

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (54) ' 2022

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

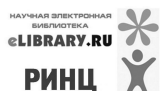
ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 28.12.2018 по группам специальностей: 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки)», 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки)», 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки)», 05.13.17 «Теоретические основы информатики (физико-математические науки)».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2022, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

АБЛАМЕЙКО С. А., акад. НАН Беларуси, проф., д. т. н.	МЕСТЕЦКИЙ Л. М., проф., д. т. н.
АПАТОВА Н. В., проф., д. пед. н.	МУРАВНИК А. Б., д. ф.-м. н.
ВАТУЛЯН А. О., проф., д. ф.-м. н.	ПОЛОВИНКИН И. П., доц., д. ф.-м. н.
ВОРОНЦОВ К. В., проф., д. ф.-м. н.	РАЙГОРОДСКИЙ А. М., доц., д. ф.-м. н.
ДЕМИДЕНКО Г. В., проф., д. ф.-м. н.	РОХЛИН Д. Б., проф., д. ф.-м. н.
ЕРУСАЛИМСКИЙ Я. М., проф., д. т. н.	СОЛОВЬЕВ А. Н., доц., д. ф.-м. н.
ЗАГРЕБНОВ В. А., проф., д. ф.-м. н.	СТОНЯКИН Ф. С., проф., д. ф.-м. н.
ЗАДОРОВНИЙ В. Г., проф., д. ф.-м. н.	УТКИН А. В., в. н. с., д. т. н.
КАЛИНИЧЕНКО В. А., проф., д. ф.-м. н.	ЦИБУЛИН В. Г., доц., д. ф.-м. н.
КАРАПЕТАНЦ А. Н., проф., д. ф.-м. н.	ЧЕРНОВА Т. А., доц., д. т. н.
КРАВЧЕНКО В. В., проф., д. т. н.,	ЧИЛИН В. И., проф., д. ф.-м. н.
КРАСНОПРОШИН В. В., проф., д. т. н.,	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

МУРАТОВ М. А., проф., д. ф.-м. н. — **главный редактор**
РУДЕНКО Л. И., доц., к. ф.-м. н. — **заместитель главного редактора**
АНАФИЕВ А. С., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный редактор**
БЛЫЩИК В. Ф., доц., к. ф.-м. н. — **редактор сайта журнала**
германчук М. С., к. ф.-м. н. — **секретарь журнала**
ЗАКОРА Д. А., проф., д. ф.-м. н.
КОЗЛОВА М. Г., доц., к. ф.-м. н. — **ответственный секретарь**
ЛУКЬЯНЕНКО В. А., доц., к. ф.-м. н. — **научный редактор**
ПАПКОВ С. О., проф., д. ф.-м. н.
ЯРОШЕНКО А. А., проф., д. ф.-м. н.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.su
сайт журнала: www.tvim.su

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL COUNCIL:

Sergey ABLAMEYKO, Prof., EngD	Leonid MESTETSKIY, Prof., EngD
Natalia APATOVA, Prof., EdD	Andrey MURAVNIK, Dr. Phys.-Math.
Alexander VATULIAN, Prof., Dr. Phys.-Math.	Igor POLOVINKIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Konstantin VORONTSOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Andrey RAIGORODSKY, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Gennady DEMIDENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Dmitry ROKHLIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Yakov YERUSALIMSKY, Prof., EngD	Arkady SOLOVYOV, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Valentin ZAGREBNOV, Prof., Dr. Phys.-Math.	Fedor STONYAKIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Vladimir ZADOROZHNY, Prof., Dr. Phys.-Math.	Anton UTKIN, Senior Researcher, EngD
Vladimir KALINICHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.	Vyacheslav TSIBULIN, Assoc. prof., Dr. Phys.-Math.
Alexey KARAPETYANTS, Prof., Dr. Phys.-Math.	Tatyana CHERNOVA, Assoc. prof., EngD
Vladislav KRAVCHENKO, Prof., EngD	Vladimir CHILIN, Prof., Dr. Phys.-Math.
Viktor KRASNOPROSHIN, Prof., EngD,	

EDITORIAL BOARD:

Mustafa MURATOV, Prof., Dr. Phys.-Math. — **Editor-in-Chief**
Lyudmila RUDENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Vice Chief Editor**
Ayder ANAFIYEV, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Managing Editor**
Vladimir BLYSCHIK, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **The Editor of the Cite**
Maria GERMANCHUK, Cand. Phys.-Math. — **Secretary**
Dmitry ZAKORA, Prof., Dr. Phys.-Math.
Margarita KOZLOVA, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Executive Secretary**
Vladimir LUKYANENKO, Assoc. prof., Cand. Phys.-Math. — **Science editor**
Stanislav PAPKOV, Prof., Dr. Phys.-Math.
Alexander YAROSHENKO, Prof., Dr. Phys.-Math.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.su

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 978 782 31 99 — editor-in-chief

+7 978 837 82 77 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.su — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Dorofeeva, Yu. A., Osipova, P. L. Modeling of negotiations for two and three players	7
Sukhinov A. I., Protsenko E. A., Sidoryakina V. V., Protsenko S. V. Modeling regular waves effects on turbulent vertical exchange.....	19
Аметов Ф. Р., Бекиров Э. А. Разработка математической модели и алгоритма для реализации кибербезопасности систем управления объектов электроэнергетики.....	30
Джабраилов А. Л. Представление обобщенного потенциала Бесселя посредством ядра Пуассона общего вида.....	40
Парфенова Н. Б. Эмпирическая математическая модель исследования психологической устойчивости студентов в условиях дистанционного образования	53
Фордук К. В. Об асимптотической устойчивости системы тел, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил.....	67
Хазова Ю. А., Гребенева А. А. Анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений уравнения спинового горения.....	75
Рефераты	88
Список авторов номера	92

TABLE OF CONTENTS

Dorofeeva, Yu. A., Osipova, P. L. Modeling of negotiations for two and three players	7
Sukhinov A. I., Protsenko E. A., Sidoryakina V. V., Protsenko S. V. Modeling regular waves effects on turbulent vertical exchange	19
Ametov F. R., Bekirov E. A. Development of a mathematical model and algorithm for the implementation of cybersecurity of control systems of electric power facilities	30
Dzhabrailov A. L. Representation of the generalized Bessel potential by means of a Poisson kernel of the general form	40
Parfenova N. B. An empirical mathematical model for studying the psychological stability of students in the context of distance education	53
Forduk K. V. Asymptotic stability of a system of bodies partially filled with ideal fluids under the action of elastic and damping forces	67
Khazova Yu. A., Grebeneva A. A. Stability analysis of approximate periodic solutions of the spin combustion equation	75
Abstracts	88
Authors	92

UDC: 519.83

MSC2010: 91A40

MODELING OF NEGOTIATIONS FOR TWO AND THREE PLAYERS

© Yu. A. Dorofeeva

ITMO UNIVERSITY

SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL CENTER OF MATHEMATICS

AVENUE. KRONVERKSKY, 49 LETTER A, SAINT PETERSBURG, 197101, RUSSIAN FEDERATION

E-MAIL: *julana2008@yandex.ru*

© P. L. Osipova

PETROZAVODSK STATE UNIVERSITY

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGY

AVENUE. LENINA,33, PETROZAVODSK, 185910, RUSSIAN FEDERATION

E-MAIL: *polina.polina20@yandex.ru*

MODELING OF NEGOTIATIONS FOR TWO AND THREE PLAYERS.

Yu. A. Dorofeeva, P. L. Osipova

Abstract. The paper considers the problem of modeling negotiations for two and three players. Two tasks have been solved. The first problem is investigated with using the Nash arbitration scheme. The results of numerical simulation are presented and the dependence of the negotiation period on the simulation parameters is shown.

The second problem is a simulation for three players with the participation of an arbitrator. The peculiarity of this scenario is the limited “work” of the arbitrator. The results of numerical simulation are also presented in this paper.

Keywords: *game theory, arbitration scheme, optimality equation, negotiations, Nash equilibrium, random proposal, arbiter, competition modeling.*

INTRODUCTION

Negotiations are an integral part of game theory. This is a complex and multifaceted process. Modeling of negotiations can take place by different methods, for example, using a scheme of random proposals or the organization of competitions, etc.

An important parameter is informativeness in any form of organization of negotiations. This is awareness of the behavior of rivals, winnings, fines, which may be known to all participants or to individuals. Therefore, negotiations can be both with complete and incomplete information.

Negotiations are divided into two types [1]: positional and rational. Negotiation rules play an important role in modeling. To resolve the conflict, there is an independent

participant – an arbitrator. It may be represented by one participant, or it may be an arbitration committee. The parties to the conflict can also unite to get the maximum benefit in the conflict. In this regard, the parties to the conflict may be two or more players. The main mission of the arbitrator is to make a final decision by drawing lots.

The mathematical apparatus for conflict resolution is negotiation theory, and the optimal solution is equilibrium, namely Nash equilibrium, Pareto equilibrium, Bayes equilibrium, etc. It depends on the problem statement and the rules of the game.

A sufficient amount of research has been devoted to modeling negotiations with various scenarios. The basic work for the problem presented in this study is [1]. This is a fundamental work in which the authors present the main game-theoretic models of negotiations between two, three or more persons using the Nash arbitration scheme, with a random proposal, as well as negotiations during the conclusion of transactions, etc.

The work [2] presents a method for finding a strategy that maximizes the probability of completing commercial negotiations. In this formulation, it is beneficial for all participants to finish negotiations as soon as possible.

Authors of the paper [3] is devoted to the study of an approach to finding optimal behavior strategies for each of the participants in the negotiations. The goal here is not just to increase one's own benefits, but also to search for joint strategies that maximize joint benefits in the negotiation process.

The study [4] is devoted to various approaches to trade negotiations. The paper considers two main issues:

- how the negotiation policy is agreed, in the absence of a coalition for one side of the negotiations.
- within the framework of the fact that the participants will create a coalition, how the interests of each of the parties to the negotiations are aligned with the overall result.

Negotiations in a game-theoretic formulation are used in international environmental policy.

Thus, in [5], relatively simple game models for conflict resolution and resolution of “climate negotiations” are improved.

The studies [6, 7] are also significant in negotiations, since they consider the influence and characteristics of participants, as well as the model of group choice.

The goal of this work is to model negotiations using the Nash arbitration scheme. For the first time this approach was described and proposed in the work [8].

The following conditions must be met for successful modeling:

- determining the number of participants in negotiations; ;
- determining the order of proposals;
- setting player winnings;
- determining system of fines;
- rules of conduct of the arbitrator.

The game is a multi-step zero-sum process. Proposals to the participants come from the arbitrator, which they can accept or reject. For the second option, the discount rate is set — $\delta \in (0, 1]$ — this is a guarantee of stopping the process, because each time each participant will lose a share from winning.

It is important to note that in the arbitration scheme, the final choice is up to the players, not the arbitrator.

The design of the contest is considered in the work [8], The study considers cases of a game with non-zero and zero sum of winnings.

The task of negotiations for $n=2$.

So, let (X_i, Y_i) для $i = 1, 2, \dots, K$ is a sequence of pairs of independent identically distributed random variables, which can be interpreted at step i as an proposal of the arbiter to each of the players. As established above, proposal (X_i, Y_i) players accept (A) or reject (R). They may reject because there is hope to get a more profitable proposal from the arbitrator.

If both players accept proposals at the i -th step, the game is finished with a win for the first participant with a win equal to $(X_i + Y_i)/2$. If both players reject the i -th proposal, the negotiations proceed to the next step $i + 1$. However, the winnings are discounted δ times. If one of the players accepts the proposal and the other rejects it, the arbitrator makes a decision in favor of the offended party.

The win is equal to:

$$\begin{aligned} \min(X_i, Y_i), & \quad \text{if } A - R, \\ \max(X_i, Y_i), & \quad \text{if } R - A, \end{aligned}$$

The process continues until one of the players accepts the proposal or until the last step of K comes. Both are forced to accept this proposal at the last step.

Let H_k is the value of this game, then k is the number of steps remaining until the finish of the negotiations, $k < K$.

Then the optimality equation has the form:

$$H_k = E\{val H_k(X, Y)\}, \quad (1)$$

where $val H_k(x, y)$ is the value of the matrix game, winning on the step $k - 1$:

$$H_k(x, y) = \begin{matrix} & A & R \\ \begin{matrix} A \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} (x+y)/2 & \min(x, y) \\ \max(x, y) & \delta H_{k-1} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, K$ and the boundary condition $H_0 = 0$.

The matrix $H_k(x, y)$ has a single saddle point, which depends on (x, y) .

The meaning of the game $H_k(x, y)$:

$$val H_k(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{if } \delta H_{k-1} \leq \min(x, y) \\ \delta H_{k-1}, & \text{if } \min(x, y) \leq \delta H_{k-1} \leq \max(x, y) \\ \max(x, y), & \text{if } \delta H_{k-1} \geq \max(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

The optimal strategies of the players at the k -th step have the following form:

$$\begin{aligned} A - R, & \quad \text{if } \delta H_{k-1} < \min(x, y) \\ R - A, & \quad \text{if } \delta H_{k-1} > \max(x, y) \\ R - R, & \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

The task of negotiations for $n=3$.

Often, in the course of negotiations, the parties discuss not one issue that causes a conflict (for example, price or volume of supplies), but a whole complex of interrelated problems.

Consider a non-coalition game of n persons with a non-zero sum. Players $\{1, 2, \dots, n\}$ offer projects for the competition that are characterized by a set of parameters $\{x^1, \dots, x^n\}$ from some valid set S in space R^m . The arbitrator reviews the received proposals and selects one of the projects. In space R^m a random vector a is simulated with probability distribution $\mu(x_1, \dots, x_m)$. It is known to the contestants. Vector a is the arbiter's decision. The winner is the project x^k , where $k = 1, \dots, n$, which is nearest to the point a . The winner of the contest player k receives a gain $h_k(x^k)$ [8].

The decision of the arbitrator a is a random variable. To represent sets of projects $\{x^1, \dots, x^n\}$, we divide the set of $S \subset R^m$ into n subsets of S_1, \dots, S_n such that if $a \in S_k$, then the decision of the arbitrator will be the choice of the project with the number k . This partition is called the Voronoi's diagram, which can be constructed using the Forchune's procedure.

Thus, the player's winnings k can be defined as the average value of his winnings when the arbiter's decision falls into the set S_k , i.e.

$$H_k(x^1, \dots, x^n) = \int_{S_k} h_k(x^k) \mu(dx_1, \dots, dx_n) = h_k(x_k) \mu(S_k), k = 1, \dots, n.$$

The Nash equilibrium in this game is defined as the profile:

$x^* = (x^1, \dots, x^n)$ for which

$$H_k(x^* || y^k) \leq H_k(x^*), \forall y^k, k = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Measure $\mu(S_1)$ can be represented as

$$\mu(S_1) = \sum_{j=0}^{k+1} \int_{x_{i_j}}^{x_{i_{j+1}}} g(x) dx \int_{l_{i_j}(x) l_{i_j}(x_1) > 0, j=1, \dots, k} g(y) dy. \tag{5}$$

**WAGE NEGOTIATIONS FOR TWO PLAYERS
USING THE NASH ARBITRATION SCHEME**

Two players take part in this production: the manager and the professional union. The purpose of the negotiations is to set a wage for the employee. The task of the manager is to minimize costs, but the union is trying to make the payment maximum. The union insists on 100 units, and the manager, for reasons of saving the company's budget, insists on 50 units.

In case of rejection of the trade union, a wage is reduced by 10 units relative to the proposals of the arbitrator. If the manager rejects, then the salary increases by 10 units relative to the same amount. The game proceeds to the next step, if both reject. The solution is discounted by δ times.

The arbitrator makes proposals to the players at each step. For this purpose a random integer a is generated at a given interval. The setting of this parameter depends on the problem statement (the amount of fines, the amount of winnings, etc.). For the scenario described above, the interval of the arbiter's random sentences is a set $[40;60]$. The given type of set makes sense taking into account the amount of fines and the type of the winning function.

Manager's win functions $f_1(a)$ and functions for professional union $f_2(a)$ are unimodal and have the following form:

$$f_1(a) = 75 - |a - 100|, \quad f_2(a) = 75 - |a - 50|$$

where a — arbitrator's proposal

As described above, players have only two strategies: A — accept the arbiter’s proposal and R — reject the proposal. Suppose there are K steps for negotiations. In the case when there are k steps before the end of negotiations, the optimality equation (2) takes the form:

$$(H_k^{(1)}, H_k^{(2)}) = E_{aval} \begin{pmatrix} (f_1(a), f_2(a)) & (f_1(a+10), f_2(a+10)) \\ (f_1(a-10), f_2(a-10)) & (\delta H_{k-1}^{(1)}, \delta H_{k-1}^{(2)}) \end{pmatrix}$$

where a takes values from 40 to 60 with the same probability $\frac{1}{21}$.

One of the important issues in the process of formalizing salary negotiations is the analysis of the period of negotiations (determining the number of steps). It depends on the modeling parameters, the definition of thresholds for the discount rate, and the behavior of all participants in the process. A program was written in C# to conduct numerous experiments, establish patterns and to analyze the model as a whole. The main question is how changes in the modeling parameters (discount coefficient and the arbitrator’s proposals) affect the time of negotiations. Denote $n = K - k$ — are the last steps of negotiations.

The text of the program is published in the Internet repository [9].

The Table 1 shows the results of the program.

MODELING OF A COMPETITION FOR THREE PLAYERS WITH RESTRICTIONS FOR THE ARBITRATOR

Consider a project competition for three persons. The first player wants to minimize the amount $x + y$, the second player wants to maximize x , and the third player wants to maximize y . The project competition is presented on a plane (in Fig.1).

Let the arbiter “behaves” on the plane randomly with a distribution density function

$$f(r, \theta) = \frac{3(1-r)}{\pi}.$$

Next, the problem statement will be in the polar coordinate system. Let the polar axis coincide with the ox axis. The equation of a straight line in polar coordinates has the form:

$$r = \frac{P}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

where

$$P = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$

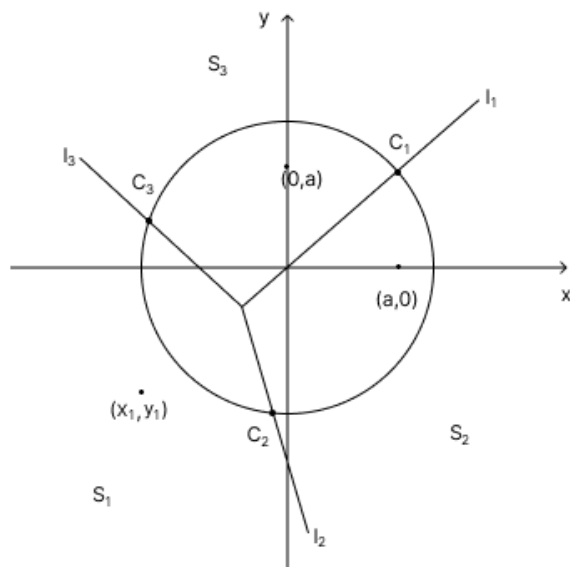


Fig. 1. Competition of three projects on the plane

for a straight line equation of the form: $Ax + By + C = 0$.

After converting the lines in the Cartesian coordinate system for the polar ones, the following expression will be obtained:

$$l_1 = \begin{cases} r > 0, & \alpha = \frac{\pi}{4} \\ r > 0, & \alpha = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$l_2 : r_2(\varphi) = \frac{|x_1^2 + y_1^2 - a^2|}{2\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} \cos(\varphi - \arctg(\frac{y_1}{x_1 - a}))},$$

$$l_3 : r_3(\varphi) = \frac{|x_1^2 + y_1^2 - a^2|}{2\sqrt{x_1^2 + (y_1 - a)^2} \cos(\varphi - \arctg(\frac{y_1 - a}{x_1}))}.$$

The equation of a circle in polar coordinates has the following form:

$$r(\varphi) = R.$$

If we know the equations of lines and circles in polar coordinates, we can find the points of intersection of these lines with the circle.

The intersection point of the line l_1 with the circle is $C_1 = (R, \frac{\pi}{4})$.

The intersection point C_2 of the straight line l_2 and the circle is found from the equation:

$$\frac{|x_1^2 + y_1^2 - a^2|}{2\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} \cos(\varphi - \arctg(\frac{y_1}{x_1 - a}))} = R.$$

As a result, the point is $C_2 = (R, \phi_1)$, where

$$\phi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1 - a}\right) - \arccos\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2R\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}}\right).$$

The intersection point C_3 of the straight line l_3 and the circle is found from the equation:

$$\frac{|x_1^2 + y_1^2 - a^2|}{2\sqrt{x_1^2 + (y_1 - a)^2}\cos(\varphi - \operatorname{arctg}(\frac{y_1 - a}{x_1}))} = R.$$

As a result, the point is determined $C_3 = (R, \phi_2)$, where

$$\phi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_1 - a}{x_1}\right) + \arccos\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2R\sqrt{x_1^2 + (y_1 - a)^2}}\right).$$

The first player's win can be defined as the mathematical expectation of his win when the arbiter's decision falls into the set S_1 , bounded by the straight lines l_2, l_3 and the arch of a circle.

In polar coordinates: $x_1 = r_1 \cos \varphi_1$, $y_1 = r_1 \sin \varphi_1$, based on this, we can find the mathematical expectation of a random variable $x + y$ over the domain S_1 using the (4),(5):

$$H_1(r_1, \varphi_1) = (r_1 \cos \varphi_1 + r_1 \sin \varphi_1) \left[\int_{\phi_2 l_3}^{\frac{5\pi}{4} R} \int_{\phi_1 l_2}^{\phi_1 R} f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi + \int_{\frac{-3\pi}{4} l_2}^{\phi_1 R} \int_{\phi_2 l_3}^{\phi_1 R} f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi \right],$$

where

$$l_2 : r_2(\varphi) = \frac{|r_1^2 - a^2|}{2\sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 - a)^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1} \cos(\varphi - \operatorname{arctg}(\frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_1 \cos \varphi_1 - a}))},$$

$$l_3 : r_3(\varphi) = \frac{|r_1^2 - a^2|}{2\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + (r_1 \sin \varphi_1 - a)^2} \cos(\varphi - \operatorname{arctg}(\frac{r_1 \sin \varphi_1 - a}{r_1 \cos \varphi_1}))},$$

$$\phi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_1 \cos \varphi_1 - a}\right) - \arccos\left(\frac{r_1^2 - a^2}{2R\sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 - a)^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1}}\right),$$

$$\phi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_1 \sin \varphi_1 - a}{r_1 \cos \varphi_1}\right) + \arccos\left(\frac{r_1^2 - a^2}{2R\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + (r_1 \sin \varphi_1 - a)^2}}\right),$$

$$f(r, \theta) = \frac{3(1 - r)}{\pi},$$

r — this is the Jacobian of the transition to the polar coordinate system.

Minimum of the function $H_1(r_1, \varphi_1)$ is reached at the point (c, c) for the Cartesian coordinate system, i.e. in polar coordinates it will be the point $(c\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$. Therefore, when calculating the winnings of the first player, instead of the radius r_1 , we will substitute $c\sqrt{2}$, and instead of the angle $\varphi_1 - \frac{5\pi}{4}$.

The winnings of the second and third players are also found as the mathematical expectation of their winnings when the arbiter's decision falls into the sets S_2 and S_3 , respectively. Then the winnings of the second player will be located in the area S_2 , bounded by the straight lines l_1 , l_2 and the arc of the circle, using the following formula:

$$H_2(a) = a \left[\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\phi_1 l_2} \int_0^R f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi + \int_{\phi_1 0}^{\frac{\pi}{4} R} \int_0^R f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi \right],$$

where

$$l_2 : r_2(\varphi) = \frac{|r_1^2 - a^2|}{2\sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 - a)^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1 \cos(\varphi - \arctg(\frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_1 \cos \varphi_1 - a}))}},$$

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_1 \cos \varphi_1 - a}\right) - \arccos\left(\frac{r_1^2 - a^2}{2R\sqrt{(r_1 \cos \varphi_1 - a)^2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1}}\right).$$

And the winnings of the third player in the area S_3 , bounded by the straight lines l_1 , l_3 and the arc of the circle, we will find using the following formula:

$$H_3(a) = a \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\phi_2 R} \int_0^R f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi + \int_{\phi_2 0}^{\frac{5\pi}{4} l_3} \int_0^R f(r, \theta) r \, dr \, d\varphi \right],$$

где

$$l_3 : r_3(\varphi) = \frac{|r_1^2 - a^2|}{2\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + (r_1 \sin \varphi_1 - a)^2 \cos(\varphi - \arctg(\frac{r_1 \sin \varphi_1 - a}{r_1 \cos \varphi_1}))}},$$

$$\phi_2 = \arctg\left(\frac{r_1 \sin \varphi_1 - a}{r_1 \cos \varphi_1}\right) + \arccos\left(\frac{r_1^2 - a^2}{2R\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + (r_1 \sin \varphi_1 - a)^2}}\right).$$

So, formulas of the winning functions for each of the players were obtained. This game takes place with a restriction for the referee and in polar coordinates.

To analyze the behavior of all participants in the conflict, that is, the dependence of the participants' winnings on the simulation parameters, a program was written in the C# programming language. The results are presented in Table 2.

RESULTS OF NUMERICAL SIMULATION OF NEGOTIATIONS

δ	a	n	$H_n^{(1)}$	$H_n^{(2)}$
(0;0.77)	\forall	2	32.6191	63.5714
[0.77;0.8)	40	14	33.7113	62.7780
	[41;60]	2	32.6191	63.5714
[0.8;0.83)	40,41	25	35.6083	62.0619
	[42;60]	2	32.6191	63.5714
[0.83;0.86)	[40;42]	27	35.9848	59.3472
	[43;60]	2	32.6191	63.5714
[0.86;0.87)	[40;43]	31	36.1502	58.7121
	[44;60]	2	32.619	63.5714
[0.87;0.89)	[41;43]	36	36.5274	57.7465
	$\{40\} \cup [44; 60]$	2	32.619	63.5714
[0.89;0.9)	[42;44]	44	36.5274	56.2791
	$[40; 41] \cup [45; 60]$	2	32.619	63.5714
[0.9;0.92)	43,44	44	36.7442	56.2791
	$[40; 42] \cup [45; 60]$	2	32.619	63.5714
[0.92;0.928]	44,45	52	37.5427	62.4869
	$[40; 43] \cup [46; 60]$	2	32.619	63.5714
(0.928;0.93)	44,45	17	37.5427	62.4869
	$[40; 43] \cup [46; 60]$	2	32.619	63.5714
[0.93;0.94]	45	17	33.2288	63.0608
	$[40; 44] \cup [46; 60]$	2	32.619	63.5714
(0.94;1]	\forall	2	32.619	63.5714

Table 1. Numerical simulation results in wage problem.

R	0.5	0.7	0.8	1
H_1	0.0503727054	0.0911212726	0.0662981619	0.2882876400
H_2	0.0401099790	0.104202198	0.1297029310	0.1703486206
H_3	0.2806785612	0.3602390747	0.42269259804	0.25394445622
c	-0.499	-0.479	-0.479	-0.419
a	0.714	0.674	0.668	0.646

Table 2. Dependence of the winning function on the radius of the circle.

Analyzing the simulation results for wage negotiations in Table 1 we can conclude that when determining the discount rate from the range $\delta \in (0; 0.77) \cup (0.94; 1]$ negotiations end at the second step. This process of stopping negotiations does not depend on the values of the arbitrator's proposals in this case. It means that these values of this parameter will be the most "advantageous" in terms of the speed of the end of negotiations.

Negotiations move to the third step and over. However, at the same time, the parameter values take certain values from defined intervals. In addition, it is possible to determine the values of parameters at which the achievement of optimal values of winnings occurs over a relatively long period — 52 iterations.

For the case $n = 3$ and with restrictions for the arbiter, the winnings of all players increase with an increase in the radius, but only slightly.

CONCLUSIONS

The basic model for wage ($n = 2$) negotiations is the Nash arbitration scheme. This game-theoretic method is based on a modified pie-splitting problem. There is a neutral arbiter player in the arbitration scheme unlike the classical problem.

A feature of the arbitration scheme negotiation model is its versatility and simplicity for scenarios with two competitors and the subject of dispute in numerical form. However, it is impossible to find the duration of negotiations directly. Numerical simulation was implemented using a computer program to answer this question,. The aim of the numerical experiments was to determine the effect of changes in the model parameters on the negotiation period. Intervals are found for model parameters at which negotiations are lengthy.

Thus, all the most "profitable" solutions to the negotiation problem have been identified from the point of view of both players.

In the process of modeling for $n = 3$, the solution is presented using a geometric interpretation. Interesting results are presented in this scenario, taking into account the limitation of the "activity" of the arbitrator.

REFERENCES

1. MAZALOV, V. V., MENCHER, A. E., TOKAREVA, Yu. S. (2012) *Negotiations: mathematical theory*. St. Petersburg : Lan.
2. MANUELL, G., MONTIEL, L. (2019) Maximum probability negotiations in cooperative games with commercial purposes. *Revista Mexicana de economia finanzas*. Vol.14 (2). p. 245-259.

3. JACKSON, M., SONNENSHEIN, Y., XING, Y., TOMBAZOS, C., UBAYDLY, O. A. (2021) The efficiency of negotiations with uncertain and multidimensional deals. *Johns Hopkins Carey Business School Research Paper*. (21-14). p. 36.
4. HARRISON, G., RUSTRON, E. (1991) Trade wars, trade negotiations and applied game theory. *The economic Journal*. Vol.101 (406). p. 420-435.
5. MADANI, K. (2013) Modeling international climate change negotiations more responsibly: can highly simplified game theory models provide reliable policy insight. *Ecological Economics*. Vol.90. p. 68-76.
6. WALL, J., BLUM, M. (1996) Negotiations. *Journal of Management*. Vol.17. p. 273-303.
7. CORFMAN, KIM P. (1993) Mathematical models of group choice and negotiations. *Handbooks in Operations Research and Management Science*. Vol.5. p. 83-142.
8. MAZALOV, V. V. (2016) *Mathematical game theory and applications*. 2 izd. St. Petersburg : Lan.
9. Google. (2012) *Google Drive*. [Online] Available from:
<https://drive.google.com/drive/folders/14q0n6GwTQBxnl8EZvaF7mWUODxnq7to?usp=sharing>.

UDC: 519.6

MSC2010: 93A30

MODELING REGULAR WAVES EFFECTS ON TURBULENT VERTICAL EXCHANGE

© A. I. Sukhinov

DON STATE TECHNICAL UNIVERSITY

ROSTOV-ON-DON, RUSSIA

E-MAIL: sukhinov@gmail.com

© E. A. Protsenko, V. V. Sidoryakina, S. V. Protsenko

TAGANROG INSTITUTE, NAMED AFTER A.P. CHEKHOV – BRANCH OF ROSTOV STATE UNIVERSITY OF ECONOMICS

TAGANROG, RUSSIA

E-MAIL: capros@rambler.ru, cov9@mail.ru, rab55555@rambler.ru

MODELING REGULAR WAVES EFFECTS ON TURBULENT VERTICAL EXCHANGE.

Sukhinov A. I., Protsenko E. A., Sidoryakina V. V., Protsenko S. V.

Abstract. The study of regular waves in the work is reduced to the identification of statistical patterns, which are numerically expressed by the dependencies between waves elements and their determining factors. Based on the processing of data obtained using the ADCP, the characteristic length of the regular wave for the Azov Sea, the characteristic and maximum speed are revealed in the work. The paper calculates the turbulent exchange coefficients using set of periods for averaging turbulent velocity pulsations. Using experimental data on velocity components pulsations, the vertical turbulent exchange coefficient was calculated on the basis of various approaches to its parametrization, based on the analysis of the obtained coefficient distributions, the most adequate parametrization of the coefficient for physical processes was selected, which is used in the software package.

Keywords: *effect of regular waves, turbulent exchange, vertical turbulent exchange coefficient, three-dimensional hydrodynamics mathematical model.*

INTRODUCTION

To analyze the effect of regular waves on the turbulent exchange model, idealized sinusoidal wave theory was used. Although wind waves at sea are never regular, the classical theory of regular waves is used in most wind wave studies and is the basis for analyzing and predicting wind waves. Therefore, the general laws of the waves structure and the motion nature of their individual particles from the point of view of the trochoidal wave theory was considered. Individual water particles in surface waves move along closed ellipsoidal lines, making a complete revolution in a time equal to the wave period. The

rotational motion of sequentially arranged water particles shifted by a phase angle at the initial moment of motion creates the appearance of translational motion: individual particles move in closed orbits, while the wave profile moves translationally in the wind direction.

Wind waves are characterized by two features. The first is due to the irregularity and disorderliness of wave sizes and shapes. One wave does not repeat another, a large wave can be followed by a small one, or even a larger one, while each individual wave continuously changes its shape. Some unusually long and low waves can't be seen at all. Wave crests move not only in the wind direction, but also in other directions. Such a complex structure of the disturbed sea surface is explained by the eddy turbulent nature of the wind. The second feature of waves is the rapid variability of wave elements in time and space, which is also associated with the wind. At the same time, the size of waves depends not only on the wind speed, but also on the duration of its action, the length of acceleration, and the depth of the sea. From the point of view of practice, it is not necessary to know the size of each individual wave or each wave oscillation, but rather the statistical characteristics of waves are more important: average, root-mean-square deviations [1].

The study of waves is ultimately reduced to the identification of statistical patterns, which are numerically expressed by the dependencies between the elements of waves and their determining factors [2].

The results of measurements of wave elements are usually presented in the form of a curve that characterizes their repeatability in a series of observations, usually expressed as a percentage. When entering shallow water, the wave statistics change: the number of high waves decreases, while the number of low-altitude waves increases. The answer to the question about the frequency of repetition of waves of a particular size is given by the distribution functions of wave elements. They make it possible to describe ensembles of waves rather than individual ones, and they make it possible to predict the probability of waves with specified characteristics, if some averaged wave parameters are known. The distribution functions of visible wave elements in the first approximation do not depend on the intensity, stage of development, and form of the wave, and they can be expressed using a single dimensionless function.

The distribution functions of wind wave elements in shallow waters were studied both theoretically and on the basis of systematization and statistical analysis of field data materials. It was shown that the distribution of wave periods in shallow water does not change significantly, and the distribution of wave heights, taking into account the influence of sea depth, is expressed by a family of curves described using a simple analytical

function [3]. Distribution functions make it very easy to find elements of waves of any security based on the known values of these elements of a certain security. This makes it possible to compare and objectively evaluate various methods of calculating and observing wind waves. To study the statistics of waves covering different time periods (from a few minutes to several years), due to the large differences in the scale of wave variability, fundamentally different field data and methods of their analysis are needed.

1. WAVE DISTURBANCE PERCEIVED BY ADCP

Wave disturbance perceived by ADCP, differs in frequency and intensity from waves on the sea surface. This is due to the mutual movement of the ship and waves, and the commensurability of their geometric dimensions. The movement of a ship on a wave changes the frequency of the wave disturbance. If the wave size is close to the ship's dimensions (length, width, draft), then it cannot repeat its profile as it moves. As a result, the level of disturbance changes.

On a moving sea by a moving object, a regular wave is perceived not with its true frequency σ , but with a new transformed frequency ω , which is called the apparent ω .

Let consider the object as a material point that moves uniformly at a speed v at an angle ξ to the direction of motion of the waves. Then the coordinate of the point of meeting the ship with the wave changes $x = -vt \cos \xi$.

The law of changing the wave ordinate at the point where the ship meets the wave has the form

$$r(t) = R_m \cos \left(- \left(\frac{v\sigma}{g} \cos \xi + 1 \right) \sigma t \right) = R_m \cos \omega t, \quad (1)$$

where $\omega = \left| \sigma + \sigma^2 \frac{v}{g} \cos \xi \right| = |1 + a\sigma| \sigma = \left| 1 + \frac{v\sigma}{g} \cos \xi \right| \sigma$ represents the apparent angular frequency of a regular wave acting on a moving ship, $a = v \cos \xi / g$ is the factor of relative movement ship on a wave [9].

Analysis of the relation shows that when the ship moves with a lag to the wave $|\xi| = 90^\circ$, $a = 0$, the true and apparent frequencies coincide. If the object is moving towards a wave, $0 \leq |\xi| < 90^\circ$, $a > 0$, and the apparent frequency of the wave is greater than the true one. A more complex relationship is found when the ship moves along a wave $0 \leq |\xi| < 180^\circ$, $a < 0$.

Possible driving conditions are those in which a passing wave with a frequency $\sigma_0 = 1/|a|$ of has zero apparent frequency $\omega_0 = 0$. This happens when the speed of the wave and the ship coincide $v |\cos \xi| = c$, when their relative position remains unchanged. At other speeds, the ship can lag behind the wave $v |\cos \xi| < c$ or overtake it $v |\cos \xi| > c$. In the first case, the frequency of the disturbance lies in the

range $0 < \sigma < 1/|a|$, and the apparent frequency is less than the true one. In the second case, the frequency of the disturbance lies in the region $\sigma > 1/|a|$, and the apparent frequency may exceed the true one. At the same time, the extreme values of the apparent frequency and the corresponding values of the true frequency decrease [10].

The degree of pitching influence is taken into account using reduction coefficients. The reduction coefficients depend on the wavelength, and therefore on the frequency of the wave. They have the form of amplitude-frequency characteristics of linear low-frequency filters. The specific values of these coefficients are determined by the design features of the ship's hull.

2. THE EFFECT OF REGULAR WAVES ON THE TURBULENT EXCHANGE IN THE VERTICAL DIRECTION

Due to acoustic pulses emitted in different directions, the accuracy of speed detection increases and the flow direction is determined. The measurements were recorded at intervals of 1 s every 10 cm at the measured depth. The speed was recorded in the corresponding file in mm/s. The columns show the time values on the device's clock and 128 depth measurements of one of the components of the velocity vector at the current time. In the described experiment, data were stored for three components of the water flow velocity vector at the current time. Data on each component of the velocity vector is stored in a separate file. The probe saves information about instantaneous water flow pulsations to a file with the extension txt. The recorded information includes service headers, contains data about service directories, and probe settings.

Problems of decomposition of empirical data series obtained with the help of acoustic Doppler current profiler (ADCP), on the evolutionary component and cyclic components belong to the class of inverse problems of processing and interpreting experimental data. The selection of a regular wave is based on a set of moving average smoothing procedures. The series components are evaluated in three stages: the initial component evaluation, the intermediate component evaluation of the series, and the final evaluation of the regular component and the adjusted series.

After forming a trend model using a centered moving average algorithm, the initial series is divided by this estimate and the initial estimate of the noisy cyclic component is obtained. To estimate the seasonal component, the noisy cyclical component is smoothed out by a moving average, which averages the individual components corresponding to regular coefficients. This results in an estimate of the regular factor. At this stage, the estimation of seasonal coefficients is normalized so that their product for each period is

equal to one. After that, dividing the original series by the seasonal factor estimate, we get an estimate of the noisy adjusted component.

At the final stage of evaluating the components of the series, the final trend component is extracted from the noisy trend again by smoothing and using it, the irregular component is extracted, which is necessary for statistical identification of the corresponding components.

A set of harmonics of the main oscillation was used as models of cyclic components. The stationary wave was formed as an additive mixture of the main oscillation and three higher harmonics on the interval, which was then distorted so that the maximum values on the positive half-wave differed from the maximum values on the negative half-wave. In this way, the seasonal wave was disharmonized in order to get as close as possible to the real wave components

The noise component was generated using the RAND function of the Microsoft Excel package. The variant with a uniform distribution density of random samples and zero mean value (zero first moment) was chosen. The estimation of the variance of the noise component by the STDEV function of the Excel package was 10% of the estimate of the variance of the cyclic component, and thus the noise/cyclic component ratio (noise/signal ratio) was fixed. By changing the scale along the ordinate axis two or three times, different w/s ratios were recorded.

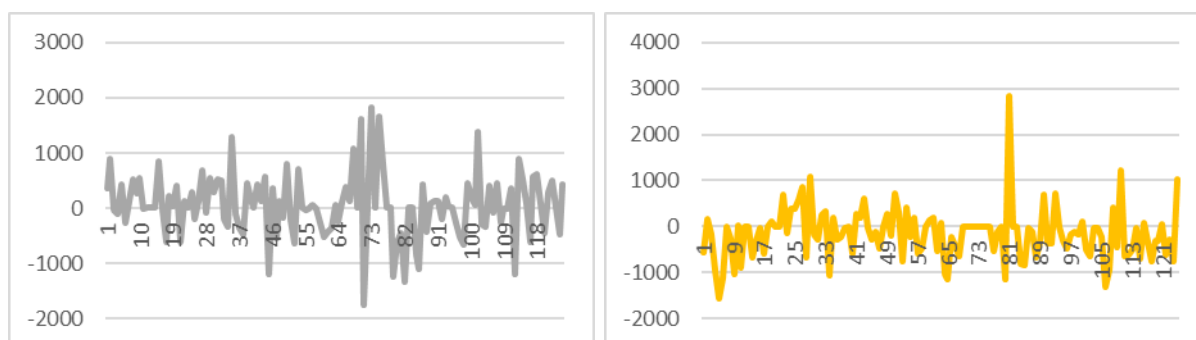


Fig. 1. Initial data series obtained with the probe ADCP, vertical mm/s , horizontally m .

Thus, based on the processing of data obtained by the probe ADCP it is revealed that the characteristic regular wave length for the Azov Sea is 15-25 meters wide, and the characteristic speed is 0,1 – 0,2 m/s., the maximum speed is 0,51-0,77 m / s. The data obtained with the help of modeling are consistent with the data provided by the Unified State Information System on the Situation in the World Ocean (ESIM).

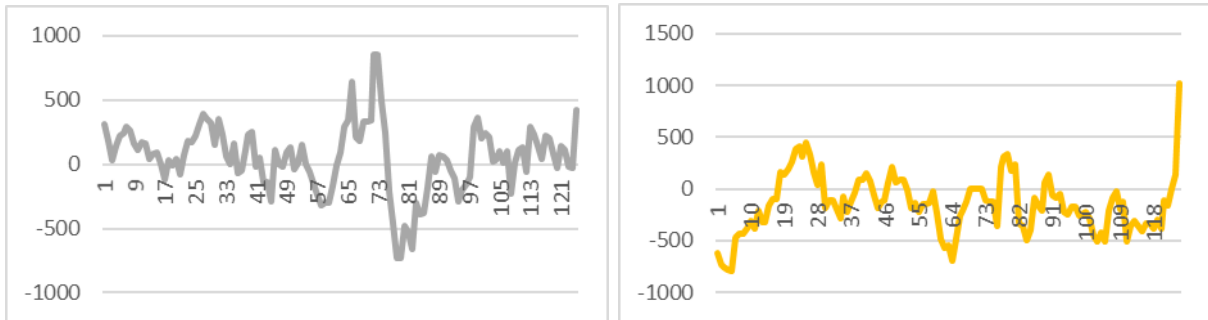


Fig. 2. A series obtained by averaging the probe data ADCP, vertical mm/s , horizontally m .

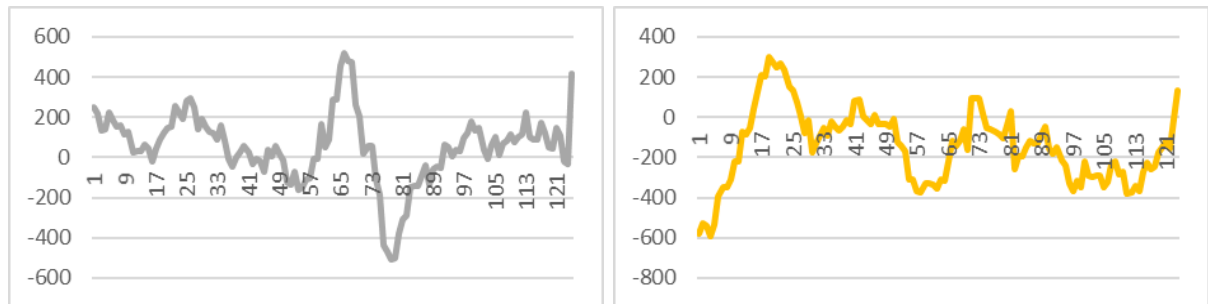


Fig. 3. A series obtained by averaging and filtering probe data ADCP, vertical mm/s , horizontally m .

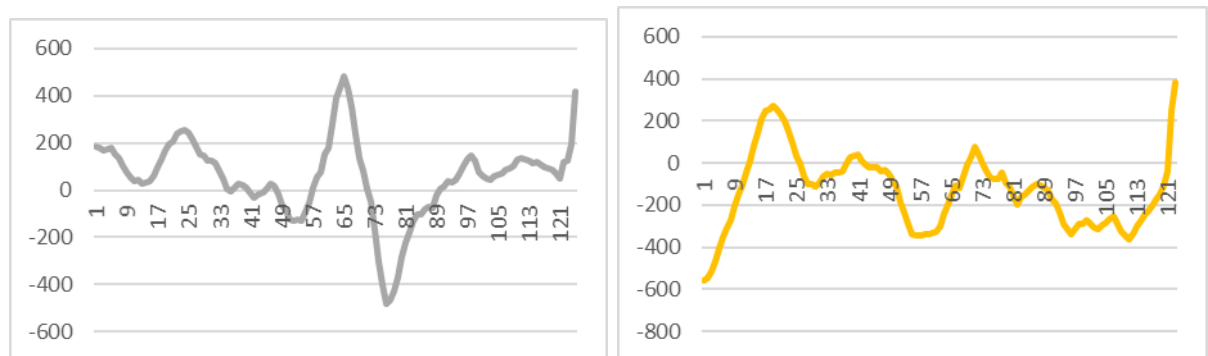


Fig. 4. Vertical series obtained by filtering, eliminating the noise, vertical mm/s , horizontally m .

In this paper, the turbulent exchange coefficients are calculated using a whole set of averaging periods for turbulent velocity pulsations. Using experimental data on pulsations of velocity components, the vertical turbulent exchange coefficient was calculated on the basis of various approaches to its parameterization, based on the analysis of the obtained

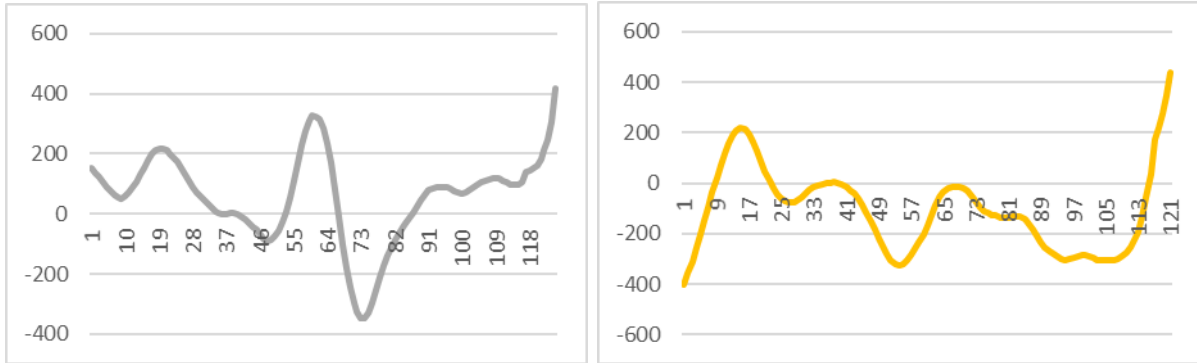


Fig. 5. A series obtained by selecting a cyclic component with a period equal to the period of a regular wave from the implementation of a random process with a uniform distribution density by the RAND procedure, vertical mm/s , horizontally m .

coefficient distributions, the parameterization of the coefficient that is most adequate to physical processes, which is used in the software package, was selected.

The Smagorinsky model is a subgrid model of the vertical turbulent exchange coefficient. Turbulent viscosity ν it is determined by the average value of the turbulence energy dissipation rate ε , per unit volume. In this case, for dimensional reasons, it follows $\nu \sim \varepsilon^{1/3} \cdot \Delta^{4/3} k$, where Δ is the characteristic grid scale.

The value of the dissipation rate ε not directly known. The second consideration is that the dissipation rate can be expressed in terms of the average deformation rate of the cell scale $\bar{s} = 2\bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij}$, where \bar{s}_{ij} is the averaged strain rate tensor, from the ratio $\nu = C_s^2 \Delta^2 \bar{s}^{-1/2}$, where C_s is dimensionless empirical constant, the value of which in the Smagorinsky formula is usually determined based on the calculation of the attenuation process of homogeneous isotropic turbulence. In particular, the selected value of the constant C_s it must ensure compliance with experimental measurements.

In the case when the mesh size is chosen sufficiently small, the average deformation rate of the cellular scale \bar{s} is equal to the average strain rate in the Prandtl parameterization D . Thus, we come to the Prandtl analog in the form: $\nu = C_s^2 \Delta^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}}$, neglecting horizontal gradients \bar{u} and \bar{v} , and gradients of the vertical velocity component \bar{w} , get the following expression: $\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}$.

The use of three-dimensional statements of those problems that traditionally belonged to the field of the shallow water theory is dictated by the need to improve hydrodynamic models of real phenomena and the growing requirements for initial information in ecology, hydro-engineering. The three-dimensional formulation concludes the fundamental possibility of increasing the accuracy of calculating the phenomenon. The use of a

three-dimensional formulation also allows us to obtain a more general, meaningful and interrelated description of the response of the coastal zone to large-scale atmospheric disturbances.

Experiments were performed based on several approaches for calculating the vertical turbulent exchange coefficient:

1. Parametrization of Belotserkovsky $\nu = (C\Delta z) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]$,
2. Boussinesq parameterization $\nu = (0,41z)^{20},5 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2}$,
3. Smagorinsky parameterization $\nu = 0,5(C\Delta)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2}$,

where ν is the coefficient of turbulent exchange in the vertical direction; \bar{u}, \bar{v} are the components of the water flow velocity averaged over the time of pulsation in the horizontal direction, C is dimensionless empirical constant; Δ is characteristic scale of the grid.

To parameterize the vertical turbulent exchange coefficient, algebraic subgrid models based on the definition of turbulent flows as the products of flow velocity components deviations and the transferred physical quantity averaged over space or time were considered.

Experiments were performed based on several approaches for calculating the vertical turbulent exchange coefficient: Belotserkovsky parametrization, Boussinesq parametrization, and Smagorinsky parametrization.

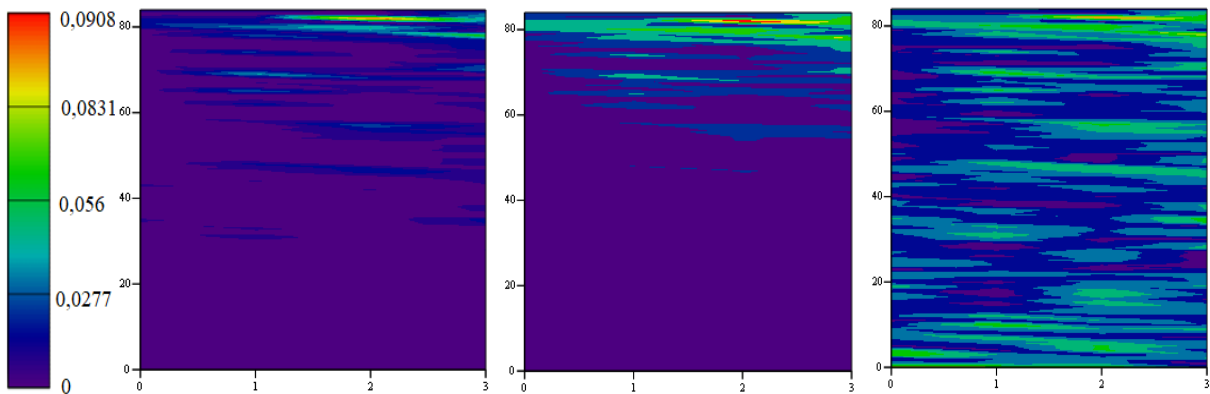


Fig. 6. Parametrization of the turbulent exchange coefficient.

The optimal value of the empirical constant appearing in the formula of Belotserkovsky and Smagorinsky was also obtained from the comparison of distributions, the value of which ensures compliance with experimental measurements, as well as other methods for calculating the coefficient. The value of this constant for all expedition measurement points is 1.4.

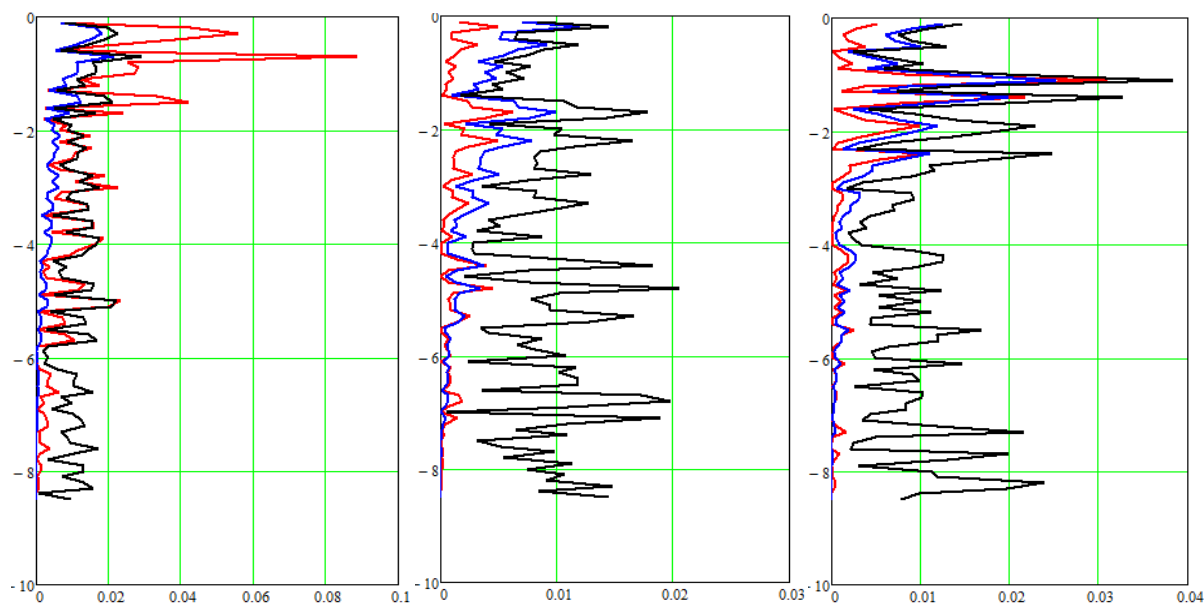


Fig. 7. The vertical turbulent exchange coefficient at points (the red line is the Belotserkovsky parametrization, the blue line is Boussinesq, the black line is Smagorinsky).

Based on the considered methods for calculating the vertical turbulent exchange coefficient, distributions that are inhomogeneous vertically for all measurement points are obtained. Comparative analysis has shown that for the obtained distributions of the vertical turbulent exchange coefficient, the models show similar results in order of magnitude, as well as in the location of peaks on the graphs, a more in-depth analysis using mathematical statistics methods is necessary to assess the quality of parameterization.

CONCLUSIONS

Wind disturbance is characterized by two features. The first is the irregularity and disorder of the sizes and shapes of waves. The second feature of the wave is the rapid variability of the wave elements in time and space, which is also associated with the wind. The study of waves is reduced to the identification of statistical patterns, which are numerically expressed by the dependencies between the elements of waves and their determining factors.

Based on the processing of data obtained using the ADCP, it was revealed that the characteristic length of a regular wave for the Azov Sea is 15-25 meters, and the characteristic speed is 0,1-0,2 m/s, the maximum is 0,51-0,77 m/s. The data obtained by modeling are consistent with the data provided by the Unified State Information System on the Situation in the World Ocean.

To parametrize the coefficient of vertical turbulent exchange, algebraic subgrid models based on the definition of turbulent flows as the products of deviations of the components of the flow velocity and the transferred physical quantity averaged over space or time are considered. Experiments were performed on the basis of several approaches to calculate the coefficient of turbulent exchange along the vertical: Belotserkovsky parametrization, Boussinesq parametrization; Smagorinsky parametrization. On the basis of the considered methods of calculating the coefficient of vertical turbulent exchange, distributions inhomogeneous vertically for all measurement points are obtained. Comparative analysis has shown that for the obtained distributions of the vertical turbulent exchange coefficient, the models show similar results in order of magnitude, as well as in the location of peaks on the graphs, a deeper analysis using mathematical statistics methods is needed to assess the quality of parametrization.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper was supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant No. 20-01-00421.

REFERENCES

1. ALEKSEENKO, E., ROUX, B. and etc. (2013) Nonlinear hydrodynamics in a mediterranean lagoon. *Nonlinear Processes in Geophysics* 20(2). p. 189–198.
2. DEBOLSKAYA, E. I., DOLGOPOLOVA, E. N. (2017) Vertical distribution of a pollutant in river flow: mathematical modeling. *Water Resources* 44(5). p. 731–737.
3. FERRER., M. et al. (2016) A multi-region coupling scheme for compressible and incompressible flow solvers for 2-phase flow in a numerical wave tank. *Computer & Fluids* 125. p. 116–129.
4. HUANG, B., ZHU, B., CUI, S., DUAN, L., ZHANG, J. (2018) Experimental and numerical modelling of wave forces on coastal bridge superstructures with box girders. *Ocean Engineering* 149. p. 53–77.
5. JOHN, M. H. (2019) Coastal-Trapped Waves. *Encyclopedia of Ocean Sciences (Third Edition)* (Academic Press). p. 598–605.
6. MARTÍNEZ-FERRER, P. J., QIAN, L., MA, Z., CAUSON, D. M., MINGHAM, C. G. (2018) Improved numerical wave generation for modelling ocean and coastal engineering problems. *Ocean Engineering* 152. p. 257–272.

7. PROTSENKO, S., SUKHINOVA, T. (2017) Mathematical modeling of wave processes and transport of bottom materials in coastal water areas taking into account coastal structures. *MATEC Web of Conferences* 132. p. 04002.
8. SUKHINOV, A. I., CHISTYAKOV, A. E., PROTSENKO, E. A., SIDORYAKINA, V. V., PROTSENKO, S. V. (2020) Accounting Method of Filling Cells for the Solution of Hydrodynamics Problems with a Complex Geometry of the Computational Domain. *Mathematical Models and Computer Simulations* 12(2). p. 232–245.
9. TANG, J., LYU, Y., SHEN, Y., ZHANG, M., SU, M. (2017) Numerical study on influences of breakwater layout on coastal waves, wave-induced currents, sediment transport and beach morphological evolution. *Ocean Engineering* 141. p. 375–387.
10. TISHKIN, V. F., GASILOV, V. A., ZMITRENKO, N. V., KUCHUGOV, P. A., LADONKINA, M. E., POVESCHENKO, YU. A. (2020) Modern methods of mathematical modeling of the development of hydrodynamic instabilities and turbulent mixing. *Matem. Mod* 32:8. p. 57–90.

УДК: 004.312.466

MSC2010: 00A71

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

© Ф. Р. Аметов, Э. А. Бекиров

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *ametov.ferat@gmail.com*

**DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHM FOR THE
IMPLEMENTATION OF CYBERSECURITY OF CONTROL SYSTEMS OF ELECTRIC POWER
FACILITIES.**

Ametov F. R., Bekirov E. A.

Abstract. The modern automated control system at electric power enterprises is a combination of many systems, modules and interfaces. One of the most important and, at the same time, vulnerable is the switching module, which is a set of devices and interfaces for data transmission, processing and analysis. One of the most popular solutions for organizing communication between control system components is the Modbus protocol, based on certain algorithms and data transfer protocols.

Forecasting and analyzing information attacks in order to detect and prevent them prematurely becomes an important task. Analysis and structuring of components and their vulnerabilities will allow you to simulate potentially unprotected places and determine further actions to protect them. The signature-based threat detection method used in data processing includes a feature of packet data transmission in Modbus to detect unwanted or third-party network traffic. This method is based on certain set rules, which also use the principle of threshold values to detect unwanted signatures or anomalies.

The principles of communication of devices within production networks, as well as the specifics of transmitting information on them, are defined in standardized specifications. Specifications are a set of protocols that implement system components.

A number of the specifications used have limitations related to multiplatform, security and modernization, as a result of which there are problems with network configuration, its support, modernization and security. In this regard, an urgent task is the implementation and support of modern specifications that allow configuring the system with additional security add-ons.

An important indicator of any algorithm and any data transmission model is their cryptographic strength, or in other words, the level of protection from potential cyber attacks. Based on the analysis of the collected information, the calculation of the optimal mathematical

model of the algorithm for the implementation of cybersecurity on the example of Modbus communication was carried out.

Keywords: Modbus, cybersecurity, slave, master, mathematical model.

ВВЕДЕНИЕ

Все устройства, построенные на интерфейсе Modbus, на физическом уровне работают по модели Master → Slave. Это значит, что есть управляющее устройство Master и подконтрольные ему устройства Slave. Принцип работы Modbus строится на том, что master-устройство поочередно опрашивает slave-устройства, которые отвечают ему.

Важной составляющей протокола Modbus TCP является возможность интеграции с внешними серверами посредством TCP/IP соединения, структурная модель которого показана на рис. 1:

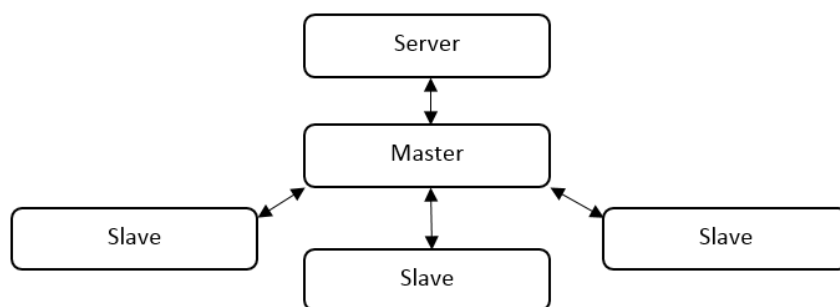


Рис. 1. Модель master → slave протокола Modbus TCP

Взаимодействия между компонентами описываются специальными алгоритмами передачи и инкапсуляции данных, а поскольку каждый такой алгоритм в Modbus представляет собой цепочку взаимосвязей между компонентами информационной системы управления, его математическую модель можно описать используя общую топологию компьютерных сетей, которая описывает архитектуру в целом [1]. Топология представляет собой граф, изображающий как физическую, так и информационную взаимосвязь между компонентами.

В зависимости от архитектурных и структурных особенностей системы управления, в рамках которой описывается алгоритм следует использовать связанные между собой типы вычислительных архитектур — «звезда» и «кольцо», состоящие из совокупности узлов и касающихся оптимизации электроснабжения, энергосбережения,

а также защиты компьютерной информации от воздействия кибератак [2]. Для построения математической модели такой среды необходимо отобразить ее логическую структуру в виде графа.

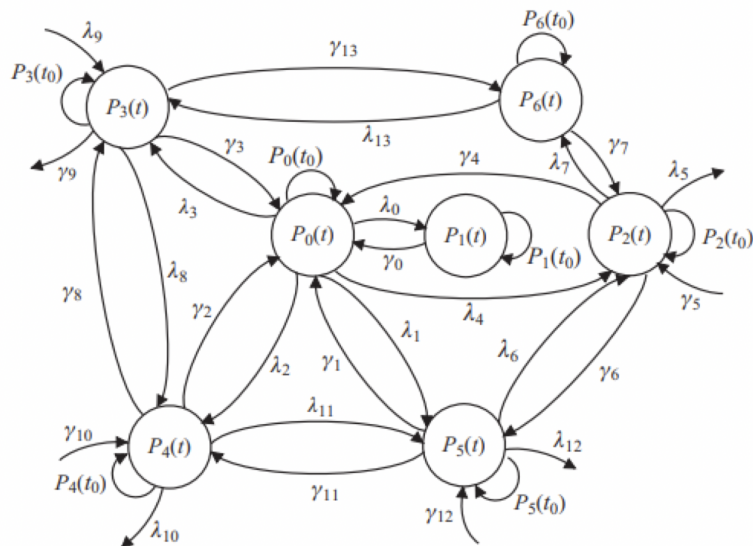


Рис. 2. Совокупность компонентов системы в виде графа

На основе этого графа синтезируем дифференциальную математическую модель и на ее базе сформулируем критерий кибербезопасности и построим интеллектуальные компьютерно-ориентированные методы киберзащиты в реальном времени. Узлы P_0 и P_1 графа, приведенного на рис. 2 — это центральный сервер локальной сети управления и сервер базы данных соответственно [3]. Организация обмена информацией между узлами в распределенной компьютерной сети и реализация передачи данных по Интернет осуществляется при помощи узлов P_2 и P_3 . Процедуры опроса датчиков коммерческого учета электроэнергии реализованы в узле P_4 , диспетчерского управления электроснабжения — в узле P_5 , а считывание информации с микропроцессорных систем управления электропотреблением осуществляется узлом P_6 . При этом дуги графа представляют собой интенсивность потока кибератак $\lambda_j(t)$ и интенсивность потока защитных действий $\gamma_j(t)$ соответственно. Узлы графа P_i под влиянием интенсивности потоков кибератак $\lambda_j(t)$ и соответственно защитных действий $\gamma_j(t)$ находятся в состоянии, которое характеризуется вероятностью $P_j(t)$ ($i = 0, 1, \dots, 6$) [4]. С применением графа локальной сети будем синтезировать математическую модель в виде системы дифференциальных уравнений Колмогорова–Чепмена с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned}
dP_0(t)dt &= -(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)P_0(t) + \gamma_0P_1(t) + \gamma_1P_5(t) + \gamma_2P_4(t) \\
+ \gamma_3P_3(t) + \gamma_4P_4(t)dP_1(t)dt &= -\gamma_0P_1(t) + \lambda_0P_0(t)dP_2(t)dt = -(\gamma_4 + \lambda_7 + \lambda_5 + \gamma_6)P_2(t) \\
+ \lambda_6P_5(t) + \lambda_4P_0(t) + \gamma_7P_6(t)dP_3(t)dt &= -(\gamma_9 + \gamma_{13} + \gamma_3 + \lambda_8)P_3(t) + \lambda_{13}P_6(t) + \lambda_3P_0(t) \\
+ \gamma_8P_4(t)dP_4(t)dt &= -(\gamma_8 + \gamma_2 + \lambda_{11} + \lambda_{10})P_4(t) + \lambda_8P_3(t) + \lambda_2P_0(t) + \gamma_{11}P_5(t)dP_5(t)dt \\
&= -(\lambda_{12} + \gamma_{11} + \gamma_1 + \lambda_6)P_5(t) + \lambda_{11}P_4(t) + \lambda_1P_0(t) + \gamma_6P_2(t)dP_6(t)dt \\
&= -(\gamma_7 + \lambda_{13})P_6(t) + \gamma_{13}P_3(t) + \lambda_7P_2(t) \quad (1)
\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (1) справедлива при соблюдении условий нормирования [5]:

$$P_0(t_0) + P_1(t_1) + \dots + P_6(t_0) = 1,$$

в момент $t_0 = 0$ и начальных условий

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) + P_2(0) + \dots + P_6(0) = 0, \quad (2)$$

для системы дифференциальных уравнений (1) считают, что кибератаки на информационные ресурсы в системах происходят на некотором интервале $[t_0, T]$, а текущее время t пребывания системы в информационном конфликте выбирают из условий $t \in [t_0, T]$.

Ограничения на интенсивности потоков кибератак $\lambda_j(t)$ и интенсивность защитных действий $\gamma_j(t)$ запишем в виде

$$0 \leq \lambda_j \leq \lambda_j \max, \quad 0 \leq \gamma_j \leq \gamma_j \max, \quad (3)$$

где $\lambda_j \max$ и $\gamma_j \max$ — максимальная интенсивность потоков кибератак и защитных действий [6]. С целью обобщения полученного результата и упрощения математических изложение предложены следующие условия:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{13} = \lambda, \quad \gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{13} = \gamma. \quad (4)$$

Исходя из условий нормирования, можно утверждать, что:

$$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) = 1 - P_0(t) - P_6(t). \quad (5)$$

Тогда с учетом (4) и (5) система (1) примет вид

$$\begin{aligned}
dP_0(t)dt &= -(5\lambda + \gamma)P_0(t) + \gamma(1 - P_6(t))dP_1(t)dt = -\gamma P_1(t) + \lambda P_0(t)dP_2(t)dt \\
&= -2(\gamma + \lambda)P_2(t) + \lambda(P_0(t) + P_5(t)) + \gamma P_6(t)dP_3(t)dt = -(3\gamma + \lambda)P_3(t) + \lambda(P_0(t) + P_6(t)) \\
&\quad + \gamma P_4(t)dP_4(t)dt = -2(\gamma + \lambda)P_4(t) + \lambda(P_0(t) + P_3(t)) + \gamma P_5(t)dP_5(t)dt \\
&= -2(\gamma + \lambda)P_5(t) + \lambda(P_0(t) + P_4(t)) + \gamma P_2(t)dP_6(t)dt = -(\gamma + \lambda)P_6(t) + \gamma P_3(t) + \gamma P_2(t) \quad (6)
\end{aligned}$$

Математические модели (1), (6) являются основой для синтеза дифференциальных математических моделей и интеллектуальных методов киберзащиты с целью обеспечения оперативного управления электроснабжением в условиях риска проявлений киберугроз. С целью синтеза дифференциальных математических моделей кибербезопасности в дальнейшем предлагается воспользоваться фундаментальными понятиями теории дифференциальных преобразований Пухова. Соответствующие математические зависимости прямого и обратного дифференциального преобразования имеют вид:

$$X(k) = x(k) = Hk! [dkx(t)dtk]t=0 \cdot x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (tH)^k X(k) k = \infty k = 0, \quad (7)$$

где $x(t)$ — функция-оригинал, представляющая собой непрерывное, бесконечное число раз дифференцированную функцию аргумента t , которая ограничена вместе со всеми своими производными; $X(K)$ — функция целочисленного аргумента k , что представляет собой дифференциальное изображение оригинала; H — масштабная постоянная, имеет ту же размерность что и аргумент t , и выбрана, как правило, в диапазоне $0 \leq t \leq H$ на котором рассмотрены функции оригинал $x(t)$; знак \cdot представляет собой символ соответствия между оригиналом $x(t)$ и дифференциальным изображением $X(K)$, ($K = 0, 1, 2, \dots$) [7]. При условии, что $H = T$, на основе дифференциальных преобразований Пухова (7) запишем систему уравнений (6) в области дифференциальных изображений в виде T -модели:

$$\begin{aligned} P_0(k+1) &= Tk + 1[-(5\lambda + \gamma)P_0(k) + \gamma((k) - P_6(k))]P_1(k+1) \\ &= Tk + 1[-\gamma P_1(k) + \lambda P_0(k)]P_2(k+1) = Tk + 1[-2(\gamma + \lambda)P_2(k) + \lambda(P_0(k) + P_5(k)) \\ &+ \gamma P_6(k)]P_3(k+1) = Tk + 1[-(3\gamma + \lambda)P_3(k) + \lambda(P_0(k) + P_6(k)) + \gamma P_4(k)]P_4(k+1) \\ &= Tk + 1[-2(\gamma + \lambda)P_4(k) + \lambda(P_0(k) + P_3(k)) + \gamma P_5(k)]P_5(k+1) = Tk + 1[-2(\gamma + \lambda)P_5(k) \\ &+ \lambda(P_0(k) + P_4(k)) + \gamma P_2(k)]P_6(k+1) = Tk + 1[-(\gamma + \lambda)P_6(k) + \gamma P_3(k) + \gamma P_2(k)], \end{aligned} \quad (8)$$

где (k) — тейлоровская единица (теда), которую определяют согласно условиям:

$$(k) = \{1, k = 00, k \geq 1.$$

Применив дифференциальные преобразования (7) для начальных условий (2) системы дифференциальных уравнений (6), получим при $t_0 = 0$ и соответственно $k = 0$ начальные условия в области T -изображений в виде

$$P_0(0) = P_0(t_0) = 1, P_i(0) = P_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (9)$$

Система дифференциальных T -уравнений (8), представленная в виде совокупности алгебраических зависимостей, является базовой для определения величин вероятностей $P_0(t) + P_1(t) + \dots + P_6(t)$ узлов графа модели кибератак на информационные ресурсы электрической сети. Подставив в систему T -уравнений (8) значение целочисленного аргумента $k=1, 2, \dots$, получим спектр дискрет $P_i(1), P_i(2), P_i(3), i = 1, 2, \dots, 6$, которые в совокупности формируют решение этой системы в T -области. Для целочисленных аргументов $k = 0, 1, 2$ получим такие спектры:

$$\begin{aligned}
 k := 0 &\implies \{ \\
 P_0(1) &= -5T\lambda, \\
 P_1(1) &= T\lambda, \\
 P_2(1) &= T\lambda, \\
 P_3(1) &= T\lambda, \\
 P_4(1) &= T\lambda, \\
 P_5(1) &= T\lambda, \\
 P_6(1) &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k := 1 &\implies \{ \\
 P_0(2) &= 5/2T^2\lambda(5\lambda + \gamma), \\
 P_1(2) &= -1/2T^2\lambda(5\lambda + \gamma), \\
 P_2(2) &= -T^2\lambda(3\lambda + \gamma), \\
 P_3(2) &= -T^2\lambda(3\lambda + 2\gamma), \\
 P_4(2) &= -1/2T^2\lambda(6\lambda + \gamma), \\
 P_5(2) &= -1/2T^2\lambda(6\lambda + \gamma), \\
 P_6(2) &= 1/2T^2\lambda(\lambda + \gamma),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k := 2 &\implies \{ \\
 P_0(3) &= -T^3\lambda(\gamma^2 + 17/2\gamma\lambda + 125/6\lambda^2), \\
 P_1(3) &= 1/3T^3\lambda([1/2\gamma]^2 + 5\gamma\lambda + 25/2\lambda^2), \\
 P_2(3) &= 1/3T^3\lambda([5/3\gamma]^2 + 7\gamma\lambda + 31/3\lambda^2), \\
 P_3(3) &= 1/3T^3\lambda([11/2\gamma]^2 + 11\gamma\lambda + 16\lambda^2), \\
 P_4(3) &= 1/2T^3\lambda([1/3\gamma]^2 + 3\gamma\lambda + 31/3\lambda^2), \\
 P_5(3) &= T^3\lambda^2(2\gamma + 31/6\lambda), \\
 P_6(3) &= -1/3T^3\lambda([5/2\gamma]^2 + 5\gamma\lambda + 7/2\lambda^2).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Получив спектр с дискрет (9), (10), который описывает модели кибербезопасности специализированной электрической сети, формализуем критерий кибербезопасности сетей в виде [8]:

$$\Theta_i(t) = 1T \int P_i(t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad T \geq 0. \quad (11)$$

В электрических сетях задачи кибербезопасности решаются в условиях антагонизма субъектов информационного конфликта. Учитывая это, доминантным в таких условиях является соблюдение субъектами конфликта принципа минимакса [9]. При осуществлении процедур обеспечения кибербезопасности для достижения системой заданных показателей защищенности рационально придерживаться стратегии формирования таких значений γ_j , которые минимизируют плату субъекта обеспечения безопасности $\Theta_i(\lambda_j, \gamma_j)$ за расходы соответствующих ресурсов при максимальных интенсивностях потоков кибератак, то есть:

$$\Theta * i(\lambda_j, \gamma_j) = \min_{\gamma_j} \in E \gamma \max_{\lambda_j} \in E \lambda \Theta_i(\lambda_j, \gamma_j), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (12)$$

При моделировании стратегии кибератак противная сторона вероятно получается из условий формирования таких стратегий λ_j , которые максимизируют плату:

$$\Theta_i(\lambda_j, \gamma_j),$$

при условии ее минимизации системой безопасности γ_j , то есть

$$\Theta * i(\lambda_j, \gamma_j) = \max_{\lambda_j} \in E \lambda \min_{\gamma_j} \in E \gamma \Theta_i(\lambda_j, \gamma_j), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (13)$$

При условии выполнения равенства (13), а также равенности

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_j} \in E \gamma \max_{\lambda_j} \in E \lambda \Theta_i(\lambda_j, \gamma_j) &= \max_{\lambda_j} \in E \lambda \min_{\gamma_j} \in E \gamma \Theta_i(\lambda_j, \gamma_j) \\ &= \Theta_i * \text{opt}(\lambda_j \text{opt}, \gamma_j \text{opt}), \end{aligned} \quad (14)$$

полученные стратегии $\lambda_j \text{opt}$ и $\gamma_j \text{opt}$ оптимальны [10]. Стратегия обеспечения кибербезопасности заключается в поиске закона изменения потока интенсивности защитных действий γ_j , которая реализует минимизацию функционала (11) при стохастической интенсивности потоков кибератак λ_j соответственно в пределах (3). В связи с антагонизмом целей субъектов информационного конфликта доминантной стратегией гарантирования кибербезопасности будет стратегия на основе принципа минимакса, то есть:

$$\min_{\gamma_j} \in E \gamma \max_{\lambda_j} \in E \lambda \Theta_i(t, P_i(t), \lambda_j, \gamma_j). \quad (15)$$

В рамках принятых ограничений (3) применение минимаксной стратегии (15) позволяет минимизировать функционал (11) даже в случаях худшего сочетания интенсивности потоков кибератак λ_j с произвольным законом потока интенсивности из защитных действий γ_j . Применяв прямое преобразование (4) к функционалу (11) и используя согласно (8) значение совокупности дискрет (9), (10), запишем процедуру оптимизации через дискреты дифференциального спектра $P_i(k)$ в виде:

$$\Theta * i = \sum P_i(k)k + 1k = \infty k = 0. \quad (16)$$

На основе вычисленных дискрет (6)–(8) согласно (16) при $i = 0$ для узла P_0 локальной сети — центрального сервера локальной сети управления, выражение (16) примет вид

$$\Theta * 0(\lambda, \gamma) \approx 1 - 52T\lambda + 52T^2\lambda(5\lambda + \gamma) - T^3\lambda(\gamma^2 + 172\gamma\lambda + 1256\lambda^2). \quad (17)$$

Процесс поиска оптимальных стратегий интенсивности потоков кибератак λ_{jopt} и потока интенсивности защитных действий γ_{jopt} с ограничениями (3) функционала $\Theta * i$ тесно связан с исследованием его на экстремум путем подстановки в выражение (16) значений соответствующих дискрет [11]:

$$P_i(k), i = 1, 2, \dots, 6.$$

Известно, что необходимым для существования экстремума функционала $\Theta * 0(\lambda, \gamma)$ согласно теореме Куна–Таккера являются условия, позволяющие определить оптимальную стратегию обеспечения кибербезопасности вида:

$$\begin{aligned} dd\gamma_j(\Theta * 0(\lambda_j, \gamma_j)) &= 0 \quad dd\lambda_j(\Theta * 0(\lambda_j, \gamma_j)) = 0 \dots dd\gamma_j(\Theta * 4(\lambda_j, \gamma_j)) \\ &= 0 \quad dd\lambda_j(\Theta * 4(\lambda_j, \gamma_j)) = 0 \dots dd\gamma_j(\Theta * 6(\lambda_j, \gamma_j)) = 0 \quad dd\lambda_j(\Theta * 6(\lambda_j, \gamma_j)) = 0. \end{aligned}$$

Для узла P_0 сети интенсивность потока кибератак и защитных действий равна соответственно:

$$\lambda = 1669T, \quad \gamma = 4769T. \quad (18)$$

А уровень защищенности — соответственно

$$\Theta * 0 \approx 0,61. \quad (19)$$

Найденные стратегии (18) являются оптимальными, поскольку для них выполняются достаточные условия. Полученный результат (19) свидетельствует о том, что построение сети с моделью (рис. 2) обеспечивает достаточно высокий уровень киберзащиты всей системы от потенциально опасных кибератак [12].

Проведя операцию обратного дифференциального преобразования (7) для выбранного примера, получим модель обеспечения кибербезопасности узла P_0 в общем

виде:

$$P_0(t) \approx 1 - 5T\lambda + 52T^2\lambda(5\lambda + \gamma) - T^3\lambda(\gamma^2 + 172\gamma\lambda + 1256\lambda^2) \quad (20)$$

Точность модели (20) и ей подобных достигают количеством дискрет дифференциального спектра, которые входят в состав модели.

Выводы

В ходе исследования был рассмотрен наиболее востребованный в промышленных сетях интерфейсный протокол Modbus. Для определения стойкости алгоритмов и структуры Modbus к киберугрозам был смоделирован граф зависимостей, на основе которого синтезирована дифференциальная математическая модель, формулирующая основные критерии безопасности.

Математическое моделирование системы связей между компонентами сети описывает поиск оптимальных стратегий обеспечения кибербезопасности, для которых выполняются все достаточные условия безопасности, предъявляемые к системам управления.

В результате анализа, на основе дифференциальных уравнений Колмогорова–Чепмена, произведено математическое моделирование для системы на основе интерфейса Modbus TCP с учетом особенности таких систем, с использованием теоремы Куна–Таккера найдены достаточные оптимальные стратегии, подтверждающие достаточный уровень кибербезопасности при предъявляемых к ней требованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. PENA RAMIREZ, J., GARCIA, E. & ALVAREZ, J. (2020) Master-slave synchronization via dynamic control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 80. p. 104977.
2. NICOLA MARCEL, NICOLA CLAUDIU, DUTĂ MARIAN & SACERDOTIANU DUMITRU. (2018) SCADA Systems Architecture Based on OPC and Web Servers and Integration of Applications for Industrial Process Control. 10.5923/j.control.20180801.02.
3. YAN, D. (2020) *arXiv e-prints*. arXiv:2001.05734.
4. LEZHNIUK, P., KOMAR, V., KRAVCHUK, S. & SOBCHUK, D. (2017) Mathematical modeling of operation quality of electric grid with renewable sources of electric energy. p. 324–327. 10.1109/MEES.2017.8248923.

5. PROKOPEVA, D., ZHUK, T. & GOLOVKO, N. (2022) Operator analysis of Kolmogorov — Chapman type equations with differential operator. *Mathematical notes of NEFU*. 29(1). p. 39–55. doi: <https://doi.org/10.25587/SVFU.2022.19.74.004>.
6. KHARCHENKO, V., PONOCHOVNYI, Y., WALEED, AK. A., BOYARCHUK, A., & BREZHNIIEV, I. (2020) The Availability Models of Two-Zone Physical Security System Considering Cyber Attacks. In: Zamojski, W., Mazurkiewicz, J., Sugier, J., Walkowiak, T., Kacprzyk, J. (eds) *Theory and Applications of Dependable Computer Systems*. DepCoS-RELCOMEX 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1173. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-48256-5_32.
7. PUKHOV, G. E. (1982) Differential transforms and circuit theory. *International Journal of Circuit Theory and Applications*. 10. p. 265–276.
8. RAKUSHEV, M., KRAVCHENKO, Y., PERMIAKOV, O., LAVRINCHUK, O., BYCHENKOV V. & KRAINOV, V. (2020) Modeling of Solving Stabilized Differential Equations By Differential-Taylor Transformations. *2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*. p. 216–221. doi: 10.1109/ATIT50783.2020.9349265.
9. Денисюк С. П. Обеспечение надежности функционирования и устойчивой работы интеллектуальных энергетических систем / С. П. Денисюк, П. И. Тарасевич, А. В. Сподинський, Д. Г. Деревянко // Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України. — 2010. — № 27. — С. 27–33.
DENISYUK, S. P., TARASEVICH, P. I., SPODINSKY, A. V. & DEREVYANKO D. G. (2010) Ensuring the reliability of the functioning and stable operation of intelligent energy systems. *Proceedings of the Institute of electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 27. p. 27–33.
10. RAMASWAMY, P. C. & DECONINCK, G. (2011) Relevance of voltage control, grid reconfiguration and adaptive protection in smart grids and genetic algorithm as an optimization tool in achieving their control objectives. *2011 International Conference on Networking, Sensing and Control*. p. 26–31, doi: 10.1109/ICNSC.2011.5874894.
11. STASIUK, A. I., GONCHAROVA, L. L., & GOLUB, G. M. (2017) Method for Assessing Cybersecurity of Distributed Computer Networks for Control of Electricity Consumption of Power Supply Distances. *Journal of Automation and Information Sciences*. 49. p. 48–57.
12. HANSON, M. A. (1981) On sufficiency of the Kuhn–Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 80. p. 545–550.

УДК: 517.3

MSC2010: 31B15; 47G10; 44A15; 46E30

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕССЕЛЯ ПОСРЕДСТВОМ ЯДРА ПУАССОНА ОБЩЕГО ВИДА¹

© А. Л. Джабраилов

ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. А. КАДЫРОВА
УЛИЦА АСЛАНБЕКА ШЕРИПОВА, 32, ГРОЗНЫЙ, 364024, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: ahmed_0065@mail.ru

REPRESENTATION OF THE GENERALIZED BESSEL POTENTIAL BY MEANS OF A
POISSON KERNEL OF THE GENERAL FORM.

Dzhabrailov A. L.

Abstract. The article considers a generalization of the Poisson kernel, which in potential theory is an integral kernel used to simply represent the generalized Bessel potential as a one-dimensional integral and studies its properties. The concept of a common Poisson kernel is introduced. Further, it is shown that the generalized Bessel potential of a function integrable in the p -th degree with a power weight can be represented by an integral of a very simple form, using a Poisson kernel. Also in this paper, Young's inequality for B -convolutional operators in spaces \mathbf{B}_γ^α is proved and some applications using the Laplace-Bessel differential operator are given. Generalized Poisson kernels find application in control theory and electrostatics problems.

Keywords: *generalized Poisson kernel, Hankel transformation, generalized Bessel potential.*

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается многомерный оператор дробного интегрирования, который представляет собой дробную степень оператора $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, где I — единичный оператор и Δ_γ — оператор Лапласа–Бесселя вида

$$\Delta_\gamma = (\Delta_\gamma)_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}, \quad (1)$$

где B_γ — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (см. [1, стр. 5]):

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Дробная степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ при помощи преобразования Ханкеля сводится к умножению на степень $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. А именно, дробная степень $(I - \Delta_\gamma)^{-\alpha/2}$ реализуется как обобщенная свертка преобразованной функции $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$ и

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по гос.заданию FECS-2020-0001.

некоторой функции. Такую свертка мы будем называть обобщенным потенциалом Бесселя.

Классический потенциал Бесселя, реализующий дробные степени оператора $(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$, где Δ — оператор Лапласа широко изучен. Такой потенциал появился в работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [2] и А. П. Кальдерона [3] в 1961 г. В [4] классический потенциал Бесселя использован для того, чтобы охарактеризовать класс Като. Результаты о пространстве бesselевых потенциалов были получены И. Стейном [5] для случая $0 < \alpha < 2$ и И. П. Лизоркиным [6] в общем случае. Обращение потенциалов Бесселя с помощью гиперсингулярных интегралов было дано В. А. Ногиным [7–9] в 1981–85 гг. М. Л. Гольдманом в [10–12] получены оптимальные вложения пространств потенциалов типа Бесселя. Пространство обобщенных потенциалов Бесселя \mathbf{B}_γ^α , построенного с использованием преобразования Ханкеля было впервые введено Л. Н. Ляховым и М. В. Половинкиной в [13] с использованием подхода Стейна–Лизоркина. В [13] введенные ранее Л. Н. Ляховым в [14, 15] В-гиперсингулярные интегралы и В-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в \mathbf{B}_γ^α . В. С. Гулиев, З. В. Сафаров в [16] изучали потенциал Бесселя, порожденный дифференциальными операторами Бесселя. В [16] доказана ограниченность в весовом пространстве Лебега такого потенциала и получены теоремы вложения в пространствах $B_{k,n}$ -Соболева–Лиувилля. В [17] потенциалы Бесселя охарактеризованы в терминах пространств В-Лизоркина–Трибеля. Также в этой статье доказано неравенство Юнга для В-сверточных операторов в пространствах \mathbf{B}_γ^α и даны некоторые приложения, использующие дифференциальный оператор Лапласа–Бесселя.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, составленный из положительных фиксированных вещественных чисел $\gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть Ω — конечное открытое множество в \mathbb{R}^n , симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$, где $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Класс $C_{ev}^0(\Omega_+)$ состоит из непрерывных на Ω_+ функций, продолжаемых непрерывно четным образом на Ω при $x_i < 0, i = 1, \dots, n$.

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n) = L_p^\gamma$, $1 \leq p < \infty$ — пространство всех измеримых на \mathbb{R}_+^n функций, четных по каждой из переменных x_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty,$$

где здесь и далее

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественных чисел $p \geq 1$ норма в L_p^γ функции f определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Известно (см. [1]), что L_p^γ — банахово пространство.

Нормированная функция Бесселя первого рода j_ν определяется формулой (см. [1, стр. 10] и [18])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad (3)$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i), \quad \mathbf{j}_\gamma(0, \xi) = 1. \quad (4)$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ выражается как

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) x^\gamma dx.$$

Пусть $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и представляет собой функцию ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f . Тогда для $\gamma > 0$ формула обращения имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, принадлежащая \mathbb{R}_+^n , обозначается $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ обозначается $S_r^+(n)$ и состоит из части сферы $\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x|=r\}$ и частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1, \dots, n$, таких что $|x_i| \leq r$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$(\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = \gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = (\gamma^1 T_{x_1}^{y_1} \dots \gamma^n T_{x_n}^{y_n} f)(x), \tag{5}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг $\gamma^i T_{x_i}^{y_i}$ для $i=1, \dots, n$ действует по формуле (см. [18])

$$(\gamma^i T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i d\varphi_i, \quad \gamma_i > 0.$$

Для $\gamma_i = 0$ обобщенный сдвиг $\gamma^i T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид

$${}^0 T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}.$$

Справедлива формула (см. [19])

$$\gamma \mathbf{T}_x^y \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \mathbf{j}_\gamma(y, \xi). \tag{6}$$

Обобщенная свертка, порожденная $\gamma \mathbf{T}_x^y$ имеет вид

$$(f * g)_\gamma(x) = (f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) (\gamma \mathbf{T}_x^y g)(x) y^\gamma dy. \tag{7}$$

Преобразование Ханкеля, действующее на обобщенную свертку (7) дает

$$\mathbf{F}_\gamma[(f * g)_\gamma](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) \mathbf{F}_\gamma[g(x)](\xi). \tag{8}$$

2. СВОЙСТВА ОБЩЕГО ЯДРА ПУАССОНА

В этом разделе рассмотрим общее ядро Пуассона. В теории потенциалов, ядро Пуассона — это интегральное ядро, используемое для простого представления обобщенного потенциал Бесселя в виде одномерного интеграла. Обобщенные ядра Пуассона находят применение в теории управления и задачах электростатики.

Определение 1. Функцию

$$P_\gamma(x, \delta) = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \delta (\delta^2 + |x|^2)^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}}, \quad \delta > 0. \tag{9}$$

будем называть **общим ядром Пуассона**.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Лемма 1. Преобразование Ханкеля $e^{-\delta|x|}$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi) = \frac{2^{|\gamma|}\delta \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}. \quad (10)$$

Доказательство.

$$\mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\delta|x|} \mathbf{j}_\gamma(x; \xi) x^\gamma dx = \{x = \rho\sigma\} = \int_0^\infty e^{-\delta\rho} \rho^{n+|\gamma|-1} d\rho \int_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(\rho\sigma; \xi) \sigma^\gamma dS.$$

Применяя формулу вида (см. [23])

$$\int_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta, \xi) \theta^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(r|\xi|), \quad (11)$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi) &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-\delta\rho} j_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|) \rho^{n+|\gamma|-1} d\rho = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}} |\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}} \int_0^\infty e^{-\delta\rho} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|) \rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}} d\rho. \end{aligned}$$

Применяя формулу 2.12.8.4 из [22, стр. 164] вида

$$\int_0^\infty x^{\nu+2} e^{-px} J_\nu(cx) dx = \frac{2p(2c)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2 + c^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

будем иметь

$$\int_0^\infty e^{-\delta\rho} J_{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}(\rho|\xi|) \rho^{\frac{n+|\gamma|}{2}} d\rho = \frac{2\delta(2|\xi|)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}} |\xi|^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}} \frac{2\delta(2|\xi|)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \frac{2^{|\gamma|}\delta \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}}.$$

□

Приведем формулу «интеграла по сфере от весовой плоской волны», из [23]

$$\int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma f(\langle \xi, x \rangle) x^\gamma d\omega_x = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(|\xi|p) (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} dp, \quad (12)$$

где $f(t)(1-t^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} \in L_1(-1, 1)$.

Для $P_\gamma(x, \delta)$ справедливы следующие свойства.

Лемма 2. Функция $P_\gamma(x, \delta)$ обладает свойствами

1. $\mathbf{F}_\gamma[P_\gamma(x, \delta)](\xi) = e^{-\delta|\xi|}$,
2. $\int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, \delta) x^\gamma dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, 1) x^\gamma dx = 1$,
3. $P_\gamma(x, \delta) \in L_p^\gamma, 1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство. 1. Из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\gamma^{-1}[e^{-\delta|x|}](\xi) &= \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \mathbf{F}_\gamma[e^{-\delta|x|}](\xi) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \frac{2^{|\gamma|} \delta \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \\ &= \frac{2^n \delta \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \frac{1}{(\delta^2 + |\xi|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = P_\gamma(x, \delta). \end{aligned}$$

Откуда и следует $\mathbf{F}_\gamma[P_\gamma(x, \delta)](\xi) = e^{-\delta|\xi|}$.

2. Рассмотрим $\int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, \delta) x^\gamma dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, \delta) x^\gamma dx &= \frac{2^n \delta \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^\gamma dx}{(\delta^2 + |x|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \{x = \delta y\} = \\ &= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{y^\gamma dy}{(1 + |y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, 1) x^\gamma dx. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, 1) x^\gamma dx = 1$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{y^\gamma dy}{(1 + |y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \{y = \rho\sigma\} = \int_0^\infty \frac{\rho^{n+|\gamma|-1} d\rho}{(1 + \rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} \int_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS.$$

Интеграл по $S_1^+(n)$ находится по формуле (см. [23])

$$\int_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}, \quad (13)$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{y^\gamma dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} &= \{y = \rho\sigma\} = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\rho^{n+|\gamma|-1} d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \{\rho^2 = r\} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Используя формулу 2.2.5.24 из [21, стр. 239] вида

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+z)^\beta} dx = z^{\alpha-\beta} B(\alpha, \beta-\alpha), \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta,$$

получим

$$2 \int_0^\infty \frac{\rho^{n+|\gamma|-1} d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{r^{\frac{n+|\gamma|}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} dr = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)} \quad (14)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{y^\gamma dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(x, 1) x^\gamma dx &= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{y^\gamma dy}{(1+|y|^2)^{\frac{n+|\gamma|+1}{2}}} = \\ &= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)} = 1. \end{aligned}$$

3. Докажем, наконец, что $P_\gamma(x, \delta) \in L_p^\gamma$, $1 \leq p \leq \infty$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^\gamma dx}{(\delta^2 + |x|^2)^p \frac{n+|\gamma|+1}{2}} = \delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^\gamma dx}{(|x|^2 + 1)^p \frac{n+|\gamma|+1}{2}} =$$

$$= \{x = \rho\sigma, |x| = \rho\} = \delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p} \int_0^\infty \frac{\rho^{n+|\gamma|-1} d\rho}{(\rho^2 + 1)^p \frac{n+|\gamma|+1}{2}} \int_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS.$$

Используя (13) и (14), при $1 \leq p < \infty$, получим

$$\begin{aligned} \|P_\gamma(x, \delta)\|_{p,\gamma} &= \left(\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\delta^{(n+|\gamma|)(1-p)-p} \frac{\sqrt{\pi} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

При $p = \infty$ неравенство $\|P_\gamma(x, \delta)\|_{\infty,\gamma} < \infty$ получаем, используя предельный переход. \square

Сформулируем и докажем лемму о стремлении обобщенной свертки функции с ядром Пуассона к функции в L_p^γ .

Введем обозначение

$$(\mathbf{P}_{\gamma,\delta} f)(x) = (f(x) * P_\gamma(x, \delta))_\gamma. \tag{15}$$

Лемма 3. Если $f \in L_p^\gamma$, $1 \leq p \leq \infty$ или $f \in C_0 \subset L_\infty^\gamma$, то

$$\|(\mathbf{P}_{\gamma,\delta} f)(x) - f(x)\|_{p,\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Учитывая свойство 2 из леммы 2, запишем

$$(f(x) * P_\gamma(x, \delta))_\gamma - f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} [\gamma \mathbf{T}_x^\delta f(x) - f(y)] P_\gamma(y, \delta) y^\gamma dy.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} &\| (f(x) * P_\gamma(x, \delta))_\gamma - f(x) \|_{p,\gamma} \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\gamma \mathbf{T}_x^\delta f(x) - f(x)]^p x^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}} |P_\gamma(y, \delta)| y^\gamma dy = \{y = \delta t\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\gamma \mathbf{T}_x^{\delta t} f(x) - f(x)]^p x^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}} |P_\gamma(t, 1)| t^\gamma dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Из [24] (см. лемму 3.6 на стр. 166) следует, что для $f \in L_p^\gamma$

$$\|\gamma \mathbf{T}_x^{\delta t} f(x) - f(x)\|_{p,\gamma} \leq c \|f(x)\|_{p,\gamma},$$

а из [25] (см. предложение 4.1, стр. 182) и [?, стр. 50] следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\gamma \mathbf{T}_x^{\delta t} f(x) - f(x)]^p x^\gamma dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости интеграл (16) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, так как подынтегральная функция мажорируется интегрируемой функцией $c \|f\|_{p,\gamma} P_\gamma(t, 1) t^\gamma$.

□

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕССЕЛЯ И ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Определим обобщенный потенциал Бесселя соотношением

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} |y|^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|y|) (\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy. \quad (17)$$

Также можем записать

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = (G_\alpha^\gamma(x) * \varphi(x))_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(y) (\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy, \quad (18)$$

где $G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)$ — обобщенное ядро Бесселя. Функция

$K_\alpha(x)$ — это модифицированная функция Бесселя второго рода (см. [? ?]).

Для обобщенного ядра Бесселя справедливы свойства [20]

- (1) преобразование Ханкеля ядра $G_\alpha^\gamma(x)$ имеет вид $\mathbf{F}_\gamma[G_\alpha^\gamma](\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$,
- (2) $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат,
- (3) для $|x| \rightarrow 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha-|\gamma|}} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{if } 0 < \alpha < n + |\gamma|; \\ -2^{1-n} \left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) + \vartheta \right), & \text{if } \alpha = n + |\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, & \text{if } n + |\gamma| < \alpha. \end{cases} \quad (19)$$

(4) для $|x| \rightarrow \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} e^{-|x|},$$

(5) $G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(6) $(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma)_\gamma = G_{\alpha+\beta}^\gamma$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, где $(G_\alpha^\gamma * G_\beta^\gamma)_\gamma$ — обобщенная свертка (7),

(7) $(I - \Delta_\gamma)^k G_{\alpha+2k}^\gamma = G_\alpha^\gamma$, $k \in \mathbb{N}$,

(8) $\int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(x) x^\gamma dx = 1$.

Из этих свойств следует, что для функции $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ оператор \mathbf{G}_γ^α ограничен и

$$\|\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi\|_{p,\gamma} \leq \|\varphi\|_{p,\gamma}, \quad \alpha > 0.$$

Кроме того, справедливы следующие основные свойства обобщенного потенциала Бесселя

(1) полугрупповое свойство $\mathbf{G}_\gamma^\alpha \mathbf{G}_\gamma^\beta \varphi = \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+\beta} \varphi$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(2) $(I - \Delta_\gamma)^k \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+2k} \varphi = \mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$,

(3) $\mathbf{G}_\gamma^0 \varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$.

Следовательно, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ оператор \mathbf{G}_γ^α можно рассматривать как конструктивную реализацию отрицательной степени итерированного оператора $(I - \Delta_\gamma)^k$.

Теперь обратимся к соотношению между обобщенным потенциалом Бесселя и одномерным интегралом с ядром Пуассона. Пусть $t > 0$. Рассмотрим интеграл вида

$$(\mathcal{P}_t^\gamma \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} P_\gamma(y, t) ({}^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy. \tag{20}$$

Здесь $P_\gamma(y, t)$ ядро (9). Интеграл (20) будем называть обобщенный интеграл Пуассона.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha < 2(n + |\gamma| + 1)$. Тогда

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t) (\mathcal{P}_t^\gamma \varphi)(x) dt, \tag{21}$$

где \mathcal{P}_t^γ — обобщенный интеграл Пуассона (20).

Доказательство. Используя формулу 2.12.4.28 из [22] вида

$$\int_0^\infty \rho^{\nu+1} (\rho^2 + 1)^{-\mu} J_\nu(a\rho) d\rho = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu-1} K_{\nu-\mu+1}(a),$$

$$a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 2\operatorname{Re} \mu - \frac{1}{2},$$

мы получаем следующее представление ядра $G_\alpha^\gamma(x)$ для $\nu = \frac{\alpha-1}{2}$, $\mu = \frac{n+|\gamma|+1}{2}$, $0 < \alpha < 2(n + |\gamma| + 1)$

$$G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+1}{2}} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t) P_\gamma(x, t) dt.$$

Следовательно, получим

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} (\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+1}{2}} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t) P_\gamma(y, t) dt.$$

Теперь, меняя порядок интегрирования в правой части последнего равенства и учитывая (20), получаем (21). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. KIPRIYANOV, I. A. (1997) *Singular elliptic boundary value problems*. Moscow: Nauka.
2. ARONSZAJN, N. & SMITH, K. T. (1961) Theory of Bessel potentials. *I. Annales de l'Institut Fourier*. 11. p. 385–475.
3. CALDERÓN, A.-P. (1961) Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. *Proc. Sympos. Pure Math., American Mathematical Society, Providence, R. I.* IV. p. 33–49.
4. GULISASHVILI, A. & KON, M. (1996) Exact smoothing properties of Schrödinger semigroups. *American Journal of Mathematics*. 118. p. 1215–1248.
5. STEIN, E. M. (1961) The characterization of functions arising as potentials. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 67 (1). p. 102–104.
6. LIZORKIN, P. I. (1970) Description of the spaces $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ in terms of singular difference integrals. *Mat. Sb. (N.S.)*. 81 (123). p. 79–91.
7. NOGIN, V. A. (1981) *Inversion and characterization of the parabolic potentials with L_p -densities*. Rostov-on-Don. Dep. in VINITI 30.03.81.1395.
8. NOGIN, V. A. (1982) Inversion of Bessel potentials. *Differential Equations*. 18:8. p. 997–1000.

9. NOGIN, V. A. (1985) Inversion of Bessel potentials by means of hypersingular integrals. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*. 29 (3). p. 73–83.
10. GOL'DMAN, M. L. (2007) Integral properties of generalized Bessel potentials. *DAN*. 414 (2). p. 159–164.
11. GOL'DMAN, M. L. (2008) Rearrangement-invariant spans for generalized Bessel and Riesz Potentials. *DAN*. 423 (1). p. 14–18.
12. GOL'DMAN, M. L. (2008) The cone of rearrangements for generalized Bessel Potentials. *Tr. Mat. Inst. Steklova*. 260. p. 151–163.
13. Ляхов, Л. Н. Пространство весовых потенциалов Бесселя / Л. Н. Ляхов, М. В. Половинкина // Труды МИАН. — М.: Наука, 2005. — Т. 250. — С. 192–197.
LYAKHOV, L. N. & POLOVINKINA, M. V. (2005) Space of weight potentials of Bessel. *Proceedings of MIAN*. 250. p. 192–197.
14. Ляхов, Л. Н. Обращение В-потенциалов Рисса / Л. Н. Ляхов // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 321(3). — С. 466–469.
LYAKHOV, L. N. (1991) Reversal of Riess B-potentials. *Dokl. USSR Academy OF Sciences*. 321 (3). p. 466–469.
15. Ляхов, Л. Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов / Л. Н. Ляхов // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 315(2). — С. 291–296.
LYAKHOV, L. N. (1990) On a class of hypersingular integrals. *Dokl. USSR Academy OF Sciences*. 315 (2). p. 291–296.
16. GULIEV, V. S. & SAFAROV, Z. V. (2001) $B_{k,n}$ -Bessel potentials and certain imbedding theorems in $B_{k,n}$ -Sobolev–Liouville spaces. *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.* 15. p. 68–80.
17. GULIYEV, V. S. & SERBETCI, A. & AKBULUT, A. & MAMMADOV, Y. Y. (2011) Nikol'skii–Besov and Lizorkin–Triebel spaces constructed on the base of the multidimensional Fourier–Bessel transform. *Eurasian Math. J.* 2 (3). p. 42–66.
18. LEVITAN, B. M. (1951) Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk*. 6:2(42). p. 102–143.
19. SITNIK, S. M. & SHISHKINA, E. L. (2019) *Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator*. Moscow: Fizmathlit.

20. EKINCIOGLU, I. & SHISHKINA, E. L. & KESKIN, C. (2021) Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. *Integral Transforms and Special Functions*. 32 (12). p. 932–947.
21. PRUDNIKOV, A. P. & BRYCHKOV, Yu. A. & MARICHEV, O. I. (1992) *Integrals and series*. Vol. 1. Elementary Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ.
22. PRUDNIKOV, A. P. & BRYCHKOV, Yu. A. & MARICHEV, O. I. (1992) *Integrals and Series*. Vol. 2. Special Functions. New York (NY): Gordon & Breach Sci. Publ.
23. SHISHKINA, E. L. & SITNIK, S. M. (2020) *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier, Amsterdam.
24. Платонов, С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой / С. С. Платонов // Сиб. матем. журн. — 2009. — Т. 50(1). — С. 154–174.
PLATONOV, S. S. (2009) Generalized Bessel shifts and some problems of the theory of approximations of semidirect functions. *Sib. matem. journal*. 50 (1). p. 154–174.
25. Платонов, С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой / С. С. Платонов // Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — Т. 71(5). — С. 149–196.
PLATONOV, S. S. (2007) Bessel’s harmonic analysis and approximation of functions on a semidirect. *Izv. RAS. Ser. Mat.* 71 (5). p. 149–196.

УДК: 159.9

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ИССЛЕДОВАНИЯ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
СТУДЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

© Н. Б. Парфенова

ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

E-MAIL: *nadezhdaparfenova@yandex.ru*

AN EMPIRICAL MATHEMATICAL MODEL FOR STUDYING THE PSYCHOLOGICAL STABILITY OF STUDENTS IN THE CONTEXT OF DISTANCE EDUCATION.

Parfenova N. B.

Abstract. The article is devoted to the current problem of the psychology of education, which is due to the contradiction between the inevitable process of the spread of distance technologies in educational practice and the lack of substantiated research. Particular attention is paid to mathematical modeling in the study of multidimensional psychological phenomena. The specifics of the development and application in the organization of research of the psychological stability of students in the changing conditions of education of an empirical mathematical model (EMM), which consists of an a priori (conceptual) model and a posteriori (procedure for applying multidimensional methods). The main stages of the development of the a priori model and the methodological foundations of the phenomenon of "psychological stability" are revealed. This phenomenon is considered through the category of the attitude of young people to life situations (including the changing conditions of education – ILE) from the point of view of cognitive ("Subjective image of a life situation and oneself in it"), emotional-evaluative (assessment of emotional (not) well-being of both individual and personal stability and social stability, value-semantic orientations) and behavioral components (strategies of behavior in ILE, influencing the attitudes of students towards the changing conditions of education, the emerging value orientations of young people and strategies of behavior, a posterior empirical mathematical model. The procedures and results of comparison of three spatio-temporal slices are disclosed: mathematical and statistical verification of the psychometric reliability of the presented scales (internal consistency of indicators for each scale based on the alpha-Cronbach criterion, analysis of the internal structure of the scale and levels of generalization using factor analysis (FA); study of effects influence on generalized factors (ANOVA with repeated measurements); comparative analysis (U-Mann–Whitney test) to identify recurring structural components of psychological stability and its dynamics in new conditions; cluster analysis (CA) to build a typology of students with different levels and characteristics of psychological sustainability model. The role of the empirical mathematical model in confirming the leading components of psychological stability, their influence on value orientations and strategies of behavior in the changing conditions of distance education is revealed.

Keywords: *psychological stability, empirical mathematical model (psychometric reliability, factor analysis, influence effects, cluster analysis, comparative analysis).*

ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложных психологических феноменов, таких как «психологическая устойчивость», «психологическая безопасность» и др. требует представления психологической модели, опирающейся на теоретическое обоснование основных компонентов данного феномена (априорная, концептуальная) и предполагающей применение количественных многомерных методов, как для последующей обработки эмпирических данных, так и для подтверждения структурных компонентов в теоретико — методологическом обосновании психологической модели исследования (апостериорная, процедура применения многомерных методов) и для последующего моделирования явлений и процессов в целях прогнозирования результатов протекания психологических процессов.

За последние десятилетия психологическая наука перешла от периода первичного накопления эмпирического материала к периоду его систематизирования и осознания, преодоления трудностей системной и структурной интерпретации результатов [1].

Понятие «Психологическая устойчивость» является многомерным феноменом, подлежащим изучению с позиции системного описания и выделения структурных компонентов и отношений между ними. Психологическая устойчивость рассматривается как соотношение, взаимодополняющее сочетание отношения субъекта к социальной среде, ближнему окружению, к себе, и личностно-стилевых характеристик, как интегральный личностный показатель, помогающий человеку противостоять интенсивным влияниям внешней среды, постоянно появляющимся трудностям и опасностям в деятельности и в повседневной жизни при несоответствии (рассогласовании) потенций субъекта (возможностей, представлений, отношений и др.) условиям негативного информационно-нормативного влияния окружающей среды [6].

С позиции системно-структурного подхода в исследовании психологических явлений, феноменов необходимо выявление структуры эмпирических данных, определение интегральных обобщенных факторов и типологии испытуемых. «Обычно психические явления на первичном уровне описания характеризуются группой свойств. Каждое из таких свойств — это латентная переменная. Свойства в группе могут быть соподчинены, могут различаться по степени общности. В этой связи и латентные переменные, отображающие группу свойств, образуют латентную структуру, в которой

отдельные переменные могут в определенном отношении рассматриваться как общие, групповые и специфические» [8, с. 374]. Латентную переменную принято называть фактором. Часто в психологических исследованиях необходимо изучить структуру показателей, характеризующих объекты и выявить однородные группы объектов. Исследователь получает множество измеренных эмпирических показателей, которые необходимо сгруппировать по изучаемым свойствам. Для этого применяется факторный анализ. Результатом факторного анализа является переход от множества исходных переменных к существенно меньшему числу новых переменных — факторов. Фактор при этом интерпретируется как причина совместной изменчивости нескольких исходных переменных. В ситуации тестирования, анкетирования респондент решает познавательную задачу, в которой зачастую представлены неполнота знания о реальности и непредсказуемость развития событий, тем более комплексные проблемы, которые являются новыми для решающего и содержат множество нечетко сформулированных условий и целей, содержащие большое число компонентов с неизвестными и неочевидными, «непрозрачными» множественными связями, создающих в своей совокупности большую неопределенность в выборе оптимального действия [5].

Особенное внимание уделяется неопределенности дистанционного обучения, воспринимаемой респондентом, так и выражающейся в его высказываниях. Для оценки уверенности суждений респондентов о характеристиках психологической безопасности в условиях ожидаемых террористических угроз [4], о проблемах глобального потепления в контексте изучения психологии экологической безопасности [9] мы обратились к основным положениям теории общих систем, где при анализе поведения и учения субъекта уверенность — неуверенность включается в понятийный аппарат в связи с процессом принятия решений, информационной корреспондентностью и диссонансом.

Респондент, оценивающий отношение к социальной среде (в частности к экстремизму, терроризму, экологическим проблемам, дистанционному образованию в современных условиях), которое состоит из ряда альтернатив, принимает решение, как правило, в состоянии неполной информации как о характере альтернатив, из которых ему предстоит сделать выбор, так и о характере целей. Состояние субъекта при неполной информации обозначается термином неуверенность. Согласно закону достаточной вероятности, для правильного принятия решения не обязательно наличие полной информации и абсолютной уверенности [4].

Поскольку неопределенность связана с вероятностью рефлексивного прогноза, то при $< 0,6$ увеличивается неопределенность рефлексивных суждений, и соответственно, при $> 0,6$ возрастает определенность принятых суждений.

Изменения или повторяемость структурно-содержательных компонентов анализируются с помощью математического моделирования, применения эмпирических математических моделей (ЭММ), предполагающих многостороннее описание изучаемых явлений и возможный вариант динамики на основе сравнений пространственно-временных срезов [2, 7].

Мы обращаемся к моделированию динамики психологической устойчивости с помощью сравнений пространственно-временных срезов, применения стохастических вероятностных моделей, поскольку все параметры, входящие в модель по своей природе являются случайными величинами, с латентными переменными, предполагающими объяснение глубинных, интегральных характеристик с использованием соответствующих математических моделей. Особенную роль играют многомерные методы для многостороннего описания изучаемых явлений.

1. МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ

Построение ЭММ необходимо начинать с разработки концептуальной модели исследования, так называемой априорной модели. Представляем соответствующие этапы разработки модели исследования психологической устойчивости студенческой молодежи в изменяющихся условиях.

- Обобщение научной и методической информации отечественных и зарубежных авторов по проблемам психологической устойчивости молодежи в изменяющихся условиях (социально-экономических реформ, модернизации образования, дистанционного образования).

- Разработка концептуальной модели и методического оснащения для изучения компонентного состава и структурно-уровневых характеристик психологической устойчивости.

- Выбор показателей на основе теоретических положений для определения силы их влияния на целевую функцию модели.

- Эмпирическое исследование на большой репрезентативной выборке испытуемых в соответствии с теоретической концептуальной моделью. Для целей моделирования необходимо опираться на математико-статистические технологии, или апостериорную модель, которая включает ряд этапов.

- Проверка психометрических показателей: анализ внутренней согласованности показателей разработанных и апробированных шкал на основе критерия альфа-Кронбаха, факторный анализ (ФА) для выявления внутренней структуры обобщенных интегральных показателей разработанных шкал.

- Определение главных компонент (наиболее обобщенных факторов), специфических факторов психологической устойчивости и их составляющих. Факторный анализ (ФА) для выявления внутренней структуры обобщенных и специфических факторов и их составляющих.

- Определение эффектов влияния значимых показателей (предикторов) на исследуемые компоненты и их составляющие. Однофакторный дисперсионный анализ (ANOVA).

Рассмотрим на примере моделирования сложного многомерного феномена «Психологическая устойчивость» программу исследования и методологические основы исследования с позиции системно-структурного подхода.

Проблема обращения к психологическому моделированию заключается в неоднозначности теоретических положений и эмпирических данных исследований в психологии; актуальности исследования устойчивости молодежи к изменяющимся социальным влияниям, в том числе в системе образования.

Цель — разработка и проверка априорной и апостериорной модели исследования психологической устойчивости (ПУ) студентов в изменяющихся условиях. Задачи — в соответствии с этапами (определение структурно-уровневых характеристик феномена, значимых для психологической устойчивости показателей (предикторов) и их влияния, выявления групп испытуемых для психологического сопровождения; возможности переноса данной модели в другие условия).

Структурная модель исследования факторов устойчивости молодежи к изменяющимся условиям социальной реальности включает следующие компоненты, теоретически и методологически подтвержденные.

Мы рассматриваем психологическую устойчивость через категорию отношения учащейся молодежи к жизненным ситуациям (в том числе и к изменяющимся условиям образования — ИУО) с точки зрения когнитивного («Субъективный образ жизненной ситуации и себя в ней»), эмоционально-оценочного (оценка переживания эмоционального (не)благополучия как индивидуально-личностной устойчивости, так и социальной устойчивости, ценностно-смысловых ориентаций) и поведенческого компонентов (стратегии поведения в ИУО, социального влияния), в которых отражаются основные характеристики отношения: широта, модальность, интенсивность. Далее, мы выделяем уровни сформированности когнитивного, эмоционально-оценочного и

поведенческого компонента отношения к ИУО (от представлений о ИУО, оценки их значимости для себя, до включенности в ЖС и стратегий совладания).

Поскольку активность субъекта образовательной среды наиболее проявляется в таких сферах как интеллектуальная, мы предполагаем, что именно интеллектуальная активность выступит системообразующим фактором в структуре психологической устойчивости, будет способствовать преодолению жизненных трудностей в учебной деятельности, выступит важным фактором, влияющим на отношения учащейся молодежи к социальной среде, ближнему окружению и самому себе и отразится в ценностных ориентациях молодежи и стратегиях поведения. Для подтверждения данной гипотезы, структурных компонентов, эффектов влияния и динамики в новых условиях дистанционного образования применяем эмпирическую математическую модель (ЭММ).

ЭММ включает: математико-статистическую проверку психометрической надежности представленных шкал, отражающих основные компоненты психологической устойчивости (внутреннюю согласованность показателей по каждой шкале на основе критерия альфа-Кронбаха (α от 0,74 до 0,81), анализ внутренней структуры шкалы и уровней обобщенности с помощью факторного анализа (ФА); изучение эффектов влияния на обобщенные факторы (ANOVA с повторными измерениями); сравнительный анализ (t -критерий Стьюдента, U -критерий Манна-Уитни) для выявления повторяющихся структурных компонентов психологической устойчивости и ее динамики в новых условиях; кластерный анализ (КА) для построения типологии студентов с различными уровнями и характеристиками психологической устойчивости [3]. Оценка неопределенности субъективных ответов респондентов раскрывается с позиции теории общих систем [4].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для выявления специфики проявлений психологической устойчивости студенческой молодежи в условиях дистанционного образования на выборке студентов ПсковГУ 2020 г. ($n = 171$) — 3 срез, для определения устойчивых структурных компонент, необходимых для представления ЭММ, мы сопоставили современные результаты с пространственно-временными срезами для выявления роли интеллектуальной активности в структуре психологической устойчивости студенческой молодежи: 1 срез — на выборке студентов ПсковГУ 2010 г. ($n = 288$); 2 срез — на выборке студентов ПсковГУ 2014 г. ($n = 124$).

Остановимся на отдельном фрагменте применения многомерных методов в построении эмпирической модели психологической устойчивости студенческой молодежи в изменяющихся условиях, где ведущим компонентом выступает индивидуально-личностная активность студентов в интеллектуальной сфере, основой которой являются формально-динамические свойства (эргичность, скорость, пластичность, эмоциональность), опосредованно влияющая (через ценностные ориентации) на стратегии поведения в трудных жизненных ситуациях.

Формально-динамические характеристики активности определялись по методике ОФДСИ В. М. Русалова; ценностно-смысловые ориентации и стратегии поведения определялись с помощью разработанных и проверенных по критериям психометрической надежности шкал (критерий альфа-Кронбаха выше 0,74; анализа внутренней структуры шкал и уровней обобщенности с помощью факторного анализа по методу главных компонент (метод вращения Varimax), выделялось соответственно такое количество факторов, чьи собственные значения больше единицы, значимость факторных весов переменных, входящих в каждый фактор, больше 0,4, накопленные проценты дисперсии по каждому интегральному индексу составляли выше 50%). В результате факторизации и по первому срезу [6, с. 274], по второму и по третьему выделилась главная компонента индивидуально-личностной активности в интеллектуальной сфере: «Активность интеллектуальная», обобщенный (19,7% дисперсии), включает: скорость интеллектуальная (0,841), эргичность интеллектуальная (0,751), пластичность интеллектуальная (0,699). Повторяемость в выделении главной компоненты по трем пространственно-временным срезам свидетельствует о ведущей роли в структуре психологической устойчивости студенческой молодежи. Значимый фактор «Активность интеллектуальная» представлен по уровням выраженности в трех градациях (на основе стандартизированных Z -оценок): высокая (диапазон значений равен и выше 0,6 — постоянное стремление к деятельности, связанной с умственным напряжением, необходимость высокой гибкости мышления, частого перехода с одних форм мышления на другие, постоянное стремление к разнообразию форм интеллектуальной деятельности, высокая скорость умственных процессов при осуществлении интеллектуальной деятельности); средняя (от $-0,6$ до $0,6$, низкая (ниже $-0,6$). Влияние активности в интеллектуальной сфере на формирующиеся ценностные ориентации рассмотрим по результатам 1 среза на основе применения однофакторного дисперсионного анализа ANOVA (см. табл. 1).

Эффект влияния интеллектуальной активности на ценностные ориентации с направленностью на достижения и карьеру выражен в группе студентов с высокими

Таблица 1. Значимые эффекты факторов «Активность интеллектуальная» на показатели ценностных ориентаций у студентов ($n = 288$, 2010).

Показатели ценностных ориентаций, на которые зафиксирован значимый эффект (влияние)	F	$P <$	Levene's test $P <$
1. ЦО на достижения и карьеру (добиваться успеха, совершенствоваться, сделать хорошую карьеру, осуществить себя, занять достойное положение в обществе)	3,217	0,042	0,287
2. ЦО направленности на других (чувствовать, что кому-то нужен, делать добро, быть с близкими)	2,946	0,052	0,651

показателями интеллектуальной активности; на ЦО направленности на других более представлен в группе студентов со средними значениями интеллектуальной активности. Поскольку активность в интеллектуальной сфере оказывают влияние на предпочитаемые стратегии поведения в ИУО опосредованно через направленность ценностных ориентаций субъекта образовательной деятельности, то в качестве ведущего фактора влияния, наиболее характерного для учащейся молодежи, выступают ЦО, направленные на достижения и будущую карьеру (см. табл. 2).

Направленность ценностных ориентаций в студенческом возрасте на достижения и будущую карьеру начинает оказывать в целом влияние на предпочитаемые стратегии поведения в жизненных ситуациях. Причем, это влияние достаточно избирательно, особенно когда встречаются затруднения на пути реализации своих возможностей в соответствии с прогнозируемой направленностью на значимые достижения в будущем.

Студенты, с достаточно уравновешенной направленностью на достижения, в случае затруднений и даже более выраженных трудностей предпочитают совладающие стратегии поведения с направленностью в учебную деятельность, игнорируя при этом возникающие проблемы, оптимистически смотрят на затруднительную ситуацию, переносят активность на творческую деятельность или в спортивную деятельность, а также обращаются за помощью к компетентным взрослым. Отказываются от действий в затруднительных ситуациях студенты со слабовыраженной направленностью на достижения и карьеру. Особого внимания заслуживают студенты с высоковыраженной направленностью на достижения, поскольку в ситуациях жизненных затруднений у них наиболее представлен эмоциональный уход от решения проблем (крик, плач) и снятие напряжения с помощью алкоголя, что может привести в дальнейшем к соответствующей зависимости. Такие обобщенные стратегии поведения

Таблица 2. Значимые эффекты фактора «ЦО достижения и карьеры» на показатели предпочитаемых стратегий поведения в ТЖС у студентов ($n = 288, 2010$).

Показатели предпочитаемых стратегий поведения в ТЖС, на которые зафиксирован значимый эффект (влияние)	F	$P <$	Levene's test $P <$
1. «Совладание через учебу и помощь компетентных взрослых» (занятия учебой, обращение за помощью к компетентным взрослым, самовыражение в творчестве, оптимистический взгляд на ситуацию)	2,926	0,046	0,363
2. «Совладание с ТЖС через активность в спорте» (занятия спортом, игнорирование проблем)	2,865	0,049	0,720
3. Уход от решения проблем:			
1) Уход в зависимость	4,163	0,017	0,110
2) снятие напряжения с помощью алкоголя	3,317	0,038	0,235
3) «разрядка» (крик, плач) напряжения	2,769	0,058	0,403
4) Отказ от действий	2,709	0,061	0,160

студентов в ИУО как «совладание через учебу и помощь компетентных взрослых» (29,2%) и «совладание с затруднениями через активность в спорте» (27,4%), в которых выражена специфика организации усилий студентами в процессе взаимодействия с жизненными затруднениями, направленная на совладание через активность в деятельности (учеба, спорт) и обращении к помощи значимых других, относятся к конструктивным стратегиям совладания с трудностями в межличностных отношениях, в учебной деятельности, в организации досуга. Около 30% студентов отвергают конструктивные стратегии совладания с жизненными трудностями. «Эмоциональный уход от решения проблем» (27,8%), «уход от решения проблем через игнорирование реальных агентов поддержки» (30,2%) и «уход в зависимость» (24,3%) отражают нецелесообразную направленность на себя (отказ от действий, погружение в свои переживания, эмоциональные реакции — крик, плач, избегание общения) или попытка с помощью сверстников и алкоголя снизить возникшее напряжение в результате затруднительных обстоятельств, а также в некоторых случаях надеяться на чудо, вместо обращения за помощью к значимым другим, — относятся к неконструктивным стратегиям поведения. В результате ДО (весна-лето 2020) по мнению студентов, повысились учебная нагрузка и соответственно требования к активности в интеллектуальной сфере, из-за недостаточной поддержки близких и друзей, преподавателей увеличились трудности в самоорганизации и планировании своей работы, анализа и обобщения самостоятельно изученного учебного материала, что вызвало снижение

мотивация самостоятельной работы и как результат неудовлетворенность успехами, ожидание снижения качества образования и самообвинение. В условиях дистанционного образования имеет место значимое различие по активности студентов в интеллектуальной сфере (U -критерий Манна–Уитни = 250, при $p = 0,003$). Вместе с повышением активности в интеллектуальной сфере у них наблюдается сильное эмоциональное переживание по поводу расхождения между ожидаемым и реальным результатом умственной работы, сильное беспокойство по поводу работы, связанной с умственным напряжением (по шкале «открытость» U -критерий Манна–Уитни = 350,5, при $p = 0,004$); также по шкале «отражённое самоотношение» (U -критерий Манна–Уитни = 351,5, при $p = 0,018$), т.е., студенты обеспокоены тем, что их личность, характер и деятельность способны вызвать в других уважение, симпатию, одобрение и понимание, более выражены ожидания противоположных чувств по отношению к себе от другого. Намечена тенденция к наличию внутренних конфликтов, сомнений, несогласия с собой, тревожно-депрессивных состояний, сопровождаемых переживанием чувства вины. Высокие значения по шкале «самообвинение» говорят о готовности поставить себе в вину свои промахи и неудачи, собственные недостатки, об отсутствии симпатии, что сопровождается негативными эмоциями в свой адрес даже, несмотря на высокую самооценку собственных качеств. Относительно таких критериев психологической устойчивости как ценностные ориентации и стратегии поведения в изменяющихся условиях образования наметилась динамика, при этом осталась основа обобщенного фактора, что также свидетельствует о значимости данных критериев для психологической модели (см. табл. 3).

Если в 2010 г. для студенческой молодежи ведущим фактором выступали «ЦО достижения, карьеры», то в 2020 г. наряду с направленностью на карьеру присоединяется и ценность материального благополучия — «ЦО карьеры и материального благополучия», обобщенный (22,8%), включает: сделать хорошую карьеру (0,760), получать удовольствие от материального благополучия (0,730), иметь много денег (0,708), занимать достойное положение в обществе (0,601).

Конструктивные стратегии поведения в ИУО, жизненных ситуациях в качестве главной компоненты остаются, но также подвержены временным изменениям. В 2010 г. студенческая молодежь больше надеялась на помощь компетентных взрослых, о чем свидетельствует наиболее обобщенный фактор. В 2020 г. неконструктивные стратегии в условиях ДО выступают параллельно с достаточно резким снижением субъективного качества жизни вследствие неуверенности в будущем и эмоционального неблагополучия в настоящем, при недостаточной оценке эффективности

Таблица 3. Значимые эффекты фактора «ЦО карьеры и материального благополучия» на показатели предпочитаемых стратегий поведения в условиях ДО у студентов ($n = 171$, 2020).

Показатели предпочитаемых стратегий поведения в ДО, на которые зафиксирован значимый эффект (влияние)	F	$P <$	Levene's test $P <$
1. «Неконструктивные стратегии (отказ и уход)»	2,926	0,046	0,363
2. «Беззащитность в условиях ДО и неуверенность в будущем из за снижения качества образования или адаптированность к ДО с ЦО карьеры и материального благополучия»	2,865	0,049	0,720

учебной деятельности и повышенного доверия сайтам с готовыми текстами учебных заданий, что вызывает самообвинение и неадекватное отражение отношения других.

Основное внимание привлекают испытуемые с рассогласованием представлений о настоящем (успехи в учебе, удовлетворенность доходами, здоровьем, жизнью в целом) и прогнозом будущего, связанного как с социальными проблемами, так и с возникающими личными проблемами и их переживанием.

При недостаточной поддержке преподавателей в условиях дистанционного обучения большая часть студентов доверяет сайтам с готовыми текстами учебных заданий, форумам и чатам по учебным вопросам; преобладают неконструктивные стратегии поведения: «Обращение за помощью к сверстникам и за информацией в Интернете», обобщенный (28,2%), включает: обращение за помощью к сверстникам (0,824), объединение с другими (0,814), поиск дополнительной информации в Интернете для выхода из ситуации (0,547); «Неконструктивные стратегии (отказ и уход)» (23%), включает: требую изменений ситуации от окружающих (0,758), отказываюсь от каких-либо действий (0,710), беспокоюсь о настоящем и тревожусь о будущем (0,594), избегаю общения и «ухожу в себя» (0,584);

Зф «Беззащитность в условиях ДО и неуверенность в будущем из-за снижения качества образования или адаптированность к ДО с ЦО карьеры и материального благополучия» (13,3%), включает: «Чувство беззащитности из-за ситуаций ДО» (0,687), «Неуверенность в будущем из-за снижения качества образования в условиях ДО» (0,657), «Состояние дискомфорта из-за недостатка обратной связи в условиях ДО» (0,614), «Затруднения в условиях ДО из-за недостаточной самоорганизации и мотивации самостоятельной работы» (0,556), «Снижение практико-ориентированного

обучения» (0,400); «Выбор стиля работы (-0,692), «Умения использовать и настраивать программное обеспечение» (-0,499), «Доверие сайтам электронных библиотечных систем и базам научных статей» (-0,460), «ЦО карьеры и материального благополучия» (-0,410).

Представляет интерес специфический фактор «Неконструктивные стратегии в условиях ДО и неуверенность в будущем из-за негативной информации, трудностей самореализации и финансовых затруднений» (8,2%), включает: «Неконструктивные стратегии (отказ и уход» (0,701), «Неуверенность в будущем из-за негативной информации в СМИ и трудностей самореализации» (0,656), «Одиночество» (0,642), «Формальное выполнение заданий» (0,591), «Неуверенность в будущем из-за финансовых затруднений» (0,442).

На основе обобщенных переменных с помощью кластерного анализа строится типология (или выделяются группы) испытуемых.

Различные уровни интеллектуальной активности как ведущего фактора в структуре психологической устойчивости студента представлены в следующих кластерах: «Психологически-неустойчивые» (26,9%) со слабовыраженной интеллектуальной и коммуникативной активностью, избеганием ответственности, недостаточной эмоционально-личностной устойчивостью к стрессу, неориентированностью на достижения и будущую карьеру); «Психологически - устойчивые» (34,3%) с оптимальным принятием ответственности на себя, выраженной эмоционально-личностной устойчивостью к стрессу, выраженной тенденцией к активности интеллектуальной с ориентацией на достижения и карьеру и материальное благополучие); «Неопределившиеся» (21,3%) с неопределенностью в субъективном образе информационно-нормативного влияния, средневыраженной интеллектуальной и психомоторной активностью, эмоционально-личностной устойчивостью к стрессу при имеющемся опыте психологического давления и зависимости, невыраженной ведущей ориентацией на достижения, карьеру, общение с друзьями, на ценности материального благополучия; выделились также несколько кластеров с небольшой наполняемостью респондентов, чрезмерно выраженными у них показателями (низкая интеллектуальная активность и ответственность, отсутствие стремления к достижениям, самосовершенствованию в учебе, позитивной направленности на других) и выраженным рассогласованием в соотношении структурных компонентов («группа риска»).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработка и внедрение в практику психологического исследования априорной модели, т.е., построение на основе теоретико-методологических положений концептуальной модели исследования, проверка которой осуществляется с помощью апостериорной модели, т.е., применения математико-статистических процедур, особенно многомерных методов, позволяет исследователям моделировать и прогнозировать сложные психологические феномены, их стабильность или динамику под влиянием изменяющихся жизненных условий. Применение ЭММ на соответствующих этапах построения модели психологического исследования констатирует структурно-содержательные и уровневые характеристики изучаемого феномена и позволяет прогнозировать устойчивость и динамику ведущих компонент в изменяющихся условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанщиков, В. А. Принцип системности и современная психология / В. А. Барабанщиков // Теория и методология психологии: Постнеклассическая перспектива. — М.: ИП РАН, 2007. — 528 с.
BARABANSCHIKOV, V. A. (2007) *The principle of consistency and modern psychology*. М.: IP RAS.
2. Журавлев, А. Л. Математическая психология: школа В. Ю. Крылова / А. Л. Журавлев, Т. Н. Савченко. — М.: Институт психологии РАН, 2010. — 512 с.
ZHURAVLEV, A. L. (2010) *Mathematical psychology: V. Yu. Krylov's school* М.: Institute of Psychology RAS.
3. Наследов, А. Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. Учебное пособие / А. Д. Наследов. — СПб.: Речь, 2004. — 392 с.
NASLEDOV, A. D. (2004) *Mathematical methods of psychological research. Analysis and interpretation of data. Tutorial*. SPb.: Rech.
4. Парфенова, Н. Б. Оценка неопределенности субъективных ответов респондентов / Н. Б. Парфенова // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2020. — Т. 27. — № 2. — С. 167–169. — DOI 10.52513/08698325_2020_27_2_167. — EDN MMMDWZ.

- PARFENOVA, N. B. (2020) Assessment of the uncertainty of the respondents' subjective answers. *Review of Applied and Industrial Mathematics*. 2020. Vol.27, Issue 2. p. 167–169.
5. Поддьяков А. Н. Неопределенность в решении комплексных проблем / А. Н. Поддьяков // Человек в ситуации неопределенности / Гл. ред. А. К. Болотова. Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М.: ТЕИС, 2007. — С. 177–193.
PODDYAKOV, A. N. (2007) Uncertainty in solving complex problems. *Man in a situation of uncertainty*. М.: TEIS. p. 177–193.
6. Психологическая устойчивость молодежи к негативным социальным влияниям: монография / [Середа Е. И. и др.]; под ред. Е. И. Середа; М-во образования и науки РФ, Псковский гос. пед. ун-т им. С. М. Кирова. — Псков: ПГПУ им. С. М. Кирова, 2010. — 404 с. — ISBN 978-5-903177-52-3. — EDN QOLXCD.
SEREDA E. I. and all. (2010) *Psychological resistance of young people to negative social influences*. Pskov.: Pskov State Pedagogical University named after S. M. Kirov.
7. Савченко, Т. Н. Роль математической психологии в гуманитарном знании / Т. Н. Савченко, Г. М. Головина // Психология. Журнал Высшей школы экономики. — 2014. — Т. 11. — № 3. — С. 8-22. — EDN RWRNNU.
SAVCHENKO, T. N. & GOLOVINA, G. M. (2014) The role of mathematical psychology in humanitarian knowledge. *Journal of the Higher School of Economics*. Vol. 11. No. 3. p. 8–22.
8. Суходольский, Г. В. Основы математической статистики для психологов / Г. В. Суходольский. — СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. — 1998. — 464 с.
SUKHODOLSKY, G. V. (1998) *Fundamentals of Mathematical Statistics for Psychologists*. SPb.: Publishing house of St. Petersburg University.
9. PARFENOVA, N., MITITSINA, E. and BIZAEVA, A. (2020) Perception of global warming in the context of studying the psychology of environmental safety. *Digital Future Economic Growth, Social Adaptation and Technological Perspectives*. Lecture Notes in Networks and Systems. Eds. T. Kolmykova, E. Kharchenko. Vol. 111. Cham: Springer, p. 865–875.

УДК: 517.955.4, 517.984.4

MSC2010: 35Pxx, 35Q35

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ТЕЛ,
ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ,
ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ**

© К. В. Фордук

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: forduk_kv@mail.ru

**ASYMPTOTIC STABILITY OF A SYSTEM OF BODIES PARTIALLY FILLED WITH IDEAL
FLUIDS UNDER THE ACTION OF ELASTIC AND DAMPING FORCES.**

Forduk K. V.

Abstract. In this paper, the asymptotic stability of a two-dimensional model problem on small motions of a system of open vessels partially filled with ideal homogeneous fluids under the action of elastic and damping forces is investigated. The first and last bodies are attached by springs to two supports with a given law of motion. The trajectory of the system is perpendicular to the direction of gravity, and the damping forces acting on the hydromechanical system are generated by the friction of bodies against a stationary horizontal support. The law of total energy balance is formulated for the described system.

In the author's work [1] the initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problem for a first-order differential equation with operator coefficients in the orthogonal sum of some Hilbert spaces. The theorem on the unique solvability of the obtained Cauchy problem on the positive semiaxis is proved. Sufficient conditions for the existence of a strong solution of the initial boundary value problem describing the evolution of the hydraulic system are found. In the author's work [2] the spectral properties of this problem are investigated. It is proved that the problem has a discrete spectrum localized in a vertical strip. The asymptotic behavior of the spectrum is investigated. The theorem on the Abel-Lidsky basis property of root elements of the problem is proved.

In this paper, relying on the theorem of V. Arendt, C. Batty, Yu. I. Lubich, F. Vu, the strong stability of a system consisting of one or two rectangular bodies partially filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device is investigated. It is established that the question of asymptotic stability of the system is equivalent to the presence of common eigenvalues of a series of Steklov problems with an additional normalization condition. It is proved that in the case of one body, the system is not strongly stable. In the case of two bodies, the system is not strongly stable if and only if the bodies are congruent.

Keywords: *ideal fluid, spectrum, C_0 -semigroup, Steklov eigenvalue problem, asymptotic stability.*

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает исследования автора, посвящённые изучению двумерных линеаризованных задач о малых движениях и нормальных колебаниях системы тел, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил. Ранее в работах автора [1, 2] доказана теорема о разрешимости задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы и изучены спектральные свойства задачи о нормальных колебаниях этой системы.

Цель настоящей работы — исследовать асимптотическую (сильную) устойчивость системы, состоящей из одного или двух твёрдых тел прямоугольной формы, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из n твёрдых тел, которые закреплены между двумя опорами так, что l -ое тело соединено с соседними $(l - 1)$ -м и $(l + 1)$ -м телами пружинами с жёсткостями k_{l-1}^2 , k_l^2 соответственно, а первое и последнее тела прикреплены к пружинам с жёсткостями k_0^2 , k_n^2 , концы которых неподвижно закреплены на опорах.

Каждое l -ое тело представляет собой открытый сосуд, частично заполненный однородной идеальной жидкостью плотности $\rho_l > 0$, которая в состоянии покоя занимает область $\Omega_l \subset \mathbb{R}^2$ со свободной границей Γ_l и твёрдой стенкой S_l , $l = \overline{1, n}$. Пусть $m_l := m_{b,l} + m_{f,l}$, где $m_{b,l}$ — масса тела, $m_{f,l}$ — масса жидкости. В состоянии покоя границы Γ_l считаем горизонтальными прямыми. Под упругодемпфирующим устройством будем понимать наличие пружин, прикрепленных к твёрдым стенкам сосудов, как показано на рис. 1, и трение днищ сосудов о неподвижную горизонтальную опору. Коэффициент трения дна l -го тела об опору обозначим через $\alpha_l > 0$.

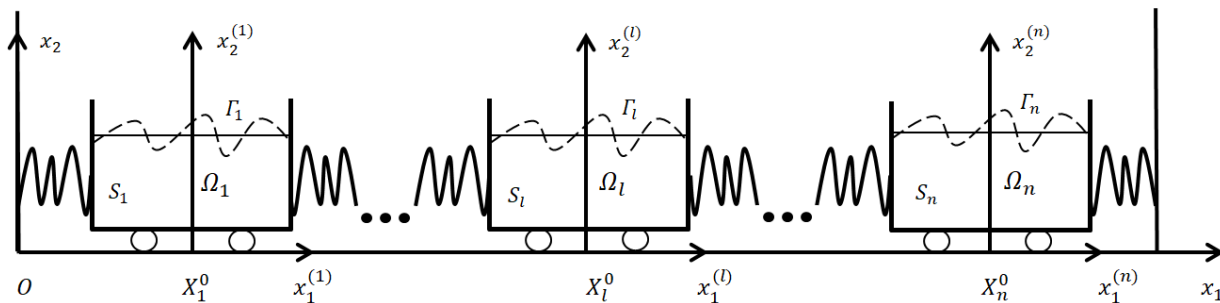


Рис. 1

Введём неподвижную систему координат Ox_1x_2 с ортами \mathbf{e}_j , $j = 1, 2$, так, чтобы тела совершали движения вдоль оси Ox_1 . Кроме того, введём подвижные системы координат $X_l^0x_1^{(l)}x_2^{(l)}$, жёстко связанные с l -ми телами. Орты подвижных систем обозначим через $\mathbf{e}_j^{(l)}$, $j = 1, 2$, $l = \overline{1, n}$. При этом $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^{(l)}$.

В процессе малых движений тела рассмотрим перемещение l -го тела вдоль оси Ox_1 , через $x_l(t)$ обозначим малое смещение этого тела относительно состояния равновесия. Обозначим через $\mathbf{u}_l(t, x^{(l)})$ поле относительных скоростей l -ой жидкости в l -ой подвижной системе координат. Тогда полная скорость l -ой жидкости в неподвижной системе будет выражаться формулой $\dot{x}_l(t)\mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_l(t, x^{(l)})$.

Запишем уравнения движения тел с жидкостями в неподвижной системе координат Ox_1x_2 используя второй закон Ньютона. Более подробно вывод этих уравнение описан в [1], имеем:

$$m_1\ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 = -k_0^2x_1\mathbf{e}_1 + k_1^2(x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 - \alpha_1\dot{x}_1\mathbf{e}_1 + k_0^2x_0\mathbf{e}_1 - gm_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{b,1} + N_1\mathbf{e}_2, \quad (1)$$

$$m_l\ddot{x}_l\mathbf{e}_1 + \rho_l \int_{\Omega_l} \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} d\Omega_l = -k_{l-1}^2(x_l - x_{l-1})\mathbf{e}_1 + k_l^2(x_{l+1} - x_l)\mathbf{e}_1 - \alpha_l\dot{x}_l\mathbf{e}_1 - gm_l\mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{b,l} + N_l\mathbf{e}_2, \quad l = \overline{2, n-1}, \quad (2)$$

$$m_n\ddot{x}_n\mathbf{e}_1 + \rho_n \int_{\Omega_n} \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} d\Omega_n = -k_{n-1}^2(x_n - x_{n-1})\mathbf{e}_1 - k_n^2x_n\mathbf{e}_1 + k_n^2x_{n+1}\mathbf{e}_1 - \alpha_n\dot{x}_n\mathbf{e}_1 - gm_n\mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_{b,n} + N_n\mathbf{e}_2, \quad (3)$$

где $x_0 = x_0(t)$ — заданный закон движения левой стенки, $N_l = N_l(t)$ — реакция опоры, $\mathbf{f}_{b,l} = \mathbf{f}_{b,l}(t)$ — малая внешняя сила, действующая на l -е тело, $x_{n+1} = x_{n+1}(t)$ — заданный закон движения правой стенки, $l = \overline{1, n}$, g — гравитационное ускорение.

Малые движения идеальной однородной жидкости в области Ω_l описываются линеаризованным уравнением Эйлера (см. [3, гл. 3, § 2, п. 1]):

$$\rho_l \left(\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \dot{x}_l \mathbf{e}_1^{(l)} \right) + \nabla p_l = \rho_l \mathbf{f}_{f,l}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad (4)$$

где $p_l = p_l(t, x^{(l)})$ — отклонение давления в жидкости в процессе движения от равновесного давления, а $\mathbf{f}_{f,l} = \mathbf{f}_{f,l}(t, x^{(l)})$ — малая сила, действующая на жидкость в области Ω_l , $l = \overline{1, n}$.

Пусть $\zeta_l(t, x_1^{(l)})$ ($x_1^{(l)} \in \Gamma_l$) — функция, описывающая малые отклонения свободной границы $\Gamma_l(t)$ вдоль $\mathbf{e}_2^{(l)}$ относительно равновесной прямой Γ_l , описываемой уравнением $x_2^{(l)} = b_l$, $l = \overline{1, n}$.

Граничными условиями в рассматриваемой задаче являются условие непротекания идеальной жидкости на твёрдой стенке S_l , динамические и кинематические условия на границе Γ_l , а также условие сохранения объёма жидкости каждого тела соответственно:

$$\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n}_l = 0 \quad (\text{на } S_l), \quad l = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$p_l = \rho_l g \zeta_l \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta_l}{\partial t} = \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{e}_2^{(l)} \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma_l} \zeta_l d\Gamma_l = 0, \quad l = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Здесь через \mathbf{n}_l обозначен единичный вектор, направленный вне области Ω_l и перпендикулярный к границе $\partial\Omega_l = \Gamma_l \cup S_l$. На границе Γ_l , очевидно, будет выполнено соотношение $\mathbf{n}_l = \mathbf{e}_2^{(l)}$.

Начальные условия имеют вид

$$x_l(0) = x_l^0, \quad \dot{x}_l(0) = \dot{x}_l^1, \quad \mathbf{u}_l(0, x^{(l)}) = \mathbf{u}_l^0(x^{(l)}), \quad \zeta_l(0, x_1^{(l)}) = \zeta_l^0(x_1^{(l)}), \quad l = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Полная постановка начально-краевой задачи состоит в решении уравнений (1)-(4) с краевыми и начальными условиями (5)-(9).

Теорема 1 (см. [1]). *Предположим, что поставленная задача (1)-(9) имеет классическое решение, т.е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Тогда тождество*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{l=1}^n \left(m_{b,l} |\dot{x}_l|^2 + \rho_l \int_{\Omega_l} |\mathbf{u}_l + \dot{x}_l \mathbf{e}_1^{(l)}|^2 d\Omega_l + \rho_l g \int_{\Gamma_l} |\zeta_l|^2 d\Gamma_l \right) + \right. \\ & \left. + k_0^2 x_1^2 + k_n^2 x_n^2 + \sum_{l=1}^{n-1} k_l^2 |x_{l+1} - x_l|^2 \right\} = \\ & = \sum_{l=1}^n \left(-\alpha_l |\dot{x}_l|^2 + (\mathbf{f}_{b,l} \cdot \mathbf{e}_1) \dot{x}_l + \rho_l \int_{\Omega_l} \mathbf{f}_{f,l} \cdot \mathbf{u}_l d\Omega_l \right) + k_0^2 x_0 \dot{x}_1 + k_n^2 x_{n+1} \dot{x}_n, \end{aligned}$$

представляет собой закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме.

Исследование задачи о малых движениях системы тел, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругодемпфирующего устройства сводится к исследованию задачи Коши для дифференциального операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} :

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + f, \quad z(0) = z^0, \quad (10)$$

где оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы операторов. Разрешимость задачи (10) доказана в работе [1, теорема 2].

Рассматриваемая система будет сильно устойчива, если каждое решение уравнения (10) стремится к нулю с ростом времени. Этот факт означает, что C_0 -полугруппа, порождаемая оператором $-\mathcal{A}$, сильно устойчива. При исследовании сильной устойчивости изучаемой полугруппы будем опираться на следующую теорему (см. [4, 5]).

Теорема 2 (В. Арендт, Ч. Батти, Ю.И. Любич, Ф. Ву (1988)). Пусть $U(t)$ ограниченная C_0 -полугруппа на гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Если $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ и $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ счётно, то полугруппа $U(t)$ сильно устойчива.

Таким образом, асимптотическая (сильная) устойчивость уравнения (10) связана с наличием у оператора \mathcal{A} собственных значений на мнимой оси.

Приведём общие свойства спектральной задачи

$$\mathcal{A}z = -\lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (11)$$

связанной с задачей о нормальных колебаниях исследуемой гидросистемы.

Теорема 3 (см. [2]). Имеют место следующие утверждения:

1. Спектр задачи (11) расположен в правой комплексной полуплоскости и симметричен относительно вещественной оси.
2. Задача (11) имеет дискретный спектр, лежащий в некоторой вертикальной полосе.
3. Спектральная задача (11) имеет в указанной полосе две ветви собственных значений с асимптотикой

$$\lambda_k^{(\pm i)} = \pm i \left(\sum_{l=1}^n \frac{g_l \pi}{|\Gamma_l|} \right)^{1/2} k^{1/2} (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow \infty).$$

4. Система корневых элементов задачи (11) образует базис Абеля-Лидского со скобками в гильбертовом пространстве \mathcal{H} порядка $\beta > 1$.

Исследование существования на мнимой оси собственных значений оператора \mathcal{A} вида $\lambda = i\omega$ сводится к изучению следующей задачи, которую далее будем решать

для случаев одного и двух тел:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad \int_{\Omega_l} \frac{\partial\Phi_l}{\partial x_1^{(l)}} d\Omega_l = 0, \\ \frac{\partial\Phi_l}{\partial \mathbf{n}_l} = 0 \quad (\text{на } S_l), \quad \frac{\partial\Phi_l}{\partial \mathbf{n}_l} = \frac{\omega^2}{g}\Phi_l \quad (\text{на } \Gamma_l), \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

2. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ТЕЛА

Вопрос устойчивости системы, состоящей из одного тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил равносильна разрешимости спектральной задачи Стеклова (12) с дополнительным нормирующим условием при $l = 1$. Задача (12) рассматривается в прямоугольной области $\Omega_1 := \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq b_1\}$, ограниченной сверху отрезком вещественной оси $\Gamma_1 := \{(x_1; b_1) : 0 < x_1 < a_1\}$, а также твёрдыми стенками S_1 , см. рис. 2.

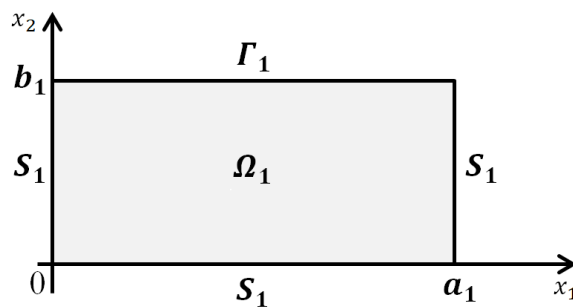


Рис. 2

Найдём решение задачи (12) при $l = 1$ методом Фурье, в результате получим

$$\Phi_{1,m}(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{2\pi m}{a_1}x_1\right) \cdot \text{ch}\left(\frac{2\pi m}{a_1}x_2\right), \quad \omega_{1,m} = \pm \sqrt{\frac{2\pi g m}{a_1} \text{th}\left(\frac{2\pi b_1 m}{a_1}\right)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Опираясь на теорему 2, приходим к выводу, что система не является сильно устойчивой, так как в рассматриваемом случае оператор $-\mathcal{A}$ имеет собственные значения, расположенные на мнимой оси.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ДВУХ ТЕЛ

Рассмотрим теперь систему, содержащую два тела, см. рис. 3.

Перепишем задачу (12) при $l = 2$ в следующем виде:

$$\Delta\Phi_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad \int_{\Omega_l} \frac{\partial\Phi_l}{\partial x_1^{(l)}} d\Omega_l = 0,$$

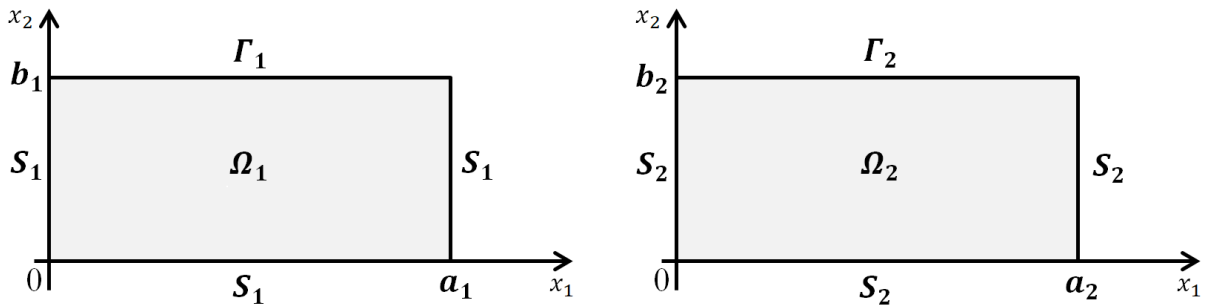


Рис. 3

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial \mathbf{n}_l} = 0 \text{ (на } S_l), \quad \frac{\partial \Phi_l}{\partial \mathbf{n}_l} = \frac{\omega_l^2}{g} \Phi_l \text{ (на } \Gamma_l), \quad l = 1, 2, \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Применяя метод Фурье к сформулированной задаче, найдём (см. (13)), что

$$\omega_{1,m} = \pm \sqrt{\frac{2\pi gm}{a_1} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi b_1 m}{a_1}\right)}, \quad \omega_{2,m} = \pm \sqrt{\frac{2\pi gm}{a_2} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi b_2 m}{a_2}\right)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Условие $\omega_{1,m} = \omega_{2,m}$ влечёт следующее соотношение:

$$a_2 \operatorname{th}\left(\frac{2\pi b_1 m}{a_1}\right) = a_1 \operatorname{th}\left(\frac{2\pi b_2 m}{a_2}\right), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Пусть $a_1 = a_2 = a$, тогда из монотонности функции гиперболического тангенса следует, что равенство в (14) достигается только при $b_1 = b_2$, то есть при условии, что два тела имеют одинаковые параметры.

Пусть $a_1 \neq a_2$ и $b_1 = b_2 = b$. Ввиду того, что функция гиперболического тангенса монотонно возрастает, для $a_1 < a_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{a_1} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi bm}{a_1}\right) > \frac{1}{a_2} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi bm}{a_2}\right),$$

а для случая $a_1 > a_2$ выполняется противоположное неравенство. Таким образом, равенство в (14) в рассматриваемом случае не достигается.

Опираясь на теорему 2, заключаем, что система, состоящая из двух прямоугольных тел, является сильно устойчивой в случае, когда один из параметров тел не совпадает, при равных же параметрах система не является сильно устойчивой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована проблема асимптотической устойчивости системы, состоящей из одного или двух открытых сосудов прямоугольной формы, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил.

В работе были получены следующие результаты: в случае одного тела система не является сильно устойчивой. В случае двух тел система сильно устойчива только тогда, когда у тел совпадает один из параметров — длина или высота, если же тела конгруэнтны, система не является сильно устойчивой.

Таким образом, в задаче установлено, что вопрос сильной устойчивости полугруппы не является однозначным и зависит от геометрии областей.

Автор выражает благодарность научному руководителю доценту Д. А. Закоре за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. FORDUK, K. V., ZAKORA, D. A. Problem on small motions of a system of bodies filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device / K. V. Forduk, D. A. Zakora // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42(5). — С. 889-900.
2. FORDUK, K. V., ZAKORA, D. A. A problem of normal oscillations of a system of bodies partially filled with ideal fluids under the action of an elastic damping device / K. V. Forduk, D. A. Zakora // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2021. — Vol. 18(2). — С. 997-1014.
3. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. & KREIN, S. G. & NGO ZUI KAN. (1989) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*. Moscow: Nauka.
4. ARENDT, W., BATTY, C. J. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups / W. Arendt, C. J. K. Batty // Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 306. — С. 837–852.
5. LUBICH, YU. I., VU, P. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach space / Yu. I. Lubich, P. Vu // Studia Mathematica. — 1988. — Vol. 88. — С. 37–42.

УДК: 517.957

MSC2010: 35K10

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ФОРМЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

© Ю. А. Хазова, А. А. Гребенева

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *khazova.yuliya@hotmail.com, agrebeneva2001@gmail.com*

**STABILITY ANALYSIS OF APPROXIMATE PERIODIC SOLUTIONS OF THE SPIN
COMBUSTION EQUATION.**

Khazova Yu. A., Grebeneva A. A.

Abstract. Most of the processes that take place in the world are non-linear. The dynamics of distributed oscillatory systems is usually modeled by systems of differential equations in partial derivatives with certain boundary conditions. Such a system also contains various parameters that characterize the properties of a real object.

The research subject is a nonlinear parabolic equation and the boundary value problem corresponding to it, which describes the phenomenological equation. That is the spin combustion equation.

The spin combustion equation is solvable by using the Galerkin's and Poincare's methods. The form of the periodic solution is constructed by using a two-mode approximation and center manifold method.

The equation is associated with non-stationary processes of combustion front propagation: thermal conductivity of the connection between adjacent sections of the front and self-oscillatory instability of a flat front, which is stabilized due to nonlinear effects.

Thermal layers adjacent to the reaction zone interact with each other. The areas are characterized not only by the temperature and speed of advance, but also by the temperature distribution along the entire reaction site. The Laplace operator expresses the nonlocality of the connection.

The equation depends not only on the phase variables, but also on the parameters. The behavior of such a dynamic equation and its solution is subject to a qualitative change with an infinitesimal change in its parameters. There is the process of bifurcation.

Passing through the bifurcation parameter leads to a change in the number of solutions, their stability, and the transformation of trajectories. The problem is in studying stable similar equations in such physical processes as optics, radiophysics, and combustion theory.

The relevance of the work depends on the fact that the nonlinear parabolic equation describing the process of spin combustion is underexplored. And also in the construction of periodic forms of the solution, their approximation and the analysis of the stability of branching periodic solutions of the equation, which correspond to solutions of the traveling wave type, with small changes in the parameter.

The method to be used combines Galerkin's and Poincaré's methods, on the basis of which the form of an approximate solution for a system of functions is constructed like $\cos k\theta$. The solution can be represented as the sum of 2π -periodic functions, which allows one to find the values of the coefficients of the initial and two branching periodic solutions of the system.

Keywords: *bifurcation, stability, parabolic equation, Galerkin's and Poincaré's methods, approximation.*

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается краевая задача для нелинейного уравнения параболического типа, описывающая феноменологическое уравнение спинового горения, которое впервые исследуется в работах Я. Б. Зельдовича [1], А. П. Алдушина [2] и Ю. С. Колесова [3].

Это уравнение связано с нестационарными процессами распространения фронта горения: теплопроводностью связей между соседними участками фронта и автоколебательной неустойчивостью плоского фронта, которая стабилизируется за счет нелинейных эффектов.

Тепловые слои, примыкающие к зоне реакции, взаимодействуют между собой. Помимо того, что прилегающие участки характеризуются своей температурой и скоростью продвижения, важную роль играет и распределение температуры вдоль всего места реакции. Оператор Лапласа выражает нелокальность связи. Выделяется бифуркационный параметр.

Прохождение через бифуркационный параметр приводит к изменению количества решений, их устойчивости и трансформации траекторий. Возникает проблема исследования устойчивых подобных уравнений в таких физических процессах, как оптика, радиофизика и теория горения.

Асимптотика бегущих волн для задачи спинового горения была изучена и построена в работах [3, 4]. В них также получены необходимые условия устойчивости форм решения.

Цель работы: анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений феноменологического уравнения спинового горения.

В статье получены новые результаты по численно-аналитическому анализу двухмодовой аппроксимации задачи. Анализ базируется на методах Галеркина ([5–7]) и Пуанкаре. Строятся формы периодических решений, возникающих при прохождении через бифуркационное значение параметра. С помощью метода центральных многообразий проводится анализ устойчивости ответвляющихся периодических решений уравнения спинового горения, которым соответствуют решения типа бегущих волн [4, 8, 9].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнению спинового режима горения тонкостенного кругового цилиндра радиуса r соответствует краевая задача [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \xi &= \varepsilon \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{3}{4}\dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta \dot{\xi}} \right], \\ \frac{\partial \xi}{x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \xi}{x} \Big|_{x=r} = 0, \\ \xi(t, x + 2\pi r) &= \xi(t, x), \quad 0 \leq x \leq r, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой функция $\xi(t, x)$ характеризует точки фронта горения и их координаты, инкрементом неустойчивости малых колебаний является малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$, в качестве корреляционной длины теплопроводностных связей между соседними участками фронта выступает параметр $\lambda > 0$, коэффициентом нелокальной связи участков фронта является параметр $\beta > 0$, Δ — одномерный оператор Лапласа, точка над функцией обозначает производную по времени.

2. ДВУХМОДОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В исследовании уравнения спинового режима горения задачи (1) для построения приближенных решений применим метод Галеркина. Обозначим $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$ и зафиксируем ρ_0 при некотором параметре λ_0 . Тогда согласно методу, при малых колебаниях $\rho - \rho_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ решением уравнения является периодическая функция вида:

$$\xi(t, \theta) = y_0(t) + y_1(t) \cos \theta + v(t, \theta), \quad \theta = \frac{x}{r}, \tag{2}$$

где $y_k(t)$, $k = 0, 1$ — периодические относительно переменной t функции, функция $v(t, \theta)$ так же периодическая, кроме того обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} P_0 v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) dt = 0, \\ P_1 v = \cos \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) \cos t dt = 0, \\ P_2 v = \sin \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t, \theta) \sin t dt = 0. \end{cases}$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 = \varepsilon \left[y_0 - \frac{4}{3} y_0^3 - 2y_0 y_1^2 - 4y_0 P_0(\dot{v}^2) \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 = \varepsilon \left[\alpha_1 y_1 - y_1^3 - 4y_0^2 y_1 - 2y_1^2 P_0(\dot{v} \cos 2\theta) - 4y_1 P_0(\dot{v}^2) \right], \\ \ddot{v} + v = \varepsilon \left[\dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} - \frac{1}{3} y_1^3 \cos 3\theta - \frac{4}{3} \dot{v}^3 - 4y_0^2 \dot{v} - 4y_0 P(\dot{v}^2) \right], \\ \dot{v}_\theta \Big|_{\theta=0} = \dot{v}_\theta \Big|_{\theta=1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $P = E - (P_0 + P_1 + P_2)$, E — единичный оператор. При этом стоит учесть, что $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{\rho^2} + \beta \frac{1}{\rho}$. Так как $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$, то $\alpha_1 = 1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{\beta\lambda}{2\pi r}$. В качестве бифуркационного параметра будем рассматривать α_1 .

Существует периодическое решение $\{y_0 = \cos t + O(\varepsilon), y_1 = 0, v = 0\}$ системы (3), которое при бифуркационном параметре $\alpha_1 = 1$ порождает пару периодических решений.

Линеаризуем полученную систему (3) в окрестности точки $\{y_0 = \cos t + O(\varepsilon), y_1 = 0, v = 0\}$, опуская слагаемые, порядок малости которых больше единицы относительно малых параметров.

Тогда система (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 = \varepsilon [1 - 4 \sin^2 t] y_0, \\ \ddot{y}_1 + y_1 = \varepsilon [\alpha_1 - 4 \sin^2 t] y_1, \\ \ddot{v} + v = \varepsilon \left[(1 - \sin^2 t) \dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} \right], \\ \dot{v}_\theta \Big|_{\theta=0} = \dot{v}_\theta \Big|_{\theta=1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Получим, что один из мультипликаторов первого уравнения системы (4) с точностью до ε^2 равен единице, когда второй равен $1 - 4\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Согласно методу центральных многообразий будем искать y_1 в виде:

$$y_1 = z_1 e^{it} + \bar{z}_1 e^{-it}, \quad \dot{y}_1 = iz_1 e^{it} - i\bar{z}_1 e^{-it}.$$

Предварительно выполнив замену $\tau = t\varepsilon$, получим систему для определения z_1 . Коэффициенты являются быстроосцилирующими при малых $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (\alpha_1 - 2)z_1 - \bar{z}_1 - z_1 e^{\frac{2i\tau}{\varepsilon}}, \\ \dot{\bar{z}}_1 = (\alpha_1 - 2)\bar{z}_1 - z_1 - \bar{z}_1 e^{-\frac{2i\tau}{\varepsilon}}, \end{cases}$$

где $\dot{\bar{z}}_1$ соответствующее комплексно-сопряженное уравнение системы.

Воспользовавшись методом усреднения, получим спектр равный $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Вернемся к системе (4), второе уравнение которой теряет устойчивость при $\alpha_1 = 1$. Мультипликаторы в свою очередь имеют вид:

$$\begin{aligned} &1 + 2\pi\varepsilon(\alpha_1 - 1) + O((\varepsilon^2, \alpha_1 - 1)), \\ &1 + 2\pi\varepsilon(\alpha_1 - 3) + O((\varepsilon^2, \alpha_1 - 1)). \end{aligned}$$

Рассмотрим в (4) уравнение для v , используя замену переменных:

$$v = ue^{it} + \bar{u}e^{-it}, \quad \dot{v} = iue^{it} - i\bar{u}e^{-it}.$$

Учитывая то, что $\tau = t\varepsilon$, исследуем полученную гиперболическую задачу в фазовом пространстве 2π -периодических функций $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1$, коэффициенты которой являются быстроосциллирующими при $\varepsilon > 0$:

$$\dot{u} = -u - \bar{u} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta u + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} u - e^{\frac{2i\tau}{\varepsilon}} u, \tag{5}$$

$$u_\theta \Big|_{\theta=0} = u_\theta \Big|_{\theta=l} = 0,$$

где \bar{u} — соответствующая комплексно-сопряженная функция.

Рассмотрев соответствующую усредненную параболическую задачу, приходим к тому, что ее спектр имеет вид $\{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$. Согласно [10]-[11], нулевое решение задачи (5) является экспоненциально устойчивым при малых $\alpha_1 - 1, \varepsilon > 0$.

Таким образом периодическое решение системы (3) — $\{y_0 = cost + O(\varepsilon), y_1 = 0, v = 0\}$ имеет единичный мультипликатор [1]:

$$\mu(\alpha_1, \varepsilon) = 1 + 2\pi\varepsilon(\alpha_1 - 1) + O(\varepsilon^2, (\alpha_1 - 1)^2).$$

Множество остальных мультипликаторов содержится внутри единичного круга. Итак, периодическое решение $(\cos t + O(\varepsilon), 0, 0)$ системы (3) порождает пару периодических решений. Указанная пара имеет место при $\alpha_1 > 1$. Если взять $v = 0$, система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 = \varepsilon \left[\dot{y}_0 - \frac{4}{3} \dot{y}_0^3 - 2\dot{y}_0 \dot{y}_1^2 \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 = \varepsilon \left[\alpha_1 \dot{y}_1 - \dot{y}_1^3 - 4\dot{y}_0^2 \dot{y}_1 \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим (6) для исследования формы решения задачи (1).

3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

Решение полученной выше системы (6) имеет вид $\{y_0 = \cos t + O(\varepsilon), y_1 = 0\}$. При переходе параметра через $\alpha_1 = 1$ и его дальнейшем увеличении, мультипликатор покидает единичную окружность. Множество остальных мультипликаторов содержится внутри единичного круга. В результате этого периодическое решение $(\cos t + O(\varepsilon), 0)$ теряет устойчивость и от него ответвляется пара других решений. Указанная пара появляется при $\alpha_1 > 1$.

Используя метод малого параметра Пуанкаре, построим эти решения:

$$\begin{cases} y_0 = a_0 \cos \tau + \varepsilon p_1(\tau) + \varepsilon^2 p_2(\tau) + \dots, & y_0'(0) = 0, \\ y_1 = a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau + \varepsilon q_1(\tau) + \varepsilon^2 q_2(\tau) + \dots, \end{cases} \quad (7)$$

где $\tau = \omega(\varepsilon)t$, $\omega(\varepsilon) = 1 + \omega_1 \varepsilon + \omega_2 \varepsilon^2 + \dots$, а функции $p_k(\tau)$, $q_k(\tau)$ — 2π -периодические.

Подставляя (7) в (6), выпишем коэффициенты при одинаковом порядке малости параметра ε . В результате получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее относительно неизвестных p_1 , q_1 .

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + p_1 = 2 \left(-a_0 \sin \tau + a_0 \omega_1 \cos \tau + \frac{4}{3} a_0^3 \sin^3 \tau + 2a_0 \sin \tau (a_1 \sin \tau - b_1 \cos \tau)^2 \right), \\ p_1(0) = 0, \\ \ddot{q}_1 + q_1 = 2 [-\alpha(a_1 \sin \tau - b_1 \cos \tau) + \omega(a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau)] + \\ + 2(a_1 \sin \tau - b_1 \cos \tau)^3 - 2 [4a_0^2(a_1 \sin \tau - b_1 \cos \tau) \sin^2 \tau]. \end{cases} \quad (8)$$

Чтобы каждое из уравнений системы было разрешимым, необходимо выполнение условий ортогональности его неоднородностей функциям $\sin \tau$, $\cos \tau$. После всех преобразований, получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_0 \left(1 - a_0^2 - \frac{3}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}b_1^2 \right) = 0, \\ a_0 (2\omega_1 - a_1 b_1) = 0, \\ a_1 \left(\alpha_1 - 3a_0^2 - \frac{3}{4}a_1^2 + \frac{3}{4}b_1^2 \right) + \omega_1 b_1 = 0, \\ b_1 \left(\alpha_1 - a_0^2 + \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{3}{4}b_1^2 \right) + \omega_1 a_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Легко увидеть, что набор $\{a_0 = 1, a_1 = 0, b_1 = 0, \omega_1 = 0\}$ является подходящим решением. При переходе через значение $\alpha_1 = 1$ из этого решения рождаются еще два решения $(a_0(\alpha_1), 0, \pm b_1(\alpha_1), 0)$, где

$$a_0 = \sqrt{3 - 2\alpha_1}, \quad b_1 = 2\sqrt{\alpha_1 - 1}. \quad (10)$$

Найденные значения (10) подставим в (8). Получим выражения для искомым функций:

$$\begin{cases} p_1 = -\frac{a_0^3}{12} \sin 3\tau + M_1 \cos \tau + \frac{a_0^3}{4} \sin \tau, \\ q_1 = \frac{b_1}{16} (4a_0^2 - b_1^2) \cos 3\tau - E \cos \tau + F_1 \sin \tau, \end{cases} \quad (11)$$

где M_1, E_1, F_1 — некие константы.

Аналогично получим систему для неизвестных функций p_2, q_2 :

$$\begin{cases} \ddot{p}_2 + p_2 = (1 - 4a_0^2 \sin^2 \tau - 2b_1^2 \cos^2 \tau) \dot{p}_1 + 2a_0 b_1 \sin 2\tau \dot{q}_1 + a_0 \omega_2 \cos \tau, \\ \dot{p}_2(0) = 0, \\ \ddot{q}_2 + q_2 = (\alpha_1 - 4a_0^2 \sin^2 \tau - 3b_1^2 \cos^2 \tau) \dot{q}_1 + 4a_0 b_1 \sin 2\tau \dot{p}_1 + b_1 \omega_2 \sin \tau. \end{cases} \quad (12)$$

Откуда:

$$\begin{cases} M_1 = F_1 = 0, \quad E_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{\alpha_1 - 1} + O(\alpha_1 - 1), \\ \omega_2 = \frac{1}{4} (1 - 6(\alpha_1 - 1)) + O((\alpha_1 - 1)^2). \end{cases} \quad (13)$$

У системы уравнений (12) относительно неизвестных функций p_2, q_2 существует семейство решений, которое является периодическим и зависит от трех констант, необходимых для нахождения коэффициентов разложения (7). Стоит отметить, что согласно методу Пуанкаре данный процесс последовательного построения решений неограниченно продолжаем, — к примеру, для более точного нахождения функций можно воспользоваться четырех- и восьмимодовой аппроксимациями.

4. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Подставляя найденные коэффициенты (11), (13) в разложение решения (7), найдем первое решение системы при наборе $\{a_0 = 1, a_1 = 0, b_1 = 0, \omega_1 = 0\}$:

$$y_0(\tau) = \cos \tau + \varepsilon \left(-\frac{1}{12} \sin 3\tau + \frac{1}{4} \sin \tau \right) + \dots, \quad y_1 = 0, \quad (14)$$

где $\tau = \left(1 + \frac{1}{4}(1 - 6(\alpha_1 - 1))\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2, (\alpha_1 - 1)^2)\right)t$.

Тогда периодическое решение уравнения (1):

$$\xi_0(\tau, \theta, \varepsilon) = y_0(\tau) + y_1(\tau) \cos \theta + \dots = \cos \tau + \frac{1}{12}\varepsilon (3 \sin \tau - \sin 3\tau) + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

При прохождении α_1 через единицу при наборе коэффициентов $(\sqrt{3 - 2\alpha_1}, 0, \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1}, 0)$ рождается пара периодических решений:

$$y_0(\tau) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos \tau + \varepsilon \left(-\frac{(3 - 2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{12} \sin 3\tau + \frac{(3 - 2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{4} \sin \tau \right) + \dots,$$

$$y_1^\pm(\tau) = \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin \tau + \varepsilon \frac{\pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1}}{16} (4(3 - 2\alpha_1) - 4(\alpha_1 - 1)) \cos 3\tau \pm \varepsilon \frac{3}{2} \sqrt{\alpha_1 - 1} + O(\alpha_1 - 1) \cos \tau.$$

Тогда соответствующую пару решений уравнения (1) можно представить в виде:

$$\xi_1^\pm(\tau, \theta, \varepsilon) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos \tau \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin \tau \cos \theta + O(\varepsilon). \quad (16)$$

Таким образом, решение уравнения (1), представленное в виде (15) является устойчивым при $\alpha_1 < 1$. После прохождения через критическое значение параметра $\alpha_1 = 1$ решение теряет свою устойчивость.

Изобразим эти решения:

Исследуя динамику периодических структур и проведя бифуркационный анализ, можно сформулировать теорему:

Теорема: Решение уравнения (1), представленное в виде (14), является устойчивым при $\alpha_1 < 1$. После прохождения через критическое значение параметра $\alpha_1 = 1$ решение теряет свою устойчивость, рождается пара других устойчивых периодических решений (16).

1. При $\alpha_1 < 0$ уравнение имеет единственное решение, — оно является периодическим, экспоненциально устойчивым и представимо в виде синфазной волны ¹:

$$\xi_0(\tau, \theta, \varepsilon) = \cos \tau + \frac{1}{12}\varepsilon (3 \sin \tau - \sin 3\tau) + O(\varepsilon^2).$$

¹Синфазность — совпадение по фазе двух или нескольких периодических колебаний.

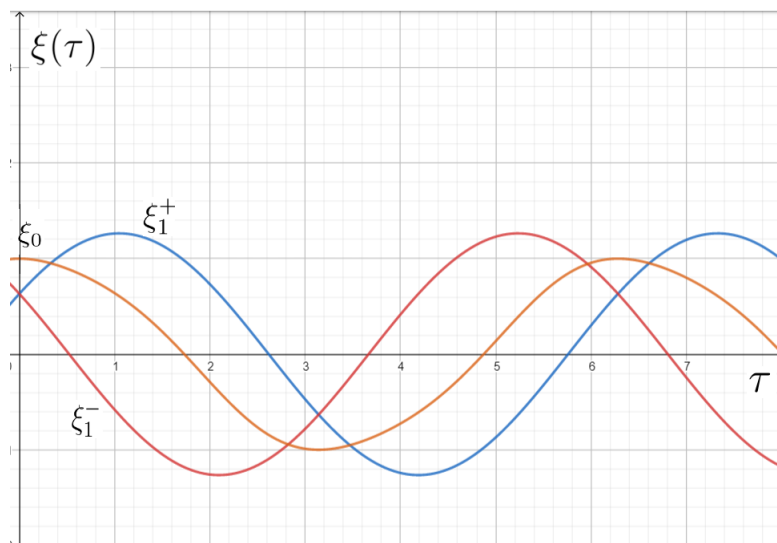


Рис. 1. Решение $\xi_0(\tau)$ и пара рождающихся $\xi^\pm(\tau)$ при срезе $\cos \theta = 1$ и $\alpha_1 > 1$.

2. При прохождении α_1 через единицу, индекс неустойчивости начального решения увеличивается на два порядка. В результате чего происходит бифуркация «вилки» и рождение пары устойчивых периодических решений.

$$\xi_1^\pm(\tau, \theta, \varepsilon) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos \tau \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin \tau \cos \theta + O(\varepsilon).$$

Пара ответвляющихся решений (16) рождается при переходе α_1 через 1 и существует только на интервале $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, учитывая область определения коэффициента $\sqrt{3 - 2\alpha_1}$.

Построим решения для различных значений параметра. Для этого зафиксируем в (16) следующие значения параметров ρ, β , связанных с α_1 .

Если $\rho = 1,4, \beta = 0,8$, тогда $\alpha_1 = 1,06$ и:

$$\begin{aligned} \xi_1^+(t, \theta, 0,8, 1,4) &= 0,48989 \sin(1,0016t) \cos \theta + 0,93808 \cos(1,0016t), \\ \xi_1^-(t, \theta, 0,8, 1,4) &= -0,48989 \sin(1,0016t) \cos \theta + 0,93808 \cos(1,0016t). \end{aligned}$$

Если $\rho = 1,4, \beta = 1,2$, тогда $\alpha_1 = 1,35$ и:

$$\begin{aligned} \xi_1^+(t, \theta, 1,2, 1,4) &= 1,18321 \sin(0,99725t) \cos \theta + 0,54772 \cos(0,99725t), \\ \xi_1^-(t, \theta, 1,2, 1,4) &= -1,18321 \sin(0,99725t) \cos \theta + 0,54772 \cos(0,99725t). \end{aligned}$$

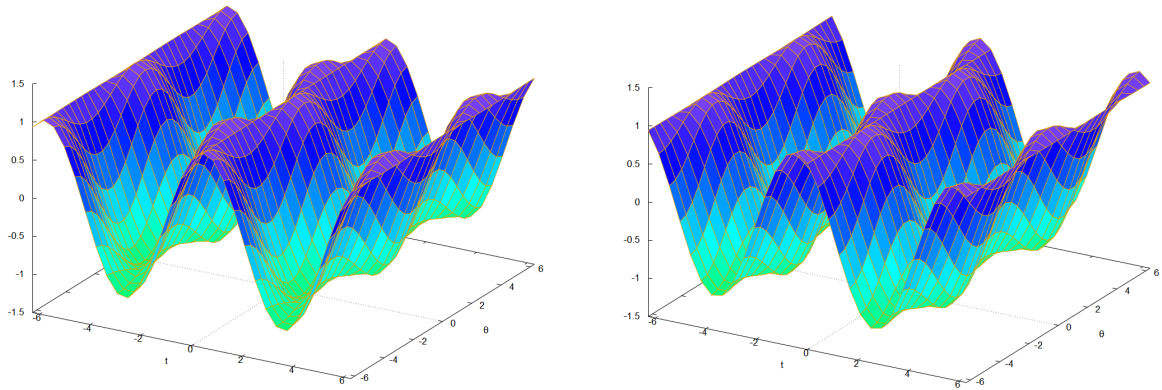


Рис. 2. Решение ξ_1^+ и ξ_1^- при $\alpha_1 = 1,06 > 1$.

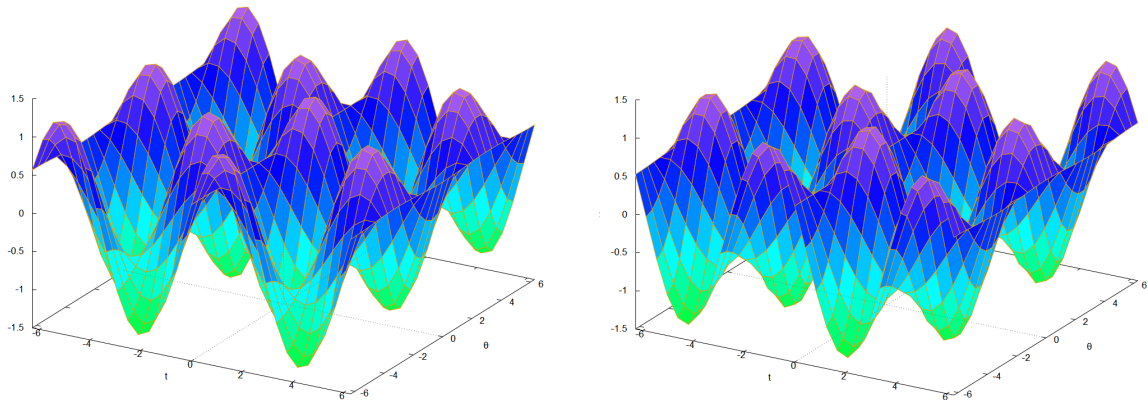


Рис. 3. Решение ξ_1^+ и ξ_1^- при $\alpha_1 = 1,35 > 1$.

Перейдем к анализу спектра устойчивости, полученного в пункте 2, — $\{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$, при $k = 1, 2, \dots$.

Рассматривая $\alpha_1 < 1$, например $\alpha_1 = 0,5$, получим спектр вида $\{-0,5, -2,5, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$. То есть каждый мультипликатор отрицателен, следовательно, начальное решение уравнения (1), представленное в виде $\xi_0(\tau, \varepsilon) = \cos \tau + O(\varepsilon^2)$ является устойчивым при $\alpha_1 < 1$.

При увеличении параметра и прохождении через его критическое значение $\alpha_1 = 1$ начальное решение теряет свою устойчивость. Для наглядности возьмем $\alpha_1 = 1,5 > 1$. Спектр имеет следующий вид: $\{0,5, -1,5, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$. Когда один из мультипликаторов возрастает и проходит через ноль, решение (15) теряет устойчивость.

Происходит процесс бифуркации, в результате которого от исходного решения ответвляется пара периодических устойчивых решений типа бегущая волна — $\xi_1^\pm(\tau, \theta, \varepsilon) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos \tau \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin \tau \cos \theta + O(\varepsilon)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ периодических решений уравнения спинового горения феноменологического уравнения. Построена форма приближенных решений с помощью методов Галеркина и Пуанкаре.

На полученных преобразованиях основан алгоритм вычислений, реализуемый с помощью пакета прикладных программ. Найдены численные выражения для форм периодических решений уравнения. В частности установлено значение бифуркационного параметра, при переходе через который появляется пара устойчивых периодических решений типа бегущей волны. Построены соответствующие решения при малом изменении значения бифуркационного параметра.

Согласно полученному исследованию динамики периодических структур сформулирована теорема об устойчивости решений уравнения спинового горения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Алдушин А. П., Маломед Б. А. К феноменологической теории спинового горения / Я. Б. Зельдович // ДАН СССР. — 1980. — 251, №5. — С. 1102–1106.
ZELDOVICH, Ya. & ALDUSHIN, A. & MALOMED, B. (1980) Phenomenological theory of spin combustion. *Doklady*. 251, no 5. p. 1102–1106.
2. Алдушин, А. П. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения / А. П. Алдушин, Б. А. Маломед // Физика горения и взрыва. — 1981. — Т. 17, №1. — С. 3–12.
ALDUSHIN, A. & MALOMED, B. (1980) Phenomenological description of nonstationary nonuniform combustion waves. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. Vol. 17, no. 1. p. 3–12.
3. Колесов, Ю. С. Устойчивость и бифуркации бегущих волн / Ю. С. Колесов // Нелинейные колебания в задачах экологии. — Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1985. — С. 5–10.
KOLESOV, Yu. (1985) Stability and bifurcation of travelling waves. *Nonlinear Oscillations in Problems of Ecology*. Yaroslav. Gos. Univ. p. 5–10.

4. Белан, Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной / Е. П. Белан // Журнал математической физики, анализа, геометрии. — 2005. — Т. 1, №1. — С. 3–34.
BELAN, E. (2005) On the dynamics of travelling waves in a nonlinear parabolic equation with a shift transformation of the space variable. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* Vol. 1(1). p. 3–34.
5. Хазова, Ю. А. Теорема о существовании и устойчивости решения одного параболического уравнения / Ю. А. Хазова, О. В. Шиян // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36). — С. 275–280.
KHAZOVA, Yu. & SHIYAN, O. (2018) The theorem on the existence and stability of a parabolic equation solutions. *Din. Sist.* Vol. 8(36). p. 275–280.
6. Хазова, Ю. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке / Ю. А. Хазова // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35). — С. 119–129.
KHAZOVA, Yu. (2017) Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment. *Dinamicheskie Sistemy.* Vol. 7(35). p. 119–129.
7. Хазова, Ю. А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Ю. А. Хазова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — №5(28). — С. 82–95.
KHAZOVA, Yu. (2015) Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki.* No 5(28). p. 82–95.
8. Хазова, Ю. А. Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / Ю. А. Хазова // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, №5. — С. 705–716.
KHAZOVA, Yu. (2017) Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle. *Computer research and modeling.* Vol. 9(5). p. 705–716.
9. Белан, Е. П., Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4. — С. 43–57.
BELAN, E. & KHAZOVA, Yu. (2014) Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie sistemy* 4(32). No. 1–2. p. 43–57.

10. Шиян, О. В. Анализ автомодельных режимов горения вдоль полосы / О. В. Шиян // *Динамические системы*. — 2011. — Вып. 29, №1. — С. 131–144.
SHIYAN, O. (2011) The theorem on the existence and stability of a parabolic equation solutions. *Din. Sist.* Vol. 8(36). p. 131–144.
11. Самойленко, А. М. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения / А. М. Самойленко, Е. П. Белан // *ДАН*. — 2006. — Т. 406, №6. — С. 738–741.
SAMOYLENKO, A. & BELAN, E. (2006) Dynamics of traveling waves for the phenomenological equation of spin combustion. *Dokl. Akad. Sci.* Vol. 406, no. 6. p. 738–741.
12. Хазова, Ю. А., Гребенева, А. А. Периодическое решение уравнения спинового горения // *Международная конференция И. Г Петровского: Тезисы докладов* / М.: Изд-во МГУ. — 2022. — С. 193–194.
KHAZOVA, Yu. & GREBENEVA, A. (2022) Periodic solution of the spin combustion equation. *International Conference dedicated to Ivan G. Petrovskii. XXIV Joint Session*. p. 193–194.
13. Хазова, Ю. А., Гребенева, А. А. Применение методов Галеркина и Пуанкаре для решения уравнения спинового горения // *Всероссийская научно-практическая конференция «МИКМО»* / Симферополь. — 2022. — С. в печати.
KHAZOVA, Yu. & GREBENEVA, A. (2022) Application of the Galerkin's and Poincaré's methods for solving the spin combustion equation. *MICME-2022. Simferopol*. p. to appear.

Dorofeeva Yu. A. & Osipova, P. L. Modeling of negotiations for two and three players / Dorofeeva, Yu. A., Osipova, P. L. // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 7–18.

УДК: 519.83

В статье рассматривается проблема моделирования переговоров для двух и трех игроков. Были решены две задачи. Первая задача для двух участников исследуется с использованием арбитражной схемы Нэша. Представлены результаты численного моделирования и показана зависимость периода согласования от параметров моделирования. Вторая задача — моделирование переговоров для трех игроков с участием арбитра. Особенностью этого сценария является ограниченная “деятельность” арбитра. Результаты численного моделирования также представлены в этой статье.

Ключевые слова: теория игр, переговоры, равновесие Нэша, случайная схема, случайный процесс.

Sukhinov, A. I. et al. Modeling regular waves effects on turbulent vertical exchange / Sukhinov, A. I., Protsenko, E. A., Sidoryakina, V. V., & Protsenko, S. V. // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 19–29.

УДК: 519.6

Статья посвящена исследованию влияния регулярных волновых процессов на турбулентный обмен по вертикали с помощью математической модели волновых процессов, базирующейся на системе уравнений Навье-Стокса, включающей три уравнения движения в областях с динамически изменяемой геометрией расчетной области. На основании численных экспериментов, полученных с использованием программного комплекса для численной реализации предложенной трехмерной модели волновой гидродинамики, проведено моделирование влияния регулярных волн на турбулентный обмен по вертикали. Подтверждено расслоение волнового потока на приповерхностный турбулентный слой, индуцированный волновым движением, и нижележащий слой с фоновой гидродинамической турбулентностью. Выявлена характерная особенность влияния регулярных волн на турбулентный обмен по вертикали, а именно увеличение коэффициента турбулентного обмена в приповерхностном

слое и его уменьшение в придонном слое по сравнению с распределением коэффициентов, полученным с помощью параметризации Смагоринского. Выявлено, что толщина приповерхностного турбулентного слоя линейно связана с высотой и длиной волны, толщина турбулизованного приповерхностного слоя имеет порядок высоты волны. Численные эксперименты показали четкое расслоение волнового потока на приповерхностный слой, и нижележащую область с относительно продолжительным временем их существования. Продемонстрирован широкий диапазон изменчивости турбулентных пульсаций скорости.

Ключевые слова: влияние регулярного волнения, турбулентное перемешивание, коэффициент вертикального турбулентного обмена, трехмерная математическая модель гидродинамики.

Аметов Ф. Р., Бекиров Э. А. Разработка математической модели и алгоритма для реализации кибербезопасности систем управления объектов электроэнергетики / Ф. Р. Аметов, Э. А. Бекиров // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 30–39.

УДК: 004.312.466

Современная автоматизированная система управления на предприятиях электроэнергетики представляет собой совокупность множества систем, модулей и интерфейсов. Одним из наиболее важных и, в то же время, уязвимых является коммутирующий модуль, представляющий собой набор устройств и интерфейсов для передачи, обработки и анализа данных. Одним из популярных решений для организации коммуникации между компонентами систем управления является протокол Modbus, основанный на определенных алгоритмах и протоколах передачи данных. Важным показателем любого алгоритма и любой модели передачи данных является их криптографическая стойкость или иными словами уровень защищенности от потенциальных кибератак. На основе анализа собранной информации проведен расчет оптимальной математической модели алгоритма для реализации кибербезопасности на примере коммуникации Modbus.

Ключевые слова: Modbus, кибербезопасность, slave, master, математическая модель.

Джабраилов А. Л. Представление обобщенного потенциала Бесселя посредством ядра Пуассона общего вида / А. Л. Джабраилов // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 40–52.

УДК: 517.3

В статье рассмотрено обобщение ядра Пуассона и изучены его свойства. Показано, что обобщенный потенциал Бесселя функции, интегрируемой в p -й степени со степенным весом, может быть представлен интегралом очень простого вида, при помощи ядра Пуассона.

Ключевые слова: обобщенное ядро Пуассона, преобразование Ханкеля, обобщенный потенциал Бесселя.

Парфенова Н. Б. Эмпирическая математическая модель исследования психологической устойчивости студентов в условиях дистанционного образования / Н. Б. Парфенова // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 53–66.

УДК: 159.9

Раскрыта роль эмпирической математической модели в подтверждении ведущих компонент психологической устойчивости, их влиянии на ценностные ориентации и стратегии поведения в изменяющихся условиях дистанционного образования.

Ключевые слова: психологическая устойчивость, эмпирическая математическая модель (психометрическая надежность, факторный анализ, эффекты влияния, кластерный анализ, сравнительный анализ).

Фордук К. В. Об асимптотической устойчивости системы тел, частично заполненных идеальными жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил / К. В. Фордук // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 67–74.

УДК: 517.955.4, 517.984.4

В данной работе исследуется асимптотическая устойчивость двумерной модельной задачи о малых движениях системы открытых сосудов, частично заполненных идеальными однородными жидкостями, под действием упругих и демпфирующих сил.

Опираясь на теорему В. Арендта, Ч. Батти, Ю.И. Любича, Ф. Ву, исследуется сильная устойчивость системы, состоящей из одного или двух тел прямоугольной формы. Установлено, что вопрос асимптотической устойчивости системы равносильен наличию общих собственных значений серии задач Стеклова с дополнительным условием нормировки. Доказано, что в случае одного тела система не является сильно устойчивой, в случае двух тел система сильно устойчива только тогда, когда у тел совпадает один из параметров — длина или высота, если же тела конгруэнтны — система не является сильно устойчивой.

Ключевые слова: идеальная жидкость, спектр, C_0 -полугруппа, задача Стеклова на собственные значения, асимптотическая устойчивость.

Хазова Ю. А., Гребенева А. А. Анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений уравнения спинового горения / Ю. А. Хазова, А. А. Гребенева // Таврический вестник информатики и математики. — 2022. — № 1 (54). — С. 75–87.

УДК: 517.957

Динамика исследования дифференциальных уравнений в частных производных зачастую связана с процессом бифуркации. В работе рассмотрена краевая задача для нелинейного уравнения параболического типа, описывающая спиновое горение. С помощью последовательного применения методов Галеркина и Пуанкаре, а также двухмодовой аппроксимации построена форма его периодического решения и определена устойчивость. Проведен численно-аналитический анализ устойчивости в зависимости от малых изменений параметра. Сформулирована теорема об устойчивости рождающихся решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, бифуркация, аппроксимация, устойчивость, метод Галеркина, метод Пуанкаре.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

**Аметов Ферат
Рамазанович**

аспирант 4 года обучения, кафедра электроэнергетики и электротехники, Физико-технический институт, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: ametov.ferat@gmail.com

**Бекиров Эскендер
Алимович**

д. т. н., профессор, заведующий кафедрой электроэнергетики и электротехники, Физико-технический институт, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: bekirov.e.a@cfuv.ru

**Гребенева Анастасия
Андреевна**

обучающаяся кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: agrebeneva2001@gmail.com

**Джабраилов Ахмед
Лечаевич**

старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова», г. Грозный, Российская Федерация
e-mail: ahmed_0065@mail.ru

**Дорофеева Юлия
Александровна**

к. ф.-м. н, ординарный доцент научно-образовательного центра математики университета ИТМО, Санкт-Петербург, Российская Федерация
e-mail: julana2008@yandex.ru

**Осипова Полина
Леонидовна**

студент магистратуры 1 курса Петрозаводского государственного университета, институт математики и информационных технологий, Петрозаводск, Российская Федерация
e-mail: polina.polina20@yandex.ru

-
- Парфенова Надежда Борисовна** канд. психол. наук, доцент кафедры психологии Псковского ГУ, Российская Федерация
e-mail: nadezhdaparfenova@yandex.ru
- Проценко Елена Анатольевна** к. ф.-м. н, доцент кафедры математики факультета физики, математики и информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) ФГБОУ ВО РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация
e-mail: eapros@rambler.ru
- Проценко Софья Владимировна** к. ф.-м. н, старший преподаватель кафедры математики факультета физики, математики и информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) ФГБОУ ВО РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация
e-mail: rab55555@rambler.ru
- Сидорякина Валентина Владимировна** к. ф.-м. н, доцент, заведующий кафедрой математики факультета физики, математики и информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиала) ФГБОУ ВО РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация
e-mail: cvv9@mail.ru
- Сухинов Александр Иванович** член корреспондент РАН, д. ф.-м. н, профессор, заведующий кафедрой математики и информатики факультета информатики и вычислительной техники Донского государственного технического университета, г. Ростов-на-дону, Российская Федерация
e-mail: sukhinov@gmail.com
- Фордук Карина Викторовна** ассистент кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: forduk_kv@mail.ru

*Хазова Юлия
Александровна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 31.05.2023.
Издательский дом ФГАОУ ВО «КФУ имени В. И. Вернадского».

Отпечатано с готового оригинал-макета заказчика. Заказ № ВВФР-000506. Тираж 25 экз. Формат 60x90/16.
Усл. печ. ед. 4,50. Гарнитура «Times New Roman». Бумага офсетная.
Типография ИП Павлюков В.В., ИНН 250209756491. 295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, 44,
тел. +7-978-823-31-73, E-mail: zakaz@krimpoligraf.ru