d\mu = \int_{\Omega_1} N((a+b)|f(\omega)|)d\mu = \\ &= \int_{\Omega_1} N(|f(\omega)|)d\mu. \end{aligned}$$

Аналогично для $\omega \in \Omega_2$ выполнено неравенство $|f(\omega)| < |g(\omega)|$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2} N(a|f(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu \leq \int_{\Omega_2} N(a|g(\omega)| + b|g(\omega)|)d\mu = \int_{\Omega_2} N((a+b)|g(\omega)|)d\mu = \\ &= \int_{\Omega_2} N(|g(\omega)|)d\mu. \end{aligned}$$

Наконец

$$\begin{aligned} \rho_N(af+bg) &\leq I_1+I_2 \leq \int_{\Omega_1} N(|f(\omega)|)d\mu + \int_{\Omega_2} N(|g(\omega)|)d\mu \leq \int_{\Omega} N(|f(\omega)|)d\mu + \int_{\Omega} N(|g(\omega)|)d\mu = \\ &= \rho_N(f) + \rho_N(g). \end{aligned}$$

4. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность, стремящаяся к 0. Без ограничения общности считаем, что $|a_n| < 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда почти всюду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(\omega) = 0.$$

В силу непрерывности функция $N(u)$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(|a_n f(\omega)|) = 0.$$

Так как функция $N(u)$ неубывающая, то

$$N(|a_n x(t)|) \leq N(|f(\omega)|).$$

Потому, по теореме Лебега,

$$\rho_N(a_n f) = \int_{\Omega} N(|a_n f(\omega)|)d\mu \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

□

Говорят, что функция $N(u)$ удовлетворяет (Δ_2) -условию, если существует положительная константа k такая, что выполняется

$$(\Delta_2) : N(2u) \leq kN(u).$$

Приведем еще несколько свойств функции $\rho_N(f)$.

Предложение 2. 1. Если $0 \leq a \leq 1$, то для любого $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$

$$\rho_N(ax) \leq \rho(f).$$

2. Функция $\rho_N(af)$ является неубывающей функцией аргумента $a \in [0, \infty)$.

3. Если функция $N(u)$ удовлетворяет (Δ_2) -условию, то следующие условия эквивалентны

- $\rho_N(af_n) \rightarrow 0$ при $\rho_N(f_n) \rightarrow 0$;
- $\rho_N(f_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho_N(2f_n) \rightarrow 0$.

Доказательство. 1. Так как при $a, b \geq 0, a + b = 1$

$$\rho_N(af + bg) \leq \rho_N(f) + \rho_N(g),$$

то, полагая $g = 0$, получим:

$$\rho_N(af) \leq \rho_N(f)$$

для любого $a \in [0, 1]$.

2. Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2$, $a_2 \neq 0$. Тогда

$$\rho_N(a_1f) = \rho_N\left(\frac{a_1}{a_2}a_2f\right) \leq \rho_N(a_2f),$$

так как $0 \leq \frac{a_1}{a_2} \leq 1$.

3. Импликация $(\rho_N(af_n) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_N(f_n) \rightarrow 0) \Rightarrow (\rho_N(f_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho_N(2f_n) \rightarrow 0)$ очевидна.

Пусть теперь выполнено условие $\rho_N(f_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho_N(2f_n) \rightarrow 0$ и $\{f_n\}$ — последовательность элементов из $\mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $\rho_N(f_n) \rightarrow 0$. Нам нужно доказать, что тогда $\rho_N(af_n) \rightarrow 0$ для любого скаляра a . Ясно, что достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Для некоторого натурального числа m будет выполнено неравенство

$$0 < a \leq 2^m.$$

По условию (Δ_2) :

$$\begin{aligned} \rho_N(2f_n) &\leq k\rho_N(f_n), \\ \rho_N(2^2f_n) &\leq k^2\rho_N(f_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_N(2^mf_n) &\leq k^m\rho_N(f_n). \end{aligned}$$

В силу монотонности функции $\rho_N(af)$ по a имеем:

$$\rho_N(af_n) \leq \rho_N(2^mf_n) \leq k^m\rho_N(f_n) \rightarrow 0,$$

Следовательно,

$$\rho_N(af_n) \rightarrow 0.$$

□

Замечание 1. Пользуясь терминологией работ [20, 21], можно утверждать, что функция $\rho_N(f)$ является метризуемой модулярной на $\mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $N(u)$ удовлетворяет (Δ_2) -условию.

Определение 5. Пусть $\tilde{\mathbf{L}}_N = \tilde{\mathbf{L}}_N(\Omega, \Sigma, \mu)$ — множество всех таких функций $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, что существует положительное число $k > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\rho_N(kf) < +\infty,$$

и

$$\|x\|_N = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\}.$$

Пространство $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$ называется обобщенным пространством Орлича.

Замечание. Если функция $N(u)$ — выпуклая, то пространство $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$ совпадает с классическим пространством Орлича $(\mathbf{L}_N, \|\cdot\|_N)$.

Теорема 4. Пусть $\tilde{\mathbf{L}}_N = \tilde{\mathbf{L}}_N(\Omega, \Sigma, \mu)$ — множество всех $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ таких, что существует положительное число $k > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\rho_N(kf) < +\infty,$$

и

$$\|x\|_N = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\}.$$

Тогда $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$ — симметричное F -пространство.

Доказательство. I. Докажем сначала, что $\tilde{\mathbf{L}}_N = \tilde{\mathbf{L}}_N(\Omega, \Sigma, \mu)$ — линейное пространство.

I.1. Пусть $f \in \tilde{\mathbf{L}}_N$ и пусть $t \in \mathbb{K}$, $t \neq 0$. Из определения $\tilde{\mathbf{L}}_N$ следует, что существует $k > 0$ такое, что

$$\rho_N(kf) < +\infty.$$

Поэтому

$$\rho_N(kf) = \rho_N \left(\frac{k}{|t|} |t|f \right) = \rho_N \left(\frac{k}{|t|} tf \right) < +\infty.$$

Полагая $k_1 = \frac{k}{|t|} > 0$ получим, что

$$\rho_N(k_1 tf) < +\infty,$$

т. е., $tf \in \tilde{\mathbf{L}}_N$.

I.2. Пусть теперь $f, g \in \tilde{\mathbf{L}}_N$. Из определения $\tilde{\mathbf{L}}_N$ следует, что существуют $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что:

$$\rho_N(k_1 f) < +\infty, \quad \rho_N(k_2 g) < +\infty.$$

Пусть $k = \min(k_1, k_2)$. Тогда

$$\rho_N \left(\frac{k}{2}(f + g) \right) = \rho_N \left(\frac{1}{2}kf + \frac{1}{2}kg \right) \leq \rho_N(kf) + \rho_N(kg) \leq \rho_N(k_1f) + \rho_N(k_2g) < +\infty.$$

Значит, $f + g \in \tilde{\mathbf{L}}_N$.

Таким образом, множество $\tilde{\mathbf{L}}_N$ — линейное пространство.

II. Покажем, что

$$\|f\|_N = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\}.$$

есть F -норма на $\tilde{\mathbf{L}}_N$.

II.1. Так как

$$f = 0 \iff \rho_N(f) = 0,$$

то

$$f = 0 \iff \|f\|_N = 0.$$

II.2. Пусть $|a| = 1$. Тогда для любого $f \in \tilde{\mathbf{L}}_N$ получим:

$$\|af\|_N = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{af}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\} = \|f\|_N.$$

II.3. Пусть $f, g \in \tilde{\mathbf{L}}_N$. Из определения $\|f\|_N$ следует, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\rho_N \left(\frac{fx}{\varepsilon} \right) < \varepsilon$$

и

$$\|f\|_N < \varepsilon < \|f\|_N + \delta.$$

Аналогично, из определения $\|g\|_N$ для этого же $\delta > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\rho_N \left(\frac{g}{\eta} \right) < \eta$$

и

$$\|g\|_N < \eta < \|g\|_N + \delta.$$

Тогда

$$\rho_N \left(\frac{f+g}{\varepsilon+\eta} \right) = \rho_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\eta} \frac{f}{\varepsilon} + \frac{\eta}{\varepsilon+\eta} \frac{g}{\eta} \right) \leq \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) + \rho_N \left(\frac{g}{\eta} \right) \leq \varepsilon + \eta.$$

Следовательно,

$$\|f + g\|_N \leq \varepsilon + \eta \leq \|f\|_N + \|g\|_N + 2\delta.$$

В силу произвольности δ , получаем, что

$$\|f + g\|_N \leq \|f\|_N + \|g\|_N.$$

II.4. Покажем, что

$$\|f_n\|_N \rightarrow 0 \iff \rho_N(f_n) \rightarrow 0.$$

Пусть $\rho_N(f_n) \rightarrow 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда получаем, что

$$\rho_N\left(\frac{f_n}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для этого $\varepsilon > 0$ существует такое K , что для любого $n > K$

$$\rho_N\left(\frac{f_n}{\varepsilon}\right) < \varepsilon.$$

Значит

$$\|f_n\|_N < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получим, что

$$\|f_n\|_N \rightarrow 0.$$

С другой стороны, пусть $\|f_n\|_N < 1$ и пусть a — произвольное число такое, что $\|f_n\|_N < a < 1$. Тогда

$$\rho_N(f_n) \leq \rho_N\left(\frac{f_n}{a}\right) \leq a.$$

Это показывает, что

$$\rho_N(f_n) < \|f_n\|_N.$$

Следовательно, если $\|f_n\|_N \rightarrow 0$, то $\rho_N(f_n) \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\|f_n\|_N \rightarrow 0 \iff \rho_N(f_n) \rightarrow 0.$$

Нетрудно видеть, что из этого предельного соотношения следуют свойства 4)–6) F -нормы (см. определение 1).

III. Докажем полноту пространства $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\tilde{\mathbf{L}}_N$. Последовательность $\{f_n\}$ является последовательностью Коши относительно сходимости по мере. Это означает, что для

каждого $a > 0$ выполняется

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{\omega : |f_n(\omega) - f_m(\omega)| > a\}) = 0.$$

Следовательно, по теореме Риса, последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду к измеримой функции $f \in \mathbf{S}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Т. к. последовательность $\{f_n\}$ — последовательность Коши, то существует положительное целое число K такое, что при $n, m > K$ выполняется неравенство:

$$\rho_N(f_n - f_m) = \int_{\Omega} N(|f_n(\omega) - f_m(\omega)|) d\mu \leq \varepsilon.$$

Полагая $m = n_k$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, по лемме Фату, получим

$$\rho_N(f_n - f) \leq \varepsilon.$$

Это означает, что

$$(f_n - f) \in \tilde{\mathbf{L}}_N.$$

Т. к. $\tilde{\mathbf{L}}_N$ — линейное, то $f \in \tilde{\mathbf{L}}_N$. В силу произвольности ε получим, что

$$\|f_n - f\|_N \rightarrow 0.$$

IV. Докажем, что $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$ — симметричное F -пространство.

IV.1. Пусть $f \in \tilde{\mathbf{L}}_N$. Из определения $\tilde{\mathbf{L}}_N$ следует, что существует $k > 0$ такое, что

$$\rho_N(kf) < +\infty.$$

Пусть $g \in \mathbf{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ такая, что $|g| \leq |f|$. Тогда

$$\rho_N(kg) = \int_{\Omega} N(k|g(\omega)|) d\mu = \int_{\Omega} N(k|f(\omega)|) d\mu = \rho_N(kf) < \infty.$$

Следовательно, $g \in \tilde{\mathbf{L}}_N$.

Кроме того,

$$\|g\|_N = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{g}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\} \leq \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho_N \left(\frac{f}{\varepsilon} \right) < \varepsilon \right\} = \|f\|_N.$$

IV.2. Для любой функции $f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ имеем:

$$\rho_N(f) = \int_{\Omega} N(|f(\omega)|) d\mu = \int_0^{\infty} \eta_{N \circ |f|} dm = \int_0^{\infty} \eta_{|f|} dN,$$

где $\int_0^{\infty} \eta_{|f|} dN$ — несобственный интеграл Римана-Стилтьеса от убывающей функции $\eta_{|f|}$ по возрастающей функции N .

Поэтому, если $f \in \tilde{\mathbf{L}}_N$ и $g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, равноизмеримая с f , то

$$\rho_N(f) = \int_0^{\infty} \eta_{|f|} dN = \int_0^{\infty} \eta_{|g|} dN = \rho_N(g).$$

Отсюда $g \in \tilde{\mathbf{L}}_N$ и

$$\|f\|_N = \|g\|_N.$$

Следовательно, $(\tilde{\mathbf{L}}_N, \|\cdot\|_N)$ — симметричное F -пространство. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются симметричные F -пространства измеримых функций на пространствах с конечной или бесконечной σ -конечной не атомической мерой, которые являются линейными метрическими пространствами. Строится класс примеров таких пространств, называемых обобщенными F -пространствами Орлича, по монотонным и одновременно не выпуклым функциям.

Как и для симметричных банаховых пространств, для симметричных F -пространств вводится понятие равноизмеримости. Доказано, что каждый класс равноизмеримых симметричных F -пространств содержит стандартное симметричное пространство, в то время как все равноизмеримые стандартные симметричные пространства совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. FRECHET, M. (1926) Les espaces abstrait topologiquement affine. *Acta Math.* №47. p. 25–52.
2. BANACH, S. (1932) *Theorie des operations lineaires*. Warszawa: Monografie Matematyczne I.
3. DAY, M. (1958) *Normed Linear Spaces*. Berlin: Springer-Verlag.
4. DUBFORD, N. and SCHWARTZ, J (1958) *Linear Operators. Part 1*. New-York: Interscience.
5. KALTON, N. (2003) Quasi-Banach spaces. *In Handbook of the Geomety of Banach spaces, Elsevier.* (Ch. 25). p. 1099–1106.

6. KALTON, N., PECK, N. and ROBERTS, J. (1984) *An F -space sampler*. London Math. Soc., Lec. Notes Ser., Camb. Univ. Press.
7. ROLEWICZ, S. (1984) *Metric linear spaces*. Warszawa: PWM.
8. BENNET, C. and SHARPLEY, R. (1988) *Interpolation of operators*. Boston: Pure Appl. Math. 129.
9. KREIN, S., PETUNIN, Yu., and SEMENOV, E. (1982) *Interpolation of linear operators*. Trans. Math. Mon., 54, AMS, Providence.
10. LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L. (1979) *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*. Springer.
11. MURATOV, M. & RUBSHTEIN, B.-Z. (2018) Main embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions. . Proceedings of the 8th International Conference «Topological algebras and their Applications, 2014». Ed. by A. Katz, De Gruyter Proc. Math. p. 175–192.
12. MURATOV, M. & RUBSHTEIN, B.-Z. (2020) Symmetric spaces of measurable functions. Some new and old advances. . Comtemp. Math. Fundamental Directions (66). p. 221–271.
13. RUBSHTEIN B.-Z. et al. (2016) *Foundations of Symmetric spaces of measurable functions*. Development in Mathematics 45, Springer.
14. ORLICZ, W. (1932) Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B. . Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (ser. A). p. 207–220.
15. ORLICZ, W. (1936) Über Räume (L^M). . Bull. Int. Acad. Polon. Sci. (ser. A). p. 93–107.
16. KRASNOSELSKII, M. and RUTITZKII, Ya. (1961) *Convex functions and Orlicz spaces*. Noordhoff.
17. MUSIELAK, J. (1983) *Orlicz spaces and modular spaces*. Lect. Notes in Math., 1034, Springer-Verlag.
18. MUSIELAK, J. & ORLICZ, W. (1959) On Modular Spaces. . Studia Math. (18). p. 49–65.
19. MUSIELAK, J. & ORLICZ, W. (1959) Some Remarks on Modular Spaces. . Bull. Acad. Pol. Sci. (7). p. 661–668.
20. MUSIELAK, J. (1978) *Modular Spaces*. Wyd. UAM, Pozna, 6.
21. NAKANO, H. (1950) *Modular semiordered linear spaces*. Tokio: Maruzen Co. Ltd..

УДК: 378.147

MSC2010: 97C70+90C30

ПРИМЕНЕНИЕ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© Д. Д. Гельфанова¹, Г. В. Шнарева¹, Я. А. Донченко²

¹ КРЫМСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ФЕВЗИ ЯКУБОВА

ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ И ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕР. УЧЕБНЫЙ, 8, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 295015, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Е-MAIL: *gelfanova@mail.ru, intgala@yandex.ru*,

² РОМАНОВСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНДУСТРИИ ГОСТЕПРИИМСТВА

УЛ. ДЫБЕНКО, 14, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 295000, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Е-MAIL: *donchenkoyanina@vk.com*

APPLICATION OF GEOGEBRA TO THE STUDY OF NONLINEAR PROGRAMMING BY
FUTURE ECONOMISTS.

Gelfanova D. D., Shnareva G. V., Donchenko Y. A.

Abstract. The practical and applied significance of mathematics in economics and management are in the ability to pose a problem, create a mathematical model and apply the appropriate mathematical apparatus to solve it. To do this, students in the areas of «Economics» and «Management» must have the skills of building chains of relationships between the objects and concepts being studied, between logical premises and consequences when carrying out proofs, and building a sequence of actions when solving problems. The discipline «Methods of optimal solutions» plays a decisive role in the formation of the necessary knowledge, skills and abilities in the preparation of a modern economist and manager. Within the framework of this discipline, the topic «Nonlinear Programming» examines optimization problems whose mathematical models contain nonlinear dependencies on variables—nonlinear programming problems. Solving such problems presents a certain difficulty for students, which is associated with the nonlinear nature of the model functions, the features of these problems and the lack of a universal method for solving them.

Therefore, the learning process requires qualitatively new approaches from teachers, in particular, the use of information technologies to increase the efficiency of mastering educational material and the cognitive activity of students. The most important tools in this case are clarity, visualization and interactivity of the solution process.

The authors chose the GeoGebra mathematical package as the most convenient and effective means for computer implementation of solving nonlinear programming problems using application software packages.

The use of this program in teaching mathematical disciplines remains one of the current areas of research. But the issue of solving nonlinear programming problems using GeoGebra is not sufficiently covered.

The purpose of the study is to use the GeoGebra mathematical program in teaching nonlinear programming to bachelors in the field of Economics and Management.

The article reveals the possibilities of using GeoGebra in teaching problem solving on the topic «Nonlinear Programming» within the framework of the discipline «Methods of Optimal Solutions». A computer implementation of solving a nonlinear programming educational problem in GeoGebra is demonstrated, providing visualization of dependencies, interactivity and graphical support for the solution process.

As a result, the possibilities of using the GeoGebra software product to improve the quality of mathematical training of future economists and managers have been revealed, which is important in the era of the digital economy.

Keywords: *information technologies, nonlinear programming problem, convex programming problem, graphical method, Kuhn-Tucker conditions, mathematical program, GeoGebra*

ВВЕДЕНИЕ

Практическое и прикладное значение математики в экономике и управлении состоит в умении сформулировать задачу, предложить математическую модель и применить соответствующий математический аппарат для ее решения. Для этого обучающиеся направления «Экономика», «Менеджмент» должны обладать навыками построения цепочек взаимосвязей между изучаемыми объектами и понятиями, между логическими посылками и следствиями при проведении доказательств, выстраивания последовательности действий при решении задач.

Решающую роль в формировании необходимых знаний, умений и навыков в подготовке современного экономиста и менеджера занимает дисциплина «Методы оптимальных решений», в рамках которой в теме «Нелинейное программирование» рассматриваются оптимизационные задачи, математические модели которых содержат нелинейные зависимости от переменных — задачи нелинейного программирования.

Решение таких задач представляет определенную сложность для обучающихся, которая связана с нелинейным характером функций моделей, особенностями этих задач и отсутствием универсального метода их решения. Поэтому процесс обучения требует от педагогов качественно новых подходов, в частности, применения информационных технологий для повышения эффективности освоения учебного материала и познавательной активности обучающихся. Важнейшими инструментами в данном случае выступают наглядность, визуализация и интерактивность процесса решения.

В качестве наиболее удобного и эффективного средства для компьютерной реализации решения задач нелинейного программирования с использованием прикладных

программных пакетов авторами выбран математический пакет GeoGebra. Данный выбор обусловлен из-за ряда преимуществ [1]:

1. GeoGebra — свободно распространяемая программа, т. е. имеет «GeoGebraNon-CommercialLicenseAgreement» и частично GPL, CC-BY-NC-SAGPL тип лицензии, что позволяет применять ее в учебных целях на безвозмездной основе;
2. GeoGebra возможно развернуть на различных операционных системах, что делает ее кроссплатформенным приложением, не требующим специальных условий для запуска приложения;
3. GeoGebra имеет онлайн-версию Geogebra online;
4. GeoGebra имеет набор инструментов для работы с геометрическими объектами и выполнения алгебраических вычислений, что позволяет применять программу при обучении различным математическим дисциплинам.

С помощью инструментов и команд GeoGebra можно выполнять как построения геометрических объектов, так и производить алгебраические вычисления, тем самым «подчеркивается неразрывная связь различных разделов математики, связь аналитической конструкции с наглядным представлением объекта» [2].

Математическая программа GeoGebra не является новшеством на рынке программных продуктов. В настоящее время данная программа широко используется в образовательном процессе, и вопросу применения GeoGebra при решении задач из различных разделов математики посвящено достаточное количество научно-методических работ. Так, в [3, 5] описаны возможности GeoGebra при решении типовых задач аналитической геометрии, в [6] — построение графиков функций с изменением их параметров, в [7, 8] — исследование функций одной переменной, в [9], [10] — исследование функций двух переменных. Поддержке программой GeoGebra геометрического (графического) анализа экономико-математических моделей линейного программирования посвящены работы [2], [11, 12].

Анализируя литературу, можно согласиться с Власовым Д. А. и Синчуковым А. В., что «программный продукт GeoGebra следует охарактеризовать значительным дидактическим потенциалом, выражающимся в различных способах представления, визуализации, решения математических задач и исследования математических моделей в области экономики, финансов и управления» [13]. Использование данной программы в обучении математическим дисциплинам остается одним из актуальных направлений исследований. Однако, вопрос решения задач нелинейного программирования с помощью GeoGebra недостаточно освещен.

Целью исследования является применение математической программы GeoGebra в обучении нелинейному программированию бакалавров направления подготовки «Экономика», «Менеджмент».

В статье раскрыты возможности применения GeoGebra в обучении решения задач по теме «Нелинейное программирование» в рамках дисциплины «Методы оптимальных решений». Продемонстрирована компьютерная реализация решения учебной задачи нелинейного программирования в GeoGebra, обеспечивающей визуализацию зависимостей, интерактивность и графическую поддержку процесса решения.

В результате раскрыты возможности применения программного продукта GeoGebra для повышения качества математической подготовки будущих экономистов и менеджеров, что является немаловажным в эпоху цифровой экономики.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При моделировании экономической деятельности приходится учитывать нелинейный характер взаимосвязи между экономическими показателями, в результате возникают модели нелинейного программирования. Задачей нелинейного программирования (ЗНП) называется задача математического программирования, в которой нелинейные и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

В общем виде нелинейная экономико-математическая модель имеет вид:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (1)$$

при условии

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — известные функции.

Для данной модели возможны следующие случаи:

- целевая функция — нелинейная, а ограничения — линейны;
- целевая функция — линейная, а ограничения (хотя бы одно из них) — нелинейные;
- целевая функция и ограничения нелинейные.

Задачи нелинейного программирования имеют ряд особенностей по сравнению с задачами линейного программирования: область допустимых решений задачи не всегда является выпуклой, экстремум целевой функции может достигаться не только

на границе, но и внутри области допустимых решений, причем локальных экстремумов может быть несколько; целевая функция может быть недифференцируемой, что затрудняет применение классических методов математического анализа. Вследствие этих особенностей решение задач нелинейного программирования труднее решения задач линейного программирования, и для них не существует универсального метода решения. Поэтому приходится применять различные методы и вычислительные алгоритмы, которые базируются на теории дифференциального исчисления, и выбор их зависит от конкретной постановки задачи и формы экономико-математической модели.

Как и для линейных задач, если число переменных равно двум ($n = 2$), нелинейные задачи можно решать геометрически. В этом случае целевая функция имеет вид

$$F = f(x_1, x_2) \rightarrow \max(\min) \quad (3)$$

при ограничениях в виде неравенств

$$g_i(x_1, x_2) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (3)-(4) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

- построение области допустимых решений (ОДР) — множество точек плоскости, удовлетворяющих всем ограничениям задачи. Если область допустимых решений пуста, то задача не имеет решения;
- построение семейства линий уровня целевой функции $f(x_1, x_2) = k$ при различных значениях параметра k ;
- определение направления возрастания (убывания) целевой функции;
- перемещение линии уровня в нужном направлении в ОДР для нахождения точек области, в которых целевая функция принимает оптимальное значение. Если целевая функция не ограничена снизу в задаче на минимум (сверху — в задаче на максимум), то задача не имеет оптимального решения;
- нахождение координат точки оптимума и определение в ней значения целевой функции.

При моделировании широкого круга планово-производственных и экономических задач соответствующие целевые функции проявляют определенные свойства, которые позволяют их отнести к классам так называемых выпуклых функций. В современной теории поиска экстремума выпуклых функций на выпуклых множествах классический метод множителей Лагранжа обобщен. Результатом такого обобщения является теорема Куна-Таккера.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, которая может быть решена на основе использования названной выше теоремы:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \quad (5)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \quad (6)$$

причем все функции $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются выпуклыми на некотором выпуклом множестве X , а функция F либо выпукла вниз на множестве X , либо выпуклая вверх.

Задача выпуклого программирования состоит в нахождении такого решения системы ограничений (4), при котором выпуклая вниз целевая функция F достигает минимального значения или выпуклая вверх функция F достигает максимального значения.

Схема решения задач выпуклого программирования состоит в следующем:

1. Составить функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7)$$

где λ_i — пока еще не определенные величины, так называемые множители Лагранжа;

2. Записать условия Куна-Таккера:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} \leq 0,$$

$$x_j^{(0)} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = 0, \quad x_j^{(0)} \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} \geq 0,$$

$$\lambda_i^{(0)} \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \right)_{X^{(0)}, \lambda^{(0)}} = 0, \quad \lambda_i^{(0)} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad (9)$$

где $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — вектор решения задачи,
 $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ — вектор множителей Лагранжа;

3. Найти какое-либо удовлетворяющее всем условиям решение. Если целевая функция является строго выпуклой, то это решение определяет единственное искомое решение исходной задачи.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В GEOGEBRA

В обучении математике ведущая роль отводится учебным задачам, которые являются обобщенной целью образовательной деятельности, сформулированным в виде задания, создающего учебную проблему, требующую развернутых действий. Одной из функций учебной задачи является обучающая функция, направленная на формирование системы математических знаний, умений, навыков у студентов по изучаемой теме [14].

Рассмотрим одну из учебных задач по теме «Нелинейное программирование», в ходе решения которой у обучающихся будут выработаны умения и навыки использования графического метода решения задач нелинейного программирования и условий Куна-Таккера:

$$F = -x^2 - y^2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2, \\ 2x + y \leq 8, \\ x + y \leq 6, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Реализуем решение в программе GeoGebra.

Так как математическая модель содержит только две переменные, то применим графический метод решения задачи нелинейного программирования. Построим область допустимых решений задачи (см. рис. 1). Для этого выполним следующие действия:

- в строке ввода GeoGebra введем уравнения прямых: $2x + y = 2$, $2x + y = 8$, $x + y = 6$;
- в строке ввода GeoGebra введем неравенства: $2x + y \geq 2$, $2x + y \leq 8$, $x + y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- обозначим точки пересечения введенных прямых через A , B , C , D , E (инструмент «Точка»);
- построим многоугольник $ABCDE$ (инструмент «Многоугольник»).

В результате область допустимых решений задачи — выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (рис. 1).

Построим линии уровня целевой функции. Если положить $F = -k$ ($k > 0$), то получим уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$: $-x^2 - y^2 = -k$. При различных значениях k можно получить семейство линий уровня функции F (см. рис. 2). Для изменения значений k необходимо воспользоваться инструментом «Ползунок».

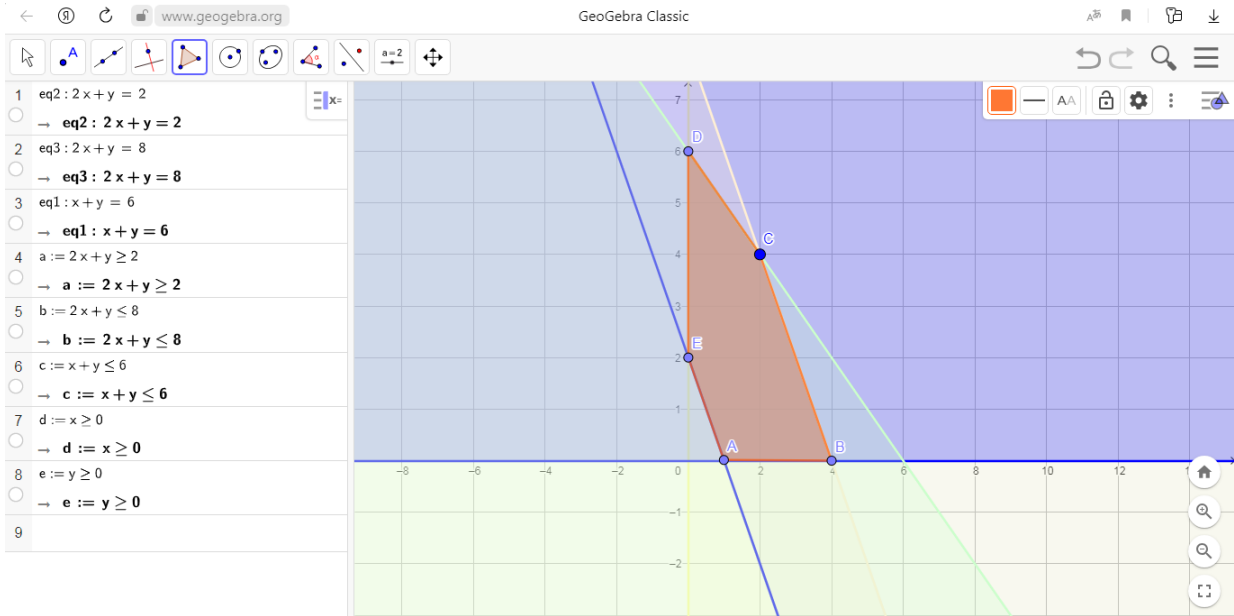


Рис. 1. Построение области допустимых значений

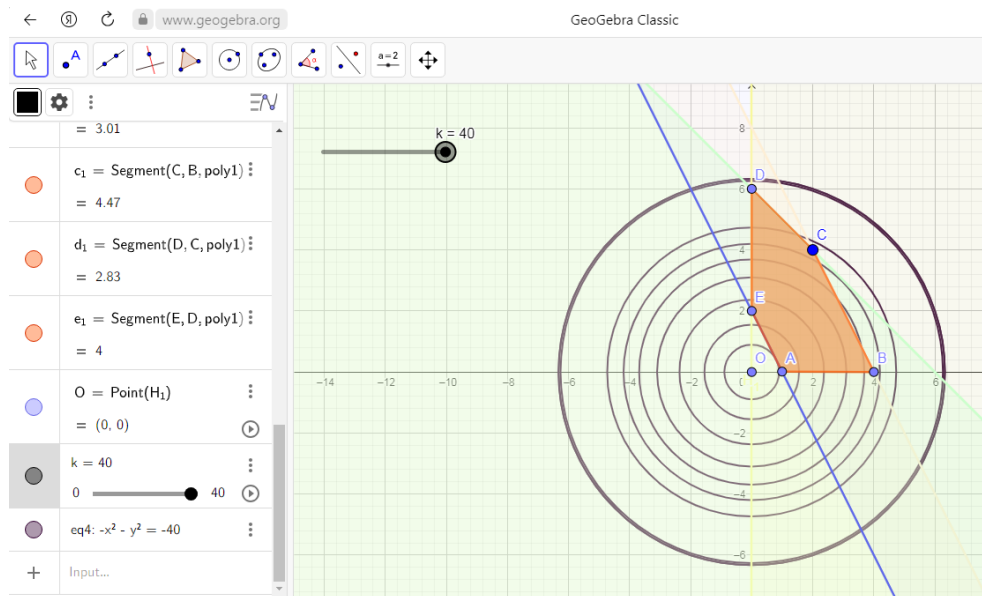


Рис. 2. Построение линий уровня целевой функции

Изменяя положение ползунка можно сделать вывод, что с уменьшением (увеличением) значения k значение функции $F = -k$ соответственно увеличивается (уменьшается). То есть, максимальному значению функции F будет соответствовать линия уровня с наименьшим значением k , имеющая общие точки с областью допустимых

решений. При $k = 0.8$ линия уровня и многоугольник $ABCDE$ имеют общую точку H (см. рис. 3).

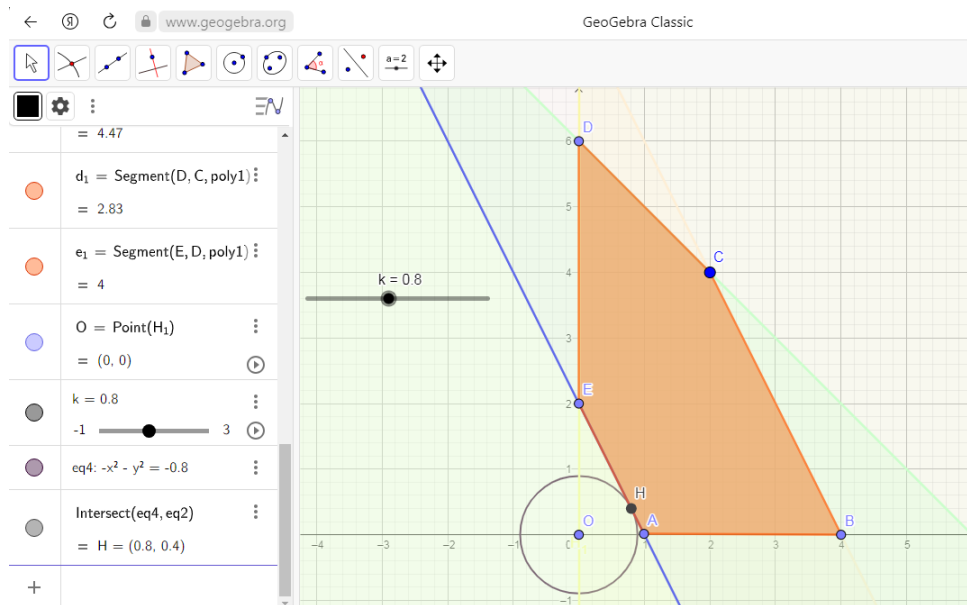


Рис. 3. Общая точка (H) линии уровня при $k = 0.8$ и области допустимых решений

Точка H не является вершиной многоугольника $ABCDE$, а ее координаты находятся как координаты точки пересечения окружности радиуса OH и прямой AE с помощью инструмента «Пересечение». В результате получим точку $H(0.8; 0.4)$, которая возможно является экстремумом. Можно поступить иначе: через центр O окружности с помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» проведем прямую, перпендикулярно прямой AE , а затем с помощью инструмента «Пересечение» найдем координаты точки H как точки пересечения радиуса OH и прямой AE . Значение целевой функции в точке $H(0.8; 0.4)$ равно: $F(0.8; 0.4) = -0.8$.

Данная задача относится к задаче выпуклого программирования, так как целевая функция является выпуклой вверх, а ограничения задачи формируют выпуклое множество допустимых решений. При этих условиях целевая функция имеет глобальный максимум, а исходная задача — единственное решение. Сведем задачу к задаче поиска седловой точки соответствующей функции Лагранжа.

Допустимый план задачи $X = (0.8; 0.4)$, найденный графическим методом, проверим на оптимальность с помощью условий Куна-Таккера: если удастся для $X = (0.8; 0.4)$ найти такой вектор $(a, b, c) \geq 0$, что пара $(X; (a, b, c))$ является седловой точкой функции $L(X; (a, b, c))$, то план X оптимален.

Запишем условия Куна-Таккера для данной задачи:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right), \quad x \left(\frac{\partial L}{\partial x_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right) = 0, \quad x \geq 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right), \quad y \left(\frac{\partial L}{\partial y_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right) = 0, \quad y \geq 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right), \quad a \left(\frac{\partial L}{\partial a_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right) = 0, \quad a \geq 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial b_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right), \quad b \left(\frac{\partial L}{\partial b_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right) = 0, \quad b \geq 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial c_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right), \quad c \left(\frac{\partial L}{\partial c_{X,(a,b,c)}} \leq 0\right) = 0, \quad c \geq 0. \quad (14)$$

Построим функцию Лагранжа (с учетом того, что ограничения должны иметь вид $g_i(x, y) \geq 0$):

$$L(x, y, a, b, c) = -x^2 - y^2 + a(2x + y - 2) + b(8 - 2x - y) + c(6 - x - y),$$

где через a, b, c обозначены множители Лагранжа.

Далее найдем частные производные функции Лагранжа по всем переменным с помощью инструмента «Производная» (см. рис. 4).



Рис. 4. Ввод функции Лагранжа и нахождение частных производных данной функции

Каждой частной производной функции L присвоим имя:

$$L_1(x, a, b, c) := 2a - 2b - c - 2x, \quad L_2(y, a, b, c) := a - b - c - 2y,$$

$$L_3(x, y) := 2x + y - 2, \quad L_4(x, y) := -2x - y + 8, \quad L_5(x, y) := -x - y + 6.$$

Учитывая полученные выражения частных производных, а также то, что $X = (0.8; 0.4)$, а вектор (a, b, c) множителей Лагранжа неизвестен, найдем значения частных производных функции Лагранжа по переменным a, b, c (см. рис. 5).



Рис. 5. Нахождение максимального значения целевой функции

Как видно из рис. 5, значение частной производной функции Лагранжа по переменной a равно нулю, а по переменным b и c больше нуля. Тогда, с учетом условий Куна-Таккера (12)-(14), получить, что $b = c = 0$, а множитель a будем искать с учетом того, что $a \geq 0$. Для нахождения a определим частную производную функции Лагранжа по переменной x при $x = 0.8$, $b = c = 0$ и, учитывая условия Куна-Таккера (10), приравняем ее к нулю (см. рис. 5). В результате, $a = 0.8$.

Проверка условий Куна-Таккера (10)-(14) при $X = (0.8; 0.4)$ и векторе множителей Лагранжа $(0.8; 0; 0)$ указывает на их полное выполнение.

Таким образом, в результате решения задачи нелинейного программирования получен следующий вектор $(0.8; 0; 0)$, который обеспечивает выполнение всех локальных условий Куна-Таккера при $X = (0.8; 0.4)$, то есть в точке $H(0.8; 0.4)$. Последнее и указывает на то, что точка $H(0.8; 0.4)$ является точкой, в которой достигается максимальное значение функции F . При этом $F_{\max} = -0.8^2 - 0.4^2 = -0.8$ (см. рис. 5).

Ответ: $X = (0.8; 0.4)$, $F_{\max} = -0.8$.

3. РЕЗУЛЬТАТ ПРИМЕНЕНИЯ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

При реализации решения рассмотренной задачи GeoGebra выступает в качестве учебного программного средства, обладающего такими дидактическими возможностями как наглядность, моделирование, динамика. При этом обучающиеся отвечают за логику решения задачи.

Традиционно на лабораторных занятиях реализуется решение оптимизационных задач с помощью табличного процессора MS Excel. Для этих целей используется инструмент «Поиск решения». Но в этом случае процесс решения задачи скрыт от пользователя, что неприемлемо на начальном этапе изучения темы. В сравнении с Excel, использование GeoGebra способствует выработке наглядных представлений о сущности задачи нелинейного программирования и применяемых методов.

Наблюдение за обучающимися во время выполнения практического задания в программе GeoGebra выявило появление у них повышенного познавательного интереса к решению задач нелинейного программирования.

С целью определения мнения обучающихся о влиянии математического пакета GeoGebra на степень вовлеченности в образовательный процесс и эффективность освоения учебного материала в конце изучения темы «Нелинейное программирование» был проведен опрос. В нем участвовали 90 респондентов — обучающиеся четырех академических групп бакалавриата по направлениям подготовки «Экономика» и «Менеджмент» (профили «Мировая экономика», «Цифровая экономика», «Логистика и управление цепями поставок», «Менеджмент (гостиничный, курортный и туристический бизнес)»).

Были предложены следующие вопросы:

Вопрос 1. Считаете ли Вы уместным применение математической программы GeoGebra в качестве дополнительного учебного средства к традиционному обучению?

Вопрос 2. Помогло ли Вам применение математической программы GeoGebra в освоении методов решения задач нелинейного программирования?

Вопрос 3. Считаете ли Вы, что применение математической программы GeoGebra повышает интерес обучающихся к изучению темы «Нелинейное программирование»?

Вопрос 4. Считаете ли Вы, что применение математической программы GeoGebra предоставляет возможность улучшения усвоения темы «Нелинейное программирование»?

Вопрос 5. Считаете ли Вы, что применение математической программы GeoGebra способствуют повышению качества знаний?

Варианты ответов для всех вопросов следующие: «да», «нет», «в некоторой степени», «затрудняюсь ответить».

На первый вопрос дали утвердительный ответ 85.6 % обучающихся, 5.6 % — «нет», 5.6 % — «в некоторой степени», 3.3 % — «затрудняюсь ответить». На второй вопрос 82.2 % обучающихся ответили «да», 4.4 % — «нет», 11.1 % — «в некоторой степени», 2.2 % — «затрудняюсь ответить». На третий вопрос дали ответ «да» 75.6 % обучающихся, 7.8 % — «нет», 13.3 % — «в некоторой степени», 3.3 % — «затрудняюсь ответить». На четвертый вопрос ответили «да» 78.9 % обучающихся, 3.3 % — «нет», 15.6% — «в некоторой степени», 2.2 % — «затрудняюсь ответить». На пятый вопрос ответили «да» 81.1% обучающихся, 4.4 % — «нет», 12.2 % — «в некоторой степени», 2.2 % — «затрудняюсь ответить».

Анализируя полученные результаты опроса, можно сделать вывод, что использование пакета прикладной программы GeoGebra при изучении темы «Нелинейное программирование» позволило повысить эффективность освоения учебного материала и приобрести навыки решения задач по данной теме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование GeoGebra при решении поставленной задачи позволяет визуализировать каждый шаг решения и дает наглядное представление о сущности задачи нелинейного программирования. Несмотря на то, что при решении задачи используется компьютерная программа, обучающийся сам организует процесс решения, для чего необходимы знания алгоритма решения задачи нелинейного программирования графическим способом, схемы решения задач выпуклого программирования, составления функции Лагранжа, условий Куна-Таккера.

Продемонстрированная компьютерная реализация решения задачи нелинейного программирования в GeoGebra показала возможности применения данной программы, обеспечивающей визуализацию и интерактивность процесса решения, что способствует повышению уровня понимания и прочного усвоения математических знаний и применения их в дальнейшей практической деятельности.

Таким образом, рассмотренные преимущества применения GeoGebra при изучении темы «Нелинейное программирование» в рамках дисциплины «Методы оптимальных решений» имеют большое значение для повышения качества математической подготовки будущих экономистов в эпоху цифровой экономики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шнарева, Г. В. GeoGebra как инструмент цифровизации математического образования / Г. В. Шнарева // Молодежь XXI века — пути к профессионализму в условиях цифровизации: сборник материалов региональной конференции (Симферополь, 18 ноября 2021 года) — Симферополь: АНО «ООВО» «Университет экономики и управления». — 2021. — С. 344–355.
SCHNAREVA, G. (2021) GeoGebra as a tool of digitalization of the mathematical education. *Youth of the XXI century and ways to professionalism in the context of digitalization: a collection of materials of the regional conference (Simferopol, November 18, 2021)*. Simferopol: University of Economics and Management. p. 344–355.
2. Андрафанова, Н. В. Применение информационных технологий в математическом образовании / Н. В. Андрафанова, Н. В. Губа // Образовательные технологии и общество. — 2015. — 4. — С. 559–573.
ANDRAFANOVA, N.& GUBA, N. (2015) Application of information technologies in mathematical education. *Educational technologies and society*. 4. p. 559–573.
3. Акишин, Б. А. Решение типовых математических задач с помощью программы GeoGebra / Б. А. Акишин, В. А. Воронцова // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике. — 2017. — 3(1). — С. 275–280.
AKISHIN, B.& GVORONCOVA, V. (2017) Solving typical mathematical problems using the GeoGebra program. *Current development trends and prospects for the introduction of innovative technologies in mechanical engineering, education and economics*. 3 (1). p. 275–280.
4. Ерилова, Е. Н. Когнитивно-визуальный подход к преподаванию высшей математики / Е. Н. Ерилова // Инновационные аспекты развития науки и техники. — 2021. — 2. — С. 271–276.
ERILOVA, E. (2021) Cognitive-visual approach to teaching higher mathematics. *Innovative aspects of science and technology development*. 2. p. 271–276.
5. Пронина, Е. В. Особенности использования математического пакета GeoGebra при изучении темы «Кривые второго порядка» / Е.В. Пронина // Наука и образование: новое время. Научно-методический журнал. — 2020. — 3(21). — С. 10–16.
PRONINA, E. (2020) Features of using the GeoGebra mathematical package when studying the topic «Second-order curves». *Science and education*. 3 (21). p. 10–16.

6. Богатова, С. В. Использование программы GeoGebra на занятиях по математическому анализу / С. В. Богатова // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. — 2020. — 8. — С. 38–42.

BOGATOVA, S. (2020) Using the GeoGebra program in mathematical analysis classes. *Actual problems of teaching mathematics at a technical university*. 8. p. 38–42.

7. Безбородова, Е. А. Использование программы GeoGebra при изучении темы «Исследование функций с помощью дифференциального исчисления» / Е. А. Безбородова, Г. А. Московченко, М. Л. Алмазова и И. М. Шестакова // Достигновения и перспективы научно-инновационного развития АПК : сборник статей по материалам III Всероссийской (национальной) научно-практической конференции (Курган, 2022 г). — Курган: КГСА им. Т. С. Мальцева. — 2022. — С. 361–364.

BEZBORODOVA, E. et al. (2022) Using the GeoGebra program in the study of the topic «Research of functions by using differential calculus». *Achievements and prospects of scientific and innovative development of the agro-industrial complex: collection of articles on materials of the III All-Russian (national) scientific and practical conference (Kurgan, 2022)*. Kurgan: Maltsev KSAA. p. 361–364.

8. Сафонов, В. И. Потенциальные возможности интерактивной среды GeoGebra в реализации преемственности математического образования «школа-вуз» / В. И. Сафонов, О. А. Бакаева и Е. А. Тагаева // ПНиО. — 2019. — 1(37). — С. 68–75.

SAFONOV, V., BAKAEVA, O. & TAGAEVA, E. (2019) The potential of the interactive GeoGebra environment in the implementation of the continuity of mathematical education «school-university». *Prospects of science and education*. 1 (37). p. 68–75.

9. Безбородова, Е. А. Использование программы GeoGebra при изучении функций двух переменных / Е. А. Безбородова, Г. А. Московченко // Аграрная наука в условиях модернизации и цифрового развития АПК России: сборник статей по материалам Международной научно-практической конференции (Курган, 14 апреля 2022 года). — Курган: КГСА им. Т. С. Мальцева. — 2022. — С. 444–449.

BEZBORODOVA, E. & MOSKOVCHENKO, G. (2022) Using the GeoGebra to study the functions of two variables. *Agrarian Science in the Context of Modernization and Digital Development of the Russian Agro-Industrial Complex: a collection of articles on the materials of the International Scientific and Practical Conference (Kurgan, 14 April 2022)*. Kurgan: T.S. Maltsev KSAA. p. 444–449.

10. Удовенко, Л. Н. Методические аспекты визуализации функций двух переменных в курсе математического анализа / Л. Н. Удовенко, Е. А. Седова, М. В. Шабанова // Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике. К 80-летию со дня рождения В. А. Гусева: материалы VII Международной научно-практической конференции (Москва, 18-19 ноября 2022 года). — Москва: Московский педагогический государственный университет. — 2022. — С. 269–275.
UDOVENKO, L., SEDOVA, E. & SCHABANOVA, M. (2022) Methodological aspects of visualization of the functions of two variables in the course of mathematical analysis. *Actual problems of teaching mathematics at school and university: from science to practice. To the 80th anniversary of the birth of V.A. Gusev: materials of the VII International Scientific and Practical Conference (Moscow, 18-19 November 2022)*. Moscow: Moscow Pedagogical State University. p. 269–275.
11. Говор, С. А. Применение цифровых технологий при решении оптимизационных задач / С. А. Говор, А. В. Чибисова // E-Scio. — 2021. — 10(61). — С. 516–524.
GOVOR, S. & CHIBISOVA, A. (2021) Application of digital technologies in solving optimization problems. *E-Scio*. 10 (61). p. 140–152.
12. Уразаева, Л. Ю. Использование GeoGebra при обучении компьютерному моделированию / Л. Ю. Уразаева, Н. В. Манюкова // МСМ. — 2022. — 4(64). — С. 140–152.
URAZAEVA, L. & MANJUKOVA, N. (2022) Using GeoGebra in Computer modeling training. *Mathematical structures and modeling*. 4 (64). p. 140–152.
13. Власов, Д. А. Модернизация методических систем преподавания математических дисциплин на основе GeoGebra / Д. А. Власов, А. В. Синчуков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2020. — 16(1). — С. 187–197.
VLASOV, D. & SINCHUKOV, A. (2020) Modernization of methodological systems for teaching mathematical disciplines based on GeoGebra. *Modern information technologies and OT-education*. 16 (1). p. 187–197.
14. Ураимхалилова, А. Роль процесса решения задач при активизации деятельности учащихся / А. Ураимхалилова, М. Н. Нурматова // Наука. Образование. Техника. — 2022. — 3(75). — С. 107–113.
URAIMHALILOVA, A. & NURMATOVA, M. (2022) The role of the problem-solving process in the activation of students' activities. *The science. Education. Technic*. 3 (75). p. 107–113.

УДК: 004.023, 004.048, 004.67

MSC2010: 68T20

АНАЛИЗ ДАННЫХ ТОРМОЖЕНИЯ ПОЕЗДОВ МЕТРОПОЛИТЕНА

© В. А. Матковский

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *vladislavmatkovskiy2015@mail.ru*

ANALYSIS OF BRAKING DATA OF METRO TRAINS.

Matkovsky V. A.

Abstract. The paper considers the problem of modeling the braking process of trains with the aim of further assessing the quality of braking. It is shown that an approach based on the intellectualization of processing big data characterizing the process of braking of metro trains allows us to refine the development of train control systems in automatic mode and predict the quality and accuracy of stopping. Of particular importance is the emergency braking system for trains, which ensures the safety of passengers and provides emergency braking of the train in the event of an emergency. Mathematical models describing the process of braking an object (subway train) depend on the complexity of the object's system components. Knowing the distance and braking speed measured by the sensors, it is possible to restore the mathematical model. In the general case, the problem of reconstructing a model is the problem of reconstructing a differential equation from measurement data. This task is incorrect. For practical purposes of assessing the quality of braking, it is enough to assume that such models are described by a system of first-order ordinary differential equations. Consequently, using the measured data, it is possible to find the statistical characteristics of the braking process and visually evaluate the quality of braking using a set of these statistics and comparing the smoothed phase trajectories of the system (distance-velocity).

Thus, inhibition depends on many factors, which is why various inhibitory sequences arise, the assessment of the quality of which represents an actual mathematical problem. It is shown that statistical methods and cluster analysis methods make it possible to extract knowledge about the braking process from measurement data such as the coordinates of metro stations, based on the study of histograms and the application of clustering algorithms to the coordinates of train stops. Characteristic braking trajectories have been identified, and the values of motion kinematics parameters have been obtained. The work uses the Python language, as well as a number of free libraries that satisfy the need for software tools for working with data. Several software methods have been created. Based on the obtained trajectories, it is then possible to determine the braking class. The technology used may be promising in other subject areas. It is shown that the statistical data of the movement of metro trains, the trajectory data obtained

from them and visualized representations are big data (Big Data, BD), from which knowledge about the quality of train braking is extracted (Data Mining, DM). The proposed intelligent system for processing such data combines statistical methods of machine learning (ML) and neural networks.

Keywords: *big data, model, phase trajectories of a dynamic system, braking efficiency, intelligent system, train braking data processing*

ВВЕДЕНИЕ

Система аварийного торможения поездов обеспечивает безопасность пассажиров, в связи с чем имеет особую значимость, а также экстренное торможение поезда при возникновении аварийной ситуации. Торможение зависит от многих факторов (наклона и характера пути, загруженности вагонов), поэтому датчики фиксируют различные тормозные последовательности, оценка качества которых представляет собой актуальную математическую задачу. Таким образом, необходимо моделировать процесс торможения поездов с целью дальнейшей оценки качества торможения. Решение поставленной задачи реализуется через следующие подзадачи: интеллектуализация обработки данных, определение модели торможения поезда, извлечение информации из данных (статистическая обработка, многокритериальное исследование, ранжирование) и кластеризация данных.

Об актуальности данного направления исследования свидетельствует ряд работ [1-11] по данной тематике.

В работе [8] исследуется процесс экстренного торможения скоростного пассажирского поезда нового поколения, а также проведена оценка процесса торможения электропоезда ЭКр1 «Тарпан». В качестве одного из критериев эффективности тормозов поезда принят тормозной путь. Полученные с помощью теоретических расчетов значения тормозных путей электропоезда при экстренных пневматическом и электропневматическом торможениях на горизонтальной площадке не превышают значений, установленных техническим заданием, и практически совпадают с данными ходовых тормозных испытаний.

В учебном пособии [2] изложен материал о назначении и принципах действия тормозных устройств и систем.

Создан сайт популяризации вопросов теории тяги поездов и тяговых расчетов, где, в частности, занимаются созданием монографии «Тяговые расчеты» [1].

В [10] приводятся данные о разрабатываемых системах автоматического управления поездами метрополитена (САУП М), предназначенных для управления ведением поезда, включая пуск, разгон, выбор режима ведения на перегонах, торможение у платформ с целью повышения точности выполнения графика движения. САУП М подразделяются на 5 уровней автоматизации (Grade of Automation) по классификации международной ассоциации общественного транспорта International Association of Public Transport: GoA0-GoA4. В Петербургском метрополитене реализовано GoA2 — полуавтоматическое управление подвижным составом. GoA4 — полностью автоматизированное управление без участия персонала реализовано в Копенгагене и Дубаи. Поезда без машинистов движутся в метро Франции, Испании и др. Для оборудования автоведения устанавливаются метки: ОПВ — знак остановки первого вагона; ОД1 — отключение двигателей в номинальном режиме проследования перегона; ОД2 — отключение в режиме нагона; Т — торможение; СТ1 — начало торможения перед платформой; СТ2 — начало прицельного торможения перед платформой и точной остановкой в зоне метки ОПВ. В системе осуществляется протоколирование в виде графика и «базы данных, рассчитанных/исполненных стоянок, проследование маршрутов по перегонам, опозданий, грузонапряженности» [10]. Представленная для обработки база данных не снабжена подобной информацией. Для работы важен процесс регулирования длительности стоянок и времени проследования перегонов, реализации функции нагона, что связано с режимами разгона и торможения.

В [6] рассматривается направление развития интеллектуальных систем автоматизации управления на основе алгоритмического и математического описания процессов, а также прогнозирование моментов времени прибытия поездов на станции. Учитывая сложную зависимость длины пути от его профиля, плана и различия тормозных сил поездов, необходимо решать задачи снижения скоростей на участках разной длины, не превышая постоянные и временные ограничения установленной скорости.

В работе [5] утверждается, что на основе статического анализа данных о параметрах движения поездов в условиях автоведения станций возможно использование этих данных для прогнозирования моментов времени прибытия на станции. Интеллектуализированная система может передавать на устройства автоведения информацию о покоординатных скоростях, которые отвечают адекватным изменяющимся условиям движения каждого поезда.

Математические модели, описывающие процесс торможения объекта (поезда метро), зависят от сложности компонент системы объекта. Зная измеренные датчиками

показания пути и скорости торможения, можно восстановить математическую модель. В общем случае задача восстановления модели — это задача восстановления дифференциального уравнения по данным измерений. Такая задача является некорректной. Для практических целей оценки качества торможения достаточно предположить, что такие модели описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Следовательно, по измеряемым данным можно находить статистические характеристики процесса торможения и наглядно оценивать качество торможения по набору этих статистик и сравнения сглаженных фазовых траекторий системы (расстояние–скорость).

Рассмотрим более подробно работу с данными в виде фазовых траекторий системы. В рамках математического подхода можем считать, что данным для каждого поезда отвечает свой агент и набор траекторий $(A_j, V_j), j = \overline{1, m}$. Множества V_j содержат набор траекторий, связанных с остановками. По наклону траекторий можно определить направление движения поезда. Существует некоторый критерий качества торможения по длине пути торможения и ускорению (резкое торможение не комфортно для пассажиров), что позволяет выбрать множество эталонных траекторий для соответствующих остановок и углов наклона пути на участках торможения. Сравнительный анализ с эталонами позволяет выявить нарушения режима торможения, экстренные или аварийные траектории торможения, а также отсеять заведомо ложные или неполные данные, поступающие от датчиков.

1. ЗАДАЧА ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Описание исходных данных. В ходе эксперимента исследуемые поезда оснащались датчиками, способными собирать данные о кинематике поезда: скорость, время, расстояние. Упомянутые данные, характеризующие кинематику поезда, относятся к исходным. Фрагмент базы данных показателей экстренного торможения поездов метро, предоставлен в виде табличного файла MS Excel, фрагмент файла показан на рис. 1.

Данные записаны в виде таблицы со следующими полями: **Run** — уникальный ключ для последовательности измерений показаний датчиков; **Date** — временная метка последовательности; **Train N°** — номер поезда; **Speed** — мгновенная скорость поезда (точность: 0,5 м/с); **Abscissa** — координата точки пробега на линии, используемая для расчета расстояния, пройденного поездом; **Slope** — уклон трассы в процентах. Например, +4 % означает, что поезд будет подниматься на 4 м каждые 100 м.

Run	Date	Train N°	Speed (m/s)	Abscissa (m)	Slope (>0 : up ; <0 : down)
1	01/12/2012 00:03:39	1	9	19779,29	4,00%
1	01/12/2012 00:03:40	1	7,5	19794,04	4,00%
1	01/12/2012 00:03:41	1	6	19804,04	4,00%
1	01/12/2012 00:03:42	1	4	19811,54	4,00%
1	01/12/2012 00:03:43	1	3	19814,79	4,00%
1	01/12/2012 00:03:45	1	1	19818,04	4,00%
1	01/12/2012 00:03:46	1	0	19818,79	4,00%

Рис. 1. Фрагмент таблицы Excel

Под «торможением» будем понимать процесс полной остановки поезда в течении некоторого интервала времени. Начало процесса торможения не может осуществляться из неподвижного состояния (начальная скорость не равна нулю), окончание процесса — полная остановка (скорость поезда равна нулю).

Процесс снижения скорости, но не обязательно до нуля, будем называть «замедлением». Процесс набора скорости называют «разгоном», а процесс изменения скорости от начальной к еще большей — «ускорением». Термин «ускорение» также может применяться в теоретико-физическом смысле, как предел отношения приращения скорости объекта к приращению времени при стремлении приращения времени к нулю (производная от скорости).

«Последовательностью» или «измерениями» (когда это ясно из контекста) или «последовательностью измерений» или «серией замеров» (когда требуется подчеркнуть или уточнить), будем называть все записи в базе данных, имеющие один общий ключ **Run**, отсортированные по возрастанию **Date**.

Последовательность имеет ряд свойств: 1) последовательность уникальна, нет других записей или группы записей с таким же ключом **Run**; 2) последовательность не убывает по значениям в столбце **Date**, что ясно из определения. Как и в математической последовательности, можно оперировать понятиями «элемент последовательности» — единичная запись в таблице данных с тем же номером, что у последовательности, начальный и конечный, элементы, элемент с номером (номер отсчитывается от первого) для совместимости с большинством языков программирования начальный элемент будет нулевым и т.д.; 3) каждая последовательность несет в себе информацию об одном конкретном объекте, у каждого объекта есть свой уникальный номер **Train N°**, одна последовательность соответствует одному объекту (поезду), т. е. не встречаются 2 записи, в которых при одном и том же **Train N°** разные **Run**.

Последовательность будет тормозной или торможением, если скорость «Speed» в ее последнем элементе равна нулю.

1.2. Постановка задачи обработки данных торможения поездов метро.

Приведем необходимые результаты, основываясь на статье [7]. Поезд перемещается под действием результирующей силы. Результирующая сила состоит из всех сил, действующих на поезд, но, т. к. данных о изучаемых поездах недостаточно, будем исследовать движение как движение материальной точки. Ускорение, с которым движется материальная точка по закону Ньютона $a = F/m$, можно оценивать по данным измерений.

Рассмотрим моделирование процесса торможения электропоезда по данным измерения расстояния, скорости, уклона в фиксированные моменты времени.

Введём обозначения. Для поезда с номером N : t — время (с); $x(t) \equiv s(t)$ — расстояние, пройденное поездом к моменту t (м); $\dot{x}(t) \equiv v(t)$ — мгновенная скорость (м/с) поезда (погрешность $\pm 0,5$ м/с); $\ddot{x}(t) \equiv \dot{v}(t) \equiv a(t)$ — ускорение (м/с², торможение) в момент t ; $Slope$ — уклон пути в процентах ($+k$ % означает, что поезд будет подниматься на k метров каждые 100 метров пути). В базе данных заданы дискретные значения $t, x, \dot{x}(t, s, v)$.

В режиме тяги поезда, в котором сила F_k преодолевает силу сопротивления движению W_k и силу инерции F_n справедливо соотношение: $F_k = W_k + F_n$. Откуда следует основное уравнение движения поезда

$$(1 + \gamma) m \frac{dv}{dt} = \xi F \quad (1)$$

где F — сила, γ, ξ — некоторые постоянные.

Так как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \quad v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt},$$

то (1) можно записать в виде

$$(1 + \gamma) m v \frac{dv}{ds} = \xi F$$

или

$$(1 + \gamma) m \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \xi F. \quad (2)$$

Разделим уравнение на mg и получим

$$\frac{(1 + \gamma) d\dot{x}}{g dt} = \frac{\xi}{mg} F \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\xi g}{(1 + \gamma) mg} F,$$

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\xi}{(1+\gamma)m} F \quad \text{или} \quad v \frac{dv}{dx} = \frac{\xi}{(1+\gamma)m} F$$

при $\gamma = 0,06$.

Если за размерность взять путь s (км), время t (ч), скорость v (км/ч), то $\xi = 120$. В удельных силах основное уравнение движения запишется в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 120f \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = 120f \\ \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} &= 120f \quad \text{или} \quad v \frac{dv}{dx} = 120f. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $f(v) > 0$, то поезд движется с ускорением $a > 0$; если $f(v) < 0$, то движение поезда с замедлением (торможение $a < 0$); если $f(v) = 0$, поезд движется равномерно ($a = 0$). Запишем (3) в виде

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = g(\dot{x}), \quad v \frac{dv}{dx} = g(v).$$

Уравнение $\ddot{x} = g$ можно переписать в виде $x_1 \equiv x$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = g$.

Физический смысл основного уравнения движения поезда состоит в том, что уравнения моделируют связь ускорения поезда $\frac{dv}{dt} = a$ (км/ч²) с удельной равнодействующей силой поезда. На каждую единицу удельной равнодействующей силы скорость поезда возрастает (если $f = +1$ н/кН) или уменьшается (если $f = -1$ н/кН) на 120 км/ч за один час (или 2 км/ч за одну минуту).

По условию задачи, для обработки используются отсчёты расстояния и скорости в дискретные моменты времени. В случае торможения $v(t_i) > v(t_{i+1})$ обозначим

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x_i, \quad \dot{x}(t_i) = v(t_i) = \dot{x}_i = v_i, \\ \left. \frac{d\dot{x}}{dx} \right|_{t=t_i} &\approx \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i}{x_{i+1} - x_i} \equiv \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned}$$

Вычисляемые величины по данным измерений

$$g_i = \dot{x}_i, \quad \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i}{x_{i+1} - x_i} \equiv x_{2i} \frac{x_{2i+1} - x_{2i}}{x_{1i+1} - x_{1i}}.$$

Ускорение

$$a_i = \ddot{x}_i = \frac{\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i}{t_{i+1} - t_i} = g_i.$$

Уравнения движения и уравнения для фазовых траекторий имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1i} = x_{2i}, \\ \dot{x}_{2i} = g_i, \end{cases} \quad \text{откуда получаем} \quad \begin{cases} \dot{x}_{2i} = \frac{g_i}{x_{2i}}. \\ \dot{x}_{1i} = x_{2i} \end{cases}$$

Алгоритм расчёта основных показателей торможения.

Входные данные: номер поезда $k \in K$; номер последовательности $i \in I_k$; отсчёты t_j^{ki} , $j \in J_{ki}$ времени k -ого поезда, i -й последовательности; $x_j^{ki} = x(t_j^{ki})$ — абсцисса k -ого поезда i -й последовательности в момент времени t_j^{ki} ; $\dot{x}_j^{ki} = v_j^{ki}$ — величина скорости в i -й последовательности k -ого поезда.

Выход: основные характеристики движения.

1. Вычислить:

1.1) ускорение

$$a_j^{ki} = \ddot{x}_j^{ki} = \dot{v}_j^{ki} = \frac{v_{j+1}^{ki} - v_j^{ki}}{t_{j+1}^{ki} - t_j^{ki}};$$

1.2) торможение в момент времени t_j^{ki} ;

1.3) среднее торможение *deceleration* за период от начала торможения t_1^{ki} ; до остановки t_{1n}^{ki} :

$$d \equiv deceleration = \bar{a}^{ki} = \frac{v_0^{ki} - v_n^{ki}}{t_n^{ki} - t_0^{ki}}; \quad (4)$$

1.4) равнодействующие силы:

$$g = \dot{x}_j^{ki} \frac{\dot{x}_{j+1}^{ki} - \dot{x}_j^{ki}}{x_{j+1}^{ki} - x_j^{ki}}; \quad (5)$$

1.5) фазовые траектории:

$$\frac{g_j^{ki}}{\dot{x}_j^{ki}} = \frac{\ddot{x}_j^{ki}}{\dot{x}_j^{ki}}.$$

2. На основании данных из последовательностей базы данных и шага 1 построить графики (в зависимости от времени) расстояния (м), скорости (м/с) и ускорения (торможения) (м/с²), траектории движения.

На рис. 2, 3, 4 представлены характерные графики для последовательности № 24237. Следует отметить, что величина торможения d вычислялась по формуле (3). На основании анализа построенных зависимостей справедливы следующие выводы: у всех последовательностей, фиксирующих расстояние, скорость, наблюдается постепенное нескачкообразное снижение скорости; у последовательностей, фиксирующих торможение, изменение величины торможения носит разнообразный характер.

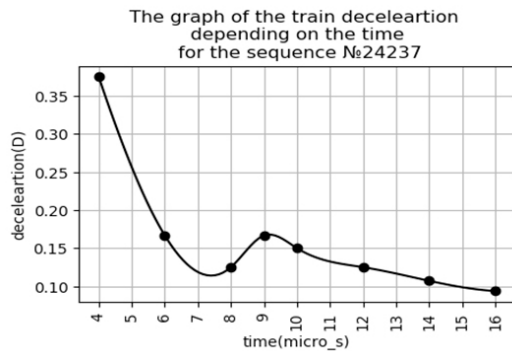


Рис. 2. Зависимость величины торможения от времени по данным последовательности № 24237

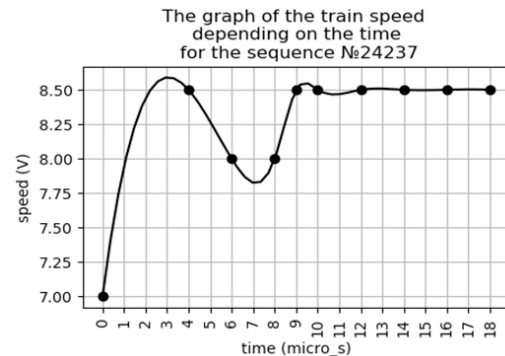


Рис. 3. Зависимость скорости от времени по данным последовательности № 24237

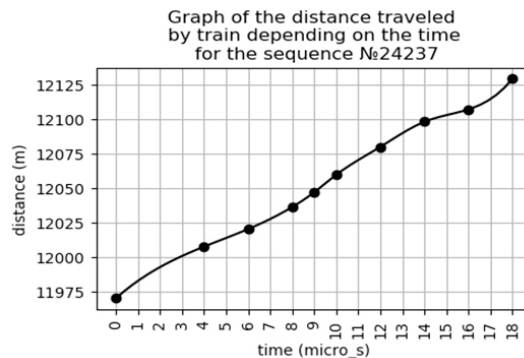


Рис. 4. Зависимость расстояния от времени по данным последовательности № 24237

На рис. 5, 6 представлены графики зависимости величины торможения (м/с^2) от времени (с). Выявлено, что наглядными являются фазовые траектории (\dot{x}, x) . Построены графики зависимости скорости (м/с) от расстояния (м) для каждого из поездов с целью определения качества торможения и расположения остановок поездов метро. На рис. 7 приведен фрагмент графика зависимости скорости от расстояния для поезда № 1 (фазовые траектории). На рис. 8 представлены графики зависимости скорости от времени и от пройденного расстояния по данным последовательности 6982. По графикам видно, что торможения поездов не являются равнозамедленными.

На рис. 9 помимо скоростных зависимостей можно увидеть зависимость пройденного расстояния от времени и три расчётные зависимости результирующего ускорения от времени и пройденного пути. Приближенная формула для вычисления ускорения имеет вид:

$$a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (6)$$

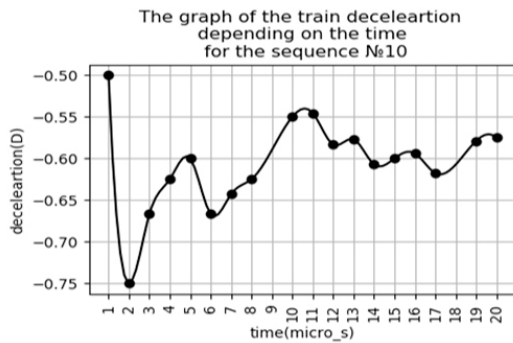


Рис. 5. Зависимость торможения от времени по данным последовательности № 10

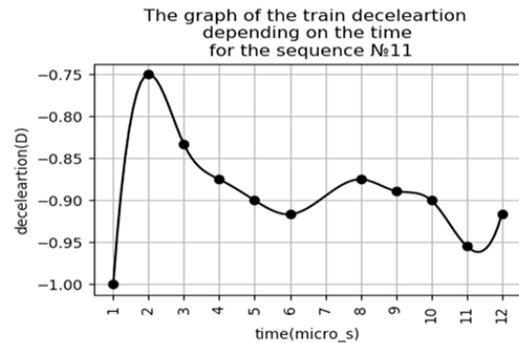


Рис. 6. Зависимость торможения от времени по данным последовательности № 11

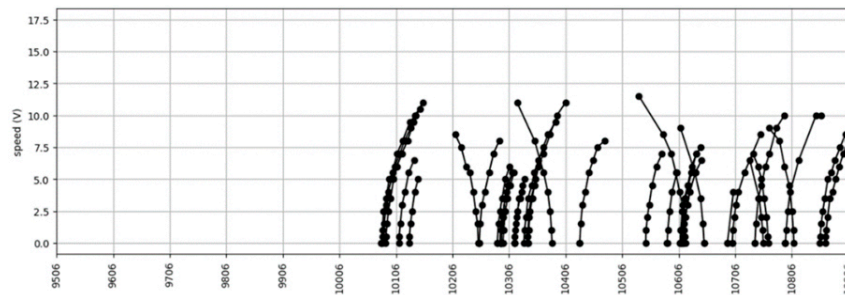


Рис. 7. Зависимость скорости от расстояния для поезда №1

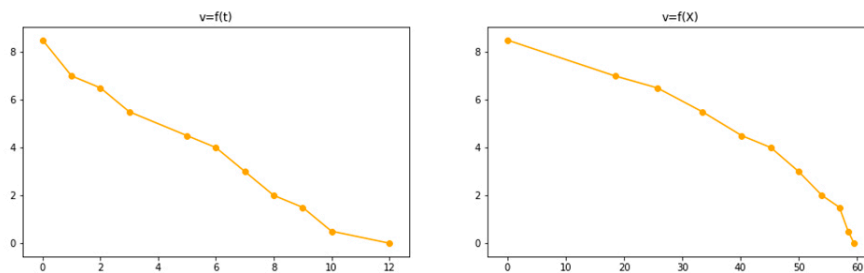


Рис. 8. Скоростные зависимости Train 1 Run 6982

Формула (6) следует из непосредственного определения ускорения, как предела отношения изменения скорости к изменению времени при стремлении Δt к нулю:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\frac{\Delta x}{\bar{v}}} = \bar{v} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

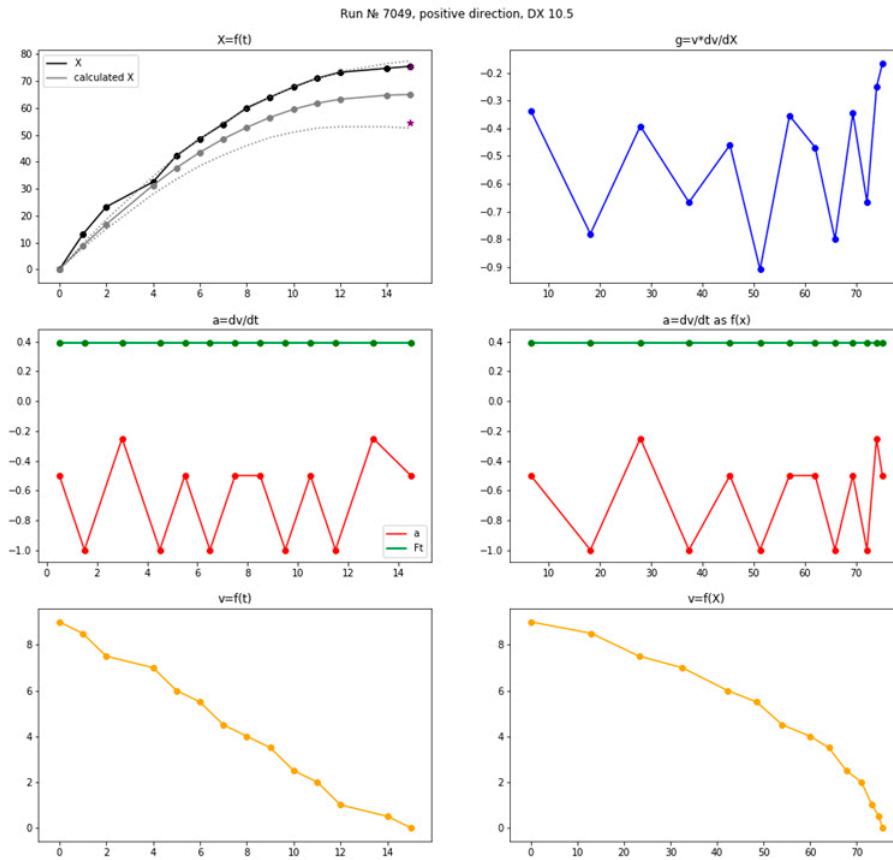


Рис. 9. Некоторые зависимости Train 1 Run 7049

Учитывая, что на отрезке $(i, i + 1)$ среднее значение $\bar{v} \approx \frac{v_{i+1} + v_i}{2}$, получим:

$$a \approx \frac{v_{i+1} + v_i}{2} \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (7)$$

Зависимость пройденного расстояния от времени построена вместе с приближенным вычислением той же зависимости на основе имеющихся измерений скоростей и временных интервалов:

$$X_n \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{v_{i+1} + v_i}{2} (t_{i+1} - t_i) \right) \quad (8)$$

1.3. Статистические методы обработки. Гистограммы различных данных.

На рис. 10 и 11 представлены гистограммы торможения поездов, движущихся в прямую и обратную стороны соответственно. Данные гистограммы были построены по вычисленным значениям среднего торможения для каждой из последовательностей. Следует отметить, что величина среднего торможения d вычислялась по формуле (4).

Для реализации программной части исследования использовался язык программирования Python 3.6 с интегрированными библиотеками: `scipy.interpolate` (для интерполирования функций), `matplotlib.pyplot` (для построения графиков функции и гистограмм), `numpy` (для операции над векторами и матрицами), `xlwings` (для работы с файлом формата xls).

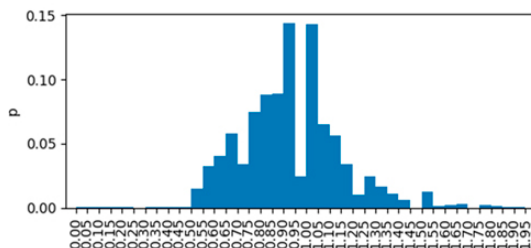


Рис. 10. Гистограмма торможения поездов, движущихся в прямую сторону

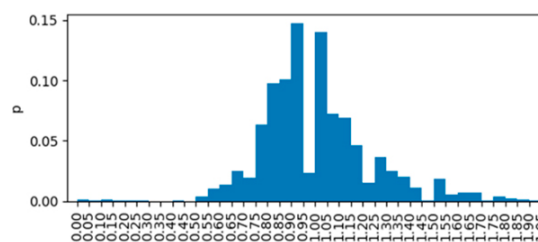


Рис. 11. Гистограмма торможения поездов, движущихся в обратную сторону

1.4. Кластеризация данных. В ходе исследований было обнаружено, что часть последовательностей идет по возрастанию оси *Abscissa*, а часть — по убыванию. Эти последовательности естественным образом поделились на две группы: положительного направления и отрицательного. Графики фазовых траекторий таких торможений имеют характерный наклон в сторону противоположную движению. Все дальнейшие исследования проводились по группам: по отдельности и вместе. На рис. 12 можно увидеть графики зависимостей скорости от координаты для всех последовательностей поезда под номером 1 в направлении возрастания координат, т. е. «положительном», в направлении убывания координат, т. е. «отрицательном» и в обоих одновременно.

Для траекторий, представленных на рис. 12, гистограммы распределения точек остановки ($Speed=0$) даны на рис. 13.

Для выяснения локальных сгущений траекторий торможений по данным последовательностей измерений, таких, как скорость (макс) и координата остановки (*Abscissa* при $Speed=0$, или для последовательностей торможения, когда показание *Abscissa* в конце последовательности), в зависимости от направления движения проводится кластеризация данных рис. 14.

Для выяснения характера торможения по данным построения траекторий, таких, как скорость(макс) и длина пути до остановки (тормозной путь) в зависимости от направления движения проводится кластеризация данных рис. 15 а), б), в).

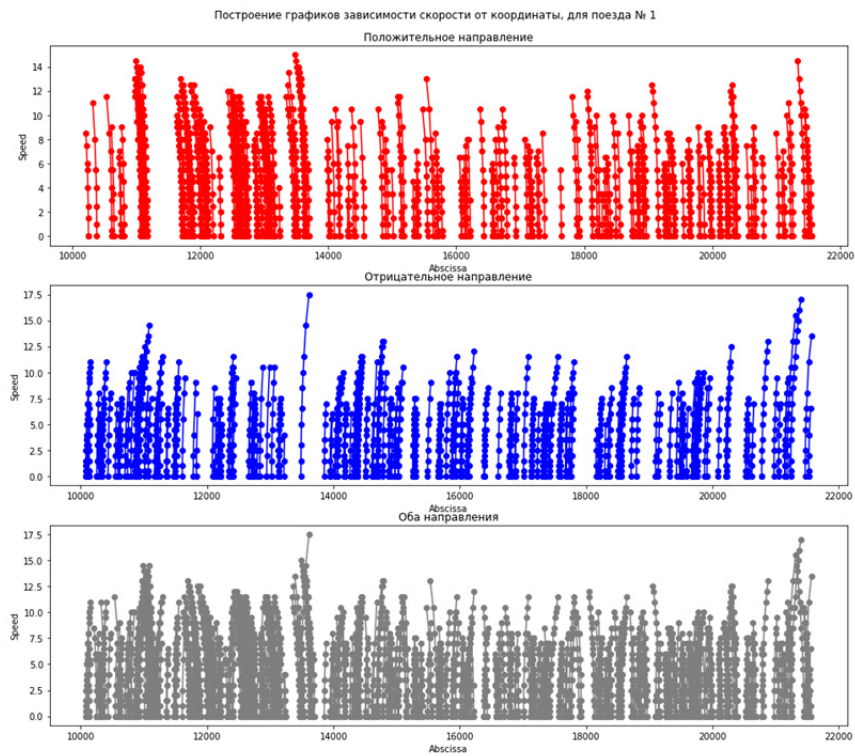


Рис. 12. Зависимости скоростей от координат для 1-го поезда

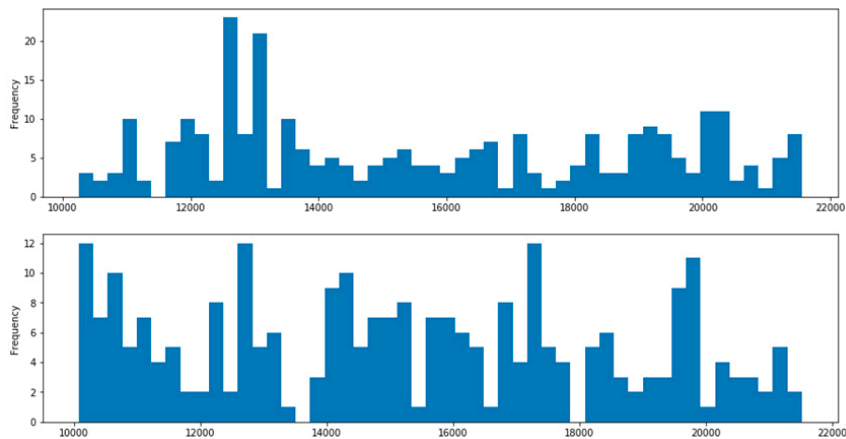


Рис. 13. Гистограмма точек останова первого поезда

Близость траекторий в кластере в простейшем случае будем определять по расхождению траекторий. В качестве одной из мер близости выберем модуль разности между площадями под кривыми $|S_1 - S_2|$.

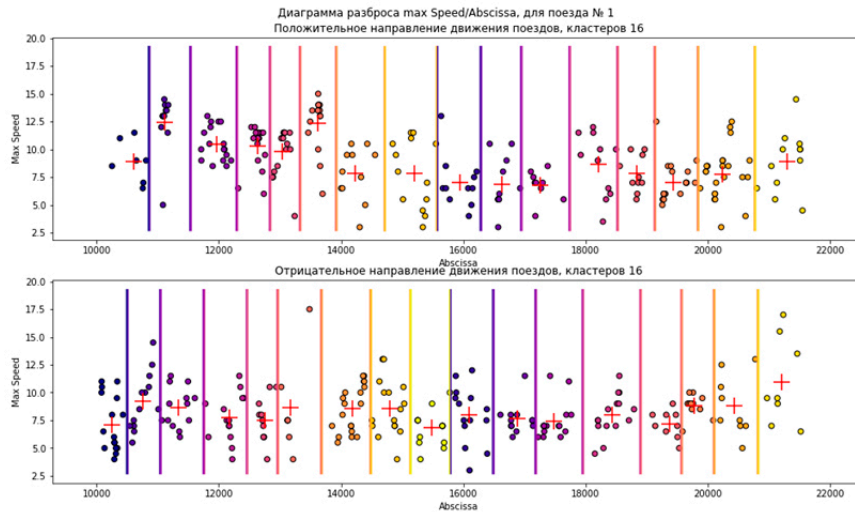


Рис. 14. Диаграмма разброса торможений по величинам максимальной скорости в последовательности и тормозного пути, с кластеризацией *k-means* на 16 кластеров, прямого и обратного направления движения поездов

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

2.1. Подготовка больших данных (Big Data). Загрузка данных из файла с расширением .xlsx происходит с помощью директивы

```
df=pd.read_excel(initial_analysis.xlsx')
```

Для удобства названия полей именуются в форме:

```
df.columns = ['Run', 'Date', 'Train', 'Speed', 'Abscissa', 'Slope']
```

```
df.info()
```

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
```

```
RangeIndex: 227637 entries, 0 to 227636
```

```
Data columns (total 6 columns):
```

```
Run 227637 non-null int64
```

```
Date 227637 non-null object
```

```
Train 227637 non-null int64
```

```
Speed 227637 non-null float64
```

```
Abscissa 214247 non-null float64
```

```
Slope 211314 non-null float64
```

```
dtypes: float64(3), int64(2), object(1)
```

```
memory usage: 10.4+ MB
```

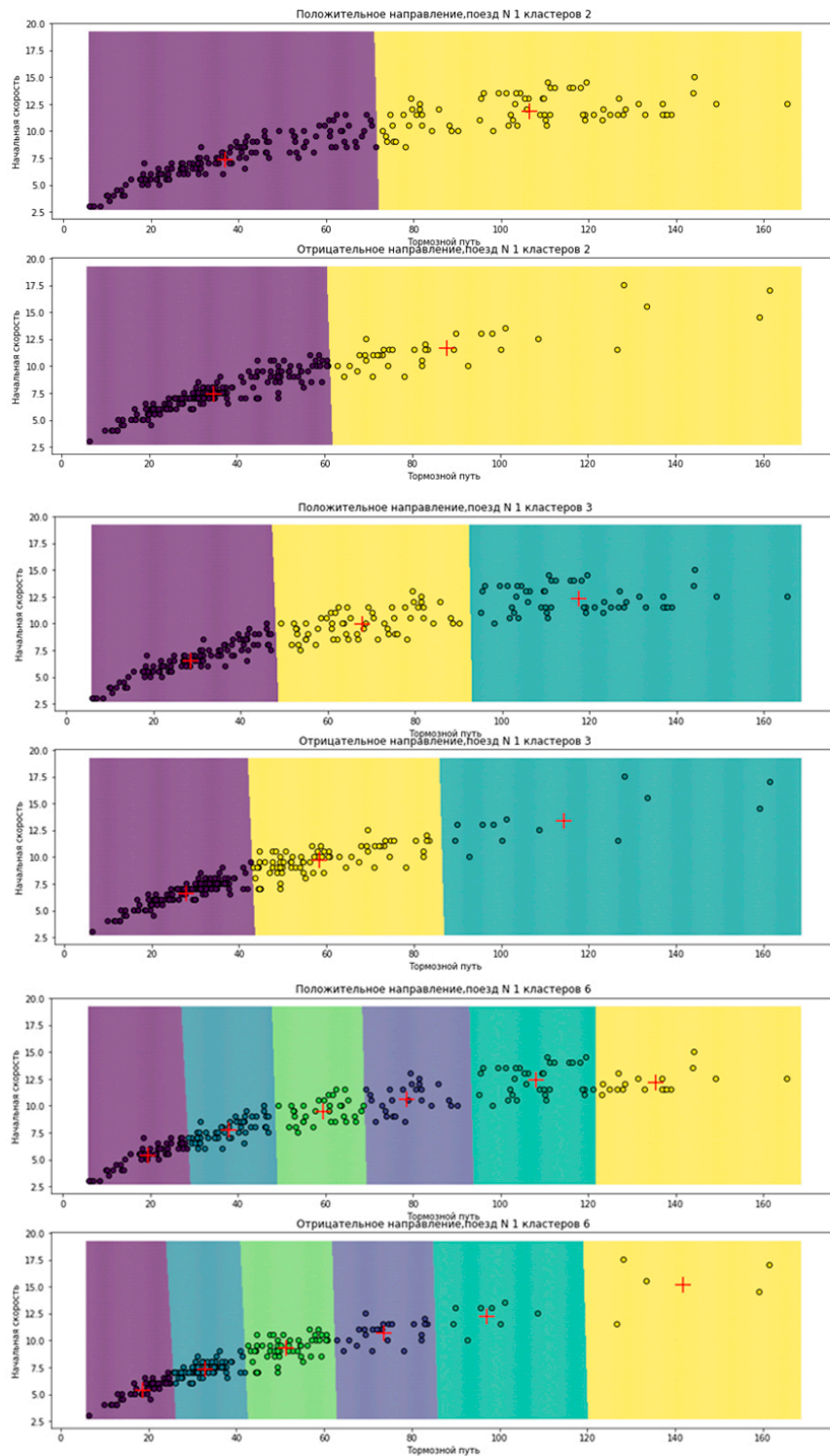


Рис. 15. Кластеризация по данным траекторий торможения: 2, 3 и 6 кластеров

Таким образом, 1) данные содержат 227637 записей; 2) поля `Run` и `Train` содержат целочисленные значения; 3) поля `Speed`, `Abscissa` и `Slope` содержат вещественные значения; 4) `Date` имеет тип `object`: текстовые строки или объекты, закодированные текстовой строкой, в рассматриваемом фрагменте данных это временная метка в формате `“dd/mm/yyyy hh:mm:ss”`; 5) напротив названия каждого поля стоит количество данных без пропуска, что в нашем случае означает количество непустых ячеек в книге `Excel` находящихся в столбце с соответствующим названием поля, от ячейки под этим названием до ячейки (включая ее саму) напротив самой последней ячейки самого глубокого столбца.

Поле `Abscissa` содержит $227637 - 214247 = 13390$ пропущенных значений, а `Slope` содержит $227637 - 211314 = 16323$ (информацию можно получить директивой `df.isnull().sum()`, которая в копии фрейма заполнит непустые данные нулями, а пустые единицами, затем посчитает количество единиц в каждом поле, тем самым найдет количество пропусков в каждом поле).

Чтобы выяснить, сколько записей (строк) содержат пропуски, достаточно отфильтровать все не содержащие пропусков записи и посмотреть их количество:

```
df[df.isnull().max(axis=1)].shape[0], результат: 16323.
```

Чтобы выяснить, сколько последовательностей содержат пропуски, достаточно отфильтровать все не содержащие пропусков записи, удалить дубликаты ключей и посмотреть количество элементов в полученном множестве:

```
len(set(df[df.isnull().max(axis=1)].Run)), результат: 2812.
```

Данные последовательностей, содержащих пропуски, были отфильтрованы и сохранены в отдельный файл, для возможности их исследования при необходимости. Выяснилось, что оставшиеся данные содержат дубликаты строк, причем дубликаты встречаются парами, следуя друг за другом. Все повторные вхождения дубликатов были удалены в виду их избыточности.

В ходе дальнейшего анализа было выявлено, что парами встречаются ситуации в конце последовательностей, когда ключ и временная метка совпадают, а у других данных есть расхождения, причем самая последняя запись всегда содержит нулевую скорость. Так как последние записи выглядят более завершёнными, то предпоследние были удалены для исключения возможности, когда в один и тот же момент времени, наблюдаются разные состояния одного и того же объекта.

В идеальном случае торможение должно начаться в какой-либо момент времени и прекратиться, когда скорость поезда станет равна нулю (поезд остановится). В ходе анализа данных выявлено, что существуют 4677 записей, дублирующих предыдущие

по ключу ['Run', 'Abscissa'], т. е. в одной и той же последовательности существуют записи с одинаковой координатой; выяснено, что эти записи идут подряд, парами, за исключением последовательности с номером 4113 (рис. 16).

	Run	Date	Train	Speed	Abscissa	Slope
32933	4113	31/01/2013 20:13:17	9	9.5	11819.71	-0.04
32934	4113	31/01/2013 20:13:19	9	8.0	11843.46	-0.04
32935	4113	31/01/2013 20:13:20	9	6.5	11860.46	-0.04
32936	4113	31/01/2013 20:13:21	9	5.5	11868.46	-0.04
32937	4113	31/01/2013 20:13:22	9	5.0	11874.46	-0.04
32938	4113	31/01/2013 20:13:23	9	4.5	11880.96	-0.04
32939	4113	31/01/2013 20:13:25	9	3.5	11886.46	-0.04
32940	4113	31/01/2013 20:13:26	9	3.0	11890.96	-0.04
32941	4113	31/01/2013 20:13:27	9	2.0	11893.96	-0.04
32942	4113	31/01/2013 20:13:28	9	1.5	11897.46	-0.04
32943	4113	31/01/2013 20:13:29	9	1.0	11899.21	-0.04
32944	4113	31/01/2013 20:13:30	9	0.0	11900.46	-0.04
32945	4113	31/01/2013 20:13:31	9	0.0	11900.46	-0.04
32946	4113	31/01/2013 20:13:32	9	0.0	11900.46	-0.04

Рис. 16. Последовательность измерений с номером 4113

Как видно из рис. 16, последние три записи отличаются лишь временной меткой, поэтому две последние из них могут быть удалены, так как процесс торможения завершен к моменту первой из них. Подобным образом существует две пары записей в последовательностях под номерами 8683 и 8684 (рис. 17).

	Run	Date	Train	Speed	Abscissa	Slope
68685	8683	26/10/2013 06:12:22	24	9.5	12925.24	-0.04
68686	8683	26/10/2013 06:12:29	24	9.5	12925.24	-0.04
68701	8684	26/10/2013 06:12:22	24	9.5	12925.24	-0.04
68702	8684	26/10/2013 06:12:29	24	9.5	12925.24	-0.04

Рис. 17. Дублирующиеся в конце одной последовательности записи с одинаковой скоростью и координатой

2.2. Преобразование данных. Для удобства работы с последовательностями, как с отдельными объектами, данные были преобразованы в `Data Frame`, индексами которого служат номера последовательности `Run` в предыдущем варианте данных, значения столбцов `Date`, `Abscissa` и `Train` совпадают с соответствующими значениями в первых записях последовательностей, с той лишь разницей, что `Date` преобразован в формат секунд от начала эпохи (удобно считать разницу во времени, при необходимости легко конвертируется к привычному виду). `Direction` показывает относится

ли последовательность к типу 1, когда поезд движется в сторону увеличения координат или -1 — в сторону уменьшения координат. Столбец **Series** является вложенным **Data Frame** и будет иметь следующие показатели: t — разница в секундах между начальным моментом времени **Date** и текущим, в первой записи серии она будет равна 0; $X(x(t))$ — абсолютная разница в метрах между начальным значением **Abscissa** и текущим, в первой записи серии она будет равна 0; $v(\dot{x}(t) = v)$ — скорость поезда в метрах в секунду; **Slope** — уклон; $a(\ddot{x}(t) = a)$ — представляет собой расчетное ускорение, вычисляется, как отношение приращения v к приращению t , в последней строке серии будет считаться равным нулю.

Кроме того, среднее ускорение не мгновенная величина в точке, оно относится ко всему интервалу, на котором посчитано, сохранение его с меткой начала интервала продиктовано удобством. Можно его хранить и под меткой конца интервала или в отдельной последовательности, где временные метки это полусуммы интервалов исходной последовательности. Это обстоятельство учтено при построении графиков. Графики ускорений имеют на одну меньше точек, чем графики зависимостей скоростей и расстояний от времени.

Old_Index — индекс соответствующей записи в прежней форме данных.

Фрагмент преобразованных данных показан на рис. 18, а содержание его вложенного фрейма на рис. 19.

```
1 sdf.sample(5) # 5 случайных строк фрейма
```

	Train	Date	Abscissa	Series	Direction
17158	20	1450471723	10819.42	t v X a Slope Old_index 0 0 ...	True
4977	29	1358861688	19259.06	t v X a Slope Old_index 0 0 ...	True
2039	36	1347783182	10323.30	t v X a Slope Old_index 0 0 ...	False
6332	36	1363101691	20631.18	t v X a Slope Old_index 0 0 ...	False
9404	11	1380379468	18232.97	t v X a Slope Old_index 0 0 ...	False

Рис. 18. Фрагмент преобразованных данных

2.3. Статистическая обработка данных. При дальнейшем анализе обнаружено, что 53 последовательности не оканчиваются нулем. При этом 23 из них являются ускорениями и рассматриваться не будут. Две из них оканчиваются той же не нулевой скоростью, что и начинаются, и не являются торможениями. Замедлениями являются 28, но из них только 19 можно считать торможениями после небольшой коррекции последних двух записей, если конечная скорость меньше 0.5, то обнуляем

	t	v	X	a	Slope	Old_index
0	0	10.5	0.00	-2.00	-0.008	36236
1	1	8.5	18.50	-1.00	-0.008	36237
2	2	7.5	27.25	-1.00	-0.008	36238
3	3	6.5	36.00	-1.50	-0.008	36239
4	4	5.0	43.75	-1.00	-0.008	36240
5	5	4.0	50.75	-0.75	-0.008	36241
6	7	2.5	54.75	-1.00	-0.008	36242
7	8	1.5	57.75	-1.50	-0.008	36243
8	9	0.0	59.75	0.00	-0.008	36244
9	10	0.0	60.25	0.00	-0.008	36245

Рис. 19. Содержание вложенного фрейма Series

ее и пересчитываем предпоследнее ускорение. Это возможно, так как погрешность измерения скорости равна $\pm 0,5$ м/с.

В результате в полученный фрейм была добавлена вторичная агрегированная информации, такая, как максимальная измеренная скорость V , максимальное A и минимальное a ускорения, тормозной путь X , время торможения T , число записей в последовательности N , максимальный интервал времени между соседними упорядоченными по возрастанию записями последовательности mdt , абсолютное отклонение DX (модуль разности между вычисленным на основе полусумм скоростей на концах интервалов измерений, тормозным пути и фактическим).

На рис. 20 показана стандартная статистическая информация о фрейме данных.

	Abcissa	V	X	T	mdt	a	N	A	DX
count	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000
mean	15875.652469	8.291026	47.725817	9.203032	2.271395	-1.672074	8.441337	0.001595	9.389255
std	3336.537277	2.670659	43.477361	32.903025	32.670977	0.549932	3.318438	0.032298	54.212704
min	10019.320000	0.000000	0.250000	1.000000	1.000000	-8.500000	2.000000	0.000000	0.000000
25%	12982.552500	6.500000	24.317500	6.000000	2.000000	-2.000000	6.000000	0.000000	4.000000
50%	16013.195000	8.000000	37.495000	8.000000	2.000000	-1.500000	8.000000	0.000000	7.000000
75%	18821.357500	10.000000	63.750000	11.000000	2.000000	-1.500000	10.000000	0.000000	11.750000
max	21637.045000	18.500000	4300.520000	5025.000000	5023.000000	0.000000	49.000000	2.000000	8268.980000

Рис. 20. Стандартная статистическая информация

Сводка показывает, что самая длинная последовательность имеет тормозной путь 4.3 км, что выглядит нереалистично, т.к. в литературе, например в [2], таких величин нет. На рис. 21 можно оценить ее динамические зависимости.

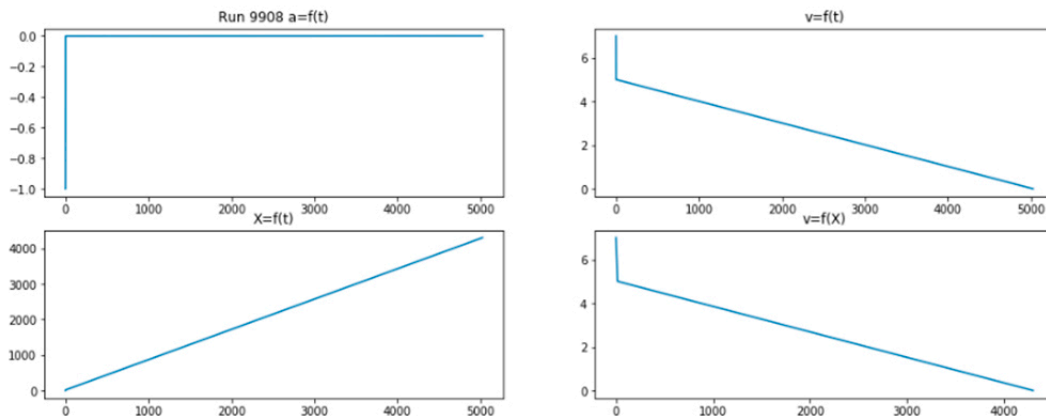


Рис. 21. Динамические зависимости последовательности 9908

Однако, 4 измерения, на протяжении пути более 4000 метров, не дают достаточно подробной информации о движении поезда.

Эта последовательность исключена из исследования ввиду ее несоответствия понятию «экстренное торможение» (рис. 22).

	Abscissa	V	X	T	mdt	a	N	A	DX
count	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000	23814.000000
mean	15875.652469	8.291026	47.725817	9.203032	2.271395	-1.672074	8.441337	0.001595	9.389255
std	3336.537277	2.670659	43.477361	32.903025	32.670977	0.549932	3.318438	0.032298	54.212704
min	10019.320000	0.000000	0.250000	1.000000	1.000000	-8.500000	2.000000	0.000000	0.000000
1%	10144.672500	3.500000	8.000000	3.000000	1.000000	-3.500000	3.000000	0.000000	0.250000
5%	10641.050000	4.500000	13.000000	4.000000	1.000000	-2.500000	4.000000	0.000000	0.750000
10%	11290.520000	5.000000	16.750000	5.000000	2.000000	-2.500000	5.000000	0.000000	1.750000
20%	12384.484000	6.000000	21.930000	6.000000	2.000000	-2.000000	6.000000	0.000000	3.250000
25%	12982.552500	6.500000	24.317500	6.000000	2.000000	-2.000000	6.000000	0.000000	4.000000
50%	16013.195000	8.000000	37.495000	8.000000	2.000000	-1.500000	8.000000	0.000000	7.000000
75%	18821.357500	10.000000	63.750000	11.000000	2.000000	-1.500000	10.000000	0.000000	11.750000
80%	19323.160000	11.000000	71.250000	12.000000	2.000000	-1.500000	11.000000	0.000000	13.250000
90%	20285.262000	12.000000	92.000000	14.000000	2.000000	-1.000000	13.000000	0.000000	18.750000
95%	21084.820000	13.000000	110.750000	16.000000	2.000000	-1.000000	15.000000	0.000000	24.250000
99%	21490.239800	15.000000	141.500000	20.000000	3.000000	-1.000000	18.000000	0.000000	34.000000
max	21637.045000	18.500000	4300.520000	5025.000000	5023.000000	0.000000	49.000000	2.000000	8268.980000

Рис. 22. Стандартная статистическая информация

При этом 95 % последовательностей имеют не более чем двухсекундные интервалы, а максимальный — 185 с, заметим, что 99 процентиль дает всего 3 секунды. Следовательно, последовательности с максимальными интервалами более трех секунд совершенно нетипичны. Действительно, чем больше интервал между измерениями, тем больше неопределенность состояния наблюдаемого объекта. Делать обобщенные выводы на нетипичных последовательностях статистика не рекомендует.

Похожие выводы — о недостоверности и нетипичности — можно сделать и о числе измерений в последовательности. Первый процентиль дает 3, следовательно, любые предположения, основанные на наблюдениях последовательностей, где менее трех измерений, статистически незначимы, что вполне согласуется с реальностью.

В дальнейшем будем исследовать последовательности, в которых максимальный временной интервал между соседними измерениями не превышает 3 с и общее количество измерений три и более. Обновленная информация приведена на рис. 23.

В [2] приводятся следующие данные торможений: грузовые поезда — от 0,1 до 0,4 м/с²; пассажирские — от 0,3 до 0,6 м/с²; электропоезда — от 0,5 до 0,8 м/с²; высокоскоростные поезда — от 0,8 до 1,5 м/с².

	Abcissa	V	X	T	mdt	a	N	A	DX
count	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000	23613.000000
mean	15884.319101	8.312900	47.235082	8.859442	1.942066	-1.671050	8.450726	0.000833	8.904304
std	3336.933477	2.655796	31.112706	3.673154	0.302227	0.541082	3.221757	0.022318	7.249257
min	10019.320000	1.000000	1.500000	2.000000	1.000000	-8.500000	3.000000	0.000000	0.000000
1%	10144.200000	3.500000	8.500000	3.000000	1.000000	-3.500000	3.000000	0.000000	0.250000
5%	10640.300000	4.500000	13.334000	4.000000	1.000000	-2.500000	4.000000	0.000000	0.765000
10%	11287.016000	5.000000	16.876000	5.000000	2.000000	-2.500000	5.000000	0.000000	1.750000
20%	12401.328000	6.000000	22.000000	6.000000	2.000000	-2.000000	6.000000	0.000000	3.250000
25%	12999.990000	6.500000	24.500000	6.000000	2.000000	-2.000000	6.000000	0.000000	4.000000
50%	16037.770000	8.000000	37.500000	8.000000	2.000000	-1.500000	8.000000	0.000000	7.000000
75%	18823.170000	10.000000	63.750000	11.000000	2.000000	-1.500000	10.000000	0.000000	11.750000
80%	19329.250000	11.000000	71.000000	12.000000	2.000000	-1.500000	11.000000	0.000000	13.250000
90%	20291.330000	12.000000	91.750000	14.000000	2.000000	-1.000000	13.000000	0.000000	18.750000
95%	21085.426000	13.000000	110.250000	16.000000	2.000000	-1.000000	15.000000	0.000000	24.008000
99%	21490.530000	15.000000	138.720000	20.000000	3.000000	-1.000000	18.000000	0.000000	33.500000
max	21637.045000	18.500000	500.010000	56.000000	3.000000	-0.500000	49.000000	1.000000	67.500000

Рис. 23. Обновленная статистическая информация

Учитывая данные торможений высокоскоростных поездов и принимая во внимание значения по пятому и девяносто пятому процентилем, соответственно -1,5 и -2,5 м/с², приходим к тому, что последовательности измерений кинематики соответствуют высокоскоростным поездам.

Для отображения различных графиков использовалась библиотека `matplotlib` [13], которая эффективнее в сочетании с `Jupyter Notebook` [12], т. к. он позволяет отобразить график сразу, непосредственно под ячейкой со скриптом.

Для построения графика траектории торможения написана функция `Trajectory(Run, ndf=ndf, th=0.1)`, ее аргументы — это номер последовательности `Run`, фрейм данных `ndf` и временной шаг, подбирая который можно строить более гладкие кривые.

Построения сводятся к интерполяции зависимостей скорости и координаты от времени с помощью `InterpolatedUnivariateSpline` в составе модуля `interpolate` библиотеки `scipy` [14]; в скрипте модуль `interpolate` переименован в `interp`. Затем приведен расчет более частой последовательности времени и пересчет на ее основе скоростей и координат, а также классическое построение графика линии, заданной параметрически.

Для визуального исследования характерных закономерностей торможения строятся графики кинематических зависимостей. На рис. 24 (см. также рис. 9) приведен пример такого построения. Слева-направо и сверху-вниз построены 6 областей:

1) график зависимости тормозного пути от времени (черным цветом), также график зависимости тормозного пути от времени, построенный как сумма произведений средней скорости на время, для каждого отрезка последовательности (серым цветом); пунктиром изображены два графика с учетом максимальной неточности измерения скорости ($\pm 0,5$ м/с);

2) график зависимости удельной равнодействующей сил;

3) зависимость среднего ускорения от времени (красным цветом) и зависимость доли ускорения, вызванная действием компоненты силы тяжести, направленной вдоль пути (зеленым цветом) от времени;

4) зависимость ускорения (торможения) от пройденного пути с начала торможения;

5) зависимость скорости от времени;

6) зависимость скорости от пути с начала торможения.

Сравнительный анализ траекторий, приведен на третьем (самом нижнем) графике рис. 24.

Проанализировав ситуацию, почему траектории отклоняются в разные стороны, обнаружено, что одни последовательности координат убывают, а другие возрастают, что означает движение поезда в прямую сторону, а затем в обратную. После разделения последовательностей на положительные (координата растет со временем) и отрицательные (координата убывает со временем), получены характерные графики траекторий положительного направления и отрицательного, соответственно красные линии и синие. Участок пути в 1.5 км представлен на рис. 25.

Для исследования наблюдаемых сгущений траекторий выбран метод кластеризации *k-means*, ввиду его простоты и интерпретируемости. Реализована функция `klastersgraf` (`Train=1`, `n_Start=15`, `End=None`, `df=ndf`, `colors=False`, `h=11`, `d=0`, `cmpr=matplotlib.cm.plasma`, `filt=None`, `show=True`, `ret=False`, `clastrs=None`) с аргументами:

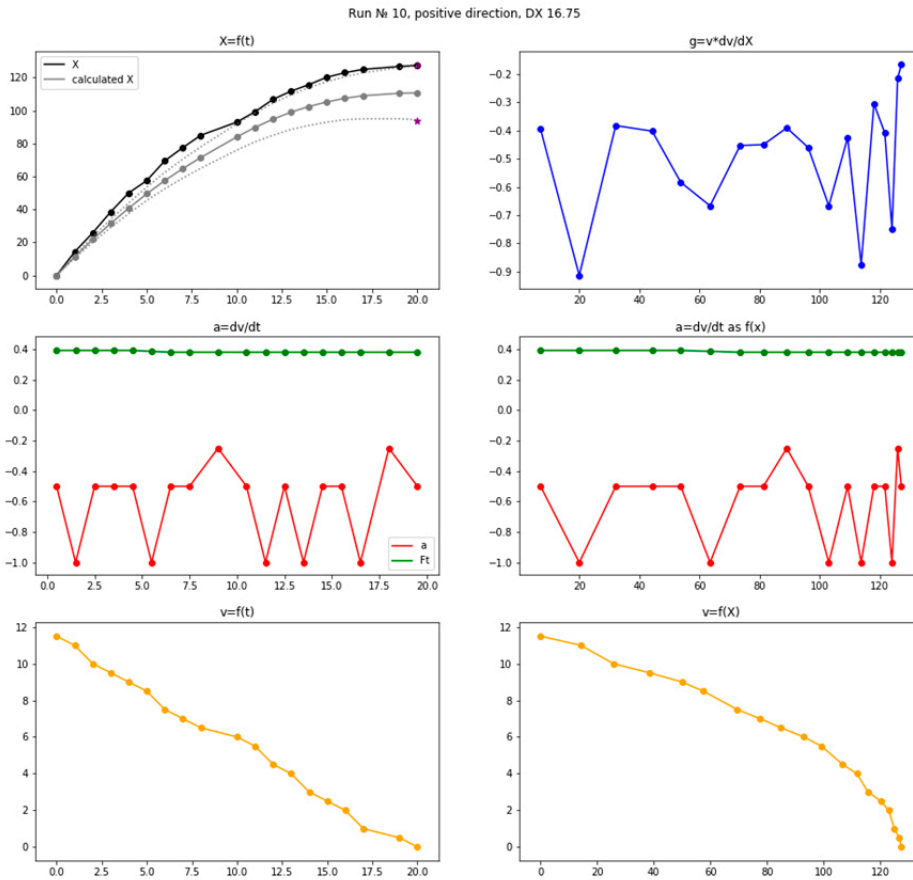


Рис. 24. Построение некоторых кинематических зависимостей без сглаживания

`Train` — номер поезда;

`n_Start` — количество кластеров в начале, если не задан `n_End`, то количество кластеров, на которые алгоритм разобьет последовательности;

`n_End` — если этот параметр не равен 0, то строятся графики, иллюстрирующие результат кластеризации для количества кластеров с `n_Start` по `n_End`;

`df` — ссылка на базу с данными;

`colors` — если присвоить параметру значение `True`, он будет закрашивать видимую область в цвета характерные ближайшему кластеру, это медленный процесс и по умолчанию отключен;

`h` — для отделения области одного кластера от другого строятся разделяющие линии, для наглядности вместо одной разделяющей линии между двумя кластерами строятся две. Они на величину `h` левее и правее отстоят от истинной, окрашены в цвета ближайшего кластера;

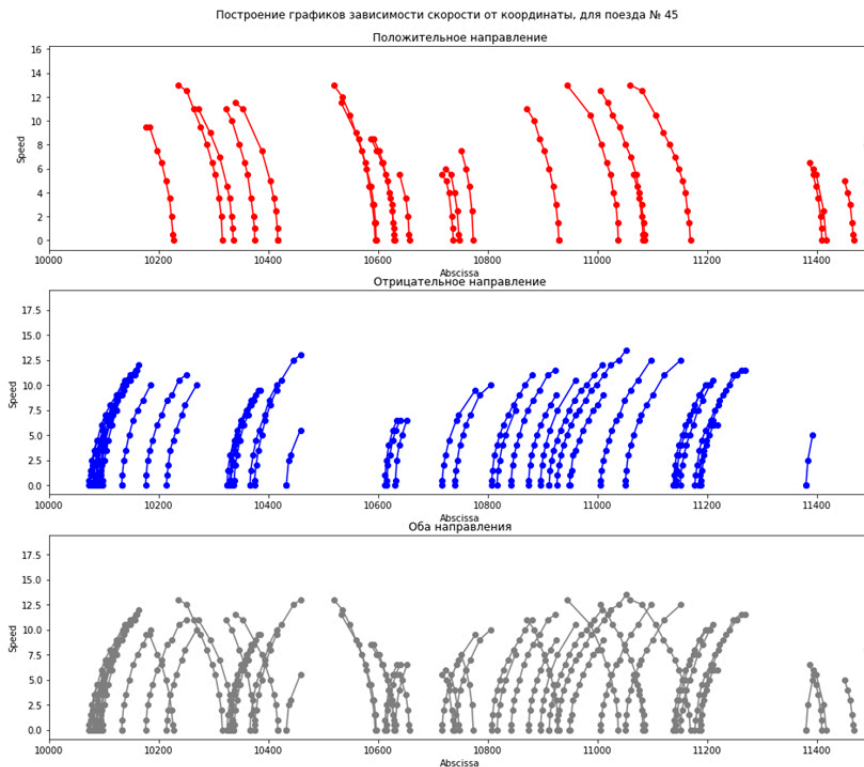


Рис. 25. Увеличенное изображение участка пути между 10000 и 15000 координатами

`d` — сдвиг числа кластеров для положительного и отрицательного направлений относительно друг друга, по умолчанию равен 0;

`map` — при необходимости можно изменить цветовую карту, передав желаемую через аргумент;

`filt` — логический вектор, с помощью которого можно исключить из рассмотрения кластеризатора некоторые последовательности;

`show` — если нет необходимости строить графики, достаточно присвоить этому аргументу значение `False`;

`ret` — аргумент, с помощью которого можно исследовать поведение среднекластерных расстояний в зависимости от числа кластеров или получить метки кластеров, если инициализирован аргумент `clastres`;

`clastres` — через этот аргумент можно передать начальные координаты кластеров для инициализации. Для этого нужно передать кортеж из двух списков координат, длины которых должны быть равны `n_Start`. Если `clusters` не `None`, то `n_End` и `n_Start` принудительно станут равны числу элементов в первом списке переданного кортежа.

Процесс кластеризации проходит в 2 этапа. На первом этапе происходит несколько кластеризаций для заданного числа кластеров в выбранном диапазоне. Для этого многократно вызывается `klustersgraf` обязательно с параметрами `n_End=None`, `show=False`, `ret=True`.

Значения сумм квадратов средних расстояний всех элементов до центров их кластеров сравниваются среди таких же по числу кластеров. Оставляются те координаты центров, у которых наименьшее значение этой суммы; значение минимальной суммы запоминается (эта часть реализована в библиотечном алгоритме `KMeans` через задание параметра `n_init`, который приняли равным 100). После этого строится график зависимости сумм от числа кластеров и принимается решение, какое количество кластеров оптимально.

На втором шаге для получения итоговой классификации снова вызывается функция `klustersgraf`, однако теперь для инициализации в нее передается кортеж из двух центров кластеров, выбранный на первом шаге. Если при этом аргумент `ret` был передан в значении `True`, то функция вернет кортеж из двух последовательностей меток, разделяющих данные на кластеры. Пример визуализации результата классификации рис. 26 (см. также рис. 14).

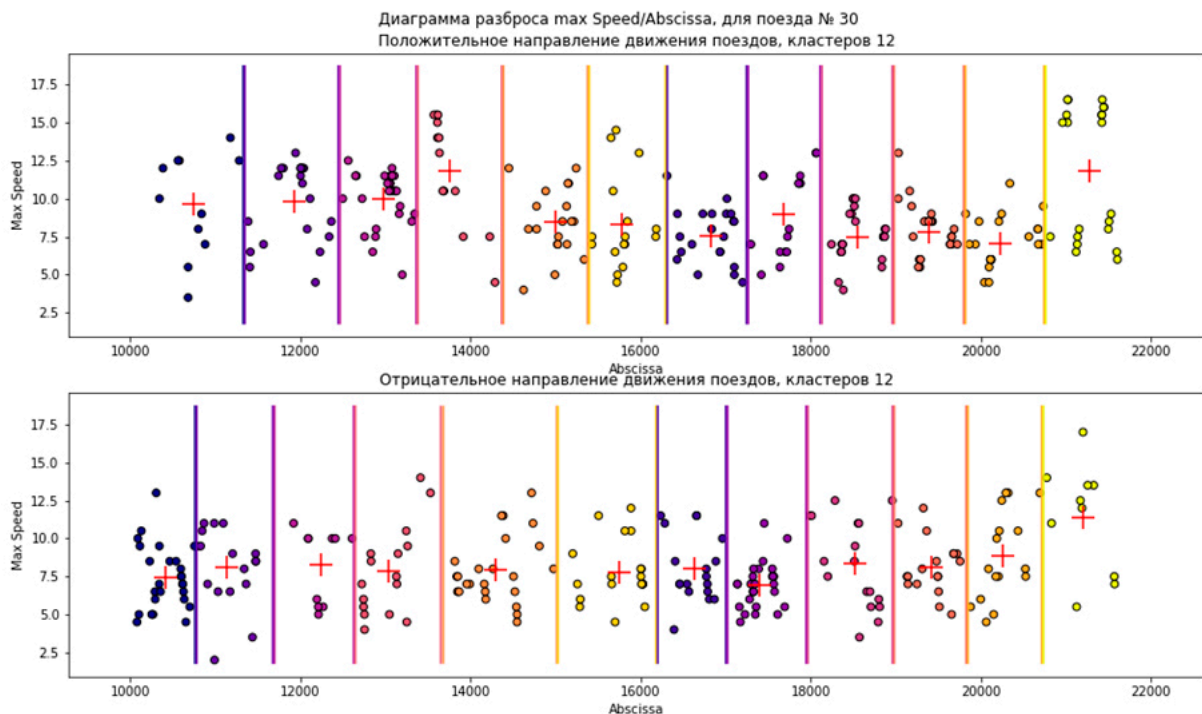


Рис. 26. Кластеризация торможений для поезда № 30

График зависимости скорости от пройденного с начала торможения пути полностью идентичен графику траектории в случае прямого движения поезда (кроме переноса начала координат в начало торможения) и является зеркальным вдоль оси скоростей для обратного движения поезда (также кроме переноса начала координат в начало торможения), что не отражается на самих площадях под кривыми и между кривыми, если не сравнивать между собой траектории разных направлений движения, поэтому расчет площадей будет производиться на графиках зависимостей скорости от пройденного с начала торможения пути. Эта система наиболее удобна для работы, потому что в ее координатной плоскости хранятся данные о последовательностях в своем преобразованном виде.

Для того, чтобы посчитать площадь под кривой или между кривыми, необходимо интерполировать описывающие их последовательности; для этого написана функция обертка, принимающая на вход последовательности тормозных путей и последовательности соответствующих скоростей.

В зависимости от длин последовательностей выбирается 1 из трех способов интерполяции: при двухэлементных — линейная, при трехэлементных — квадратичный полином с помощью функции `poly1d` библиотеки `numpy`, при четырехэлементных и более — сплайнами с помощью функции `InterpolatedUnivariateSpline` из модуля `interpolate` библиотеки `scipy`. На выходе будет функция, интерполирующая данные на входе последовательности.

Более реалистичной представляется задача расчета матрицы расстояний для каждого поезда в отдельности: кластеризовать траектории по каждому поезду, выявить характерные группы и взять в каждой среднюю величину, подобрать ближайшую к ней кривую, далее классифицировать траектории по мере близости к характерным кривым. Этот эталонный подход должен значительно упростить классификацию кривых для оперативного принятия решений по вопросу, к какому классу принадлежит кривая.

Рассмотренные подходы лежат в основе построения интеллектуализированной системы обработки больших данных торможения поездов (ИСОБД ТП).

2.4. Оценка качества торможения. Статистические данные движения поездов метро, полученные из них траекторные данные и визуализированные представления являются большими данными (Big Data, BD), из которых извлекаются знания о качестве торможения поездов (Data Mining, DM). Интеллектуализированная система обработки таких данных должна сочетать статистические методы машинного обучения (Machine learning, ML) и нейронные сети. Структура такой интеллектуализированной системы обработки больших данных (ИСОБД) представлена на рис. 27.



Рис. 27. Структура ИСОБД

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе базы данных измерений показателей датчиков движения проведено исследование процессов торможения пассажирских высокоскоростных поездов. Показано, что статистические методы и методы кластерного анализа позволяют извлечь знания о процессе торможения из данных измерений, таких, как координаты станций метро — на основе изучения гистограмм и применения алгоритмов кластеризации к

координатам остановок поездов. Выявлены характерные траектории торможений, получены значения параметров кинематик движения.

Подход, основанный на интеллектуализации обработки больших данных, характеризующих процесс торможения поездов метрополитена, позволяет уточнять разработку систем управления поездов в автоматическом режиме, прогнозировать качество и точность остановки. Применяемая технология может быть перспективной и в других предметных областях.

Автор выражает благодарность научному руководителю М.Г. Козловой, а также участникам студенческой научной группы (под руководством В.А. Лукьяненко) А. Португальской, Д. Абдулаевой, В. Павлюкову и французской стороне, любезно предоставившей данные измерений датчиков поездов метро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов В. А. Тяговые расчеты / В. А. Анисимов, В. В. Анисимов // Хабаровск: 2013. — URL: <https://www.sites.google.com/site/tagapoezd/monografia>.
ANISIMOV, V.A. and ANISIMOV, V.V. (2013) *Traction calculations*. Khabarovsk.
2. Асадченко В. Р. Автоматические тормоза подвижного состава: Учебное пособие для вузов ж.-д. транспорта / В. Р. Асадченко. // М.: Маршрут, 2006. — 392 с.
ASADCHENKO, V.R. (2006) *Automatic rolling stock brakes*. Moscow: Marshrut.
3. Бегагоин Э. И. Тяга поездов : учеб.-метод. пособие / Э. И. Бегагоин, Н. О. Фролов, И. Н. Пампурин // Уральский государственный университет путей сообщения. — Екатеринбург: УрГУПС — 2012. — 47 с.
BEGAGOIN, E.I. and FROLOV, N.O. and PAMPURIN, I.N. (2012) *Train traction*. Ekaterinburg.
4. Галай Э. И. Эффективность торможения пассажирских поездов — фактическая и по нормативам / Э. И. Галай, П. К. Рудов // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. — 2006. — № 11. — С. 116-119.
GALAI, E.I. and RUDOV, P.K. (2006) *Effectiveness of braking of passenger trains, actual and according to standards*. Science and progress of transport. Bulletin of Dnepropetrovsk National University of Railway Transport.

5. Кокурин И. М. Теоретические и технологические основы построения адаптивной системы диспетчерской централизации / И. М. Кокурин // Автоматика на транспорте. — 2017. — №3 (3). — С. 345-354.
KOKURIN, I.M. (2017) *Theoretical and technological foundations for building an adaptive dispatch centralization system*. 3(3). Automation in transport.
6. Кокурин И. М. Технологические и теоретические основы развития интеллектуальных систем управления движения поездов / И. М. Кокурин // Автоматика на транспорте. — 2018. — № 2 (4). — С. 157-166.
KOKURIN, I.M. (2018) *Technological and theoretical foundations for the development of intelligent train traffic control systems*. 2(4). Automation in transport.
7. Лукьяненко В. А. Моделирование процесса торможения поездов / В. А. Лукьяненко, А. А. Португальская, Д. М. Абдулаева, В. В. Павлюков // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сб. науч. тр. научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2020.
LUKIANENKO, V.A. and PORTUGALSKAYA, A.A. and ABDULAEVA, D.M. and PAVLUKOV, V.V. (2020) *Simulation of the train braking process*. Simferopol.
8. Науменко Н. Е. Оценка тормозных путей электропоезда при экстренных пневматическом и электропневматическом торможениях / Н. Е. Науменко, И. Ю. Хижа, Е. Г. Богомаз // Техническая механика. — 2016. — 1. — С. 110–117.
NAUMENKO, N.E. and KHIZHA I.Y. and BOGOMAZ E.G. (2016) *Evaluation of electric train braking paths during emergency pneumatic and electropneumatic braking*. 1. Technical Mechanics. Pp. 110–117.
9. Науменко Н. Е. Торможение пассажирского скоростного поезда с учётом работы электромагнитного рельсового тормоза / Н. Е. Науменко, И. Ю. Хижа, Е. Г. Богомаз // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. — 2009. — Вып. 29. — С. 45–48.
NAUMENKO, N.E. and KHIZHA I.Y. and BOGOMAZ E.G. (2009) *Braking of a passenger high-speed train taking into account the operation of an electromagnetic rail brake*. 29. Science and progress of transport. Bulletin of the Dnepropetrovsk National University of Railway Transport. Pp. 45–48.

10. Никулочиков П. М. История, состояние и перспективы развития систем автоматического управления поездами метрополитена / П. М. Никулочников // Автоматика на транспорте. — 2016. — 2 (3). — С. 456–473.
NIKULOCHIKOV, P.M. (2016) *History, state and prospects of development of automatic control systems for metro trains*. 2 (3). Automation on transport. Pp. 456–473.
11. Пудовиков О. Е. Моделирование режима регулировочного торможения длинно-составного поезда / О. Е. Пудовиков, С. А. Муров // Мир транспорта. — 2015. — Т.13. — С. 28–33.
PUDOVIKOV, O.E. and MUROV, S.A. (2015) *Modeling of the regulation braking mode of a long-component train*. 13. The world of transport. Pp. 28–33.
12. Jupyter // © 2020 Project Jupyter. — URL: <https://jupyter.org>.
13. Matplotlib: Python 2D plotting library. — URL: <https://matplotlib.org/3.1.0/index.html>.
14. SciPy.org // Copyright 2008-2019, The SciPy community. — URL: <http://www.nbrkomi.ru>.

УДК: 539.4

MSC2010: 74-06, 74P05, 74C05, 90C05, 65K10

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА ПОЛНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ НА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

© В. В. Чехов

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *chekhovvv@cfuv.ru*

VISUALIZATION OF BEHAVIOUR OF THE FSD ALGORITHM FOR THE MODEL
PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT NONLINEARITIES.

Chekhov V. V.

Abstract. The stress ratio algorithm to achieve the fully stressed design is analyzed geometrically on a test problem of optimizing the symmetrical three-bar truss with taking into account physical nonlinearity.

The paper analyzes the behavior of an algorithm from the field of optimal structural design. The problem of minimizing the mass of a statically loaded structure having a given shape is considered under constraints from above on the stress levels in rods and the constraints from below on the values of design parameters (cross-sectional thickness values), under one loading case. To solve this problem, a rather well-known heuristic algorithm is considered, intended to build fully stressed design (FSD). This algorithm known as the stress-ratio algorithm which belongs to the "optimality criteria methods". The optimality criteria techniques have the iterative process consisting in successive multiplications, and they have the behavior less clear than that of the mathematical programming methods whose iterations based on additive increments. In addition, the FSD heuristic concept meets the minimal mass not in all cases. Therefore, it would be useful to visualize the operation of the algorithm on a simple test model.

As a test structure, we consider a symmetrical three-bar truss made of two materials (one in the central rod, the other in the side ones), loaded statically at the free node by a tensile force directed along the symmetry axis of the truss. For this model, the problem of mass minimization is considered:

$$\begin{cases} m \rightarrow \min \\ F_i \\ \sigma_i < \bar{\sigma}_i, & i \in \{c, s\} \\ F_i \geq \bar{F}_i \end{cases}$$

where F_c and F_s are design parameters (sectional areas of the central and side rods, respectively), σ_c and σ_s are appropriate stresses in the rods, the top bar indicates the limiting permissible values specified in the constraints. The materials used take into account the property of plasticity

(nonlinearity of the relationship between stress and deformation), which takes place under load level close to the breaking load. For the truss under consideration, the problem of mass minimization is a linear programming problem, even taking into account physical and geometrical nonlinearity.

The algorithm for building the FSD has the form

$$F_i^{(k+1)} = \max\left(F_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\bar{\sigma}_i}, \bar{F}_i\right), \quad i \in \{c, s\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

where the design corresponding to the initial approximation (for $k = 0$) is specified arbitrarily, with non-zero values of the design parameters.

The presented article demonstrates that for the truss under consideration, the workflow of the stress-ratio algorithm in the space of design variables can be visualized geometrically, using the triangles similarity. As a result of the corresponding geometric constructions, it turns out that, regardless of the initial approximation, the first step of the algorithm under study results in a design lying on the straight line connecting the projects $\{F_c = 0, F_s = \frac{P}{2\sigma_s \cos \alpha}\}$ and $\{F_c = \frac{P}{\sigma_c}, F_s = 0\}$, which is beyond the constraint region. The next steps of the algorithm go along this straight line towards the design in which have the strength material concentrated in the element (-s) that has the active stress constraint, and maximally removed from elements that are underloaded according to the strain compatibility condition.

Keywords: *symmetric three-bar truss, physical nonlinearity, fully stressed design, uniform strength, stress ratio algorithm.*

ВВЕДЕНИЕ

Визуализацию работы алгоритмов можно отнести к важным элементам визуализации научного знания, необходимость которого связана с обеспечением понимания теории и практической реализации её результатов [1, с. 163]. Визуализация позволяет существенно повысить интуитивное понимание работы алгоритма и объективность оценки того, что с помощью этого алгоритма можно достичь, чего нельзя, и в каких направлениях возможно улучшение его работы.

Если рассматривать область алгоритмов оптимального проектирования силовых конструкций, то в ней существует группа непрямых «методов, основанных на критериях оптимальности» [3, с. 117]. Итерационный процесс таких методов состоит из последовательных умножений, и поведение этих методов в пространстве переменных проектирования является существенно менее очевидным чем, например, поведение методов математического программирования, основанных на аддитивных приращениях. В данной работе рассматривается и визуализируется поведение одного из популярных эвристических методов группы «критериев оптимальности».

Рассматривается визуализация работы достаточно широко известного алгоритма рационального проектирования, применяемого для построения полностью напряжённого проекта [2, с. 348], называемого также равнопрочным [4, с. 114]. Эвристическая концепция полной напряжённости относится к ранним этапам развития теории оптимизации, тем не менее из-за своей простоты данный алгоритм может использоваться и в настоящее время [3, с. 118]. Для иллюстрации анализа работы алгоритма используется простая тестовая модель — симметричная трёхстержневая ферма [5, с. 167]. При анализе учитывается нелинейное поведение материалов, которое имеет место при нагрузках, близких к разрушающим.

1. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается тестовая задача минимизации массы m симметричной трёхстержневой фермы из двух материалов, показанной на рис. 1, при ограничениях сверху на уровни допустимых напряжений и снизу на величины проектных параметров (конструктивные ограничения) при одном случае нагружения растяжением P вдоль оси симметрии фермы, приложенном в её свободном узле.

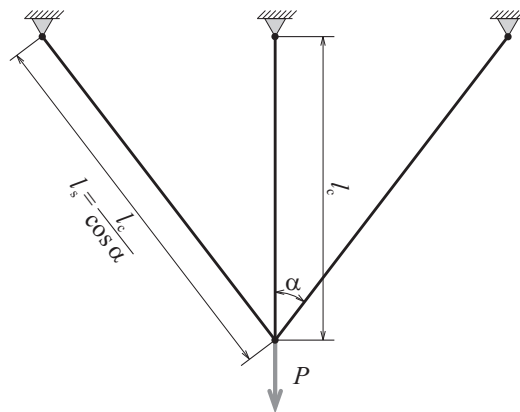


Рис. 1. Тестовая модель трёхстержневой фермы

Задача имеет две переменные проектирования — площади поперечного сечения центрального стержня F_c и боковых стержней F_s :

$$\begin{cases} m \rightarrow \min_{F_i} \\ \sigma_i < \bar{\sigma}_i; & i \in \{c, s\} \\ F_i \geq \bar{F}_i \end{cases} \quad (1)$$

Здесь σ_c и σ_s — напряжения в стержнях, чертой сверху обозначены предельно допустимые значения, задаваемые в ограничениях.

Переменные проектирования, даже при учёте нелинейного поведения материалов, входят в уравнение равновесия сил линейно

$$\sigma_c F_c + 2\sigma_s F_s \cos \alpha = P, \quad (2)$$

поэтому линии равных напряжений в плоскости переменных проектирования являются прямыми, пересекающими оси координат в точках $\{F_c = 0, F_s = \frac{P}{2\sigma_s \cos \alpha}\}$, $\{F_c = \frac{P}{\sigma_c}, F_s = 0\}$, а задача (1) является задачей линейного программирования: если учитывать нелинейное поведение используемых материалов вблизи предела прочности (физическую нелинейность) при помощи секущего модуля упругости $\sigma = E^{\text{sec}} \cdot \varepsilon$, то более развёрнуто рассматриваемую задачу можно записать в виде [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c F_c + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha} F_s \rightarrow \min \\ E_c^{\text{sec}} \cdot F_c + 2E_s^{\text{sec}} \cdot F_s \cos^3 \alpha > \frac{P}{\bar{\sigma}_c} E_c^{\text{sec}} \\ E_c^{\text{sec}} \cdot F_c + 2E_s^{\text{sec}} \cdot F_s \cos^3 \alpha^0 > \frac{P}{\bar{\sigma}_s} E_s^{\text{sec}} \cdot \cos^2 \alpha^0 \\ F_c \geq \bar{F}_c; \quad F_s \geq \bar{F}_s \end{array} \right.$$

Здесь величины ρ, α — соответственно, плотности материалов и угол раствора фермы в недеформированном состоянии.

Пространство переменных проектирования и диапазон возможных направлений градиента целевой функции для этой задачи можно видеть на рис. 2, область допустимых решений здесь закрашена серым цветом. Если учитывать не только физическую, но и геометрическую нелинейность (большие деформации), то задача тоже останется задачей линейного программирования [6] и её область допустимых решений также соответствует рис. 2.

2. АЛГОРИТМ ПОЛНОЙ НАПРЯЖЁННОСТИ

Понятие полностью напряжённого проекта (ПНП) является эвристическим критерием оптимальности, позволяющим упростить решение сложной задачи оптимизации реальных конструкций [2, с. 15]. Оно предполагает, что из каждого элемента нужно максимально убрать силовой материал, чтобы в нём стало активным (т. е. строгим равенством) ограничение либо на предельно допустимое напряжение, либо на минимально возможный поперечный размер. Для конструкций заданной формы алгоритм построения ПНП сводится к умножению каждого проектного параметра

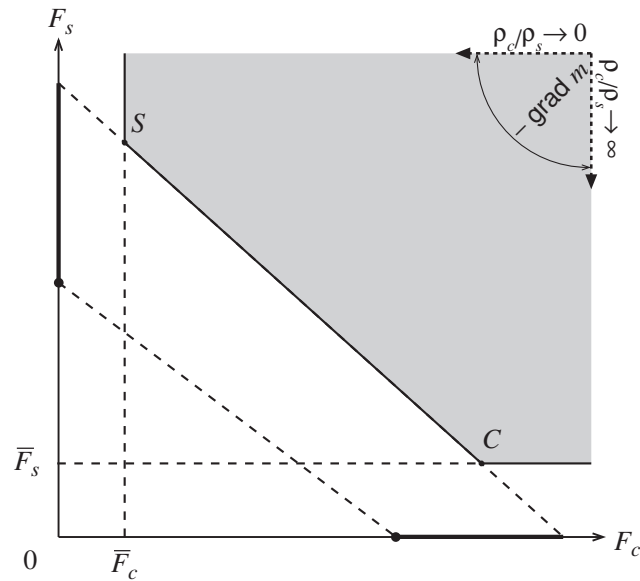


Рис. 2. Область допустимых решений и диапазон градиента целевой функции

на соответствующее отношение напряжений [4, с. 114]. Таким образом, для рассматриваемой трёхстержневой фермы он имеет вид

$$F_i^{(k+1)} = \max\left(F_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\bar{\sigma}_i}, \bar{F}_i\right), \quad i \in \{c, s\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Проект, соответствующий начальному приближению (для $k = 0$), задаётся произвольно, с ненулевыми значениями проектных параметров. Для статически определимых конструкций (например, если это отдельный стержень) алгоритм (3) является одношаговым, а для статически неопределимых он будет уже итерационным. Сходимость его в общем случае не доказана, но на практике проблем с ней обычно не возникает. При выполнении некоторых условий, наложенных на свойства используемых материалов, можно доказать сходимость алгоритма к оптимальному проекту [8].

3. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА К ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧЕ

Для рассматриваемой трёхстержневой фермы условие совместности деформаций имеет вид [5, с. 167]

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \cos^2 \alpha, \quad (4)$$

где ε_c , ε_s — уровни деформации в стержнях. Полагаем, что связь уровней деформации с уровнями напряжений $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ учитывает нелинейное поведение материала под нагрузкой. При использовании реальных материалов практически невозможно,

чтобы их предельно допускаемые напряжения соответствовали условию (4), поэтому на практике будет иметь место один из двух случаев: $\bar{\varepsilon}_s > \bar{\varepsilon}_c \cos^2 \alpha$, (в этом случае активным будет ограничение на напряжение в центральном стержне, а соответствующее ему напряжение в боковых стержнях будем обозначать как σ_s^*), либо $\bar{\varepsilon}_s < \bar{\varepsilon}_c \cos^2 \alpha$ (соответствующее напряжение в центральном стержне назовём σ_c^*).

Для определённости положим, что имеет место первый случай: $\bar{\varepsilon}_s > \varepsilon_s^* = \bar{\varepsilon}_c \cos^2 \alpha$. Здесь через $\bar{\varepsilon}_c$ и $\bar{\varepsilon}_s$ обозначены величины деформаций, соответствующие предельно допускаемым напряжениям $\bar{\sigma}_c$ и $\bar{\sigma}_s$ материалов стержней.

4. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОВЕДЕНИЯ АЛГОРИТМА

Проанализируем поведение алгоритма (3) применительно к рассматриваемой модели. Его можно проиллюстрировать и обосновать геометрически, пользуясь подобием треугольников. Первый шаг алгоритма показан на рис. 3. Начальное приближение обозначено на нём буквой H . Согласно (2), такие же, как и у проекта H , значения напряжений в элементах реализуются также в проектах, соответствующих всем точкам отрезка GI , которому принадлежит и точка H .

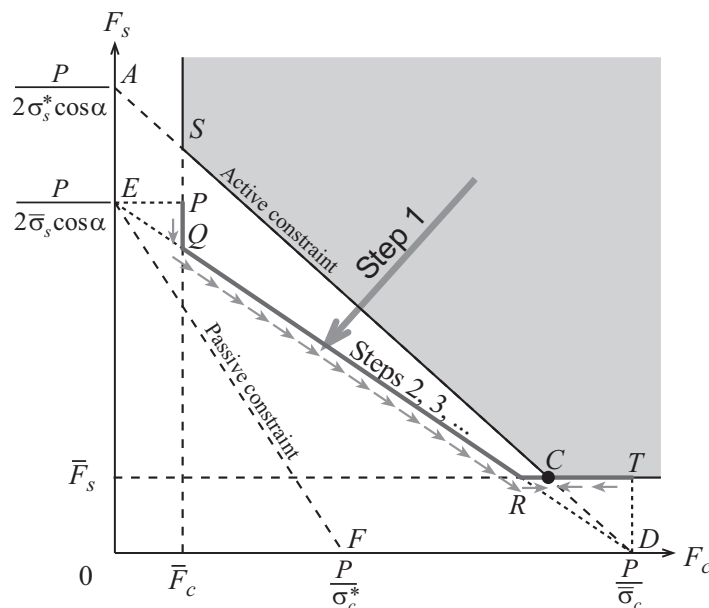


Рис. 3. Первый шаг алгоритма ПНК

Нетрудно заметить, что величина отношения длин отрезков OE и OG равна $\sigma_s^{(0)}/\bar{\sigma}_s$, и, поскольку, согласно (3), $\frac{F_i^{(k+1)}}{F_i^{(k)}} = \frac{\sigma_i^{(k)}}{\bar{\sigma}_i}$, то в конце первого шага алгоритма конструкция будет иметь проектный параметр боковых стержней таким же, как и у проекта, соответствующего точке K (что следует из подобия треугольников GIO и

HIJ , а также EIO и KIJ). Аналогичным образом, параметр центрального стержня в конце первого шага станет таким же, как и у проекта, соответствующего точке M (из подобия треугольников GIO и GHL , GDO и GML). Таким образом, результатом первого шага алгоритма (3) будет проект, соответствующий пересечению соответствующих координатных линий, проведённых через точки K и M . Следует заметить, что эта точка лежит на отрезке ED .

Продолжив аналогичные построения для следующих шагов алгоритма, можно показать, что при произвольных ненулевых начальных параметрах результатом каждой итерации алгоритма (3) всегда является проект, соответствующий одной из точек линии $PQRT$, причем по ходу итераций алгоритма происходит монотонное приближение к проекту, соответствующему точке C (рис. 4).

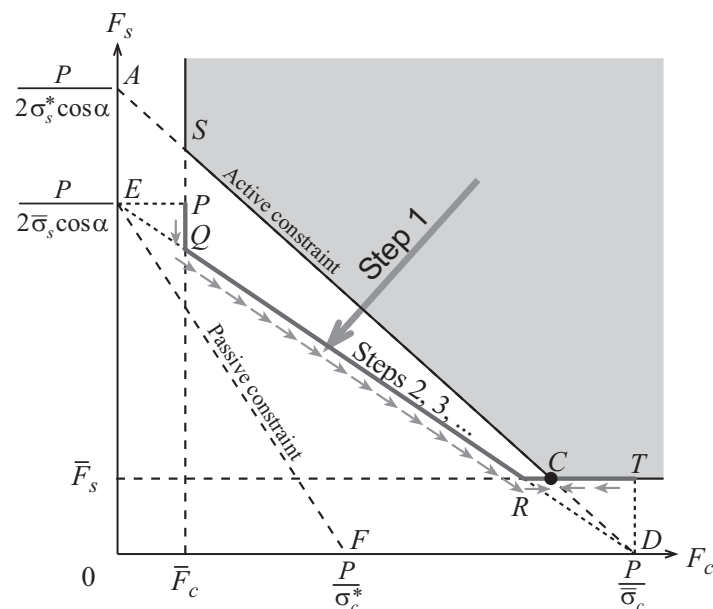


Рис. 4. Предел алгоритма ПНК

Аналогичным образом можно проиллюстрировать, что для случая $\bar{\varepsilon}_s < \varepsilon_s^*$ отрезки AD и EF , соответствующие активному и пассивному ограничениям на допускаемые напряжения, поменяются местами, и алгоритм (3) вдоль линии DE сойдётся уже к точке S .

По этим результатам можно заметить, что работа алгоритма (3) состоит в сосредоточении силового материала в «полностью напряжённых» элементах (т. е. имеющих активное ограничение по допускаемым напряжениям) и изъятии материала из «недогруженных» по условию совместности (4) элементов.

В большинстве случаев такие проекты соответствуют оптимуму, однако не всегда, т. к. возможны и такие случаи, когда у оптимального проекта полностью напряжённый элемент в то же время склонен к вырождению [6]. Это связано с тем, что в формулировке алгоритма (3) никак не учитываются плотности материалов, определяющие величину массы конструкции.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем полученный теоретический результат примерами численного применения алгоритма (3) при использовании конкретных материалов. Рассматривается ферма высотой 1 м, с углом раствора $\alpha = \pi/4$ и минимально допустимыми значениями проектных параметров $\bar{F}_c = \bar{F}_s = 1 \text{ мм}^2$, нагруженная силой $P = 10 \text{ кН}$. В качестве ограничений на допускаемые напряжения заданы пределы прочности σ_b используемых материалов. Свойства материалов заданы в двух вариантах: при помощи линейно-упругой модели, а также деформационной теории пластичности с линейным упрочнением. В качестве начального приближения для работы алгоритма использован проект, значения переменных проектирования у которого пятикратно превосходят минимально допустимые величины.

Для случая, когда в центральном стержне используется магниевый сплав МЛ5, а в боковых — алюминиевый сплав Д16, работа алгоритма показана на рис. 5, как для линейно-упругого случая, так и для физически нелинейного. Хотя у этих случаев заметно отличаются направления линий равных напряжений и оптимальные проекты (учёт пластичности даёт оптимум меньшей массы), тем не менее здесь оба случая вполне соответствуют рис. 4, и линия DE у них практически совпадает. Вдоль этой линии алгоритм достигает окрестности предельной точки в линейно-упругом случае за 4 шага, а при учёте пластичности за 6 шагов. При физически нелинейном расчёте интересно также оценить влияние учёта геометрической нелинейности, т. е. возможность появления больших смещений [6, 7].

Геометрическая нелинейность лежит за рамками описанных выше теоретических результатов, тем не менее её учёт делает результаты более близкими к реальности, поскольку на практике она, как правило, проявляется при пластической работе материалов. Поэтому физически нелинейный расчёт был повторен также и с учётом геометрической нелинейности, их сравнительные результаты показан на рис. 6. Здесь уже можно видеть, что при учёте геометрической нелинейности шаги алгоритма не совсем попадают на линию DE , тем не менее достаточно близки к ней, и в целом больших качественных отличий от рис. 4 не отмечается.

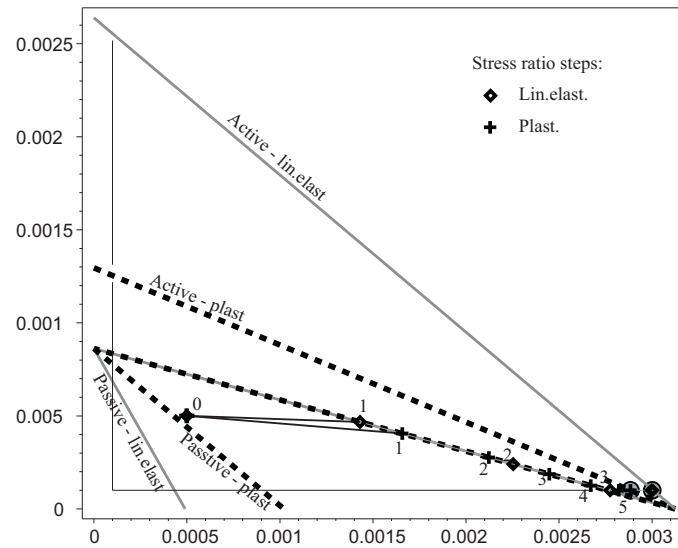


Рис. 5. Работа алгоритма для случая МЛ5-Д16 (малые деформации)

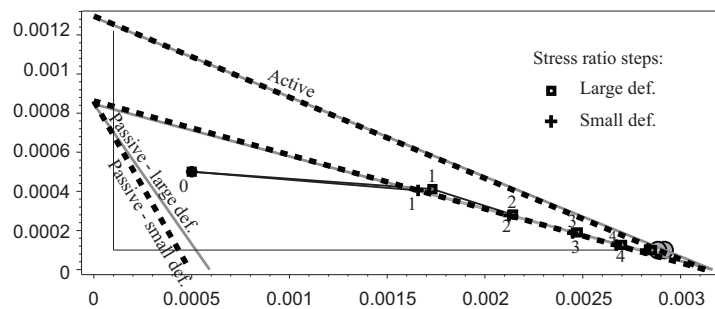


Рис. 6. Работа алгоритма для случая МЛ5-Д16 (физически нелинейный расчёт)

Рассмотрим пример, в котором используются те же материалы, что и в предыдущем случае, только в другом порядке: в центральном стержне использован материал Д16, а в боковых — МЛ5. Работа алгоритма показана на рис. 7. Здесь линейно-упругий и пластичный случаи тоже имеют общую линию DE , но поведение алгоритма у них качественно различается. рис. 4 здесь соответствует лишь линейно-упругий случай, при котором алгоритм приближается к предельной точке C за 10 шагов.

При учёте же физической нелинейности имеет место случай $\bar{\varepsilon}_s < \varepsilon_s^*$, активное и пассивное ограничение по напряжениям в стержнях меняются местами, и алгоритм сходится уже к точке S , окрестности которой достигает за 9 шагов. Отметим, что проекту минимальной массы здесь в обоих случаях соответствует точка C , поэтому учёт физической нелинейности здесь приводит к явно неоптимальному проекту. Тем не менее и в этом примере поведение алгоритма соответствует теоретическому результату.

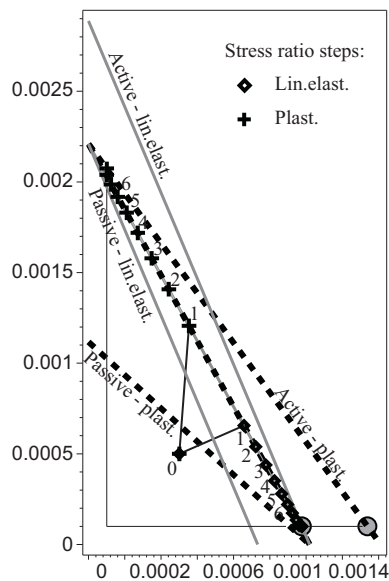


Рис. 7. Работа алгоритма для случая Д16-МЛ5 (малые деформации)

Аналогично предыдущему примеру, сравнение работы алгоритма при пластическом расчёте без учёта и с учётом геометрической нелинейности показано на рис. 8. Здесь тоже можно оценить влияние учёта геометрической нелинейности как незначительное.

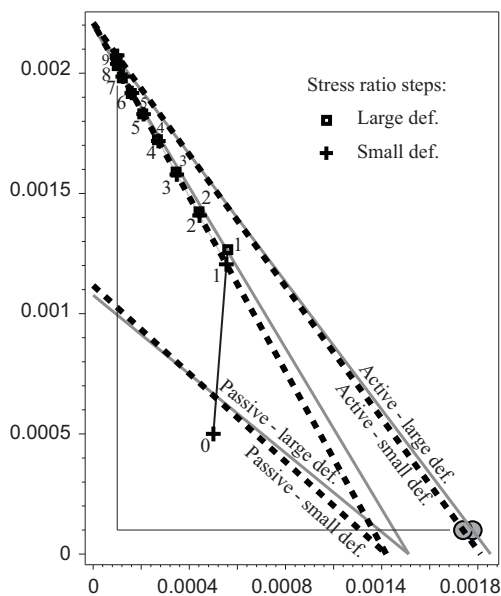


Рис. 8. Работа алгоритма для случая Д16-МЛ5 (физически нелинейный расчёт)

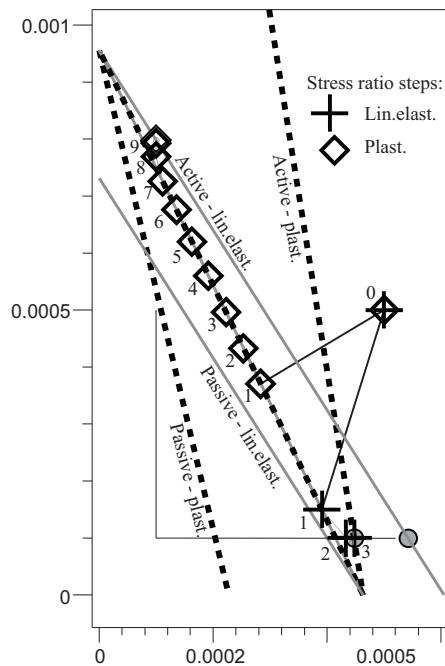


Рис. 9. Работа алгоритма для случая VT6-L75 (малые деформации)

Однако, по рассмотренным примерам нельзя делать общий вывод о слабом влиянии учёта геометрической нелинейности.

Рассмотрим ещё один пример, когда используется другой набор материалов: в центральном стержне титановый сплав VT6, а в боковых — латунь L75. Работа алгоритма в случаях линейно-упругого и физически нелинейного расчётов при малых деформациях показана на рис. 9.

Она напоминает предыдущий случай, только теперь рисунку 4 соответствует пластический расчёт (для достижения окрестности предельной точки оказалось достаточно трёх шагов), а в линейно-упругом случае у модели активное и пассивное ограничения по напряжениям меняются местами, и алгоритм сходится к точке S (за 9 шагов). В этом случае уже результат пластического расчёта оказывается оптимальным проектом, а линейно-упругого — нет. Всё это вполне соответствует теоретическому результату.

Однако, если повторить пластический расчёт уже с учётом геометрической нелинейности, то поведение алгоритма существенно изменяется. Результат этого расчёта показан на рис. 10. После первого шага алгоритма итерации начинают медленно продвигаться вдоль сразу двух разных путей, поочерёдно перескакивая с одного на другой. Один из этих путей ведёт к искомой предельной точке, а второй находится существенно в глубине области допустимых решений и направлен, судя по всему, вдоль

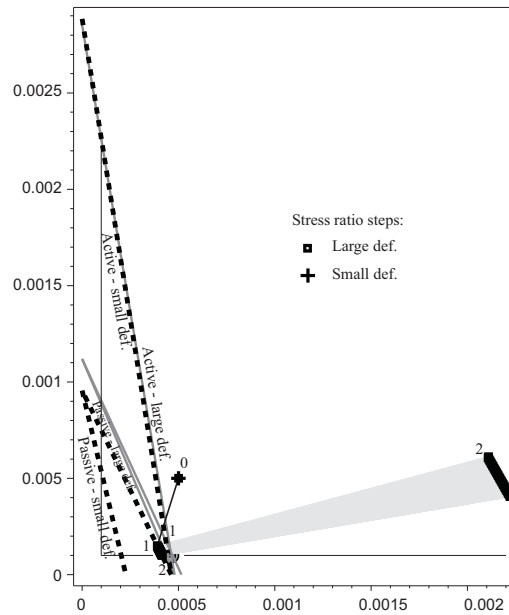


Рис. 10. Работа алгоритма для случая ВТ6-Л75 (физически нелинейный расчёт)

одной из линий равных напряжений. Более подробно его часть показана на рис. 11. Причины такого поведения требуют дополнительного изучения, однако в целом по этому и предыдущим примерам можно судить, что учёт больших деформаций при работе алгоритма полной напряжённости в общем случае не гарантирует установленного выше теоретически характера поведения алгоритма, и может рассматриваться лишь в качестве предварительного приближения.

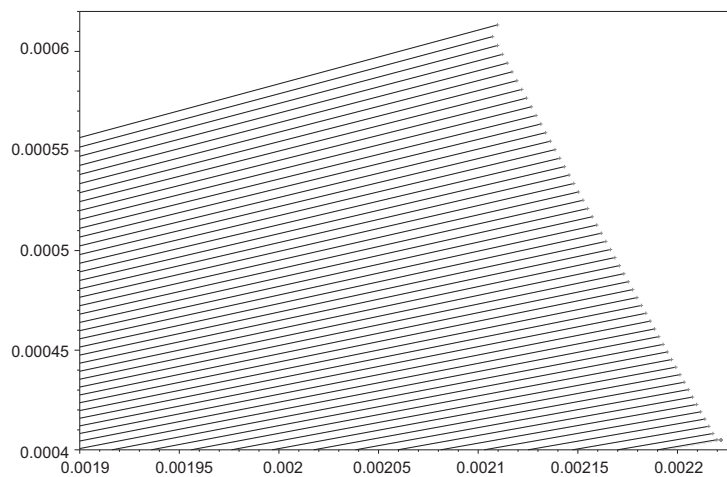


Рис. 11. Работа алгоритма для случая ВТ6-Л75 (физически нелинейный расчёт, увеличено)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при помощи геометрических построений удалось проиллюстрировать работу алгоритма построения ПНП на тестовой модели при решении физически нелинейных задач. Если учитывать ещё и геометрическую нелинейность (т. е. возможность появления больших смещений), то у значений по осям диаграмм рис. 3 и 4 появятся дополнительные множители [6], из-за наличия которых шаги алгоритма уже не будут соответствовать приведённым здесь геометрическим построениям, и в этом случае ими можно будет пользоваться только в качестве предварительного приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматуллин, Р. Ю. Визуализация как способ трансформации и развития научного знания / Р. Ю. Рахматуллин // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики. — 2015. — 3(53). Ч 2. — С. 163–165. URL: <https://www.gramota.net/materials/3/2015/3-2/43.html>
RAKHMATULLIN, R. (2015) Visualization as a way to transform and develop scientific knowledge. *Historical, philosophical, political and legal sciences, cultural studies and art history. Questions of theory and practice.* 3(53) (2). p. 163–16.
2. НАФТКА, Р. Т. Element of Structural Optimtization / R. T. НАФТКА, Z. GÜRDAL. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — 489 с.
3. Баничук, Н. В. Введение в оптимизацию конструкций / Н. В. Баничук. — М.: Наука, 1986. — 303 с.
BANICHUK, N. V. (1986) *Introduction to Design Optimization.* Moscow: Nauka.
4. VASILIEV, V. V. Optimal Design: Theory and Applications to Materials and Structures / V. V. VASILIEV, Z. GÜRDAL. — Lancaster: Technomic Publishing Co., 1999. — 320 с.
5. Биргер, И. А. Соппротивление матиреалов: Учебн. пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. — М: Наука, 1986. — 560 с.
BIRGER, I. A. and MAVLUTOV, R. R. (1986) *Strength of materials.* Moscow: Nauka.
6. СЕКНОВ, V. V. Geometrically and physically nonlinear optimization problem for the 3-bar truss / V. V. СЕКНОВ // Динамические системы. — 2017. — 7(35), вып. 2. — С. 131–148.

7. CHEKHOV, V. V. Use of the hyperelastic model for plastic materials by example of the three-bar truss / V. V. CHEKHOV // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. — 2020. — 24(2). — С. 163–182. URL: <https://ojs.utlib.ee/index.php/ACUTM/article/view/ACUTM.2020.24.11>
8. SELYUGIN, S. V. On convergence properties of the stress ratio algorithm for inhomogeneous elastic structures / S. V. SELYUGIN // Structural and Multidisciplinary Optimization. — 2006. — 32(1). — С. 76–80. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-006-0012-3>

УДК: 532.5, 539.3

MSC2010: 74B10, 74F10, 74K20, 76B15, 65R10

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ,
ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ДВИЖУЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© А. А. Ярошенко¹, Ж. В. Маленко², Е. В. Маркина³, Л. О. Костюкова⁴,
И. И. Бабилов⁵

^{1,2,3,4,5} СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,

УЛ. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ, 33, СЕВАСТОПОЛЬ, 299053, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

^{1,2} ФИЛИАЛ «ГМУ ИМ. АДМИРАЛА Ф.Ф. УШАКОВА»,

УЛ. ГЕРОЕВ СЕВАСТОПОЛЯ 11, КОРПУС 8/22, СЕВАСТОПОЛЬ, 299009, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: yaroshenko.575@yandex.ru, zhvla17@mail.ru, alkit28@yandex.ru, viktor-kostukov@mail.ru,

ivanigorevich96@gmail.com

THREE-DIMENSIONAL BENDING GRAVITATIONAL WAVES GENERATED BY MOVING
PERTURBATIONS.

Yaroshenko A. A. , Malenko Zh. V., Markina E. V. Kostyukova L. O.,
Babikov I. I.

Abstract. The fluctuations of the floating ice cover on the surface of which the load moves are considered. The vibrations of the floating ice sheet are based on linearized equations of hydromechanics and linear classical theory of plate vibrations. The ice cover is modeled by a thin elastic isotropic plate taking into account the hydrodynamic pressures on the lower surface of the ice. When moving along the surface of the load plate, waves are formed.

Of interest is studying the impact on the movement of load velocity on the amplitudes of created waves. This model is consistent with the results which were obtained by Kobeko P. P. and co-authors during the study and definition of dangerous (critical) velocity and optimal intervals of car movement. And also with the theory of the behavior of the ice cover under load, which was developed in the works of Heisin D. E. It is also consistent with the theory of behavior of ice under load, developed in the works by Heisin D. E.

The original problem is to solve the Laplace equation for the speed potential of *varphi*. Using the Fourier transform on horizontal (spatial) variables, an integral representation for plate bending is obtained. The analysis of the amplitudes of the three-dimensional bending-gravitational waves formed in this case is carried out. If the velocity of the load is $v_0 < v < v_1$, then one system of bending-gravitational waves is formed. These waves cover the entire surface of the plate. The amplitude of the waves propagating ahead of the load is less than the amplitude of the waves behind the load. At $v_1 < v < (gH)^{\frac{1}{2}}$, three wave systems are formed — transverse, longitudinal and elastic waves. Transverse and longitudinal waves propagate behind the source and have the character of gravitational ship waves. Elastic waves are caused by the elastic forces of the plate and do not form in its absence. The amplitude of elastic waves is greater than the amplitude of transverse and longitudinal waves. Transverse waves have the smallest amplitude.

At $v > (gH)^{\frac{1}{2}}$, longitudinal and elastic waves are formed. Transverse waves are not formed. There is an angular zone behind the source in which waves with a attenuation amplitude of $R^{-\frac{1}{2}}$ are not formed. The amplitude of the elastic wave is greater than the amplitude of the longitudinal wave. With an increase in the velocity of the source of disturbances and the thickness of the ice cover, the amplitude of the waves formed decreases.

Keywords: *bending-gravitational waves, elastic plate, ice cover, moving disturbances, critical velocity*

ВВЕДЕНИЕ

Ледяной покров на реках и озерах в районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока используется для доставки по нему грузов. В зимнее время на реках и озерах организуются ледовые переправы, по которым осуществляют различного рода перевозки. Одна из масштабных переправ длиной в 11 км, соединяющая озеро Ольхон с материком, находится на озере Байкал. Самой известной транспортной магистралью, связывающей во время Великой Отечественной войны осажденный Ленинград с тылом страны, являлась «Дорога жизни». Участок протяженностью 30 км проходил по льду Ладожского озера. Несмотря на толстый лед, грузовики могли провалиться в воду без видимой причины, в связи с чем группа ученых под руководством Кобеко П. П. занялась изучением этой проблемы. Им удалось определить опасную скорость и рассчитать оптимальные интервалы движения автомобилей [1].

На данный момент имеется ряд работ [2]–[8], которые посвящены исследованию взаимодействию перемещающейся нагрузки с ледяным покровом и разработке соответствующих математических моделей. В них изучается организация ледовых переправ и ледовых аэродромов, рассмотрены случаи околоскритической, критической и сверхкритической скоростей движения нагрузки. Интерес также представляет физическое моделирование деформации и разрушения ледяного покрова, вызванное нагрузкой, которая движется со скоростью, характерной для ледокольных средств, без использования резонансного метода.

Использование ледяного покрова в качестве переправ исследовалось в работах [2, 9, 10]. Ледяные переправы на реках, озерах и водохранилищах устраивают в зимнее время (декабрь–март). При этом ледяной покров должен обладать достаточной несущей способностью. Чем тяжелее нагрузка (транспортное средство), тем толще должен быть лед. Для прокладки дорог важна не только толщина ледяного покрова, но и скорость, с которой движется автомобиль. Движение автомобиля с критической скоростью приводит к разрушению льда и провалу машины под лед.

Теория поведения ледяного покрова под нагрузкой изучена Хейсином Д. Е. в [3, 4] и моделируется уравнением вязкоупругих колебаний. При высоких скоростях модель упругой пластины отвечает незатухающим колебаниям, что не согласуется с известными экспериментальными данными. Однако, при малых скоростях движения нагрузки исследование различных математических моделей, описывающих вязкоупругие свойства деформируемой пластины [11, 12], с помощью численных методов показывает что упругая модель даёт решения, близкие к модели Кельвина-Фойгта, причем, чем ниже скорость, тем меньше расхождение. Тогда же было получено низкое влияние пластических свойств льда при малых скоростях движения нагрузки, что позволило использовать для моделирования наиболее хорошо разработанную теорию упругости и методы физического моделирования льда как упругой среды.

Ледяной покров понимается как идеально упругое тело. Также в качестве математической модели используется тонкая жесткая упругая пластина на основании Винклера [13], что является возможным, если глубина чаши прогиба ледяного покрова, а, следовательно, и амплитуда распространяющейся в нем волны при малых скоростях движения много меньше ее длины. То есть частицы пластины под действием поперечно направленной нагрузки будут испытывать только малые вертикальные колебания. Горизонтальные усилия, трение, а также силы сжатия, присутствующие в ледяном покрове, при этом не учитываются. В этом случае течение воды вблизи поверхности пластины можно рассматривать как безвихревое [14], а жидкость в целом как идеальную. Дальнейшее развитие теория получила в работах [5, 6], [15, 16]. Среди последних исследований следует отметить [17]-[23].

Настоящая работа посвящена вопросу влияния скорости перемещения нагрузки на амплитуды образующихся волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает ледяной покров, по поверхности которого со скоростью v перемещается нагрузка, оказывающая на лед давление $p = p_0 f(x, y)$. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Как отмечено в работе Зуева В. А. [24] при температурах ниже -3°C лед ведет себя как упругое тело. Таким образом, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \\ -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H$$

и кинематическому условию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

где $D_1 = \frac{D}{\rho g}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$; $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$; $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$; $\nabla^4 = \Delta_l^2$; $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; ρ — плотность жидкости; E, h, ρ_1, μ — модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки соответственно; Q — сжимающее усилие, ζ — возвышение поверхности пластина-жидкость.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Применяя для решения задачи (1)-(3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y , получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 Re \left(\int_0^\infty r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \quad (4)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta, \quad (5)$$

где $\tau = ((1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{\frac{1}{2}}$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 r g t h r H)^{-1} t h r H$, $r = (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}$, $R = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $k_0 = rv \cos \theta - \tau$, $f^*(r)$ — трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Применим для вычисления интегралов (4)-(5) методы теории функций комплексной переменной (теории вычетов) и метод стационарной фазы [25, 26]. На основании анализа стационарных точек фазовых функций интегралов получим:

$$\text{при } 0 < v < v_0 : \quad \zeta = O(R^{-1}), \quad (6)$$

$$\text{при } v_0 < v < v_1 : \quad \zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}), \quad 0 \leq |\gamma| \leq \pi, \quad (7)$$

$$\text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} : \quad \zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}), & \text{если } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{если } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{если } \gamma_1 \leq |\gamma| \leq \pi, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{при } v > \sqrt{gH} : \quad \zeta = \begin{cases} O(R^{-1}), & \text{если } 0 \leq |\gamma| \leq \gamma_2, \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{если } \gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}), & \text{если } \gamma_3 \leq |\gamma| \leq \pi. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta_k &= R^{-\frac{1}{2}} \psi(\alpha_k) \cos(R\Phi(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \frac{\pi}{4}), \quad k = 1, 2, 3, \\ \psi &= -f_1(r)M(r)(v\tau\sqrt{1-\tau_0^2})^{-1}(2\pi|\Phi''|)^{-\frac{1}{2}}, \quad f_1(r) = f^*(r)p_1, \\ \Phi &= r(\tau_0 \cos \gamma - \sqrt{1-\tau_0^2} \sin \gamma), \quad \tau_0 = (rv)^{-1}\tau, \\ \gamma_1 &= \text{arctg}\tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \text{arctg}\tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \text{arctg}\left(\frac{v^2}{gH} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни уравнения $tg\gamma = \tau_2(r)$,

$$\tau_2(r\tau_0)' \sqrt{1-\tau_0^2} (1-\tau_0(r\tau_0)')^{-1},$$

α_4, α_5 — корни уравнения $\tau_2'(r) = 0$,

$$\alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2\alpha_5 < \alpha_3,$$

$$v_0 = \frac{\tau(r_0)}{r_0},$$

r_0 — корень уравнения $\tau_0'(r) = 0$,

v_0 — минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны,

$$v_1 = \tau_3(r_3),$$

$$\tau_3 = \left(\frac{\tau}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tau'(r\tau' - \tau)}{r^3\tau''}\right)^{\frac{1}{2}},$$

r_3 — действительный корень уравнения $\tau_3'(r) = 0$, $r_3 < r_0$,

$$f^*(r) = \frac{b}{r} J_1(rb), \quad J_1 — \text{функция Бесселя},$$

b — радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При $0 < v < v_1$ (см. (6)) волны с амплитудой затухания как $R^{-\frac{1}{2}}$ не образуются. Это означает, что вместо изгибно-гравитационных волн наблюдается статический прогиб.

Если нагрузка перемещается со скоростью $v > v_0$, то в ледяном покрове возникают волнообразные колебания. При движении нагрузки со скоростью $v_0 < v < v_1$ (см. (7)) образуется одна система волн ζ_3 , затухающих с расстоянием как $R^{-\frac{1}{2}}$. На рис. 1-2 представлено распределение амплитуды этих волн. Изгибно-гравитационные волны ζ_3 покрывают всю поверхность пластины, а направление их

гребней определяется углом γ_0 , который уменьшается при увеличении скорости v :

$$\gamma_0 = \arctg \left(\left(\frac{v}{v_0} \right)^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

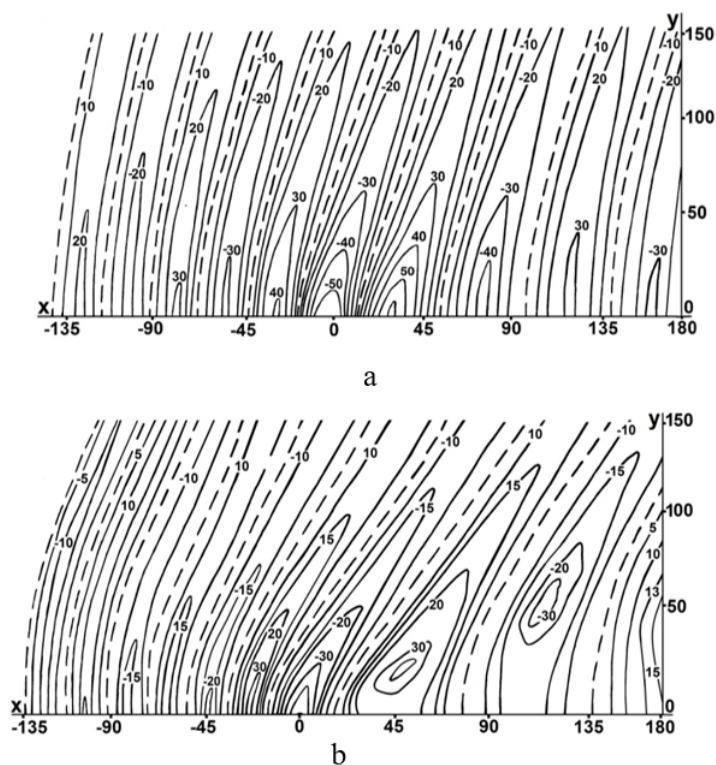


Рис. 1. Амплитуда изгибно-гравитационной волны ζ_3 для (а) $v_0 < v < v_1$: $v = 12$ м/с, (б) $v = 14$ м/с

Волны, распространяющиеся впереди источника, короче волн, распространяющихся за источником. При увеличении скорости перемещения источника длина волн, распространяющихся впереди источника, уменьшается, а для волн, распространяющихся за источником, увеличивается. Над волнами, распространяющимися впереди источника, преобладают упругие силы пластинки, а волны, распространяющиеся за источником, имеют характер гравитационных волн. Амплитуда волн, распространяющихся впереди, меньше амплитуды волн, распространяющихся за источником возмущений. При значениях v близких к v_0 амплитуда максимальна по трассе движения источника (рис. 1(а)), а при v близких к v_1 максимум амплитуды за источником смещается вверх от трассы (рис. 1(б)) и достигает максимального значения при $v = v_1$.

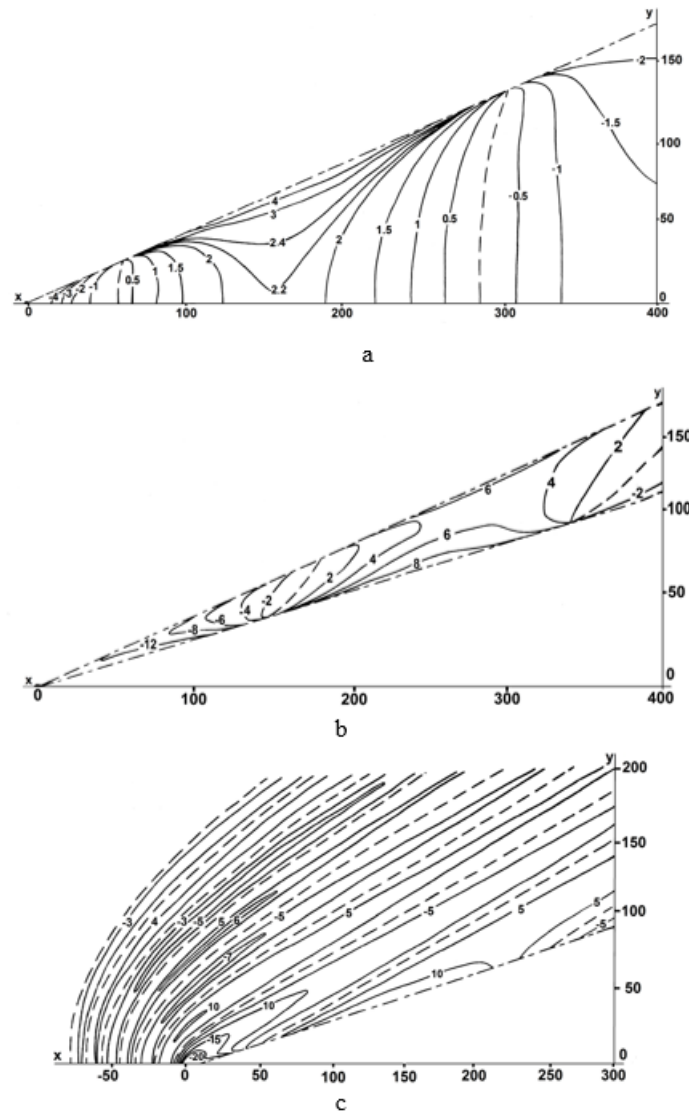


Рис. 2. Амплитуда поперечной волны (а) ζ_1 , (б) продольной волны ζ_2 и упругой волны (с) ζ_3 для $v = 25$ м/с, ($v_1 < v < \sqrt{gH}$)

При $v_1 < v < \sqrt{gH}$ (8) образуются три системы волн: ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Волны ζ_1 носит характер поперечных корабельных волн и распространяются за источником возмущений внутри угловой зоны $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$. Волны ζ_2 носят характер продольных гравитационных корабельных волн и распространяются также за источником внутри угловых зон $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$. Упругие волны ζ_3 распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \pi$. На рис. 2 представлены амплитуды этих волн. На рис. 2(а) — амплитуда поперечной волны ζ_1 , на рис. 2(б) — амплитуда продольной волны ζ_2 , и на рис. 2(с) — амплитуда упругой волны ζ_3 .

При увеличении скорости перемещения источника возмущений, амплитуды этих волн уменьшаются. Наибольшее значение амплитуды у продольной и упругой волн, а наименьшее у поперечной волны. При увеличении толщины пластины амплитуда всех трех волн уменьшается.

Возмущения, движущиеся со скоростью $v > \sqrt{gH}$, возбуждают две системы волн: ζ_2 , ζ_3 . Из них продольные волны ζ_2 распространяются внутри угловых зон $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$, а упругие волны ζ_3 в угловой зоне $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \pi$. За источником в угловой зоне $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$ волн с амплитудой затухания как $R^{-\frac{1}{2}}$ не образуется. На рис. 3 представлены амплитуды образующихся в этом случае волн: ζ_2 (рис. 3(a)), ζ_3 (рис. 3(b)). Амплитуды этих волн уменьшаются при увеличении скорости перемещения источника. Амплитуда упругой волны больше амплитуды продольной волны.

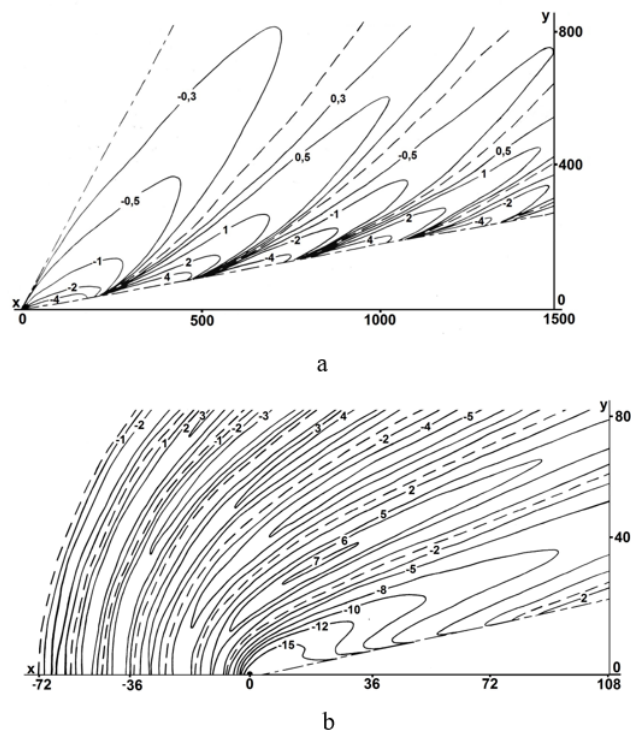


Рис. 3. Амплитуда продольной волны (а) ζ_2 и упругой волны (б) ζ_3 для $v = 35$ м/с, ($v > \sqrt{gH}$)

Для количественной оценки численные расчеты проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $Q = 0$, $\rho = 870$ кг/м³, $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, $\mu = 0.34$, $h = 0.5$ м, $a = 100$ м, $b = 2$ м.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существует четыре диапазона скоростей источника возмущений, при которых меняется структура волнового возмущения — $0 < v < v_0$, $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$.

Движущимися возмущениями в зависимости от скорости перемещения источника генерируется одна, две или три системы волн. При прокладке ледовых дорог и переправ следует избегать движения транспортных средств с критическими скоростями v_0 и v_1 .

Критическая скорость $v = \sqrt{gH}$ на амплитуды образующихся волн существенного влияния не оказывает. При $v = \sqrt{gH}$ происходит только изменение структуры волнового движения. Увеличение толщины ледяного покрова приводит к уменьшению амплитуды образующихся волн. Толщина оказывает существенное влияние на амплитуду упругой волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов И. К. Деформация ледяного покрова при движении грузов / И. К. Иванов, П. П. Кобеко, А. Р. Шульман // Журнал технической физики. — 1946. — 16(3). — С. 257–262.
IVANOV, I., KOBЕКО P. & SHULMAN, A. (1946) Deformation of the ice cover during the movement of goods. *Journal of Technology physics*. 16 (3). p. 257–262.
2. Иванов К. Е. Грузоподъемность ледяного покрова и устройство дорог на льду / К. Е. Иванов, И. С. Песчанский. — М.; Л.: Главсевморпуть, 1949. — 181 с.
IVANOV, K. and PESCHANSKY, I. (1949) *The carrying capacity of the ice cover and the construction of roads on ice*. М.; Л.: Glavsevmorput.
3. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова / Д. Е. Хейсин. — Ленинград: Гидрометеоздат, 1967. — 215 с.
HEISIN, D. (1967) *Dynamics of the ice cover*. L.: Hydrometeoizdat.
4. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова / Д. Е. Хейсин // Прочность и вязкоупругопластичность: Механика и физика льда / М.: Наука. — 1983. — С. 152–163.
HEISIN, D. (1983) Dynamics of the ice cover. *Strength and visco-elastic plasticity: Mechanics and physics of ice*. Moscow: Nauka. p. 152–163.
5. SQUIRE, V., HOSKING, R., KERR, A. and LANGHORNE, P. (1996) *Moving Loads on Ice Plates*. Springer Science & Business Media.

6. Козин В. М., Жесткая В. Д., Погорелова А. В. и др. Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жесткая, А. В. Погорелова и др. — М.: Академия Естествознания, 2008. — 329 с.
KOZIN, V. et al. (2008) *Applied problems of ice cover dynamics*. Moscow: Academy of Natural Sciences.
7. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны / Л. В Черкесов. — Киев: Наукова думка, 1973. — 247 с.
CHERKESOV, L. (1973) *Surface and internal waves*. Kiev: Naukova dumka.
8. NEVEL, D. (1968) Moving loads on at floating ice sheet. *Research report (Cold Regions Research and Engineering Laboratory (U.S))*. 26. p. 13.
9. Ледяные переправы / Труды отд. инжен. исследований. Науч.-технич. ком-т Нар. ком. пут. сообщ. — Москва: СССР-Транспечать-НКПС, 1929. — 98 с.
Ice crossings (1929) . Moscow: USSR-Transpechat-NKPS.
10. Зубов Н. Н. Основы устройства дорог на ледяном покрове. — М.: Гидрометеиздат, 1942. — 74 с.
ZUBOV, N. (1942) *Fundamentals of the construction of roads on the ice cover*. М.: Hydrometeoizdat.
11. Жесткая В. Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // Прикладная механика и техническая физика. — 1999. — 40(4). — С. 243–248.
ZHESTKAYA, V. (1999) Numerical solution of the ice cover load movement problem. *Applied mechanics and technical physics*. 40 (4). p. 243–248.
12. Козин В. М., Погорелова А. В. Влияние вязкостных свойств льда на прогиб ледяного покрова при движении по нему нагрузки / В. М. Козин, А. В. Погорелова // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — 50(3). — С. 147–157.
KOZIN, V. & POGORELOVA, A. (2009) Influence of viscosity properties of ice on the deflection of the ice cover when it is under load. *Applied mechanics and technical physics*. 50 (3). p. 147–157.
13. REDDY, J. (2006) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 2022. — 368 с.
LANDAU, L. and LIFSHITZ, E. (1986) *Theoretical Physics, Vol. 6. Hydrodynamics*. CRC press.

15. Букатов А. Е., Черкесов Л. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // Прикладная механика и техническая физика. — 1984. — 2. — С. 151–157.
BUKATOV, A. E., CHERKESOV, L. V. & YAROSHENKO, A. A. (1984) Bending-gravitational waves from moving perturbations. *Applied Mechanics and technical Physics*. (2). p. 151–157.
16. Букатов А. Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. — Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. — 360 с.
BUKATOV, A. (2017) *Waves in the sea with floating ice cover*. Sevastopol: FGBUN Moscow State University.
17. Козин В. М. Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор) // Вестник инженерной школы ДВФУ. — 2019. — 2(39). — С. 30–38.
KOZIN, V. (2019) Methods of determining critical speeds of loads moving in conditions of continuous ice cover (review). *Bulletin of the engineering school of FEFU*. 2 (39). p. 30–38.
18. Зуев В. А., Лу Ян, Князьков В. В., Москвичева Ю. А., Себин А. С. Напряженно-деформированное состояние ледяного покрова при движении по нему нагрузки с малой скоростью // Транспортные системы. — 2020. — 3(17). — С. 33–40.
ZUEV, V., LU, Y., KNYAZKOV, V., MOSCKVICHEVA, Yu. & SEBIN, A. (2020) The stress-strain state of the ice cover when the load moves through it at low speed. *Transport systems*. 3 (17). p. 33–40.
19. Зуев В. А., Лу Ян, Двойченко Ю. А., Себин А. С. Подходы к оценке разрушения ледяного покрова при движении над ним нагрузки с малой скоростью // Транспортные системы. — 2020. — 3(17). — С. 41–47.
ZUEV, V., LU, Y., DVOICHENKO, Yu. & SEBIN, A. (2020) Approaches to the assessment of the destruction of the ice cover when a load moves over it at low speed. *Transport systems*. 3 (17). p. 41–47.
20. Козин В. М., Земляк В. Л., Рогожникова Е. Г., Погорелова А. В. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. — Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020. — 120 с.
KOZIN, V., ZEMLYAK, V., ROGOZHNIKOVA, E. and POGORELOVA, A. (2020) *The influence of ice conditions on the deformed state of the ice cover from the*

- movement of the load*. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.
21. Козин В. М. Зависимость напряженно-деформированного состояния ледяного покрова от его физико-механических свойств в условиях изгибно-гравитационного резонанса // Морские интеллектуальные технологии. — 2021. — 2(52). — С. 37–42.
KOZIN, V. (2021) Dependence of the stress-strain state of the ice cover on its physical and mechanical properties under conditions of bending-gravitational resonance. *Marine intellectual technologies*. 2 (1). p. 37–42.
22. Маленко Ж. В., Ярошенко А. А. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // Морские интеллектуальные технологии. — 2021. — 2(52). — С. 157–161.
MALENKO, Zh. & YAROSHENKO, A. (2021) Bending-gravitational waves in the sea with ice cover from moving disturbances. *Marine intellectual technologies*. 2 (4). p. 157–161.
23. Стурова И. В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2021. — 4. — С. 63–72.
STUROVA, I. (2021) Movement of the load on the ice cover with uneven compression. *News of the Russian Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics*. 4. p. 63–72.
24. Зуев В. А. Средства продления навигации на внутренних водных путях. — Ленинград: Судостроение, 1986. — 208 с.
ZUEV, V. (1986) *Means of prolongation of navigation on inland waterways*. Leningrad: Shipbuilding.
25. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1980. — 480 с.
SIDOROV, Yu., FEDORYUK, M. AND SHABUNIN, M. (1980) *Lectures on the theory of functions of a complex variable*. M.: Nauka, ch.ed. phys.-mat. lit.
26. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Ленанд, 2022. — 368 с.
FEDORYUK, M. (1980) *The method of the pass*. M.: Lenand.

Бербат Э. А., Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Обобщенные симметричные F -пространства Орлича / Э. А. Бербат, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 4 (57). — С. 7–22.

УДК: 519.55/56

Исследование пространств, не обладающих свойством локальной выпуклости, привело к изучению F -пространств измеримых функций, которым посвящена данная работа. Классическими примерами являются банаховы пространства Орлича, для которых вводится понятие равноизмеримости. Доказаны теоремы для классов равноизмеримых симметричных F -пространств, содержащих стандартные симметричные F -пространства.

Ключевые слова: симметричные F -пространства, измеримые функции, пространства Орлича, σ -конечная мера, F -норма.

Гельфанова Д. Д., Шнарева Г. В., Донченко Я. А. Применение GeoGebra при изучении нелинейного программирования / Д. Д. Гельфанова, Г. В. Шнарева, Я. А. Донченко // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 4 (57). — С. 23–39.

УДК: 378.147

Задачи нелинейного программирования, в частности оптимизационные задачи, математические модели которых содержат нелинейные зависимости от переменных, и отсутствие универсального алгоритма их решения вызывают сложность у обучающихся направлений подготовки «Экономика» и «Менеджмент». В работе предлагается использование прикладного программного пакета GeoGebra для компьютерной реализации решения учебной задачи, обеспечивающего визуализацию зависимостей, интерактивность и графическую поддержку процесса решения.

Ключевые слова: информационные технологии, задача нелинейного программирования, задача выпуклого программирования, графический метод, условия Куна-Такера, математическая программа, GeoGebra.

Матковский В. А. Анализ данных торможения поездов метрополитена / В. А. Матковский // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 4 (57). — С. 40–69.

УДК: 004.023, 004.048, 004.67

В работе рассмотрена задача моделирования процесса торможения поездов с целью дальнейшей оценки качества торможения. Показано, что подход, основанный на интеллектуализации обработки больших данных, характеризующих процесс торможения поездов метрополитена, позволяет уточнять разработку систем управления поездов в автоматическом режиме, прогнозировать качество и точность остановки. Особую значимость имеет система аварийного торможения поездов, которая обеспечивает безопасность пассажиров обеспечивает, экстренное торможение поезда при возникновении аварийной ситуации. Показано, что статистические методы и методы кластерного анализа позволяют извлечь знания о процессе торможения из данных измерений таких, как координаты станций метро, на основе изучения гистограмм и применения алгоритмов кластеризации к координатам остановок поездов. Выявлены характерные траектории торможений, получены значения параметров кинематик движения. По полученным траекториям в дальнейшем возможно определять класс торможения. Применяемая технология может быть перспективна в других предметных областях. Показано, что статистические данные движения поездов метро, полученные из них траекторные данные и визуализированные представления являются большими данными (Big Data, BD), из которых извлекаются знания о качестве торможения поездов (Data Mining, DM). Предложенная интеллектуализированная система обработки таких данных сочетает статистические методы машинного обучения (Machine learning, ML) и нейронные сети.

Ключевые слова: большие данные, модель, фазовые траектории динамической системы, эффективность торможения, интеллектуализированная система, обработка данных торможения поездов.

Чехов В. В. Визуализация работы алгоритма полной напряженности на модельной задаче с учетом нелинейностей / В. В. Чехов // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 4 (57). — С. 70–83.

УДК: 539.4

В статье анализируется поведение алгоритма из области оптимального структурного проектирования. Рассмотрена задача минимизации массы статически нагруженной конструкции заданной формы при ограничениях сверху на уровни напряжений в

стержнях и ограничениях снизу на значения расчетных параметров (значений толщины поперечного сечения) при одном варианте нагружения. Для решения этой задачи рассматривается достаточно известный эвристический алгоритм, предназначен для создания полностью напряженной конструкции (FSD). Этот алгоритм известен как алгоритм отношения напряжений и относится к «методам критериев оптимальности». Методы критериев оптимальности имеют итерационный процесс, состоящий в последовательных умножениях, и их поведение менее понятно, чем у методов математического программирования, итерации которых основаны на аддитивных приращениях. Кроме того, эвристическая концепция ФСД не во всех случаях соответствует минимальной массе. Поэтому полезно визуализировать работу алгоритма на простой тестовой модели. В качестве испытательной конструкции рассматривается симметричная трехстержневая ферма, изготовленная из двух материалов (один в центральном стержне, другой в боковых), нагруженная статически в свободном узле растягивающей силой, направленной вдоль оси симметрии фермы.

Ключевые слова: симметричная трехстержневая ферма, физическая нелинейность, полностью напряженная конструкция, равнопрочность, алгоритм соотношения напряжений.

Ярошенко А. А., Маленко Ж. В., Маркина Е. В., Костюкова Л. О., Бабиков И. И. Трехмерные изгибно-гравитационные волны, генерируемые движущимися возмущениями / А. А. Ярошенко, Ж. В. Маленко, Е. В. Маркина, Л. О. Костюкова, И. И. Бабиков // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 4 (57). — С. 84–96.

УДК: 532.5, 539.3

Рассматриваются колебания плавающего ледяного покрова, по поверхности которого перемещается нагрузка. В основу колебаний положены линеаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой с учетом гидродинамических давлений на нижнюю поверхность льда. При движении по поверхности пластины нагрузки образуются волны. Проведен анализ амплитуд образующихся при этом трехмерных изгибно-гравитационных волн. При увеличении скорости источника возмущений и толщины ледяного покрова уменьшается амплитуда образующихся волн.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, ледяной покров, движущиеся возмущения, критическая скорость.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

***Бабиков Иван
Игоревич***

аспирант кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета, г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: ivanigorevich96@gmail.com

***Бербат Эвелина
Айдеровна***

магистр кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета, РК, г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: berbat2001@mail.ru

***Гельфанова Диляра
Дамировна***

кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики, Крымский инженерно-педагогический университет им. Февзи Якубова, г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: gelfanova@mail.ru

***Донченко Янина
Андреевна***

кандидат педагогических наук, методист, «Романовский колледж индустрии гостеприимства», г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: donchenkoyanina@vk.com

***Костюкова Людмила
Олеговна***

аспирант кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета, г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: viktor-kostukov@mail.ru

***Маленко Жанна
Владимировна***

старший преподаватель кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета и кафедры фундаментальных дисциплин филиала «ГМУ им. адмирала Ф. Ф. Ушакова», г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: zhvla17@mail.ru

***Маркина Елена
Владимировна***

аспирант кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета, г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: alkit28@yandex.ru

- Матковский
Владислав Андреевич** аспирант кафедры информатики Физико-технического института ФГАУО ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: vladislavmatkovskiy2015@mail.ru
- Муратов Мустафа
Абдурешитович** д. ф.-м. н, профессор кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета, РК, г. Симферополь, Российская Федерация,.
e-mail: tamuratov@gmail.com
- Пащикова Юлия
Сергеевна** к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета, РК, г. Симферополь, Российская Федерация,.
e-mail: pashkova.j@yandex.ua
- Чехов Владимир
Валерьевич** к. т. н, доцент кафедры информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: chekhovvv@cfuv.ru
- Шнарева Галина
Вячеславовна** старший преподаватель кафедры математики и физики, Крымский инженерно-педагогический университет им. Февзи Якубова, г. Симферополь, Российская Федерация.
e-mail: intgala@yandex.ru
- Ярошенко Александр
Александрович** д. ф.-м. н, профессор, профессор кафедры высшей математики Севастопольского государственного университета, заведующий кафедрой фундаментальных дисциплин филиала «ГМУ им. адмирала Ф. Ф. Ушакова», г. Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.10.2023 .
Издательский дом ФГАОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского».

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № ВВФР-000506 . Тираж 25 экз. Формат 60x90/16.
Усл. печ. ед. 5,8. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.
Типография ИП Павлюков В. В., ИНН 250209756491. 295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, 44,
тел. +7 (978) 823-31-73, E-mail: zakaz@krimpoligraf.ru