

# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 2 (55) ' 2022

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел», 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика», 05.13.17 «Теоретические основы информатики», 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», 1.1.9 «Механика жидкости, газа и плазмы», 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации» (физико-математические науки).

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru

T AURIDA  
J OURNAL OF  
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
M ATHEMATICS

2022, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:**

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВИЧ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**  
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**  
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**  
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**  
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**  
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.  
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**  
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**  
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.  
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99  
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77  
e-mail (гл. редактор): mustafa\_muratov@mail.ru  
e-mail (для переписки): article@tvim.info  
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**EDITORIAL COUNCIL:**

<b>Sergey ABLAMEYKO</b> , Prof., EngD	<b>Leonid MESTETSKIY</b> , Prof., EngD
<b>Natalia APATOVA</b> , Prof., EdD	<b>Andrey MURAVNIK</b> , Dr. Phys.-Math.
<b>Alexander VATULIAN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Igor POLOVINKIN</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Konstantin VORONTSOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Andrey RAIGORODSKY</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Gennady DEMIDENKO</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Dmitry ROKHLIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Yakov YERUSALIMSKY</b> , Prof., EngD	<b>Arkady SOLOVYOV</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Valentin ZAGREBNOV</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Fedor STONYAKIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Vladimir ZADOROZHNY</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Anton UTKIN</b> , Senior Researcher, EngD
<b>Vladimir KALINICHENKO</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Vyacheslav TSIBULIN</b> , Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Alexey KARAPETYANTS</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.	<b>Tatyana CHERNOVA</b> , Assoc. prof., EngD
<b>Vladislav KRAVCHENKO</b> , Prof., EngD	<b>Vladimir CHILIN</b> , Prof., Dr. Phys.-Math.
<b>Viktor KRASNOPROSHIN</b> , Prof., EngD,	

**EDITORIAL BOARD:**

**Mustafa MURATOV**, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**  
**Lyudmila RUDENKO**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**  
**Ayder ANAFIYEV**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**  
**Vladimir BLYSCHIK**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**  
**Maria GERMANCHUK**, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**  
**Dmitry ZAKORA**, Prof., Dr. Phys.-Math.  
**Margarita KOZLOVA**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**  
**Vladimir LUKYANENKO**, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**  
**Stanislav PAPKOV**, Prof., Dr. Phys.-Math.  
**Alexander YAROSHENKO**, Prof., Dr. Phys.-Math.

**OFFICE ADDRESS:**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE: [www.tvim.info](http://www.tvim.info)**

**FOR CORRESPONDENCE:**

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel.** +7 978 782 31 99 — editor-in-chief

+7 978 837 82 77 — office

**Email:** [mustafa\\_muratov@mail.ru](mailto:mustafa_muratov@mail.ru) — editor-in-chief

[article@tvim.info](mailto:article@tvim.info) — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

**THEMATIC SECTIONS:**

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Козлова М. Г., Лукьяненко В. А., Макаров О. О., Руденко Л. И.</b> Специфика построения многоагентных маршрутов в иерархических сетях . . . . .	7
<b>Анафиев А. С., Карюк А. С.</b> Обзор подходов к решению задачи оптимизации гиперпараметров для алгоритмов машинного обучения . . . . .	30
<b>Бучацкий П. Ю., Теплоухов С. В., Онищенко С. В.</b> Комбинация морфологического и нейросетевого подходов для решения задачи подсчета круглых лесоматериалов на цифровом изображении . . . . .	38
<b>Корнута А. А.</b> Краевая задача с наклонной производной для нелинейного уравнения с инволюцией на прямоугольнике . . . . .	50
<b>Мещерина Е. В.</b> О развитии условий минимальности в алгебрах Ли . . . . .	73
<b>Рудницкий О. И.</b> Об одном свойстве базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$ . . . . .	85
<b>Терновский В. А.</b> Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно группы $H_3$ . . . . .	96
Рефераты . . . . .	103
Список авторов номера . . . . .	107

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Kozlova M. G., Lukianenko V. A., Makarov O. O., Rudenko L. I.</b> Specifics of building multi-agent routes in hierarchical networks .....	7
<b>Anafiev A., Karyuk A.</b> Overview of approaches to solving the hyperparameters optimization problem for the Machine Learning algorithms.....	30
<b>Buchatsky P. Yu., Teploukhov S. V., Onishchenko S. V.</b> Synthesis of morphological and neural network approaches for solving the problem of counting round timber on a digital image .....	38
<b>Kornuta A. A.</b> Boundary value problem with an inclined derivative for a nonlinear equation with an involution on a rectangle .....	50
<b>Meshcherina E. V.</b> On the development of minimality conditions in lie algebras	73
<b>Rudnitskii O. I.</b> About one property of basic invariants of unitary group $W(K_5)$	85
<b>Ternovskiy V. A.</b> Closedness of basis surfaces invariant with respect to the group $H_3$ .....	96
Abstracts .....	103
Authors .....	107

УДК: 004.89; 519.854.2

MSC2010: 90C27

## СПЕЦИФИКА ПОСТРОЕНИЯ МНОГОАГЕНТНЫХ МАРШРУТОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЯХ

© М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров, Л. И. Руденко

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *kozlovamg@cfuv.ru, art-inf@yandex.ru, fantom2.00@mail.ru, domlir@yandex.ru*

### SPECIFICS OF BUILDING MULTI-AGENT ROUTES IN HIERARCHICAL NETWORKS.

**Kozlova M. G., Lukianenko V. A., Makarov O. O., Rudenko L. I.**

**Abstract.** The article discusses applied models of multi-agent routing, taking into account the specifics of the organization of the network structure, the goals of the system and the local goals of agents. The class of problems of multiple traveling salesmen (mTSP) of different levels of hierarchical clustering (HCmTSP) is singled out. The construction of HCmTSP routes is consistent with the natural clustering of a complex infrastructure network. An overview of problems, methods and algorithms based on various heuristics is given. The hierarchical clustering of the network is distinguished. It is shown that, depending on the logistical goals, a different type of clustering consistent with mTSP should be chosen.

It is shown that the task of constructing multi-agent mTSP routes in complex networks with a hierarchical vertex structure has numerous applications. For example, it is necessary to deliver goods from a certain center to regional centers, where they will be overloaded and delivered to consumers in the shortest time or at the lowest cost. It combines cluster traversal tasks (cluster traveling salesman task) and local traveling salesman tasks on each cluster. Other models are associated with the use of unmanned aerial vehicles – drones (UAVs) in the tasks of monitoring infrastructure networks. The original network is matched with a simpler flyby network and the original task of many traveling salesmen (mTSP) is simplified. Modern information approaches lead to new formulations of multi-agent routing tasks in social networks with a hierarchical structure of user communities.

To study hierarchical mTSP, modern approaches based on exact and approximate algorithms are used, using heuristics, metaheuristics, genetic algorithms and a neural network approach, intellectualized big data processing. The task of developing hierarchical routing algorithms for many agents in infrastructure networks is associated with: description of hierarchical clustering algorithms and their application to routing tasks; coordination of hierarchical clustering with the task of building routes on clusters; construction of hierarchical routing algorithms combining cluster traversal and construction of traveling salesman-type routes on clusters.

The hierarchical mTSP structure is distinguished with a set of clusters of the lower level of the hierarchy, several bases (warehouses for transshipment of goods) and a base (vertex) of the highest level. It is shown that when developing HCmTSP algorithms, clustering consistent with the traveling salesman's task is significantly used. Having analyzed the clustering efficiency based on the decomposition of the original problem, clustering algorithms consistent with TSP are proposed. Depending on one or many separation centers, their hierarchy, the structure of the network as a whole, it is necessary to choose the appropriate clustering.

The article provides an overview of sources and a description of methods for solving mTSP based on clustering. The formulation of the problem is concretized and the results of a numerical experiment confirming the theoretical positions are presented. The results of a computational experiment on clustering types and routes are compared. Preference is given to hierarchical clustering consistent with the HCmTSP route hierarchy.

**Keywords:** *traveling salesman problem, multiple traveling salesman problem, hierarchical clustering, algorithm for solving the multiple traveling salesman problems*

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы связана с большим числом прикладных задач построения многоагентных маршрутов в сложно организованных сетях [1-6]. Например, из некоторого центра необходимо доставить товар в региональные центры, где они будут перегружены и доставлены потребителям за наименьшее время или с минимальной стоимостью. Здесь сочетаются задачи обхода кластеров (кластерная задача коммивояжера) и локальные задачи коммивояжеров на каждом кластере. Другие модели связаны с применением в задачах мониторинга инфраструктурных сетей беспилотных летательных аппаратов – дронов (БПЛА). Исходной сети ставится в соответствие более простая сеть облета и упрощается исходная задача многих коммивояжеров (Multiple Travelling Salesman Problem, mTSP). Современные информационные подходы приводят к новым постановкам задач многоагентной маршрутизации в социальных сетях [7].

Для исследования иерархических mTSP применяются современные подходы, основанные на точных и приближенных алгоритмах, с использованием эвристик, метаэвристик, генетических алгоритмов и нейросетевого подхода, интеллектуализированной обработки больших данных.

Задача разработки алгоритмов иерархической маршрутизации многих агентов в инфраструктурных сетях связывается с:

1) описанием алгоритмов иерархической кластеризации и их применением к задачам маршрутизации,

2) согласованием иерархической кластеризации с задачей построения маршрутов на кластерах,

3) построением алгоритмов иерархической маршрутизации, сочетающий обход кластеров и построение маршрутов типа коммивояжеров на кластерах.

Дальнейшее изложение, в основном, является продолжением работ [1-6].

В статье приводится обзор источников и описание методов решения mTSP, основанных на кластеризации. Далее конкретизируется постановка задачи и приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающего теоретические положения.

## 1. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ

**1.1. Задача коммивояжера.** Задачи коммивояжера (Travelling Salesman Problem, TSP) и многоагентная TSP (mTSP) хорошо известны в литературе и являются NP-трудными [9]. Впервые для численного решения TSP был предложен алгоритм Данцига, Фалкерсона и Джонсона, где использовался метод ветвей и границ (МВГ), с помощью которого было обнаружено, что среднее время вычисления слишком велико, чтобы МВГ можно было применять в реальных задачах TSP. Поэтому TSP решалась с помощью различных метаэвристик, таких как колонии муравьев АСО, имитация отжига RS, генетические алгоритмы GA и другие. Новые алгоритмы продолжают появляться, и их интересно использовать в классических задачах и различных обобщениях mTSP.

Задача коммивояжера может быть формально определена следующим образом. Пусть заданы сеть  $S = (V, U, C)$ , граф  $G = (V, U)$ , где  $V$  — множество узлов,  $U$  — множество дуг, а  $C = [c_{ij}]$  — матрица затрат, где задана стоимость  $c_{ij}$  прохождения дуги  $(i, j)$  от узла  $i$  до узла  $j$ . Требуется найти гамильтоновский цикл в  $G$  минимальной стоимости, который проходит через каждый узел  $i$  ровно один раз.

С точки зрения комбинаторной оптимизации, TSP — это задача перестановки вершин, цель которой найти путь меньшей длины или минимальной стоимости в неориентированном графе. Путь начинается с выбранного узла, посещаются все узлы один за другим, чтобы в итоге вернуться к исходному узлу. Таким образом, должны формироваться маршруты, в которых и не допускается никаких подпутьей.

Приведем формальную модель TSP. Обозначим:  $n$  — количество узлов в графе;  $u_i$  — положение  $i$ -го города на пути решения;  $D$  — матрица расстояний;  $d_{ij}$  — вес ребра от  $i$ -го узла до  $j$ -го узла; значения расстояний являются неотрицательными значениями;  $X$  — матрица смежности цикла Гамильтона;  $x_{ij} = 1$  при наличии направленного ребра на пути от  $i$ -го узла к  $j$ -му узлу; в противном случае  $x_{ij} = 0$ .

Целевой функцией оптимизации траектории является:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

каждый узел имеет только одно входящее ребро:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j (i \neq j),$$

каждый узел имеет только одно исходящее ребро:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i (i \neq j),$$

существует только один тур, охватывающий все города:

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1.$$

В случае задачи mTSP должно быть сгенерировано более одного цикла (каждый агент имеет отдельный цикл), и каждый узел посещается только одним агентом. Для mTSP формальная модель должна быть расширена следующими элементами:  $m$  — количество коммивояжеров; ограничения на узел (начало и конец):

$$\sum_{i=1}^n x_{i0} = m, \quad \sum_{j=1}^n x_{0j} = m.$$

Известно, что задача TSP может быть решена с помощью целочисленного программирования (методом ветвей и границ, динамического программирования) для малых размерностей сети  $G$ . Для симметричной матрицы разработаны алгоритмы ветвления и разрезов. Поиск оптимальных решений задачи TSP большой размерности с симметричной матрицей с использованием метода ветвей и границ требует больших вычислительных затрат или вообще невозможен. Задача TSP является NP-полной и считается одной из самых серьезных, несмотря на множество различных методов решения.

Алгоритм TSP может быть применен для решения многих различных задач таких, как

- планирование оптимального маршрута транспортировки, как для доставки, так и для сбора;
- эвристическое решение задачи оптимизации рюкзака;
- планирование оптимальной последовательности работ и др.

В литературе выделяют следующие варианты задачи TSP:

- классическая задача TSP: одно депо и один агент-коммивояжер;
- многоагентная задача коммивояжера (mTSP): одно депо и много агентов;
- Multi Depot multiple Traveling Salesman Problem (MDmTSP): несколько складов (депо) и множество агентов; каждый агент приписан к одному складу (депо).

Задача коммивояжера — это NP-трудная задача, то есть она, по крайней мере, так же сложна, как и самые трудные задачи NP. Сложность алгоритма перебора является  $O(N!)$ , где  $N = |V|$ . Поэтому для нахождения аппроксимации глобального оптимума используются некоторые эвристики. Из семейства популярных эволюционных алгоритмов выделяют следующие методы, которые наиболее широко используются для нахождения приближения к оптимальному маршруту:

- генетический алгоритм: набор векторов параметров оптимизируется с использованием операторы селекции, скрещивания и мутации;
- оптимизация роя частиц: генерируется много агентов нижнего уровня, которые перемещаются случайно, но найденный ими оптимум подкрепляется другими членами колонии;
- оптимизация муравьиной колонии: генерируется много агентов, которые сотрудничают друг с другом, общаются друг с другом и со своим окружением;
- табу-поиск: фаза локального поиска расширяется запретами, используются (табу) правила, позволяющие избежать ненужных позиционных тестов.

Рассматривая стандартные эвристические алгоритмы, можно выделить следующие алгоритмы:

- алгоритм ближайшего соседа: выбирается ближайший не посещаемый узел в качестве следующего узла маршрута (может быть далек от оптимального),
- попарный обмен ребрами: два ребра удаляются из маршрута и два новых ребра включены в маршрут, чтобы снизить общую стоимость.

Во многих реальных приложениях узлы соответствуют точкам в пространстве, где веса соответствуют расстояниям между этими узлами. Рассмотрим задачу, когда узлы представляют точки в евклидовом пространстве. Предполагаем, что всегда существует связь между любыми парами узлов внутри графа (граф полный). Рассматривая TSP с узлами в евклидовом пространстве, можно заметить, что оптимальный маршрут обычно соединяет соседние узлы, т. е. соседние узлы находятся рядом друг с другом и в оптимальном маршруте нет пересечений ребер.

Все методы, используемые для решения TSP, имеют ограничения на время вычисления. В работе рассматриваются решения задач маршрутизации со многими различного уровня узлами (вершинами сети) и многими агентами. Многоагентные TSP

остаются предметом текущих исследований, на TSP можно пробовать проверять новые различные эвристические стратегии. Существуют различные приложения в задачах с большим количеством вершин (узлов). Например, задача доставки заказов, формулировка которой мотивирована проблемой комплектования заказов на складах, где продукты одного и того же типа хранятся на разных складах или в разных местах на одном и том же складе. Кроме того, различные постановки задачи могут быть преобразованы в TSP с большим количеством вершин (узлов), например, проблема маршрутизации транспортных средств или проблема составления расписания работы магазинов. В последнем случае проблема с  $n$  рабочими местами и  $m$  машинами — это TSP с  $n \cdot m$  вершинами.

С другой стороны, для решения задач с большим числом вершин можно использовать различные методы кластеризации, основанные на прототипах, центрах, компонентах графа и плотностях. В некоторых источниках находится решение TSP с помощью кластеров, например, в [10] предложен подход названный Clustered Traveling Salesman Problem (CTSP, кластерная задача коммивояжера). Широко представлены исследования решения задачи TSP с использованием колонией муравьев, имитацией отжига и генетическими алгоритмами. Некоторые авторы считают, что наилучшие результаты были получены с помощью генетических алгоритмов, что верно только для выделенного класса задач.

Из-за высокой сложности TSP не существует алгоритма глобальной точной оптимизации с полиномиальной сложностью. Например, алгоритм Хельда-Карпа решает задачу с  $O(4n^2)$  сложностью. Для того чтобы обеспечить приемлемое решение реальных задач TSP, обычно решаются с помощью некоторой близкой полиномиально разрешимой эвристической задачи оптимизации.

Представляет интерес решение CTSP, применяющее комбинацию эвристики в алгоритме NEH (предложен в [11]) и модификацию метаэвристического локального поиска с многократным перезапуском MRSILS [12].

Алгоритмы, основанные на кластеризации, более эффективны, чем генетические алгоритмы. Выбор алгоритмов кластеризации отвечает цели работы и поставленным задачам. От типа кластеризации зависит решение mTSP с одним или несколькими депо, особенно в случае иерархической структуры вершин и их специализации.

Прежде чем решать задачу mTSP на сети  $S$  с различной иерархической структурой вершин, рассмотрим типичные ситуации. Часть вершин  $D \subset V \subset S$  являются складами (депо), а остальные — простыми вершинами.

Пусть заданы вершины верхнего уровня  $D_1 \subset D$  и нижнего уровня  $D_2 \subset D$ ,  $D_1 \cup D_2 = D$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . Например, из вершин  $D_1$  доставляется ресурс в вершины  $D_2$ ,



откуда он перераспределяется по остальным узлам  $V_1 \subset V$ ,  $D_1 \cup D_2 \cup V_1 = V$  каким-то количеством агентов-коммивояжеров. При этом все узлы и их специфика могут быть заданы и требуется только распределить вершины  $V_1$  между агентами для построения каждым из них замкнутого маршрута TSP так, чтобы общий вес маршрутов был минимальным. Возможна задача синтеза иерархической структуры сети с поиском иерархии вершин, обеспечивающей наилучшее решение mTSP. Представляет интерес вариант, который предполагает построение одного замкнутого маршрута по всем вершинам сети  $S$  ( $D = 0$ ) с помощью  $m$  агентов-коммивояжеров.

Реальные задачи приводят к различным постановкам, не укладывающимся в рассмотренные варианты. Может ставиться задача об определении количества различного типа коммивояжеров, например, большегрузные средства передвижения (СП) обеспечивают доставку грузов на узлы нижнего уровня, где они перегружаются на СП меньшей грузоподъемности и доставляются потребителям по кольцевым (или радиальным) маршрутам на выделенных узлах (кластерах).

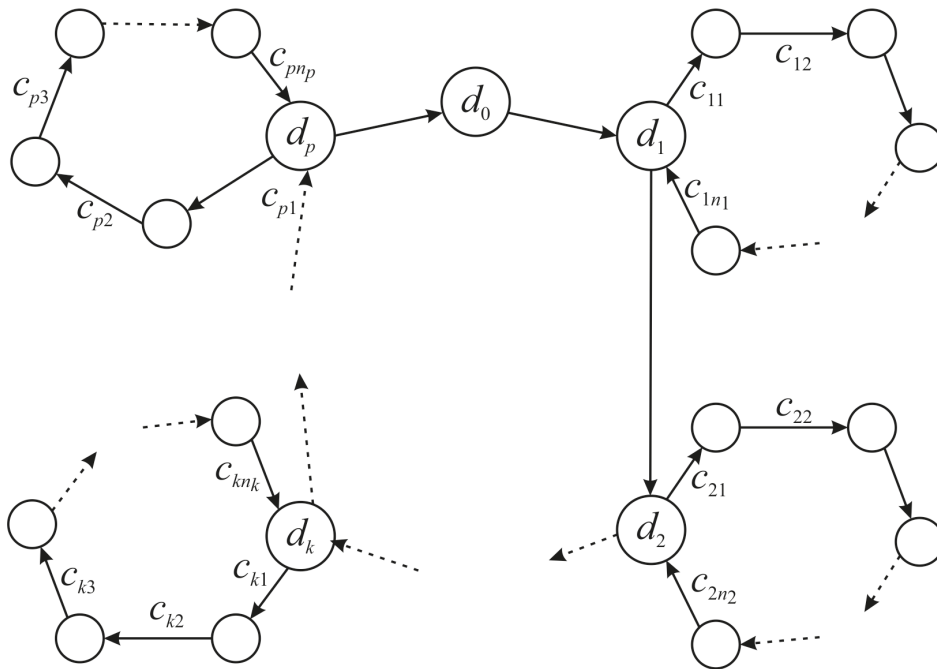


Рис. 1. Иерархия маршрутов: обход кластеров и баз

Для снижения сложности решения mTSP рассмотренным вариантам маршрутизации соответствуют схемы включения этапа кластеризации с учетом специфики вершин (узлов). В целом соответствующие алгоритмы являются эвристическими и требуют анализа их эффективности для конкретного варианта иерархической кластеризации mTSP (НСmTSP).

**А.** Кластерное построение глобального маршрута TSP:

1. Кластеризация узлов на непересекающиеся группы.
2. Вычисление центров кластеров, уточнение кластера.
3. Переход на вершину локального кластера для определения маршрута TSP на локальном кластере.
4. Определение вершин ввода и вывода из кластеров.
5. Объединение маршрутов внутреннего уровня в глобальный маршрут на основе обхода кластеров.

**В.** Кластеризация с определением ближайшего соседа для каждого TSP:

1. Кластеризация узлов на непересекающиеся группы (нет ограничений на количество групп).
2. Вычисление центров кластеров и уточнение кластеров.
3. Определение ближайшего соседа TSP на множестве кластеров для построения межкластерных маршрутов.
4. Определение вершин ввода и вывода из кластеров.
5. Определение внутреннего уровня маршрутов TSP.
6. Объединение маршрутов внутреннего уровня в глобальный маршрут.

**С.** Кластерное построение иерархии TSP для mTSP:

1. Задание выделенной вершины (депо, склад).
2. Кластеризация узлов в непересекающиеся группы ( $m$  — количество агентов).
3. Расширение каждого кластера с помощью выделенного элемента (депо).
4. Переход на выделенные вершины для каждого кластера для определения локальных маршрутов для каждого агента.
5. Построение иерархических маршрутов.

**Д.** Кластерная иерархическая маршрутизация для MDmTSP:

1. Задание выделенных вершин  $D$  (склады, депо).
2. Кластеризация узлов в непересекающиеся группы ( $m$  — количество агентов).
3. Расширение каждого кластера с помощью ближайшего элемента депо (из  $D$ ).
4. Переход на вершины TSP для каждого кластера для определения локальных маршрутов для каждого агента.
5. Обход баз (складов, депо).

На рисунке 2 представлен возможный вариант для MDmTSP.

В случае вариантов TSP со многими депо, депо может быть закреплено заранее или расположено на любых узлах.

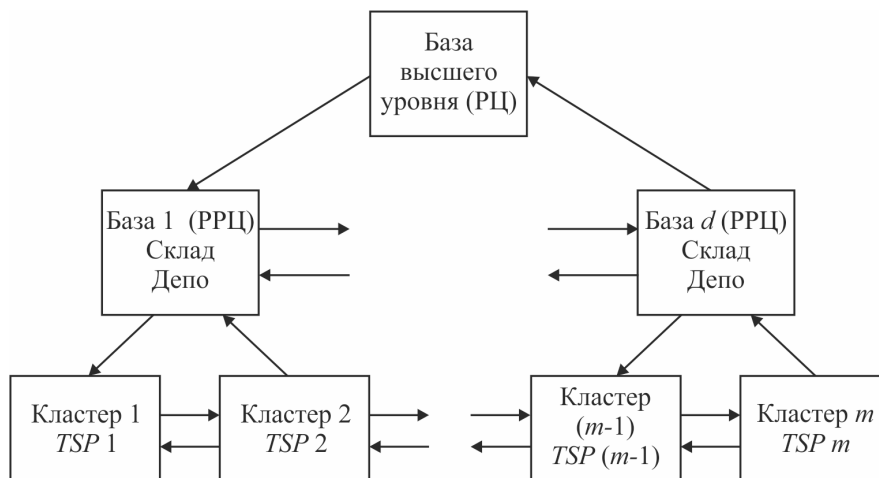


Рис. 2. Иерархическая mTSP с  $m$  кластерами,  $d$  базами (складами перевалки) и базой высшего уровня (РЦ — распределительный центр, РРЦ — региональный РЦ)

**1.2. Методы кластеризации.** Как отмечалось выше, чтобы справиться со сложностью задачи TSP, широко применяются метаэвристики: задача решается с помощью муравьиных колоний, метода Монте-Карло; различных версий генетического алгоритма (GA). Однако, нужно отметить, что до сих пор не найдены методы или техники, которые обеспечивали бы нахождение оптимального решения за полиномиальное время. Современные тенденции в решении проблем TSP включают в себя методы кластеризации и решение TSP отдельно на каждом кластере. Приведем характерные подходы.

Чтобы понизить сложность решения задачи TSP в работе [13], обсуждаются методы, основанные на идеях и методах кластеризации, в них показаны этапы процесса кластеризации и обсуждаются некоторые важные концепции, связанные с данными о классе задач и характеристиками отбора и эволюции кластера. Результаты, полученные в работе [13], показывают, что методы кластеризации можно разделить на следующие группы: на основе расстояний, плотностей, моделей, на изображениях, спектрах, иерархиях и методах, используемых в интеллектуальном анализе данных. Для выбора решения авторы [14] провели исследование в области генетики, где изучался поиск из тысячи генов одновременно с использованием технологии микрочипов. Авторами [14] предложено использовать несколько алгоритмов кластеризации; в целом подход представляет собой автоматический алгоритм, обеспечивающий сильную глобальную сходимость к оптимальному решению. М. Н. Данильченко и А. Б. Муравник [15] предложили нейросетевой подход с использованием функционала Ляпунова.

В работе [16] описан подход, согласованный с кластерным графом. Утверждается, что решение, полученное этим методом, близко к оптимальному.

Кластеризация приводит к разбиению элементов, где сходные объекты принадлежат одной и той же группе, в то время как несходные объекты должны быть отнесены к разным группам. Входные данные могут быть представлены различными способами. Один из вариантов — использовать векторы атрибутов для описания объектов, в которых сходство вычисляется по значениям атрибутов. Другой вариант — определить матрицу подобия объектов напрямую. Элементы с высоким сходством должны быть отнесены к одному и тому же кластеру. Самостоятельного решения требует задача выделения метрики для определения сходства (близости элементов). Существует несколько типов методов кластеризации: методы секционирования, иерархические методы, методы, основанные на плотности.

В случае методов секционирования (агломеративная кластеризация) на каждой итерации генерируется новое секционирование. При первоначальном разбиении качество улучшается за счет перераспределения элементов по разным кластерам. Повторная итерация завершается, если значение показателя улучшения становится ниже порогового значения. Алгоритм *k-means* является широко используемым методом кластеризации на основе секционирования.

В методах иерархической кластеризации применяется некоторое экстремальное разбиение (например, каждый элемент является отдельным кластером). На каждом шаге итерации текущее разбиение будет уточняться или будет более грубым. В [17] приведен пример такой группы алгоритмов. В случае кластеризации на основе плотности вычисляется значение плотности элементов выделенной группы вершин. Кластеры определяются как максимально связанные плотные области. Что касается качества, то выбранный алгоритм разбиения должен удовлетворять следующим свойствам [18]: масштабируемость, поддержка произвольной формы кластера, обнаружение посторонних (шумовых) элементов, эффективность для областей элементов высокой размерности.

Кластеризация *k-means* разбивает элементы на фиксированное количество кластеров. Количество кластеров задается пользователями в качестве входного параметра. Первоначально центры кластеров задаются случайным образом. На каждом шаге итерации:

- элементы назначаются ближайшему центру;
- для каждого кластера вычисляется новая центральная точка;
- если старый и новый центры находятся в пределах порогового расстояния, итерация завершается.

Существует два основных подхода к методам иерархической кластеризации. Первый подход использует агломеративную концепцию построения снизу вверх, в то время как второй подход основан на разделяющем алгоритме сверху вниз. В случае агломеративного метода каждый элемент изначально представляет собой отдельный кластер. В итерационных циклах два кластера, имеющие наибольшее сходство, объединяются в новый единый кластер. Метод НАС (Hierarchical Agglomerative Cluster) является наиболее широко используемым методом иерархической кластеризации [17], где кластеры объединяются жадным способом. Могут быть заданы два различных условия завершения: минимальное количество кластеров или минимальное сходство для слияния. Следующие методы являются основными методами измерения сходства двух кластеров.

Метод одиночной привязки: расстояние между двумя кластерами  $c_1, c_2$  равно расстоянию между двумя ближайшими точками

$$d(c_1, c_2) = \min_{x \in c_1, y \in c_2} d(x, y).$$

Метод полного сцепления: расстояние между двумя кластерами равно расстоянию между двумя самыми дальними точками:

$$d(c_1, c_2) = \max_{x \in c_1, y \in c_2} d(x, y).$$

Метод центроидной связи: расстояние между двумя кластерами равно расстоянию между двумя центральными точками:

$$d(c_1, c_2) = d(x_{c_1}, x_{c_2}),$$

где  $x_{c_1}, x_{c_2}$  — центры тяжести кластеров  $c_1, c_2$ .

Метод средней связи: расстояние между двумя кластерами равно среднему расстоянию, связанному с любыми возможными парами точек:

$$d(c_1, c_2) = \frac{1}{|c_1| |c_2|} \sum_{x \in c_1, y \in c_2} d(x, y).$$

Расширение применения метаэвристик этапом кластеризации позволяет разложить проблемную область на множество областей меньшей размерности.

Декомпозицию также можно осуществлять с помощью подхода построения максимального разреза при решении задачи оптимизации TSP [8]. Проанализировав эффективность кластеризации на основе декомпозиции, предлагается применять алгоритмы кластеризации, согласованные с TSP.

**1.3. Кластеризация, согласованная с задачей коммивояжера.** Для решения задачи TSP на кластере использовались различные методы и приемы, например, алгоритм Lin-Kernighan, предложенный в [19]. Кластерный генетический алгоритм CAG представлен в работе [9]. Авторы [20] отмечают, что с помощью CAG удается найти оптимальное решение за меньшее время, чем стандартным GA (алгоритм SGA). Также в [20] описан неконтролируемый механизм обучения, используемый для группировки похожих объектов в кластеры, гарантируя, что, несмотря на различные доступные методы кластеризации, существует общая стратегия, которая работает одинаково для разных задач. Однако напрашивается вывод, что лучше использовать простые механизмы. В работе [21] авторы предложили метод иерархической кластеризации, очень похожий на CTSP, в котором используется стратегия постепенного группирования объектов и построения структуры классификации, называемой дендрограммой. Тем не менее, качество получаемых кластеров ненадежно. Для преодоления этой проблемы применяется глобальная оптимальная стратегия построения дендрограммы, которая заключается в нахождении оптимального кругового маршрута, который минимизирует общее расстояние для посещения всех объектов вдоль ветвей дендрограммы. Построенный маршрут моделирует TSP и решает задачу с использованием метода переменной поиска в окрестности. Когда моделируется кластерная дендрограмма, она основана на информации, определяемой заявками. Эксперименты показывают, что качество такого метода кластеризации превосходит традиционные методы.

Авторы [22] привели обзор методов кластеризации, которые могут быть использованы для обработки пространственных и временных шаблонов в большом объеме данных. Они используют 55 городов для применения методов обнаружения. Этот подход позволяет наблюдать существование различных пространственных и временных кластеров. Авторы [23] реализовали алгоритмы кластеризации для методов, используемых в интеллектуальном анализе данных, что позволяет анализировать наборы данных, используя алгоритм *k-means* для вычисления значения стоимости на основе евклидова расстояния, подобного TSP.

В [24] предложено использовать алгоритм *k-means* для решения задачи поступления данных с несколькими кластерами, генерируемыми динамически и без повторения, что сокращает время вычислений, обеспечивая более точные результаты. Поэтому первоначальная группировка выполняется на основе статистических данных с использованием *k-means*. Затем следующие точки, наибольшее расстояние между центром тяжести и самой дальней точкой используется для определения следующей точки, которая находится в кластере, повторяя процесс для охвата всех данных.

Исходя из упомянутых выше работ, можно сделать вывод о возможности использования различных эвристик, которые позволяют решать TSP эффективно.

Например, авторы [11] разработали эвристику NEH (первые буквы имен авторов), которая предназначена для решения проблемы планирования работы магазина. Авторы [25] улучшили этот алгоритм с помощью двух подходов. Во-первых, для сокращения времени вычисления разработаны и вводятся некоторые уточнения в алгоритм NEH. Во-вторых, правила тайм-брейка применяются для получения хороших решений. Представленные результаты моделирования показывают, что эти два подхода улучшают результаты, полученные в алгоритме NEH.

В [26] также предложен эвристический метод решения CTSP, который является обобщением TSP, где множество узлов делится на кластеры с целью нахождения минимальной стоимости гамильтонова цикла. Авторы [26] предложили алгоритм ILS решения CTSP, в котором генерируются случайные потомки итерационным локальным поиском. Полученное время вычисления подтверждает, что эвристические методы являются конкурентоспособными при параллельном использовании программного обеспечения.

Авторы [27] утверждают, что алгоритм ILS является одним из самых популярных, использующих простую эвристику. Алгоритм ILS признается многими авторами относительно простым, а также имеющим структуру, приспособленную для решения задач комбинаторной оптимизации. Алгоритм ILS успешно применяется для обеспечения практически оптимальных решений различных задач логистики, транспортировки, производства и т. д. Так как ILS разработан для решения проблем в детерминированных сценариях, поэтому он не отражает фактическую стохастическую природу реальных систем.

Эксперименты показывают, что новые модификации алгоритмов дают несколько лучшие результаты, чем их прототипы. Таким образом, можно рассмотреть применение различных эвристик к кластерной задаче mTSP.

Рассмотрим двухэтапный метод планирования маршрутов многих коммивояжеров с кластеризацией вершин. На первом этапе вершины разбиваются на непересекающиеся кластеры. Для каждого кластера генерируется локальный оптимальный маршрут. На втором этапе эти локальные маршруты объединяются в глобальный маршрут. Затем глобальный маршрут уточняется с использованием некоторых стандартных эвристических методов. Различные вершины группируются в непересекающиеся группы, где группа содержит похожие вершины (близкие) (см. рис. 1).

Сходство двух узлов измеряется значением расстояния между соответствующими позициями в евклидовом пространстве. Чтобы объединить локальные маршруты в

глобальный маршрут, оптимальный маршрут обхода кластеров и оптимальные ребра из соединения должны быть определены в отдельном модуле оптимизации. В задаче с несколькими коммивояжерами также используется метод кластеризации для определения набора узлов, соответствующих одному и тому же коммивояжеру. Каждый агент должен посетить города одного и того же кластера.

Эффективность двухэтапного метода TSP проверяется с помощью простых эвристических алгоритмов оптимизации TSP.

Целесообразно использовать следующие эвристики: алгоритм перебора снизу-вверх; алгоритм ближайшего соседа и алгоритм ближайшей вставки. Наличие заданного параметра помеченной вершины  $p_0$  в алгоритме перебора снизу-вверх оцениваются некоторые соседние позиции и выбирается позиция с наилучшим коэффициентом улучшения. Эта выбранная позиция будет следующей помеченной позицией. Алгоритм завершается, если не найдено соседней позиции с лучшим значением пригодности. Чтобы избежать слабых локальных оптимальных позиций, к базовому алгоритму добавляется некоторый механизм случайного перемещения. В этом случае генерируется и обрабатывается несколько начальных позиций.

Операции переключения 2-opt и 3-opt являются наиболее широко используемыми методами генерации соседних позиций. Метод 2-opt выбирает два случайных ребра из помеченного маршрута и заменяет их двумя новыми соответствующими маршрутами. Например, имея маршрут  $A \rightarrow a \rightarrow B \rightarrow b$  с двумя выбранными ребрами  $a$  и  $b$ , соседний маршрут задается с помощью  $A \rightarrow a \rightarrow B' \rightarrow b$ , где  $B'$  обозначает обратный обход  $B$ . Переключатель 3-opt выбирает 3 ребра и заменяет их 3 новыми ребрами, чтобы получить соседний маршрут.

В случае ближайшего соседа алгоритм использует простой и иногда эффективный метод генерации оптимального маршрута. Алгоритм начинается с помеченного узла, выбранного случайным образом. На следующем шаге метод оценивает все свободные узлы и выбирает ближайший к помеченному узлу. Этот узел будет следующим элементом маршрута. Затем алгоритм обрабатывает этот узел как новый помеченный узел. Этот жадный алгоритм завершается, если все узлы объединены в маршрут.

В случае mTSP вариант алгоритма ближайшего соседа разбивает узлы на непесекающиеся группы (кластеры), принадлежащие разным агентам. Самый простой способ выполнить разбиение — установить порог размера для отдельных маршрутов. В задаче с временными окнами порог задается с помощью ограничения времени агента на маршруте. Это ограничение означает, что жадный алгоритм, представленный ранее, завершается, если количество узлов или длины маршрутов равны. После



завершения локального маршрута метод начинает создавать локальный маршрут для следующего агента. Еще одна особенность этого алгоритма заключается в том, что каждый локальный маршрут начинается с узла, выбранного случайным образом. Кроме того, метод ближайшей вставки строит маршрут по инкрементному пути. Имея текущий маршрут, алгоритм оценивает все свободные узлы и вычисляет минимальное увеличение длины, связанное с вставкой выбранного узла. В отличие от метода ближайшего соседа, выбранный узел может быть вставлен в любую позицию текущего маршрута. В маршрут вставляется свободный узел с наилучшим минимальным увеличением длины. В случае mTSP метод изначально запускает генерацию локального маршрута для каждого агента.

В следующем разделе для кластеризации, согласованной с иерархией mTSP, и реализации используются алгоритмы *k-means* и метод разделения вершин по кругу с выбором центра кластера (центр масс).

## 2. ОПИСАНИЕ, ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ

**2.1. Выбор алгоритмов кластеризации для mTSP.** Задача коммивояжера может быть определена как на неориентированном графе, если он симметричен, так и на ориентированном графе.

В сети  $S = (V, U, C)$  с графом  $G = (V, U)$  множество  $V = \{1, \dots, n\}$  представляет собой множество вершин или узлов,  $U = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$  — набор неориентированных или направленных дуг.  $C = \{c_{ij}\}$  — матрица затрат, определенная на  $U$ . Предположим, что все  $c_{ij}$  матрицы удовлетворяют неравенству треугольника:  $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$  для всех  $i, j, k$ ; где вершины являются точками в плоскости  $P_i = (x_i, y_i)$ ; и  $c_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  — евклидово расстояние.

Заметим, что сопоставление исходной сети более простой сети с графом, для которого элементы матрицы  $C$  удовлетворяют неравенству треугольника, является одним из способов упрощения задачи. С таким же успехом может использоваться сеть из кратчайших расстояний между всеми вершинами исходной сети (полиномиальный по сложности этап). Этап проекции на исходную сеть  $S$  полученных решений на приведенных сетях осуществляется достаточно просто.

Неравенство треугольника выполняется, если  $c_{ij}$  — длина кратчайшего пути от  $i$  до  $j$  в  $S$ .

Авторы [28] определяют CTSP с учетом упорядочения кластеров для TSP, где коммивояжер начинает и заканчивает свое путешествие в определенном городе, должен посетить набор из  $n$  точек, разделенных на  $k$  кластеров. Последовательно точки

$k$ -го кластера посещаются до точек кластера  $k + 1$  для  $k = 1, 2, \dots, k - 1$  ищет минимальное общее расстояние перемещения (схемы **A-D** кластеризации раздела 1).

Пусть дан полный неориентированный граф  $G(U, V)$ , где предварительно установлено  $k + 1$  кластеров, обозначенных  $C_i \subseteq V$ , для каждого  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ . Предполагается, что  $C_i \cap C_j = \emptyset$  для всех  $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$ , а  $C_0$  обозначается как один узел  $0 \in V$  и может быть депо  $C_0 = 0$ . CTSP необходимо определить минимальное расстояние маршрута, начинающегося и заканчивающегося в одном и том же городе с посещение каждого узла, которые обозначаются как элементы из  $V$ . Для решения этой проблемы в [10] предложено использовать метод *k-means* для группировки в кластеры с помощью шагов, описанных ниже.

---

#### Алгоритм кластеризации

---

1. Выбрать целое значение для  $k$ .
  2. Выбрать произвольно  $k$  объектов (начальный набор из  $k$  центроидов).
  3. Назначить каждый из объектов кластеру, который находится ближе всего к центру тяжести.
  4. Пересчитать центроид  $k$  кластеров.
  5. Повторять шаги 3 и 4 до тех пор, пока центроиды больше не изменятся.
- 

Далее, аналогично работам М. С. Германчук, М. Г. Козловой, В. А. Лукьяненко и О. О. Макарова [1-3], предлагается использовать алгоритм *k-means* и пересчитать центроиды путем вычитания среднего арифметического координат  $X$  и  $Y$ , чтобы получить новый центроид и выполнять итерации до тех пор, пока центроиды больше не изменятся, что позволяет алгоритму быть более эффективным, используя среднее арифметическое вместо теста соответствия, который требует большего количества шагов.

В алгоритмах иерархической маршрутизации используется механизм расположения депо кластера-центра. Реализация алгоритмов должна обеспечивать следующие функции:

- генерация тестовых данных;
- ввод/вывод тестовых данных на уровне файлов;
- выполнение указанных стандартных эвристических методов;
- решение задач TSP, mTSP и MDmTSP;
- добавление кластерной оптимизации;
- представление результатов в графических форматах.

Далее описана процедура реализации алгоритмов mTSP для части схемы иерархической маршрутизации.

**2.2. Реализация алгоритмов mTSP с использованием кластеризации.** В разработке алгоритмов кластеризации сети для решения задачи mTSP использована библиотека *Scikit-learn* для Python [29], что позволяет проводить эксперименты для тестовых примеров из библиотек TSPLIB и SOLOMON. В результате проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что в зависимости от структуры сети, иерархичности задачи mTSP, наличия одного или нескольких депо, необходимо выбирать подходящий алгоритм кластеризации, согласованной с mTSP. В работах [1-3] по нахождению многоагентных маршрутов в чрезвычайных ситуациях для реальных данных Большой Ялты исходной городской инфраструктурной сети ставится в соответствие сеть в виде полного графа, для которого расстояние между вершинами находится по прямой. Проводится согласованная с mTSP кластеризация, а затем осуществляется проекция найденных маршрутов сети облета на реальную городскую сеть.

Приведем результаты кластеризации и построения маршрутов для сети библиотеки TSPLIB. Проведена кластеризация для 2, 3, 4, 5 агентов различными методами. Базовыми являются *k-means* и геометрическое распределение вершин, расположенных в круге по углу.

Выбор маршрутов на каждом кластере каждым агентом осуществляется с помощью жадных алгоритмов и уточнения с помощью локальных преобразований. Кластеры уточняются по результатам сравнения найденных маршрутов с помощью процедуры перебрасывания вершин из одного в другой кластер. На рисунке 3 проведена кластеризация для 2, 3, 4 и 5 агентов для различных типов кластеризации.

На рисунке 4 приведены построенные маршруты коммивояжеров для кластеризации соответствующей *k-means* и круговой, в которой центр масс соответствует депо.

Вычислительный эксперимент подтверждает необходимость согласованной с иерархической структурой сети кластеризации с целью существенного снижения времени решения mTSP. Грубая оценка для разбиения вершин сети на  $m$  кластеров равным количеством вершин в кластере в случае полного перебора даст  $O(n) \leq O\left(\frac{n!}{m}\right) < O(n!)$ . Например, для  $m = 10$ ,  $n = 100$  вершин  $O(n!) = 100!$ ,  $O\left(\frac{n!}{m}\right) = O(10!) \approx 10!$ . Понятно, что это некоторая идеализированная ситуация.

На рисунке 3 проведена кластеризация для 2, 3, 4 и 5 агентов для различных типов кластеризации.

На рисунке 4 приведены построенные маршруты коммивояжеров для кластеризации соответствующей *k-means* и круговой, в которой центр масс соответствует депо.

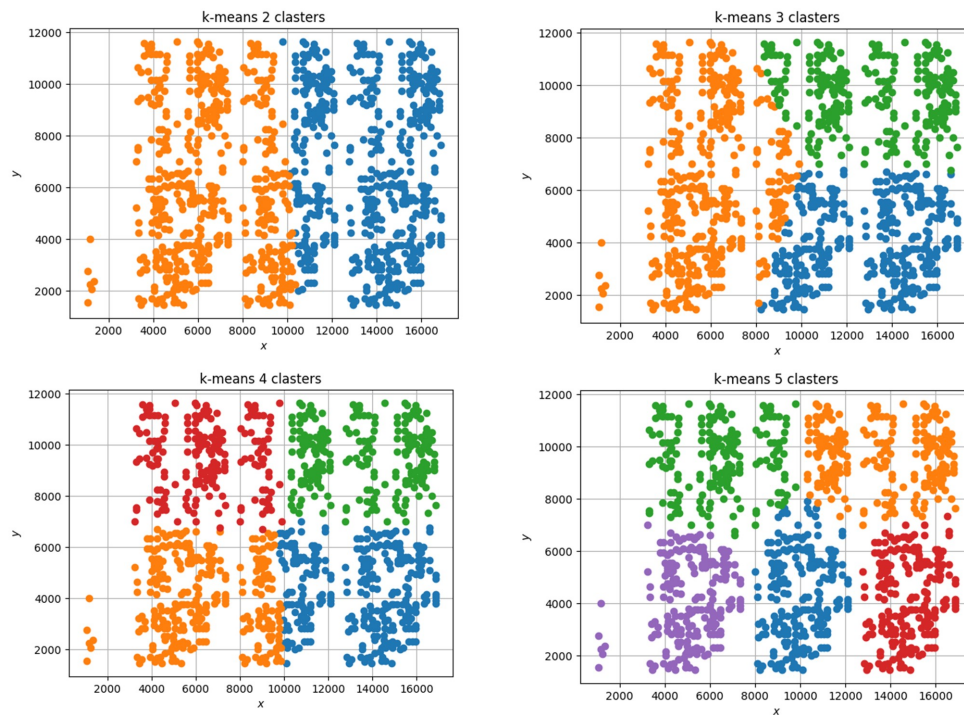


Рис. 3. Кластеризация для 2, 3, 4 и 5 агентов

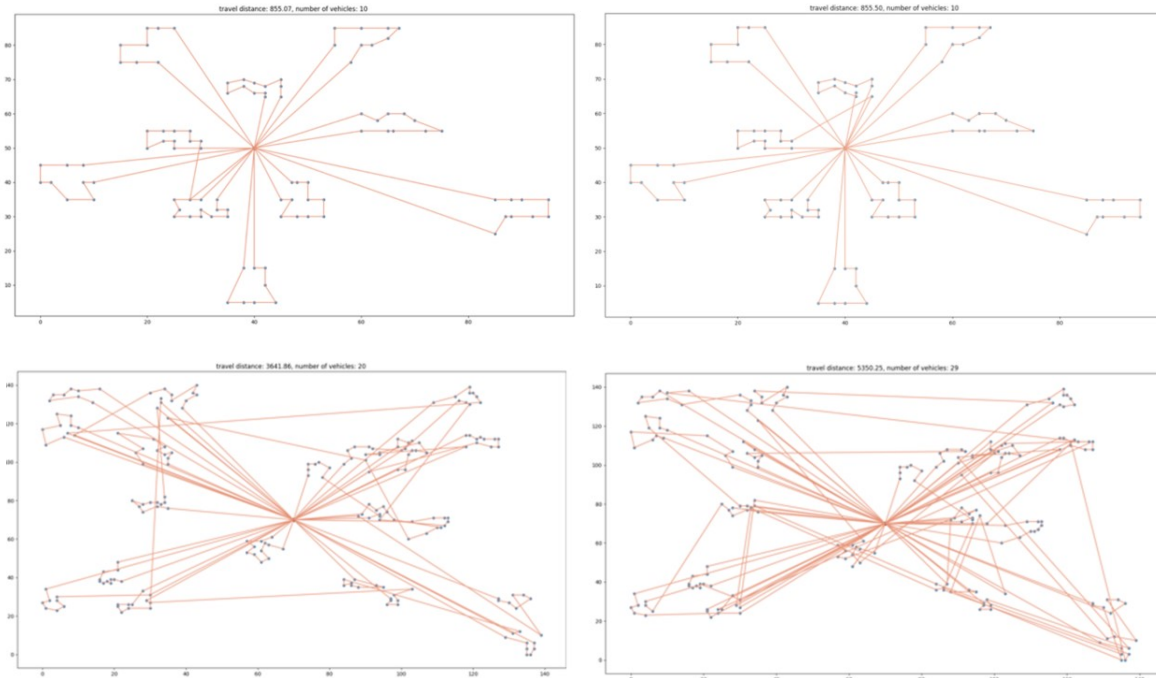


Рис. 4. Маршруты коммивояжеров для различных кластеризаций

Вычислительный эксперимент подтверждает необходимость согласованной с иерархической структурой сети кластеризации с целью существенного снижения времени решения mTSP. Грубая оценка для разбиения вершин сети на  $m$  кластеров равным количеством вершин в кластере в случае полного перебора даст  $O(n) \leq O\left(\frac{n!}{m!}\right) < O(n!)$ . Например, для  $m = 10$ ,  $n = 100$  вершин  $O(n!) = 100!$ ,  $O\left(\frac{n!}{m!}\right) = O(10!) \approx 10!$ . Понятно, что это некоторая идеализированная ситуация.

На практике в рассмотренных примерах время решения задачи для двух агентов в несколько раз превосходит время для 4 агентов. Таким образом, построение маршрута коммивояжера для сети большой размерности разумно использовать mTSP и у каждого агента может быть своя стратегия поиска маршрута на локальном кластере (применение роевых, генетических алгоритмов и др.). Объединение локальных маршрутов в один общий является самостоятельной задачей, решаемой с помощью эвристик за разумное время.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования В. А. Лукьяненко частично выполнены при поддержке гранта РФФИ № 20-58-S52006.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для задач TSP с большим количеством узлов многоуровневая оптимизация превосходит одноуровневую оптимизацию. В рассмотренной многоуровневой оптимизации множество узлов разбивается на кластеры или на иерархию кластеров. Для каждого кластера выполняется отдельная локальная оптимизация TSP, а затем локальные маршруты объединяются в глобальный маршрут. Процесс иерархической кластеризации может быть совмещен с поиском маршрутов коммивояжеров, уточнение маршрута при добавлении вершины в кластер может не приводить к сильному изменению построенного ранее маршрута. В случае устойчивости эффективны методы реоптимизации (постоптимальный анализ). По результатам тестовых экспериментов предложенный метод превосходит метод одноуровневой оптимизации как для задач TSP, так и для задач mTSP. Можно сделать вывод, что в зависимости от наличия одного или многих депо, структуры сети необходимо выбирать соответствующую кластеризацию. Для реальных задач учет всей имеющейся информации позволит разработать эффективный алгоритм для конкретной задачи или класса задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Германчук, М. С., Козлова, М. Г., Лукьяненко, В. А., Макаров, О. О. Задачи типа многих коммивояжеров в изменяющихся условиях // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020. — Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2020. — С. 241–245.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G., LUKIANENKO, V. A. & MAKAROV, O. O. (2020) Multiple traveling salesman problems under changing conditionsy. *KROMSH*. P. 241–245.

2. Германчук, М. С., Козлова, М. Г., Лукьяненко, В. А. Задачи маршрутизации в чрезвычайных условиях // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XIV Всероссийской с международным участием школы-симпозиума АМУР-2020, Симферополь-Судак, 14-27 сентября 2020 / ред. совет: А. В. Сигал (предс.) и др. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2020. — С. 98–107.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G., LUKIANENKO, V. A. & MAKAROV, O. O. (2020) Multiple traveling salesman problems under changing conditionsy. *AMUR*. P. 98–107.

3. Лукьяненко, В. А., Германчук, М. С., Макаров, О. О. Специфика задач маршрутизации в условиях локальных преобразований сети // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 20-й Всероссийской конференции с международным участием, г. Москва 2021 г. — М.: Российская академия наук, 2021. — С. 460–462.

LUKIANENKO, V. A., GERMANCHUK, M. S., MAKAROV, O. O. (2021) Specifics of Routing Problems in the Conditions of Local Network Transformations. *MMRO*. P. 460–462.

4. GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Pseudo-Boolean Conditional Optimization Models for a Class of Multiple Traveling Salesmen Problems. *Automation and Remote Control*. 10 (82). p. 1651–1667. DOI: 10.1134/S0005117921100040

5. GERMANCHUK, M. S. & LEMTYUZHNIKOVA, D. V. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Metaheuristic Algorithms for Multiagent Routing Problems. *Automation and Remote Control*. 10 (82). p. 1787–1801. DOI: 10.1134/S0005117921100155

6. Козлова, М. Г., Лукьяненко, В. А., Руденко, Л. И., Германчук, М. С. Использование технологий искусственного интеллекта в многоагентных задачах управления // Дистанционные образовательные технологии: сборник трудов VI Международной научно-практической конференции / отв. ред. В.Н. Таран. — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2021. — С. 251–255.  
KOZLOVA, M. G., LUKIANENKO, V. A., RUDENKO, L. I., & GERMANCHUK, M. S. (2021) The Use of Artificial Intelligence Technologies in Multi-agent Control Problems. *DLT*. P. 251–255.
7. GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Some features of design of intelligent systems for processing the internet memes flow. *CEUR Workshop Proceedings*. Vol. 2834. p. 148–158.
8. Козлова, М. Г., Германчук, М. С., Куртнебиев, Э. Д. Приближенные решения задач о максимальном разрезе и ее применения // Информатика та системні науки (ІСН-2013): матеріали IV Всеукр. науков.-практич. конф. (м. Полтава, 21–25 березня, 2013 р.) / за ред. О. О. Емця. — Полтава: ПУЭТ, 2013. — С. 150–153.  
KOZLOVA, M. G. & GERMANCHUK, M. S. & KURTNEBIEV, E. D. (2013) Approximate solutions of the maximum cut problem and its applications. *ICH*. P. 150–153.
9. CORMEN, T., LEISERSON, C. & RIVEST, R. (2009) Introduction to algorithms. *The MIT Press*. Cambridge, Massachusetts & London, England. p. 1292.
10. PHIENTHRAKUL, T. (2014) Clustering Evolutionary Computation for Solving Traveling Salesman Problem. *International Journal of Advanced Computer Science and Information Technology*. 3 (3). p. 243–262.
11. NAWAZ, M., ENSCORE, E. & HAM I. (1983) A heuristic algorithm for the m-Machine, n-Job flow-shop sequencing problem. *Omega-International Journal of Management Science*. 11. p. 91–95.
12. SECK, J. & GARCIA, L. & MEDINA, J. (2014) Improving a multi restart local search algorithm by permutation matrices and sorted work times for the flow shop scheduling problem. *World Comp Proceedings*. — URL: <http://worldcomp-proceedings.com/proc/p2014/GEM2351.pdf>
13. DUTTA, S. & BHATTACHARYA, S. (2015) A short review of clustering techniques. *International Journal of Advanced Research in Management and Social Sciences*. 4 (5). p. 132–139.

14. VIJAYALAKSHMI, S., JAYANAVITHRAA, C. & RAMYA, L. (2013) Gene Expression Data Analysis Using Automatic Spectral MEQPSO Clustering Algorithm. *International Journal of Advanced Research in Computer and Communication Engineering*. 2 (2). p. 1145–1148.
15. Данильченко, М. Н., Муравник, А. Б. Нейросетевой подход к построению маршрута в автоматизированной системе управления специального назначения // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. — 2021. — 13 (1). — С. 58–66. DOI: 10.36724/2409-5419-2021-13-1-58-66  
DANILCHENKO, M. N. & MURAVNIK, A. B. (2021) Neural network approach to building a route in an automated control system for special purposes. *H&ES Research*. P. 58–66.
16. WEIYA, R., GUOHUI, L. & DAN, T. (2014) Graph clustering by congruency approximation. *EIT Computer Vizion*. 9 (6). p. 841–849. DOI: 10.1049/iet-cvi.2014.0131
17. BALCAN, M.-F., LIANG, Y. & GUPTA, P. (2013) Robust Hierarchical Clustering. *COLT 2010 - The 23rd Conference on Learning Theory*. 15 (1). p. 4011–4051. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1401.0247>
18. SAITTA, S., RAPHAEL, B. & SMITH, I. F. C. (2007) Bounded Index for Cluster Validity. *Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition, 5th International Conference*. 4571. p. 174–187. DOI: 10.1007/978-3-540-73499-4\_14
19. KARAPETYAN, D. & GUTIN, G. (2011) Lin-Kernighan Heuristic Adaptations for the Generalized Traveling Salesman Problem. *European Journal of Operational Research*. 208 (3). p. 221–232. DOI: 10.1016/j.ejor.2010.08.011
20. SIVARAJ, R. & RAVICHANDRAN, T. & DEVI PRIYA, R. (2012) Solving Traveling Salesman Problem using Clustering Genetic Algorithm. *International Journal on Computer Science and Engineering*. 4 (7). p. 1310–1317.
21. TSAI, C. & CHIU, C. (2006) A VNS based Hierarchical Clustering Method. *CIMMACS'06: Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Computational Intelligence, Man-Machine Systems and Cybernetics*. p. 268–275.
22. NAGY, M. & NEGRU, D. (2014) Using clustering software for exploring spatial and temporal patterns in non-communicable diseases. *European Scientific Journal*. 10 (33). p. 37–47.



23. VISHNUPRIYA, N. & SAGAYARAJ, F. (2015) Data Clustering using MapReduce for Multidimensional Datasets. *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology*. 2 (8). p. 39–42. DOI 10.17148/IARJSET.2015.2810
24. NIDHI, S. (2015) A modified Approach for Incremental k-Means Clustering Algorithm. *International Journal of Engineering Development and Research*. 3 (2). p. 1081–1084.
25. LIU, G., SONG, S. & WU, C. (2012) Two Techniques to Improve the NEH Algorithm for Flow-Shop Scheduling Problems: Lecture Notes in Computer Science. *ICIC 2011, LNAI*. 6839. p. 41–48. DOI: 10.1007/978-3-642-25944-9\_6
26. MESTRIA, M. (2014) Heuristic methods using variable neighborhood random local search for the clustered traveling salesman problem. *Revista Produção Online*. 14 (4). p. 1511–1536. DOI:10.14488/1676-1901.v14i4.1721
27. GRASAS, A., JUAN, A. & LORENZO, H. (2016) SimILS: a simulation-based extension of the iterated local search metaheuristic for stochastic combinatorial optimization. *Journal of Simulation*. 10 (1). p. 69–77. DOI: <https://doi.org/10.1057/jos.2014.25>
28. ANIL, S., BRAMEL, J. & HERTZ, A. (1999) A 5/3 approximation algorithm for the clustered traveling salesman tour and path problems. *Operation Research*. 24. p. 29–35. DOI:10.1016/S0167-6377(98)00046-7
29. Scikit-learn. (2022) *Clustering*. [Online] Available from: <https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html>.

УДК: 519.7

MSC2010: 65K10

## ОБЗОР ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

© А. С. Анафиев, А. С. Карюк

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [karuk1998@yandex.ru](mailto:karuk1998@yandex.ru)

**OVERVIEW OF APPROACHES TO SOLVING THE HYPERPARAMETERS OPTIMIZATION  
PROBLEM FOR THE MACHINE LEARNING ALGORITHMS.**

**Anafiev, A. & Karyuk, A.**

**Abstract.** Hyperparameter tuning is critical for the correct functioning of Machine Learning models. Finding the best combination of hyperparameters lies at the heart of many Machine Learning applications.

Lets consider some definitions to state the main problem.

Under the *algorithm model*, we understand a parametric family of mappings

$$A = \{\varphi(x, \theta) \mid \theta \in \Theta\},$$

where  $\varphi : X \times \Theta \rightarrow Y$  is some fixed mapping,  $X$  is the set of objects, and  $Y$  is the set of outcomes of the unknown target function in Machine Learning problem.

In the work [1], the dependence of the algorithm model  $A$  on hyperparameters is determined by a *template of algorithm models* or simply an *algorithm template*.

A *template* is an operator  $t : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ , where  $\Gamma$  is the set of possible hyperparameter values, and  $\mathcal{A}$  is the set of possible algorithms. If, in this case,  $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$ , where  $\Gamma_j$  is the set of permissible values for hyperparameter  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , then the template is called *k-parametric*.

In other words, a *k-parametric template* defines the form of the mapping  $\varphi$  of the algorithm model  $A \in \mathcal{A}$  based on hyperparameters  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ .

Thus, when solving a machine learning problem, we can select the following two stages: the *model selection stage* and the *training stage*. In the model selection, the algorithm model is chosen using the template and hyperparameters, and then, in the training stage, using the training method [6] and the found model, the optimal algorithm (decision rule) is determined.

Hyperparameters can specify the number of neurons in the hidden layer of a neural network, the maximum depth of a binary decision tree, the number of nearest neighbors in metric classification algorithms, and so on.

The number of hyperparameters for the algorithm template can be quite large, and the optimal values of hyperparameters for the same algorithm may vary depending on the task the algorithm is solving and the input data it has to work with. Usually, optimal hyperparameter

values are not obvious, and they need to be chosen. The selection process can take a long time, so there are various approaches to finding them, each with its advantages and disadvantages.

The article provides an overview of existing algorithms for solving the hyperparameter optimization problem for machine learning algorithms and *proposes a new approach based on optimization with precedent initial information.*

Let's assume that for some sets of hyperparameter values, we already know the quality metric values of the algorithm (for example, for randomly generated hyperparameter values). In this case, we are dealing with a case of supervised learning (regression problem), where the instances are sets of hyperparameters, and the responses are the quality metric values.

Therefore, the task of choosing optimal hyperparameter values can be considered as an optimization problem with precedent initial information [1–5], for which one can use a neural network-based approach as described in [5], or a tree-based approach as outlined in [4].

The quality of the proposed approach for solving the hyperparameter optimization problem in machine learning models in real-world tasks is planned to be thoroughly investigated in future research.

**Keywords:** *machine learning, hyperparameters tuning, neural networks.*

## ВВЕДЕНИЕ

При решении задач машинного обучения одной из актуальных является проблема выбора модели, в частности проблема *выбора оптимальных значений гиперпараметров* модели алгоритма, — параметров, которые необходимо выбрать до этапа обучения.

Под *моделью алгоритма* будем понимать параметрическое семейство отображений

$$A = \{\varphi(x, \theta) \mid \theta \in \Theta\},$$

где  $\varphi : X \times \Theta \rightarrow Y$  — некоторое фиксированное отображение,  $X$  — множество объектов и  $Y$  — множество значений неизвестной целевой функции в задачах машинного обучения.

В работе [1] зависимость модели алгоритмов  $A$  от гиперпараметров задается с помощью параметрического шаблона модели алгоритмов или просто шаблоном алгоритмов.

*Шаблоном* называется оператор  $t : \Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ , где  $\Gamma$  — множество возможных значений гиперпараметров, а  $\mathcal{A}$  — множество возможных моделей алгоритмов. Если при этом  $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$ , где  $\Gamma_j$  — множество допустимых значений гиперпараметра  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , то шаблон называется *k-параметрическим*.

Другими словами,  $k$ -параметрический шаблон задает вид отображения  $\varphi$  модели алгоритмов  $A \in \mathcal{A}$  на основе гиперпараметров  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ .

Тогда, переходя к задаче машинного обучения, для нахождения решения имеем два этапа: на первом этапе решения — *этапе выбора модели* — с помощью шаблона и гиперпараметров выбирается модель алгоритмов, а далее, на *этапе обучения* — с помощью метода обучения [6] и найденной модели — оптимальный алгоритм (решающее правило).

Гиперпараметры могут задавать количество нейронов скрытого слоя нейронной сети, максимальную глубину бинарного решающего дерева, число ближайших соседей в метрических алгоритмах классификации и т. д.

Число гиперпараметров шаблона алгоритмов может быть достаточно большим, а оптимальные значения гиперпараметров для одного и того же алгоритма могут различаться в зависимости от задачи, решаемой алгоритмом, и входных данных, с которыми он должен работать. Обычно, оптимальные значения гиперпараметров не являются очевидными, и их необходимо подбирать. Процесс подбора может занимать большое количество времени. Существуют различные подходы к их поиску, каждый со своими преимуществами и недостатками.

В статье проводится обзор основных существующих алгоритмов решения задачи оптимизации гиперпараметров для алгоритма машинного обучения и *предлагается новый подход, основанный на решении задачи оптимизации с прецедентной начальной информацией.*

## 1. АЛГОРИТМЫ ПОДБОРА ГИПЕРПАРАМЕТРОВ

**Поиск по сетке (Grid Search).** Алгоритм поиска по сетке принимает на вход модель и допустимые значения гиперпараметров (сетку гиперпараметров), и вычисляет оценки качества модели для всевозможных наборов значений гиперпараметров. В конце работы алгоритм возвращает модель, для которой величина ошибки минимальна [7].

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> <li>• простота реализации;</li> <li>• легко параллелизуем;</li> <li>• возможность получения модели наиболее близкой к оптимальной, при достаточно большой плотности заданной сетки гиперпараметров.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• эффективен только при малом количестве гиперпараметров;</li> <li>• при увеличении количества гиперпараметров, количество их комбинаций растёт экспоненциально, что значительно замедляет на время работы алгоритма.</li> </ul>

Таблица 1. Преимущества и недостатки Grid Search.

**Случайный поиск (Random Search).** Алгоритм представляет собой вариацию поиска по сетке, в котором полный перебор всех возможных комбинаций значений гиперпараметров заменён на их выборку случайным образом. Он может применяться как к дискретным сеткам (как стандартный Grid Search), так и к непрерывным, в которых значения гиперпараметров задаются верхней и нижней границами интервалов [7].

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> <li>• простота реализации;</li> <li>• легко параллелизуем;</li> <li>• в отличие от Grid Search, в котором полный перебор всех комбинаций требует большого количества времени и ресурсов, в Random Search при достаточном разбросе, можно оценить результаты для небольшого количества комбинаций гиперпараметров и затем корректировать настройки поиска или проводить исследования в заданной области другими алгоритмами.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• случайное время сходимости.</li> </ul>

Таблица 2. Преимущества и недостатки Random Search.

**Вероятностные методы.** Вероятностные методы оптимизации гиперпараметров используют вероятностные модели и статистические методы для эффективного поиска и оптимизации гиперпараметров для моделей машинного обучения. Эти методы особенно полезны при работе со сложными многомерными пространствами гиперпараметров.

*Байесовская оптимизация.* Байесовская оптимизация — способ оптимизации гиперпараметров, основанный на вероятностных моделях, основная идея которого состоит в том, чтобы восстановить функцию распределения в пространстве гиперпараметров таким образом, чтобы получить их оптимальный набор [8].

Два основных компонента алгоритма — вероятностная модель распределения гиперпараметров, так же называемая *суррогатной моделью* (surrogate model), и *функция сбора* (acquisition function).

В общем виде алгоритм Байесовской оптимизации работает следующим образом:

1. строится исходное предположение о распределении гиперпараметров, с которыми качество модели будет наиболее оптимальным;
2. для каждого набора гиперпараметров модель обучается и оценивается ее качество, чтобы обновить вероятностную модель (предположение об оптимальном распределении гиперпараметров);

3. для выбора следующего набора гиперпараметров используется функция сбора, которая учитывает текущую модель и ее оценку, чтобы выбрать набор гиперпараметров, который с максимальной вероятностью будет оптимальным.

Одной из наиболее часто используемых функций сбора является Expected Improvement (EI), которая выглядит следующим образом:

$$EI(x) = (f_{best} - \mu(x))\Phi\left(\frac{f_{best} - \mu(x)}{\sigma}\right) + \sigma\phi\left(\frac{f_{best} - \mu(x)}{\sigma}\right),$$

где  $f_{best}$  — лучшее наблюдаемое значение,  $\mu(x)$  — апостериорное математическое ожидание на наборе  $x$  [8].

Базовый вариант байесовской оптимизации, описанный выше, называется Sequential Model-Based Optimization (SMBO) с гауссовской суррогатной моделью. Так же, часто используются и другие суррогатные модели, например, случайный лес.

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> <li>• умение работать с «функциями чёрного ящика» — функциями, у которых неизвестна внутренняя структура или механизм работы, и ее входные и выходные данные являются единственными доступными для наблюдения;</li> <li>• эффективная работа с пространствами поиска высокой размерности (большим количеством гиперпараметров);</li> <li>• универсальность в работе с широким спектром типов задач, включая многоцелевую оптимизацию и шумовые функции.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• нельзя распараллелить, поскольку процесс оптимизации последователен;</li> <li>• высокая вычислительная сложность;</li> <li>• возможность переобучения;</li> <li>• в основу алгоритма ложатся предположения о структуре и свойствах целевой функции, которые могут не выполняться на практике.</li> </ul>

Таблица 3. Преимущества и недостатки метода SMBO.

Существуют также и другие разновидности байесовской оптимизации: Tree-structured Parzen Estimator (ТРЕ), Ensemble-based Bayesian optimization и Derivative-based Bayesian optimization.

**Оптимизация на основе градиентов.** У всех методов, описанных выше есть существенный недостаток: они неспособны эффективно оптимизировать большие наборы гиперпараметров (10 гиперпараметров, 20, и больше). Эту проблему призван решить метод оптимизации на основе градиентов — метод градиентного спуска и его модификации (стохастического градиента, AdaGrad, RMSProp, Adam и др.). Его

идея заключается в следующем в итеративном обновлении вектора значений гиперпараметров в направлении антиградиента функции (или модели), зависящей от данного вектора, до нахождения таких значений гиперпараметров, при которых целевая модель имеет оптимальную оценку качества [10].

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> <li>• зачастую он более эффективен, чем Grid Search и Random Search, лучше справляется с большим количеством гиперпараметров;</li> <li>• для выпуклых задач оптимизации градиентный спуск гарантированно находит глобальный минимум, а для невыпуклых задач часто сходится к более лучшему локальному минимуму.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• чувствительность к коэффициенту обучения, от выбора которого зависит качество и скорость сходимости;</li> <li>• сходимость к локальным минимумам;</li> <li>• чувствительность к начальному приближению: начальные значения параметров модели могут влиять на сходимость, плохая инициализация может привести к медленной сходимости или сходимости к неоптимальным решениям;</li> <li>• сложность настройки гиперпараметров.</li> </ul>

Таблица 4. Преимущества и недостатки градиентных методов.

**Эволюционные алгоритмы.** Еще одним методом настройки гиперпараметров является метод на основе генетического алгоритма, где индивидами являются наборы значений гиперпараметров, а функцией приспособленности — метрика качества алгоритма.

Преимущества	Недостатки
<ul style="list-style-type: none"> <li>• распараллеливание: генетические алгоритмы можно эффективно распараллеливать, что позволяет одновременно оценивать несколько индивидов, что ускоряет процесс поиска;</li> <li>• адаптивность: генетические алгоритмы могут адаптироваться к различным типам гиперпараметров (целочисленным, вещественным, категориальным).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• вычислительные затраты: обучение нескольких моделей машинного обучения для каждого поколения может быть дорогостоящим с точки зрения вычислений;</li> <li>• чувствительность к выбору собственных гиперпараметров;</li> <li>• нет гарантии нахождения глобального оптимума.</li> </ul>

Таблица 5. Преимущества и недостатки эволюционных методов.

**Нейросетевой подход.** Предположим, что для некоторых наборов значений гиперпараметров уже известны значения метрики качества алгоритма (например, для случайно сгенерированных). В этом случае, мы имеем дело с задачей обучения по прецедентам (задачей восстановления регрессии), где объекты — это наборы гиперпараметров, а ответы — значения метрики качества.

Таким образом, задачу выбора оптимальных значений гиперпараметров можно рассматривать как задачу оптимизации с прецедентной начальной информацией [1–5], для решения которой можно использовать нейросетевой подход, описанный в [5] либо подход на основе деревьев (см. [4]).

Качество работы предлагаемого подхода решения задачи оптимизации значений гиперпараметров модели машинного обучения в реальных задачах планируется подробно изучить в дальнейших работах.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён обзор существующих подходов к решению задачи оптимизации значений гиперпараметров для алгоритма машинного обучения, выделены их преимущества и недостатки. Кроме этого, *предложен новый подход — сведение задачи оптимизации гиперпараметров к задаче оптимизации с прецедентной начальной информацией* и ее решение на основе бинарных решающих деревьев (леса) и с помощью нейросетевого подхода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анафиев А. С. Некоторые положения и задачи теории шаблонов // Таврический вестник информатики и математики. — 2009. — № 1 (14). — С. 39–45.  
ANAFIEV A. (2009) Basic concepts and definitions of template theory. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1 (14). p. 39–45.
2. ANAFIEV, A. and ABDULKHAIROV, A. (2013) An approach to reconstruct target function of the optimization problem with precedent initial information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2. p. 4–9.
3. Анафиев А. С. Оптимизационные модели с прецедентной начальной информацией / А. С. Анафиев, В. Ф. Блыщик // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — № 2 (19). — С. 51–57.  
ANAFIEV, A. & BLYSHCHIK, V. (2011) Optimization models with precedent initial information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2 (19). p. 51–57.



4. Донской В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: подход на основе решающих деревьев и лесов // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 59–86.  
DONSKOY, V. (2017) Extracting optimization models from data: a decision tree and forest approach. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4 (37). p. 59–86.
5. Донской В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: применение нейронных сетей // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 2 (39). — С. 71–89.  
DONSKOY, V. (2018) Extracting optimization models from data: a neural network approach. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2 (39). p. 71–89.
6. Воронцов К. В. Математические методы обучения по прецедентам // machinelearning.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/voron-ml-1.pdf>
7. J. BERGSTRA, and Y. BENGIO (2012) Random Search for Hyper-Parameter Optimization. *Journal of Machine Learning Research*. [Online] JMLR 13. p. 1-25. Available from: <https://www.jmlr.org/papers/volume13/bergstra12a/bergstra12a.pdf>. [Accessed: 30th January 2012].
8. E. BROCHU, V. M. CORA, and N. DE FREITAS (2010) A Tutorial on Bayesian Optimization of Expensive Cost Functions, with Application to Active User Modeling and Hierarchical Reinforcement Learning. *arXiv*. [Online] arXiv 1. p. 1-49. Available from: <https://arxiv.org/pdf/1012.2599v1.pdf>. [Accessed: 30th January 2012].
9. L. FRANCESCHI at al. (2017) Forward and Reverse Gradient-Based Hyperparameter Optimization. *arXiv*. [Online] arXiv 3. p. 1-11. Available from: <https://arxiv.org/pdf/1703.01785.pdf>. [Accessed: 30th January 2012].
10. M. FEURER, and F. HUTTER (2019) Hyperparameter Optimization. *Springer*. [Online] Springer 1. p. 1-31. Available from: [https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-05318-5\\_1.pdf](https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-05318-5_1.pdf). [Accessed: 30th January 2012].
11. M. MELANIE (1999) *An Introduction to Genetic Algorithms*. 5. Cambridge, Massachusetts.

УДК: 004.896

MSC2010: XXAXX

## КОМБИНАЦИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО И НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОДСЧЕТА КРУГЛЫХ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ НА ЦИФРОВОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

© П. Ю. Бучацкий, С. В. Теплоухов, С. В. Онищенко

АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ул. Первомайская, 208, Майкоп, 385000, Российская Федерация

E-MAIL: buch@adygnet.ru, tepl\_sv@adygnet.ru, osv@adygnet.ru

SYNTHESIS OF MORPHOLOGICAL AND NEURAL NETWORK APPROACHES FOR SOLVING THE PROBLEM OF COUNTING ROUND TIMBER ON A DIGITAL IMAGE.

Buchatsky P. Yu., Teploukhov S. V., Onishchenko S. V.

**Abstract.** Due to the rapid growth in the development of various automation systems of production processes, an increasing number of areas are experiencing the process of introducing automated systems that significantly increase labor productivity and reduce the burden on staff. In this regard, the task of creating and developing various methods of software and hardware for the designed automated systems arises. One of the industries where the growing demand for the introduction of automation systems is manifested is the area associated with measuring the geometric characteristics of various objects. There are a large number of approaches aimed at organizing the process of measuring objects, among which we can single out the contactless approach, characterized by its versatility.

As a task, we can consider the task of determining the geometric parameters of round timber in stacks intended for transportation. To solve this problem, it is proposed to consider an approach based on the synthesis of a method based on a morphological approach implemented using the Canny detector and the Haaf algorithm and a neural network approach based on the use of the YOLOv5 convolutional neural network architecture.

As a result of the work, these methods were developed and their synthesis was carried out, as a result of which an approach was developed that ensures high accuracy of the measurements. During the experimental studies, images of round timber obtained from the Internet were used, and to verify this approach, models of logs made using a 3d printer with predefined characteristics were used. As a result of the experiments, the accuracy of the proposed synthesized approach was estimated, exceeding the indicator of 85-90%.

**Keywords:** *morphological approach, neural networks, convolutional neural networks, Haaf algorithm, canny detector, geometric parameters, round timber.*

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире наблюдается тенденция к автоматизации различных отраслей промышленности и экономического хозяйства. В качестве проблемной области можно выделить область организации измерения геометрических параметров объектов, которые могут быть расположены в труднодоступных местах, что делает недоступным измерение их ручным способом. Еще одной проблемой при измерении объектов может стать их количество, в результате чего классический подход к измерению становится чрезвычайно трудозатратным [1]. Хорошей иллюстрацией подобной ситуации является задача измерения геометрических параметров круглых необработанных лесоматериалов, предназначенных для транспортировки [2]. В настоящее время отрасль деревообрабатывающей промышленности в нашей стране занимает достаточно большую нишу в общем объеме ВВП. По состоянию на 2019 год, экспорт российского круглого леса составил порядка 11% от общего объема мирового экспорта круглых лесоматериалов [3]. Учитывая такие большие объемы поставки, возникает задача осуществления весьма точного учета экспортируемого сырья, с целью минимизации финансовых потерь, возникающих за счет некорректного определения объема перевозимого сырья.

Учет размеров и объемов лесоматериалов является мало механизированным и автоматизированным процессом, а трудоемкость этих процессов вызвана большим количеством ручных измерений. В настоящее время в России до сих пор широко используется метод определения объемов по специализированным таблицам объема, что вызывает большие потребности в привлечении дополнительной рабочей силы. Для его реализации необходимо произвести всего два измерения: длину бревна и его диаметр, для чего приходится производить многократные измерения и при этом останется достаточно большая ошибка в вычислениях.

Данный подход не является единственным, поскольку существует большое количество способов измерения лесоматериалов [4], что проиллюстрировано на рисунке 1.

Эта классификация содержит различные способы измерения, среди которых можно выделить отдельную группу, основанную на геометрическом принципе измерения, что показано на рисунке 2.

Существует еще одна классификация, отражающая принадлежность методов в зависимости от способа взаимодействия на объекты измерения [5], согласно которой групповые методы, представляющие для нас наибольший интерес могут быть реализованы с использованием бесконтактного подхода к измерению объектов.

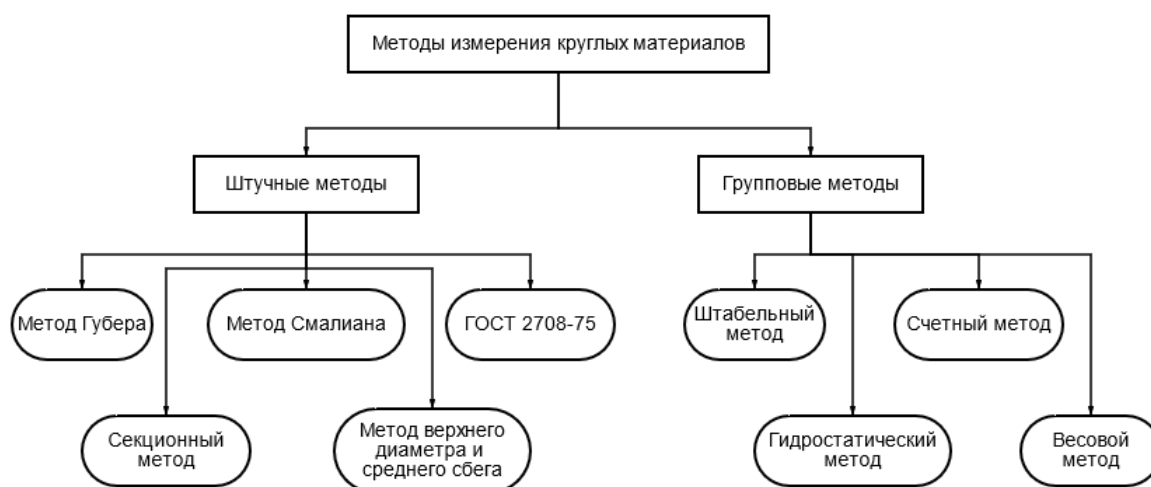


Рис. 1. Классификация методов измерения круглых лесоматериалов по их количеству.

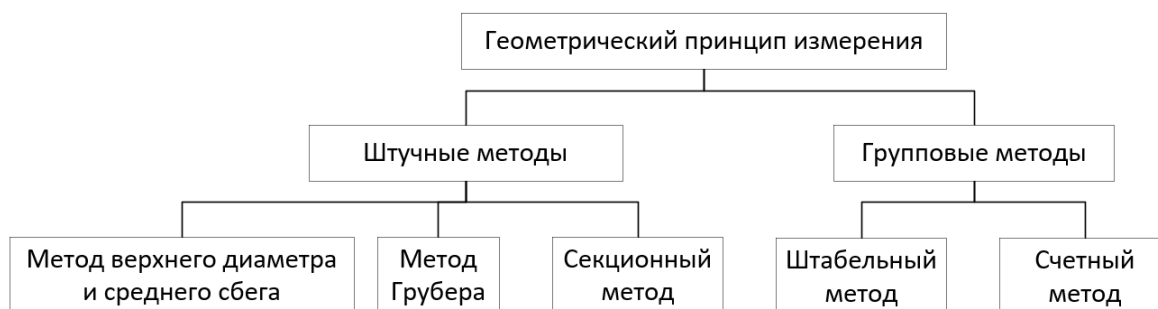


Рис. 2. Методы, использующие геометрический принцип измерения.

Применение бесконтактного подхода позволяет производить измерения больших объемов лесоматериалов без непосредственного взаимодействия с ними, что приводит к значительному снижению трудозатрат на организацию процесса измерения [6]. В целом, данный подход можно разделить на два больших направления, включающие в себя активный и пассивный способы получения информации об объекте измерения. Поскольку организация активных способов требует приобретения специализированных устройств, например таких как РМД-камеры [7, 8], наиболее же оптимальным будет использовать пассивные способы, позволяющие ограничиться лишь изображениями измеряемых объектов, что позволяет использовать методы из теории распознавания образов [9].

В связи с этим предлагается реализовать подход, позволяющий производить вычисление геометрических параметров круглых лесоматериалов, уложенных в штабеля с использованием их цифровых изображений.

## 1. РЕАЛИЗАЦИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА

В общем случае, под параметрами объектов можно определить такие признаки как: положение объекта в пространстве, форма и величина измеряемого объекта. Для выбранной задачи наибольший интерес представляет объем измеряемого объекта, причем не каждого в отдельности, а всей совокупности измеряемых объектов. Для нахождения данного параметра необходимо определить количество измеряемых объектов, расположенных на изображении, вычислить объем каждого из них при помощи вычисления площади торца каждого из измеряемых бревен (мы полагаем что длина штабеля нам известна, поскольку она имеет стандартное значение) и произвести расчет суммарного объема измеряемой пачки лесоматериалов. Для этого предлагается использовать комбинацию методов, основанных на операциях математической морфологии и метода на основе нейронных сетей, которые и будут рассмотрены ниже.

В основе данного метода лежит использование операций математической морфологии, в сочетании с применением детектора Канни и алгоритма Хаафа. Для реализации данного подхода будем применять библиотеку OpenCV. При этом имеется необходимость производить дополнительную подготовку изображения для повышения его качества и удаления различных шумов, однако мы рассматриваем случай, когда мы получаем уже предварительно обработанное изображение, поэтому эти процедуры для нас являются необязательными. Обязательным этапом является конвертация изображения в черно-белый формат, поскольку работа детектора Канни возможно только в таком виде, и сам результат работы будет представлен в виде бинарного изображения.

Метод `cvCanny()` основываясь на пороговой фильтрации изображения производит операцию по определению границ контуров объектов, в результате чего получается бинарное изображение, где белыми пикселями выделяются детектированные границы изображения, что позволяет производить его дальнейшую классификацию в соответствии с заданными классами объектов. При необходимости следующим этапом организуется этап, позволяющий за счет применения операций математической морфологии устранить прерывистость контуров объектов, полученных при помощи использования детектора Канни [10]. Основными параметрами являются параметры

пороговых значений, изменение величины которых позволяет определить, насколько точно будут идентифицироваться границы исследуемых объектов.

После происходит процесс реализации процедуры, которая позволяет произвести подсчет объектов одного типа, для чего необходимо использовать подход с применением алгоритма Хафа [11]. Одним из недостатков данного метода является то, что для работы с новым изображением может потребоваться калибровка предустановленных параметров, что снижает его универсальность даже при работе с одним исследуемым классом объектов, в связи с чем и предлагается использование комбинированного подхода на основе данного метода и нейросетевого подхода. На рисунке 3 представлена блок-схема алгоритма предлагаемого метода для определения геометрических параметров использованием операций математической морфологии.

Не будем останавливаться на данном этапе, поскольку более подробно реализация указанного метода рассмотрена в работе [12]. Поскольку данный алгоритм позволяет нам произвести только определение принадлежности объекта к заданному классу, необходимо реализовать возможность организации вычисления необходимых нам геометрических параметров для чего и предлагается реализовать алгоритм, основанный на нейросетевом подходе.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЙРОСЕТЕВОГО ПОДХОДА

Первым этапом при реализации метода на основе нейросетевого подхода является выбор архитектуры нейронной сети, наиболее подходящей для решения поставленной задачи. Среди большого количества архитектур выделим архитектуру сверточных нейронных сетей, позволяющую производить комплексную обработку поступающих изображений, с помощью реализации таких операций как сегментация, классификация и детекция [13].

Существует огромное количество архитектур нейронных сетей, но поскольку мы определили, что наиболее подходящей для нашего случая является сверточная архитектура нейронных сетей, мы остановили свой выбор на YOLOv5 [14].

Поскольку разработанный ранее подход на основе операций математической морфологии, позволяет нам определить классы объектов и произвести подсчет количества элементов заданного класса, при реализации нейросетевого подхода необходимо выполнить следующие задачи, необходимые для нахождения интересующих нас параметров:

- площадь торца каждого бревна;
- объем каждого измеряемого объекта;
- суммарный объем измеряемой партии лесоматериалов.

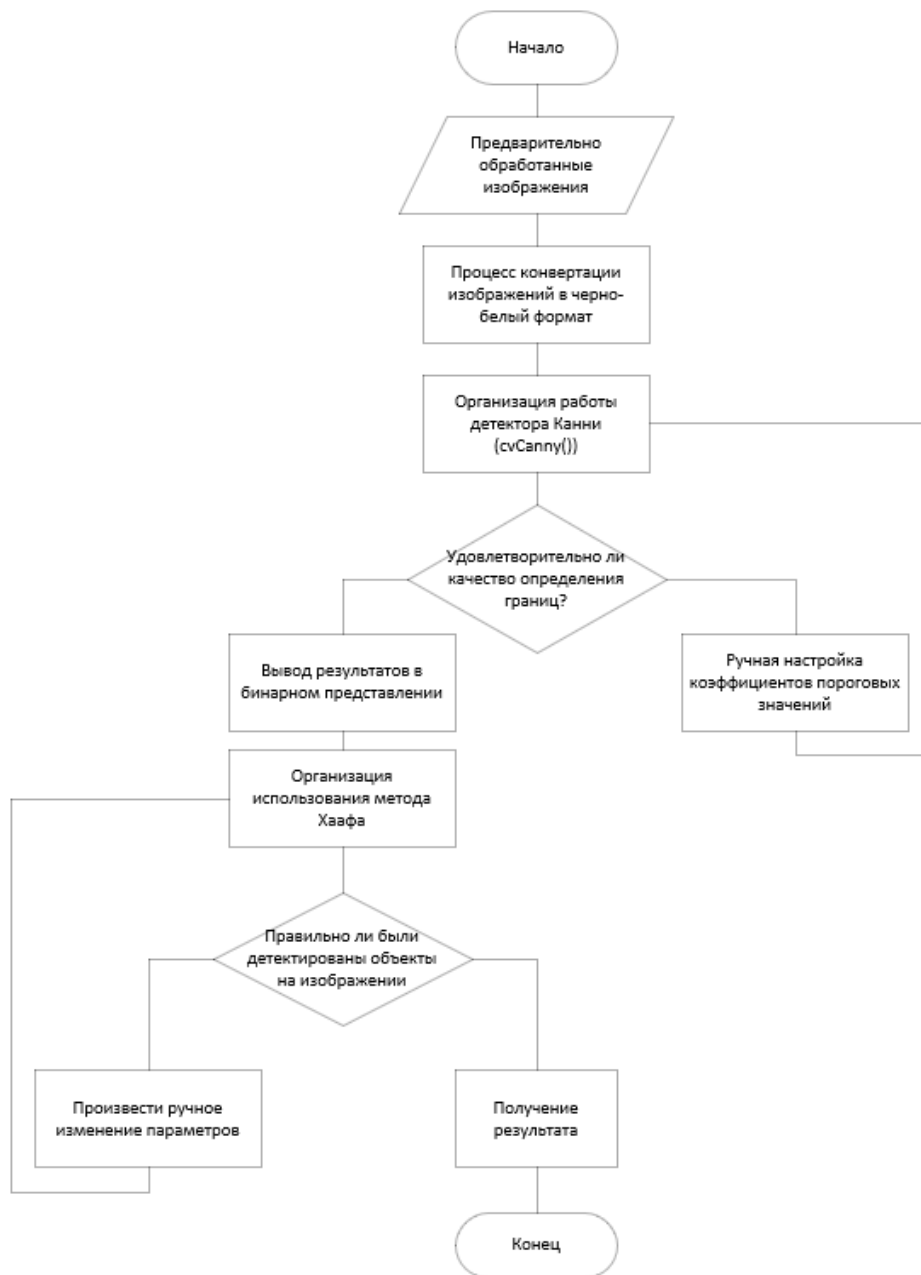


Рис. 3. Алгоритм для определения геометрических параметров объектов на основе операций математической морфологии.

Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 4.

Подробная реализация этого алгоритма описана в работах [15, 16].

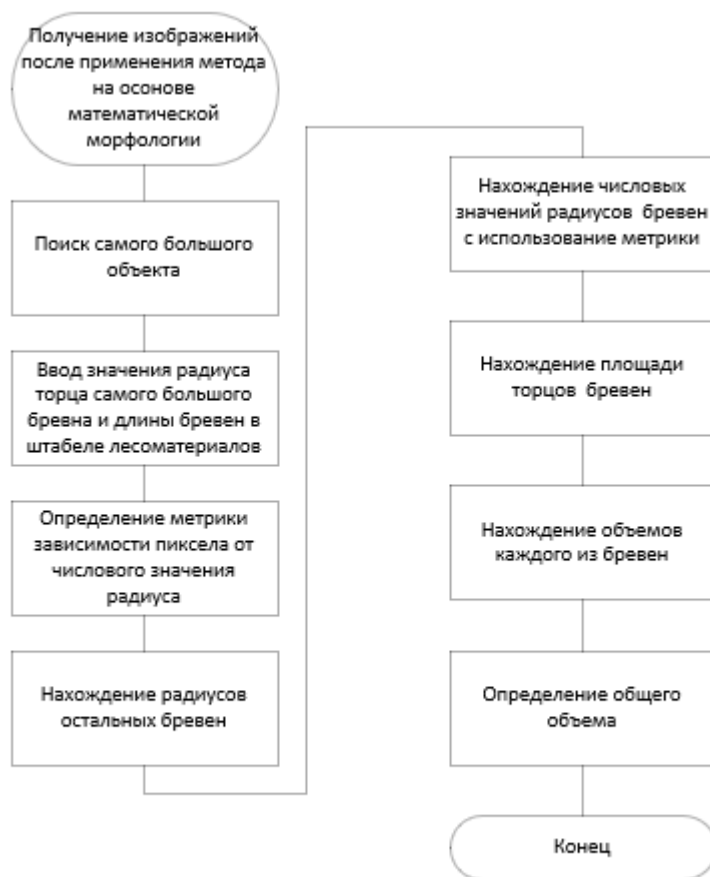


Рис. 4. Блок-схема подхода на основе нейросетевого подхода.

### 3. КОМБИНАЦИЯ ДВУХ МЕТОДОВ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА

Данный алгоритм предполагает совместное использование двух ранее описанных подходов, в результате чего удастся получить искомое значение объема измеряемой партии лесоматериалов.

Таким образом, используя комбинацию двух рассмотренных подходов, представим общий алгоритм функционирования цифровой бесконтактной измерительной системы, представленный на рисунке 5.

Последним этапом является тестирование предложенного подхода, для осуществления оценки точности измерений. Были использованы изображения из сети Интернет и специально изготовленные модели, с известными заранее характеристиками (рисунок 6).



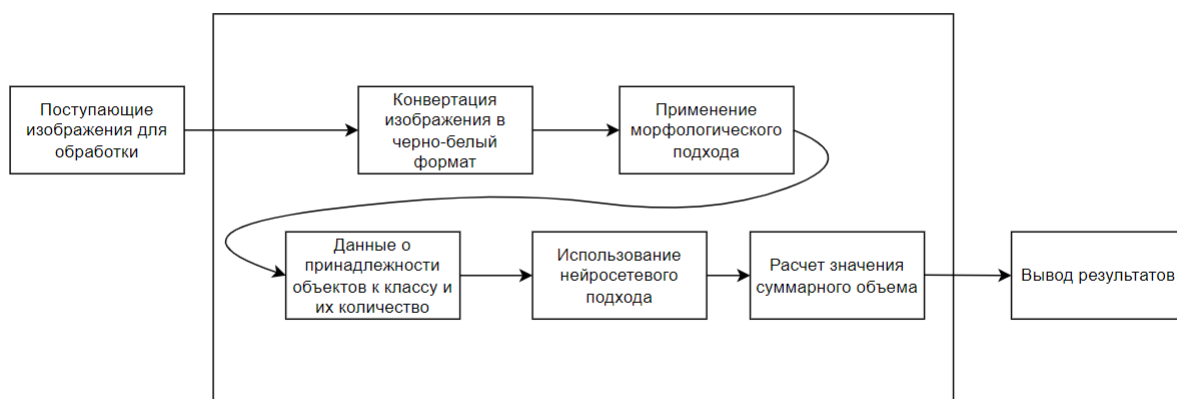


Рис. 5. Использование комбинированного подхода на основе математической морфологии и нейронных сетей для определения суммарного объема штабеля лесоматериалов.



Рис. 6. Исходные изображения.

Первым этапом является применение алгоритма на основе морфологического подхода, в результате чего удастся классифицировать объекты на изображении и произвести их подсчет (рисунок 7).

После этого шага включается в работу вторая часть алгоритма, где при помощи нейронной сети определяется наибольший из объектов, при помощи которого происходит вычисление площадей торцов остальных объектов исходя из метрики соответствия.

Дальнейшая работа алгоритма позволяет определить суммарный объем измеряемых объектов, что продемонстрировано на рисунке 8.

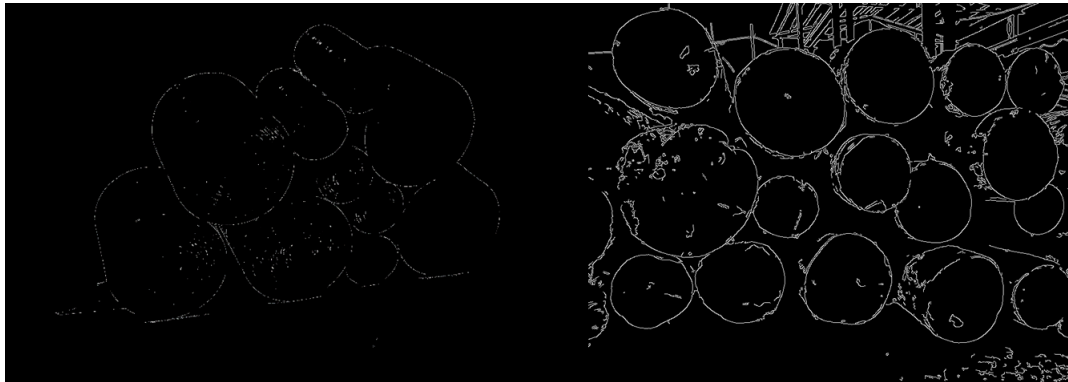


Рис. 7. Результат классификации объектов и выделение их границ.

МАХ: 56.23030090332031		
Радиус: 46.204401280939045 см	Площадь: 6706.818702129129см <sup>2</sup>	Объем: 1207227.3663832431 см <sup>3</sup>
Радиус: 38.209564493207665 см	Площадь: 4586.633598673763см <sup>2</sup>	Объем: 825594.0477612774 см <sup>3</sup>
Радиус: 42.566306722541995 см	Площадь: 5692.2217833703935см <sup>2</sup>	Объем: 1024599.9210066708 см <sup>3</sup>
Радиус: 39.248335666597654 см	Площадь: 4839.409391477346см <sup>2</sup>	Объем: 871093.6904659222 см <sup>3</sup>
Радиус: 51.493139008913985 см	Площадь: 8330.06915613155см <sup>2</sup>	Объем: 1499412.448103679 см <sup>3</sup>
Радиус: 50.5548139824358 см	Площадь: 8029.248627618765см <sup>2</sup>	Объем: 1445264.7529713777 см <sup>3</sup>
Радиус: 40.673000445848416 см	Площадь: 5197.114626571178см <sup>2</sup>	Объем: 935480.632782812 см <sup>3</sup>
Радиус: 42.91802494851577 см	Площадь: 5786.678156825719см <sup>2</sup>	Объем: 1041602.0682286294 см <sup>3</sup>
Радиус: 36.88803234856825 см	Площадь: 4274.849728554584см <sup>2</sup>	Объем: 769472.951139825 см <sup>3</sup>
Радиус: 46.45352416984138 см	Площадь: 6779.336745300014см <sup>2</sup>	Объем: 1220280.6141540024 см <sup>3</sup>
Радиус: 26.289431330253734 см	Площадь: 2171.262124322048см <sup>2</sup>	Объем: 390827.1823779686 см <sup>3</sup>
Радиус: 31.421029879984555 см	Площадь: 3101.6351095951527см <sup>2</sup>	Объем: 558294.3197271274 см <sup>3</sup>
Радиус: 55.63301248348421 см	Площадь: 9723.330038830312см <sup>2</sup>	Объем: 1750199.4069894562 см <sup>3</sup>
Радиус: 32.75759821486963 см	Площадь: 3371.118169378032см <sup>2</sup>	Объем: 606801.2704880458 см <sup>3</sup>
Радиус: 24.870868134429674 см	Площадь: 1943.2638086617128см <sup>2</sup>	Объем: 349787.4855591083 см <sup>3</sup>
Радиус: 60.0 см	Площадь: 11309.733552923255см <sup>2</sup>	Объем: 2035752.039526186 см <sup>3</sup>
Радиус: 12.776402271954588 см	Площадь: 512.8224478725499см <sup>2</sup>	Объем: 92308.04061705898 см <sup>3</sup>

а)

МАХ: 179.63800048828125		
Радиус: 0.8920426109230498 см	Площадь: 2.4998910000644936см <sup>2</sup>	Объем: 4.999782000128987 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.4447126908941288 см	Площадь: 0.621310823277747см <sup>2</sup>	Объем: 1.242621646555494 см <sup>3</sup>
Радиус: 1.0 см	Площадь: 3.141592653589793см <sup>2</sup>	Объем: 6.283185307179586 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.89454941561687 см	Площадь: 2.5139610540353776см <sup>2</sup>	Объем: 5.027922108070755 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.9039869678773602 см	Площадь: 2.567285760079284см <sup>2</sup>	Объем: 5.134571520158568 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.9458261090266374 см	Площадь: 2.8104280367840606см <sup>2</sup>	Объем: 5.620856073568121 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.46564950466993454 см	Площадь: 0.681189842385728см <sup>2</sup>	Объем: 1.362379684771456 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.3928500684121883 см	Площадь: 0.48484568953146145см <sup>2</sup>	Объем: 0.9696913790629229 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.40835501899470267 см	Площадь: 0.5238725807023193см <sup>2</sup>	Объем: 1.0477451614046387 см <sup>3</sup>
Радиус: 0.42511609006421264 см	Площадь: 0.5677602169325483см <sup>2</sup>	Объем: 1.1355204338650966 см <sup>3</sup>

б)

Рис. 8. Результаты вычисления параметров для исследуемых изображений (а – пример для изображения из интернета, б – расчет параметров для тестовых экземпляров).

Поскольку имелась контрольная группа объектов с известными параметрами удалось сравнить полученные значения с рассчитанными значениями, в результате чего было установлено, что точность измерения превышает отметку в 85-90%, что является хорошим результатом.

В работе [17], решалась подобная задача, для чего применялись методы основанные на применении алгоритма Хаафа (СНТ) и метод меры локальных окружностей

(LCM), в результате чего были получены такие результаты точности, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение результатов точности измерения различных методов.

Метод	Средняя погрешность, %
СНТ	29.06
LCM	21.42
LCM+СНТ	14.22
Комбинированный метод	10-15

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрена реализация комбинированного метода на основе применения морфологического подхода и нейронных сетей, для решения задачи определения геометрических параметров круглых лесоматериалов, расположенных в штабелях. Был разработан алгоритм и проведена его реализация, в результате которой удалось установить, что данный алгоритм позволяет добиться высокой точности, превосходящей другие подобные подходы.

Данный алгоритм может быть использован для реализации фотограмметрических программных комплексов, предназначенных для измерения партий круглых лесоматериалов, что позволит снизить транспортно-логистические затраты и снизить количество финансовых потерь из-за неправильного расчета стоимости перевозимого сырья.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойлов, А. Н., Сергеев, Н. Е., Волошин, А. В., Козловский, А. В. Метод фотограмметрического измерения геометрических параметров объектов, инвариантный к фоторегистрирующим устройствам // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. — Майкоп: Адыгейский государственный университет, 2021. — Т. 4(291). — С. 58–69.
2. Онищенко, С. В., Козловский, А. В. Исследование метода определения геометрических параметров объектов по предварительно обработанным цифровым изображениям // ИТСАУ-2021. — 2020. — С. 59–62.
3. Статистика по лесной продукции [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.fao.org/forestry/statistics/80938@180724/ru/>

4. Козловский, А. В., Онищенко, С. В., Авдеев, В. Е. Исследование методов измерения круглых лесоматериалов // *Фундаментальные и прикладные аспекты компьютерных технологий и информационной безопасности Южный федеральный университет*. — 2021. — С. 357–360.
5. Самойлов, А. Н. Классификация и определение основных направлений развития методов измерения объема круглого лесоматериала // *Научный журнал КубГАУ*. — 2006. — №24. — С. 1–7.
6. Peter Katuch, Miroslav Dovica, Stanislav Slosarc'k, JozefKovac (2012) Comparison of Contact and Contactless Measuring Methods for Form Evaluation. *Procedia Engineering*. 48. p. 273–279.
7. Adam, D., Nissan, S., B., Friedman, Z., Behar, V. (2006) Combined effect of spatial compounding and nonlinear filtration for speckle reduction in ultrasonic images. *Ultrasound*. 44. p. 166–181.
8. Beder, Ch. R., Bartchak, B., Koch, R. (2007) Comparison of PMD cameras and stereo vision for the task of surface reconstruction using patchlets. *Computer vision and pattern recognition*. IEEE. p. 1–8.
9. Chaban, L. N. (2004) Theory and algorithms of pattern recognition. *Textbook..* М.: МИГАиК. p. 70.
10. Власов, А. В., Цапко, И. В. Модификация алгоритма Канни применительно к обработке рентгенографических изображений // *Векторы благополучия: экономика и социум*. — 2013. — №4(10). — С. 120–127.
11. Кудрина, М. А. Использование преобразования Хафа для обнаружения прямых линий и окружностей на изображении // *Известия Самарского научного центра РАН*. — 2014. — №4(2). — С. 476–478.
12. Бучацкий, П. Ю., Онищенко, С. В., Теплоухов, С. В. Разработка метода подсчета количества объектов на цифровом изображении на основе морфологического подхода // *Дистанционные образовательные технологии / Материалы VII международной научно-практической конференции, Ялта, 20–22 сентября 2022 года*. — Симферополь: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство Типография «Ариал», 2022. — С. 120–123.
13. Голубинский, А. Н., Толстых, А. А. Гибридный метод обучения сверточных нейронных сетей // *Информатика и автоматизация*. — 2021. — №20(2). — С. 463–490.

14. Redmon, J., Farhadi, A. (2018) An incremental improvement. *Tech report*. <https://arxiv.org/abs/1804.02767>. p. 6.
15. Онищенко, С. В., Козловский, А. В., Мельник, Э. В. Разработка бесконтактной системы измерения геометрических параметров объектов на изображении // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2022. — С. 177–181.
16. Бучацкий, П. Ю., Онищенко, С. В., Теплоухов, С. В. Разработка метода определения геометрических параметров объектов на изображении на основе нейросетевого подхода // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. — Майкоп: Адыгейский государственный университет, 2022. — Т. 3. — С. 20–27.
17. Herbon, C., Tannies, K., Stock, B. (2014) Detection and segmentation of clustered objects by using iterative classification, segmentation and Gaussian mixture models and application to wood log detection. *Pattern Recognition*. Springer International Publishing. p. 354–364.

УДК: 517.95

MSC2010: 35K10, 35K55

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© А. А. Корнута

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *korn\_57@mail.ru*

**BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INCLINED DERIVATIVE FOR A NONLINEAR  
EQUATION WITH AN INVOLUTION ON A RECTANGLE.**

**Kornuta A. A.**

**Abstract.** One of the important areas of research in applied nonlinear dynamics is the study of mathematical models of processes and phenomena of nonlinear optics that exhibit various modes of self-organization of the light field. It is the models of nonlinear optics by controlling the internal parameters of the system that make it possible to implement a wide range of changes in the light field in experiments. One of such systems is an optical device, which is a specially arranged external contour, called a “two-dimensional feedback loop” consisting of various optical devices (lenses, prisms, etc.) and a thin layer of a nonlinear medium. As models describing the dynamics of nonlinear optical systems with feedback, ordinary differential equations, partial differential equations, functional differential equations with the transformation of spatial variables can be used, the type of which is determined by the device of the feedback loop, the choice of parameters, conditions at the boundary. The configuration of the area in which the corresponding model is considered is determined by the transverse aperture of the system.

In the articles by A. V. Razgulin, E. P. Belan, one-dimensional problems on a circle with rotation transformation, problems on a segment with reflection transformation were considered, a two-dimensional problem in a circle with rotation transformation, as well as with a combination of rotation and radial compression, was investigated. The problem for the ring was considered in the works of A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko [23]. Non-classical problems for partial differential equations close to the considered ones are investigated in the works of A. L. Skubachevsky and his students.

The dynamics of solutions to the problems under consideration largely depends on the boundary conditions. As a rule, boundary value problems with Neumann conditions are investigated. However, it is known that boundary conditions with an oblique (oblique) derivative make it possible to model spiral waves that occur in nonlinear optical systems.

The issues of the existence and stability of spiral waves in a model functional differential equation of diffusion with a delay describing the dynamics of a nonlinear optical system with a feedback loop in a thin ring space with boundary conditions with an oblique derivative are investigated in the works of A. V. Razgulin and S. S. Budzinsky.

This paper discusses the existence and stability of solutions of a functional differential equation of parabolic type in a rectangle with a reflection transformation of a spatial variable and boundary conditions with an oblique derivative.

**Keywords:** *functional differential equation, bifurcation, spectral problem, central manifold, boundary conditions with an oblique derivative*

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений исследований прикладной нелинейной динамики является изучение математических моделей процессов и явлений нелинейной оптики, проявляющих различные режимы самоорганизации светового поля. Именно модели нелинейной оптики посредством управления внутренними параметрами системы позволяют реализовать в экспериментах широкий спектр изменений светового поля. Одной из таких систем является оптическое устройство, которое представляет собой специально устроенный внешний контур, называемый “контуром обратной двумерной связи” [1] состоящий из различных оптических устройств (линз, призм и др.) и тонкого слоя нелинейной среды. В качестве моделей, описывающих динамику нелинейных оптических систем с обратной связью, могут быть использованы обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием пространственных переменных, вид которых определяется устройством контура обратной связи, выбором параметров, условиями на границе. Конфигурация области, в которой рассматриваются соответствующая модель, определяется поперечной апертурой системы.

В работах [2], [3] рассматривались одномерные задачи на окружности с преобразованием поворота, задачи на отрезке с преобразованием отражений изучались в [4]. В работе [5] исследована двумерная задача в круге с преобразованием поворота, в [6] в качестве преобразования была выбрана комбинация поворота и радиального сжатия. Близкие к рассматриваемым неклассические задачи для уравнений в частных производных исследуются в работах А. Л. Скубачевского [8], [9].

Динамика решений, рассматриваемых задач, зависит от краевых условий. Как правило, исследуются только краевые задачи с условиями Неймана. В работах [10], [11] показано, что краевые условия с косою (наклонной) производной позволяют моделировать спиральные волны, которые возникают в процессах различной природы, в частности, в нелинейных оптических системах [12], [13].

Краевая задача с косою производной в общем случае не является Фредгольмовской. В частном случае, задача для круга  $\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ ,  $\Gamma = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ \left( a(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b(\theta) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= \varphi(\theta) \Big|_{\Gamma}, \\ a^2(\theta) + b^2(\theta) &= 1, \end{aligned}$$

где  $x_1 + ix_2 = z = \rho \exp[i\theta]$ ,  $\cos(\lambda, x_1) = a(\theta)$ ,  $\cos(\lambda, x_2) = b(\theta)$  — направляющие косинусы, сводится к краевой задаче теории аналитических функций [7].

В работах [14], [15] приводится решение краевой задачи с косою производной для уравнения эллиптико-гиперболического типа Лаврентьева – Бицадзе в полуплоскости, состоящей из верхней полуплоскости (где уравнение эллиптическое) и прилегающей полосы (где уравнение гиперболическое). На прямой, ограничивающей полосу, задана наклонная производная, а на границе раздела полосы и полуплоскости решения сопрягаются краевыми условиями четверного рода. В результате получено сингулярное интегральное уравнение, которое сводится к краевой задаче Римана со сдвигом [16].

Вопросам существования и стабильности спиральных волн в модельном функционально-дифференциальном уравнении диффузии с запаздыванием, описывающем динамику нелинейно-оптической системы с контуром обратной связи в тонком кольцевом пространстве с граничными условиями с косою производной посвящены работы [17], [18].

Задача нахождения гармонической функции в области, являющейся четвертью круга, с наклонной производной на части границы рассматривалась в [20], [21]. Показано существование и единственность линейно независимого нетривиального решения и получено его представление.

В данной работе рассматриваются вопросы существования и устойчивости решений функционально-дифференциального уравнения параболического типа в прямоугольнике с преобразованием отражения пространственной переменной с граничными условиями с косою производной.



### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольнике  $S = \{(x, y) \mid |x| < d, |y| < l\}$  рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + u - \Lambda Qu = f(u) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu \equiv g(x, y, t), \quad (1)$$

где  $(x, y) \in S, t > 0, u = u(x, y, t)$  [22], [1] с инволюцией (преобразованием отражения)  $Qu = u(-x, y, t)$ , краевыми условиями с косою производной на границах  $y = \pm l$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\pm l}, \quad (2)$$

с краевыми условиями на границах  $x = \pm d$  либо с косою производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\pm d} = \operatorname{tg} \beta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\pm d}, \quad (3)$$

либо с условием  $2\pi$ -периодичности ( $d = \pi$ )

$$u(x + 2\pi, y, t) = u(x, y, t) \quad (4)$$

и начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (5)$$

Здесь  $\Delta u$  — двумерный оператор Лапласа в декартовой системе координат  $(x, y)$ ,  $D > 0, K > 0, \gamma (0 < \gamma < 1)$ .

Обозначим  $H = L_2(S)$  гильбертово пространство измеримых на  $S$  функций,  $H^2$  — функциональное пространство Соболева комплекснозначных функций вещественной переменной со стандартным скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой.

Пусть  $w = w(x, y, t)$  — одно из решений задачи (1)–(5), выполним замену  $u = w + v$ , где  $v = v(x, y, t)$  — новая неизвестная функция. Тогда задача (1)–(5) относительно  $v$  примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \quad (x, y) \in S, t \geq 0, \quad (6)$$

с соответствующими краевыми условиями для функции  $v$ , где  $f(Qw, Qv) = K\gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv))$  [23].

Будем рассматривать пространственно-неоднородные решения, которые бифурцируют из пространственно-однородного стационарного решения  $u(x, y, t) = w = \text{const}$ , определяемого уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (7)$$

Фиксируем одну из гладких ветвей, соответствующих одному из решений уравнения (7)

$$w = w(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0.$$

Выполняя на выделенном стационарном пространственно-однородном решении  $w(K, \gamma)$  замену  $u = v + w$ , приходим к уравнению (6), в котором  $Qw \equiv w$ . Рассмотрим одно из модельных уравнений задачи (6) [24]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v + \Lambda Qv + \Omega Qv^2 - \frac{\Lambda}{6}Qv^3, \quad t \geq 0,$$

где  $\Lambda = -K\gamma \sin w$ ,  $\Omega = -\frac{K\gamma \cos w}{2!}$  и две линейризованные задачи с краевыми условиями с косо́й производной по переменным  $x$  и  $y$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - v + \Lambda Qv, \quad t > 0, \quad |x| < d, \quad |y| < l,$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \tag{8}$$

$$\left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \right|_{y=\pm l}, \quad \left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right|_{x=\pm d} = \operatorname{tg} \beta \left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm d},$$

и с косо́й производной по переменной  $y$  и условием периодичности по переменной  $x$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - v + \Lambda Qv, \quad t > 0, \quad |x| < \pi, \quad |y| < l,$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \tag{9}$$

$$\left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \left. \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \right|_{y=\pm l}, \quad v(x + 2\pi, y, t) = v(x, y, t).$$

Линейризованное уравнение задач (8), (9) представим в операторной форме  $\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = 0$ , где  $Lv = L_0v + L_Qv$ ,  $L_0v = -D\Delta v$ ,  $L_Qv = v - \Lambda Qv$ . Обозначим  $\psi_{n,m}$  — собственные функции операторов  $L_0$  и  $L$ :

$$L_0\psi_{n,m} = -\Delta\psi_{n,m} = \lambda_{n,m}\psi_{n,m},$$

$$L\psi_{n,m} = \tilde{\lambda}_{n,m}\psi_{n,m}.$$

Линейный оператор  $L$  с областью определения  $H^2$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $H$ , является самосопряженным оператором. Найдем собственные функции и собственные значения оператора  $L$ .

## 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

**Лемма 1.** *Оператор  $L_0$ , определенный краевой задачей (13) с условиями с косою производной на границе, имеет в пространстве  $H = L_2(S)$  полную ортонормированную систему собственных функций*

$$\varphi_{n,m} = \left[ \cos \frac{n\pi}{2d}x \pm i \sin \frac{n\pi}{2d}x \right] \left[ dm \cos \frac{\pi m}{2l}y \pm iln \sin \frac{\pi m}{2l}y \right]. \quad (10)$$

Соответствующие собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{n,m} = \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{2d} \right)^2. \quad (11)$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом разделения переменных для уравнения  $Lv = 0$ . Представим  $v(x, y, t) = Z(x, y) \cdot T(t)$ . Получим

$$Z(x, y)T'(t) - D\Delta Z(x, y)T(t) + Z(x, y)T(t) - \Lambda QZ(x, y)T(t) = 0. \quad (12)$$

Разделим (12) на  $Z(z)T(t)$  :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{D\Delta Z(x, y) - Z(x, y) + \Lambda QZ(x, y)}{Z(x, y)} = \tilde{\lambda}.$$

В результате приходим к уравнению относительно  $Z(x, y)$ :

$$\Delta Z(x, y) - \frac{1}{D}Z(x, y) + \frac{\Lambda}{D}QZ(x, y) = \frac{\tilde{\lambda}}{D}Z(x, y)$$

с условиями первого типа

$$\left( \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0, \quad \left( \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} - \operatorname{tg} \beta \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm d} = 0 \quad (13)$$

или второго типа

$$\left( \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0, \quad Z(x + 2\pi, y) = Z(x, y) \quad (14)$$

и уравнению для функции  $T(t) : T'(t) - \tilde{\lambda}T(t) = 0$ . Следовательно,  $T(t) = C \exp[\tilde{\lambda}t]$ .

Предварительно в пространстве  $H$  рассмотрим спектральную задачу для дискретного самосопряженного оператора  $L_0 : L_0\varphi = -\Delta\varphi$

$$L_0\varphi = \lambda\varphi \quad (15)$$

с краевыми условиями с косою производной на горизонтальных и вертикальных границах области или с косою производной на горизонтальных и условием периодичности на вертикальных границах области.

Разделяя переменные  $Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  в уравнении задачи (15), получим

$$-(X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y)) = \lambda X(x) \cdot Y(y).$$

Отсюда  $X''(x) + (\lambda - \nu) X(x) = 0$  и  $Y''(y) + \nu Y(y) = 0$ .

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0 \tag{16}$$

с косой производной на границе

$$\left( X(x)Y'(y) - \operatorname{tg} \alpha X'(x)Y(y) \right) \Big|_{y=\pm l} = 0.$$

Тогда

$$X'(x) = \frac{Y'(\pm l)}{\operatorname{tg} \alpha Y(\pm l)} X(x) = \mu X(x). \tag{17}$$

Используя (17), запишем граничные условия для уравнения (16)

$$Y'(\pm l) - \mu \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) = 0. \tag{18}$$

Пусть  $\nu = \kappa^2 > 0$ . Следовательно,

$$Y(y) = A \cos \kappa y + B \sin \kappa y. \tag{19}$$

Потребуем выполнение условия (18). Тогда

$$\begin{cases} A(-\kappa \sin \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) = 0, \\ A(\kappa \sin \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l + \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) имеет ненулевое решение при условии, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\kappa \sin \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l & \kappa \cos \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l \\ \kappa \sin \kappa l - \mu \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l & \kappa \cos \kappa l + \mu \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l \end{vmatrix} = \\ &= -2 \sin \kappa l \cos \kappa l (\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \kappa^2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\kappa = \frac{m\pi}{2l}$  или  $\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \kappa^2 = 0$ .

При  $\nu_m = \kappa^2 = \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2$  получаем  $Y_m(y) = A_m \cos \frac{m\pi}{2l} y + B_m \sin \frac{m\pi}{2l} y$ .

Рассмотрим уравнение относительно  $X(x)$ :

$$X''(x) + (\lambda - \nu_m) X(x) = 0$$

с условиями

$$\begin{aligned} X'(\pm d)Y(y) - \operatorname{tg} \beta X(\pm d)Y'(y) &= 0, \\ X'(x) &= \mu X(x). \end{aligned} \tag{21}$$

Представим (21) в виде

$$Y'(y) = \eta Y(y), \quad \text{где} \quad \eta = \frac{X'(\pm d)}{\operatorname{tg} \beta X(\pm d)}. \quad (22)$$

Получаем задачу

$$\begin{aligned} X''(x) + (\lambda - \nu_m) X(x) &= 0, \\ X'(\pm d) - \eta \operatorname{tg} \beta X(\pm d) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть  $\lambda - \nu_m = \lambda - \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 = 0$ . Тогда  $X''(x) = 0$ ,  $X(x) = Ax + B$ . Система для определения  $A$  и  $B$

$$\begin{cases} A(1 - \eta \operatorname{tg} \beta d) - \eta \operatorname{tg} \beta B = 0 \\ A(1 + \eta \operatorname{tg} \beta d) - \eta \operatorname{tg} \beta B = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевое решение в случае если  $\eta = 0$ . Следовательно,  $A = 0$ ,  $B \neq 0$ .

Пусть  $\lambda - \nu_m = \lambda - \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 = \xi^2$ . Тогда

$$X(x) = a \cos \xi x + b \sin \xi x. \quad (24)$$

Потребуем выполнение условия (23)

$$\begin{cases} a(-\xi \sin \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \cos \xi d) + b(\xi \cos \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \sin \xi d) = 0, \\ a(\xi \sin \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \cos \xi d) + b(\xi \cos \xi d + \eta \operatorname{tg} \beta \sin \xi d) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Однородная система (25) имеет ненулевое решение при условии, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\xi \sin \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \cos \xi d & \xi \cos \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \sin \xi d \\ \xi \sin \xi d - \eta \operatorname{tg} \beta \cos \xi d & \xi \cos \xi d + \eta \operatorname{tg} \beta \sin \xi d \end{vmatrix} = \\ &= -2 \sin \xi d \cos \xi d (\eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \xi^2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\xi = \frac{n\pi}{2d}$  или  $\eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \xi^2 = 0$ .

Рассмотрим случай  $\xi^2 = \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2$ . Решение (24), получаем в виде

$$\begin{aligned} X_n(x) &= a \cos \frac{n\pi}{2d} x + b \sin \frac{n\pi}{2d} x, \\ \lambda_{n,m} &= \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2. \end{aligned}$$

Учитывая  $X'_n(x) = \mu X_n(x)$ , приходим к равенству

$$-a \frac{n\pi}{2d} \sin \frac{n\pi}{2d} x + b \frac{n\pi}{2d} \cos \frac{n\pi}{2d} x = \mu \left( a \cos \frac{n\pi}{2d} x + b \sin \frac{n\pi}{2d} x \right).$$

Следовательно,  $b \frac{n\pi}{2d} = \mu a$ ,  $\mu = \pm i \frac{n\pi}{2d}$ .

Отсюда, учитывая (24), с точностью до постоянного множителя находим

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{2d}x \pm i \sin \frac{n\pi}{2d}x.$$

С другой стороны,  $Y'(l) = \mu \operatorname{tg} \alpha Y(l) = \pm i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha Y(l)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} A(-\kappa \sin \kappa l \mp i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l \mp i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) &= 0, \\ A(\kappa \sin \kappa l \mp i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l \pm i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Определитель системы (26) для случая  $\kappa = \frac{\pi m}{2l}$

$$\Delta = -\sin m\pi \left( 1 - \left( \frac{\pi n}{2d} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) = 0.$$

Решение системы (26)

$$B = \pm i \frac{\pi n}{2d\kappa} \operatorname{tg} \alpha A = \pm i \frac{ln}{dm} \operatorname{tg} \alpha A.$$

Следовательно, с точностью до постоянного множителя решение (16) имеет вид

$$Y_{n,m}(y) = A \left[ dm \cos \frac{\pi m}{2l}y \pm iln \sin \frac{\pi m}{2l}y \right].$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя собственные функции оператора  $L_0$  имеют вид (10). Соответствующие собственные значения  $\lambda_{n,m} = \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{2d} \right)^2$ . □

Отметим, что при доказательстве леммы 1 также были получены значения  $\kappa = \pm i\mu \operatorname{tg} \alpha$  и  $\xi = \pm i \frac{n\pi}{2d}$ . Исследования соответствующей спектральной задачи будет рассмотрено позже.

Далее, в пространстве  $H$  рассмотрим спектральную задачу для дискретного самосопряженного оператора  $L_0 : L_0\psi = -\Delta\psi$  и краевыми условиями (14). Доказано следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Оператор  $L_0$ , определенный краевой задачей (14), (15), имеет в пространстве  $H = L_2(S)$  полную ортонормированную систему собственных функций*

$$\begin{aligned} \psi_{n,2s} &= \left[ \cos nx \pm i \sin nx \right] \left[ \pi s \cos \frac{\pi s}{l}y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l}y \right], \\ \psi_{n,2s-1} &= \left[ \cos nx \pm i \sin nx \right] \left[ 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l}y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l}y \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Соответствующие собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2.$$

*Доказательство.* Как в лемме 1 находим функцию  $Y_m(y)$ . Для определения функции  $X_n(x)$  вместо условия с косой производной по переменной  $x$  используем условие  $2\pi$ -периодичности, тогда

$$X(x + 2\pi) - X(x) = 2 \sin \xi \pi (b \cos \xi(x + \pi) - a \sin \xi(x + \pi)) = 0.$$

Отсюда  $\xi = n$ . Учитывая (24),

$$X_n(x) = a \cos nx + b \sin nx,$$

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2.$$

Так как  $X'(x) = \mu X(x)$ , то  $X'_n(x) = -an \sin nx + bn \cos nx = \mu (a \cos nx + b \sin nx)$ . Следовательно,  $b = -a \frac{n}{\mu}$ ,  $\mu = \pm in$ .

С другой стороны,  $Y'(\pm l) = \mu \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) = \pm in \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l)$ . Учитывая (19), приходим к системе

$$\begin{aligned} A(-\kappa \sin \kappa l \mp in \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l \mp in \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) &= 0, \\ A(\kappa \sin \kappa l \mp in \operatorname{tg} \alpha \cos \kappa l) + B(\kappa \cos \kappa l \pm in \operatorname{tg} \alpha \sin \kappa l) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Определитель системы (28)  $\Delta = -\sin 2\kappa l (\kappa^2 - n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$ .

Рассмотрим случай  $\kappa = \frac{\pi m}{2l}$ :  $\Delta = -\sin m\pi \left( \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 - n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) = 0$ . Тогда решение системы (28)  $B = \pm \frac{in \operatorname{tg} \alpha}{\pi s} A (m = 2s)$ ,  $B = \pm \frac{i\pi(2s-1)}{2ln \operatorname{tg} \alpha} A (m = 2s-1)$ . С точностью до постоянного множителя решение (19) имеет вид

$$\begin{aligned} Y_{n,2s}(y) &= \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm in \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y, \\ Y_{n,2s-1}(y) &= 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y. \end{aligned}$$

Решение системы (28)

$$B = \pm iA.$$

Таким образом, в случае условия  $2\pi$ -периодичности функция  $\psi_{n,m}$  имеет вид, определяемый равенством (27). Соответствующие собственные значения

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2.$$

□

Далее, в пространстве  $H$  рассмотрим спектральную задачу для оператора  $L = L_0 + L_Q : L\psi^Q = \lambda\psi^Q$  и краевыми условиями (14)  $2\pi$ -периодичности для переменной  $x$  и условием с косою производной на границе  $y = \pm l$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Оператор  $L_Q$ , определяемый краевой задачей*

$$L\psi^Q = \lambda^Q\psi^Q,$$

$$\left( \frac{\partial\psi^Q(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial\psi^Q(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0,$$

$$\psi^Q(x + 2\pi, y) = \psi^Q(x, y),$$

где  $L = L_0 + L_Q = -\Delta v + v - \Lambda Qv$ ,  $\psi^Q(x, y) = X_n(x)Y_{n,m}(y) = [a \cos nx + b \sin nx]Y_{n,m}(y)$ , имеет в пространстве  $H = L_2(S)$  ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}^s = \sin nx Y_{n,m}, \quad \psi_{n,m}^c = \cos nx Y_{n,m},$$

которым соответствуют собственные значения

$$\tilde{\lambda}_{n,m}^s = -D \left( \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) - 1 - \Lambda, \quad \tilde{\lambda}_{n,m}^c = -D \left( \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) - 1 + \Lambda. \quad (29)$$

*Доказательство.* Для собственных функций оператора  $L_Q$ , определяемого краевой задачей (14), (15), полученных в лемме 3, рассматриваем спектральную задачу

$$\psi - \Lambda Q\psi - \lambda^Q\psi = 0.$$

Получаем систему

$$a(1 - \Lambda - \lambda^Q) \cos nx + b(1 + \Lambda - \lambda^Q) \sin nx = 0,$$

$$a(1 - \Lambda - \lambda^Q) \cos nx + b(-1 - \Lambda + \lambda^Q) \sin nx = 0. \quad (30)$$

Система (30) совместна, если  $\lambda^Q = 1 + \Lambda$ ,  $a = 0$ ,  $b$  – любое или если  $\lambda^Q = 1 - \Lambda$ ,  $b = 0$ ,  $a$  – любое.

Таким образом, если  $\lambda^Q = 1 + \Lambda$ , то  $\psi_{n,m}^s = \sin nx Y_{n,m}$ ,

$$\tilde{\lambda}_{n,m}^s = -D\lambda_{n,m} - \lambda^Q = -D \left( \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) - 1 - \Lambda. \quad (31)$$

Если  $\lambda^Q = 1 - \Lambda$ , то  $\psi_{n,m}^c = \cos nx Y_{n,m}$ ,

$$\tilde{\lambda}_{n,m}^c = -D\lambda_{n,m} - \lambda^Q = -D \left( \left( \frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) - 1 + \Lambda. \quad (32)$$

□



Учитывая результат леммы 3, получаем

$$\begin{aligned}
 Z(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} Z_{n,m} = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} X_n(x) Y_{n,m}(y) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin nx \left[ 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \\
 &\quad \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right] + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos kx \left[ 2lk \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \\
 &\quad \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm ilk \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right],
 \end{aligned} \tag{33}$$

Тогда, в соответствии с (33) получаем два выражения для  $v$

$$\begin{aligned}
 v(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1, k=1}^{\infty} A_{n,k} \sin nx \left[ \pi k \cos \frac{\pi k}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi k}{l} y + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} y \pm i\pi(2k-1) \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} y \right] \right) \exp[-\tilde{\lambda}_{n,k}^s t],
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1, k=1}^{\infty} B_{n,k} \cos nx \left[ \pi k \cos \frac{\pi k}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi k}{l} y + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} y \pm i\pi(2k-1) \sin \frac{\pi(2k-1)}{2l} y \right] \right) \exp[-\tilde{\lambda}_{n,k}^c t].
 \end{aligned} \tag{35}$$

### 3. МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Рассмотрим одну из модельных задач

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} + v &= D\Delta v + \Lambda Q_h v - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \quad |x| < \pi, \quad |y| < l, \quad t \geq 0, \\
 \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm l} &= \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=\pm l}, \\
 v(x + 2\pi, y, t) &= v(x, y, t), \\
 v(x, y, 0) &= v_0(x, y).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Для получения асимптотической формы пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (36), бифурцирующих из пространственно-однородного решения  $w$ , воспользуемся методом центральных многообразий.

Устойчивость решения определяется знаком  $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^s)$  и  $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^c)$ . При  $\Lambda > -1$   $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^s) < 0$ ,  $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^c) < 0$  и решение устойчивое. При  $\Lambda < -1$  существуют значения  $n, m$ , при которых  $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^s) = 0$ . Обозначим  $D_{n,m} = -\frac{1 + \Lambda + \tilde{\lambda}_{n,m}^s}{\left(\left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2\right)}$  бифуркационные значения параметра  $D$ . Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** При  $\Lambda < -1$ . Существует  $\mu > 0$ , такое что для значений параметра  $D$ , удовлетворяющих неравенству  $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$ , где  $D_{1,1} = -\frac{1 + \Lambda + \tilde{\lambda}_{1,1}^s}{\left(\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + 1\right)}$ ,

в окрестности нулевого решения начально-краевой задачи (36) существует непрерывная ветвь стационарных точек  $z = z(D) > 0$  уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \tilde{\lambda}_{1,1}^s(D)z - \frac{3\Lambda}{32}K_{1,4}^-z^3 + \\ & + \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024K_{1,20}^-} \left[ \frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3} \left( \frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{1}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) + \frac{K_{3,20}^- K_{1,12}^-}{(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s)} \right] z^5 + \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $K_{\eta,\xi}^\pm = \eta^2 \pi^2 \pm \xi^2 l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ , которой соответствуют пространственно-неоднородные решения

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, D) = & \sin x \left( 2l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l} y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l} y \right) z(t) + \\ & + \left[ p_{3,1}(x, D) \left( 6l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l} y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l} y \right) + \right. \\ & \left. + p_{3,3}(x, D) \left( 6l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{3\pi}{2l} y + 3il \sin \frac{3\pi}{2l} y \right) \right] z(t)^3 + \\ & + \left[ p_{5,1}(x, D) \left( 10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l} y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l} y \right) + \right. \\ & \left. + p_{5,3}(x, D) \left( 10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{3\pi}{2l} y + 3i\pi \sin \frac{3\pi}{2l} y \right) + \right. \\ & \left. + p_{5,5}(x, D) \left( 10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{5\pi}{2l} y + 5i\pi \sin \frac{5\pi}{2l} y \right) \right] z^5(t) + \xi(z, x, y, D) |_{z=z(D)}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$p_{3,1}(x, D) = \frac{\Lambda K_{1,4}^- K_{1,12}^-}{32 \left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} \sin 3x,$$

$$p_{3,3} = \frac{\Lambda K_{1,4}^+}{288} \left[ \frac{3}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s \right)} \sin x - \frac{1}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s \right)} \sin 3x \right],$$

$$p_{5,1} = \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024 \left( 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,100}^-} \left[ -\frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3} \left( \frac{3}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) + \right. \quad (39)$$

$$\left. + \frac{K_{1,12}^- \left( K_{3,20}^- K_{1,36}^- - 192\pi^2 l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right)}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} \right] \sin 3x +$$

$$+ \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left( 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,1}^s \right) K_{1,100}^-} \left( \frac{3K_{3,20}^- K_{1,12}^-}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s} + \frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin 5x,$$

$$p_{5,3} = \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024 \left( 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s \right) K_{9,100}^-} \left[ -\frac{\left( K_{1,12}^- \right)^2 K_{3,20}^+}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} + \right.$$

$$\left. + \frac{K_{1,4}^+ K_{3,20}^-}{3} \left( \frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \right] \sin x +$$

$$+ \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left( 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s \right) K_{9,100}^-} \left[ \frac{6 \left( K_{1,12}^- \right)^2 K_{3,20}^+}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} + \right. \quad (40)$$

$$\left. + K_{1,4}^+ K_{3,20}^- \left( \frac{6}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{5}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \right] \sin 3x +$$

$$+ \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left( 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,3}^s \right) K_{9,100}^-} \left[ \frac{K_{1,4}^+ K_{3,20}^-}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} - \frac{3 \left( K_{1,12}^- \right)^2 K_{3,20}^+}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} \right] \sin 5x,$$

$$\begin{aligned}
p_{5,5} = \frac{\Lambda^2(K_{1,4}^+)^2}{15360} & \left[ \frac{1}{5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,5}^s} \left( \frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \frac{1}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin x - \right. \\
& - \frac{1}{5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,5}^s} \left( \frac{3}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin 3x + \\
& \left. + \frac{1}{(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,5}^s)} \frac{1}{(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s)} \sin 5x \right]. \tag{41}
\end{aligned}$$

Решение  $\varphi(x, y, D)$  – устойчивое.

*Доказательство.* В окрестности пространственно-однородного решения  $v = 0$  задачи (36) для  $D$ , удовлетворяющих неравенству  $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$  существует центральное многообразие [25], представимое в виде

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, D) = \sin x & \left( 2l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi y}{2l} + i\pi \sin \frac{\pi y}{2l} \right) z(t) + \\
& + \left[ p_{3,1}(x, D) \left( 6l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi y}{2l} + i\pi \sin \frac{\pi y}{2l} \right) + \right. \\
& + p_{3,3}(x, D) \left( 6\pi \cos \frac{3\pi}{2l} y + 3il \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{3\pi}{2l} y \right) \left. \right] z(t)^3 + \\
& + \left[ p_{5,1}(x, D) \left( 10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi y}{2l} + i\pi \sin \frac{\pi y}{2l} \right) + \right. \\
& + p_{5,3}(x, D) \left( 10\pi \cos \frac{3\pi}{2l} y + 3il \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{3\pi}{2l} y \right) + \\
& + p_{5,5}(x, D) \left( 10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{5\pi}{2l} y + 5i\pi \sin \frac{5\pi}{2l} y \right) \left. \right] z(t)^5 + \xi(z, x, y, D) |_{z=z(D)}, \tag{42}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, D) = X_1(x)Y_{1,1}(y)z(t) & + \left[ p_{3,1}(x, D)Y_{3,1}(y) + p_{3,3}(x, D)Y_{3,3}(y) \right] z(t)^3 + \\
& + \left[ p_{5,1}(x, D)Y_{5,1}(y) + p_{5,4}(x, D)Y_{5,3}(y) + p_{5,5}(x, D)Y_{5,5}(y) \right] z(t)^5 + \xi(z, x, y, D) |_{z=z(D)},
\end{aligned}$$

где  $p_{3,1}(x, D)$ ,  $p_{3,3}(x, D)$ ,  $p_{5,1}(x, D)$ ,  $p_{5,3}(x, D)$ ,  $p_{5,5}(x, D)$  функции из пространства  $L_2(S)$ . На многообразии (42) уравнение (36) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_{1,1}(D)z + C_3 z^3 + C_5 z^5 + \dots \tag{43}$$

Найдём коэффициенты разложений (42) и (43), ограничиваясь рассмотрением трёх слагаемых. Подставим (42) и (43) в уравнение (36). Приравняем коэффициенты при степенях функции  $z(t)$ . При  $z(t)$ :

$$\tilde{\lambda}_{1,1}^s X_1(x)Y_{1,1}(y) = D \left( -1 - \frac{\pi^2}{4l^2} \right) X_1(x)Y_{1,1}(y) - X_1(x)Y_{1,1}(y) - \Lambda X_1(x)Y_{1,1}(y).$$

Учитывая (31), приходим к тождеству  $\tilde{\lambda}_{1,1}^s \equiv -D \left( 1 + \frac{\pi^2}{4l^2} \right) - 1 - \Lambda$ . Приравнявая коэффициенты при  $z^3(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left( -Dp_{3,1}''(x) + \left( 1 + \frac{\pi^2}{4l^2}D + 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,1}(x) - \Lambda p_{3,1}(-x) \right) Y_{3,1}(y) + \\ & + \left( -Dp_{3,3}''(x) + \left( 1 + \frac{9\pi^2}{4l^2}D + 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,3}(x) - \Lambda p_{3,3}(-x) \right) Y_{3,3}(y) + \\ & + C_3 \sin x Y_{1,1}(y) - \frac{\Lambda}{6} \sin^3 x Y_{1,1}^3(y) = 0. \end{aligned}$$

Из условия ортогональности собственных функций, получаем  $C_3 = -\frac{3\Lambda}{32} (\pi^2 - 4l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$  и уравнения для определения функций  $p_{3,1}(x)$  и  $p_{3,3}(x)$ :

$$\begin{aligned} & K_{1,36}^- \left[ Dp_{3,1}''(x) - \left( 1 + D\frac{\pi^2}{4l^2} + 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,1}(x) + \Lambda p_{3,1}(-x) \right] + \\ & + \frac{1}{32} \Lambda K_{1,4}^- K_{1,12}^- \sin 3x = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

$$Dp_{3,3}'' - \left( 1 + D\frac{9\pi^2}{4l^2} + 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,3}(x) + \Lambda p_{3,3}(-x) + \frac{\Lambda}{72} K_{1,4}^- \sin^3 x = 0. \tag{45}$$

Так как  $D_{3,1} = -\frac{\tilde{\lambda}_{3,1}^s + 1 + \Lambda}{1 + \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^2}$ ,  $D_{3,3} = -\frac{\tilde{\lambda}_{3,3}^s + 1 + \Lambda}{9 + \left( \frac{3\pi}{2l} \right)^2}$ , то из (44), (45) находим

$$p_{3,1}(x, D) = \frac{\Lambda K_{1,4}^- K_{1,12}^-}{32 \left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} \sin 3x,$$

$$p_{3,3} = \frac{\Lambda K_{1,4}^+}{288} \left[ \frac{3}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s \right)} \sin x - \frac{1}{\left( 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s \right)} \sin 3x \right]$$

Приравнявая коэффициенты при  $z^5(t)$ , получаем уравнение для определения  $p_{5,1}(x)$ ,  $p_{5,3}(x)$ ,  $p_{5,5}(x)$ :

$$\begin{aligned} & \left( -Dp''_{5,1}(x) + \left( 1 + \frac{\pi^2}{4l^2}D + 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{5,1}(x) - \Lambda p_{5,5}(-x) \right) Y_{5,1}(y) + \\ & + \left( -Dp''_{5,3}(x) + \left( 1 + \frac{9\pi^2}{4l^2}D + 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{5,3}(x) - \Lambda p_{5,3}(-x) \right) Y_{5,3}(y) + \\ & + \left( -Dp''_{5,5}(x) + \left( 1 + \frac{25\pi^2}{4l^2}D + 5\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{5,5}(x) - \Lambda p_{5,5}(-x) \right) Y_{5,5}(y) + \quad (46) \\ & + C_5 X_1(x) Y_{3,1}(y) + \left( 3C_3 p_{3,1}(x) Y_{1,1}(y) + \frac{\Lambda}{2} p_{3,1}(-x) X_1^2(x) Y_{1,1}^2 Y_{3,1} \right) + \\ & + \left( 3C_3 p_{3,3}(x) Y_{3,3}(y) + \frac{\Lambda}{2} p_{3,3}(-x) X_1^2(x) Y_{1,1}^2 Y_{3,3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая ортогональность собственных функций, найденные ранее  $C_3$ ,  $p_{3,1}(x)$ ,  $p_{3,3}(x)$  и условие разрешимости уравнения (46), находим  $C_5$

$$C_5 = \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024 K_{1,20}^-} \left[ \frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3} \left( \frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{1}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) + \frac{K_{3,20}^- K_{1,12}^-}{(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s)} \right].$$

Следовательно  $p_{5,1}(x)$ ,  $p_{5,3}(x)$ ,  $p_{5,5}(x)$  определяются равенствами (39), (40), (41) соответственно.

Используя описанный алгоритм, процесс может быть продолжен.

Исходя из условия  $\Lambda < -1$  и равенства (37), имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» (см. [27], гл. 6. 3) и от тривиального решения ответвляются два устойчивых решения  $\pm\varphi(x, y, D)$ .

□

Теорема носит локальный характер. Используя приближенное равенство

$$\begin{aligned} & \varphi(x, y, D) \approx X_1(x) Y_{1,1}(y) z(t) + \\ & + p_{3,1}(x, D) \left[ Y_{3,1}(y) + p_{3,3}(x, D) Y_{3,3}(y) \right] z(t)^2 + \left[ p_{5,1}(x, D) Y_{5,1}(y) + \right. \\ & \left. + p_{5,3}(x, D) Y_{5,3}(y) + p_{5,5}(x, D) Y_{5,5}(y) \right] z^5(t) + \xi(z, x, y, D) |_{z=z(D)}, \end{aligned}$$

в пакете “Wolfram Mathematica 11.3” были проведены численные эксперименты по построению приближенных пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (36) с различными значениями параметров. Результаты приведены на рисунках 1, 2.

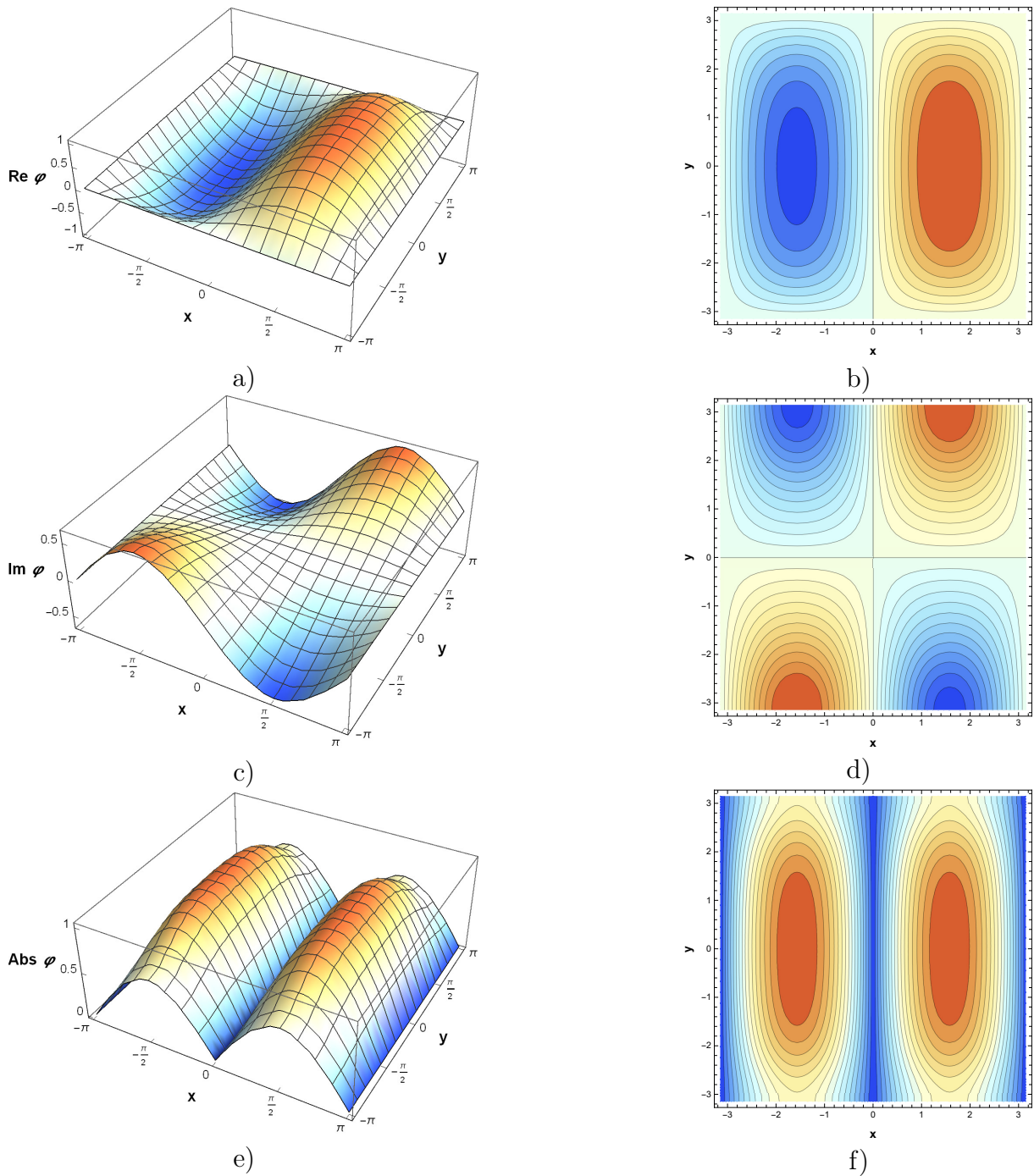


Рис. 1. Приближенное решение задачи (36) при  $\alpha = \pi/4$ ,  $D = 0.3$ ,  $\Lambda = -3/2$ : а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; с) мнимая часть решения; д) линии уровня мнимой части решения; е) абсолютная величина решения; ф) линии уровня абсолютной величины решения.

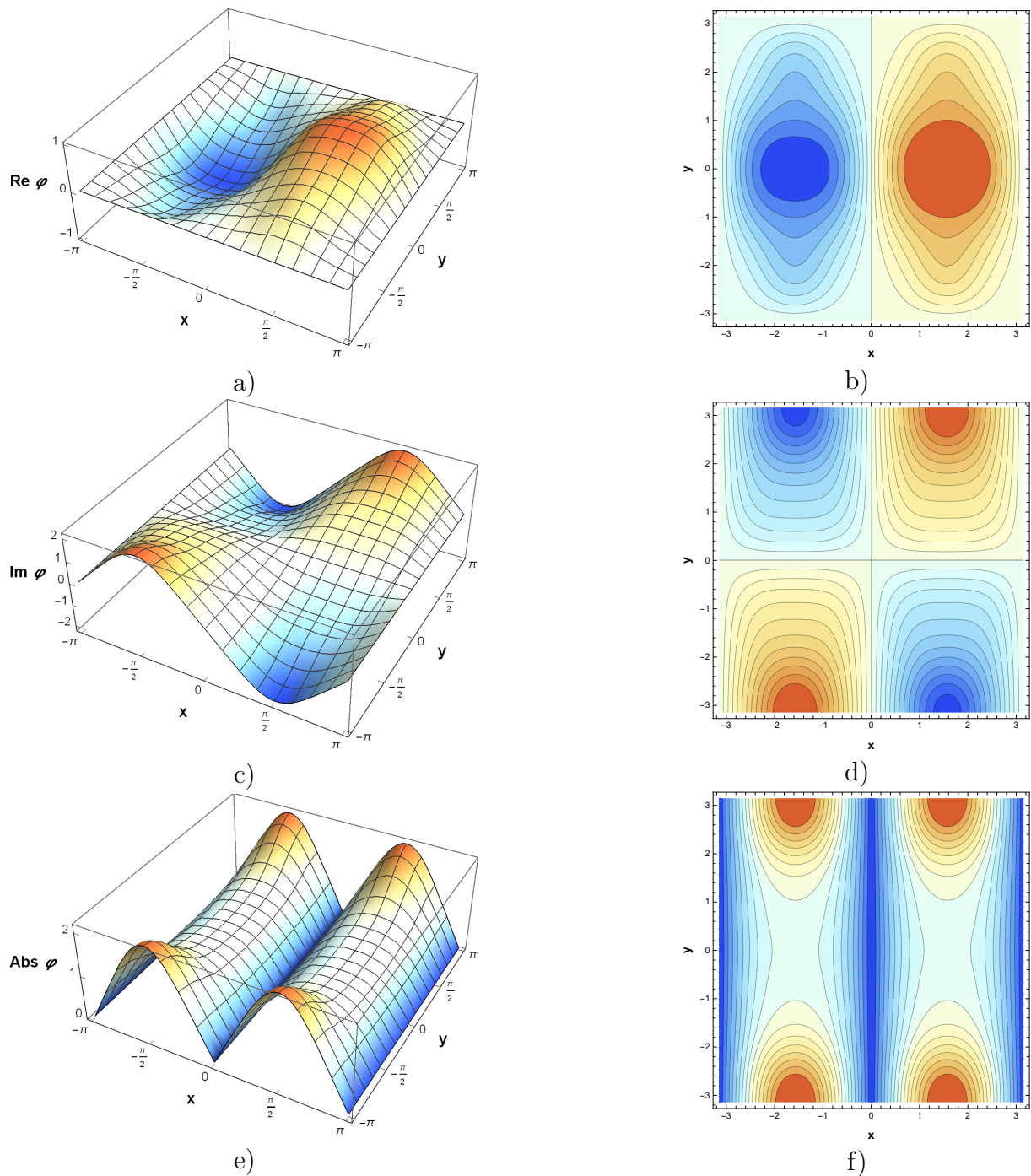


Рис. 2. Приближенное решение задачи (36) при  $\alpha = \pi/12$ ,  $D = 0.3$ ,  $\Lambda = -3/2$ : а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; с) мнимая часть решения; д) линии уровня мнимой части решения; е) абсолютная величина решения; ф) линии уровня абсолютной величины решения.



Полученные результаты при  $\alpha = 0$  согласуются с результатами, полученными в [26].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача с косою производной обобщает задачу с условиями Неймана. В соответствующей спектральной задаче краевые условия не разделяются, явное построение собственных функций усложняется. Выделены два основных случая. Решена спектральная задача для функционально-дифференциального уравнения параболического типа с преобразованием отражения пространственной переменной на прямоугольнике и двумя разными краевыми условиями: с косою производной на вертикальных и на горизонтальных границах, и с косою производной на горизонтальных границах и с условием периодичности на вертикальных границах.

С помощью метода центральных многообразий получено асимптотическое представление пространственно-неоднородного стационарного решения нелинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с отражением пространственной переменной с краевыми условиями с косою производной и условием периодичности, бифурцирующего от пространственно-однородного решения при уменьшении бифуркационного параметра.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю В.А.Лукьяненко за постановку задачи, ценные советы при планировании исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 201 с.  
RAZGULIN, A. V. (2008) *Nonlinear models of optical synergetics*. Moscow: MAX-Press.
2. Разгулин, А. В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Матем. моделирование. — 1993. — 5:4. — С. 105–119.  
RAZGULIN, A. V. (1993) Rotational waves in optical system with 2-d feedback. *Matem. Mod.* 5:4. p. 105–119.
3. Белан, Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — 40:5. — С. 645–654.  
BELAN, E. (2004) On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 40:5. p. 692–702.

4. Чушкин, В. А., Разгулин, А. Б. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2003. — 2. — С. 13–20.  
CHUSHKIN, V. A. & RAZGULIN, A. V. (2003) Steady-state patterns in functional-differential diffusion equation with reflection of spatial argument. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 15 Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika*. 2. p. 13–20.
5. Разгулин, А. В., Романенко, Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Журн. вычислит. матем. и мат. Физики. — 2013. — 53:11. — С. 1804–1821.  
RAZGULIN, A. & ROMANENKO, T. E. (2013) Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53:11. p. 1626–1643.
6. Белан, Е. П., Лыкова, О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 1348–1357.  
BELAN, E. & LYKOVA, O. (2004) Rotating structures in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 40:10. p. 1419–1430.
7. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.  
GAKHOV, F. (1966) *Boundary value problems*. Oxford, New York: Pergamon Press.
8. Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. I // СМФН. — 2007. — 26. — С. 3–132.  
SKUBACHEVSKII, A. (2007) Nonclassical boundary value problems. I. *Journal of Mathematical Sciences*. 155:2. p. 199–334.
9. Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. II // СМФН. — 2009. — 33. — С. 3–179.  
SKUBACHEVSKII, A. (2009) Nonclassical boundary value problems. II. *Journal of Mathematical Sciences*. 166:4. p. 377–561.
10. RAUGEL, G. (1995) Dynamics of partial differential equations on thin domains. *Dynamical Systems*. 2. p. 208–315.
11. DELLNITZ, M. et al. (1995) Spirals in scalar reaction–diffusion equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 5:6. p. 1487–1501.

12. ADACHIHARA, H. & FAID, H. (1993) Two-dimensional nonlinear-interferometer pattern analysis and decay of spirals. *JOSA B*. 10:7. p. 1242–1253.
13. ZHELEZNYKH, N. I. (1994) Rotating spiral waves in a nonlinear optical system with spatial interactions / N. I. Zheleznykh [et al.] . *Chaos, Solitons & Fractals*. 4:8. p. 1717–1728.
14. Копяев, А. В. Решение задач о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости // Математика и математическое моделирование. — 2018. — 6. — С. 1–10.  
КОПАЕВ, А. (2018) Oblique derivative problem solution for the lavrentyev-bitsadze equation in a half-plane. *Mathematics and Mathematical Modeling*. 6. p. 1–10.
15. Алгазин, О. Д., Копяев, А. В. К задаче о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.. — 2016. — 02. — С. 1–8.  
ALGAZIN, O. & КОПАЕВ, А. (2016) Oblique derivative problem solution for the lavrentyev-bitsadze equation in a half-plane. *Mathematics and Mathematical Madelling of the Bauman MSTU*. 6. p. 1–8.
16. KARAPETIANTS, N. & SAMKO, S. (2001) *Equations with Involution Operators*. Boston: Birkhäuser.
17. BUDZINSKIY, S. S. & RAZGULIN, A. V. (2017) Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under  $O(2)$  hopf bifurcation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 49. p. 17–29.
18. BUDZINSKIY, S. S. & RAZGULIN, A. V. (2021) Pulsating and Rotating Spirals in a Delayed Feedback Diffractive Nonlinear Optical System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 31:1. p. 2130002.
19. Алимов, Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной // Дифференц. уравнения. — 1981. — 17:10. — С. 1738–1751.  
ALIMOV, SH. (1981) On a problem with an inclined derivative. *Differential. equations*. 17:10. p. 1738–1751.
20. Моисеев, Т. Е. Об одном варианте задачи с наклонной производной // Дифференц. уравнения. — 2006. — 42:10. — С. 1434–1436.  
MOISEEV, T. (2006) On a version of the directional derivative problem. *Diff Equat*. 42. p. 1511–1513.

21. Моисеев, Т. Е. Разрешимость краевых задач с косо́й производной // Дифференц. уравнения. — 2007. — 43:7. — С. 995–997.  
MOISEEV, T. (2007) On a version of the directional derivative problem. *Diff Equat.* 43:7. p. 995–997.
22. Ахманов, С. А. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — 263–325 с.  
AKHMANOV, S., VORONTSOV, M., IVANOV, V. (1990) *Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback. In New Physical Principles of Optical Information Processing.* Moscow: Nauka.
23. KORNUТА, A. & LUKIANENKO, V. (2021) Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables. *Lobachevskii J Math.* 42:5. p. 911–930.
24. Корнута, А. А., Лукьяненко, В. А. Динамика решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа // Известия вузов. ПНД. — 2022. — 30:2. — С. 132–151.  
KORNUТА, A. & LUKIANENKO, V. (2022) Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 30:2. p. 132–151.
25. HENRY, D. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics.* New York: Springer-Verlag.
26. Корнута, А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — 3:28. — С. 49–62.  
KORNUТА, A. (2015) Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with transformation of reflection. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 3:28. p. 49–62.
27. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенти. — М.: Наука, 1985. — 376 с.  
HENRY, D. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Berlin, Heidelberg: Springer.

УДК: 512.554.3

MSC2010: 17B99, 00-02, 17-03, 01A60, 01A61

## О РАЗВИТИИ УСЛОВИЙ МИНИМАЛЬНОСТИ В АЛГЕБРАХ ЛИ

© Е. В. Мещерина

ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
ПРОСП. ПОБЕДЫ, 13, ОРЕНБУРГ, 460018, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: [elena\\_lipilina@mail.ru](mailto:elena_lipilina@mail.ru)

### ON THE DEVELOPMENT OF MINIMALITY CONDITIONS IN LIE ALGEBRAS.

Meshcherina E. V.

**Abstract.** This article discusses the main stages of the development of Lie algebras satisfying minimality conditions. The minimality condition implies stabilization of descending chains and can be applied to various substructures of the Lie algebra: ideals, subideals, subalgebras, as well as inner ideals. All these conditions were transferred to Lie algebras from ring theory and group theory. Such Lie algebras are called "Artinian" by analogy with rings of the same name, since the minimality condition for rings was first considered by Emil Artin. In order to generalize the minimality condition to ideals, quasi-Artinian Lie algebras arose in the study of Artinian Lie algebras. The article presents the main research results of Russian and foreign scientists whose works are devoted to Artinian and quasi-Artinian Lie algebras.

The first papers on Lie algebras with minimality conditions belong to the British mathematician Ian Nicholas Stewart. It was he who began the transfer of all the necessary concepts and conditions from group theory to Lie algebras. Stewart considered minimality conditions in relation to subideals and  $n$ -step Lie algebra subideals. A little later, Ralph Amayo became his co-author. Together they continued their work on transferring the concepts for ascending and descending chains from solvable groups to Lie algebras and proving new results about them. The main results of their research were included in the book "Infinite-dimensional Lie Algebras" the most famous among mathematicians. Their joint work did not end there, the research of minimality conditions was continued. In their works, Amayo and Stewart formulated open-ended questions, the answers to which were later found by their followers. Among them, the following scientists can be distinguished: S. Togo, F. Kubo, T. Ikeda, F.A.M. Aldosrey. Their works are devoted to the study of the relations between various conditions of minimality.

The minimality condition can also be applied to inner ideals, since inner ideals are considered an analogue of the one-sided ideal of rings in Lie algebras. Georgia Benkart can be considered the founder of this approach. Also, this direction belongs to the works of M. Osborne, F. Lopez, E. Garcia, G. Lozano.

As noted above, in order to generalize the minimality condition to ideals in the study of Artinian Lie algebras, F.A.M. Aldosrey in 1983 considered quasi-Artinian Lie algebras. After studying this work, F. Kubo and M. Honda made up a number of questions that were not answered in it, and thus continued the study of quasi-Artinian Lie algebras. In 2021, a joint work by F. Aldosrey and I. Stewart was published, in which they conducted two essentially different

studies of the structure of infinite-dimensional Lie algebras, connected by the fact that special attention was paid to chain conditions, radicals, and generalizations of the “ideal” relation.

Among domestic scientists, Yu.A. Bakhturin, M.V. Zaitsev, S.A. Pihtilov, V.M. Polyakov were engaged in studies of minimality conditions for ideals. The object of their study were special Lie algebras. S.A. Pihtilov and E.V. Meshcherina also considered the minimality conditions for subalgebras and inner ideals and conducted a study of the relationship between Lie algebras with these minimality conditions. All the results of research in this area were applied by S.A. Pihtilov, E.V. Meshcherina and A.N. Blagovisnaya to solve the problem of solvability of the primary radical of the Artinian Lie algebra.

When writing this paper, the author tried to present the results in chronological order.

**Keywords:** *Lie algebras, Lie algebras with minimality condition, Artinian Lie algebras, inner ideal of Lie algebra, nilpotent Lie algebra, algebra of matrices, quasi-Artinian Lie algebras, special Artinian Lie algebras, subalgebra, ideal of Lie algebra.*

## ВВЕДЕНИЕ

Началом зарождения направления алгебр Ли, удовлетворяющих условиям минимальности можно считать 20–30-е гг. XX в., когда перешли к изучению произвольных ассоциативных алгебраических структур, при этом особую роль имели левые и правые идеалы колец.

Определение условий максимальности и минимальности на левые идеалы колец, введенное В. Крулль и Э. Нётер в 1925-26 гг. и заложило основу для данной теории.

Независимо от них, но примерно в тот же период времени, Э. Артин, обобщил результаты Дж. М. Веддерберна, касающиеся разложения полупростых алгебр на все ассоциативные кольца и алгебры, у которых левые идеалы удовлетворяют одновременно и условию максимальности, и условию минимальности. В 1944 г. опубликована работа Артина в соавторстве с С. Несбитт и Р. Траллом, основным содержанием которой было рассмотрение колец с условием минимальности. Именно их сейчас и называют Артиновыми.

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим определение артиновости, которое известно сейчас и распространено в классической литературе [1]:

**Определение 1.** Пусть  $R$  — ассоциативное кольцо. Кольцо  $R$  называется артиновым справа, если любое не пустое множество его правых идеалов имеет минимальный элемент.

Аналогичное определение имеет левая артиновость.

**Теорема 1.** Кольцо  $R$  является артиновым справа (слева) тогда и только тогда, когда множество его правых (левых) идеалов удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек или, говоря иначе, стабилизируется:

$$\rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \dots \supseteq \rho_m \supseteq \dots \exists m \in \mathbb{Z}_+ \forall i \geq m : \rho_i = \rho_m.$$

Не всякое право-артиново кольцо является лево-артиновым [1].

**Определение 2.** Кольцо называется артиновым, если оно одновременно артиново слева и артиново справа [1].

Артиновость была интересна в качестве условия конечности (конечномерности). Хорошо известно, что радикал Джекобсона артинова кольца является нильпотентным, полупростая артинова алгебра является прямой суммой простых артиновых подалгебр, артинова простая алгебра изоморфна алгебре матриц над телом [1].

Также для артиновых колец известно, что любое конечное кольцо является артиновым, конечномерная алгебра над полем является артиновым кольцом и если  $R$  — артиново кольцо, то кольцо полных матриц  $M_n(R)$  также является артиновым кольцом [1].

В конце 60-х годов условие артиновости было перенесено и на неассоциативные алгебраические структуры — йордановы алгебры и алгебры Ли.

Первые упоминания об алгебрах Ли с условием минимальности встречаются в работе И. Стюарта [2] от 1969 года. Все понятия и условия он переносил на алгебры Ли с теории групп. Стюарт рассматривал условие минимальности на подидеалы и  $n$ -ступенчатые подидеалы алгебры Ли. Считается, что алгебра Ли  $L$  удовлетворяет условию минимальности на подидеалы, если каждая непустая совокупность подидеалов из  $L$  имеет наименьший элемент при включении. Доказано, что условие минимальности для 2-ступенчатых подидеалов подразумевает выполнение условия минимальности на все подидеалы (Min-si), и что любая алгебра Ли, удовлетворяющая Min-si, является расширением  $\mathfrak{J}$ -алгебры конечномерной алгеброй (где  $\mathfrak{J}$ -алгебра — это алгебра, в которой каждый подидеал является идеалом). Также Стюарт доказал, что алгебра Ли всех эндоморфизмов векторного пространства удовлетворяет условию минимальности на подидеалы.

В совместной работе от 1972 года Р. Амайо и И. Стюарт перенесли некоторые результаты М. Холла об условиях конечности для разрешимых групп на алгебры Ли. Они доказали, что нильпотентная абелева алгебра Ли  $L$ , удовлетворяющая сразу и условиям минимальности, и условиям максимальности на идеалы является конечномерной [3].

Также совместно Р. Амайо и И. Стюарт исследовали данные структуры при рассмотрении бесконечномерных алгебр Ли [4], [5]. В работе [5] авторы доказывают, что над полями простой характеристики каждая алгебра Ли, удовлетворяющая условию минимальности для 2-ступенчатых подидеалов, удовлетворяет условию минимальности на подалгебры и является конечномерным расширением алгебры Ли, у которой любая подалгебра является идеалом. Но в этом случае условие минимальности для 2-ступенчатых подидеалов не гарантирует его выполнение для всех подидеалов.

Так же, как и в случае с йордановыми алгебрами, аналогом одностороннего идеала колец в алгебрах Ли можно считать внутренние идеалы. Поэтому артиновость для алгебр Ли можно определить и через внутренние идеалы.

Для алгебр Ли внутренние идеалы впервые рассмотрел Джон Фолкнер в 1973 г., систематическое же их изучение начала Джорджия Бенкарт [6], [7]. Она же и применила их к артиновости в 1975 году.

Бенкарт получила структуру внутреннего идеала алгебры Ли  $[R, R]/Z \cap [R, R]$  в виде  $bRf$ , где  $b$  и  $f$  идемпотенты в простом ассоциативном артиновом кольце  $R$ , характеристики, отличной от 2 и 3,  $Z$  — центр, и доказала, что такая алгебра Ли является сразу и артиновой, и нетеровой [7].

На основании выводов Бенкарт М. Осборн в 1976 году провел исследование алгебр Ли, которые удовлетворяют условию убывающей цепи на идеалы идеалов [8]. Целью работы было показать, что алгебра Ли с условием убывающей цепи на внутренние идеалы имеет радикал, который является разрешимым и конечномерным, поскольку любой идеал идеала является внутренним идеалом, и, следовательно, условие убывающей цепи по внутренним идеалам подразумевает то же условие и по идеалам идеалов. Он показал, что алгебра Ли  $L$  удовлетворяет условию убывающей цепи тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i)  $L$  содержит конечномерный разрешимый идеал  $N$ , такой, что каждый разрешимый идеал из  $L$  содержится в  $N$ ,

(ii)  $L/N$  является подпрямой суммой конечного числа первичных алгебр, удовлетворяющих условию убывающей цепи.

Он также показал, что если  $L$  является первичной алгеброй с этим условием цепи, то существует алгебра Ли  $B$ , которая либо проста, либо является тензорным произведением простой алгебры Ли с усеченной полиномиальной алгеброй, так что  $L$  изоморфна подалгебре  $Der B$ , содержащей  $adB$  [8]. Автор отмечает, что все результаты верны над полями любой характеристики, включая 2.

С. Того в 1977 году в работе [9] показал, что различные условия минимальности на восходящих подалгебрах алгебр Ли эквивалентны друг другу. Эти результаты



обобщают результаты, полученные в [2] и [5]. Чуть позже Стюарт доказал более сильное утверждение, что каждая восходящая подалгебра алгебры Ли, удовлетворяющая условию минимальности для подидеалов, является подидеалом [10].

Также соотношения между условиями минимальности исследовал Ф. Кубо [11]. В 1977 г. он дал ответы на некоторые вопросы, поставленные Амайо и Стюартом в [5]. Кубо показал, что алгебры Ли, удовлетворяющие условиям минимальности на абелевы идеалы ( $\text{Min-}\triangleleft \mathfrak{U}$ ) не обязательно совпадают с алгебрами Ли, удовлетворяющими условиям минимальности на нильпотентные идеалы ( $\text{Min-}\triangleleft \mathfrak{R}$ ). Также он дал отрицательный ответ на вопрос об эквивалентности класса алгебр Ли, где каждый нильпотентный идеал является конечномерным ( $\triangleleft \mathfrak{R}\text{-Fin}$ ) и класса алгебр Ли, где каждый абелев идеал является конечномерным ( $\triangleleft \mathfrak{U}\text{-Fin}$ ). Он показал эти результаты, рассмотрев определенную алгебру Ли над полем рациональных чисел.

Доказательство результата о соотношениях между условиями минимальности над произвольным полем привел Т. Икеда в 1979 году в [12]. Он доказал, что  $\text{Min-}\triangleleft \mathfrak{R} \supseteq \text{Min-}\triangleleft_E \mathfrak{U}$ , где  $\text{Min-}\triangleleft_E \mathfrak{U}$  - класс всех алгебр Ли, удовлетворяющих условию минимальности для разрешимых идеалов.

С целью обобщения условия минимальности на идеалы при изучении артиновых алгебр Ли Альдосреем Ф. в 1983 году были рассмотрены квази-артиновы алгебры Ли [13]. Он рассматривал цепочки идеалов, подидеалов и  $n$ -ступенчатых подидеалов, а также условия максимальности и минимальности для них.

**Определение 3.** Алгебра Ли  $L$  называется квази-артиновой, если для любой убывающей цепочки  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$  ее идеалов существуют  $r, s \in \mathbb{N}$ , такие, что  $[L^{(r)}, I_s] \subseteq I_n$  для всех  $n$  или, что эквивалентно этому, существует  $m \in \mathbb{N}$ , такое что  $[L^{(m)}, I_m] \subseteq I_n$  для всех  $n$ .

Ясно, что каждая разрешимая алгебра Ли является квази-артиновой, но легко построить разрешимую алгебру Ли, которая не является артиновой, поэтому квази-артиновы алгебры не обязательно должны быть артиновыми [13].

Также он показал, что конечная прямая сумма квази-артиновых алгебр Ли является квази-артиновой алгеброй Ли и любая локально-нильпотентная квази-артинова алгебра Ли является разрешимой, и рассмотрел радикалы квази-артиновой алгебры Ли, в том числе первичный [13].

Исследованиями квази-артиновых алгебр Ли также занимались Ф. Кубо и М. Хонда [14]. Изучив предыдущую работу, они составили ряд вопросов, на которые в ней не было ответа и таким образом рассмотрели условия, при которых квази-артиновы алгебры Ли являются разрешимыми, а также при которых они удовлетворяют условию минимальности на идеалы, и доказывают, что над любым полем

существует квази-артинова алгебра Ли, которая не удовлетворяет условию минимальности для идеалов, также она не имеет ненулевых разрешимых подидеалов. В данной работе построен пример такой алгебры Ли.

Условие минимальности на идеалы централизатора (Min-c) было впервые рассмотрено Альдосреем и Стюартом в 1988 г. в работе [15]. Аналогичное условие - условие минимальности для идеалов аннигилятора занимает значимое место в теории ассоциативных колец. Авторами показано, что абелевы конечные алгебры Ли удовлетворяют Min-c; что, как и в ассоциативном случае, Min-c не замкнуто относительно расширений или частных; и что, в отличие от ассоциативного случая, Min-c не замкнуто относительно взятия идеалов. Также доказано, что любой гиперцентральный идеал алгебры Ли с Min-c должен быть разрешимым (но не обязательно нильпотентным). Изучены первичные идеалы полупростых алгебр Ли с Min-c и показано, что для таких алгебр максимальные идеалы централизатора совпадают с минимальными первичными идеалами. Доказывается, что в полупростой алгебре Ли с Min-c каждый идеал централизатора является пересечением конечного числа максимальных идеалов централизатора, то есть минимальных первичных идеалов. В заключение приводятся некоторые открытые проблемы.

Артиновы алгебры Ли исследовались в работах отечественных ученых — Ю. А. Бахтурина [16], М. В. Зайцева [17], С.А. Пихтилькова [18] и В.М. Полякова [19]. Их работы посвящены специальным артиновым алгебрам Ли, артиновость определялась через идеалы.

Обзор на некоторые из этих работ уже был сделан ранее в [20], но для полноты изложения кратко опишем результаты и здесь.

Так в 1982 году Ю. А. Бахтурин доказал, что полупростая артинова специальная алгебра Ли изоморфно вложима как кольцо Ли в алгебру Ли, конечнопорожденную как модуль над подходящим коммутативным кольцом [16]. Он так же доказал и обратное утверждение.

М. В. Зайцев в 1998 году в работе [17] доказал, что любая специальная артинова конечно порожденная алгебра Ли имеет конечную размерность. Он использовал описание артиновых алгебр Ли для изучения решетки подалгебр SPI-алгебры. Доказано, что если специальная алгебра Ли  $L$  имеет максимальную подалгебру  $H$ , такую, что  $\dim H < \infty$ , то  $\dim L < \infty$ .

С.А. Пихтильков использовал артиновость в качестве дополнительного условия для возможности построения хорошей структурной теории специальных алгебр Ли в 2001 году [21]. Он доказал разрешимость первичного радикала такой алгебры Ли [18].

Для супералгебр Ли это утверждение так же выполняется [22]. Его ученик В.М. Поляков в 2005 году доказал разрешимость локально нильпотентной артиновой алгебры Ли [19].

Много работ по изучению данного вопроса опубликовано испанскими учеными: Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано. В 2006 году они получили необходимое и достаточное условие артиновости финитарной простой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль в виде ее конечномерности [23, 24]. В 2008 году ими предложена классификация простых непорожденных артиновых алгебр Ли над полем характеристики нуль или больше чем 7 и описана структура внутреннего идеала простой алгебры Ли, возникающей из простой ассоциативной алгебры с ненулевым цокелем [25]. В той же работе авторы доказывают, что алгебра Ли дополняется тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых невырожденных артиновых алгебр Ли.

Годом позже в совместной работе Бенкарт и Лопез выводят структуру внутреннего идеала простых артиновых колец с инволюцией и простых колец с инволюцией и минимальных односторонних идеалов [26].

В 2012 году С.А. Пихтильников вместе со своими учениками вернулся к рассмотрению проблемы разрешимости первичного радикала артиновой алгебры Ли, которая была озвучена на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова “Кольца и модули” А.В. Михалевым еще в 2001 году. Как уже было отмечено выше, этот вопрос был положительно решен С. А. Пихтильниковым для специальной артиновой алгебры Ли [18]. Известно, что в общем случае — для произвольной алгебры Ли, первичный радикал является слабо разрешимым, может не быть разрешимым и даже локально разрешимым [27, 28].

Совместно с Е. В. Мещериной С. А. Пихтильниковым рассмотрены определения артиновости для алгебр Ли через идеалы ( $i$ -артиновость), подалгебры ( $a$ -артиновость) и внутренние идеалы ( $inn$ -артиновость), исследованы соотношения между ними [29]. Они показали, что артиновость через внутренние идеалы влечет за собой артиновость через идеалы, так же, как и артиновость через подалгебры влечет артиновость через идеалы, но обратное в обоих случаях неверно; также и артиновость через внутренние идеалы не обеспечивает артиновость через подалгебры. Можно сделать вывод, что условия артиновости через подалгебры и внутренние идеалы более сильные, нежели артиновость через идеалы.

К примеру, показано, что алгебра Ли  $sl_2(K)$  матриц второго порядка над полем рациональных функций  $K = F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  от счетного числа коммутирующих

переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , где  $F$  — поле,  $\text{char} F = 0$ , удовлетворяет условию минимальности на идеалы, но не на подалгебры.

В другом примере рассмотрено векторное пространство  $V$  над  $F$  и его подпространство  $W$  с базисом  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ , где  $\dim V/W = \infty$ . Через  $W_n$  обозначено подпространство, порожденное векторами  $e_n, e_{n+1}, \dots$ . Так  $W = W_1$ . Тогда простая алгебра Ли  $L = L(V)^{(-)}$  будет  $i$ -артиновой, но не  $\text{inn}$ -артиновой.

В качестве примера бесконечномерной  $\text{inn}$ -артиновой алгебры Ли можно рассмотреть алгебру матриц второго порядка  $L = \text{sl}_2 K$ , где  $K$  — бесконечномерное алгебраически замкнутое расширение поля  $F$ ,  $\text{char} F = 0$ . Доказано, что она также не является  $a$ -артиновой.

Еще один пример — пример одновременно  $a$ -артиновой и  $i$ -артиновой алгебры Ли: подалгебра полной линейной алгебры Ли  $gl(n, C)$ , состоящая из верхнетреугольных матриц.

Очень интересен бесконечномерный случай. Как уже было написано выше, условие минимальности было перенесено на алгебры Ли с теории групп. Среди групп можно выделить так называемые квазициклические группы - абелевы бесконечные группы с выполненным условием минимальности на подгруппы. Например, мультипликативная группа комплексных корней уравнений  $x^{p^n} = 1, n = 1, 2, \dots$  для простого числа  $p$ . Все подгруппы квазициклических групп конечны.

Известная проблема, сформулированная О.Ю.Шмидтом: существуют ли бесконечные неабелевы группы, все подгруппы которых конечны, решена А.Ю.Ольшанским [30].

Но в алгебрах Ли ситуация иная. Все абелевы алгебры Ли с условием минимальности на подалгебры - конечны. В работе [29] доказано, что вопрос о существовании бесконечномерных  $a$ -артиновых алгебр Ли эквивалентен вопросу о существовании первичных бесконечномерных  $a$ -артиновых алгебр Ли. Но ответить на данные вопросы пока не удалось.

В работе [31] С.А. Пихтильков и Е.В. Мещерина доказали, разрешимость первичного радикала  $a$ -артиновой или  $\text{inn}$ -артиновой алгебры Ли. Разрешимость первичного радикала слабоартиновой ( $i$ -артиновой) алгебры Ли С.А. Пихтильков и А.Н. Благовисная доказали в 2015 году [32]. Так же для такой алгебры авторы доказали локальную нильпотентность первичного радикала.

Таким образом, вопрос о разрешимости первичного радикала артиновой алгебры Ли решен полностью.

В 2021 году опубликована работа И. Стюарта и Ф. Альдосрея, в которой они провели два по сути различных исследования структуры бесконечномерных алгебр Ли,

связанных тем, что особое внимание уделено условиям цепочек, радикалам и обобщениям отношения «идеал» [33]. Авторы изучают условия на первичные идеалы, связывающие артиновость и нетеровость, а также квази-артиновость и квази-нетеровость. Доказано, что радикал любого идеала квази-артиновой алгебры Ли есть пересечение конечного числа первичных идеалов, а идеально конечная алгебра Ли квази-нетерова тогда и только тогда, когда она квази-артинова. Оба свойства эквивалентны конечно разрешимости. Также доказана структурная теорема для последовательно конечных артиновых алгебр Ли.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены основные этапы развития алгебр Ли, удовлетворяющих различным условиям минимальности. Условие минимальности может быть применимо как к идеалам, так и подалгебрам, подидеалам и внутренним идеалам. Описаны результаты исследований Российских и зарубежных ученых, работы которых посвящены данному направлению от самого истока до настоящего времени.

Интерес к артиновым и квази-артиновым алгебрам Ли не пропадает. Работа по изучению различных условий минимальности для алгебр Ли и соотношений между ними ведется и сегодня.

В связи с развитием компьютерных наук вызывают интерес и различные приложения артиновых и квази-артиновых алгебр Ли в этой области.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. — М.: Мир, 1972. — 192 с.  
HERSTEIN, I. (1972) *Noncommutative rings*. Moscow: Mir.
2. STEWART, I. N. (1969) The minimal condition for subideals of Lie algebras. *Mathematische Zeitschrift*. 111. p. 301–310.
3. AMAYO, R. K. & STEWART, I. N. (1972) Finitely Generated Lie Algebras. *Journal of The London Mathematical Society-second Series*. 5. p. 697–703.
4. AMAYO, R. K. & STEWART, I. N. (1974) *Infinite-dimensional Lie Algebras*. Leyden: Noordhoff International.
5. AMAYO, R. K. & STEWART, I. N. (1975) Descending chain conditions for Lie algebras of prime characteristic. *Journal of Algebra*. 35. p. 86–98.

6. BENKART, G. (1977) On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Transaction of the American Mathematical Society*. 232. p. 61–81.
7. BENKART, G. (1976) The Lie inner ideal structure of associative rings. *Journal of Algebra*. 43. p. 561–584.
8. OSBORN, J. M. (1977) Lie algebras with descending chain condition. *Pacific Journal of Mathematics*. 73. p. 155–159.
9. TOGO, S. (1977) The minimal condition for ascendant subalgebras of Lie algebras. *Hiroshima Mathematical Journal*. 7. p. 683–687.
10. STEWART, I. N. (1979) The minimal condition for subideals of Lie algebras implies that every ascendant subalgebra is a subideal. *Hiroshima Mathematical Journal*. 9. p. 35–36.
11. KUBO, F. (1978) Finiteness conditions for Abelian ideals and nilpotent ideals in Lie algebras. *Hiroshima Mathematical Journal*. 8. p. 301–303.
12. IKEDA, T. (1979) Chain conditions for abelian, nilpotent and soluble ideals in Lie algebras. *Hiroshima Mathematical Journal*. 9. p. 465–467.
13. ALDOSRAY, F. A. M. (1983) On Lie algebras with finiteness conditions. *Hiroshima Mathematical Journal*. 13. p. 665–674.
14. KUBO, F. & HONDA, M. (1985) Quasi-Artinian Lie algebras. *Hiroshima Mathematical Journal*. 14. p. 563–570.
15. ALDOSRAY, F. A. M. & STEWART, I. N. (1989) Lie algebras with the minimal condition on centralizer ideals. *Hiroshima Mathematical Journal*. 19. p. 397–407.
16. Бахтурин, Ю. А. Артиновы специальные алгебры Ли // Алгебра. — М.:Изд-во МГУ, 1982. — С. 24–26.  
ВАКHTURIN, Yu. A. (1982) Artinian special Lie algebras. *Algebra*. Moscow: Moscow State Univ. Publ.. p. 24–26.
17. ZAITSEV, M. V. (1998) Finiteness conditions on special Lie algebras. *A Journal of Math Sci.* [Online] 88. p. 537–544. Available from:  
<https://doi.org/10.1007/BF02365315>. [Accessed: 30th July 2022].
18. Пихтильков, С. А. Артиновы специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2001. — С. 189–194.

- PIKHTIL'KOV, S. A. (2001) Artinian special Lie algebras. *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups*. Tula: TSPU im. L.N.Tolstogo Publ. p. 189–194.
19. Пихтильков, С. А., Поляков, В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2005. — Т. 6:1. — С. 163–169.
- PIKHTIL'KOV, S. A. & POLYAKOV, V. M. (2005) About locally nilpotent Artinian Lie algebras. *Chebyshevskii sbornik*. 6:1. p. 163–169.
20. Мещерина, Е. В., Пихтилькова, О. А. Развитие понятия "артиновость" для алгебр Ли // Чебышевский сборник. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2018. — Т. 19:1. — С. 167–175.
- MESHCHERINA, E. V. & PIKHTIL'KOVA, O. A. (2018) The development of the concept of "Artinian" for Lie algebras. *Chebyshevskii sbornik*. 19:1. p. 167–175.
21. Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2005. — 202 с.
- PIKHTIL'KOV, S. A. (2005) *Strukturnaya teoriya special'nyh algebr Li*. Tula: TSPU im. L.N. Tolstogo Publ.
22. PIKHTIL'KOV, S. A. & POLYAKOV V. M. (2004) Artinian special Lie superalgebras. *Buletinul Academiei de stiinta a republicii Moldova: Matematica*. 44:1. p. 116–119.
23. LOPEZ, A. F., GARCIA, E., LOZANO, M. G. (2006) Inner ideals of finitary simple Lie algebras. *Journal of Lie Theory*. 16. p. 97–114.
24. LOPEZ, A. F., GARCIA, E., LOZANO, M. G. (2009) Inner ideal structure of nearly artinian Lie algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 137. p. 1–9.
25. LOPEZ, A. F., GARCIA, E., LOZANO, M. G. (2008) An artinian theory for Lie algebras. *Journal of Algebra*. 319:3. p. 938–951.
26. BENKART, G. & LOPEZ, A. F. (2009) The inner ideal structure of associative rings revisited. *Communications in Algebra*. 37. p. 3833 – 3850.
27. Балаба, И. Н., Михалев, А. В., Пихтильков, С. А. Первичный радикал градуированных  $\Omega$ -групп // Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — Т. 12:2. — С. 159–174.
- BALABA, I. N., MIKHALEV, A. V., PIKHTIL'KOV, S. A. (2006) The primary radical of graded  $\Omega$ -groups. *Fundamental and Applied Mathematics*. 12:2. p. 159–174.

28. Пихтилькова, О. А. & Пихтильков, С. А. Локальная разрешимость простого радикала слабоартиновой алгебры Ли // Сибирский математический журнал. — 2016. — 57. — С. 549–551.  
PIKHTIL'KOVA, O. A. & PIKHTIL'KOV, S. A. (2016) Lokal'naya razreshimost' prostogo radikala slaboartinovoj algebrы Li. *Siberian Mathematical Journal*. 57. p. 549–551.
29. Мещерина, Е. В. О различных определениях артиновости для алгебр Ли // Чебышевский сборник. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2013. — Т. 14:3(47). — С. 86–91.  
MESHCHERINA, E. V. (2013) On the different definitions of Artinian for Lie Algebras. *Chebyshevskii sbornik*. 14:3(47). p. 86–91.
30. Ольшанский, А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Известия академии наук СССР. Серия математическая. — 1980. — Т. 44:2. — С. 309–321.  
OL'SHANSKY, A. Yu. (1980) Infinite group with subgroups of prime orders. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*. 44:2. p. 309–321.
31. Мещерина, Е. В., Пихтильков, С. А., Пихтилькова, О. А. О проблеме А.В. Михалева для алгебр Ли // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2013. — 4(2). — С. 84–89.  
MESHCHERINA, E. V., PIKHTIL'KOV, S. A., PIKHTIL'KOVA, O. A. (2013) On the problem of A.V. Mikhalev for Lie algebras. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 4(2). p. 84–89.
32. Благовисная, А. Н., Пихтильков, С. А., Пихтилькова, О. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли // Чебышевский сборник. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2017. — 18:1. — С. 134–142.  
BLAGOVISNAYA, A. N., PIKHTIL'KOV, S. A., PIKHTIL'KOVA, O. A. (2017) On the properties of the primary radical of the weakly-Artinian Lie algebra. *Chebyshevskii sbornik*. 18:1. p. 134–142.
33. ALDOSRAY, F. A. M. & STEWART, I. (2021) Generalised Chain Conditions, Prime Ideals, and Classes of Locally Finite Lie Algebras. *Algebra Colloquium*. 28:1. p. 63–86.



УДК: 514.7

MSC2010: 51F15, 14L24

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ $W(K_5)$

© О. И. Рудницкий

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: oirud58@gmail.com

ABOUT ONE PROPERTY OF BASIC INVARIANTS OF UNITARY GROUP  $W(K_5)$ .

Rudnitskii O. I.

**Abstract.** In this paper, we are considering the finite unitary primitive group  $W(K_5)$  of order  $72 \cdot 6!$  generated by reflections of second order with respect to the hyperplanes in 5-dimensional unitary space (the group of number 33 in the list of Shephard and Todd). As is well known, the algebra of all  $W(K_5)$ -invariant polynomials is generated by 5 algebraically independent homogeneous polynomials  $J_{m_i}$  of degrees  $m_i = 4, 6, 10, 12, 18$ . In the previous works, author obtained in explicit form basic invariants  $J_{m_i}$ .

The main purpose of the article is to consider another method of finding in explicit form the basic invariants of group  $W(K_5)$ . This method is based on the following property of group  $W(K_5)$ .

Let  $G(3, 3, 4)$  be the imprimitive unitary reflection group generated by reflections. Since  $G(3, 3, 4)$  is a subgroup of  $W(K_5)$ , each of polynomials  $J_{m_i}$  is written as a polynomial  $\phi_t(I_k)$  of the polynomials  $I_k = \sum_{i=1}^4 x_i^{3k}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ),  $I_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$  and  $I_5 = x_5$  — the basic invariants of  $G(3, 3, 4)$ .

In the present paper, the explicit form of polynomials  $\phi_t(I_k)$ ,  $t = 4, 6, 10, 12, 18$ , is found and the basis invariants of group  $W(K_5)$  were constructed in explicit form.

**Keywords:** Unitary space, reflection, reflection groups, invariant, algebra of invariants.

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть в  $n$ -мерном унитарном пространстве  $U^n$  задана координатная система началом  $O$  и ортонормированным базисом  $\vec{e}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ); вектор  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ . Введем обозначения:  $R = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  кольцо многочленов от  $n$  переменных над полем комплексных чисел,  $G$  — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями в пространстве  $U^n$ .

Действие группы  $G$  в кольце  $R$  определим следующим образом:

$$\sigma \cdot f = \sigma \cdot f(\vec{x}) = f(\sigma^{-1} \vec{x}), \quad \sigma \in G, f(\vec{x}) = f(x_i) \in R.$$

Многочлен  $f \in R$  называется  $G$ -инвариантом группы  $G$ , если  $\sigma \cdot f = f$  для всех  $\sigma \in G$ . Множество всех  $G$ -инвариантов имеет структуру алгебры, которую будем обозначать  $I^G$ . Алгебра  $I^G$  порождается  $n$  алгебраически независимыми однородными многочленами (*базисные инварианты*) степеней  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  [1]. Числа  $m_i$  для заданной группы  $G$  определяются однозначно, а базисные инварианты — нет.

Известно [1], что в пространстве  $U^5$  существует единственная конечная неведущая примитивная группа  $G$ , порожденная отражениями. Это группа  $W(K_5)$  порядка  $72 \cdot 6!$ , порожденная отражениями второго порядка относительно 45 четырехмерных плоскостей (группа № 33 в списке Шепарда-Тодда) [1].

Алгебра  $I^{W(K_5)}$  порождена пятью алгебраически независимыми многочленами степеней  $m_i = 4, 6, 10, 12, 18$  [1].

Ранее, в работах [2]-[5], были различными методами построены в явном виде разные системы базисных инвариантов группы  $W(K_5)$ .

В рамках этой статьи рассматривается еще один подход к построению в явном виде базисных инвариантов группы  $W(K_5)$ , а именно, решается вопрос о представлении базисных инвариантов группы  $W(K_5)$  в виде многочлена от степенных сумм  $I_k = \sum_{i=1}^4 x_i^{3k}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), а также многочленов  $I_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$  и  $I_5 = x_5$ .

Реализованный в работе метод построения базисных инвариантов ранее применялся автором в работах [4], [6], а также в работе [7].

Отметим, что для получения результатов в этой статье был использован программный пакет — система компьютерной алгебры Maple.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Группа  $W(K_5)$  порядка  $72 \cdot 6!$  порождается в пространстве  $U^5$  отражениями второго порядка относительно 4-плоскостей с уравнениями [3], [5]

$$x_1 - \omega^2 x_2 = 0, \quad x_t - x_{t+1} = 0 \quad (t = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

и

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \sqrt{2}x_5 = 0, \quad (2)$$

где  $\omega = \frac{-1+\varepsilon\sqrt{3}}{2}$  — первообразный корень третьей степени из единицы,  $\varepsilon = \sqrt{-1}$ .

Уравнения всех 45 четырехмерных плоскостей, отражения относительно которых принадлежат группе  $W(K_5)$ , имеют вид [5]

$$x_i - \omega^{k_0} x_j = 0, \quad i, j = \overline{1, 4}, \quad (i < j), \quad k_0 = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

и

$$\sum_{i=1}^4 \omega^{k_i} x_i + \sqrt{2} \omega^{k_5} x_5 = 0, \quad (4)$$

где  $\sum_{i=1}^4 k_i + 2k_5 \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $k_i, k_5 = \overline{1, 3}$ .

Множество их нормальных векторов (система корней группы) состоит из 270 векторов

$$\pm \frac{\varepsilon \omega^t}{\sqrt{2}} (\vec{e}_i - \omega^{k_0} \vec{e}_j), \pm \frac{\omega^t}{\sqrt{6}} \left( \sum_{i=1}^4 \omega^{k_i} \vec{e}_i + \sqrt{2} \omega^{k_5} \vec{e}_5 \right), \quad t = \overline{1, 3},$$

и инвариантно относительно группы  $W(K_5)$  [4]. Степени базисных инвариантов  $m_i = 4, 6, 10, 12, 18$  [1].

Ранее, в работе [4] (см. также [5]), используя многочлены Погорелова, автор построил в явном виде базисные инварианты  $J_{m_i}$  группы  $W(K_5)$ .

*Основная цель настоящей работы* — рассмотреть еще один способ построения в явном виде базисных инвариантов унитарной группы  $W(K_5)$ , а именно, выразить их через степенные суммы  $I_k = \sum_{i=1}^4 x_i^{3k}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) и многочлены  $I_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$  и  $I_5 = x_5$ .

Конечная унитарная импримитивная группа  $G(3, 3, 4)$  порождается в пространстве  $U^4$  отражениями второго порядка относительно 3-плоскостей с уравнениями (1) и содержит отражения второго порядка относительно 3-плоскостей с уравнениями (3) [1].

Следовательно,  $G(3, 3, 4) \subset W(K_5)$ , а значит алгебра  $I^{W(K_5)} \subset I^{G(3,3,4)}$ .

Таким образом, всякий инвариант группы  $W(K_5)$  является инвариантом группы  $G(3, 3, 4)$ . При этом в силу выбора фундаментальных областей групп  $G(3, 3, 4)$  и  $W(K_5)$  (см. (1), (2)) инвариант  $f$  группы  $G(3, 3, 4)$  является инвариантом  $W(K_5)$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию

$$\delta(f) = f, \quad (5)$$

где  $\delta$  — отражение второго порядка относительно 4-плоскости с уравнением (2), то есть преобразование вида

$$\begin{cases} x_i \rightarrow x_i - \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^4 x_k + \sqrt{2} x_5 \right), \quad i = \overline{1, 4}, \\ x_5 \rightarrow x_5 - \frac{\sqrt{2}}{3} \left( \sum_{k=1}^4 x_k + \sqrt{2} x_5 \right). \end{cases}$$

Известно [1], что алгебра  $I^{G(3,3,4)}$  в пространстве  $U^4$  порождается четырьмя алгебраически независимыми многочленами  $I_k = \sum_{i=1}^4 x_i^{3k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $I_4 = x_1x_2x_3x_4$ . При этом, так как мы рассматриваем действие группы  $G(3, 3, 4)$  в пространстве  $U^5$ , то к базисным инвариантам нужно добавить еще многочлен  $I_5 = x_5$  (4-плоскость с уравнением  $x_5 = 0$  определяет инвариантное подпространство  $U^4 \subset U^5$ , в котором действует группа  $G(3, 3, 4)$ ).

Таким образом, любой элемент  $f$  алгебры  $I^{G(3,3,4)}$  представим в виде  $f = \phi_t(I_k)$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , где  $\phi_t(I_k)$  — некоторый многочлен подходящей степени  $t$ , от форм  $I_k$ . При этом  $f \in I^{W(K_5)}$ , если многочлен  $\phi_t(I_k)$  инвариантен относительно отражения  $\delta$ .

Получим явный вид многочленов  $\phi_t(I_k)$  и найдем базисные инварианты группы  $W(K_5)$ . Понятно, что необходимо рассмотреть только многочлены  $\phi_t(I_k)$  степеней  $t = 4, 6, 10, 12, 18$ .

1. Пусть  $t = 4$ . Тогда

$$P_4 = \phi_4(I_1, I_4, I_5) = a_1I_5^4 + a_2I_1I_5 + a_3I_4,$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — неопределенные коэффициенты.

Условие (5), для многочлена  $P_4$ , приводит к следующей системе линейных уравнений для коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$ :

$$\begin{cases} 8\sqrt{2}a_1 + 34a_2 + 5\sqrt{2}a_3 = 0, \\ 20a_1 + 2\sqrt{2}a_2 - a_3 = 0, \\ 16a_1 - 20\sqrt{2}a_2 - 8a_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение  $a_1 = c, a_2 = -2\sqrt{2}c, a_3 = 12c$ . Следовательно,

$$P_4 = (I_5^4 - 2\sqrt{2}I_1I_5 + 12I_4).$$

Ненулевой многочлен  $P_4$ , определяемый однозначно с точностью до постоянного множителя, является базисным инвариантом четвертой степени группы  $W(K_5)$ . Отметим, что при  $c = 1$  он совпадает с базисным инвариантом  $J_4$  группы  $W(K_5)$ , полученным в работе [4] (см. также [5]), то есть

$$J_4 = I_5^4 - 2\sqrt{2}I_1I_5 + 12I_4.$$

2. Если  $t = 6$ , то многочлен

$$P_6 = \phi_6(I_1, I_2, I_4, I_5) = a_1I_5^6 + a_2I_5^3I_1 + a_3I_5^2I_4 + a_4I_2 + a_5I_1^2.$$

Как и в случае  $t = 4$ , из соотношения (5) получаем линейную систему из пяти уравнений

$$\begin{cases} 4a_1 - 5\sqrt{2}a_2 - 2a_3 - 331a_4 - 352a_5 = 0, \\ 182a_1 + 2\sqrt{2}a_2 - a_3 - 8a_4 - 32a_5 = 0, \\ 40a_1 + 31\sqrt{2}a_2 + 7a_3 - 70a_4 - 280a_5 = 0, \\ 40\sqrt{2}a_1 + 602a_2 - 11\sqrt{2}a_3 + 200\sqrt{2}a_4 - 172\sqrt{2}a_5 = 0, \\ 20a_1 + 11\sqrt{2}a_2 - 7a_3 - 80a_4 + 4a_5 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид:  $a_1 = \frac{1}{5}c$ ,  $a_2 = \sqrt{2}c$ ,  $a_3 = 18c$ ,  $a_4 = -\frac{6}{5}c$ ,  $a_5 = c$ . Таким образом,

$$P_6 = \frac{c}{5}(I_5^6 + 5\sqrt{2}I_5^3I_1 + 90I_5^2I_4 - 6I_2 + 5I_1^2).$$

При  $c \neq 0$ , форма  $P_6$  является базисным инвариантом шестой степени группы  $W(K_5)$ . Если  $c = 5$ , то  $P_6 = J_6$ , где  $J_6$  — базисный инвариант шестой степени группы  $W(K_5)$ , найденный в работе [4] (см. также [5]), то есть

$$J_6 = I_5^6 + 5\sqrt{2}I_5^3I_1 + 90I_5^2I_4 - 6I_2 + 5I_1^2.$$

**3.** Пусть  $t = 10$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_{10} = \phi_{10}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = & a_1I_5^{10} + a_2I_5^7I_1 + a_3I_5^6I_4 + a_4I_5^4I_2 + a_5I_5^4I_1^2 + \\ & + a_6I_5^3I_1I_4 + a_7I_5^2I_4^2 + a_8I_5I_1^3 + a_9I_5I_1I_2 + a_{10}I_5I_3 + a_{11}I_1^2I_4 + a_{12}I_2I_4. \end{aligned}$$

Как и ранее, соотношение (5) приводит к однородной линейной системе относительно 12 неизвестных коэффициентов  $a_i$ , которую мы не приводим здесь вследствие ее громоздкости. Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 = c_1, a_2 = 3\sqrt{2}c_1, a_3 = 182c_1 + 4\sqrt{2}c_2, a_4 = 14c_1 + \sqrt{2}c_2, \\ a_5 = -35c_1 - \sqrt{2}c_2, a_6 = -140\sqrt{2}c_1 - 2c_2, a_7 = 1260c_1 + 9\sqrt{2}c_2, a_8 = c_2, \\ a_9 = -28\sqrt{2}c_1 - 4c_2, a_{10} = 30\sqrt{2}c_1 + 3c_2, a_{11} = 70c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2, a_{12} = -102c_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}c_2, \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные числа.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{10} = c_1(I_5^{10} + 3\sqrt{2}I_5^7I_1 + 182I_5^6I_4 + 14I_5^4I_2 - 35I_5^4I_1^2 - 140\sqrt{2}I_5^3I_1I_4 + \\ + 1260I_5^2I_4^2 - 28\sqrt{2}I_5I_1I_2 + 30\sqrt{2}I_5I_3 + 70I_1^2I_4 - 102I_2I_4) + c_2(4\sqrt{2}I_5^6I_4 + \sqrt{2}I_5^4I_2 - \\ - \sqrt{2}I_5^4I_1^2 - 2I_5^3I_1I_4 + 9\sqrt{2}I_5^2I_4^2 + I_5I_1^3 - 4I_5I_1I_2 + 3I_5I_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}I_1^2I_4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}I_2I_4). \end{aligned}$$

Эта форма при любых значениях  $c_1, c_2$  есть инвариант 10-й степени группы  $W(K_5)$ .

При  $t_1 = 10c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2$  и  $t_2 = c_1$ , форма

$$P_{10} = t_1 J_{10} + t_2 J_4 J_6,$$

где  $J_4, J_6, J_{10}$  — базисные инварианты группы  $W(K_5)$ , найденные в работе [4] (см. также [5]).

Следовательно, инвариант  $P_{10}$  является базисным при  $c_2 \neq -10\sqrt{2}c_1$ , и при  $c_1 = 0, c_2 = \sqrt{2}$  совпадает с базисным инвариантом  $J_{10}$ :

$$\begin{aligned} J_{10} = & 8I_5^6 I_4 + 2I_5^4 I_2 - 2I_5^4 I_1^2 - 2\sqrt{2}I_5^3 I_1 I_4 + 18I_5^2 I_4^2 + \\ & + \sqrt{2}I_5 I_1^3 - 4\sqrt{2}I_5 I_1 I_2 + 3\sqrt{2}I_5 I_3 + I_1^2 I_4 - 3I_2 I_4. \end{aligned}$$

4. Если  $t = 12$ , то

$$\begin{aligned} P_{12} = \phi_{12}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = & a_1 I_5^{12} + a_2 I_5^9 I_1 + a_3 I_5^8 I_4 + a_4 I_5^6 I_2 + a_5 I_5^6 I_1^2 + \\ & + a_6 I_5^5 I_1 I_4 + a_7 I_5^4 I_4^2 + a_8 I_5^3 I_3 + a_9 I_5^3 I_1^3 + a_{10} I_5^3 I_1 I_2 + a_{11} I_5^2 I_2 I_4 + \\ & + a_{12} I_5 I_1 I_4^2 + a_{13} I_1^4 + a_{14} I_2^2 + a_{15} I_4^3 + a_{16} I_1^2 I_2 + a_{17} I_1 I_3 + a_{18} I_5^2 I_1^2 I_4. \end{aligned}$$

Условие (5) приводит к однородной линейной системе относительно 18 неопределенных коэффициентов  $a_i$  с общим решением

$$\begin{aligned} a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = & 330c_1 - \frac{15\sqrt{2}}{2}c_2 + \frac{2\sqrt{2}}{9}c_3, a_4 = -\frac{209}{9}c_1 + \frac{37\sqrt{2}}{8}c_2 - \frac{5\sqrt{2}}{54}c_3, \\ a_5 = & \frac{275}{2}c_1 - \frac{31\sqrt{2}}{8}c_2 + \frac{5\sqrt{2}}{54}c_3, a_6 = \frac{1815\sqrt{2}}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 + \frac{11}{9}c_3, \\ a_7 = & \frac{16335}{2}c_1 - \frac{27\sqrt{2}}{8}c_2 + \frac{9\sqrt{2}}{2}c_3, a_8 = 330\sqrt{2}c_1 - 33c_2 + \frac{11}{18}c_3, \\ a_9 = & \frac{715\sqrt{2}}{4}c_1 - \frac{103}{8}c_2 + \frac{17}{54}c_3, a_{10} = -\frac{1045\sqrt{2}}{2}c_1 + \frac{185}{4}c_2 - \frac{25}{27}c_3, \\ a_{11} = & -495c_1 - \frac{117\sqrt{2}}{4}c_2 - \frac{\sqrt{2}}{12}c_3, a_{12} = c_3, a_{13} = -\frac{5}{8}c_1 + \frac{41\sqrt{2}}{32}c_2 - \frac{\sqrt{2}}{108}c_3, \\ a_{14} = & \frac{87}{2}c_1 - \frac{3\sqrt{2}}{8}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{36}c_3, a_{15} = 2160c_1 - 108\sqrt{2}c_2 + \sqrt{2}c_3, \\ a_{16} = & \frac{35}{2}c_1 - \frac{31\sqrt{2}}{8}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{27}c_3, a_{17} = -60c_1 + 3\sqrt{2}c_2 - \frac{\sqrt{2}}{18}c_3, a_{18} = \frac{1815}{2}c_1 - \frac{3\sqrt{2}}{8}c_2 + \frac{13\sqrt{2}}{36}c_3, \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные числа.

Таким образом,  $P_{12}$  — инвариант группы  $W(K_5)$  при любых значениях  $c_l$ ,  $l = 1, 2, 3$ . При этом для

$$t_1 = \frac{1}{159}c_1 - \frac{\sqrt{2}}{3180}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{171720}c_3, \quad t_2 = \frac{385}{424}c_1 - \frac{77\sqrt{2}}{1696}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{3816}c_3,$$

$$t_3 = -\frac{11}{1272}c_1 + \frac{1283\sqrt{2}}{25440}c_2 - \frac{61\sqrt{2}}{171720}c_3$$

форма  $P_{12}$  может быть представлена в виде

$$P_{12} = t_1 J_{12} + t_2 J_4^3 + t_3 J_6^2,$$

где  $J_4, J_6, J_{12}$  — базисные инварианты группы  $W(K_5)$ , найденные в работе [4](см. также [5]).

Следовательно,  $P_{12}$  — базисный, если  $c_3 \neq 54(c_2 - 10\sqrt{2}c_1)$ . Если же

$$c_1 = 16, \quad c_2 = 880\sqrt{2}, \quad c_3 = 124740\sqrt{2},$$

то  $P_{12}$  совпадает с базисным инвариантом  $J_{12}$ , то есть

$$J_{12} = 16I_5^{12} + 880\sqrt{2}I_5^9 I_1 + 47520I_5^8 I_4 - 16632I_5^6 I_2 + 18480I_5^6 I_1^2 +$$

$$+ 166320\sqrt{2}I_5^5 I_1 I_4 + 1247400I_5^4 I_4^2 + 52470\sqrt{2}I_5^3 I_3 + 30800\sqrt{2}I_5^3 I_1^3 -$$

$$- 83160\sqrt{2}I_5^3 I_1 I_2 - 80190I_5^2 I_2 I_4 + 124740\sqrt{2}I_5 I_1 I_4^2 - 65I_1^4 + 6966I_2^2 +$$

$$+ 93960I_4^3 + 2700I_1^2 I_2 - 9540I_1 I_3 + 103950I_5^2 I_1^2 I_4.$$

**5.** Рассмотрим случай  $t = 18$ . Имеем:

$$P_{18} = \phi_{18}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = a_1 I_5^{18} + a_2 I_5^{15} I_1 + a_3 I_5^{14} I_4 + a_4 I_5^{12} I_1^2 + a_5 I_5^{12} I_2 +$$

$$+ a_6 I_5^{11} I_1 I_4 + a_7 I_5^{10} I_4^2 + a_8 I_5^9 I_3 + a_9 I_5^9 I_1 I_2 + a_{10} I_5^9 I_1^3 + a_{11} I_5^8 I_2 I_4 + a_{12} I_5^8 I_1^2 I_4 +$$

$$+ a_{13} I_5^7 I_1 I_4^2 + a_{14} I_5^6 I_1^4 + a_{15} I_5^6 I_1^2 I_2 + a_{16} I_5^6 I_2^2 + a_{17} I_5^6 I_1 I_3 + a_{18} I_5^6 I_4^3 +$$

$$+ a_{19} I_5^5 I_1^3 I_4 + a_{20} I_5^5 I_1 I_2 I_4 + a_{21} I_5^5 I_3 I_4 + a_{22} I_5^4 I_1^2 I_4^2 + a_{23} I_5^4 I_2 I_4^2 + a_{24} I_5^3 I_2 I_3 +$$

$$+ a_{25} I_5^3 I_1^2 I_3 + a_{26} I_5^3 I_1^5 + a_{27} I_5^3 I_1^3 I_2 + a_{28} I_5^3 I_1 I_2^2 + a_{29} I_5^3 I_1 I_4^3 + a_{30} I_5^2 I_4^4 +$$

$$+ a_{31} I_5^2 I_2^2 I_4 + a_{32} I_5^2 I_1^4 I_4 + a_{33} I_5^2 I_1^2 I_2 I_4 + a_{34} I_5^2 I_1 I_3 I_4 + a_{35} I_5 I_3 I_4^2 +$$

$$+ a_{36} I_5 I_1^3 I_4^2 + a_{37} I_5 I_1 I_2 I_4^2 + a_{38} I_1^6 + a_{39} I_3^2 + a_{40} I_2^3 +$$

$$+ a_{41} I_1^3 I_3 + a_{42} I_1^2 I_2^2 + a_{43} I_1^4 I_2 + a_{44} I_1^2 I_4^3 + a_{45} I_2 I_4^3 + a_{46} I_1 I_2 I_3.$$

Как и ранее, соотношение (5) приводит к громоздкой совместной системе из 53 линейных однородных уравнений относительно 46 неизвестных коэффициентов  $a_l$ . Ее общее решение имеет вид:

$$a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{112}c_1 - \frac{\sqrt{2}}{448}c_2 - \frac{1751}{277200}c_3 - \frac{103}{12600}c_4 - \frac{529}{623700}c_5,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{56}c_1 + \frac{1}{224}c_2 - \frac{391\sqrt{2}}{18480}c_3 - \frac{23\sqrt{2}}{840}c_4 + \frac{151\sqrt{2}}{41580}c_5, \\
a_3 &= -\frac{75\sqrt{2}}{56}c_1 - \frac{103\sqrt{2}}{224}c_2 + \frac{5477}{3080}c_3 - \frac{139}{140}c_4 + \frac{9337}{27720}c_5, \\
a_4 &= \frac{37\sqrt{2}}{112}c_1 + \frac{51\sqrt{2}}{448}c_2 - \frac{2423}{1540}c_3 - \frac{19}{70}c_4 - \frac{22829}{110880}c_5, \\
a_5 &= -\frac{\sqrt{2}}{32}c_2 + \frac{6561}{4400}c_3 + \frac{33}{200}c_4 + \frac{7109}{26400}c_5, \\
a_6 &= \frac{303}{28}c_1 + \frac{211}{56}c_2 - \frac{33757\sqrt{2}}{1232}c_3 - \frac{253\sqrt{2}}{56}c_4 - \frac{82129\sqrt{2}}{22176}c_5, \\
a_7 &= -\frac{2151\sqrt{2}}{56}c_1 - \frac{1443\sqrt{2}}{112}c_2 - \frac{126123}{1232}c_3 - \frac{3723}{56}c_4 - \frac{227069}{7392}c_5, \\
a_8 &= -\frac{9}{56}c_1 - \frac{15}{112}c_2 - \frac{14417\sqrt{2}}{2464}c_3 + \frac{15\sqrt{2}}{112}c_4 - \frac{72943\sqrt{2}}{14784}c_5, \\
a_9 &= \frac{3}{8}c_2 + \frac{3321\sqrt{2}}{440}c_3 - \frac{7\sqrt{2}}{20}c_4 + \frac{19069\sqrt{2}}{2640}c_5, \\
a_{10} &= -\frac{101}{56}c_1 - \frac{41}{56}c_2 - \frac{57223\sqrt{2}}{22176}c_3 - \frac{935\sqrt{2}}{1008}c_4 - \frac{943375\sqrt{2}}{399168}c_5, \\
a_{11} &= \frac{81\sqrt{2}}{112}c_1 - \frac{117\sqrt{2}}{224}c_2 + \frac{1102869}{12320}c_3 + \frac{5877}{560}c_4 + \frac{614057}{24640}c_5, \\
a_{12} &= -\frac{1287\sqrt{2}}{112}c_1 - \frac{759\sqrt{2}}{224}c_2 - \frac{267027}{2464}c_3 - \frac{4659}{112}c_4 - \frac{353957}{14784}c_5, \\
a_{13} &= \frac{1647}{7}c_1 + \frac{522}{7}c_2 - \frac{253683\sqrt{2}}{308}c_3 - \frac{3123\sqrt{2}}{14}c_4 - \frac{77867\sqrt{2}}{616}c_5, \\
a_{14} &= \sqrt{2}c_1 + \frac{5\sqrt{2}}{8}c_2 - \frac{1765}{66}c_3 - \frac{8}{3}c_4 - \frac{8545}{1188}c_5, \\
a_{15} &= -\frac{3\sqrt{2}}{4}c_2 + \frac{7209}{110}c_3 + \frac{27}{5}c_4 + \frac{13231}{660}c_5, \quad a_{16} = -\frac{1377}{550}c_3 - \frac{6}{25}c_4 - \frac{269}{1650}c_5, \\
a_{17} &= \frac{9\sqrt{2}}{14}c_1 + \frac{15\sqrt{2}}{28}c_2 - \frac{10839}{308}c_3 - \frac{15}{14}c_4 - \frac{23153}{1848}c_5, \\
a_{18} &= -405\sqrt{2}c_1 - 126\sqrt{2}c_2 - \frac{61047}{22}c_3 - 1791c_4 - \frac{14295}{44}c_5, \\
a_{19} &= \frac{15}{2}c_1 - \frac{5}{4}c_2 - \frac{7105\sqrt{2}}{88}c_3 - \frac{85\sqrt{2}}{4}c_4 - \frac{36505\sqrt{2}}{1584}c_5, \\
a_{20} &= -\frac{81}{14}c_1 + \frac{117}{28}c_2 + \frac{120987\sqrt{2}}{616}c_3 + \frac{639\sqrt{2}}{28}c_4 + \frac{75563\sqrt{2}}{1232}c_5, \\
a_{21} &= -\frac{27}{7}c_1 - \frac{45}{14}c_2 - \frac{36783\sqrt{2}}{308}c_3 + \frac{45\sqrt{2}}{14}c_4 - \frac{24895\sqrt{2}}{616}c_5,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_{22} &= -\frac{351\sqrt{2}}{2}c_1 - 45\sqrt{2}c_2 - \frac{27117}{44}c_3 - \frac{765}{2}c_4 - \frac{9445}{88}c_5, \\
a_{23} &= \frac{243\sqrt{2}}{14}c_1 + \frac{27\sqrt{2}}{28}c_2 + \frac{174555}{308}c_3 + \frac{4887}{14}c_4 + \frac{35307}{616}c_5, \\
a_{24} &= \frac{81\sqrt{2}}{11}c_3 + \frac{7\sqrt{2}}{11}c_5, \quad a_{25} = -\frac{9}{7}c_1 - \frac{15}{14}c_2 + \frac{1557\sqrt{2}}{308}c_3 + \frac{15\sqrt{2}}{14}c_4 + \frac{305\sqrt{2}}{1848}c_5, \\
a_{26} &= c_1, \quad a_{27} = c_2, \quad a_{28} = -\frac{1377\sqrt{2}}{110}c_3 - \frac{6\sqrt{2}}{5}c_4 - \frac{269\sqrt{2}}{330}c_5, \\
a_{29} &= 1296c_1 + 360c_2 - \frac{6372\sqrt{2}}{11}c_3 + 360\sqrt{2}c_4 - \frac{1680\sqrt{2}}{11}c_5, \\
a_{30} &= -1458\sqrt{2}c_1 - 405\sqrt{2}c_2 - \frac{243}{11}c_3 - 810c_4 - \frac{3375}{22}c_5, \\
a_{31} &= -\frac{1458}{55}c_3 - \frac{108}{5}c_4 + \frac{138}{55}c_5, \\
a_{32} &= -\frac{21\sqrt{2}}{2}c_1 - \frac{5\sqrt{2}}{4}c_2 - \frac{2977}{44}c_3 - \frac{55}{2}c_4 - \frac{7915}{792}c_5, \\
a_{33} &= \frac{81\sqrt{2}}{14}c_1 - \frac{117\sqrt{2}}{28}c_2 + \frac{66123}{308}c_3 + \frac{873}{14}c_4 + \frac{20533}{616}c_5, \\
a_{34} &= \frac{54\sqrt{2}}{7}c_1 + \frac{45\sqrt{2}}{7}c_2 - \frac{9711}{77}c_3 - \frac{90}{7}c_4 - \frac{4085}{154}c_5, \\
a_{35} &= -\frac{162}{7}c_1 - \frac{135}{7}c_2 + \frac{30267\sqrt{2}}{154}c_3 + \frac{135\sqrt{2}}{7}c_4 + \frac{7215\sqrt{2}}{308}c_5, \\
a_{36} &= 72c_1 + 15c_2 + \frac{564\sqrt{2}}{11}c_3 + 30\sqrt{2}c_4 + \frac{455\sqrt{2}}{66}c_5, \\
a_{37} &= -\frac{486}{7}c_1 - \frac{27}{7}c_2 - \frac{31671\sqrt{2}}{154}c_3 - \frac{351\sqrt{2}}{7}c_4 - \frac{7839\sqrt{2}}{308}c_5, \\
a_{38} &= -\frac{13}{396}c_3 - \frac{5}{18}c_4 + \frac{245}{7128}c_5, \quad a_{39} = -\frac{9}{11}c_3 - \frac{15}{22}c_5, \\
a_{40} &= \frac{729}{550}c_3 + \frac{12}{25}c_4 + \frac{851}{3300}c_5, \quad a_{41} = c_3, \quad a_{42} = -\frac{81}{55}c_3 - \frac{6}{5}c_4 - \frac{403}{660}c_5, \quad a_{43} = c_4, \\
a_{44} &= -81\sqrt{2}c_1 - \frac{45\sqrt{2}}{2}c_2 + \frac{135}{22}c_3 - 45c_4 - \frac{105}{44}c_5, \\
a_{45} &= \frac{729\sqrt{2}}{7}c_1 + \frac{459\sqrt{2}}{14}c_2 - \frac{20655}{154}c_3 + \frac{297}{7}c_4 - \frac{5715}{308}c_5, \quad a_{46} = c_5.
\end{aligned}$$

Форма  $P_{18}$  — инвариант группы  $W(K_5)$  при любых значениях  $c_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ .  
При этом,  $P_{18}$  представим в виде

$$P_{18} = t_1 J_{18} + t_2 J_{12} J_6 + t_3 J_{10} J_4^2 + t_4 J_6^3 + t_5 J_6 J_4^3,$$

если

$$t_1 = \frac{1}{7494993}c_3 + \frac{5}{44969958}c_5, \quad t_2 = -\frac{17881}{882743620}c_3 + \frac{7033}{11917038870}c_5,$$

$$t_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6715513728}(179879832c_1 + 149899860c_2 -$$

$$-1567379934\sqrt{2}c_3 - 149899860\sqrt{2}c_4 - 215212075\sqrt{2}c_5),$$

$$t_4 = -\frac{821259}{2206859050}c_3 - \frac{1}{450}c_4 + \frac{163835821}{715022332200}c_5,$$

$$t_5 = -\frac{\sqrt{2}}{112}c_1 - \frac{\sqrt{2}}{448}c_2 - \frac{83225915}{14830092816}c_3 - \frac{1}{168}c_4 - \frac{72049211}{66735417672}c_5.$$

Здесь, как и ранее,  $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$  — базисные инварианты группы  $W(K_5)$ , найденные в работе [4] (см. также [5]).

Следовательно,  $P_{18}$  — базисный инвариант группы  $W(K_5)$ , если  $6c_3 \neq -5c_5$ , и, при

$$c_1 = -6977004\sqrt{2}, \quad c_2 = 24349950\sqrt{2}, \quad c_3 = 253188, \quad c_4 = \frac{1707291}{2}, \quad c_5 = 8690166,$$

он совпадает с  $J_{18}$ :

$$\begin{aligned} J_{18} = & -64I_5^{18} - 13056\sqrt{2}I_5^{15}I_1 - 1175040I_5^{14}I_4 - 1485120I_5^{12}I_1^2 + 1336608I_5^{12}I_2 - \\ & -26732160\sqrt{2}I_5^{11}I_1I_4 - 441080640I_5^{10}I_4^2 - 46383480\sqrt{2}I_5^9I_3 + 73513440\sqrt{2}I_5^9I_1I_2 - \\ & -27227200\sqrt{2}I_5^9I_1^3 + 212663880I_5^8I_2I_4 - 275675400I_5^8I_1^2I_4 - 1323241920\sqrt{2}I_5^7I_1I_4^2 - \\ & -55070106I_5^6I_1^4 + 158889276I_5^6I_1^2I_2 - 2255526I_5^6I_2^2 - 101582208I_5^6I_1I_3 - \\ & -5539571856I_5^6I_4^3 - 321621300\sqrt{2}I_5^5I_1^3I_4 + 744323580\sqrt{2}I_5^5I_1I_2I_4 - 430053624\sqrt{2}I_5^5I_3I_4 - \\ & -1157836680I_5^4I_1^2I_4^2 + 744323580I_5^4I_2I_4^2 + 7394490\sqrt{2}I_5^3I_2I_3 - 13490010\sqrt{2}I_5^3I_1^2I_3 - \\ & -6977004\sqrt{2}I_5^3I_1^5 + 24349950\sqrt{2}I_5^3I_1^3I_2 - 11277630\sqrt{2}I_5^3I_1I_2^2 - 1442793060\sqrt{2}I_5^3I_1I_4^3 - \\ & -1408712310I_5^2I_4^4 - 3346110I_5^2I_2^2I_4 - 41810310I_5^2I_1^4I_4 + 113024160I_5^2I_1^2I_2I_4 - \\ & -67996260I_5^2I_1I_3I_4 - 38343942\sqrt{2}I_5I_3I_4^2 - 38594556\sqrt{2}I_5I_1^3I_4^2 + 74432358\sqrt{2}I_5I_1I_2I_4^2 + \\ & + \frac{106517}{2}I_1^6 - 6132267I_3^2 + \frac{5972697}{2}I_2^3 + 253188I_1^3I_3 - \frac{13407039}{2}I_1^2I_2^2 + \\ & + \frac{1707291}{2}I_1^4I_2 - 23071392I_1^2I_4^3 - 15536448I_2I_4^3 + 8690166I_1I_2I_3. \end{aligned}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен и реализован еще один метод построения в явном виде базисных инвариантов группы  $W(K_5)$ , порожденной отражениями второго порядка относительно 4-плоскостей пятимерного унитарного пространства. Решен вопрос о выражении базисных инвариантов группы  $W(K_5)$  через степенные суммы, установлены соотношения между базисными инвариантами группы, найденными различными методами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. SHEPHARD, G. C. Finite unitary reflection groups / G. C. Shephard, J. A. Todd // *Can. J. Math.* – 1954. – 6. – № 2. – P. 274 – 304. DOI: 10.4135/CJM - 1954 - 028 - 3
2. BURKHARDT, H. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Zweiter Theil // *Math. Ann.* – 1891. – V. 38. – P. 161 – 224.
3. RUDNITSKII, O. I. Some properties of basis invariants of the unitary group  $W(K_5)$  // *Journal of Mathematical Sciences* – 1990. – V. 51. – № 5. – P. 2570 – 2574.
4. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1990. – 115 с.  
RUDNITSKII, O. I. (1990) Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. *The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences*. Minsk.
5. Рудницкий О. И. Каноническая система базисных инвариантов унитарной группы  $W(K_5)$  // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2019. – № 58. – С. 32 – 40.  
RUDNITSKII, O. I. (2019) Canonical system of basic invariants for unitary group  $W(K_5)$  // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. – 2019. – № 58. – С. 32 – 40.
6. Рудницкий, О. И. О базисных инвариантах унитарной группы  $W(J_3(4))$  // *Таврический вестник информатики и математики*. – 2017. – № 2(35). – С. 97–103.  
RUDNITSKII, O. I. (2017) On basic invariants of unitary group  $W(J_3(4))$ . *TVIM*. – 2017. – 35. – P. 97–103.
7. OURA, M. Basic Invariants of the Complex Reflection Group No.34 Constructed by Conway and Sloane / M. Oura, J. Sekiguchi // *arXiv:2302.09695v1* – [math.GR] – 19 Feb 2023 (doi.org/10.48550/arXiv.2302.09695)

УДК: 514.12

MSC2010: 20B30

## ЗАМКНУТОСТЬ БАЗИСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $H_3$

© В. А. Терновский

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [ternowskyva@mail.ru](mailto:ternowskyva@mail.ru)

CLOSEDNESS OF BASIS SURFACES INVARIANT WITH RESPECT TO THE GROUP  $H_3$ .

Ternovskiy V. A.

**Abstract.** In the real  $m$ -dimensional Euclidean space  $E^m$ , the group  $G$  is generated by orthogonal reflections with respect to  $N(G)$  hyperplanes with common point  $O$ . In a rectangular coordinate system, we assign the algebraic hypersurface of order  $n$  to  $f(x) = 0$ , where  $f(x)$  is a polynomial degrees  $n$  with respect to the coordinates of the vector  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . The set of all hypersurfaces invariant with respect to the same group  $G$  corresponds to the set  $f(x)$ , which forms the algebra  $I^G$ . The description of the algebra  $I^G$  is a fundamental problem in the theory of invariants.

Each method for obtaining such polynomials refers to their important properties, but in practice it is not always possible to explicitly write down all the basic polynomials. In this connection, it is of interest to find the basis invariants of even degrees that belong to the algebra  $\theta^G$  of polynomials

$$\theta_{2r}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N(G)} \eta_j^{2r}(\vec{x}),$$

where  $\eta_j(\vec{x}) = 0$  – normalized equations of all hyperplanes whose reflections belong to  $G$ . For any natural  $r$ , the invariant  $\theta_{2r}$  has a simple geometric interpretation: the surface given by the equation  $\theta_{2r} = c$  is the set of all such points in the space  $E^n$ , the sum  $2r$ -th degrees of distance of an arbitrary point of which from the planes  $\eta_j(\vec{x}) = 0$  is equal to the constant  $c$ .

Finding explicitly the basic invariants of finite groups generated by orthogonal reflections in Euclidean spaces, V. F. Ignatenko set the task in his work: to obtain the equations of all basic closed surfaces other than a sphere. For groups  $A_3$  and  $B_3$  this problem is solved by the author.

In this article, we study the structure of the basis surfaces invariant with respect to finite groups generated by reflections in real space. Sufficient conditions for the closure of all basis surfaces of the algebras of invariants for the symmetry group of the icosahedron  $H_3$  in three-dimensional space are obtained.

**Keywords:** *invariant, symmetry groups, basic invariant, algebra of invariants, groups generated by reflections.*

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $G$  — неприводимая конечная группа, порожденная ортогональными отражениями относительно  $(n - 1)$  — мерных плоскостей в вещественном  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Множество всех многочленов, инвариантных относительно  $G$ , образует алгебру  $I^G$ , базис которой состоит из многочленов  $I_{m_t}^G$  степени  $m_t$  ( $t = \overline{1, n}$ ). Задача нахождения базисных многочленов является одной из основных в теории инвариантов. Каждый метод получения таких многочленов относится к важным их свойствам, однако на практике не всегда удается явно записать все  $I_{m_t}^G$ . В связи с этим представляет интерес нахождение базисных инвариантов четных степеней, которые принадлежат алгебре  $\theta^G$  многочленов

$$\theta_{2r}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N(G)} \eta_j^{2r}(\vec{x}),$$

где

$$\eta_j(\vec{x}) = 0 \tag{1}$$

нормированные уравнения всех гиперплоскостей, отражения относительно которых принадлежат  $G$  [1]. При любом натуральном  $r$  инвариант  $\theta_{2r}$  имеет простую геометрическую интерпретацию: поверхность, задаваемая уравнением  $\theta_{2r} = c$ , есть множество всех таких точек пространства  $E^n$ , сумма  $2r$  — степеней расстояний произвольной точки которого от плоскостей (1) равна постоянной  $c$ . Получена очень важная теорема [2].

**Теорема.** *Многочлены  $\theta_{m_t}^G$ ,  $1 \leq t \leq n$ , четных степеней  $m_t = 2r_t$  являются базисными инвариантами группы  $G$  при всех  $m_t$ , если  $G = A_n, H_3, H_4, E_6, E_7, E_8$  и только при  $m_1 = 2$ ,  $m_3 = 8$ ,  $r_t \neq \log_2(1 + \sqrt{4n + 1})$ ,  $\log_2 2\sqrt{n}$ , если  $G = [N], F_4, B_n, D_n$  соответственно.*

При доказательстве теоремы найдены в развернутом виде соответствующие базисные инварианты. Далее в этой работе В. Ф. Игнатенко поставил задачу: получить уравнения всех базисных, отличных от сферы, замкнутых поверхностей. Для групп  $A_3$  и  $B_3$  эта задача решена в работе [3]. В данной статье получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей алгебр инвариантов группы симметрий икосаэдра.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Зададим в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$  прямоугольную систему координат  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть  $G$  — конечная группа, порожденная ортогональными

отражениями относительно плоскостей симметрии с общей точкой  $O$ . Уравнение двумерной базисной алгебраической поверхности имеет вид

$$\varphi_\alpha(I_j(G)) = c, \quad \alpha \geq j, \quad (2)$$

где  $c = \text{const}$ ,  $I_j(G)$ ,  $j = 1, 2, 3$  — образующие алгебры всех инвариантов группы  $G$ .

Предположим, что поверхность (2) не замкнута, тогда существует действительный асимптотический конус этой поверхности, то есть существует, по крайней мере, одна действительная точка, отличная от  $O$ , удовлетворяющая уравнению

$$\varphi_\alpha(I_j(G)) = 0.$$

Отметим, что для любой группы  $G$  поверхность, заданная уравнением

$$\varphi_1(I_1(G)) = c,$$

замкнута.

Приведем достаточные условия замкнутости базисных алгебраических поверхностей конечной группы симметрии  $H_3$ .

Некристаллографическая группа симметрий  $H_3$  порядка 120 является группой симметрий правильного икосаэдра (или додекаэдра). Геометрия икосаэдра очень подробно описана в классической книге Клейна [4]. Правильный икосаэдр в  $E^3$  зададим вершинами  $V_r(\pm\lambda, \pm, 0)$ , где  $r = \overline{1, 12}$ ,  $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  и координаты меняются циклически. Этот икосаэдр имеет 15 плоскостей симметрии с уравнениями

$$x_i = 0, \quad x_i \pm \lambda x_j \pm \mu x_k = 0,$$

где индексы  $i, j, k = 1, 2, 3$  (циклически),  $\mu = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Флатто [5] доказал, что многочлены

$$\Psi_{2s} = \sum_r (\overrightarrow{OV_r} \vec{x})^{2s}$$

при  $s = 1, 3, 5$  образуют базис алгебры  $I(H_3)$ , которые с точностью до постоянного множителя имеют вид:

$$I_2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad I_6 = 4 \sum_{i=1}^3 x_i^6 + 3(5 - \sqrt{5}) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 + 3(5 + \sqrt{5}) \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 x_j^2,$$

$$I_{10} = 5 \sum_{i=1}^3 x_i^{10} + 9(5 - 2\sqrt{5}) \sum_{i,j=1}^3 x_i^8 x_j^2 + 9(5 + 2\sqrt{5}) \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 x_j^8 +$$

$$+21 \left(5 - \sqrt{5}\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^6 x_j^4 + 21 \left(5 + \sqrt{5}\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^6.$$

Причем Игнатенко [6] показал, что имеют место следующие соотношения:

$$\theta_6^{H_3} = 18I_2^3 - I_6, \quad \theta_{10}^{H_3} = -21I_2^5 + 21I_2^2 I_6 - 5I_{10}.$$

Рассмотрим базисную поверхность шестого порядка, которая задается уравнением

$$I_6 + aI_2^3 = c,$$

где  $a$  — произвольная константа. Имеем

$$\begin{aligned} I_6 + aI_2^3 &= 4 \sum_{i=1}^3 x_i^6 + 3 \left(5 - \sqrt{5}\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 + 3 \left(5 + \sqrt{5}\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 x_j^4 + a \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^3 = \\ &= (4 + a) \sum_{i=1}^3 x_i^6 + 3 \left(5 - \sqrt{5} + a\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^2 + 3 \left(5 + \sqrt{5} + a\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 x_j^4 + \\ &\quad + 6ax_1^2 x_2^2 x_3^2 = c. \end{aligned}$$

Положим  $x_i^2 = y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и  $c = 0$ , получим

$$b_0 y_1^3 + b_1 y_1^2 + b_2 y_1 + b_3 = 0, \tag{3}$$

где

$$b_0 = 4 + a,$$

$$b_1 = (15 + 3a)(y_2 + y_3) - 3\sqrt{5}(y_2 - y_3),$$

$$b_2 = (15 + 3a)(y_2^2 + y_3^2) + 3\sqrt{5}(y_2^2 - y_3^2) + 6ay_2 y_3,$$

$$b_3 = ((4 + a)y_2 + (15 - 3\sqrt{5} + 3a)y_3)y_2^2 + ((4 + a)y_3 + (15 + 3\sqrt{5} + 3a)y_2)y_3^2.$$

Найдем значения  $a$  при которых уравнение (3) не имеет положительных корней. Если  $a \leq -5$  ( $a \geq -2, 5$ ), то при любых неотрицательных  $y_2$  и  $y_3$  получаем  $b_i \leq 0$  ( $b_i \geq 0$ ),  $i = 0, 1, 2, 3$ . Следовательно, по правилу знаков Декарта уравнение (3) при  $a \leq -5$ ,  $a \geq -2, 5$  положительных корней не имеет. Но это правило не утверждает, что есть положительный корни при  $-5 < a < -2, 5$ . Поэтому найдено только достаточное условие: базисная поверхность шестого порядка замкнута при  $a \in (-\infty; -5) \cup (-2, 5; \infty)$ .

Теперь рассмотрим базисную поверхность десятого порядка, которая задается следующим уравнением

$$I_{10} + a_1 I_6 I_2^2 + a_2 I_2^5 = (5 + 4a_1 + a_2) \sum_{i=1}^3 x_i^{10} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(9(5 - 2\sqrt{5}) + a_1(23 - 3\sqrt{5}) + 5a_2\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^8 x_j^2 + \\
& + \left(9(5 + 2\sqrt{5}) + a_1(23 + 3\sqrt{5}) + 5a_2\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^2 x_j^8 + \\
& + \left(21(5 - \sqrt{5}) + a_1(49 - 3\sqrt{5}) + 10a_2\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^6 x_j^4 + \\
& + \left(21(5 + \sqrt{5}) + a_1(49 + 3\sqrt{5}) + 10a_2\right) \sum_{i,j=1}^3 x_i^4 x_j^6 + \\
& + (68a_1 + 20a_2) \sum_{i,j,k=1}^3 x_i^6 x_j^2 x_k^2 + (90a_1 + 30a_2) \sum_{i,j,k=1}^3 x_i^4 x_j^4 x_k^2 = c.
\end{aligned}$$

Положив  $x_i^2 = y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и  $c = 0$ , получим

$$b_0 y_1^5 + b_1 y_1^4 + b_2 y_1^3 + b_3 y_1^2 + b_4 y_1 + b_5 = 0,$$

где

$$b_0 = 5 + 4a_1 + a_2,$$

$$b_1 = (9(5 - 2\sqrt{5}) + a_1(23 - 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_2 + (9(5 + 2\sqrt{5}) + a_1(23 + 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_3,$$

$$b_2 = (21(5 - \sqrt{5}) + a_1(49 - 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_2^2 + (21(5 + \sqrt{5}) + a_1(49 + 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_3^2 + (68a_1 + 20a_2) y_2 y_3,$$

$$b_3 = (21(5 - \sqrt{5}) + a_1(49 - 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_3^3 + (21(5 + \sqrt{5}) + a_1(49 + 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_2^3 + (90a_1 + 30a_2) (y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2),$$

$$b_4 = (9(5 - 2\sqrt{5}) + a_1(23 - 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_3^4 + (9(5 + 2\sqrt{5}) + a_1(23 + 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_2^4 + (68a_1 + 20a_2) (y_2^3 y_3 + y_3^3 y_2) + (90a_1 + 30a_2) y_3^2 y_2^2,$$

$$b_5 = (5 + 4a_1 + a_2) (y_2^5 + y_3^5) + (9(5 - 2\sqrt{5}) + a_1(23 - 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_2^4 y_3 + (9(5 + 2\sqrt{5}) + a_1(23 + 3\sqrt{5}) + 5a_2) y_3^4 y_2 + (21(5 - \sqrt{5}) + a_1(49 - 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_3^2 y_2^3 + (21(5 + \sqrt{5}) + a_1(49 + 3\sqrt{5}) + 10a_2) y_2^2 y_3^3.$$

Так как  $y_2, y_3$  неотрицательные действительные числа одновременно не равные нулю, то  $b_i \geq 0$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ), если

$$a_2 \geq -\frac{19}{4} a_1 - \frac{155}{16}, \text{ при } a_1 < -\frac{355}{48},$$

$$a_2 \geq -\frac{83}{20} a_1 - \frac{21}{4}, \text{ при } -\frac{355}{48} \leq a_1 < -\frac{11}{2},$$

$$a_2 \geq -\frac{23}{5} a_1 - 9, \text{ при } a_1 \geq -\frac{11}{2}.$$

Система неравенств  $b_i \leq 0$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) имеет следующее решение

$$a_2 \leq -\frac{17}{5} a_1 - \frac{9}{8}, \text{ при } a_1 < -20,$$



$$a_2 \leq -\frac{139}{40}a_1 - \frac{21}{8}, \text{ при } -20 \leq a_1 < -\frac{17}{3},$$

$$a_2 \leq -\frac{23}{5}a_1 - 9, \text{ при } -\frac{17}{3} \leq a_1 < -\frac{55}{12},$$

$$a_2 \leq -\frac{19}{4}a_1 - \frac{155}{16}, \text{ при } a_1 \geq -\frac{55}{12}.$$

Таким образом, базисная поверхность десятого порядка замкнута; если  $a_1$  и  $a_2$  удовлетворяют следующим неравенствам

$$a_2 \leq -\frac{17}{5}a_1 - \frac{9}{8}, a_2 \geq -\frac{19}{4}a_1 - \frac{155}{16}, \text{ при } a_1 < -20,$$

$$a_2 \leq -\frac{139}{40}a_1 - \frac{21}{8}, a_2 \geq -\frac{19}{4}a_1 - \frac{155}{16}, \text{ при } -20 \leq a_1 < -\frac{355}{48},$$

$$a_2 \leq -\frac{139}{40}a_1 - \frac{21}{8}, a_2 \geq -\frac{83}{20}a_1 - \frac{21}{4}, \text{ при } \frac{-355}{48} \leq a_1 < -\frac{17}{3},$$

$$a_2 \leq -\frac{23}{5}a_1 - 9, a_2 \geq -\frac{83}{20}a_1 - \frac{21}{4}, \text{ при } -\frac{17}{3} \leq a_1 < -\frac{11}{2},$$

$$a_2 \leq -\frac{5}{23}a_1 - 9, a_2 \geq -\frac{23}{5}a_1 - 9, \text{ при } -\frac{11}{2} \leq a_1 < -\frac{55}{12}.$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье продолжена, начатая в [3], работа по изучению строения базисных поверхностей инвариантных относительно конечных групп отражений в трехмерном евклидовом пространстве. Найдены достаточные условия замкнутости базисных поверхностей шестой и десятой степени алгебры инвариантов группы симметрии икосаэдра.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатенко, В. Ф. Геометрия алгебраических поверхностях с симметриями / В. Ф. Игнатенко // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. Геом. — 1980. — 11. — С. 203–240.

IGNATENKO, V. F. (1980) Geometry of algebraic surfaces with symmetries. *Results of science and technology. Ser. Prob. Geom.* 11. 203–240.

2. Игнатенко, В. Ф. Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями / В. Ф. Игнатенко // Матем. сб. — 1983. — 120(162). — № 4. — С. 556–568.

IGNATENKO, V. F. (1983) On invariants of finite groups generated by reflections. *Math. USSR-Sb.* 120(162). № 4. 556–568.

3. Терновский, В. А. Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно групп  $A_3$  и  $B_3$  / В. А. Терновский, М. С. Бичулова // Динамические системы. — 2019. — Т. 9(37). — № 1. — С. 67–72.  
TERNOVSKIY, V. A. and BICHULOVA, M. S. Closedness of basis surfaces invariant with respect to the group  $A_3$  and  $B_3$ . *Dinamicheskie Sistemy*. 9(37). № 1. 67–72.
4. Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решение уравнений пятой степени / Ф. Клейн. — М.: Наука, 1989. — 336.  
KLEIN, F. (1989) *Lectures on the icosahedron and solution of equations of the fifth degree*. Moscow: Nauka.
5. FLATTO, L. (1970) Regular holotypes and harmonic polynomials. *Canad. J. Math.* 22. 7–21.
6. Игнатенко, В. Ф. Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями / В. Ф. Игнатенко // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. Геом. — 1984. — 16. — С. 195–229.  
IGNATENKO, V. F. (1984) Some questions of the geometric theory of invariants of groups generated by orthogonal and oblique reflections. *Results of science and technology. Ser. Prob. Geom.* 16. 195–229.

---

Козлова М. Г., Лукьяненко В. А., Макаров О. О., Руденко Л. И. Специфика построения многоагентных маршрутов в иерархических сетях / М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, О. О. Макаров, Л. И. Руденко // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 7–29.

УДК: 004.89; 519.854.2

В статье рассматриваются прикладные модели многоагентной маршрутизации с учетом специфики организации структуры сети, целей системы и локальных целей агентов. Выделяется класс задач многих коммивояжеров (mTSP) разного уровня иерархии (НСmTSP). Построение маршрутов НСmTSP согласовано с естественной кластеризацией сложной инфраструктурной сети. Приводится обзор задач, методов и алгоритмов, основанных на разных эвристиках. Выделяется иерархическая кластеризация сети. Показано, что в зависимости от логистических целей должен быть выбран различный тип кластеризации, согласованной с mTSP. Сравниваются результаты вычислительного эксперимента по типам кластеризации и маршрутам. Отдается предпочтение иерархической кластеризации, согласованной с иерархией маршрутов НСmTSP.

*Ключевые слова:* задача коммивояжера, задача нескольких коммивояжеров, иерархическая кластеризация, алгоритм решения задачи нескольких коммивояжеров.

---

Анафиев А. С., Карюк А. С. Обзор подходов к решению задачи оптимизации гиперпараметров для алгоритмов машинного обучения / А. С. Анафиев, А. С. Карюк // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 30–37.

УДК: 519.7

В статье проводится обзор существующих алгоритмов решения задачи оптимизации гиперпараметров для алгоритмов машинного обучения, приводятся их преимущества и недостатки. Предлагается собственный подход оптимизации гиперпараметров как задача оптимизации с прецедентной начальной информацией, решение которой можно проводить с использованием нейронных сетей и решающих деревьев.

*Ключевые слова:* машинное обучение, оптимизация гиперпараметров, нейронные сети.

Бучацкий П. Ю., Теплоухов С. В., Онищенко С. В. Комбинация морфологического и нейросетевого подходов для решения задачи подсчета круглых лесоматериалов на цифровом изображении / П. Ю. Бучацкий, С. В. Теплоухов, С. В. Онищенко // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 38 – 49.

УДК: 004.896

В работе рассматривается задача определения геометрических параметров круглых лесоматериалов в штабелях, предназначенных для транспортировки. Для этого предложен подход, основанный на синтезе морфологического подхода, реализуемого с использованием детектора Канни и алгоритма Хаафа и нейросетевого, на основе использования архитектуры сверточной нейронной сети YOLOv5.

*Ключевые слова:* морфологический подход, нейронные сети, сверточные нейронные сети, алгоритм Хаафа, детектор Канни, геометрические параметры, круглые лесоматериалы.

Корнута А. А. Краевая задача с наклонной производной для нелинейного уравнения с инволюцией на прямоугольнике / А. А. Корнута // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 50 – 72.

УДК: 517.95

В работе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение параболического типа с преобразованием инволюции на прямоугольнике с краевыми условиями с косою производной, моделирующее динамику оптической системы, представляющей собой некоторый специально устроенный внешний контур, называемый “контуром обратной двумерной связи” и состоящий из различных оптических устройств (линз, призм и др.) и тонкого слоя нелинейной среды. Известно, что, управляя внутренними параметрами системы, можно получить в экспериментах широкий спектр изменений светового поля. Динамика решений, рассматриваемых задач, зависит от краевых условий. В частности, краевые условия с косою (наклонной) производной позволяют моделировать спиральные волны, которые возникают в нелинейных оптических системах.

В работе рассматриваются вопросы существования и устойчивости решений функционально-дифференциального уравнения параболического типа в прямоугольнике с преобразованием отражения пространственной переменной и граничными условиями с косою производной.

*Ключевые слова:* функционально-дифференциальные уравнения, бифуркация, спектральная задача, центральная многообразие, краевые условия с наклонной производной.

---

Мещерина Е. В. О развитии условий минимальности в алгебрах Ли / Е. В. Мещерина // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 73–84.

УДК: 512.554.3

В данной статье рассмотрены основные этапы развития алгебр Ли, удовлетворяющих условиям минимальности. Условие минимальности подразумевает стабилизацию убывающих цепочек и может быть применено к различным подструктурам алгебры Ли: идеалам, подидеалам, подалгебрам а также внутренним идеалам. Все эти условия были перенесены на алгебры Ли с теории колец и теории групп. Такие алгебры Ли получили название «Артиновы» по аналогии с одноименными кольцами, так как условие минимальности для колец впервые рассмотрено Эмилем Артином. С целью обобщения условия минимальности на идеалы при изучении артиновых алгебр Ли возникли квази-артиновы алгебры Ли. В статье представлены основные результаты исследований Российских и зарубежных ученых, работы которых посвящены артиновым и квази-артиновым алгебрам Ли.

*Ключевые слова:* алгебры Ли, алгебры Ли с условием минимальности, артиновы алгебры Ли, внутренний идеал алгебры Ли, нильпотентная алгебра Ли, алгебра матриц, квази-артиновы алгебры Ли, специальные артиновы алгебры Ли, подалгебра, идеал алгебры Ли.

---

---

Рудницкий О. И. Об одном свойстве базисных инвариантов унитарной группы  $W(K_5)$  / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 85–96.

УДК: 514.7

Предложен и реализован способ построения в явном виде базисных инвариантов группы  $W(K_5)$ , порожденной отражениями второго порядка относительно 4-плоскостей пятимерного унитарного пространства.

*Ключевые слова:* унитарное пространство, отражение, группа отражений, инвариант, алгебра инвариантов.

Терновский В. А. Замкнутость базисных поверхностей, инвариантных относительно группы  $H_3$  / В. А. Терновский // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 2 (55). — С. 96 – 102.

УДК: 514.12

Одной из основных задач геометрической теории инвариантов является построение образующих алгебры инвариантов группы, порожденной отражениями. В настоящей статье изучается строение базисных поверхностей инвариантных относительно группы симметрий правильного икосаэдра. Получены достаточные условия замкнутости всех базисных поверхностей рассматриваемой алгебры инвариантов в трехмерном евклидовом пространстве.

**Ключевые слова:** инварианты, группы симметрий, базисные инварианты, алгебра инвариантов, группы порожденные отражениями.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

---

*Анафиев Айдер  
Сератович*

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

*e-mail: anafievas@cfuv.ru*

*Бучацкий Павел  
Юрьевич*

к. т. н, доцент, заведующий кафедрой автоматизированных систем обработки информации и управления инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, г. Майкоп, РФ

*e-mail: buch@adygnet.ru*

*Карюк Александр  
Сергеевич*

аспирант кафедры информатики Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

*e-mail: karuk1998@yandex.ru*

*Козлова Маргарита  
Геннадьевна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

*e-mail: kozlovamg@cfuv.ru*

*Корнута Анжелика  
Александровна*

старший преподаватель кафедры математического анализа Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

*e-mail: korn\_57@mail.ru*

*Лукьяненко Владимир  
Андреевич*

к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

*e-mail: art-inf@yandex.ru*

- Макаров Олег  
Олегович** аспирант кафедры информатики Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.  
*e-mail: fantom2.00@mail.ru*
- Мещерина Елена  
Владимировна** к. ф.-м. н, доцент кафедры геометрии и компьютерных наук факультета математики и информационных технологий Оренбургского государственного университета, г. Оренбург, Российская Федерация.  
*e-mail: elena\_lipilina@gmail.com*
- Онищенко Стефан  
Владимирович** ассистент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, г. Майкоп, Российская Федерация.  
*e-mail: osv@adygnet.ru*
- Руденко Людмила  
Ивановна** к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.  
*e-mail: rudenkoli@cfuv.ru*
- Рудницкий Олег  
Иванович** к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.  
*e-mail: oirud58@gmail.com*
- Теплоухов Семён  
Васильевич** к. т. н, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления инженерно-физического факультета Адыгейского государственного университета, г. Майкоп, Российская Федерация.  
*e-mail: tepl\_sv@adygnet.ru*
- Терновский Валерий  
Александрович** к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Физико-Технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.  
*e-mail: ternowskyva@mail.ru*



Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.10.2023 .  
Издательский дом ФГАОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского».

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № ВВФР-000506 . Тираж 25 экз. Формат 60x90/16.  
Усл. печ. ед. 5,2. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.  
Типография ИП Павлюков В. В., ИНН 250209756491. 295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, 44,  
тел. +7 (978) 823-31-73, E-mail: zakaz@krimpoligraf.ru