

# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 4 (53) ' 2021

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA  
J OURNAL OF  
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
M ATHEMATICS

2021, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

**ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ**

<b>М. А. МУРАТОВ</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Л. И. РУДЕНКО</b>	заместитель главного редактора, доцент, кандидат физико-математических наук
<b>С. В. АБЛАМЕЙКО</b>	академик НАН Беларуси, профессор, доктор технических наук
<b>К. В. ВОРОНЦОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. Н. КАРАПЕТЯНЦ</b>	доцент, доктор физико-математических наук
<b>В. В. КРАСНОПРОШИН</b>	профессор, доктор технических наук
<b>Л. М. МЕСТЕЦКИЙ</b>	профессор, доктор технических наук
<b>А. Б. МУРАВНИК</b>	доктор физико-математических наук
<b>А. А. САПОЖЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. В. СТАРОСТЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. Н. ЧЕХОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. И. ЧИЛИН</b>	профессор, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:**

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)  
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)  
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала  
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала  
**М. С. GERMANCHUK** — секретарь журнала

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (978) 782-31-99  
Тел. редакции: +7 (978) 837-82-77  
e-mail (гл. редактор): mustafa\_muratov@mail.ru  
e-mail (для переписки): article@tvim.info  
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

**EDITORIAL BOARD**

<b>Mustafa MURATOV</b>	<b>Editor-in-Chief</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Lyudmila RUDENKO</b>	<b>Vice Chief Editor</b> , Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Sergey ABLAMEYKO</b>	Full member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Konstantin VORONTSOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexey KARAPETYANTS</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor KRASNOPROSHIN</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Leonid MESTETSKY</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Andrey MURAVNIK</b>	Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexander SAPOJENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir STAROSTENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Valery CHEKHOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir CHILIN</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

**SECRETARIAT**

<b>Ayder ANAFIYEV</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor VOYTITSKY</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir BLYSCHIK</b>	<b>The Editor of the Cite</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Margarita KOZLOVA</b>	<b>Scientific Secretary of the Journal</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Maria GERMANCHUK</b>	<b>Secretary of the Journal</b>

**OFFICE ADDRESS:**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE:** [www.tvim.info](http://www.tvim.info)

**FOR CORRESPONDENCE:**

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel.** +7 978 782 31 99 — editor-in-chief  
+7 978 837 82 77 — office

**Email:** [mustafa\\_muratov@mail.ru](mailto:mustafa_muratov@mail.ru) — editor-in-chief  
[article@tvim.info](mailto:article@tvim.info) — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

**THEMATIC SECTIONS:**

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Novikov V. V.</b> On a consistency of nonparametric estimator for regression function .....	7
<b>Германчук М. С.</b> Прикладные задачи многоагентной маршрутизации.....	13
<b>Гетманская И. В.</b> Интервальное оценивание нелинейной параметрической регрессии в пассивном эксперименте .....	26
<b>Жужома Е. В., Медведев В. С.</b> Полярные системы Морса–Смейла с двумя седлами на $n$ -мерной сфере .....	40
<b>Кубышкин Е. П., Пахомов А. И.</b> Исследование устойчивости вращения твердого тела на гибком стержне .....	52
<b>Куликов В. А.</b> Анализ устойчивости состояний равновесия параболического уравнения с оператором растяжения и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи .....	69
<b>Обуховский В. В., Кулманакова М. М., Боровикова М. М.</b> Задача разрешимости для управляемой системы с дробной производной и каузальным оператором .....	85
Рефераты .....	106
Список авторов номера .....	110

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Novikov V. V.</b> On a consistency of nonparametric estimator for regression function .....	7
<b>Germanchuk M. S.</b> Applied tasks of multiagent routing problems .....	13
<b>Getmanskaya I. V.</b> Interval estimation of nonlinear parametric regression in a passive experiment .....	26
<b>Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S.</b> Polar Morse–Smale systems with two saddles on $n$ -sphere .....	40
<b>Kubyshkin E. P., Pahomov A. I.</b> Investigation of the stability of rotation of a rigid body on a flexible rod .....	52
<b>Kulikov V. A.</b> Stability analysis of equilibrium states pabolic equation with stretch operator and delay in a nonlinear feedback functional .....	69
<b>Obukhovskii, V. V., Kulmanakova, M. M., Borovikova, M. M.</b> The solvability problem for a controlled system with a fractional derivative and a causal operator .....	85
Abstracts .....	106
Authors .....	110

UDC: 519.23

MSC2010: 62G08

## ON A CONSISTENCY OF NONPARAMETRIC ESTIMATOR FOR REGRESSION FUNCTION

© V. V. Novikov

SARATOV STATE UNIVERSITY  
FACULTY OF MATHEMATICS AND MECHANICS  
83 ASTRAKHANSKAYA STREET, 410012, SARATOV, RUSSIA  
E-MAIL: *vvnovikov@yandex.ru*

ON A CONSISTENCY OF NONPARAMETRIC ESTIMATOR FOR REGRESSION FUNCTION.

Novikov V. V.

**Abstract.** A sufficient condition for the consistency of nonparametric estimator for regression function based on the partial Fourier–Lagrange sums is proved.

**Keywords:** *nonparametric regression, consistency, estimator, orthogonal series.*

Consider a nonparametric regression model

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

where  $m(x)$  is the unknown regression function to be estimated,  $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$  is a dataset and  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$  is observation errors. Suppose that the regression function can be represented as the Fourier series

$$m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varphi_j(x),$$

where the system of functions  $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  constitute an orthonormal basis on interval  $I \subseteq \mathbb{R}$  and  $\{\beta_j\}$  are Fourier coefficients of  $m(x)$ . An estimator of form

$$\hat{m}_{N(n)}(x) = \sum_{j=0}^{N(n)} \hat{\beta}_j \varphi_j(x),$$

where  $\hat{\beta}_j$  are any estimates of unknown coefficients  $\beta_j$  and  $N(n) \leq n$  is an appropriate finite number is called [1], [2] *an orthogonal series estimator* of  $m(x)$ . Statistical properties of this type estimates for several orthogonal systems have been studied by number of authors (e. g., [4]–[6], see also [7] and references therein).

Let  $C_{2\pi}$  be a space of real continuous  $2\pi$ -periodic functions equipped with the uniform norm. Denote by  $S_n(f, x)$  the trigonometric Fourier series partial sum of the function

$f \in C_{2\pi}$  and by  $L_n(f, x)$  the Lagrange trigonometric polynomial coinciding with  $f$  at the nodes of the  $n$ th row of the matrix

$$\{x_{k,n} = 2\pi k / (2n + 1), k = -n, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}. \quad (2)$$

Consider a trigonometric polynomial

$$I_{n,N}(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \quad (3)$$

where  $N \leq n$  and

$$a_k^{(n)} = a_k^{(n)}(f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_{j,n}) \cos kx_{j,n}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$$b_k^{(n)} = b_k^{(n)}(f) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_{j,n}) \sin kx_{j,n}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Note that  $L_n(f, x) = I_{n,n}(f, x)$ . Moreover, if  $N = n$ , then the expression (5) is the Riemann integral sum for  $S_n(f, x)$  related to the partition  $\{x_{k,n}\}$  and the Fourier–Lagrange coefficients (4), (5) are the integral sums for Fourier coefficients. Consider the following estimator of regression function  $m \in C_{2\pi}$

$$\hat{m}_N(x) = I_{n,N}(m + \epsilon, x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{k=0}^{N(n)} \hat{a}_k \cos kx + \hat{b}_k \sin kx, \quad N(n) \leq n, \quad (6)$$

where  $\hat{a}_k = a_k^{(n)}$ ,  $\hat{b}_k = b_k^{(n)}$  are defined by (4), (5) respectively,  $x_{j,n} = X_j$ ,  $f(x_{j,n}) = m(X_j) + \epsilon_j$ ,  $j = -n, \dots, n$ . Our aim is to give a condition for the consistency of estimator  $\hat{m}_N$  in terms of the rate of growth  $\{N(n)\}$  compared to  $n$  as  $n \rightarrow \infty$ .

**Theorem.** *Suppose that the following conditions are satisfied:*

- i)  $\mathbb{E}\epsilon_i = 0$ ,  $\mathbb{E}(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , and  $\mathbb{E}\epsilon_i^2 < C_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- ii)  $m \in C_{2\pi}$  is bounded variation on  $[-\pi, \pi]$ ;
- iii)  $N(n) = o(n)$  as  $n \rightarrow \infty$ .

Then  $\hat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x)$  as  $N(n) \rightarrow \infty$  for every  $x \in [-\pi, \pi]$ .



*Proof.* Since the mean-square convergence implies convergence in probability, it is enough to prove that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} (\hat{m}_N(x) - m(x))^2 = 0.$$

Obviously the operator  $I_{n,N}$  is linear, hence for the estimator of regression function  $m$  from the model (1) we have

$$\hat{m}_N(x) = I_{n,N}(m + \epsilon, x) = I_{n,N}(m, x) + I_{n,N}(\epsilon, x). \quad (7)$$

By the condition  $\mathbf{E}\epsilon_j = 0$  we get

$$\mathbf{E}\hat{m}_N(x) = I_{n,N}(m, x).$$

It is well known (see, e. g. [3]), that under assumptions of the theorem the polynomials  $\{I_{n,N}(m, x)\}$ , converge uniformly on  $[-\pi, \pi]$  to  $m$  as  $N \rightarrow \infty$  ( $N \leq n$ ). Hence

$$r_{n,N}(x) := m(x) - I_{n,N}(m, x) \rightarrow 0 \quad (8)$$

uniformly on  $[-\pi, \pi]$  as  $N \rightarrow \infty$  ( $N \leq n$ ).

From the condition  $\mathbf{E}\epsilon_j = 0$  and (7) it follows that

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\hat{m}_N(x) - m(x))^2 &= \mathbf{E} (\hat{m}_N(x) - I_{n,N}(m, x) - r_N(x))^2 \\ &= \mathbf{E} (\hat{m}_N(x) - I_{n,N}(m, x))^2 + r_{n,N}^2(x) = \mathbf{E} (\hat{m}_N(x) - \mathbf{E}\hat{m}_N(x))^2 + r_{n,N}^2(x) \\ &= \mathbf{D}\hat{m}_N(x) + r_{n,N}^2(x). \end{aligned}$$

On account of (8) we need to prove only the equality

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{D}\hat{m}_N(x) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

To find a variance of the estimator  $\hat{m}_N(x)$  we first rewrite  $I_{n,N}(\epsilon, x)$  in the form

$$\begin{aligned} I_{n,N}(\epsilon, x) &= \frac{a_0^{(n)}(\epsilon)}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^{(n)}(\epsilon) \cos kx + b_k^{(n)}(\epsilon) \sin kx) \\ &= \frac{2}{2n+1} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n \epsilon_j + \sum_{k=1}^N \cos kx \sum_{j=-n}^n \epsilon_j \cos x_{j,n} + \sum_{k=1}^N \sin kx \sum_{j=-n}^n \epsilon_j \sin x_{j,n} \right) \\ &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \epsilon_j \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos kx \cos kx_{j,n} + \sin kx \sin kx_{j,n}) \right) \\ &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \epsilon_j \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x - x_{j,n}) \right) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \epsilon_j \frac{\sin(2N+1) \frac{x - x_{j,n}}{2}}{2 \sin \frac{x - x_{j,n}}{2}}. \end{aligned}$$

Now by condition i) we have

$$\begin{aligned} D\hat{m}_N(x) &= D(I_{n,N}(\epsilon, x)) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{j=-n}^n D(\epsilon_j) \frac{\sin^2(2N+1)\frac{x-x_{j,n}}{2}}{\sin^2\frac{x-x_{j,n}}{2}} \\ &\leq \frac{C_0}{(2n+1)^2} \sum_{j=-n}^n \frac{\sin^2(2N+1)\frac{x-x_{j,n}}{2}}{\sin^2\frac{x-x_{j,n}}{2}} =: C_0 Q_{n,N}(x). \end{aligned}$$

Let us estimate the sum  $Q_{n,N}(x)$ . Put  $\delta_n = (\alpha_n\pi)/N$ , where  $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{N}$  is fixed sequence such that  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ ,  $\alpha_n = o(N)$  and  $\alpha_n = o(n/N)$  as  $n \rightarrow \infty$ .

First suppose that  $x \in [0, \pi)$ . Here and in what follows we assume that  $n$  and  $N$  are sufficiently large. Denote  $A := \{j : |x_{j,n} - x| \leq \delta_n, \text{ or } |x_{j,n} - x + 2\pi| \leq \delta_n, -n \leq j \leq n\}$ ,  $B := \{j : |x_{j,n} - x| > \delta_n, \text{ and } |x_{j,n} - x + 2\pi| > \delta_n, -n \leq j \leq n\}$ . Taking into account that  $\sin^2(2N+1)\frac{x-x_{j,n}}{2} \sin^{-2}\frac{x-x_{j,n}}{2} \leq (2N+1)^2$ , we get

$$\begin{aligned} Q_{n,N}(x) &= \frac{1}{(2n+1)^2} \left( \sum_{j \in A} + \sum_{j \in B} \right) \frac{\sin^2(2N+1)\frac{x-x_{j,n}}{2}}{\sin^2\frac{x-x_{j,n}}{2}} \\ &\leq \left( \frac{2N+1}{2n+1} \right)^2 \sum_{j \in A} 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{j \in B} \frac{1}{\sin^2\frac{x-x_{j,n}}{2}} =: \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Obviously

$$\Sigma_1 \leq C \left( \frac{N}{n} \right)^2 \#(A) \leq C \left( \frac{N}{n} \right)^2 \frac{2\delta_n(2n+1)}{2\pi} \leq \frac{CN\alpha_n}{n}, \quad (10)$$

where  $(N\alpha_n)/n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  since  $\alpha_n = o(n/N)$ .

To deal with  $\Sigma_2$  we split the set  $B$  into disjoint sets  $B = B_1 \cup B_2$ , where  $B_1 = \{j \in B : |x_{j,n} - x| \leq \pi\}$ ,  $B_2 = B \setminus B_1 = \{j \in B : -2\pi + x \leq x_{j,n} < x - \pi\}$  and denote

$$\Sigma_2 = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{j \in B_1} + \sum_{j \in B_2} \right) \frac{1}{\sin^2\frac{x-x_{j,n}}{2}} =: \Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2}.$$

Without loss of generality, we can assume that both  $B_1$  and  $B_2$  are non-empty. Let  $p \in \{-n-1, \dots, n+1\}$  be a number such that  $x_{p,n} \leq x < x_{p+1,n}$ , where  $x_{-n-1,n} := -\pi$ ,  $x_{n+1,n} := \pi$ . From  $x \in [0, \pi)$  it follows that  $-1 \leq p \leq n$ . Further, if  $j \in B_1$ , then

$$\left| \sin \frac{x-x_{j,n}}{2} \right| \geq \frac{|x-x_{j,n}|}{2} \frac{2}{\pi} = \frac{|x-x_{j,n}|}{\pi},$$

and

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,1} &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{j \in B_1} \frac{\pi^2}{(x - x_{j,n})^2} = \frac{\pi^2}{n^2} \left( \sum_{\substack{j \in B_1, \\ x_{j,n} < x}} \frac{1}{(x - x_{j,n})^2} + \sum_{\substack{j \in B_1, \\ x_{j,n} > x}} \frac{1}{(x - x_{j,n})^2} \right) \\ &\leq \frac{\pi^2}{n^2} \left( \sum_{\substack{j \in B_1, \\ x_{j,n} < x_{p,n}}} \frac{1}{(x_{p,n} - x_{j,n})^2} + \sum_{\substack{j \in B_1, \\ x_{j,n} > x_{p+1,n}}} \frac{1}{(x_{p+1,n} - x_{j,n})^2} \right) =: \Omega_1 + \Omega_2. \end{aligned} \quad (11)$$

The last inequality is true, since it follows from definition of the set  $B$  that relations  $j = p$  or  $j = p + 1$  are impossible for  $j \in B$  and sufficiently large  $n$ . We will estimate only the sum  $\Omega_1$  since an estimation for  $\Omega_2$  can be obtained in the same way. By definition of the set  $B_1$  for every index  $j$  of the sum  $\Omega_1$  we have

$$x_{p,n} - x_{j,n} = \frac{2\pi(p - j)}{2n + 1} \geq x - x_{j,n} - \frac{2\pi}{2n + 1} > \delta_n - \frac{2\pi}{2n + 1} = \frac{\pi\alpha_n}{N} - \frac{2\pi}{2n + 1},$$

and

$$k := p - j \geq \beta_n := \left\lceil \frac{\alpha_n(2n + 1) - 2N}{2N} \right\rceil,$$

besides  $\beta_n \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$  since  $N(n) = o(n)$ . Thus we obtain

$$\Omega_1 = \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{\substack{j \in B_1, \\ x_{j,n} < x_{p,n}}} \frac{1}{(x_{p,n} - x_{j,n})^2} \leq \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k \geq \beta_n} \frac{(2n + 1)^2}{4\pi^2 k^2} \leq C \sum_{k \geq \beta_n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{C}{\beta_n}.$$

As we noted above, it can easily be checked that for  $\Omega_2$  the same inequality holds. Thus we have

$$\Sigma_{2,1} \leq \frac{C}{\beta_n}, \quad (12)$$

where  $\beta_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Let us estimate  $\Sigma_{2,2}$ . If  $j \in B_2$ , then

$$\left| \sin \frac{x - x_{j,n}}{2} \right| \geq \frac{x_{j,n} - x + 2\pi}{\pi},$$

and in which case  $x_{j,n} - x + 2\pi > 0$ , so we don't need to split the sum over  $j \in B_2$  like (11). Next for every  $x \in [0, \pi]$ ,  $-1 \leq p \leq n$  and  $j \in B_2$  one has that

$$x_{j,n} - x + 2\pi \geq x_{j,n} - x_{p+1,n} + 2\pi = \frac{2\pi(2n + j - p)}{2n + 1}. \quad (13)$$

If  $p < n$ , then we have in (13) an equal sign; if  $p = n$ , then (13) is a strict inequality. Further

$$\begin{aligned} \Sigma_{2,2} &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{j \in B_2} \frac{\pi^2}{(x_{j,n} - x + 2\pi)^2} \leq \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{j \in B_2} \frac{1}{(x_{j,n} - x_{p+1,n} + 2\pi)^2} \\ &\leq \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{j \in B_2} \frac{(2n+1)^2}{4\pi^2(j-p+2n)^2} \leq C \sum_{j \in B_2} \frac{1}{(j-p+2n)^2} \leq C \sum_{m \geq \beta_n} \frac{1}{m^2} \leq \frac{C}{\beta_n}, \end{aligned} \quad (14)$$

where  $m := j - p + 2n$  and  $\beta_n$  is as above. Combining (9), (10), (12) and (14), we get for  $x \in [0, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D\hat{m}_N(x) = 0. \quad (15)$$

Arguing as above, we see that (15) holds also in the case  $x \in [-\pi, 0)$ . Finally, at  $x = \pi$  the equality (15) follows from  $2\pi$ -periodicity of  $Q_{n,N}(x)$ .  $\square$

**Remark.** Let us note that the condition  $N(n) = o(n)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , for the rate of growth of  $\{N(n)\}$  is unimprovable.

#### REFERENCES

1. HÄRDLE, W. (1989) *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press.
2. LI, Q. & RACINE, J. (2007) *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*. Princeton University Press.
3. ZIGMUND, A. (1959) *Trigonometric Series*. Vol. 2. Cambridge at the University Press.
4. RUTKOWSKI, L. (1982) On System Identification by Nonparametric Function Fitting. *IEEE Transactions of Automatic Control*. Vol. AC-27. p. 225–227.
5. RUTKOWSKI, L. (1982) On-line identification of time varying systems by nonparametric techniques. *IEEE Transactions of Automatic Control*. Vol. AC-27. p. 228–230.
6. GREBLICKI, W., RUTKOWSKA, D. & RUTKOWSKI, L. (1983) An Orthogonal Series Estimate of Time-varying Regression. *Ann. Inst. Statist. Math.*. Vol. 35. p. 215–228.
7. GREBLICKI, W. & PAWLAK, M (2008) *Nonparametric System Identification*. Cambridge University Press.

УДК: 519.16

MSC2010: 90C27

## ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ

© М. С. Германчук

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *m.german4uk@yandex.ru*

### APPLIED TASKS OF MULTIAGENT ROUTING PROBLEMS.

Germanchuk M. S.

**Abstract.** Applied network tasks of multiagent routing or *mTSP* arise in many application areas and lead to various models of pseudo-Boolean optimization. Such problems, as a rule, are *NP*-hard, for them exact algorithms are applicable only in the case of a small dimension of the original network (graph). Multiagency can be contained in the initial formulation or arise as a result of simplifying and reducing the dimension of the problem (decomposition, clustering). Models of such tasks in the author's works arose when planning multi-day tourist routes to attractions; choosing routes by agents in emergency situations (when the infrastructure network may change); when using unmanned aerial vehicles, drones *mTSP* to build routes; in tasks of traversing clusters (bypassing communities social networks).

Depending on the class of applied tasks, the scenarios of their research are specified. The following scenario is typical:

1. Formalization of models of applied multiagent routing problems in the form of single- or multi-criteria pseudo-Boolean optimization problems. Building a hierarchy of simplified models. Accounting for specifics *mTSP*.

2. Analysis of the original complex network taking into account *NP*-complexity *mTSP* on this network. With the help of polynomial algorithms, the network structure is specified: metric and statistical characteristics of the network are found; bridges, points of articulation, bottlenecks (minimal cuts); histograms of the distribution of weight coefficients of arcs of the network graph, etc.

3. A simpler network (projection onto a plane; overflight, monitoring network) is matched to the source network, or the clustering of the network is performed in accordance with *mTSP*.

4. Exact and approximate algorithms on clusters are used; compositions of algorithms (heuristics, metaheuristics, genetic algorithms, etc.).

5. Iterative refinement of the solution *mTSP* is performed based on individual solutions of agents.

The elements of the scenario are given in the work. The results of network clustering consistent with *mTSP*, a comparative analysis of algorithm compositions are shown. It is

important in the research process to take into account all available information, facts, knowledge, and precedents both for building a hierarchy of models and for developing practical algorithms for solving them. In addition to these approaches, it is promising to use a class of polynomial solvable  $mTSP$  in the form of pseudo-Boolean optimization models with separable objective functions and constraints in the form of disjunctive normal form ( $DNF$ ) having a limited constant length. Despite the fact that in the general case the reduction of  $mTSP$  with  $DNF$  constraints is exponential, it is necessary to distinguish a class of problems that are relatively easily reduced to the form with  $DNF$  constraints. Synthesis of a model with  $DNF$  constraints on the initial data can be carried out approximately. In this case, the complexity of such an approximation turns out to be polynomial. The number of conjunctions in the extracted  $DNF$  does not exceed the number of examples in the original case information.

The proposed research scenario  $mTSP$  may be promising for the development of intelligent multiagent systems of applied routing.

**Keywords:** *multiagent traveling salesman problems ( $mTSP$ ), applied routing algorithms,  $TSP$  clustering.*

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к многоагентным задачам маршрутизации на сложных сетях связан с их широким применением. Это прежде всего задачи построения кратчайших маршрутов и задачи типа многих коммивояжеров (multiagent traveling salesman problems,  $mTSP$ ). В отличие от классической задачи коммивояжера в многоагентных задачах сложной может быть структура сети и функциональность агентов [1, 2, 4, 7, 12]. Многоагентные модели, как правило, являются моделями условной псевдодобулевой оптимизации в однокритериальной, многокритериальной или игровой постановках [3, 5, 15]. Матрицы весовых коэффициентов дуг (ребер) сети могут быть общими для всех агентов, меняться в процессе решения или быть разными для каждого агента (в изменяющихся условиях, с разными предписаниями для агентов и др.) Ряд задач инспирировано новыми технологиями, применением БПЛА (дронов) для поиска маршрутов или их мониторинга. Разнообразие задач  $mTSP$  возникает при прокладке маршрутов на поверхности с различными препятствиями [10, 11]. В данной работе ограничиваемся сложными сетями с графовой структурой и гипотезой о возможности снижения сложности решения задач многоагентной маршрутизации за счет построения упрощающих моделей, согласованной с  $mTSP$  кластеризации (декомпозиции), применения композиций точных алгоритмов и метаэвристик [6, 8, 9, 16], а также выделение классов полиномиально разрешимых задач типа  $mTSP$ . Предложенная гипотеза определяет различные сценарии исследования прикладных задач многоагентной маршрутизации.

## 1. МОДЕЛИ И СЦЕНАРИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МНОГОАГЕНТНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ

1.1. В зависимости от обобщений и формализации  $mTSP$  на сложной сети возможны различные сценарии их исследования. Важным является этап анализа и упрощения самой сети, который начинается с изучения метрических характеристик сети (см. рис. 1):

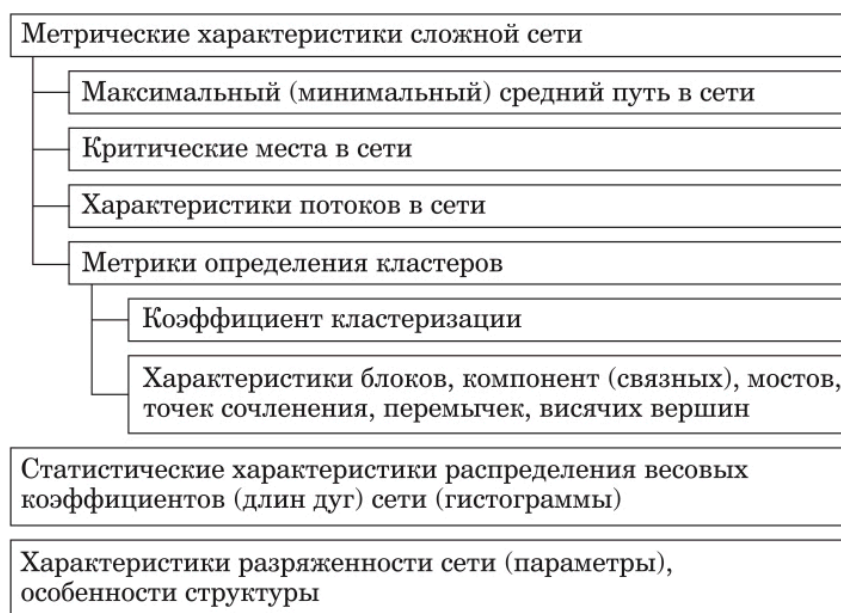


Рис. 1. Характеристики сети  $mTSP$

Алгоритмы, с помощью которых вычисляются параметры (характеристики) сети, связные компоненты, мосты, точки сочленения, висячие мосты и др., являются полиномиальными. С их помощью можно упростить исходную сеть и более точно определить набор алгоритмов решения  $mTSP$ .

1.2. Модели многоагентной маршрутизации типа  $mTSP$  в прикладных задачах на сложных сетях могут учитывать интеллектуальность, независимость, коллективную работу по достижению общей цели, конкурентность, противодействие агентов. Интеллектуальные агенты (ИА) могут развиваться и совершенствоваться, обмениваться информацией и использовать извлекаемые (априорные, дополнительные, прецедентные) знания. При решении задачи в распоряжении ИА могут находиться однотипные агенты нижнего уровня с очерченными правилами поведения, аналоги природных агентов (колония муравьев, рой пчел, косяк рыб, светлячки и др.). Таким

образом, естественно возникает этап моделирования интеллектуального управления как агентами-коммивояжерами, *ИА*, так и однотипными агентами нижнего уровня.

**1.3.** Снижение размерности *mTSP*. Рассмотрим случай разбивки исходной сложной сети на кластеры, согласованные со структурой сети и решением *TSP* индивидуальными агентами. В результате численных экспериментов [6, 8] выявлено, что в зависимости от структуры сети можно выделить:

- 1) декларативную кластеризацию, которая задает список вершин каждому коммивояжеру заранее (учитываются сложившиеся структуры сети и управления ими);
- 2) кластеризацию в результате решения линейной задачи о назначении, которая полиномиально разрешима;
- 3) *K-means* кластеризацию и ей подобные, применяемые для снижения размерности (метод главных компонент), агломеративную иерархическую кластеризацию;
- 4) жадные алгоритмы кластеризации, полиномиальные эвристики;
- 5) кластеризацию с помощью построения минимальных разрезов;
- 6) использование максимальных разрезов (*MAX-CUT*, алгоритмы *MAX-CUT* в общем случае не являются полиномиальными) и др. В приложениях возникает необходимость применения комбинаций алгоритмов и синтеза схем кластеризации на базе всей имеющейся информации.

В наиболее простом случае под синтезом алгоритмов кластеризации и решения *TSP* будем понимать использование любого алгоритма кластеризации для получения начального разбиения исходного графа на подграфы и любого алгоритма решения *TSP*. В общем случае алгоритм выглядит следующим образом.

---

#### Синтез алгоритмов кластеризации и решения *mTSP*

---

1. Для исходного графа ввести нужное количество кластеров  $m$  и их центры.
  2. Найти начальное разбиение графа на  $m$  кластеров с использованием текущих центров.
  3. Если начальное разбиение на текущих центрах оказалось неприемлемым, то подобрать новые центры (например, с помощью *K-means*).
  4. Переопределить кластеры с помощью механизма «перебрасывания» вершин (обмен информацией между агентами).
  5. На каждом кластере найти решение локальной *TSP*.
  6. Найти значение целевой функции для каждого кластера текущего разбиения.
  7. Проверить условие сходимости и, если оно не выполнено, вернуться к пункту 4.
-



В качестве алгоритма для начального разбиения подойдет любой алгоритм кластеризации с четкой принадлежностью вершин. *TSP* также может решаться любым известным подходящим алгоритмом. Данный синтез алгоритмов применим не только для *TSP*, поскольку целевой функцией может быть целевая функция любой задачи дискретной оптимизации (*ДО*) на графах, для которой необходимо применить кластеризацию и для которой можно сформулировать условие сходимости алгоритма синтеза.

В программных реализациях применялся алгоритм баланса нагрузки (*LBA*), назначение вершин агентам с процедурой *AC2OptGA* (см. также работу [9]).

Рассмотрим результаты численной реализации используемых алгоритмов и их модификаций (см. рис. 2, 3). Кроме алгоритмов, непосредственно связанных с численным решением задачи маршрутизации типа *mTSP*, используются алгоритмы кластеризации, построения разрезов, реоптимизации, в которых учитывается информация о задаче *mTSP*, т. е. используется композиция алгоритмов (в зависимости от поступающей информации, в рамках выбранной формализации модели *mTSP*).

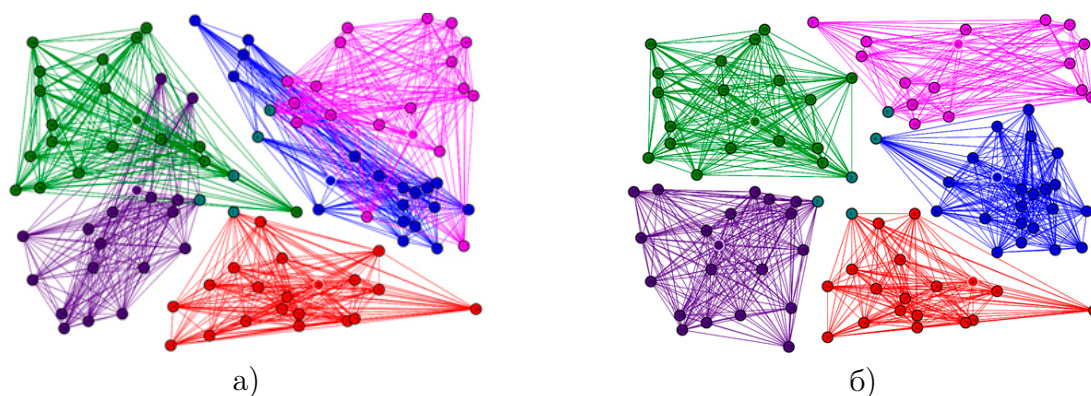


Рис. 2. Результат кластеризации синтезом: а) *K-means* в качестве начального разбиения; б) жадным алгоритмом в качестве начального разбиения

	оптимум	муравьиный	пчелиный	рой частиц	<i>GA</i>	<i>GA</i> мод.
счет:	426	1294.0	1363.7	852.5	968.9	985.9
время:	—	70.152	22.348	15.349	40.766	48.11

Оценим поведение алгоритмов на графе *bier127* [14] с 127 вершинами.

	оптимум	муравьиный	пчелиный	рой частиц	<i>GA</i>	<i>GA</i> мод.
счет:	118282	393942	567855.2	386457	436889	433728
время:	—	417.4	55.1	375.3	170.9	186.4

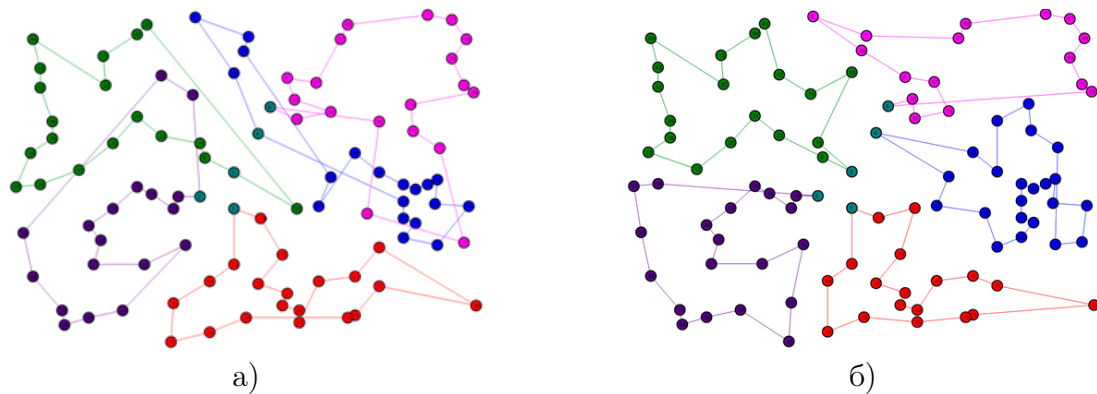


Рис. 3. Результат кластеризации синтезом: а) *K-means* в качестве начального разбиения; б) жадным алгоритмом в качестве начального разбиения

Как видно, стандартные, не оптимизированные под задачу алгоритмы не приближаются к оптимальному результату, к тому же, серьезно теряют в скорости работы при увеличении размера графа.

Пользуясь достаточно большим числом агентов нижнего уровня, муравьиный (150 агентов, 80 итераций) и алгоритм роя частиц (450 агентов, 1200 итераций), хоть и показывают несколько лучший результат в сравнении с пчелиным и *GA*, но работают гораздо медленнее. В тоже время пчелиный и *GA* показывают лучший результат по времени, но худший по длине маршрута при достаточно большом числе агентов (пчелиный — 550 агентов и 820 итераций, *GA* — 150 агентов, 1000 итераций). Случайность начальной выборки в пчелином и *GA* алгоритмах не позволяют сузить область поиска и обнаружить даже локальный минимум в сколь-нибудь короткие сроки, ввиду огромного числа решений.

Выбирается многоагентный (*МА*) жадный алгоритм в качестве начальной выборки для пчелиного и *GA*. Используются именно эти алгоритмы в виду адекватности их скорости работы. Результаты средние за 10 тестов.

	оптимум	пчелиный + <i>МА</i> жадный	<i>GA</i> + <i>МА</i> жадный
счет:	118282	130982.7	134458.9
время:	—	29.156	11.786

Оптимизация начальной выборки позволяет значительно сократить затраты памяти и ресурсов на увеличение размеров популяции пчел/особей и количества итераций. Как следствие, работа алгоритмов ускорилась при значительном улучшении качества результата.

Разделим граф на две части с помощью нахождения максимального разреза. Результаты средние за 10 тестов.

	оптимум	пчелиный + МА жадный	GA + МА жадный
счет1:	118282	103741.4	104098.2
время1:	—	14.969	3.5
счет2:	—	91881.3	92243
время2:	—	14.8	3.528
сумма:	—	195622.7	196341.2

В библиотеке *TSLIB* [13, 14] содержится база тестовых примеров для задачи коммивояжера. Каждый блок тестовых данных содержит в себе список двумерных координат. С помощью этого списка можно построить решение задачи коммивояжера своими методами и сравнить с оптимальным решением, которое также входит в состав тестового примера.

На первом этапе было выбрано несколько тестовых примеров графов небольшой размерности, соответствующих кластеру сложной сети, и проведен численный эксперимент с помощью реализованных алгоритмов. Результаты приведены в табл. 1 [6].

Таблица 1. Результаты работы алгоритмов.

		dj38	eil51	qa194
Муравьиный	Найденное решение	7451	572	11657
	Затраченное время, сек	223	328	23147
Генетический	Найденное решение	7895	559	11367
	Затраченное время, сек	156	117	1164
Гибридный	Найденное решение	7115	498	10938
	Затраченное время, сек	263	448	29234
Имитации отжига	Найденное решение	7158	441	10506
	Затраченное время, сек	15	20	69
Пчелиной колонии	Найденное решение	6656	439	11695
	Затраченное время, сек	21	26	645
Оптимальное решение		6656	430	9352

Программа предусматривает наглядную демонстрацию работы алгоритмов, в которой для сравнения приводится изображение неоптимального произвольного маршрута на графе и отображение маршрута, найденного в процессе работы конкретного алгоритма. Например, на рис. 4–6 показаны результаты применения алгоритма имитации отжига (одного из представленных в табл. 1).

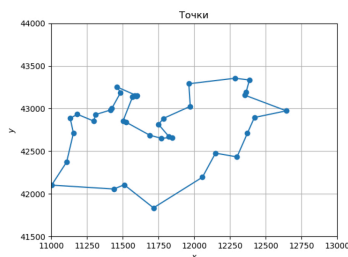


Рис. 4. dj38 после применения алгоритма имитации отжига

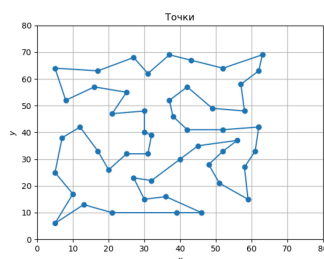


Рис. 5. eil51 после применения алгоритма имитации отжига

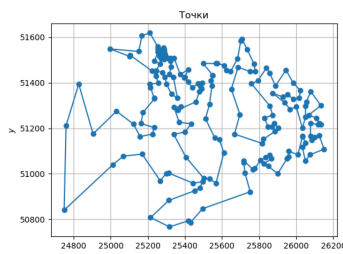


Рис. 6. Решение алгоритмом имитации отжига qa194

## 2. МОДЕЛИ $mTSP$ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

**2.1.** В работах [2–5, 8] рассмотрены модели многоагентной маршрутизации  $mTSP$  в виде моделей псевдодулевой условной оптимизации, в частности, с дизъюнктивными ограничениями. Для модели  $mTSP$  с  $ДНФ$  ограничением существуют полиномиальные алгоритмы решения. Показано, что к такой форме может быть сведена любая  $mTSP$ , записанная в виде линейной задачи псевдодулевой условной оптимизации, но такое сведение может быть экспоненциальным. Естественно, что для конкретной ситуации формулировать условия в виде  $ДНФ$  ограничений предпочтительнее. Такая формализация возможна при наличии прецедентной информации.

Другой способ снижения размерности (сложности) состоит в согласовании с маршрутами декомпозиции исходной задачи  $mTSP$  или кластеризации  $mTSP$  на индивидуальные кластеры для каждого коммивояжера (см. раздел 1). В прикладных задачах  $mTSP$  возможно упрощение задачи. В работе автора [1] описан обобщенный алгоритм, в котором исходной сети ставится в соответствие более простая сеть, на которой исходная задача  $mTSP$  становится полиномиально разрешимой.

---

#### Алгоритм прикладной маршрутизации на приведенных сетях

---

Вход: исходный граф  $G(V, U)$  и весовая матрица  $C$ .

Выход: приближенное решение задачи на графе  $G(V, U)$ .

1. Задать граф  $G(V, U)$  и весовую матрицу  $C$ .
2. Найти преобразование  $\rho : C \rightarrow L$ , т. е. по матрице  $C$  построить матрицу  $L$  с элементами  $l_{ij} \geq 0, (i, j) \in U$ .
3. Учесть априорную информацию, запреты и предписания; преобразовать матрицу  $L$  в матрицу  $\tilde{L}$ , учитывающую данную информацию.
4. Провести анализ и упрощение матрицы  $\tilde{L}$  (метрические характеристики; структурные составляющие: мосты, сочленения, висячие вершины; необходимость кластеризации), сформировать упрощенную матрицу  $\tilde{\tilde{L}}$ .
5. Для упрощенной матрицы  $\tilde{\tilde{L}}$  решить задачу  $mTSP$ .
6. Построить обратное соответствие  $\tilde{\tilde{L}} \rightarrow \tilde{L} \rightarrow C$  и получить вариант решения, проверить на соответствие.
7. Предъявить приближенное решение исходной задачи  $mTSP$ .

---

Например, когда заданы координаты вершин и вместо исходного расстояния между вершинами  $l_{ij}$  ставится в соответствие расстояние по прямой  $\tilde{l}_{ij}$  между вершинами  $i$  и  $j$  (задача облета, проекция исходной сети на плоскость). Подобная задача  $mTSPD$  возникает самостоятельно в случае использования агентом-коммивояжером передвигающихся по сети БПЛА (беспилотный летающий аппарат, дрон). В отличие от агентов БПЛА могут не привязываться к депо, а находить замкнутые маршруты, начиная с любой удобной вершины (как депо). Сформулируем  $mTSPD$  в форме псевдодобулевого программирования.

**2.2.** Пусть задано  $n$  вершин и  $m$  агентов (дронов). Будем использовать трехиндексную запись

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если агент } k \text{ посещает вершину } j \text{ после } i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\min_{x_k} z, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij0} x_{ij0} \leq z, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij1} x_{ij1} \leq z, \quad (4)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ijm} x_{ijm} \leq z, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ijk} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{isk} - \sum_{j=1}^n x_{sjk} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (8)$$

$$u_i - u_j + n \sum_{k=1}^m x_{ijk} \leq n - 1, \quad \forall i \neq j \neq 1, \quad (9)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall i, j, k. \quad (10)$$

Обычно в  $mTSP$  минимизируется общий путь (вес) или общее время в пути. В (2) минимизируется виртуальная переменная  $z$ , (3)–(5) максимальный (минимальный) путь каждого агента не превосходят  $z$ . Условие (6) означает прохождение вершин только один раз; (8) — только один выход из вершины любым агентом в любую другую вершину; (9) — условие ликвидации субтуров (eliminating sub-tours).

В случае, когда каждый агент минимизирует свой путь, приходим к многокритериальной задаче  $mTSP$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min \quad (11)$$

с условиями (5)–(10). В случае общего минимального веса получаем однокритериальную модель  $mTSP$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min \quad (12)$$

с условиями (5)–(10). Матрицы весов  $C_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  в общем случае разные. В частности они выделяют множества вершин  $V_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  для каждого агента. Множества  $V_k$  могут быть предписаны или находиться в результате кластеризации. В разделе 1.3 кластеризация проведена для всех агентов, т. е. для общей матрицы  $C = \{c_{ij}, i, j = \overline{1, n}\}$ . В зависимости от согласования с решением агентной  $TSP$  на каждом кластере, множество вершин  $V_k$  меняется (перебрасывание вершин, обмен информацией между коммивояжерами). Ограничениям (5)–(10) можно поставить в соответствие логическую систему Productions, т. е. заменить условие одним ограничением в виде ДНФ представления. Такое сведение приводит к полиномиально разрешимой  $mTSP$  с ДНФ условием [5].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные сценарии решения многоагентных задач маршрутизации базируются на выборе подходящих моделей исходных прикладных задач, их упрощении и компромиссных постановках. Упрощение исходной задачи предполагает анализ исходной сложной сети с выявлением структуры (мосты, точки сочленения, висячие вершины и т. п.) для чего используются полиномиальные алгоритмы. А также использование полиномиальных и эвристических алгоритмов решения  $TSP$  каждым агентом в рамках упрощенных моделей, кластеризации и согласования кластеризации с  $TSP$  на каждом кластере. Подход применим для инфраструктурной многоагентной маршрутизации, иерархической  $mTSP$ , сочетания различных агентов (дронов и коммивояжеров) и разработки мультиагентных систем маршрутизации

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Германчук, М. С. Использование дополнительной информации в задачах дискретной оптимизации типа многих коммивояжеров / М. С. Германчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — Т. 33, № 4. — С. 68–82.  
GERMANCHUK, M. S. (2016) The use of additional information in discrete optimization problems of the type of many traveling salesmen. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4(33). p. 68–82.

2. Германчук, М. С. Задачи практической маршрутизации / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем. Сборник научных трудов XI Международной школы-симпозиума АМУР-2017. — 2017. — С. 116–120.  
GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. and LUKIANENKO, V. A. (2017) Practical routing tasks. *Analysis, modelling, governance, socio-economic development*. p. 116–120.
3. Германчук, М. С. Синтез алгоритмов кластеризации для решения многоагентной задачи коммивояжера / М. С. Германчук, М. Г. Козлова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — Т. 39, № 2. — С. 49–70.  
GERMANCHUK, M. S. & KOZLOVA, M. G. (2018) Synthesis of algorithms of clustering to solve the multiagent traveling salesman problem *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2(39). p. 49–70.
4. Германчук, М. С. Знаниеориентированные модели маршрутизации многих коммивояжеров / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 13-й Международной конференции, г. Москва. — 2020. — С. 352–353.  
GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. and LUKYANENKO, V. A. (2020) Knowledge-oriented routing models of many traveling salesmen. *Intellectualization of information processing: Abstracts of the 13th International Conference*. p. 352–353.
5. Германчук, М. С. Разрешимость задач псевдобулевой условной оптимизации типа многих коммивояжеров / М. С. Германчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — Т. 49, № 4. — С. 30–55.  
GERMANCHUK, M. S. (2020) Solvability of pseudo-Boolean conditional optimization problems of the type of many traveling salesmen. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4(49). p. 30–55.
6. Макаров, О. О. Разработка алгоритмов маршрутизации в сложных сетях / О. О. Макаров, М. С. Германчук // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь : ИП Корниенко А. А., 2018, Вып. 2. — С. 127–135.



- MAKAROV, O. O. & GERMANCHUK, M. S. (2018) Development of algorithms for research of complex networks. *Mathematics, Informatics, Computer science, Modeling, Education*. p. 127–135.
7. BEKTAS, T. (2006) The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *Omega-international Journal of Management Science*. 34. p. 209–219.
  8. GERMANCHUK, M. S., LEMTYUZHNIKOVA, D. V. & LUKIANENKO, V. A. (2021) Metaheuristic algorithms for multiagent routing problems. *Automation and Remote Control*. 10 (82). p. 1787–1801.
  9. KÉFI, S., ROKBANI, N., KRÖMER, P. & ALIMİ, A. M. (2016) Ant supervised by PSO and 2-Opt algorithm, AS-PSO-2Opt, applied to traveling salesman problem. *2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. p. 004866–004871.
  10. KENT, T., RICHARDS, S. & JOHNSON, A. (2022) Homogeneous agent behaviours for the multi-agent simultaneous searching and routing problem. *Drones*. 8(2). p. 51. Available from: <https://www.mdpi.com/2504-446X/6/2/51>
  11. LI, X., & SAVKIN, A. V. (2021) Networked unmanned aerial vehicles for surveillance and monitoring: a survey. *Future Internet*. 13. p. 174.
  12. MILLER, C. E., TUCKER, A. W. & ZEMLIN, R. A. (1960) Integer programming formulation of traveling salesman problems. *J. ACM*. 7. p. 326–329.
  13. National traveling salesman problems. [Online] Available from: <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/countries.html>
  14. TSPLIB is a library of sample instances for the TSP (and related problems) from various sources and of various types. [Online] Available from: <http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95>
  15. WOOLDRIDGE, M. J. (1992) *The logical modelling of computational multiagent systems*. University of Manchester. Institute of Science and Technology.
  16. XU, X., YUAN, H., LIPTROTT, M. & TROVATI, M. (2018) Two phase heuristic algorithm for the multiple-travelling salesman problem. *Soft Computing*. 22. p. 6567–6581.

УДК: 519.23

MSC2010: 93A30

## ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ В ПАССИВНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

© И. В. Гетманская

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ  
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
УЛ. АВИАМОТОРНАЯ 8А, МОСКВА, 111024, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: [getmi@mail.ru](mailto:getmi@mail.ru)

**INTERVAL ESTIMATION OF NONLINEAR PARAMETRIC REGRESSION IN A PASSIVE  
EXPERIMENT.**

**Getmanskaya I. V.**

**Abstract.** The paper presents a method for constructing point and interval estimates of the regression coefficient (RC) of nonlinear regression in a passive, in a certain sense, experiment. Passivity is understood through the role of the experimenter regarding the content of the initial data. The role is passive and does not affect the method of collecting information. The initial data for the experimenter is an unchangeable given.

The initial evaluation data are the observed realizations of RC (RRC), which are the result of solving the inverse problem: finding the RC parameter of the regression function from the measured values of its dependent and independent variables without taking into account errors.

A multilevel point estimate is constructed as the average of sequentially nested subsets of the set of RRCs, which are formed based on approximations of numerical characteristics (mathematical expectation and variance) RRC of varying degrees of accuracy. Approximation formulas were found earlier. The accuracy of the point estimation increases simultaneously with the strictness of the conditions for the possibility of approximations. At the same time, for the roughest and most accurate estimates, the approximations of the variances coincide with the accuracy of the approximation, which is a sign of non-randomness of the estimates. They are a classical approximation of known accuracy. As a result, it becomes possible to construct a reliable interval covering the true value of the RC.

The paper presents the results of a numerical (simulation) experiment of two nonlinear relative to the estimated parameter and an independent regression variable. One experiment differs from another: 1) the model value of the RC, 2) the intervals of setting the area of definition of the function (its independent variable), 3) the magnitude of the standard deviation of the random component of the model, 4) the amount of initial data. As a result, the properties of the functions change. In some experiments, the values of derived functions for the estimated parameter are greater than one, which is a sign of significant nonlinearity of the function, in

others they are less than one or close to zero, which is a sign of the internal linearity of the function relative to the estimated parameter.

The evaluation results are consistent with the theoretical justifications of the assessments. If the conditions for the formation of subsets of the RRC set are met, the true values of the RC are reliably covered by an interval determined by the first and third degrees of the standard deviation of the random component of the model.

With the increase in the number of initial evaluation data, the accuracy of the result increases, which is consistent with the previously proven consistency of the estimates.

In a passive experiment, it is possible to optimize point and interval estimation based on the average sample characteristics of the initial evaluation data.

The evaluation of the RC is carried out without relying on the distribution law of the random component of the model, which refers the evaluation method to the “robust” method.

**Keywords:** *regression, regression coefficient, nonlinear, point, interval, consistent and effective estimation, mathematical expectation, variance, standard deviation, average numerical characteristics of a random variable. regression, regression coefficient, nonlinear, point, interval, consistent and effective estimation, mathematical expectation, variance, standard deviation, average numerical characteristics of a random variable.*

## ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние научно технического прогресса (искусственный интеллект и робототехника, покорение космоса и цифровизация, компьютерные и нано технологии и т. д.) было бы невозможно без математических моделей предметов исследования: явлений природы или процессов химических, физических, биологических, социальных, экономических ...

Математическая модель, как правило, это функциональная зависимость количественных характеристик исследуемого явления. В связи с неучтёнными факторами или ошибками измерений в модель вносят случайную составляющую, и строится она в вероятностной схеме постановки задачи, а уточняется и используется методами математической и прикладной статистики.

Адекватная функциональная модель позволяет решать задачи двух типов: 1) строить научные прогнозы о значениях зависимой переменной по значениям независимых; 2) оценивать параметры модели для её уточнения по измеренным значениям зависимой и независимых переменных.

К методам создания моделей относятся методы дифференциального и интегрального исчисления, результатами которых становится функциональная модель, зачастую, нелинейная относительно, как независимых аргументов, так и оцениваемых параметров.

Традиционные методы решения задач второго типа: во-первых, базируются на законы распределения случайных составляющих модель, во-вторых, если модель нелинейная, то линеаризуют её. Поэтому, для предполагаемого закона распределения случайных составляющих необходима проверка гипотез относительно этого закона. Будет ли результат проверки положительным, неизвестно. Есть вероятность того, что этот процесс будет долгим. Линеаризация нелинейной модели уводит исследования от истины.

Предлагаемый метод решения задачи второго типа предполагает известными только основные числовые характеристики случайных составляющих, оценить которые можно средневывборочными исходных данных. А нелинейная модель при этом не линеаризуется, а значит, не искажается.

## 1. РЕАЛИЗАЦИИ РЕГРЕССИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Реализация регрессионного коэффициента (РРК) рассматривается [1], в качестве начального приближения итерационного метода Гаусса оценивания параметров регрессионной модели. В регуляризованном методе наименьших квадратов [2], оценивающих параметры многопараметрической линейной по параметрам многофакторной модели, используется наблюдения параметров, которые в нашем обозначении — РРК. В работах [3–5] составляющие точечного нелинейного оценивания однопараметрической парной регрессии также являются РРК. Их поиск осуществляется в следующей постановке задачи.

Чтобы установить связь между зависимой  $Y \in \Upsilon \subset \mathfrak{R}$  и независимой переменной  $x \in \aleph \subset \mathfrak{R}$ , в предположении того, что  $Y$  имеет случайный разброс, возможная модель [6, С. 282] зависимости переменных

$$Y = r(x) + \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$  — случайная ошибка,  $r(x)$  — регрессия, которая по определению модели [6, С. 283] — условное математическое ожидание

$$r(x) = E[Y/x]$$

случайной величины  $Y$ , при условии, что  $x$  принимает неслучайное (детерминированное) значение. В общем случае  $x$  может быть случайной.

Из определения  $r(x)$  и (1) следует, что

$$E[\varepsilon/x] = E[\varepsilon] = 0. \quad (2)$$

Если вид регрессии  $r(x) = r(x, \theta)$  определён с точностью до неизвестного параметра  $\theta \in \mathfrak{R}$ , то функцию  $r(x, \theta)$  называют параметрической регрессией, а параметр  $\theta$  — регрессионным коэффициентом (РК). Наблюдаемое в  $i$ -м эксперименте значение  $y_i$  величины  $Y$  называют откликом при заданном значении фактора  $x_i \in \mathfrak{X}$ , где  $y_i = (r(x_i) + \varepsilon_i) \in \mathfrak{Y}$ ,  $\varepsilon_i$  — значение  $\varepsilon$ .

Согласно (2) величина  $\varepsilon$  центрированная. Допустим, что она равнозначна с дисперсией

$$Var[\varepsilon/x] = Var[\varepsilon] = \sigma^2.$$

В перечисленных условиях задача регрессионного анализа — это оценка неизвестного значения РК  $\theta$  по  $n$  независимым наблюдениям  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  отклика и фактора.

Предположим, что в своих областях определения однозначные функции  $y = r(x, \theta)$  и  $\theta = \theta(x, y)$  дважды дифференцируемы по  $\theta$  первая и по  $y$  вторая, где функция  $\theta = \theta(x, y)$  неявно задана уравнением  $y - r(x, \theta) = 0$

$$\theta = \theta(x, y) = r^{-1}(x, y). \quad (3)$$

Обозначим:

- $S$  — область определения функции  $\theta = \theta(x, y) : S = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}\} \subset \mathfrak{R}^2$ ;
- $\Theta$  — область допустимых значений функции  $\theta = \theta(x, y) : S^{\theta(x, y)} > \Theta \subset \mathfrak{R}$ ;
- $A = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} : |y - \bar{Y}(x)| = |\varepsilon| \leq 1\} \subset \mathfrak{R}^2$ , где  $\varepsilon$  — значение  $\varepsilon$ ,  $\bar{Y}(x) = r(x, \theta)$  — уравнение линии уровня [9], при истинном значении  $\theta$ , поверхности, заданной в декартовой системе координат  $Oxy$  функцией  $\theta = \theta(x, y)$ ;
- $H$  — множество исходных данных оценивания:  
 $H = \{(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}\}, |H| = n$ ;
- $C$  — множество РРК (реализаций РК):  $H \cap A \cap S^{\theta(x_i, y_i)} > C \subset \Theta$ ,

$$C = \{\theta_i^* = \theta(x_i, y_i)\}, |C| = m, (m \leq n).$$

РРК — значения закономерной функции  $\theta_i^* = \theta(x_i, y_i)$  от значений случайного аргумента — значения случайной величины [6].

В работах [3, 4] найденные приближения основных числовых характеристик (ЧХ) РРК (математического ожидания и дисперсии) представлены в виде доказанных теорем. Вывод этих теорем воспроизведём в следующем виде.

Если  $(x_i, \theta) \in \mathfrak{X} \times \Theta \subset \mathfrak{R}^2 : (x_i, y_i) \in H \cap A \cap S$ , то  $\forall \theta_i^* \in C$ :

I. С точностью  $o(1)$

$$\begin{aligned} E[\theta_i^*] &= \theta, \\ \text{Var}[\theta_i^*] &= o(1); \end{aligned}$$

II. Если  $\exists q : 0 < q < \infty$  и

$$|r'_\theta(x_i, \theta)| \geq q \quad (4)$$

то, с точностью  $o(\epsilon_i)$

$$E[\theta_i^*] = \theta$$

и с точностью  $o(\epsilon_i^2)$

$$\text{Var}[\theta_i^*] = \frac{\sigma^2}{(r'_\theta(x_i, \theta))^2};$$

III. Если выполняется (4) и

$$\left| \frac{r''_{\theta\theta}(x_i, \theta)}{(r'_\theta(x_i, \theta))^3} \right| \leq 2 \quad (5)$$

то, с точностью  $o(\epsilon_i^2)$

$$\begin{aligned} E[\theta_i^*] &= \theta + w(x_i, \theta), \\ \text{Var}[\theta_i^*] &= \frac{\sigma^2}{(r'_\theta(x_i, \theta))^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$w(x_i, \theta) = -\frac{\sigma^2 \cdot r''_{\theta\theta}(x_i, \theta)}{(r'_\theta(x_i, \theta))^3} = w_i, \quad (7)$$

С ужесточением условий применимости приближений ЧХ  $\theta_i^* \in C$  повышается порядок точности этих приближений. В активном эксперименте можно подобрать диапазон измеряемых значений фактора так, чтобы результат был с оценкой более высокой точности. В пассивном эксперименте измерения значений фактора и отклика это неизменная данность, поэтому оптимизацию оценивания в нём можно осуществить формированием оценок, согласно выполненным условиям применимости приближений ЧХ РРК.

В работе [5] найдена оценка бесконечно малой  $o(\epsilon^k)$

$$|o(\epsilon^k)| \leq \sigma^{k+1}, \quad (8)$$

где  $|\epsilon| < 1$ .

## 2. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕГРЕССИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Определим множества  $B_1, B, B_0, C_1, G, G_o$  следующим образом:

- $B_1$  — множество точек  $(x_i, y_i)$ , в которых выполняется условие (4),

$$B_1 = \{(x_i, y_i) : ((x_i, y_i) \in H \cap S \cap A) \wedge (|r'_\theta(x_i, \theta)| \geq q), 0 < q < \infty\};$$

- $B$  — множество точек  $(x_i, y_i)$ , в которых выполняются условия (4) и (5),

$$B = \{(x_i, y_i) : ((x_i, y_i) \in B_1) \wedge \left| \frac{r''_{\theta\theta}(x_i, \theta)}{(r'_\theta(x_i, \theta))^3} \right| \leq 2\};$$

- $B_0$  — множество точек  $(x_i, y_i)$ , в которых дисперсия РПК  $Var[\theta_i^*] = o(\epsilon_i^2)$ ,

$$B_0 = \{(x_i, y_i) : ((x_i, y_i) \in B) \wedge (|r'_\theta(x_i, \theta)| \geq \sqrt{1/\sigma})\};$$

Согласно (8) условия формирования множества  $B_0$ :  $Var[\theta_i^*] = o(\epsilon_i^2)$  и  $|r'_\theta(x_i, \theta)| \geq \sqrt{1/\sigma}$  эквивалентны.

- $C_1$  — множество РПК, порождённое точками  $(x_i, y_i) \in B_1$ ,

$$B_1 \xrightarrow{\theta(x_i, y_i)} C_1,$$

$$C_1 = \{\theta_i^* : \theta_i^* = \theta(x_i, y_i), (x_i, y_i) \in B_1\},$$

$$C_1 \subseteq C, |C_1| = |B_1| = m_1, (m_1 \leq m);$$

- $G$  — множество несмещённых оценок РК точности  $o(\epsilon_i^2)$ , порождённое точками  $(x_i, y_i) \in B, G \subset \Theta$ ,

$$B \xrightarrow{f(x_i, y_i)} G,$$

$$f(x_i, y_i) = \theta(x_i, y_i) - w(x_i, \theta),$$

где  $w(x_i, \theta) = w_i$  по формуле (7),

$$G = \{\hat{\theta}_i : \hat{\theta}_i = \theta_i^* - w_i, \theta_i^* = \theta(x_i, y_i), (x_i, y_i) \in B\},$$

$$|G| = |B| = l, (l \leq m_1);$$

- $G_0$  — множество несмещённых оценок РК точности  $o(\epsilon_i^2)$  с приближённо нулевой дисперсией, порождённое точками  $(x_i, y_i) \in B_0, G_0 \subseteq G$ ,

$$B_0 \xrightarrow{f(x_i, y_i)} G_0,$$

$$G_0 = \{\hat{\theta}_i : \hat{\theta}_i \subseteq G, (x_i, y_i) \in B_0\},$$

$$|G_0| = |B_0| = l_0, (l_0 \leq l).$$

Надо иметь ввиду то, что так как  $w_i$  не случайная, а закономерная величина, то по свойствам дисперсии [6]

$$Var[\hat{\theta}_i] = Var[\theta_i^* + w_i] = Var[\theta_i^*]. \quad (9)$$

Состоятельной оценкой РК  $\tilde{\theta}$  в множествах  $G_0 \subseteq G$ ,  $C_1 \subseteq C$ , порождённых элементами вложенных подмножеств  $B_0 \subseteq B \subseteq B_1 \subseteq H \cap S \cap A$  соответственно, является:

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} \bar{\theta}_0 = l_0^{-1} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} \hat{\theta}_i, & \text{если } G_0 \neq \emptyset, \\ \bar{\theta} = l^{-1} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G} \hat{\theta}_i, & \text{если } G_0 = \emptyset \wedge G \neq \emptyset, \\ \bar{\theta}^\times = m_1^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C_1} \theta_i^*, & \text{если } G = \emptyset \wedge C_1 \neq \emptyset, \\ \bar{\theta}^* = m^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C} \theta_i^*, & \text{если } C_1 = \emptyset \wedge C \neq \emptyset. \end{cases} \quad (10)$$

В работах [3, 4] приведены доказательства состоятельности оценок  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\theta}^\times$ ,  $\bar{\theta}^*$  с точностью  $o(\varepsilon^2)$ ,  $o(\varepsilon)$ ,  $o(1)$  при  $l \rightarrow \infty$ ,  $m_1 \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  соответственно. Так как  $G_0 \subseteq G$ , то с точностью  $o(\varepsilon^2)$   $\bar{\theta}_0$  также состоятельная оценка при  $l_0 \rightarrow \infty$  и не только. Она классическое приближение РК точности  $o(\varepsilon^2)$ .

### 3. ДОСТОВЕРНОЕ ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ РЕГРЕССИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Дисперсия оценки  $\bar{\theta}^*$  формулы (10), согласно свойствам дисперсии [6]:

$$Var[\bar{\theta}^*] = Var \left[ m^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C} \theta_i^* \right] = m^{-2} \sum_{i:\theta_i^* \in C} Var[\theta_i^*].$$

По оценке (I.)  $\forall \theta_i^* \in C \quad Var[\theta_i^*] = o(1)$  и свойствам бесконечно малых [9]  $\Rightarrow$

$$m^{-2} \sum_{i:\theta_i^* \in C} Var[\theta_i^*] = m^{-2} \sum_{i=1}^m o(1) = \frac{o(1)}{m} = o(1).$$

Таким образом, с одной стороны, дисперсия  $Var[\bar{\theta}^*] = o(1)$ , что, в рамках точности  $o(1)$ , означает  $Var[\bar{\theta}^*] = 0$ , что, в свою очередь, означает не случайность, а закономерность величины  $\bar{\theta}^*$ . Так как математическое ожидание закономерной величины равно самой величине [6], то  $E[\bar{\theta}^*] = \bar{\theta}^*$ .

С другой стороны,  $E[\bar{\theta}^*] = E \left[ m^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C} \theta_i^* \right]$ . Согласно свойствам математического ожидания [6] и оценкам (I.),

$$E \left[ m^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C} \theta_i^* \right] = m^{-1} \sum_{i:\theta_i^* \in C} E[\theta_i^*] = m^{-1} \sum_{i=1}^m \theta = \theta.$$

Таким образом, в рамках точности  $o(1)$ ,  $\bar{\theta}^* = \theta$ .

Из выше сказанного следует, что  $\bar{\theta}^*$  — приближение  $\theta$  точности  $o(1)$ , которая, согласно (8),  $o(1) = o(\varepsilon^0) \leq \sigma$ . Тем самым, найден интервал радиуса  $\sigma$  с центром в  $\theta$ .



$\bar{\theta}^*$ , достоверно покрывающий истинное значение  $\theta$  или

$$P\{\theta \in (\bar{\theta}^* - \sigma, \bar{\theta}^* + \sigma)\} = 1. \quad (11)$$

Дисперсия оценки  $\bar{\theta}_0$  формулы (10), согласно свойствам дисперсии [6]:

$$\text{Var}[\bar{\theta}_0] = \text{Var} \left[ l_0^{-1} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} \hat{\theta}_i \right] = l_0^{-2} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} \text{Var}[\hat{\theta}_i].$$

По условию формирования множества  $G_0$ , которое результат отображения  $f(x_i, y_i)$  множества  $B_0$ , и по (9), а также по свойствам бесконечно малых [9]  $\forall \hat{\theta}_i \in G_0 \quad \text{Var}[\hat{\theta}_i] = \text{Var}[\theta_i^*] = o(\epsilon_i^2) \Rightarrow$

$$l_0^{-2} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} \text{Var}[\hat{\theta}_i] = l_0^{-2} \sum_{i=1}^{l_0} o(\epsilon_i^2) = l_0^{-2} \sum_{i=1}^{l_0} o(\epsilon^2) = \frac{o(\epsilon^2)}{l_0} = o(\epsilon^2) \Rightarrow$$

$\text{Var}[\bar{\theta}_0] = o(\epsilon^2) \Rightarrow$  в рамках точности  $o(\epsilon^2)$   $\text{Var}[\bar{\theta}_0] = 0 \Rightarrow$  закономерность величины  $\bar{\theta}_0$ .

Так как математическое ожидание закономерной величины равно самой величине [6], то  $E[\bar{\theta}_0] = \bar{\theta}_0$ , с одной стороны, и с другой стороны, согласно (10) и оценкам (III.),

$$E[\bar{\theta}_0] = E \left[ l_0^{-1} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} \hat{\theta}_i \right] = l_0^{-1} \sum_{i:\hat{\theta}_i \in G_0} E[\hat{\theta}_i] = l_0^{-1} \sum_{i=1}^{l_0} \theta = \theta.$$

Таким образом, в рамках точности  $(\epsilon^2)$ ,  $\bar{\theta}_0 = \theta$ . Из чего следует, что  $\bar{\theta}_0$  — приближение  $\theta$  точности  $(\epsilon^2)$ , которая, согласно (8),  $o(\epsilon^2) \leq \sigma^3$ .

В результате, интервал радиуса  $\sigma^3$  с центром в т.  $\bar{\theta}_0$  достоверно покрывает истинное значение  $\theta$  или

$$P\{\theta \in (\bar{\theta}_0 - \sigma^3, \bar{\theta}_0 + \sigma^3)\} = 1. \quad (12)$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ОЦЕНИВАНИЯ РЕГРЕССИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

В таблице 1 [7] приведены результаты численных экспериментов 1–8 оценивания параметра  $\theta$  регрессии вида

$$y = \exp(x^3/\theta^2) \quad (13)$$

и экспериментов 9–12 параметра  $\mu$  ( $\theta = \mu$ ) модели [8]

$$s = \frac{g(\check{m} - \check{m}_0)}{6\pi\rho\mu} \left( t - \frac{1}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t)) \right). \quad (14)$$

описывающей свободное падение в несжимаемой Ньютоновой жидкости вязкости  $\mu$  сферы радиуса  $\rho$  массы  $\check{m}$ . Здесь  $\check{m}_0$  — масса жидкости, вытесняемой сферой,  $s$  — расстояние, пройденное сферой за время  $t$  с момента начала движения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\alpha = 6\pi\rho\mu/\check{m}$ . Параметры имели фиксированные значения:  $\rho = 1$ ,  $\check{m} = 100$ ,  $\check{m}_0 = 97$ . Отклик регрессионной модели (14) —  $s$  ( $y=s$ ), а фактор —  $t$  ( $x=t$ ).

Таблица 1. Параметры и результаты экспериментов оценивания РК

№ экс.	(a,b)	$\theta$	$\bar{\sigma}_\varepsilon$	$\bar{\sigma}_\varepsilon^2$	$\bar{\sigma}_\varepsilon^3$	n	$ \bar{\theta}^* - \theta $	m	$l_0$	$ \hat{\theta}_0 - \theta $	$\frac{ \hat{\theta}_0 - \theta }{ \bar{\theta}^* - \theta }$
1	(0,1, 1,5)	1	0,35	0,123	0,043	8	0,126	6	4	0,028/0,024	5,25
2	(0,1, 1,5)	1	0,52	0,27	0,14	8	0,13	4	3	0,039/0,026	5
3	(0,1, 1,5)	1	0,25	0,063	0,016	8	0,045	7	4	0,002/0,003	15
4	(0,01, 1)	1	0,6	0,36	0,22	10	0,074	5	3	0,096/0,084	0,88
5	(0,05, 5)	4	0,78	0,6	0,47	6	0,26	4	3	0,014/0,011	23,6
6	(0,05, 5)	4	0,95	0,9	0,86	6	0,015	3	3	0,026/0,026	0,58
7	(0,05, 5)	4	0,597	0,356	0,21	6	0,113	4	3	0,001/0,0006	188,3
8	(1, 3)	2	0,64	0,41	0,26	7	0,036	7	5	0,025/0,024	1,5
9	(0,1, 8)	1	0,49	0,25	0,12	11	0,096	7	2	0,088/0,089	1,08
10	(1, 10)	0,7	0,215	0,046	0,0099	9	0,103	7	3	0,003/0,0028	36,7
11	(5, 20)	3	0,35	0,12	0,042	9	0,034	8	4	0,02/0,02	1,7
12	(5, 20)	3	0,29	0,082	0,024	7	0,215	7	2/3	0,07/0,025	8,6

Исходные данные оценивания моделировались по формуле (1) для  $x \in (a, b)$ . При этом, выборка объема  $n$  случайной величины  $\varepsilon$  — генерировалась, как сумма значений величин равномерного, нормального и показательного распределения. Выборка центрировалась относительно средне выборочной

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i / n, \forall i = \overline{1, n}, \varepsilon_i = (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}).$$

Значение дисперсии  $\sigma^2$  величины  $\varepsilon$  оценивалось исправленной средневывборочной дисперсией

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2,$$

являющейся состоятельной [6] оценкой  $\sigma_2$ .

Элементы  $\theta_i^* = \theta(x_i, y_i)$  множества  $C$  находились решением уравнения (3) относительно  $\theta$  в области  $D = [\theta - \theta/2, \theta + \theta/2]$  предполагаемых значений РК:  $D \cap \Theta \neq \emptyset$ . Для модели (13) значения

$$\theta_i^* = \theta(x_i, y_i) = \sqrt{\frac{x_i^3}{\ln(y_i)}},$$

область определения которых  $S = \{(x, y) : (x < 0) \wedge (y(0, 1)) \vee (x \geq 0) \wedge (y > 1)\}$ . Для модели (14) уравнение (3) относительно  $\theta$  решалось численным методом половинного деления.

Значения  $Var[\theta_i^*]$  и  $w_i$  по формулам (6) и (7), зависящих от оцениваемого параметра  $\theta$ , проводились с приближением  $\theta \approx \bar{\theta}^*$ .

Оценка  $\bar{\theta}_0$  РК осуществлялась одношаговой итерацией, на последнем шаге которой параметр  $\theta$  для вычисления значений  $Var[\theta_i^*]$  и  $w_i$  приближался оценкой  $\bar{\theta}_0$ , найденной на предыдущем шаге. В таблице 1 приводятся оба результата итерации в виде  $|\bar{\theta}_0 - \theta|$  абсолютных погрешностей оценки  $\bar{\theta}_0$  РК.

Приведённые в таблице 1 результаты согласуются с обоснованиями оценки точности приближений для случая, когда  $G_0 \neq \emptyset$  и  $C \neq \emptyset$ .

Условию  $G_0 \neq \emptyset$  соответствует оценка  $\bar{\theta}_0$  формулы (10), для погрешности которой, согласно (12), должно выполняться неравенство

$$|\bar{\theta}_0 - \theta| = o(\varepsilon^2) \leq \sigma^3 \approx \bar{\sigma}_\varepsilon^3. \quad (15)$$

Условию  $C \neq \emptyset$  соответствует оценка  $\bar{\theta}^*$  той же формулы (10), для которой, согласно (11), должна выполняться оценка точности приближения

$$|\bar{\theta}^* - \theta| = o(1) \leq \sigma \approx \bar{\sigma}_\varepsilon. \quad (16)$$

Интервалы  $(a, b)$  области определения функции  $y = r(x, \theta)$  при заданном значении истинного  $\theta$  выбирались так, чтобы выполнялось условие формирования множества  $B_0$ , отображение которого множество составляющих лучшее приближение  $\theta$ , что возможно в активном эксперименте.

Оценки точности приближений параметра  $\theta$  по формулам (15) и (16) согласуются с полученной точностью во всех экспериментах, кроме одного. В 12-м эксперименте оценка точности приближения  $|\bar{\theta}_0 - \theta| \leq \bar{\sigma}_\varepsilon^3$  если и не выполняется, то с небольшой погрешностью соразмерной  $\bar{\sigma}_\varepsilon^4$ . Для преодоления этого несогласия требуется повышение точности формул оценивания РК на один порядок, что ведёт к их усложнению и, как следствие, ужесточению условий их корректности.

В данной работе представлены результаты имитации пассивного эксперимента оценивания РК по формуле (10).

В таблицу 2 сведены параметры и результаты экспериментов оценивания РК  $\theta$  регрессии вида (13) (эксперименты 1–11) и  $\theta = \mu$  регрессии вида (14) (эксперименты 12–52).

Анализ данных таблицы 2 позволяет сформулировать следующие выводы.

Таблица 2. Параметры и результаты экспериментов оценивания РК

№	(a, b)	$\theta$	$\bar{\sigma}_\varepsilon$	$\bar{\sigma}_\varepsilon^2$	$\bar{\sigma}_\varepsilon^3$	n/m	$ \bar{\theta}^* - \theta $	$m_1$	$ \bar{\theta}^\times - \theta $	1	$ \hat{\theta} - \theta $	$l_0$	$ \hat{\theta}_0 - \theta $	$ r'_\theta(x_i, \theta) $
э.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	(5,20)	50	0.295	0.087	0.026	7/6	6.074	2	0.079	2	0.053	0	-	$\approx 0$
2	(5,20)	50	0.218	0.048	0.01	7/7	0.83	2	0.019	2	0.023	1	0.111	$\approx 0$
3	(5,15)	50	0.689	0.475	0.327	7/6	5.274	0	-	0	-	0	-	$\leq 10^{-1}$
4	(5,15)	50	0.901	0.812	0.732	7/6	7.313	0	-	0	-	0	-	" - " - "
5	(5,15)	50	0.471	0.222	0.105	7/6	4.78	0	-	0	-	0	-	" - " - "
6	(1,3)	5	0.29	0.086	0.025	7/5	0.21	0	-	0	-	0	-	
7	(1,3)	5	0.497	0.247	0.123	7/6	0.19	1	0.15	0	-	0	-	
8	(2,5)	5	0.195	0.038	0.009	7/7	0.01	6	0.016	5	0.002	4	0.009	
9	(2,5)	5	0.218	0.048	0.01	7/7	0.0049	6	0.005	5	0.026	4	0.004	
10	(2,5)	5	0.69	0.478	0.33	7/6	0.219	4	0.052	4	0.08	4	0.08	
11	(2, 5)	5	0.152	0.023	0.003	7/6	1.152	0	-	0	-	0	-	(0.01,0.1)
12	(0.1, 3)	1	0.28	0.078	0.022	6/3	0.068	3	0.068			2	0.009	
13	(0.1,3)	1	0.243	0.059	0.014	6/2	0.003	0	-	0	-	0	-	$\approx 0$
14	(0.1,3)	3	0.276	0.077	0.021	7/7	0.116	7	0.116	3	0.012			$\approx 0$
15	(0.1,3)	3	0.19	0.036	0.007	7/4	2.124	0	-	0	-	0	-	$\leq 10^{-2}$
16	(0.1,3)	3	0.196	0.039	0.008	7/2	0.826	0	-	0	-	0	-	$\leq 10^{-10}$
17	(1,5)	1	0.218	0.048	0.01	5/3	0.149	0	-	0	-	0	-	$\approx 0$
18	(5,15)	1	0.31	0.098	0.031	5/5	0.041	5	0.041	5	0.031	4	0.014	
19	(5,15)	2	0.34	0.12	0.039	5/5	0.11	5	0.11	5	0.13	3	0.024	
20	(5,20)	3	0.29	0.085	0.025	7/7	0.041	6	0.041	6	0.034	3	0.02	
21	(5,20)	3	0.241	0.058	0.014	7/7	0.07	7	0.07	6	0.013	3	0.012	
22	(5,20)	3	0.359	0.129	0.046	7/7	0.142	6	0.013	6	0.008	3	0.04	
23	(5,20)	3	0.607	0.368	0.223	7/7	0.051	6	0.03	6	0.087	4	0.047	
24	(5,20)	3	0.458	0.21	0.096	7/7	0.175	6	0.087	6	0.051	4	0.043	
25	(5,20)	3	0.41	0.167	0.068	7/7	0.048	6	0.077	6	0.1	4	0.014	
26	(5,20)	3	0.267	0.071	0.019	7/7	0.024	7	0.024	6	0.065	3	0.033	(0.4, 3.3)
27	(5,20)	3	0.183	0.033	0.006	7/7	0.04	7	0.04	6	0.056	2	0.02	" - " - "
28	(5,20)	3	0.197	0.039	0.008	7/7	0.02	7	0.02	6	0.018	2	0.037	" - " - "
29	(5,20)	3	0.193	0.037	0.007	7/7	0.044	7	0.044	6	0.067	2	0.036	" - " - "
30	(5,20)	3	0.328	0.107	0.035	7/4	0.09	0	-	0	-	0	-	$\leq 0.3$

Эффективные оценки  $\bar{\theta}^*$  и  $\bar{\theta}_0$  с приближённо нулевой дисперсией, построенные по элементам множеств  $C$  и  $G_0$ , являются приближением точности  $\bar{\sigma}_\varepsilon$  и  $\bar{\sigma}_\varepsilon^3$  соответственно. Несогласие в 17 экспериментах из 52 точности приближений с их оценками по формулам (15) и (16) объясняется нарушением условия (4), а именно, строгой монотонности по  $\theta$  функции регрессии  $r(x, \theta)$  ( $r'_\theta(x_i, \theta) \not\equiv 0$ ). Неопределённость условия вызывает трудности его проверки. Для критерия (4)  $|r'_\theta(x_i, \theta)| \geq q$  было выбрано значение  $q \approx 1$ . Для всех экспериментов, где выполняется это условие, оценки точности приближений по формулам (15) и (16) согласуются с результатами оценивания.

Между тем, при невыполнении условия (4), оптимальной в 12-ти экспериментах из 17, согласно результатам оценивания, становится оценка  $\bar{\theta}^\times$ .

Оценка точности точечных оценок РК с ненулевой дисперсией предполагает построение доверительных интервалов, накрывающих истинное значение оцениваемого параметра, с определённой надёжностью.

Таблица 2. Продолжение

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
31	(5,20)	3	0.203	0.041	0.008	7/6	0.379	3	0.094	2	0.05	0	-	( $10^{-5}$ , 0.8)
32	(5,20)	3	0.082	0.006	0.001	7/7	0.006	7	0.006	6	0.009	0	-	
33	(5,20)	0.5	0.231	0.053	0.012	7/7	0.009	7	0.009	7	0.006	6	0.004	
34	(1,10)	0.7	0.289	0.084	0.024	9/9	0.028	3	0.004	3	0.027	0	-	(0.009,1.8)
35	(1,10)	0.7	0.318	0.1	0.032	9/7	0.084	4	0.027	4	0.002	1	0.012	(0.009,2.6)
36	(1,10)	0.5	0.44	0.194	0.0855	9/6	0.048	6	0.048			4	0.016	
37	(1,10)	0.5	0.146	0.021	0.003	9/6	0.016	4	0.006	3	0.008	0	-	(0.008,2)
38	(1,10)	0.5	0.29	0.084	0.024	9/6	0.033	3	0.011	3	0.031	1	0.038	" - " - " - "
39	(1,10)	0.5	0.679	0.461	0.313	9/8	0.18	4	0.041	5	0.049	3	0.132	" - " - " - "
40	(1,10)	0.5	0.32	0.11	0.035	9/6	0.037	3	0.011	3	0.037	1	0.044	" - " - " - "
41	(3,10)	0.5	0.163	0.027	0.004	9/8	0.011	8	0.011	7	0.023	3	0.02	" - " - " - "
42	(3,10)	0.5	0.181	0.033	0.006	5/5	0.086	5	0.086	4	0.13	2	0.062	<1 в 1-й т.из 5
43	(4,10)	0.5	0.464	0.215	0.1	5/4	0.002	4	0.002	4	0.055	2	0.007	>1, кроме 1-й т.
44	(5,10)	0.5	0.244	0.06	0.015	5/5	0.043	5	0.043		0.038	3	0.003	
45	(6,10)	0.5	0.49	0.241	0.118	5/5	0.032	5	0.032	5	0.042	5	0.042	
46	(6,10)	0.5	0.483	0.233	0.113	5/5	0.028	5	0.028	5	0.038	5	0.038	
47	(6,10)	0.5	0.524	0.275	0.144	5/5	0.017	5	0.017	5	0.004	5	0.004	
48	(6,10)	0.5	0.399	0.159	0.064	5/5	0.049	5	0.049	5	0.041	4	0.015	
49	(6,10)	0.5	0.337	0.114	0.038	5/5	0.016	5	0.016	5	0.022	4	0.013	
50	(6,10)	0.5	0.33	0.11	0.036	5/5	0.019	5	0.019	5	0.024	4	0.006	
51	(6,10)	0.5	0.14	0.02	0.003	5/5	0.01	5	0.01	5	0.01	0	-	
52	(6,10)	0.5	0.226	0.051	0.012	5/5	0.002	5	0.002	5	0.0006	0	-	

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены точечные и интервальные нелинейные оценки РК с использованием множества реализаций РРК в исходных данных эксперимента оценивания. Подмножества РРК формируются с помощью полученных ранее приближений числовых характеристик РРК различной точности в различных условиях их выполнимости. С ужесточением этих условий сужается оценочный интервал, содержащий истинное значение РК. Эту закономерность можно использовать для оптимизации оценивания РК в пассивном эксперименте.

Лучшее оценивание РК по предлагаемому методу — эффективная оценка РК с приближённо нулевой дисперсией, которая превращается в классическое приближение РК точности, соразмерной кубу среднеквадратического отклонения отклика.

Если оптимальной оценкой РК является оценка с ненулевой дисперсией, то точность оценивания РК можно оценить классическим методом доверительного интервала определённой надёжности, что предполагает дополнительные исследования.

Точность состоятельных оценок повышается с ростом объёма их составляющих.

Одним из основных условий применимости метода — существенная нелинейность по оцениваемому параметру функции регрессии.

Построение метода проводится без опоры на законы распределения погрешностей, что значительно расширяет класс решаемых методом задач, и относит его к “робастным” методам прикладной статистики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 487 с.  
AYVAZYAN, S., ENYUKOV, I., MESHALKIN, L. (1985) *Applied statistics: The study of dependencies*. Moscow: Finance and Statistics.
2. Меченов, А. С. Регуляризованный метод наименьших квадратов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 96 с.  
MECHENOV, A. (1988) *Regularized method of least squares*. Moskau: Publishing House of the Moscow University.
3. Гетманская, И. В. Состоятельная оценка параметра однопараметрической парной регрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — № 3. — С. 3–11.  
GETMANSKAYA, I. (2006) Consistent estimation of the parameter of one-parameter pair regression. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences series*. No.3. p. 3–11.
4. Гетманская, И. В. Оптимизация минимально контрастного оценивания нелинейной однопараметрической парной регрессии / Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. — Красноярск, 2009. — 121 с.  
GETMANSKAYA, I. (2009) *Optimization of minimally contrasting estimation of nonlinear one-parameter pair regression*. Dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences.
5. Гетманская, И. В. Оптимизация нелинейного несмещённого оценивания параметрической регрессии // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии. Сборник статей по материалам XXXVII международной заочной научно-практической конференции. — М.: Изд. Интернаука, 2016. — №2(30). — С. 24–36.  
GETMANSKAYA, I. (2016) Optimization of nonlinear unbiased estimation of parametric regression. *Scientific discussion: questions of mathematics, physics,*

- chemistry, biology. Collection of articles based on the materials of the XXXVII International Correspondence Scientific and Practical Conference.* No.2(30). p. 24–36.
6. Математическая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. — 424 с.  
Mathematical statistics. (2001) *Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University.* 424 p.
  7. Гетманская, И. В. Нелинейное оценивание парной однопараметрической регрессии в условиях недостатка статистики // Научноёмкие технологии в космических исследованиях Земли / 2020. — Т.12. № 3. — С. 54–62. doi: 10.36724/2409-5419-2020-12-3-54-62  
GETMANSKAYA, I. (2020) Nonlinear estimation of paired one-parameter regression in conditions of lack of statistics. *High-tech technologies in space research of the Earth.* vol.12. No.3. p. 54-62.
  8. Бард, Й. Нелинейное оценивание параметров. — М.: Статистика, 1979. — 349 с.  
BARD, Y. (1979) *Nonlinear estimation of parameters.* Moskau: Statistics.
  9. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. — М.: Высш. шк., 1988. — 712 с.  
KUDRYAVTSEV, L. (1988) *Course of mathematical analysis. In 3t. T. 1.* Moscow: Higher School.

УДК: 517.938

MSC2010: 37D15

## ПОЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ МОРСА–СМЕЙЛА С ДВУМЯ СЕДЛАМИ НА $n$ -МЕРНОЙ СФЕРЕ

© Е. В. Жужома, В. С. Медведев

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ,  
Нижний Новгород, 603155, Россия,  
E-mail: zhuzhoma@mail.ru, medvedev-1942@mail.ru

**POLAR MORSE-SMALE SYSTEMS WITH TWO SADDLES ON  $n$ -SPHERE.**

**Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S.**

**Abstract.** In the paper, one constructs the examples of polar Morse–Smale systems (diffeomorphisms and flows) with a sink fixed point, source fixed point and two saddles fixed points on  $n$ -dimensional sphere  $S^n$ ,  $n \geq 3$ . To prove this result, we construct different decompositions of the  $n$ -dimensional sphere  $S^n$ . Moreover, the Morse index of a saddle fixed point can be any value between 1 and  $n - 1$ , and the Morse indexes of the saddles fixed points are always different. One proves that the unstable manifold of the saddle fixed point with the biggest Morse index is (transversally) intersected with the stable manifold of another saddle fixed point.

**Keywords:** *Morse–Smale dynamical system, separatrix, Morse index.*

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что простейшими со многих точек зрения (нулевая энтропия, конечное множество неблуждающих точек, и т.д.) структурно устойчивыми динамическими системами на замкнутых многообразиях являются системы Морса–Смейла (основные определения теории динамических систем см. в книге [9] и обзорах [2, 11, 13]; определение системы Морса–Смейла дано в параграфе 1; см. также обзоры [3, 5] о системах Морса–Смейла). Понятие системы Морса–Смейла возникло под влиянием классической работы Андронова и Понтрягина [1], которые ввели понятие грубой динамической системы с непрерывным временем (поток) на сфере и на компактной плоской области, диффеоморфной кругу. Основные свойства грубых систем, полученные в [1], по существу сформировали определение системы Морса–Смейла, которое ввел Смейл [12] для произвольной размерности несущего многообразия. Смейл [12] доказал, что системы Морса–Смейла (как потоки, так и диффеоморфизмы) существуют на любом замкнутом многообразии. В дальнейшем многообразия считаются связными и замкнутыми.



Известно [12, 13], что на любом замкнутом многообразии система Морса–Смейла имеет, по крайней мере, одну источниковую и одну стоковую периодические точки. Система, имеющая ровно одну источниковую и ровно одну стоковую периодические орбиты, называется *полярной*. Самой простой системой Морса–Смейла является полярный диффеоморфизм ровно с двумя неподвижными точками, источником и стоком. В этом случае многообразие является  $n$ -мерной сферой, и динамика такой системы проста: все орбиты, отличные от неподвижных точек, движутся от источника к стоку. Нетрудно показать, что если диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет седловых орбит, то он необходимо имеет ровно две неподвижные точки: источник и сток. Поэтому увеличение числа неподвижных точек или орбит должно сопровождаться увеличением числа седел.

Известно [10] что если на  $n$ -мерном замкнутом многообразии  $M^n$  задана система Морса–Смейла ровно с тремя неподвижными точками, то размерность несущего многообразия может принимать только следующие значения  $n \in \{2, 4, 8, 16\}$ , и  $M^n$  не гомеоморфно  $n$ -мерной сфере. В работе [6] было введено понятие проективно-подобного многообразия, и доказано, что при  $n \in \{2, 8, 16\}$  несущее многообразие  $M^n$  является проективно-подобным.

В работе [4] полностью описаны замкнутые многообразия, допускающие системы Морса–Смейла, неблуждающее множество которых содержит ровно одно седло. Естественным шагом является описание многообразий, допускающих системы Морса–Смейла, неблуждающее множество которых содержит ровно два седла. В полной общности данная задача еще далека от завершения. На первом этапе естественно решить вопрос существовании полярных систем Морса–Смейла на  $n$ -мерной сфере  $S^n$ . В работе построены примеры полярных систем Морса–Смейла с двумя седлами на  $n$ -мерной сфере  $S^n$  для любого  $n \geq 3$ . Перейдем к изложению основных результатов.

Напомним, что гиперболическая точка  $p \in M$  диффеоморфизма  $f : M \rightarrow M$  имеет тип  $(\mu, \nu)$ , если  $\mu = \dim W^u(p)$ ,  $\nu = \dim W^s(p)$  [8]. *Индексом Морса*  $\mu(p)$  этой точки называется размерность ее неустойчивого многообразия,  $\mu(p) = \dim W^u(p)$ . Первый результат статьи показывает, что на  $S^n$  существуют полярные системы Морса–Смейла из рассматриваемого класса, при этом индекс Морса одного из седел может принимать любые значения от 1 до  $n - 1$ .

**Теорема 1.** *Для любых  $n \geq 3$  и  $1 \leq k \leq n - 2$  на  $n$ -мерной сфере  $S^n$  существует полярная система Морса–Смейла  $\mathcal{F}$  с четырьмя неподвижными точками: источником  $\alpha$ , стоком  $\omega$  и двумя седлами  $\sigma_1, \sigma_2$ , имеющими типы  $(n - k, k)$  и  $(n - k - 1, k + 1)$  соответственно.*

Во всех построенных примерах индексы Морса у седел различны. Следующая теорема показывает, что это не случайно.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{F}$  — полярная система Морса–Смейла на  $n$ -мерной сфере  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 3$ , с неблуждающим множеством, состоящим из четырех точек: источником  $\alpha$ , стоком  $\omega$  и двумя седлами  $\sigma_1, \sigma_2$ . Тогда индексы Морса седел  $\sigma_1, \sigma_2$  различны. Более того, неустойчивое многообразие седла с большим индексом Морса пересекается с устойчивым многообразием другого седла.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант 17-11-01041, кроме доказательства теоремы 2, выполненного при поддержке лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  — диффеоморфизм замкнутого гладкого  $n$ -мерного ( $n \geq 1$ ) многообразия  $M^n$ . Напомним, что точка  $x \in M^n$  называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности  $U$  и любого натурального числа  $N_0$  найдется  $n_0 \in \mathbb{Z}$  такое, что  $|n_0| \geq N_0$  и  $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$ . Множество неблуждающих точек диффеоморфизма  $f$  обозначается через  $NW(f)$ . Очевидно, периодическая точка является неблуждающей. Периодическая точка  $x_0 \in Per(f)$ ,  $f^q(x_0) = x_0$ , называется *гиперболической*, если производная  $Df^q(x_0) : T_{x_0}M^n \rightarrow T_{x_0}M^n$ , рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя, не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Для гиперболической точки  $x_0$  существуют так называемые устойчивое  $W^s(x_0)$  и неустойчивое  $W^u(x_0)$  многообразия, которые можно определить как множества точек  $y \in M^n$  таких, что  $\varrho_M(f^{qk}x_0, f^{qk}y) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$  и  $k \rightarrow -\infty$  соответственно, где  $\varrho_M$  — метрика на  $M^n$ . Заметим, что неустойчивое многообразие  $W^u(x_0)$  есть устойчивое многообразие относительно  $f^{-1}$ . Известно, что  $W^s(x_0)$  и  $W^u(x_0)$  гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам  $\mathbb{R}^{\dim W^s(x_0)}$ ,  $\mathbb{R}^{\dim W^u(x_0)}$  соответственно, и являются инъективными погружениями последних в  $M^n$ .

Диффеоморфизм  $f$  называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если  $NW(f)$  гиперболическое, состоит из конечного числа периодических точек и инвариантные многообразия  $W^s(x)$ ,  $W^u(y)$  пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек  $x, y \in NW(f)$ .

Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  — диффеоморфизм Морса–Смейла. Неподвижная гиперболическая точка  $p \in NW(f)$  называется *узлом*, если либо  $\dim W^s(p) = n$  (в этом

случае  $p$  является стоком), либо  $\dim W^u(p) = n$  (в этом случае  $p$  является источником). Гиперболическая неподвижная точка  $\sigma \in NW(f)$  называется седлом, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Если  $\dim W^u(\sigma) = i$ , то каждую компоненту множества  $W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$  будем называть  $i$ -мерной неустойчивой сепаратрисой, а каждую компоненту множества  $W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$  будем называть  $(n - i)$ -мерной устойчивой сепаратрисой. Седло  $\sigma \in NW(f)$  называется седлом коразмерности один, если одна из его сепаратрис одномерная. Из того, что точка разбивает одномерное евклидово пространство, но не разбивает евклидово пространство большей размерности следует, что одномерное (устойчивое или неустойчивое) многообразие седловой периодической точки состоит из самой седловой точки и двух одномерных сепаратрис, а  $i$ -мерное многообразие при  $i \geq 2$  состоит из седловой точки и одной  $i$ -мерной сепаратрисы.

Пусть  $W^\tau(\sigma)$  — инвариантное многообразие седла  $\sigma$  размерности  $i \geq 1$ , где  $\tau$  означает символ  $u$  или  $s$ . Если  $i \geq 2$ , то обозначим через  $W_{sep}^\tau(\sigma)$  сепаратрису седла  $\sigma$ , принадлежащую  $W^\tau(\sigma)$ . Если  $i \geq 2$  (то есть, инвариантное многообразие  $W^\tau(\sigma)$  одномерное), то  $W_{sep}^\tau(\sigma)$  означает одну из двух сепаратрис, которые при необходимости мы будем обозначать через  $W_{sep,1}^\tau(\sigma)$ ,  $W_{sep,2}^\tau(\sigma)$ . Будем говорить, что сепаратриса  $W_{sep}^\tau(\sigma)$  не имеет гетероклинических пересечений, если она не пересекается с другими сепаратрисами. Напомним, что основные понятия систем Морса–Смейла можно также найти в обзоре [3].

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы достаточно построить полярный поток Морса–Смейла, поскольку сдвиг на единицу времени вдоль траекторий такого потока дает диффеоморфизм Морса–Смейла с аналогичными свойствами. Сперва мы представим  $n$ -мерную сферу в виде специального объединения и затем, используя это представление, построим требуемый поток.

**2.1. Разложения  $n$ -мерной сферы.** Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  с координатами  $(x_1, \dots, x_{n+1})$   $n$ -мерную сферу  $\mathbb{S}^n$ , заданную уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1, \quad n \geq 3.$$

Зафиксируем  $1 \leq k \leq n - 1$ , и представим  $\mathbb{R}^{n+1}$  в виде  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ , где  $\mathbb{R}^{k+1}$  определяется равенствами  $x_{k+2} = 0, \dots, x_{n+1} = 0$ , а  $\mathbb{R}^{n-k}$  — равенствами  $x_1 = 0, \dots, x_{k+1} = 0$ .

Пересечение  $\mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$  является  $k$ -мерной сферой  $\mathbb{S}_1^k \subset \mathbb{S}^n$ , задаваемой равенствами

$$\mathbb{S}_1^k : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, \quad x_{k+2} = 0, \dots, x_{n+1} = 0.$$

Эта сфера ограничивает в  $\mathbb{R}^{k+1}$  замкнутый  $(k+1)$ -мерный диск, который мы обозначим через  $\mathbb{D}_1^{k+1}$ .

Аналогично, пересечение  $\mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{n-k}$  является  $(n-k-1)$ -мерной сферой  $\mathbb{S}_2^{n-k-1} \subset \mathbb{S}^n$ , задаваемой равенствами

$$\mathbb{S}_2^{n-k-1} : x_1 = 0, \dots, x_{k+1} = 0, \quad x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Сфера  $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$  ограничивает в  $\mathbb{R}^{n-k}$  замкнутый  $(n-k)$ -мерный диск, который мы обозначим через  $\mathbb{D}_2^{n-k}$ .

Рассмотрим  $n$ -мерное многообразие  $M_1^n$ , координаты точек которого удовлетворяют условиям

$$M_1^n : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, \quad x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1.$$

Ясно, что  $M_1^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{D}_2^{n-k}$ . Положим также

$$M_2^n : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 \leq 1, \quad x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Тогда  $M_2^n = \mathbb{D}_1^{k+1} \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$ . Многообразия  $M_1^n, M_2^n$  имеют общую границу  $\partial M_1^n = \partial M_2^n$  равную их пересечению

$$M_1^n \cap M_2^n = \partial M_1^n = \partial M_2^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, \quad x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Следующее утверждение показывает, что  $n$ -мерную сферу можно представить в виде склейки вдоль границ двух специальных  $n$ -мерных многообразий.

**Предложение 1.** Объединение  $M_1^n \cup M_2^n$  гомеоморфно  $n$ -мерной сфере  $\mathbb{S}^n$ .

*Доказательство.* Для произвольной точки  $p_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n+1,0}) \in \mathbb{S}^n$  обозначим через  $l_0$  луч, выходящий из начала координат  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  и проходящий через  $p_0$ . Покажем, что  $l_0$  пересекает  $M_1^n \cup M_2^n$  в одной точке. Действительно, при увеличении параметра  $t \in [1; \infty)$  точка  $p_t = (\sqrt{t}x_1, \dots, \sqrt{t}x_{n+1})$ , начиная с точки  $p_0$ , движется по  $l_0$ , уходя в бесконечность. При этом выражение

$$\begin{aligned} w_t &= (tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{n+1,0})^2 = t^2(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2) = \\ &= (tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 + (tx_{k+2,0})^2 + \dots + (tx_{n+1,0})^2, \end{aligned}$$

начиная с 1, неограниченно увеличивается. Тогда найдется такое  $t_0 \in [1; \infty)$ , что  $w_t > 1$  и выполняется одна и только из следующих возможностей

$$\text{а) } (tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 < 1, \quad (tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 = 1;$$

- b)  $(tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 = 1$ ,  $(tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 < 1$ ;  
 c)  $(tx_{1,0})^2 + \dots + (tx_{k+1,0})^2 = 1$ ,  $(tx_{k+2,0})^2 = \dots + (tx_{n+1,0})^2 = 1$ .

В случае (а) пересечение  $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$  состоит из одной точки  $p_{t_0}$ , принадлежащей внутренности многообразия  $M_2^n$ . В случае (б) пересечение  $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$  состоит из одной точки  $p_{t_0}$ , принадлежащей внутренности многообразия  $M_1^n$ . Наконец, в случае (с), пересечение  $l_0 \cap M_1^n \cup M_2^n$  состоит из одной точки  $p_{t_0}$ , принадлежащей пересечению границ многообразий  $M_1^n$ ,  $M_2^n$ . Таким образом, соответствие  $p_0 \rightarrow p_{t_0}$  определяет отображение  $\vartheta : \mathbb{S}^n \rightarrow M_1^n \cup M_2^n$ . Аналогичные соображения показывают, что существует обратное отображение  $\vartheta^{-1} : M_1^n \cup M_2^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Ясно, что  $M_1^n \cup M_2^n$  является кусочно-линейным многообразием. Отсюда и того, что  $\vartheta : \mathbb{S}^n \rightarrow M_1^n \cup M_2^n$  является проекцией вдоль лучей вытекает, что  $\vartheta$  является гомеоморфизмом. Утверждение доказано.  $\square$

**Следствие 1.** *Имеют место следующие разложения  $n$ -мерной сферы  $\mathbb{S}^n$ :*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &= (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}) \cup (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^{n-2}) = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{D}^{n-2}) \cup (\mathbb{D}^3 \times \mathbb{S}^{n-3}) = \dots = \\ &= (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}) \cup (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1}) = \dots = (\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{D}^2) \cup (\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \end{aligned}$$

**2.2. Полярный поток с двумя седлами.** Используя представление сферы  $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^{n-k}) \cup (\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{n-k-1})$ , существующее согласно предложению 1, построим на  $\mathbb{S}^n$  кусочно гладкое векторное поле, которое будет задавать топологический поток. Мы будем использовать обозначения, введенные в предыдущем параграфе.

Сперва на  $k$ -мерной сфере  $\mathbb{S}_1^k = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$  зададим гладкое векторное поле  $\vec{v}_{1,k}$ , которое индуцирует на  $\mathbb{S}_1^k$  поток с двумя гиперболическими состояниями равновесия: источником  $N_1$  в точке  $(1, 0, \dots, 0)$  и стоком  $s_1$  в точке  $(-1, 0, \dots, 0)$ . Такой поток иногда называют потоком север-юг или источник-сток. Обозначим через  $A_1(x_1, \dots, x_{k+1})$ ,  $\dots$ ,  $A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})$  координаты поля  $\vec{v}_{1,k}$ . Другими словами,

$$\vec{v}_{1,k}(x_1, \dots, x_{k+1}) = (A_1(x_1, \dots, x_{k+1}), \dots, A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})).$$

Рассмотрим на  $M_1^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{D}_2^{n-k}$  векторное поле

$$\vec{V}_1 = (A_1(x_1, \dots, x_{k+1}), \dots, A_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}), x_{k+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Поскольку на диске  $\mathbb{D}_2^{n-k}$  векторное поле

$$\vec{v}_{k+1,n+1} = (0, \dots, 0, x_{k+2}, \dots, x_{n+1})$$

имеет в начале координат гиперболический источник, то векторное поле  $\vec{V}_1$  имеет гиперболический источник  $\alpha$  в точке  $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  и гиперболическое седло  $\sigma_1$

в точке  $(-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Ясно, что геометрически  $\alpha = N_1$  и  $\sigma_1 = s_1$ . Отметим, что седло  $\sigma_1$  имеет тип  $(n - k, k)$ . Действительно, в силу задания, векторное поле  $\vec{V}_1$  имеет отталкивающее инвариантное множество  $\mathbb{S}_1^k$ , представляющее собой объединение источника  $\alpha$  и устойчивого многообразия  $W^s(\sigma_1)$  седла  $\sigma_1$ . В силу того, что  $\mathbb{S}_1^k$  суть репеллер поля  $\vec{V}_1$ , неустойчивое многообразие седла  $\sigma_1$  содержит образ сдвига диска  $\mathbb{D}_2^{n-k}$  в точку  $\sigma_1 = (-1, 0, \dots, 0)$ . Таким образом,

$$W^s(\sigma_1) = \mathbb{S}_1^k \setminus \{\alpha\} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, \quad x_{k+2} = 0, \dots, x_{n+1} = 0, \quad x_1 \neq 1$$

$$\text{часть } W^u(\sigma_1) : x_1 = -1, x_2 = 0, \dots, x_{k+1} = 0, \quad x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1.$$

Так как векторное поле  $\vec{v}_{k+1, n+1}$  на границе  $\partial\mathbb{D}_2^{n-k}$  множества  $\mathbb{D}_2^{n-k}$  направлено наружу и трансверсально границе, то векторное поле  $\vec{V}_1$  на границе  $\partial M_1^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  множества  $M_1^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{D}_2^{n-k}$  также направлено наружу многообразия  $M_1^n$  и трансверсально границе.

Теперь построим аналогичным образом векторное поле  $\vec{V}_2$  на  $M_2^n = \mathbb{D}_1^{k+1} \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  с той лишь разницей, что инвариантное множество  $\{0\} \times \mathbb{S}_2^{n-k-1} \subset M_2^n$  будет притягивающим. На  $(n - k - 1)$ -мерной сфере  $\mathbb{S}_2^{n-k-1} \subset \mathbb{S}^n$  зададим гладкое векторное поле  $\vec{w}_{2, k+1}$ , которое индуцирует на  $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$  поток с двумя гиперболическими состояниями равновесия: источником  $s_2$  в точке  $(0, \dots, 0, 1)$  и стоком  $l_2$  в точке  $(0, \dots, 0, -1)$ . Обозначим через  $B_{k+2}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1}), \dots, B_{n+1}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1})$  координаты поля  $\vec{w}_{2, k+1}$ . Другими словами,

$$\vec{w}_{2, k+1}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1}) = (B_{k+2}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1}), \dots, B_{n+1}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1})).$$

Рассмотрим на  $M_2^n = \mathbb{D}_1^{k+1} \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  векторное поле

$$\vec{V}_2 = (-x_1, \dots, -x_{k+1}, B_{k+2}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1}), \dots, B_{n+1}(x_{k+2}, \dots, x_{n+1})).$$

Поскольку на диске  $\mathbb{D}_1^{k+1}$  векторное поле

$$\vec{v}_{k+1, n+1} = (-x_1, \dots, -x_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

имеет в начале координат гиперболический сток, то векторное поле  $\vec{V}_2$  имеет гиперболическое седло  $\sigma_2$  в точке  $(0, \dots, 0, 1)$  и гиперболический сток  $\omega$  в точке  $(0, \dots, -1)$ . Ясно, что геометрически  $\sigma_2 = s_2$  и  $\omega = l_2$ . Отметим, что седло  $\sigma_2$  имеет тип  $(n - k - 1, k + 1)$ . Действительно, в силу задания, векторное поле  $\vec{V}_2$  притягивающее инвариантное множество  $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$ , представляющее собой объединение стока  $\omega$  и неустойчивого многообразия  $W^u(\sigma_2)$  седла  $\sigma_2$ . В силу того, что  $\mathbb{S}_2^{n-k-1}$  суть аттрактор поля  $\vec{V}_2$ , устойчивое многообразие седла  $\sigma_2$  содержит образ сдвига диска  $\mathbb{D}_1^{k+1}$  в

точку  $\sigma_2 = (0, \dots, 0, 1)$ . Таким образом,

$$W^u(\sigma_2) = \mathbb{S}_2^{n-k-1} \setminus \{\omega\} : x_1 = 0, \dots, x_{k+1} = 0, x_{k+2}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

$$\text{часть } W^s(\sigma_2) : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 \leq 1, x_{k+2} = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = 1.$$

Так как векторное поле  $\vec{v}_{k+1, n+1}$  на границе  $\partial \mathbb{D}_1^{k+1}$  множества  $\mathbb{D}_1^{k+1}$  направлено внутрь и трансверсально границе, то векторное поле  $\vec{V}_2$  на границе  $\partial M_2^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  множества  $M_2^n = \mathbb{D}_1^{k+1} \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  также направлено внутрь многообразия  $M_2^n$  и трансверсально границе.

Поскольку векторное поле  $\vec{V}_1$  на общей границе  $\partial M_1^n = \partial M_2^n = \mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  направлено трансверсально границе наружу  $M_1^n$  (то есть из  $M_1^n$  внутрь  $M_2^n$ ), а векторное поле  $\vec{V}_2$  на этой общей границе направлено трансверсально границе из  $M_1^n$  внутрь  $M_2^n$ , то из предложения 1 следует, что векторные поля  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  образуют кусочно гладкое векторное поле  $\vec{V}$  на  $n$ -мерной сфере  $\mathbb{S}^n$ . Нетрудно проверить, что интегральные кривые поля  $\vec{V}$  обладают свойством единственности и существования (то есть, проходят через каждую точку сферы  $\mathbb{S}^n$ . Векторные поля такого типа иногда называют сшитыми полями (соответственно говорят о сшитых потоках).

Таким образом, мы построили полярное векторное поле с четырьмя гиперболическими состояниями равновесия: источником  $\alpha$  в точке  $(1, 0, \dots, 0)$ , стоком  $\omega$  в точке  $(0, \dots, 0, -1)$  и седлами  $\sigma_1, \sigma_2$  в точках  $(-1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \dots, 0, 1)$  соответственно. Отметим, что седла  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют разный топологический индекс

$$\text{ind}(\sigma_1) = (-1)^{n-k}, \quad \text{ind}(\sigma_2) = (-1)^{n-k-1}$$

поскольку числа  $n - k$ ,  $n - k - 1$  разной четности (нечетности). Нетрудно видеть, что инвариантные многообразия  $W^s(\sigma_1)$ ,  $W^u(\sigma_2)$  не пересекаются. Непосредственно проверяется, что части  $W^u(\sigma_1) \cap M_1^n$ ,  $W^s(\sigma_2) \cap M_2^n$  инвариантных многообразий  $W^u(\sigma_1)$ ,  $W^s(\sigma_2)$ , лежащие в  $M_1^n$  и  $M_2^n$  соответственно, пересекаются в одной точке  $(-1, 0, \dots, 0, 1)$ . Поэтому пересечение  $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$  непусто и состоит из интегральной кривой векторного поля  $\vec{V}$ , проходящей через точку  $(-1, 0, \dots, 0, 1)$ .

Теперь можно взять трубчатую окрестность общей границы  $\mathbb{S}_1^k \times \mathbb{S}_2^{n-k-1}$  с трансверсальными полю  $\vec{V}$  граничными компонентами и сгладить  $\vec{V}$  в трубчатой окрестности, сохранив  $\vec{V}$  вне этой окрестности. Тогда мы получим гладкое полярное векторное поле Морса–Смейла с четырьмя гиперболическими состояниями равновесия на сфере  $\mathbb{S}^n$ . Это построение завершает доказательство теоремы 1.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Мы докажем эту теорему только для диффеоморфизма Морса–Смейла, так как это влечет нужный результат для потока Морса–Смейла. Для удобства читателя, мы разобьем доказательство теоремы на ряд утверждений, из которых вытекает требуемый результат.

Напомним некоторые определения и факты. Пусть  $f : M \rightarrow M$  — диффеоморфизм замкнутого многообразия  $M$ , и  $p \in M$  — неподвижная гиперболическая точка диффеоморфизма  $f$ . *Индекс Кронекера–Пуанкаре* точки  $p$  есть число  $Ind_p(f) = (-1)^{\dim W^u(p)} \Delta$ , где  $\Delta$  суть  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того сохраняет или меняет ориентацию отображение  $f|_{W^u(p)}$ . Если  $\Delta = 1$ , то  $Ind_p(f)$  совпадает с *топологическим* индексом. В дальнейшем для простоты мы будем всегда считать, что  $f$  и все  $f|_{W^u(p)}$ ,  $p \in Fix(f)$ , сохраняют ориентацию. Обозначим через  $tr(f_{*k})$  след (линейного) отображения  $f_{*k} : H_k(M, \mathbb{R})$ , которое индуцируется диффеоморфизмом  $f$  в  $k$ -мерной группе гомологий  $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M)$ ,  $0 \leq k \leq \dim M$ . Если множество  $Fix(f)$  неподвижных точек диффеоморфизма  $f$  состоит из гиперболических точек, то для такого диффеоморфизма имеет место следующая формула Лефшеца

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k tr(f_{*k}) = \sum_{p \in Fix(f)} Ind_p(f).$$

Поскольку для  $n$ -мерной сферы  $\mathbb{S}^n$  имеем  $H_0(\mathbb{S}^n) = H_n(\mathbb{S}^n) = 1$ ,  $H_k(\mathbb{S}^n) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , то формула Лефшеца для диффеоморфизма Морса–Смейла сферы  $\mathbb{S}^n$  принимает следующий вид:

$$1 + (-1)^n = \sum_{p \in Fix(f)} Ind_p(f). \quad (1)$$

Известно, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса–Смейла компактного многообразия имеет хотя бы один сток и источник. Обозначим через  $\alpha_f$  и  $\omega_f$  выделенные (некоторым образом) источник и сток соответственно диффеоморфизма  $f$ . Ясно, что  $Ind_{\alpha}(f) = (-1)^n$ ,  $Ind_{\omega}(f) = 1$ . Тогда из (1) получаем

$$\sum_{p \in Fix(f) - (\alpha_f \cup \omega_f)} Ind_p(f) = 0. \quad (2)$$

Обозначим через  $MS(\mathbb{S}^n, 4)$  множество диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками. Через  $MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$  обозначим подмножество  $MS(\mathbb{S}^n, 4)$ , состоящее из диффеоморфизмов с одним источником  $\alpha$ , одним стоком  $\omega$  и двумя седлами с индексами Морса  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$ .



**Лемма 1.** *Имеет место неравенство  $\mu_1 \neq \mu_2$ .*

*Доказательство.* Для диффеоморфизма  $f \in MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$  формула (2) принимает вид

$$(-1)^{\mu_1} + (-1)^{\mu_2} = 0. \quad (3)$$

Как следствие получаем, что седла должны иметь разный индекс Морса.  $\square$

Ниже, для определенности мы будем всегда считать  $\mu_1 < \mu_2$ . Обозначим седло с индексом Морса  $\mu_i$  через  $\sigma_i$ .

Известно [13], что многообразие есть объединение попарно непересекающихся устойчивых (неустойчивых) многообразий неблуждающих гиперболических точек. Учитывая, что  $W^s(\alpha) = \alpha$  и  $W^u(\omega) = \omega$ , получаем следующие равенства для диффеоморфизма  $f \in MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ :

$$\mathbb{S}^n = W^s(\sigma_1) \cup W^s(\omega) \cup W^s(\sigma_2) \cup \alpha, \quad (4)$$

$$\mathbb{S}^n = W^u(\sigma_1) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_2) \cup \omega \quad (5)$$

**Лемма 2.** *Если  $f \in MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ , то имеют место следующие включения:*

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega), \quad W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha).$$

*Доказательство.* В силу (4), множество  $W^u(\sigma_1) - \sigma_1$  должно принадлежать  $W^s(\omega) \cup W^s(\sigma_2)$ , так как диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет гомоклинических пересечений. Из структурной устойчивости диффеоморфизма Морса–Смейла следует, что  $W^u(\sigma_1)$  не может пересекаться с  $W^s(\sigma_2)$ , поскольку пересечение должно быть трансверсальным, но многообразие  $W^u(\sigma_1)$   $\mu_1$ -мерное, а  $W^s(\sigma_2) - (n - \mu_2)$ -мерное и  $\mu_1 + (n - \mu_2) < n$ . Отсюда вытекает первое включение  $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ . Второе включение доказывается аналогично.  $\square$

**Следствие 2.** *Если  $f \in MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ , то  $S_\omega^{\mu_1} \stackrel{\text{def}}{=} W^u(\sigma_1) \cup \omega$  есть топологически вложенная  $\mu_1$ -мерная сфера, а  $S_\alpha^{n-\mu_2} \stackrel{\text{def}}{=} W^s(\sigma_2) \cup \alpha$  — топологически вложенная  $(n - \mu_2)$ -мерная сфера.*

**Лемма 3.** *Если  $f \in MS_{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{S}^n, 4)$ , то пересечение  $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$  непустое и содержит по крайней мере одно некомпактное гетероклиническое подмногообразие, содержащее в своем замыкании седла  $\sigma_1, \sigma_2$ .*

*Доказательство.* Возьмем в  $(n - \mu_1)$ -мерном многообразии  $W^s(\sigma_1)$   $(n - \mu_1 - 1)$ -мерную гладкую сферу  $S_1^{n-\mu_1-1}$  такую, что  $f(S_1^{n-\mu_1-1}) \cap S_1^{n-\mu_1-1} = \emptyset$ , и  $S_1^{n-\mu_1-1}$  ограничивает в  $W^s(\sigma_1)$   $(n - \mu_1)$ -шар (обозначим его через  $B$ ) с точкой  $\sigma_1$  внутри. Так как диффеоморфизм Морса–Смейла не имеет гомоклинических точек, то сфера  $S_\omega^{\mu_1}$  пересекается с

$B$  ровно в одной точке  $\sigma_1$ . Поэтому коэффициент зацепления  $S_\omega^{\mu_1}$  с  $(n - \mu_1 - 1)$ -мерной сферой  $S_1^{n-\mu_1-1}$  равен  $+1$  или  $-1$  (в зависимости от выбора ориентации). Для доказательства леммы достаточно показать, что какую бы сферу  $S_1^{n-\mu_1-1}$  с указанными выше свойствами ни взять, она должна пересекаться с  $W^u(\sigma_2)$ .

Предположим, что существует  $S_1^{n-\mu_1-1}$  такая, что  $S_1^{n-\mu_1-1} \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$ . Тогда, согласно (5),  $S_1^{n-\mu_1-1} \subset W^u(\alpha)$ . Известно [13], что неустойчивое многообразие  $W^u(\alpha)$  источника диффеоморфно  $\mathbb{R}^n$ . Из  $\mu_1 < \mu_2$  вытекает, что  $\mu \neq n-1$ . Поэтому  $(n - \mu_1 - 1)$ -мерная группа гомологий многообразия  $W^u(\alpha)$  равна нулю,  $H_{n-\mu_1-1}(W^u(\alpha)) = 0$ , так как  $n - \mu_1 - 1 \neq 0$ . Следовательно,  $S_1^{n-\mu_1-1}$  гомологична незаузленной топологически вложенной сфере, скажем  $S_2^{n-\mu_1-1} \subset W^u(\alpha)$ , на которую можно натянуть  $(n - \mu_1)$ -шар, лежащий в  $W^u(\alpha)$ . Но поскольку  $S_\omega^{\mu_1} = W^u(\sigma_1) \cup \omega$  и  $W^u(\alpha)$  не пересекаются, то коэффициент зацепления  $S_\omega^{\mu_1}$  с  $S_2^{n-\mu_1-1}$  равен нулю. Так как коэффициент зацепления не меняется при переходе к гомологическим сферам [7], стр. 152, то коэффициент зацепления  $S_\omega^{\mu_1}$  с  $S_1^{n-\mu_1-1}$  также равен нулю. Полученное противоречие доказывает лемму.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А. Грубые системы / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин // Итоги науки и техники, серия матем. анализ. — 1937. — Т. 14, вып. 5. — С. 247–250.  
ANDRONOV, A. A., and PONTRYAGIN, L. S. (1937) Rough systems. *Doklady Acad. Sci. USSR*. Vol. 14, no. 5. p. 247–250.
2. Аносов Д. В. Исходные понятия. Элементарная теория / Д. В. Аносов // В сб. серии «Современные проблемы математики», Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), *Дин. системы - 1* (под ред. Д. В. Аносова). — 1985. — Т. 1. — С. 156–178; 178–204.  
ANOSOV D. V. (1970) On one class of invariant sets of smooth dynamical systems. *Proc. Int. Conf. "Nonlinear Oscillations", Qualitative Methods, Kiev*. Vol. 2. p. 39–45.
3. Гринес В. З. Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий / В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, О. В. Починка // Успехи матем. наук. — 2019. — 74, вып. 1. — С. 41–116.  
GRINES V., GUREVICH E., POCHINKA O., and ZHUZHOMA E. (2019) Classification of Morse–Smale systems and topological structure of the underlying manifolds. *Russian Math. Surveys*. Vol.74, no. 1. p. 37–110.
4. Гринес В. З. О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодически ми точками на замкнутых ориентируемых многообразиях / В. З. Гринес,

- Е. В. Жужома, В. С. Медведев // Матем. заметки. — 2003. — 74, вып. 3. — С. 369–386.
- GRINES V., MEDVEDEV V., and ZHUZHOMA E. (2003) On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed orientable manifolds. *Math. Notes*. Vol. 74, no. 3. p. 352–366.
5. Жужома Е. В. Глобальная динамика систем Морса–Смейла / Е. В. Жужома, В. С. Медведев // Труды МИАН. — 2008. — 261. — С. 115–139.
- MEDVEDEV V., ZHUZHOMA E. (2008) Global dynamics of Morse–Smale systems. *Proc. Steklov Inst. of Math.* Vol. 261. p. 112–135.
6. Жужома Е. В. Непрерывные потоки Морса–Смейла с тремя состояниями равновесия / Е. В. Жужома, В. С. Медведев // Матем. сб. — 2016. — 207, вып. 5. — С. 69–92.
- MEDVEDEV V., ZHUZHOMA E. (2016) Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium positions. *Sb. Math.* Vol. 207. p. 702–723.
7. Фоменко А. Т. Курс Гомотопической Топологии / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. — М: Наука, 1989. — 528 с.
- FOMENKO A. T., FUKS D. B. (1989) *Lectures on Homotopic Topology*. М.: Nauka.
8. ABRAHAM R., SMALE S. (1970) Nongeneracy of  $\Omega$ -stability. *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. 14. p. 5–8.
9. ARANSON S., BELITSKY G., ZHUZHOMA E. (1996) *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*. Translations of Math. Monographs. Amer. Math. Soc.
10. MEDVEDEV V., ZHUZHOMA E. (2013) Morse–Smale systems with few non-wandering points. *Topology and its Applications*. Vol. 160, issue 3. p. 498–507.
11. NIKOLAEV I., ZHUZHOMA E. (1999) *Flows on 2-dimensional manifolds*. Lect. Notes in Math. 1705, Springer.
12. SMALE S. (1960) Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 66. p. 43–49.
13. SMALE S. (1967) Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 73 (1). p. 741–817.

УДК: 517.9, 531.38

MSC2010: 00A69, 35D05

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ГИБКОМ СТЕРЖНЕ

© Е. П. Кубышкин, А. И. Пахомов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Советская ул., 14, Ярославль, 150003, Российская Федерация

E-MAIL: *kubysh.e@yandex.ru*, *aleksandr.pakhomov98@gmail.com*

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF ROTATION OF A RIGID BODY ON A FLEXIBLE  
ROD.

Kubyshkin E. P., Pahomov A. I.

**Abstract.** The stability of rotation of a symmetrical rigid body on a vertical flexible rod (shaft) is investigated. Both ends of the shaft are secured from offsets. The lower end of the shaft is supported by a bearing, and the bearing of the upper end is attached to an elastic ring plate, pinched along the outer diameter. This is one of the designs of a real-life centrifuge. The shaft material is considered inherently viscoelastic. The equations of motion of the flexible shaft are constructed within the framework of the linear Euler–Bernoulli model. The mathematical model of the mechanical system under consideration is an initial boundary value problem for partial differential equations and an infinite (integral) delay of the argument. The boundary conditions contain the highest time derivatives and the time lag. The concept of a generalized solution of an initial boundary value problem is introduced as a solution to some variational problem, functional spaces for initial conditions and a generalized solution are defined. The existence of a generalized solution, its uniqueness and continuous dependence on the initial conditions and parameters of the initial boundary value problem are proved. The stability of solutions of the initial boundary value problem is investigated depending on the main parameters of the mathematical model — the rotation speed and the coefficient of external friction. In the plane of the main parameters, the stability domains of solutions to the initial boundary value problem are constructed by the D-partitioning method. Mechanisms of stability loss are investigated. It is shown that the loss of stability of solutions can be caused by the passage of one or two pairs of complex conjugate points of the spectrum of the characteristic beam of operators through the imaginary axis of the complex plane.

**Keywords:** *otary systems, initial-boundary value problem for partial differential equations and lagging argument, functional differential equations, stability of solutions, D-partitioning method.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача исследования устойчивости вращения твердого тела на вертикальном гибком стержне (валу). Практическая значимость рассматриваемой задачи связана с проектированием и расчетом высокоскоростных центрифуг. Если рабочие угловые скорости ротора центрифуги лежат выше некоторых критических значений, возникает вопрос устойчивости вращения, а также характера потери устойчивости. Потеря устойчивости может привести к возникновению как «мягкого» (чаще всего это прецессии), так и «жесткого» режимов возникновения периодических колебаний, а также к возникновению режимов биений и хаотических колебаний. Последние три варианта является наиболее опасными. Рассматриваемая задача также имеет важное теоретическое значение, так как моделирует динамическое поведение валов, являющихся важнейшими элементами многих машин. Важной составляющей в построении модели динамики распределенных валов является модель внутреннего трения материала. В настоящей работе рассматривается модель наследственно вязкоупругого тела [1]. Опишем рассматриваемую систему.

Механическая система состоит из вертикально расположенного однородного гибкого вала длины  $l$  постоянного круглого сечения диаметра  $d$  с прикрепленным на верхнем конце однородным твердым телом круглого сечения длины  $L$  диаметра  $D$ . Оба конца вала закреплены от смещений. Нижний конец вала опирается на подшипник, а подшипник верхнего конца крепится на упругой кольцевой пластине, защемленной по внешнему диаметру. Это одна из конструкций реально существующей центрифуги. Оси вала и твердого тела совпадают. Механическая система вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Общий вид системы приведен на рис. 1.

Введем инерциональную ортогональную систему координат  $OXYZ$ , расположив начало координат в нижней точке опоры вала и направив ось  $OX$  вдоль средней оси недеформированного вала. Смещения точек средней оси гибкого вала в направлении осей  $OY$  и  $OZ$  в момент времени  $t$  обозначим, как  $y(x, t)$  и  $z(x, t)$  соответственно. Предполагаем, что материал вала является наследственно вязкоупругим и подчиненным следующей реологической модели [1]:

$$\sigma(t) = (I - \mu\Gamma)\varepsilon(t) \equiv E(\varepsilon(t) - \mu \int_{-\infty}^0 R(\tau)\varepsilon(t + \tau)d\tau), \quad (1)$$

где  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$  соответственно напряжение и относительная деформация в момент времени  $t$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $0 < \mu < 1$ . Непрерывная функция релаксации



Рис. 1. Модель исследуемой системы.

$R(\tau)$ ,  $-\infty < \tau < 0$ , удовлетворяет следующим условиям

$$R(\tau) > 0, \int_{-\infty}^0 R(\tau) d\tau = 1, R(\gamma\tau_1 + (1-\gamma)\tau_2) < \gamma R(\tau_1) + (1-\gamma)R(\tau_2), 0 < \gamma < 1, \quad (2)$$

т. е. выпуклая вниз. Существуют такие  $0 < \alpha < 1$ ,  $K, p, \delta > 0$ , что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau)|\tau|^\alpha = \text{const}, R(\tau) < Ke^{-p|\tau|^{1+\delta}}, \tau \rightarrow -\infty, \quad (3)$$

Первое условие (3) было введено в [1], смысл второго будет определен в дальнейшем.

Уравнения движения рассматриваемой системы в рамках гипотез Эйлера–Бернулли и линейном приближении, а также соответствующие краевые условия будут иметь вид [2]

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_0 \frac{\partial v}{\partial t} + EI(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (4)$$

где  $v(x, t) = y(x, t) + iz(x, t)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,

$$EI(I - \mu\Gamma(i\Omega))\varepsilon(t) \equiv EI(\varepsilon(t) - \mu \int_{-\infty}^0 R(s)e^{-i\Omega s} \varepsilon(t+s) ds), \quad (5)$$

и

$$v \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad v \Big|_{x=l} = 0,$$

$$EI(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = -MJ \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l} - a_0 S_1 J \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{x=l} - c \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l}. \quad (6)$$

В (4)–(6)  $\rho$  — плотность материала вала,  $S$  — площадь поперечного сечения вала,  $I$  — момент инерции сечения вала относительно оси, проходящих через центр сечения,  $\Omega$  — угловая скорость вращения вала,  $a_0$  — коэффициент вязкого трения,  $M$  — масса твердого тела,  $MJ$  — момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через точку крепления с валом,  $S_1$  — коэффициент, характеризующий геометрические свойства твердого тела,  $c$  — коэффициент жесткости упругой опоры,  $l$  — длина вала.

Начальные условия для (4)–(6) будут определены ниже. Уравнение (4) согласно (5) является дифференциальным уравнением с бесконечным (интегральным) запаздыванием аргумента. Отметим, что в [2] получены нелинейные уравнения динамики распределенного вала, учитывающие нелинейную геометрию задачи и нелинейную реологическую модель материала вида (1). Эти уравнения также приведены в [3]. Для решения рассматриваемой в работе задачи исследования устойчивости вращения достаточно рассмотрение модели (4)–(6).

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Перейдем в (4)–(6) к безразмерным переменным, положив

$$x = lx', v = lv', t = t_0 t', t_0 = \left( \frac{\rho S}{EI} \right)^{1/2} l^2, \omega = \omega' / t_0, \tau = t_0 \tau', R'(\tau') = t_0 R(t_0 \tau'),$$

$$L = L' \ell, D = D' \ell, J = J' l^2 = \left( \frac{L'^2}{3} + \frac{D'^2}{16} \right) l^2, M' = \frac{M}{\rho S l}, c' = \frac{c l^3}{EI}, a'_0 = \frac{a_0 l^4}{E I t_0}.$$

Опустив знак штрих, получим уравнения движения и краевые условия в безразмерных переменных

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_0 \frac{\partial v}{\partial t} + (I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \quad (7)$$

$$v \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad v \Big|_{x=1} = 0,$$

$$(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = -MJ \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=1} - a_0 S_1 J \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} - c \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1}. \quad (8)$$

Дополнив (7)–(8) начальными условиями

$$v(x, t + s) \Big|_{t=0} = v_0(x, s) \in D(\bar{Q}_-), \quad v_1(x, 0) = \dot{v}_0(x) \in H^2(0, 1), \quad (9)$$

в области  $\bar{Q}_- = \{0 \leq x \leq 1, -\infty < s \leq 0\}$ , где  $D(\bar{Q}_-)$  и  $H^2(0, 1)$  функциональные пространства начальных условий, получим начально-краевую задачу, определяющую динамику рассматриваемой механической системы. Конкретный вид функциональных пространств  $D(\bar{Q}_-)$  и  $H^2(0, 1)$  будет определен ниже, точка над функцией  $\dot{v}_0(x)$  используется как обозначение.

Положим в (7)–(8)  $a_0 = 0$ ,  $\mu = 0$  и построим семейство решения вида  $v(x, t) = \nu(x) \exp(i\omega t)$ . В результате для определения получим  $\nu(x)$  получим спектральную краевую задачу

$$\nu^{IV}(x) = \omega^2 \nu(x) \quad (10)$$

$$\nu(0) = \nu'(0) = 0, \quad \nu(1) = 0, \quad \nu''(1) = \omega^2 M J \nu'(1) - c \nu'(1). \quad (11)$$

Отметим некоторые свойства собственных значений и собственных функций спектральной краевой задачи (10)–(11). Если  $\nu_*(x)$ ,  $\nu_{**}(x)$  и  $\omega_*^2$ ,  $\omega_{**}^2$  ( $\omega_*^2 \neq \omega_{**}^2$ ) собственные функции и соответствующие им собственные значения (10)–(11), то из равенств

$$\omega_*^2 (\nu_*(x) \nu_{**}(x))_{L_2} = (\nu_*^{IV}(x), \nu_{**}(x))_{L_2} = (-\omega_*^2 M J + c) \nu'_*(1) \nu'_{**}(1) + (\nu_*''(x) \nu_{**}''(x))_{L_2},$$

$$\omega_{**}^2 (\nu_{**}(x) \nu_*(x))_{L_2} = (\nu_{**}^{IV}(x), \nu_*(x))_{L_2} = (-\omega_{**}^2 M J + c) \nu'_{**}(1) \nu'_*(1) + (\nu_{**}''(x) \nu_*''(x))_{L_2},$$

с учетом краевых условий (11) имеем, что все  $\omega_*^2 > 0$  и

$$\begin{aligned} \omega_*^2 (\nu_*(x), \nu_{**}(x))_H &= \omega_*^2 ((\nu_*(x), \nu_{**}(x))_{L_2} + M J \nu'_*(1) \nu'_{**}(1)) = \\ &= c \nu'_*(1) \nu'_{**}(1) + (\nu_*''(x) \nu_{**}''(x))_{L_2} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $(u(x), v(x))_{L_2} = \int_0^1 u(x) \bar{v}(x) dx$  — скалярное произведение в  $L_2(0, 1)$ . Отметим, что  $(u(x), v(x))_H$  удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Рассмотрим построение собственных и собственных функций спектральной краевой задачи (10)–(11). Положим  $\omega = \beta^2$  и будем строить  $\nu(x)$  в виде

$$\nu(x) = A \operatorname{ch}(\beta x) + B \operatorname{sh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x). \quad (13)$$

Подставив (13) в (11), получим относительно  $A, B, C, D$  систему линейных уравнений

$$A + C = 0, \quad B + D = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{ch}(\beta)A + \operatorname{sh}(\beta)B + \cos(\beta)C + \sin(\beta)D = 0,$$



$$(\beta^2 \operatorname{ch}(\beta) - \beta(\beta^4 MJ - c) \operatorname{sh}(\beta))A + (\beta^2 \operatorname{sh}(\beta) - \beta(\beta^4 MJ - c) \operatorname{ch}(\beta))B - \\ - (\beta^2 \cos(\beta) - \beta(\beta^4 MJ - c) \sin(\beta))C - (\beta^2 \sin(\beta) + \beta(\beta^4 MJ - c) \cos(\beta))D = 0.$$

Из (14) следует  $A = -C$ ,  $B = -D$ . В результате имеем для определения  $A$  и  $B$  линейную алгебраическую систему с матрицей  $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ , элементы которой имеют вид

$$a_{11} = \cos(\beta) - \operatorname{ch}(\beta), a_{12} = \sin(\beta) - \operatorname{sh}(\beta), \\ a_{21} = \beta(\beta^4 MJ - c)(\operatorname{sh}(\beta) + \sin(\beta)) - \beta^2(\operatorname{ch}(\beta) + \cos(\beta)), \\ a_{22} = \beta(\beta^4 MJ - c)(\operatorname{ch}(\beta) - \cos(\beta)) - \beta^2(\operatorname{sh}(\beta) + \sin(\beta)),$$

определитель которой определяет характеристическое уравнение

$$P(\beta) \equiv (\beta^4 MJ - c)(\operatorname{ch}(\beta) \cos(\beta) - 1) + \beta \sin(\beta)(\operatorname{ch}(\beta) - \operatorname{sh}(\beta)) = 0, \quad (15)$$

положительные корни  $\beta_j$  которого определяют множество собственных значений  $\omega_j^2 = \beta_j^4$  спектральной краевой задачи (10)–(11).

Выбрав теперь решения системы линейных уравнений  $A_j, B_j, C_j, D_j$  таким образом, чтобы

$$(\nu_j(x), \nu_k(x))_H = \delta_{jk} \quad (16)$$

(такой выбор единственный), получим полную ортонормированную в смысле скалярного произведения (12) систему собственных функций.

Используя построенную систему функций  $\nu_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , введем следующие функциональные пространства. Обозначим через  $H(0, 1)$  гильбертово пространство комплекснозначных функций  $u(x)$  вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \nu_n(x), \quad z_n \in \mathbb{C}, \quad z = (z_1, z_2, \dots) \in l_2, \quad \|z\|_{l_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

$$u_1(x), u_2(x) \in H(0, 1), \quad (u_1(x), u_2(x))_H = \sum_{n=1}^{\infty} z_{1n} \bar{z}_{2n}, \quad \|u(x)\|_H = (u(x), u(x))_H^{1/2},$$

$$H^j(0, 1) = \{u(x) : u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \nu_n(x), \quad \|u(x)\|_{H^j} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j |z_n|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

$$u_1(x), u_2(x) \in H^j(0, 1), \quad (u_1(x), u_2(x))_{H^j} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j z_{1n} \bar{z}_{2n}\},$$

$$H^j(0, 1) \subset H(0, 1) \subset L_2(0, 1),$$

$$D = \{u(x, \tau) : (x, \tau) \in \bar{Q}_-, \quad u(x, \tau) \in H^4(0, 1), \quad \forall \tau, \quad e^{-p|\tau|^{1+\delta_1}} \|u(x, \tau)\|_{H^4} \in C(-\infty, 0], \\ \|u(x, \tau)\|_D = \sup_{\tau} e^{-p|\tau|^{1+\delta_1}} \|u(x, \tau)\|_{H^4} < \infty, \quad 0 < \delta_1 < \delta\}. \quad (17)$$

Обозначим через  $H(Q_T)$  и  $H^4(Q_T)$  пространства комплекснозначных непрерывных в  $\bar{Q}_T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  функций  $u(x, t) \in H(0, 1)$  и  $u(x, t) \in H^4(0, 1)$  соответственно при каждом  $t$ , норма в которых определена как  $\|u(x, t)\|_{H(Q_T)} = \max_t \|u(x, t)\|_H$  и  $\|u(x, t)\|_{H^4(Q_T)} = \max_t \|u(x, t)\|_{H^4}$ .

Умножим уравнение (7) на функцию  $w(x) \in H^4(0, 1)$  и проинтегрируем по  $x \in [0, 1]$  с учетом краевых условий (8) получим интегральное соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, w(x)\right)_H + a_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w(x)\right)_{L_2} + ((I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, w''(x))_{L_2} + \\ & + (a_0 S_1 J \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} + c \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1}) \bar{w}'(1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Под решением начально-краевой задачи (7)–(9), определенном при  $t \geq 0$  будем понимать непрерывную по совокупности переменных функцию  $v(x, t+s)$ ,  $(x, s) \in \bar{Q}_-$ , дважды непрерывно дифференцируемую по  $t+s > 0$ , принадлежащую  $H^4(0, 1)$  при каждом  $t+s > 0$ , обращающую соотношение (18) в тождество для любой функции  $w(x) \in H^4(0, 1)$  и удовлетворяющую начальным условиям (9).

Преобразуем соотношение (18), добавив и вычтя выражения

$$+ a_0 M J \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} \bar{w}'(1), \quad c \mu \Gamma(i\Omega) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} \bar{w}'(1).$$

В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, w(x)\right)_H + a_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w(x)\right)_H + ((I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, w''(x))_{L_2} + c(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} \bar{w}'(1) + \\ & + (a_0 S_1 (J - M) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \Big|_{x=1} + c \mu \Gamma(i\Omega) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1}) \bar{w}'(1) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, w(x)\right)_H + a_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w(x)\right)_H + ((I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, w''(x))_{L_2} + \\ & + c(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} \bar{w}'(1) = (f(x, t), w(x))_H, \end{aligned} \quad (20)$$

в котором функция  $f(x, t)$  непрерывна по совокупности переменных области  $\bar{Q}_+ = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$  и  $f(x, t) \in H(0, 1)$  при каждом  $t$ . Представив  $f(x, t)$  и определяя решение (20) с начальными условиями (9) в виде разложений

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \nu_k(x), \quad f_k(t) = (f(x, t), \nu_k(x))_H, \quad v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \nu_k(x), \quad (21)$$

подставим (21) в (20). Спроектируем полученное равенство на базисные функции  $\nu_n(x), n = 1, 2, \dots$  в пространстве  $H$ . В результате с учетом равенства (12) получим последовательность дифференциальных уравнений и начальных условий вида

$$\ddot{u}_n(t) + a_0 \dot{u}_n(t) + \omega_n^2 (I - \mu \Gamma(i\Omega)) u_n(t) = f_n(t), \quad (22)$$

$$u_n(0, s) = u_{0n}(s) = (u_0(x, s), \nu_n(x))_H, \quad \dot{u}_n(0) = \dot{u}_{0n} = (\dot{u}_0(x), \nu_n(x))_H, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Построим решение (22), (23), используя преобразование Лапласа. Применяя в (22) преобразование Лапласа, получим для  $U_n(p)$ , образа  $u_n(t)$  ( $U_n(p) \doteq u_n(t)$ ), уравнение

$$\begin{aligned} P_n(p)U_n(p) &\equiv (p^2 + a_0p + \omega_n^2(I - \mu\Gamma(i\Omega - p))1)U_n(p) = \\ &= pu_{0n}(0) + \dot{u}_{0n} - \omega_n^2\mu \int_{-\infty}^0 R(s)e^{(-i\Omega+p)s} \int_s^0 u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 ds + F_n(p), \end{aligned} \quad (24)$$

в котором  $F_n(p) \doteq f_n(t)$ ,  $P_n(p)$  характеристические уравнения (22), которое согласно второго условия (3) является аналитической функцией во всей комплексной плоскости. Из (24) находим

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} U_n(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} P_n^{-1}(p)(pu_{0n}(0) + \\ &+ \dot{u}_{0n} - \omega_n^2\mu \int_{-\infty}^0 R(s)e^{(-i\Omega+p)s} \int_s^0 u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 ds + F_n(p))e^{pt} dp, \quad \text{Re} p > x_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем в рассмотрение функции Коши  $k_n(t)$ , как решения уравнений

$$\ddot{k}_n(t) + a_0 \dot{k}_n(t) + \omega_n^2 (I - \mu \Gamma(i\Omega)) k_n(t) = 0$$

с начальными условиями вида

$$k_n(0, s) = 0, \quad -\infty < s \leq 0, \quad \dot{k}_n(0) = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Согласно (26)

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0-\infty}^{x_0+\infty} P_n^{-1}(p)e^{pt} dp, \quad \text{Re} p > x_0. \quad (27)$$

Введем функцию

$$e_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

и используя функцию  $k_n(t)$ , свойства преобразования Лапласа, преобразуем правую часть (25).

Заметим, что

$$\begin{aligned} P_n^{-1}(p)e^{ps} \int_s^0 u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 &= P_n^{-1}(p)e^{ps} \int_s^\infty e_0(-s_1)u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 = \\ &= \int_s^\infty k_n(t+s)e^{-ps} ds \int_s^0 u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 = \int_{-s}^\infty k_n(t+s)e^{-ps} ds \int_s^0 u_{0n}(s_1)e^{-ps_1} ds_1 \doteq \\ &= \int_s^t k_n(t+s-s_1)e_0(-s_1)u_{0n}(s_1) ds_1 = \int_s^0 k_n(t+s-s_1)u_{0n}(s_1) ds_1. \end{aligned}$$

С учетом этого, правую часть (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \dot{k}_n(0)u_{0n}(0) - \omega_n^2 \mu \int_0^\infty R(s)e^{-i\Omega s} \int_s^0 k_n(t+s-s_1)u_{0n}(s_1) ds_1 ds + \\ &+ k_n(0)\dot{u}_{0n} + \int_0^t k_n(t-\tau)f_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставив теперь (28) в (21), получим решение (20) с начальными условиями (9), которое, введя функцию

$$K(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^\infty k_n(t)\nu_n(x)\nu_n(\xi),$$

запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} v(x, t) &= (K_t(t, x, \xi), v_0(\xi, 0))_H - \mu \int_0^\infty R(s)e^{-i\Omega s} \int_s^0 (K(t+s-s_1, x, \xi), v_0(\xi, s_1))_{H^2} ds_1 ds + \\ &+ (K(t, x, \xi), \dot{v}_0(\xi))_{H^2} + \int_0^t (K(t-\tau, x, \xi), f(\xi, \tau))_H d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом согласно (2), (17), (27) для каждого  $T > 0$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|v(x, t)\|_{H^4(Q_T)} &\leq C_T (\|v_0(x, s)\|_D + \|\dot{v}_0(x)\|_{H^2} + \int_0^t \|f(x, \tau)\|_H d\tau), \\ \int_0^t \|f(x, \tau)\|_H d\tau &\leq T \|f(x, t)\|_{H(Q_T)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $C_T$  постоянная.

Построим теперь решение уравнения (19). Заметим следующее. Согласно (12), (16) для  $v(x), w(x) \in H^4(0, 1)$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} \bar{w}'(1) = -\frac{1}{MJ}(v(x), w(x))_{L_2}. \quad (31)$$

При фиксированной  $v(x) \in L_2(0, 1), w(x) \in H^4(0, 1)$   $(v(x), w(x))_{L_2}$  является линейным непрерывным функционалом в  $L_2(0, 1), H(0, 1), H^4(0, 1)$ , т. к.

$$|(v(x), w(x))_{L_2}| \leq \gamma \|w(x)\|_{L_2} \leq \gamma \|w(x)\|_H \leq \|w(x)\|_{H^4}. \quad (32)$$

Рассматривая  $(v(x), w(x))_{L_2}$  как функционал в  $H(0, 1)$  представим его в виде  $(u(x), w(x))_H, u(x) \in H(0, 1)$  (теорема Рисса, см., например, [4]). Таким образом, существует линейный ограниченный оператор

$$G : L_2(0, 1) \rightarrow H(0, 1), \quad Gv(x) = u(x), \quad \|G\| \leq G_0, \quad (v(x), w(x))_{L_2} \equiv \\ \equiv (Gv(x), w(x))_H \equiv (u(x), w(x))_H. \quad (33)$$

Соотношение (19) с учетом (31), (33) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, w(x)\right)_H + a_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w(x)\right)_H + ((I - \mu\Gamma(i\Omega)) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, w''(x))_{L_2} + c(I - \mu\Gamma(i\Omega)) \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=1} \bar{w}'(1) - \\ - a_0 S_1 (M^{-1} - J^{-1}) \left(G \frac{\partial v}{\partial t}, w(x)\right)_H - c(JM)^{-1} \mu (G\Gamma(i\Omega)v, w(x))_H = 0. \quad (34)$$

Согласно (29) решение (34) с начальными условиями (9) представимо в виде

$$v(x, t) = (K_t(t, x, \xi), v_0(\xi, 0))_H - \mu \int_0^\infty R(s) e^{-i\Omega s} \int_s^0 (K(t + s - s_1, x, \xi), v_0(\xi, s_1))_{H^2} ds_1 ds + \\ + (K(t, x, \xi), v_0(\xi))_H - a_0 S_1 (M^{-1} - J^{-1}) \int_0^t (K(t - \tau, x, \xi), Gv_\tau(\xi, \tau))_H d\tau + \\ + c(JM)^{-1} \mu \int_0^t (K(t - \tau, x, \xi), G\Gamma(i\Omega)v(\xi, \tau))_H d\tau.$$

Интегрируя по частям, преобразуем

$$\int_0^t (K(t - \tau, x, \xi), Gv_\tau(\xi, \tau))_H d\tau = -(K(t, x, \xi), Gv_0(\xi, 0))_H d\tau + \int_0^t (K_t(t - \tau, x, \xi), Gv(\xi, \tau))_H d\tau.$$

В результате для определения  $v(x, t)$  имеем интегральное уравнение

$$v(x, t) = (K_t(t, x, \xi), v_0(\xi, 0))_H - \mu \int_0^\infty R(s) e^{-i\Omega s} \int_s^0 (K(t+s-s_1, x, \xi), v_0(\xi, s_1))_{H^2} ds_1 ds + \\ + a_0 S_1 (M^{-1} - J^{-1}) (-(K(t, x, \xi), Gv_0(\xi, 0))_H + \int_0^t (K_t(t-\tau, x, \xi), Gv(\xi, \tau))_H d\tau) + \\ + (K(t, x, \xi), v_0(\xi))_H + c(JM)^{-1} \mu \int_0^t (K(t-\tau, x, \xi), G\Gamma(i\Omega)v(\xi, \tau))_H d\tau. \quad (35)$$

Для построения решения (35) построим итерационный процесс

$$v^{(k+1)}(x, t) = (K_t(t, x, \xi), v_0(\xi, 0))_H - \mu \int_0^\infty R(s) e^{-i\Omega s} \int_s^0 (K(t+s-s_1, x, \xi), v_0(\xi, s_1))_{H^2} ds_1 ds + \\ + a_0 S_1 (M^{-1} - J^{-1}) (-(K(t, x, \xi), Gv_0(\xi, 0))_H + \int_0^t (K_t(t-\tau, x, \xi), Gv^{(k)}(\xi, \tau))_H d\tau) + \\ + (K(t, x, \xi), v_0(\xi))_H + c(JM)^{-1} \mu \int_0^t (K(t-\tau, x, \xi), G\Gamma(i\Omega)v^{(k)}(\xi, \tau))_H d\tau, \quad (36)$$

$$v^{(0)}(\xi, \tau) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Согласно (2), (30), (32), (33) имеем

$$\|v^{(k+1)}(x, t) - v^{(k)}(x, t)\|_{H^4(Q_T)} \leq G_T \int_0^t \|v^{(k)}(x, \tau) - v^{(k-1)}(x, \tau)\|_{H^4} d\tau, \\ \|v^{(1)}(x, t)\|_{H^4(Q_T)} \leq G_0, \quad (37)$$

где  $G_T$  и  $G_0$  некоторые постоянные, которые легко могут быть выписаны по правым частям (30), (36). Из (37) имеем

$$\|v^{(2)}(x, t) - v^{(1)}(x, t)\|_{H^4(Q_T)} \leq G_0 G_T t, \quad \|v^{(3)}(x, \tau) - v^{(2)}(x, \tau)\|_{H^4} \leq G_0 (G_T t)^2 / 2!, \dots, \\ \|v^{(n+1)}(x, \tau) - v^{(n)}(x, \tau)\|_{H^4} \leq G_0 (G_T t)^n / n!, \dots$$

Отсюда имеем, что ряд

$$\|v^{(n+1)}(x, t) - v^{(1)}(x, t)\|_{H^4(Q_T)} = \sum_{k=1}^n \|v^{(k+1)}(x, \tau) - v^{(k)}(x, \tau)\|_{H^4} \leq \sum_{k=1}^n G_0 (G_T t)^k / k! < \infty$$

сходится. Предельная функция  $v^*(x, t)$ ,  $(\lim_{n \rightarrow \infty} \|v^{(n)}(x, t) - v^*(x, t)\|_{H^4(Q_T)} = 0)$  удовлетворяет интегральному уравнению (35) и является, как легко заметить по виду его правой части, дважды непрерывно дифференцируемой по  $t$  функцией. Единственность решения и непрерывная зависимость от начальных условий следует из (35), (37). В результате имеем решение соотношений (34), (19) и начально-краевой задачи (7)–(9).

### 3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (7)–(9)

Определяя решение начально-краевой задачи (7)–(9)  $v(x, t)$  как решение соотношения (19) в виде (21), спроектируем (19) базисные функции  $\nu_n(x), n = 1, 2, \dots$  в пространстве  $H$ . В результате получим последовательность дифференциальных уравнений и начальных условий вида

$$\dot{u}_n(t) + a_0 \dot{u}_n(t) + \omega_n^2 (I - \mu \Gamma(i\Omega)) u_n(t) + \tag{38}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_0 S_1 (J - M) \dot{u}_k(t) + c \mu \Gamma(i\Omega) u_k(t)) \nu'_k(1) \nu'_n(1) = 0, n = 1, 2, \dots \tag{39}$$

Отметим следующее. Характеристическое уравнение (15) при  $\beta \rightarrow \infty$  принимает вид  $P(\beta) = (\text{ch}(\beta) \cos(\beta) - 1) + O(\beta^{-3}) = 0$ , т. е. близко к характеристическому уравнению, определяющему собственные значения балочных функций, заземленных с двух концов, для которых  $\nu_n(1) = \nu'_n(1) = 0$  [5]. В связи с этим большинство слагаемых в (39) близки к нулю. При больших  $n$  определяющей является часть уравнения для  $u_n(t)$ , которая представлена в (38). В связи с этим рассмотрим конечное число уравнений, считая  $n = 1, 2, \dots, N$ . Устойчивость решений такой системы уравнений определяет характеристическое уравнение

$$Q_N(\lambda) = \det P_N(\lambda) = 0, P_N(\lambda) = \{p_{nk}(\lambda)\}_{n,k=1,\dots,N}, \tag{40}$$

$$p_{nn}(\lambda) = \lambda^2 + a_0(1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)\lambda + \omega_n^2(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)) \int_{-\infty}^0 R(s)e^{(-i\Omega+\lambda)s} ds, \tag{41}$$

$$p_{nk}(\lambda) = (a_0 S_1 (J - M) \lambda + c \mu \int_{-\infty}^0 R(s) e^{(-i\Omega+\lambda)s} ds) \nu'_k(1) \nu'_n(1), n \neq k. \tag{42}$$

Построим в плоскости параметров  $(a_0, \Omega)$  области устойчивости решений системы уравнений (38), (39) и воспользуемся для этого методом  $D$ -разбиений [6]. Рассмотрим сначала уравнение  $p_{nn}(\lambda) = 0$ . При больших  $n$  именно оно определяет поведение  $u_n(t)$ .

Положив в уравнении  $\lambda = i\sigma, -\infty < \sigma < \infty$  и выделив вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\sigma^2 + \omega_n^2(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(-\Omega + \sigma)) &= 0, \\ a_0(1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)\sigma + \omega_n^2\mu E_s(-\Omega + \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (43)$$

где использовано обозначение

$$E_c(\sigma) = \int_0^\infty R(-s)\cos(\sigma s)ds, \quad E_s(\sigma) = \int_0^\infty R(-s)\sin(\sigma s)ds.$$

Положив  $\sigma_1 = -\Omega + \sigma$ , выразим из (43)  $a_0$  и  $\Omega$ . В результате имеем

$$\begin{aligned} a_0(\sigma_1) &= \pm\omega_n\mu E_s(-\sigma_1)/((1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)(1 + \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1))^{1/2}), \\ \Omega(\sigma_1) &= \sigma_1 \pm \omega_n(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1))^{1/2}. \end{aligned}$$

Рассматривая эти выражения как параметрически заданные кривые и изменяя  $-\infty < \sigma_1 < \infty$ , получим в плоскости  $(a_0, \Omega)$  семейство кривых, при значении параметров на которых уравнение  $p_{nn}(\lambda) = 0$  имеет корни, лежащие на мнимой оси комплексной плоскости. При этом направление движения корней определяется следующим образом. Фиксируем точку  $(a_0^*, \Omega^*)$  на кривой, которая соответствует значению  $\sigma_1^* = -\Omega^* + \sigma^*$ . Положим в (41)  $a_0 = a_0^* + \varepsilon, \Omega = \Omega^*$ , где  $\varepsilon$  малый параметр, и рассмотрим уравнение  $p_{nn}(\lambda; \varepsilon) = 0, p_{nn}(i\sigma^*; 0) = 0$ . Определяя теперь  $\lambda(\varepsilon) = i\sigma^* + \lambda_1 + \dots$ , имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p_{nn\varepsilon}(i\sigma^*; 0)/p_{nn\lambda}(i\sigma^*; 0) = a_0^*(1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)/ \\ &/ (2i\sigma^* + a_0^* + \omega_n^2(1 + \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)(E'_s(-\Omega^* + \sigma^*) + iE'_c(-\Omega^* + \sigma^*))). \end{aligned}$$

Зная знак  $\operatorname{Re}\lambda_1$  легко определить движение корней уравнения  $\pm i\sigma^*$  при изменении параметра  $a_0$ . Это дает возможность построить области устойчивости и неустойчивости решений (38).

Рассмотрим теперь характеристическое уравнение  $Q_N(\lambda)$ . Выразим из равенства (40) диагональный элемент  $p_{nn}(\lambda)$  матрицы  $P_N(\lambda)$ . В результате получим выражение

$$p_{nn}(\lambda) = \Phi(a_0, -i\Omega + \lambda, \lambda), \quad (44)$$

где  $\Phi(a_0, -i\Omega + \lambda, \lambda)$  комплекснозначная аналитическая функция, которая в определенном смысле мала в силу сказанного выше. Применим к (44) метод  $D$ -разбиений и построим кривые в плоскости  $(a_0, \Omega)$ , на которых (44) имеет корни вида  $\pm i\sigma$ . Положим  $\lambda = i\sigma, -\infty < \sigma < \infty$  и выделим в (44) вещественную и мнимую части. В



результате получим систему уравнений

$$-\sigma^2 + \omega_n^2(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(-\Omega + \sigma)) = \Phi_1(a_0, -\Omega + \sigma, \sigma), \quad (45)$$

$$a_0(1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)\sigma + \omega_n^2\mu E_s(-\Omega + \sigma) = \Phi_2(a_0, -\Omega + \sigma, \sigma), \quad (46)$$

где  $\Phi(a_0, -i\Omega + i\sigma, i\sigma) = \Phi_1(a_0, -\Omega + \sigma, \sigma) + i\Phi_2(a_0, -\Omega + \sigma, \sigma)$ . Положим  $\sigma_1 = -\Omega + \sigma$  и выразим из левой части (45), (46)  $a_0$  и  $\Omega$ , считая правую часть известной функцией. В результате имеем выражения

$$a_0(\sigma_1) = \pm\omega_n(\mu E_s(-\sigma_1) + \Phi_2(a_0, \sigma_1, \Omega + \sigma_1)/\omega_n^2)/$$

$$/((1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)(1 + \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1) - \Phi_1(a_0, \sigma_1, \Omega + \sigma_1)/\omega_n^2)^{1/2}),$$

$$\Omega(\sigma_1) = \sigma_1 \pm \omega_n(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1) - \Phi_1(a_0, \sigma_1, \Omega + \sigma_1)/\omega_n^2)^{1/2}.$$

Построим итерационный процесс

$$a_0^{(k+1)}(\sigma_1) = \pm\omega_n(\mu E_s(-\sigma_1) + \Phi_2(a_0^{(k)}(\sigma_1), \sigma_1, \Omega^{(k)}(\sigma_1) + \sigma_1)/\omega_n^2)/$$

$$/((1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)(1 + \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1) - \Phi_1(a_0^{(k)}(\sigma_1), \sigma_1, \Omega^{(k)}(\sigma_1) + \sigma_1)/\omega_n^2)^{1/2}), \quad (47)$$

$$\Omega^{(k+1)}(\sigma_1) = \sigma_1 \pm \omega_n(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1) - \Phi_1(a_0^{(k)}(\sigma_1), \sigma_1, \Omega^{(k)}(\sigma_1) + \sigma_1)/\omega_n^2)^{1/2}, \quad (48)$$

$k = 1, 2, \dots,$

$$a_0^{(1)}(\sigma_1) = \pm\omega_n(\mu E_s(-\sigma_1))/((1 + S_1(J - M)\nu'_n(1)^2)(1 + \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1))^{1/2}),$$

$$\Omega^{(1)}(\sigma_1) = \sigma_1 \pm \omega_n(1 - \mu(1 - c\nu'_n(1)^2/\omega_n^2)E_c(\sigma_1))^{1/2},$$

Итерационный процесс (47), (48) быстро сходится в силу малости функций  $\Phi_1(*)$ ,  $\Phi_2(*)$ . Предельные функции  $a_0^*(\sigma_1)$ ,  $\Omega^*(\sigma_1)$  определяют семейство кривых в плоскости  $(a_0, \Omega)$ , при значении параметров на которых уравнение (44) имеет корни, лежащие на мнимой оси комплексной плоскости. Фиксируем точку  $(a_0^*, \Omega^*)$  на такой кривой, которая соответствует значению  $\sigma_1^* = -\Omega^* + \sigma^*$ . Положим в (44)  $a_0 = a_0^* + \varepsilon$ ,  $\Omega = \Omega^*$ , где  $\varepsilon$  малый параметр. В результате будем иметь уравнение  $p_{nm}(\lambda; \varepsilon) - \Phi(a_0^* + \varepsilon, -i\Omega^* + \lambda, \lambda) = 0$ ,  $p_{nm}(i\sigma^*; 0) - \Phi(a_0^*, -i\Omega^* + i\sigma^*, i\sigma^*) = 0$ . Направление движения корней  $\pm i\sigma^*$  определяет знак величины  $\text{Re}\lambda_1$ , где

$$\lambda_1 = -(p_{nm\varepsilon}(i\sigma^*; 0) - \Phi_\varepsilon(a_0^*, -i\Omega^* + i\sigma^*, i\sigma^*)) / (p_{nm\lambda}(i\sigma^*; 0) - \Phi_\lambda(a_0^*, -i\Omega^* + i\sigma^*, i\sigma^*)).$$

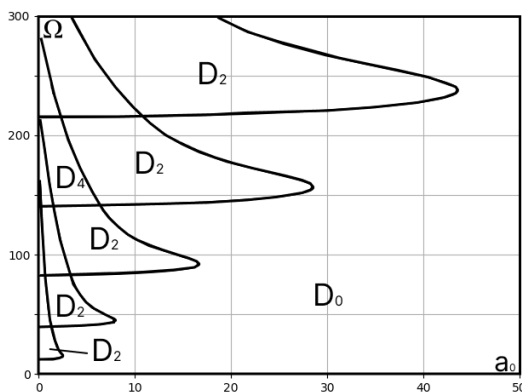
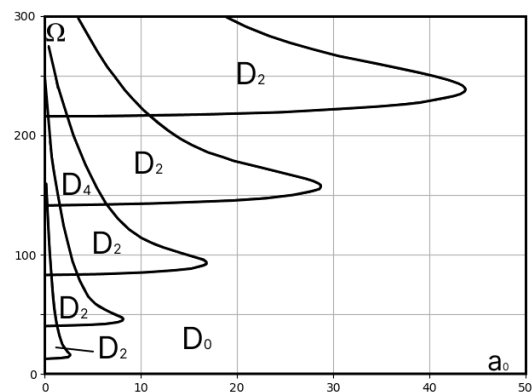
Это дает возможность построить картину  $D$ -разбиения плоскости параметров  $(a_0, \Omega)$ ,  $a_0, \Omega \geq 0$ , тем самым определить области устойчивости и неустойчивости решения начально-краевой задачи (7) - (9).

Ниже приведены результаты применения изложенного метода построения областей устойчивости для конкретного примера. Выберем следующие параметры рассматриваемой механической системы:  $l = 0.5$ ;  $d = 0.025$ ;  $D = 0.08$ ;  $L = 0, 3$ ;  $\mu = 0.25$ ;  $S_1 = 1.92$ . Плотность материалов вала и твердого тела считаем примерно одинаковыми. Безразмерные параметры примут следующие значения:  $d = 0.05$ ;  $D = 0.16$ ;  $L = 0.6$ ;  $M = 6.144$ ;  $J = 0.1276$ . Функцию релаксации в безразмерном виде и безразмерном времени  $s$  выберем

$$R(s, p, \alpha, \delta) = |s|^{-\alpha} e^{-p|s|^{1+\delta}} / Q(p, \alpha, \delta) \quad (-\infty < s \leq 0), \quad Q(p, \alpha, \delta) = \int_0^{\infty} s^{-\alpha} e^{-ps^{1+\delta}} ds,$$

в которой  $p = 1.5$ ;  $\alpha = 0.5$ ;  $\delta = 0.1$ . На рис. 2–5 приведены картины  $D$ -разбиений плоскости параметров  $(a_0, \Omega)$ ,  $a_0, \Omega \geq 0$  для различных значений безразмерного параметра  $c$ . На рисунках в соответствии с методом  $D$ -разбиений через  $D_j$  обозначена область, при значении параметров из которой характеристическое уравнение (40) имеет  $j$  корней, принадлежащих правой комплексной полуплоскости. Из рисунков видно, что потеря устойчивости решений начально-краевой задачи (7)–(9) может происходить с прохождением как одной, так и двух пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (40) через мнимую ось комплексной плоскости (точки пересечения кривых). Отметим, что в случае двух пар возможен внутренний резонанс.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Рис. 2.  $c = 0.1$ Рис. 3.  $c = 1$

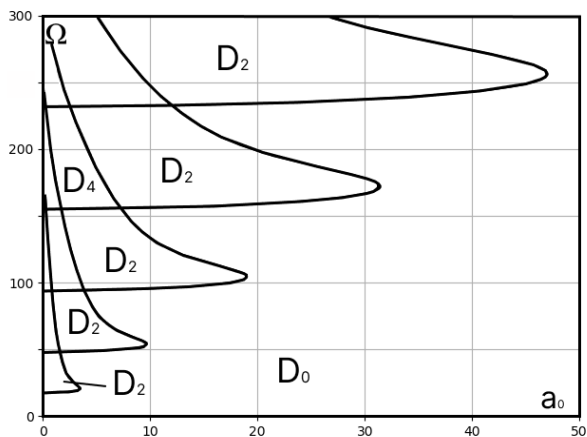


Рис. 4.  $c = 100$

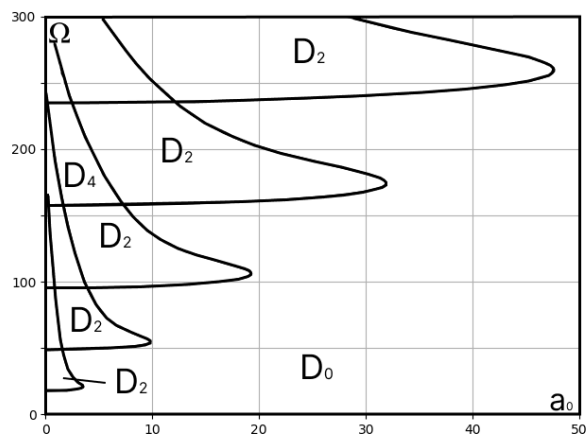


Рис. 5.  $c = 500$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.  
 RABOTNOV, Yu. N. (1977) Elements of hereditary mechanics of solids, M.: Nauka.
2. Кубышкин Е. П. Некоторые вопросы динамики распределенных роторов // Математика в Ярославском университете. Сборник обзорных статей к 25-летию математического факультета. — Ярославль, 2001. — С. 157–182.  
 KUBYSHKIN, E. P. (2001) Some issues of distributed rotor dynamics. *Mathematics at Yaroslavl University*. Collection of review articles for the 25-th anniversary of the Faculty of Mathematics. Yaroslavl, p. 157–182.
3. Кубышкин Е. П. Колебания распределенного ротора из материала с нелинейно наследственными свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 4. — Ч. 5. — С. 133–134.  
 KUBYSHKIN, E. P. (2011) Vibrations of a distributed rotor made of a material with nonlinear hereditary properties. *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N. I. Lobachevsky*. No. 4, Part 5. pp. 133–134.
4. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.  
 AKHIEZER, N. I. & GLAZMAN, I. M. (1993) Theory of linear operators in Hilbert space. 2 ed. Dover.

5. Вибрации в технике. Т. 1 // Справочник в 6 томах. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.  
Vibrations in technology. (1978) Vol. 1 // Handbook in 6 volumes. Moscow: Mashinostroenie.
6. *Неймарк Ю. И.*  $\mathcal{D}$ -разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // ПММ. 1949. — Т. 13, No 4. — С. 655–667.  
NEIMARK, Yu. I. (1949)  $\mathcal{D}$ -partition of quasi-polynomial space (on the stability of linearized distributed systems). *Prikl. Math. Mekh.* 13 (4), p. 349–380.

УДК: 517.9

MSC2010: 34D35, 34K20

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ  
РАСТЯЖЕНИЯ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В НЕЛИНЕЙНОМ  
ФУНКЦИОНАЛЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ**

© В. А. Куликов

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. Г. ДЕМИДОВА  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
СОВЕТСКАЯ УЛ., 14, ЯРОСЛАВЛЬ, 150003, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: *kulikov7677@gmail.com*

**STABILITY ANALYSIS OF EQUILIBRIUM STATES PARABOLIC EQUATION WITH STRETCH  
OPERATOR AND DELAY IN A NONLINEAR FEEDBACK FUNCTIONAL.**

**Kulikov V. A.**

**Abstract.** The paper considers the dynamics and stability of homogeneous equilibrium states of a mathematical model of a nonlinear generator of optical radiation with a stretching operator for the spatial coordinates of a light wave and a time delay in the feedback loop. The mathematical model is an initial-boundary value problem for a parabolic type equation in a circle with a spatial argument stretching operator and a time delay in a nonlinear feedback functional. We study the dynamics of homogeneous equilibrium states and their stability depending on the parameters of the initial-boundary value problem. In the plane of the main control parameters (gain and time delay), using the method of  $D$ -partitions, the regions of stability (instability) of homogeneous equilibrium states are constructed. Possible mechanisms of loss of stability by homogeneous equilibrium states are studied. The possibility of oscillatory loss of stability is shown, which is caused by the passage through the imaginary axis of the complex plane when changing the parameters of the initial-boundary value problem of one or two pairs of complex conjugate points of the spectrum of the characteristic pencil of operators, between which resonance relations are possible. The possibility of loss of stability by several equilibrium states at the same time is shown.

**Keywords:** *spatially inhomogeneous waves, bifurcation, optical information transmission systems.*

## **1. ВВЕДЕНИЕ**

В работах [1–3] приведены экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных волн в лазерных пучках генератора оптического излучения со специальным нелинейным контуром двумерной обратной связи. Такие

структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В [1] предложена математическая модель для описания этого явления и приведены результаты ее численного анализа в случае оператора поворота плоскости световой волны. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргумента в нелинейном функционале обратной связи, которое рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения. Эта начально-краевая задача и различные ее обобщения изучались во многих работах. В основном начально-краевая задача рассматривается на окружности [4–8] и с оператором поворота пространственного аргумента на фиксированный угол. Изучается возможность бифуркации из однородных состояний равновесия пространственно неоднородных периодических решений и исследуется его устойчивость. В работе [9] рассматривается возможность бифуркации неоднородных по пространственной переменной периодических решений в начально-краевой задаче с оператором поворота в круге. Показана возможность бифуркации ротационных волн. В [10, 11] начально-краевая задача рассмотрена в многомерной области с оператором преобразования достаточно общего вида. Сформулированы условия на возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородного периодического решения, предложен алгоритм построения такого решения. Модель работы [1] не учитывает фактор временного запаздывания в контуре обратной связи. Учет временного запаздывания рассмотрен в работах [12–15]. В первой работе для математической модели работы [1] с запаздывающим аргументом на окружности показана возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородных бегущих волн, исследуются условия их устойчивости. В работах [13, 14] для указанной модели рассмотрены условия бифуркации периодических решений в кольцевой области. В работе [15] рассмотрена математическая модель работы [1] с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием в круге. Исследованы механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия и бифурцирующие при этом пространственно неоднородные автоколебательные решения.

В настоящей работе рассматривается указанная выше начально-краевая задача для дифференциального уравнения параболического типа в круге с оператором растяжения пространственного аргумента и временным запаздыванием в нелинейном

функционале обратной связи. Изучена динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров начально-краевой задачи. В плоскости основных параметров управления (коэффициента усиления и величины временного запаздывания) с использованием метода  $D$ -разбиений [16] построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Исследована динамика областей устойчивости в зависимости от величины коэффициента растяжения пространственного аргумента и других параметров начально-краевой задачи. Изучены возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия. Показана возможность колебательной потери устойчивости состояниями равновесия, которая обусловлена прохождением через мнимую ось комплексной плоскости при изменении параметров математической модели одной или двух пар комплексно сопряженных точек спектра характеристического пучка операторов, между которыми в последнем случае возможны резонансные соотношения. При этом возможна также потеря устойчивости одновременно несколькими состояниями равновесия.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + \alpha^{-2}K(1 + \gamma\cos(u(\rho/\alpha, \phi, t - T))) \quad (1)$$

относительно функции  $u(\rho, \phi, t + s)$ , заданной в полярных координатах  $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi$  ( $R > 0$ ) и  $t \geq 0, -T \leq s \leq 0$  ( $T > 0$ ), в котором  $\Delta_{\rho\phi}$  — оператор Лапласа в полярных координатах, выражение  $u(\rho/\alpha, \phi, t)$  ( $\alpha > 1$ ) задает оператор растяжения пространственных координат,  $D, K$  — положительные постоянные,  $0 < \gamma < 1$ , в области  $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$ , где круг  $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ ,  $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ , рассматривается начально-краевая задача вида

$$\begin{aligned} u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) пространство начальных условий  $H_0(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [-T, 0]), u(\rho, 0, s) = u(\rho, 2\pi, s), u_\phi(\rho, 0, s) = u_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s u(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$ , где пространство функций  $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$ , получено замыканием множества функций  $\{u(\rho, \phi) : u(\rho, \phi) \in C^2(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0, u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), u_\phi(\rho, 0) = u_\phi(\rho, 2\pi)\}$  в метрике пространства функций  $W_2^2(K_R)$  и сохраняет норму  $W_2^2(K_R)$ . В дальнейшем  $L_2(K_R)$  — пространство вещественнозначных определенных в  $K_R$  функций

$u(\rho, \phi)$ , для которых  $\|u(\rho, \phi)\|_{L_2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{L_2}^{1/2} < \infty$ ,  $(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = \int_{K_R} \rho u(\rho, \phi) v(\rho, \phi) d\rho d\phi$ , здесь и в дальнейшем  $W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R)$ ,  $W_2^2(K_R) = \{u(\rho, \phi) : \|u(\rho, \phi)\|_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty, (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi), \Delta_{\rho\phi} v(\rho, \phi))_{L_2}\}$ ,  $C(\bar{K}_R)$  и  $C^2(\bar{K}_R)$  пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в  $\bar{K}_R$  функций, для которых определена норма  $\|u(\rho, \phi)\|_C = \max_{\rho, \phi} |u(\rho, \phi)|$ ,  $\|u(\rho, \phi)\|_{C^2} = \|u(\rho, \phi)\|_C + \|\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi)\|_C < \infty$ .

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1)-(2) является пространство  $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } -T \leq s \leq 0, \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([-T, 0])\}$ , норму в котором определим как  $\|u(\rho, \phi, s)\|_H = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2}$ . Областью определения правой части уравнения (1) является пространство  $H_0(K_R; -T, 0)$ . Норму в  $H_0(K_R; -T, 0)$  определим как  $\|u(\rho, \phi, s)\|_{H_0} = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{H^2}$ .

Под решением начально-краевой задачи (1)-(2), определенном при  $t > 0$ , будем понимать функцию  $u(\rho, \phi, t+s) \in H_0(K_R; -T, 0)$  (при каждом  $t > 0$ ), непрерывно дифференцируемую по  $t$  при  $t > 0$ , обращающую уравнение (1) в тождество в фазовом пространстве и удовлетворяющую начальным условиям (2).

Решение начально-краевой задачи (1)-(2) может быть построено методом шагов следующим образом. Решение  $u(\rho, \phi, t+s)$  начально-краевой задачи (1)-(2) построим последовательно на отрезках  $t_{k-1} \leq t \leq t_k, t_k = Tk, k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$ . Значения  $u(\rho, \phi, t)$  на указанных отрезках обозначим соответственно через  $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$ . В результате для определения  $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$  получим рекуррентную последовательность начально-краевых задач вида

$$u_t^{(k)} + u^{(k)} - D\Delta_{\rho\phi} u^{(k)} = \alpha^{-2} K(1 + \gamma \cos(u^{(k-1)}(\rho/\alpha, \phi, t-T))) \equiv f^{(k)}(\rho, \phi, t) \quad (t_{k-1} \leq t \leq t_k), \quad (3)$$

$$u_\rho^{(k)}(R, \phi, t) = 0, \quad u^{(k)}(\rho, 0, t) = u^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi^{(k)}(\rho, 0, t) = u_\phi^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad (4)$$

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t_{k-1}) = u^{(k-1)}(\rho, \phi, t_{k-1}), \quad u^{(1)}(\rho, \phi, 0) = u_0(\rho, \phi, 0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

в которых правая часть уравнений (3) и начальные условия (5) на каждом шаге вполне определенные функции. Решения (3)–(5) задаются формулой

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t) = \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1) u^{(k-1)}(\rho_1, \phi_1, t_{k-1}) d\rho_1 d\phi_1 + \int_0^t \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t - \tau, \rho_1, \phi_1) f^{(k)}(\rho_1, \phi_1, \tau) d\rho_1 d\phi_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$



где  $G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1)$  функция Грина однородной части (при  $f^{(k)}(\rho, \phi, t) \equiv 0$ ) краевой задачи (3)-(4). Из (6) также следует единственность решения начально-краевой задачи (1)-(2) и его непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнения, т.е. корректность поставленной начально-краевой задачи, а также нарастание гладкости решения по переменной  $t$  при  $t \rightarrow \infty$ , свойственное решениям уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе изучаются условия и характер потери устойчивости состояний равновесия  $u_*(K, \alpha, \gamma)$  и обусловленные ею бифуркации пространственно-неоднородных автоколебательных решений начально-краевой задачи (1)-(2), а также их устойчивость.

### 3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)-(2)

Однородные состояния равновесия  $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$  начально-краевой задачи (1)-(2) определяются как решения уравнения

$$u = \alpha^{-2}K(1 + \gamma \cos(u)). \tag{7}$$

Уравнение (7) в зависимости от  $K, \alpha$  и  $\gamma$  может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуем условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров уравнения (1).

Выберем одно из решений  $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$  уравнения (7) и запишем начально-краевую задачу (1)-(2) в его окрестности, заменив  $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \alpha, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$ . В результате получим начально-краевую задачу

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu(\rho/\alpha, \phi, t - T) + b_2u(\rho/\alpha, \phi, t - T)^2/2 + bu(\rho/\alpha, \phi, t - T)^3/6 + \dots, \tag{8}$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \tag{9}$$

$$b = b(K, \alpha, \gamma) = u_*(K, \alpha, \gamma)\gamma \sin(u_*(K, \alpha, \gamma))/(1 + \gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma))), \tag{10}$$

$$b_2 = b_2(K, \alpha, \gamma) = -u_*(K, \alpha, \gamma)\gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma))/(1 + \gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma))),$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по  $u(\rho/\alpha, \phi, t - T)$  более высокий порядок малости в норме  $H_0(K_R; -T, 0)$ .

Рассмотрим линейную часть (8)-(9)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu(\rho/\alpha, \phi, t - T), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Определяя решения (11)-(12) вида  $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (решения Эйлера) получим пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho, \phi}u(\rho, \phi) + bu(\rho/\alpha, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (13)$$

действующий в  $\tilde{L}_2(K_R)$  с областью определения  $\tilde{H}^2(K_R)$ , точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (11)-(12), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщается стандартным образом.

Представим  $u(\rho, \phi) \in H^2(K_R)$  в виде

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi) = u_{00}(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{nj}(\rho)e^{in\phi}v_{nj}, \quad u_{00}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}R}, \quad u_{nj}(\rho) = \frac{R_{nj}(\rho)}{(2\pi)^{1/2}}, \\ R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/RJ_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2}|J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho), \\ \int_0^R \rho R_{nj}(\rho)R_{np}(\rho)d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad v_{00}, v_{0j} \in \mathbb{R}, \quad v_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $J_n(\rho)$  функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка,  $\gamma_{nj}$   $j$ -й положительный ноль функции  $J'_n(\rho)$ ,  $\gamma_{00} = 0$ ,  $\delta_{jp}$  — символ Кронекера,  $v_0 = (v_{00}, v_{01}, v_{02}, \dots) \in l_2^2 \subset l_2$ ,  $l_2^2 = \{v = (v_0, v_1, v_2, \dots), v_k \in \mathbb{R} : \|v\|_{l_2^2} = (v_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 v_k^2)^{1/2} < \infty\}$ ,  $v_n = (0, v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots) \in \tilde{l}_2^2 \subset \tilde{l}_2$ ,  $\tilde{l}_2^2 = \{v = (v_0, v_1, v_2, v_3, \dots), v_k \in \mathbb{C} : \|v\|_{\tilde{l}_2^2} = (|v_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 |v_k|^2)^{1/2} < \infty\}$ . Функции  $u_{00}(\rho)$ ,  $u_{0j}(\rho)$ ,  $u_{nj}(\rho)e^{in\phi}$ ,  $u_{-nj}(\rho)e^{-in\phi}$ ,  $j, n = 1, 2, \dots$ , являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в  $\tilde{H}^2(K_R)$  и ортонормированный в  $\tilde{L}_2(K_R)$ , т.е.  $v_0 \in l_2^2$  и  $v_n \in \tilde{l}_2^2$  определяются однозначно. Подставим ряд (14) в (13) и спроектируем на  $u_{00}(\rho)$ ,  $u_{0j}(\rho)$ ,  $u_{nj}(\rho)e^{in\phi}$ ,  $u_{-nj}(\rho)e^{-in\phi}$ ,  $j, n = 1, 2, \dots$ . В результате получим последовательность операторных уравнений в пространстве  $\tilde{l}_2$  с областью определения  $\tilde{l}_2^2$  вида

$$P^{(n)}(\lambda, \alpha)v_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

для определения  $v_n \in \tilde{l}_2^2$ , где  $P^{(n)}(\lambda, \alpha)$  бесконечномерные матрицы с элементами

$$P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha) = \lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad P_{jq}^{(n)}(\lambda, \alpha) = ba_{jq}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad j \neq q,$$

$$a_{jq}^{(n)}(\alpha) = \int_0^1 \rho R_{nq}(\rho/\alpha) R_{np}(\rho) d\rho, \tag{16}$$

$j, q = 0, 1, \dots$ , при  $n = 0$ , и  $j, q = 1, 2, \dots$ , при  $n > 0$ . Отметим, что коэффициенты  $a_{jq}^{(n)}(\alpha) \rightarrow 0$  при  $j, q \rightarrow \infty$ .

Совокупность значений  $\lambda_*^{(n)}$ , при которых операторные уравнения (15) имеет ненулевые решения  $v_*^{(n)} \in \tilde{l}_2^2$  определяет множество точек спектра пучка операторов (13), а решения  $v_*^{(n)}$  с учетом (14) соответствующие собственные функции. Анализ расположения  $\lambda_*^{(n)}$  позволяет построить в пространстве параметров области устойчивости решений начально-краевой задачи (11)-(12), т.е. исследовать условия потери устойчивости состоянием равновесия  $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$ . Воспользуемся для этого методом  $D$ -разбиения [16]. Рассмотрим для каждого  $n$  последовательность “усеченных” конечномерных матриц  $P_N^{(n)}(\lambda, \alpha)$ , в которых  $j, q = 0, 1, \dots, N$  при  $n = 0$ , и  $j, q = 1, 2, \dots, N$  при  $n > 0$ . Приравняем нулю определитель матрицы  $P_N^{(n)}(\lambda, \alpha)$  и выделим в этом равенстве элемент  $P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha)$ . В результате получим равенство

$$\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T} + \Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, \alpha) = 0, \tag{17}$$

в котором функция  $\Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, \alpha)$  получена в результате объединения выражений, не содержащих  $P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha)$ , и  $a_{jj}^{(n)}(1) = 1, \Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, 1) \equiv 0$ . Положив в (17) в соответствии с методом  $D$ -разбиений [16]  $\lambda = i\omega, \omega \geq 0$ , имеем

$$i\omega + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-i\omega T} + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) + i\Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) = 0, \tag{18}$$

Выделив в (18) вещественную и мнимую части, получим равенства

$$1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\omega T) + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) = 0, \quad \omega - ba_{jj}^{(n)}(\alpha) \sin(\omega T) + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) = 0,$$

из которых находим

$$b = b(\omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)) / (a_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\arctg((\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha))))), \tag{19}$$

$$T = T(\omega) = \omega^{-1} (\pi k - \arctg(\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha))), \quad k = 1, 2, \dots \tag{20}$$

При этом  $\Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, 1) \equiv 0, \Delta_{N2}^{(j)}(b, T, \omega, 1) \equiv 0$ . Выражения (19), (20) определяют совокупность кривых  $b(\omega), T(\omega)$ , заданных в неявном виде, в плоскости  $(b, T)$  на которых пучек операторов (13) имеет точки спектра, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости. Это дает возможность построить в плоскости  $(b, T)$  (при фиксированных других параметрах) область устойчивости решений начально-краевой задачи (11)-(12).

Построим итерационный процесс

$$b^{(p)}(\omega) = (-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha)) / (a_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\arctg((\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha))))), \quad (21)$$

$$T^{(p)}(\omega) = \omega^{-1}(\pi k - \arctg(\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha))), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots \quad (22)$$

При  $\alpha = 1$  функции  $b(\omega) = b^{(0)}(\omega)$ ,  $T(\omega) = T^{(0)}(\omega)$  в (21), (22) выражаются явно. Немного увеличим параметр  $\alpha$  и выберем в качестве начального приближения  $b^{(0)}(\omega)$ ,  $T^{(0)}(\omega)$ , полученные при  $\alpha = 1$ . Итерационный процесс (21), (22) достаточно быстро сходится как по  $p$ , так и по  $N$  в силу свойств функций  $\Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)$ ,  $\Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)$  и достаточно быстрого стремления к нулю коэффициентов  $a_{jq}^{(n)}(\alpha)$  при  $j \neq q$ . Вновь увеличим немного параметр  $\alpha$  и выберем в качестве начального приближения  $b^{(0)}(\omega)$ ,  $T^{(0)}(\omega)$  выражения, полученные для предыдущего значения  $\alpha$ . Получим сходящийся итерационный процесс. Двигаясь таким образом по параметру  $\alpha$ , можно построить с любой степенью точности функции  $b(\omega)$ ,  $T(\omega)$  как решения уравнений (19), (20) и соответствующие им кривые в плоскости  $(b, T)$  для различных значений  $n$  и других параметров. Эти кривые необходимо дополнить прямыми  $b = b_*$ , где  $b_*$  определяются как решения уравнения  $\det P_N^{(n)}(0, \alpha) = 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  и соответствуют нулевым точкам спектра пучка операторов (13). Это дает возможность построить картину  $D$ -разбиений плоскости параметров  $(b, T)$  при других фиксированных параметрах (13). При этом посредством  $D_j$  обозначаются области в плоскости  $(b, T)$ , при значении параметров из которых пучок операторов (13) имеет  $j$  точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Заметим, что прямая  $b = 0$  согласно (15) принадлежит области  $D_0$ . Двигаясь от прямой  $b = 0$  в направлении увеличения и уменьшения параметра  $b$  при  $T > 0$ , определяем область  $D_0$ . Дополнительная проверка отсутствия точек спектра пучка операторов (13) в правой комплексной полуплоскости при значении параметров  $(b, T) \in D_0$  осуществляется следующим образом. На внутренность области  $D_0$  наносится сетка по  $b$  и  $T$  с шагом  $h > 0$ . В точках сетки вычисляется приращение функции  $Arg(\det P_N^{(n)}(\lambda, \alpha))$  при обходе в положительном направлении границы полукруга  $\{\lambda = re^{i\psi}, 0 \leq r \leq R, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$ . Равенство нулю приращения аргумента обеспечивает отсутствие корней уравнения  $\det P_N^{(n)}(\lambda, \alpha) = 0$  в точках указанного полукруга. Увеличивая  $R$ , получим аналогичное утверждение для правой комплексной полуплоскости. Границы областей  $D_j$  в дальнейшем будем рассматривать в виде зависимости  $T = T_j(b)$ . Отметим, что анализ движения точек спектра пучка операторов (13) при изменении параметров  $b$  и  $T$ , связанного с прохождением

границы области  $D_0$  (и других областей) требует отдельного рассмотрения. Об этом будет сказано в дальнейшем.

Параметр  $b$  не является параметром начально-краевой задачи (1)-(2) (параметром математической модели), поэтому перестроим плоскость  $b, T$  в плоскость параметров  $K, T$ . Используем для этого полученные из (7)–(10) выражения

$$K = K(u) = \alpha^2 u / (1 + \gamma \cos(u)), \quad b = b(u) = u \gamma \sin(u) / (1 + \gamma \cos(u)),$$

$$K'(u) = \alpha^2 (1 + b(u)) / (1 + \gamma \cos(u)),$$

которые рассмотрим как функции состояния равновесия  $u$ . Обозначим через  $U_k, k = 1, 2, \dots$  области на оси  $u \geq 0$  в которых  $b(u) > -1$ . В этих областях  $K(u)$  монотонно возрастает при увеличении  $u$ . Отметим, что состояния равновесия  $u$  начально-краевой задачи (1)-(2), для которых  $b(u) < -1$ , всегда неустойчивы, поэтому такие области рассматривать не будем. Выразим в областях  $u \in U_j$   $u = u_k(K), k = 1, 2, \dots$  и подставим  $b(u)$ . В результате получим счетное число функций  $b = b_k(K) = b(u_k(K))$ . Подставим теперь эти функции в зависимости  $T = T_j(b)$ . В результате получим уравнения  $T = T_{jk}(K) = T_j(b_k(K))$  границ областей  $D_j$  в плоскости  $K, T$ . При значениях параметров  $K, T$ , принадлежащих этим кривым, пучок операторов (7), построенные на состоянии равновесия  $u_k(K)$  будет иметь точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости.

На рис. 1–6 для значений  $D = 0.1, \gamma = 0.75$  и различных значений  $\alpha$  приведены картины  $D$ -разбиений плоскости параметров  $(K, T)$  характеристического уравнения (17) (пучка операторов (13)). На рисунках в соответствии с методом  $D$ -разбиений через  $D_j$  обозначены области, при значении параметров из которых пучок операторов (13) имеет  $j$  точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Кривые, отмеченные треугольником, относятся к состояниям равновесия, принадлежащим области  $U_1$ , отмеченные звездочкой — к области  $U_2$ , отмеченные квадратом — к области  $U_3$ . Каждая кривая имеет маркер (на рисунках они проставлены не везде), первая цифра которого показывает номер  $n$ , вторая — значение  $j$  соответствующей собственной функции пучка операторов (13). Точками на рисунка условно обозначена совокупность границ областей  $D_j$  не имеющих принципиального значения для рассматриваемой задачи.

Из рисунков видно, что имеются значения параметра  $\alpha, K, T$ , при которых на границе области устойчивости  $D_0$  (и других  $D_j$ ), пучок операторов (13) имеет пару комплексно сопряженных точек спектра  $\pm i\omega^*, \omega^* > 0$  (правая граница области  $D_0$ ). Если при этом  $n = 0$ , то такой точке спектра  $i\omega^*$  соответствует одна собственная

функция

$$u_{0j}^*(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}(\rho)v_{0k}, \quad v_0 = (v_{00}, v_{01}, \dots) \in \tilde{l}_2^2, \quad P^{(0)}(i\omega_*, \alpha)v_0 = 0, \quad \|u_{0j}^*(\rho)\|_{L_2} = 1, \quad j > 0, \\ u_{00}^*(\rho) \equiv u_{00}^* = const, \quad (23)$$

если  $n \neq 0$ , то две собственные функции  $u_{nj}^*(\rho, \phi) = u_{nj}^*(\rho)e^{in\phi}$ ,  $u_{-nj}^*(\rho, \phi) = u_{nj}^*(\rho)e^{-in\phi}$ ,  $\|u_{nj}^*(\rho, \phi)\|_{L_2} = 1$ , где

$$u_{nj}^*(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{nj}(\rho)v_{nj}, \quad v_n = (0, v_{n1}, \dots) = (0, v_{*n}) \in \tilde{l}_2^2, \quad P^{(n)}(i\omega_*, \alpha)v_{*n} = 0. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение сопряженный с (13) пучек операторов  $P^*(\lambda)$  из условия

$$(P(\lambda)u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = (u(\rho, \phi), P^*(\lambda)v(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2}, \quad u(\rho, \phi), v(\rho, \phi) \in \tilde{H}^2(K_R).$$

С учетом равенства

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho u(\rho/\alpha, \phi) \bar{v}(\rho, \phi) d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_*} \rho u(\rho, \phi) Q_{\alpha_*} \bar{v}(\rho, \phi) d\rho d\phi, \quad \alpha_* = 1/\alpha, \quad R_* = R/\alpha,$$

где

$$Q_{\alpha_*} v(\rho, \phi) = \begin{cases} \alpha_*^{-2} v(\rho/\alpha_*, \phi), & 0 \leq \rho \leq R_*, \\ 0, & R_* < \rho \leq R \end{cases}$$

оператор сжатия, имеем вид сопряженного оператора

$$P^*(\lambda)v(\rho, \phi) \equiv \lambda v(\rho, \phi) + v(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho, \phi} v(\rho, \phi) + bQ_{\alpha_*} v(\rho, \phi)e^{-\lambda T}. \quad (25)$$

При этом, если  $\lambda_*$  точка спектра пучка операторов (13), то  $\bar{\lambda}_*$  точка спектра пучка операторов (25). Таким образом, точке спектра  $i\omega^*$  пучка операторов (13) отвечает точка спектра  $-i\omega^*$  пучка операторов (25), а соответствующие ей собственные функции имеют вид

$$v_{0j}^*(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}(\rho)w_{0k}, \quad w_0 = (w_{00}, w_{01}, \dots) \in \tilde{l}_2^2, \quad P^{(0)*}(-i\omega^*, \alpha)w_0 = 0, \quad j > 0, \\ v_{00}^*(\rho) \equiv v_{00}^* = const, \quad (26)$$

при  $n = 0$ , и

$$v_{nj}^*(\rho, \phi) = v_{nj}^*(\rho)e^{in\phi}, \quad v_{-nj}^*(\rho, \phi) = v_{nj}^*(\rho)e^{-in\phi}, \\ v_{nj}^*(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(\rho)w_{nk}, \quad w_n = (0, w_{n1}, \dots) = (0, w_{*n}) \in \tilde{l}_2^2, \quad P^{(n)*}(-i\omega^*, \alpha)w_{*n} = 0, \quad (27)$$

при  $n \neq 0$ . Здесь  $P^{(n)*}(\cdot)$  сопряженная с  $P^{(n)}(\cdot)$  матрица.

Функции (26), (27) могут быть выбранными, удовлетворяющими следующим условиям

$$(P'(i\omega_*)u_{0j}^*(\rho), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 1, (P'(i\omega_*)u_{0j}^*(\rho), \bar{v}_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0, \quad (28)$$

и

$$(P'(i\omega_*)u_{nj}^*(\rho, \phi), v_{nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 1, (P'(i\omega_*)u_{-nj}^*(\rho, \phi), \bar{v}_{nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 0, \\ (P'(i\omega_*)u_{nj}^*(\rho, \phi), \bar{v}_{-nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 0, (P'(i\omega_*)u_{-nj}^*(\rho, \phi), v_{-nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 1.$$

Исследуем движение точек спектра пучка операторов (13) при прохождении параметрами  $K, T$  границы области  $D_0$  (области  $D_j$ ). Выберем точку  $K^*, T^*$  границы области  $D_0$  (области  $D_j$ ), при которой пучек операторов (13) имеет точки спектра  $\pm i\omega^*, \omega^* > 0$ , построенный на состоянии равновесия  $u^* = u_k(K^*)$ . Положим в (13)  $K = K^* + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon$  малый параметр, и обозначим соответствующий пучек операторов  $P(\lambda; \varepsilon)$ . Также имеем

$$u^*(\varepsilon) = u_k(K^* + \varepsilon) = u^* + \varepsilon u_{*1} + \dots, u_{*1} = u^*/(K^*(1 + b(u^*))),$$

$$b(\varepsilon) = b(u^*(\varepsilon)) = b(u^*) + \varepsilon b_1 + \dots, b_1 = \gamma \sin(u^*) + u^* \gamma \cos(u^*)/(1 + b(u^*)).$$

Рассмотрим сначала случай  $n = 0$ . Пучек операторов (13) имеет точки спектра  $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon), \lambda(0) = i\omega^*$  и соответствующие им собственные функции  $u_{0j}^*(\rho; \varepsilon), \bar{u}_{0j}^*(\rho; \varepsilon)$ , аналитически зависящие от  $\varepsilon$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . Представим

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega^* + \varepsilon \lambda_1 + \dots, u_{0j}^*(\rho; \varepsilon) = u_{0j}^*(\rho) + \varepsilon u_{0j}^{(1)}(\rho) + \dots \quad (29)$$

и подставим в (13). Приравняв коэффициенты при первой степени параметра  $\varepsilon$ , получим для определения  $u_{0j}^{(1)}(\rho)$  операторное уравнение в пространстве  $\tilde{L}_2(K_R)$

$$P(i\omega_*; 0)u_{0j}^{(1)}(\rho) + \lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{0j}^*(\rho) + b_1 u_{0j}^*(\rho) e^{-i\omega_* T^*} = 0, \quad (30)$$

с областью определения  $\tilde{H}^2(K_R)$ . Условие разрешимости уравнения (30)  $(\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{0j}^*(\rho) + b_1 u_{0j}^*(\rho) e^{-i\omega_* T^*}, v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$  с учетом (30) позволяет однозначно определить

$$\lambda_1 = -b_1 e^{-i\omega_* T^*} (u_{0j}^*(\rho/\alpha), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2}. \quad (31)$$

При выполнении условия (31) решение  $u_{0j}^{(1)}(\rho)$  уравнения (30), удовлетворяющее условию  $(u_{0j}^{(1)}(\rho), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$ , определяется однозначно.

В случае  $n > 0$  точкам спектра  $\lambda(\varepsilon)$  ( $\lambda(0) = i\omega^*$ ) и  $\bar{\lambda}(\varepsilon)$  отвечают соответственно собственные функции  $u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) = u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) e^{in\phi}, u_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) = u_{-nj}^*(\rho; \varepsilon) e^{-in\phi}$  и  $\bar{u}_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \bar{u}_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)$ , которые аналитически зависят от  $\varepsilon$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . Представим  $\lambda(\varepsilon)$  в виде (29) и

$$u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) = u_{nj}^*(\rho) + \varepsilon u_{nj}^{(1)}(\rho) + \dots, u_{-nj}^*(\rho; \varepsilon) = u_{-nj}^*(\rho) + \varepsilon u_{-nj}^{(1)}(\rho) + \dots$$

Подставим  $u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)$  в (13) и приравняем коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ . В результате получим для определения  $u_{nj}^{(1)}(\rho)$  операторное уравнение в пространстве  $\tilde{L}_2(K_R)$

$$P(i\omega_*; 0)u_{nj}^{(1)}(\rho)e^{in\phi} + (\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T^*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi} = 0, \quad (32)$$

с областью определения  $\tilde{H}^2(K_R)$ . Из первого условия разрешимости уравнения (32)

$$((\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T^*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi}, v_{nj}^*(\rho)e^{in\phi})_{\tilde{L}_2} = 0,$$

однозначно определяем

$$\lambda_1 = -b_1 e^{-i\omega_* T^*} (u_{nj}^*(\rho/\alpha), v_{nj}^*(\rho))_{\tilde{L}_2}. \quad (33)$$

Второе условие разрешимости уравнения (32)

$$((\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T^*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi}, v_{nj}^*(\rho)e^{-in\phi})_{\tilde{L}_2} = 0,$$

выполняется автоматически.

При выполнении условия (33) решение  $u_{nj}^{(1)}(\rho)$  уравнения (32), удовлетворяющее условию  $(u_{nj}^{(1)}(\rho), v_{nj}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$ , определяется однозначно.

Знак  $\operatorname{Re}\lambda_1$  определяет движение точек спектра (13) при прохождении параметрами  $K$  и  $T$  границ построенных областей, что позволяет определить картину  $D_j$  разбиений. В соответствии с этим определена картина  $D$ -разбиений, приведенная на рис. 1–6. Отметим, что на границе области устойчивости пучек операторов (13) может иметь две пары комплексно спектральных точек спектра, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости (см. рис. 2). При этом одной из них отвечает собственная функция вида (23), а другой — две вида (24), а между точками спектра могут быть выполнены резонансные соотношения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19 31 90133).*

*Автор выражает благодарность Е. П. Кубышкину за помощь в решении задачи и написании статьи.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение «оптической турбулентности» / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // Письма в ЖЭТФ. — 1988. — Т. 47. — № 12. — С. 611–614.

AKHMANOV. S. A, VORONTSOV. M. A, and IVANOV. V. Iu (1988) Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams — New types of nonlinear



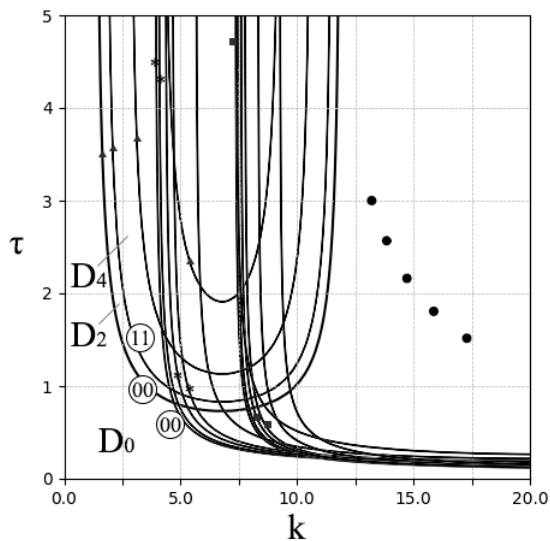


Рис. 1.  $\alpha = 1$

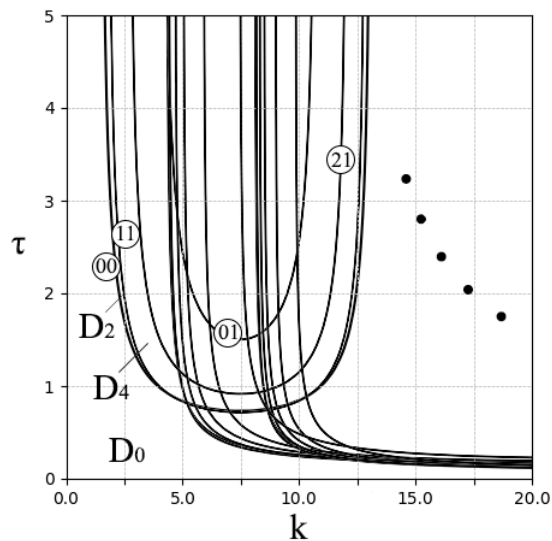


Рис. 2.  $\alpha = 1.05$

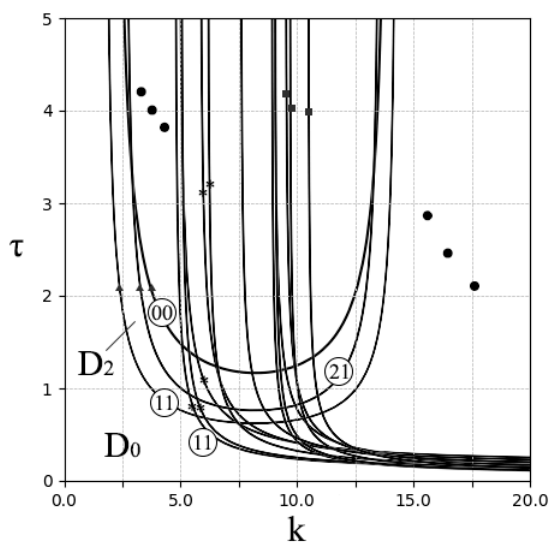


Рис. 3.  $\alpha = 1.1$

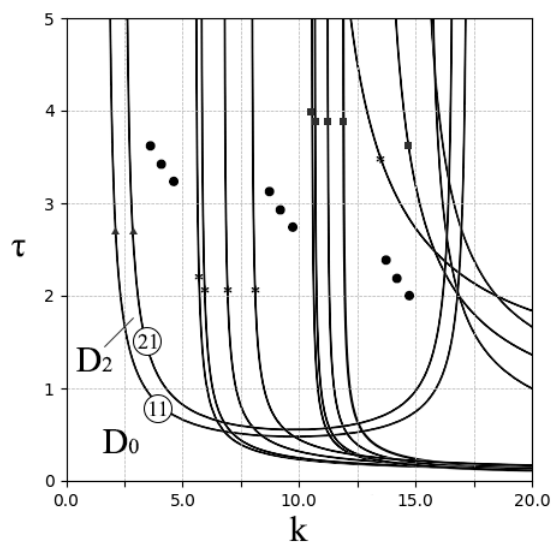
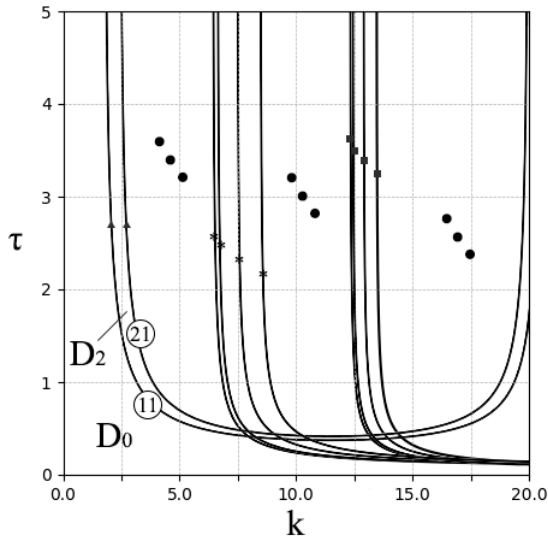
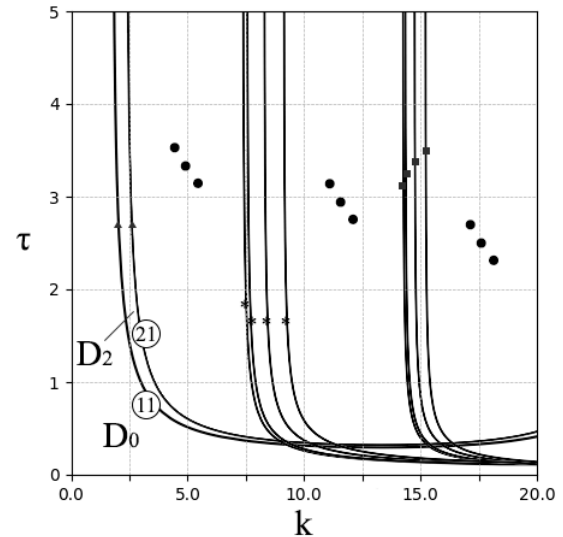


Рис. 4.  $\alpha = 1.2$

waves, generation of “optical turbulence”. *Pis'ma v Zhurnale Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ISSN 0370-274X)*. Vol. 47. p. 611–614.

Рис. 5.  $\alpha = 1.3$ Рис. 6.  $\alpha = 1.4$ 

2. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.

AKHMANOV. S. A, VORONTSOV. M. A, and IVANOV. V. Iu (1990) Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: Toward the creation of nonlinear-optical analogues of neural networks. *New Physical Principles of Optical Data Processing*. Nauka, Moscow. p. 263–325.

3. AKHMANOV. S. A, VORONTSOV. M. A, and IVANOV. V. Iu (1992) Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures.. *J. Optical Soc. Amer. Ser. B.* Vol. 9. (No. 1.). p. 78–90.

4. Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом / А. В. Разгулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1993. — Т. 33. — № 1. — С. 69–80.

RAZGULIN, A. V (1993) Self-excited oscillations in the nonlinear parabolic problem with transformed argument. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* Vol. 33 (No. 1). p. 69–80.

5. Разгулин А. В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом / А. В. Разгулин // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1993. — Т. 33. — № 10. — С. 1499–1508.  
RAZGULIN, A. V (1993) The stability of self-excited bifurcation oscillations in a nonlinear parabolic problem with transformed argument. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* Vol. 33 (No. 10). p. 1499–1508.
6. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан // *Дифференц. уравнения.* — 2004. — Т. 40, — № 5. — С. 645–654.  
BELAN, E. P. (2004) On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differ. Equations.* Vol. 40 (No. 5). p. 692–702.
7. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной / Е. П. Белан // *Журн. матем. физ., анализ.* — 2005. — Т. 1, — № 1. — С. 3–34.  
BELAN, E. P. (2005) On the dynamics of traveling waves in a parabolic equation with the transformation of the shift of the spatial variable. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* Vol. 1 (No. 1). p. 3–34.
8. Хазова Ю. А. Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / Ю. А. Хазова // *Компьютерные исследования и моделирование.* — 2017. — Т. 9. — № 5. — С. 705–716.  
KHAZOVA YU. A. (2017) Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle. *Computer Research and Modeling.* Vol. 9 (No. 5). p. 705–716.
9. Разгулин А. В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью / А. В. Разгулин // *Матем. моделирование.* — 1993. — Т. 5. — № 4. — С. 105–119.  
RAZGULIN, A. V (1993) Rotational waves in optical system with 2-d feedback. *Matem. Modeling.* Vol. 5 (No. 4). p. 105–119.
10. Скубачевский А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения / А. Л. Скубачевский // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т. 34. — № 10. — С. 1394–1402.  
SKUBACHEVSKII A. L. (1998) On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. *Differ. Uravn.* Vol. 34 (10). p. 1395–1402.

11. SKUBACHEVSKII A. L. (1998) Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. *Nonlinear Analysis: TMA*. Vol. 32 (2). p. 261–278.
12. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А. В. Разгулин, Т. Е. Романенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53. — № 11. — С. 1804–1821.  
RAZGULIN A. V., and ROMANENKO T. E. (2013) Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay. *Comput. Math. Math. Phys.* Vol. 53 (11). p. 1626–1643.
13. BUDZINSKIY S. S., and RAZGULIN A. V. (2017) Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under  $O(2,2)$  Hopf bifurcation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 49. p. 17–29.
14. BUDZINSKIY S. S., LARICHEV A. V., and RAZGULIN A. V. (2018) Reducing dimensionality to model 2D Rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 44. p. 559–572.
15. Кубышкин Е. П., Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием / Е. П. Кубышкин, В. А. Куликов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61. — № 3. — С. 428–449.  
KUBYSHKIN E. P., KULIKOV V. A. (2021) Bifurcations of Self-Oscillatory Solutions to a Nonlinear Parabolic Equation with a Rotating Spatial Argument and Time Delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 61 (3). p. 403–423.
16. Неймарк Ю. И. D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) / Ю. И. Неймарк // Прикладная математика и механика. — 1949. — Т. 13. — № 4. — С. 349–380.  
NEIMARK YU. I. (1949) D-partition of quasi-polynomial space (on the stability of linearized distributed systems). *Prikl. Math. and Mekh.* 13 (4). p. 349–380.

УДК: 517.927+977

## ЗАДАЧА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И КАУЗАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

© В. В. Обуховский

Воронежский государственный педагогический университет  
Физико-математический факультет  
Кафедра высшей математики  
ул. Ленина, 86, Воронеж, 394043, Российская Федерация  
Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова  
ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, Российская Федерация  
E-MAIL: *valerio-ob2000@mail.ru*

© М. М. Кулманакова

ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"  
Кафедра математики  
ул. Старых большевиков, 54А, Воронеж, 394064, Российская Федерация  
E-MAIL: *m-kulmanakova@yandex.ru*

© М. М. Боровикова

ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина"  
Кафедра математики  
ул. Старых большевиков, 54А, Воронеж, 394064, Российская Федерация  
E-MAIL: *monnya@yandex.ru*

**THE SOLVABILITY PROBLEM FOR A CONTROLLED SYSTEM WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE AND A CAUSAL OPERATOR.**

**Obukhovskii, V. V., Kulmanakova, M. M., Borovikova, M. M.**

**Abstract.** It is known that the contemporary approach in the theory of control systems and mathematical physics leads to models that are conveniently described by using differential equations and inclusions. Recently, the attention of many researchers (see [1]–[3] and the references therein) was attracted to generalizations of differential and functional differential equations and inclusions, namely to the class of functional equations and inclusions with causal operators. The term causal operator or Volterra operator in the sense of A. N. Tikhonov (see [4]), is used in mathematical physics to solve problems of differential equations, integro-differential equations, functional differential equations with finite or infinite delay, Volterra-type integral equations, functional equations of neutral type, etc. (see, for example, [5]). Papers [6]–[9] are devoted to the study of equations and inclusions with causal operators of various types, theorems on the existence of solutions, description of qualitative properties of solutions and various applications. At the same time, in recent decades, interest to the theory of fractional differential equations has increased significantly due to their effective applications in various fields of applied

mathematics, physics, engineering, biology, economics, etc. (see, for example, monograph [10], articles [11]–[16], etc.). In [17]–[23] boundary value problems of various types for fractional differential equations and inclusions were considered. In this paper we develop the results of works [24]–[26] and consider a generalized boundary value problem for a feedback control system governed by a differential inclusion with a fractional derivative and a causal operator of the form

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + \mathcal{F}(x)(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad q \in (0; 1),$$

satisfying the feedback condition

$$u \in \Psi x, \quad u \in L^\infty([0, T]; E)$$

and the general boundary condition:

$$\mathcal{Q}x \in \mathcal{S}x.$$

The paper has the following structure. The second section provides the necessary information from the theory of multivalued maps, measures of noncompactness, the concepts of a multivalued causal operator and a fractional derivative. In the next section, we study a system governed by a semilinear functional differential inclusion of fractional order, satisfying the feedback condition and the general boundary condition, and describe the properties of a multi-operator whose fixed points are solutions of this system. The practical significance of this work is contained in its applicability to the study of systems arising in various branches of natural sciences and governed by various classes of partial differential equations of a fractional order.

**Keywords:** *controlled system, feedback, functional differential inclusion, fractional derivative, finite delay, measure of non-compactness, condensing operator, fixed point, topological degree.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что современный подход в теории систем управления и математической физике приводит к моделям, которые удобно описывать с помощью дифференциальных уравнений и включений. В последнее время внимание многих исследователей (см. работы [1]–[3] и ссылки в них) было привлечено к обобщениям дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и включений, а именно к классу функциональных уравнений и включений с каузальными операторами. Термин каузальный оператор или оператора Вольтерра в смысле А. Н. Тихонова ([4]), используется в математической физике для решения задач дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнений типа Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др. (см., например, [5]). Статьи [6]–[9] посвящены изучению уравнений и включений с каузальными

операторами различных типов, теоремам о существовании решений, описанию качественных свойств решений и различным приложениям. В то же время в последние десятилетия интерес к теории дифференциальных уравнений дробного порядка значительно возрос благодаря их эффективным приложениям в различных областях прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и т. д. (см., например, монографию [10], статьи [11]–[16], и т. д.). В работах [17]–[23] рассматривались краевые задачи различных типов для дробных дифференциальных уравнений и включений. В данной работе развиваются результаты работ [24]–[26] и рассматривается обобщенная граничная задача для управляемой системы с обратной связью, описываемая дифференциальным включением с дробной производной и каузальным оператором, удовлетворяющая условию обратной связи и общему граничному условию.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся необходимые сведения из теории многозначных отображений, мер некомпактности, приводится понятие многозначного каузального оператора и дробной производной. В следующем разделе мы изучаем систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка, удовлетворяющим условию обратной связи и общему граничному условию, исследуются свойства мультиоператора, неподвижные точки которого являются решениями данной системы. Практическая значимость данной работы заключается в возможности ее применения к исследованию систем, возникающих в различных разделах естествознания и описываемых различными классами уравнений в частных производных дробного порядка.

## 2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1. Многозначные отображения и меры некомпактности.** Нам понадобятся некоторые сведения из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см., например, [27]–[28]).

Пусть  $X$  — метрическое пространство;  $\mathcal{E}$  — нормированное пространство. Символом  $P(\mathcal{E})$  обозначается совокупность всех непустых подмножеств пространства  $\mathcal{E}$ ,  $K(\mathcal{E})$  и  $Kv(\mathcal{E})$  обозначают совокупности, состоящие из всех непустых компактных или, соответственно, выпуклых компактных подмножеств пространства  $\mathcal{E}$ .

**Определение 1.** Мультиотображение  $\mathcal{F} : X \rightarrow P(\mathcal{E})$  называется полунепрерывным сверху в точке  $x \in X$ , если для любого открытого подмножества  $W \subset \mathcal{E}$ , такого что  $\mathcal{F}(x) \subset W$ , найдется такая окрестность  $V(x)$  точки  $x$ , что  $\mathcal{F}(V(x)) \subseteq W$ .

Мультиотображение  $\mathcal{F}$  называется полунепрерывным сверху (пн. св.), если оно полунепрерывно сверху в каждой точке пространства  $X$ .

**Определение 2.** Мультиотображение  $\mathcal{F} : X \rightarrow P(\mathcal{E})$  называется компактным, если его область значений  $\mathcal{F}(X)$  — относительно компактное подмножество  $\mathcal{E}$ . Если пн. св. мультиотображение  $\mathcal{F}$  компактно на ограниченных подмножествах  $X$ , то оно называется вполне пн. св. Если мультиотображение  $\mathcal{F}$  компактно на компактных подмножествах  $X$ , то оно называется квазикompактным.

**Лемма 1.** ([27], Теорема 1.1.12.) Если  $\mathcal{F} : X \rightarrow K(E)$  — замкнутое квазикompактное мультиотображение, то оно пн. св.

**Определение 3.** Мультифункция  $G : [0; T] \rightarrow K(E)$ , для  $p \geq 1$ , называется:

- $L^p$ -интегрируемой, если она допускает  $L^p$ -интегрируемое сечение по Бохнеру, то есть существует функция  $g \in L^p([0; T]; E)$ , такая, что  $g(t) \in G(t)$  для почти всех  $t \in [0; T]$ ;
- $L^p$ -интегрально ограниченной, если существует функция  $\xi \in L^p([0; T])$  такая, что:

$$\|G(t)\| := \sup \{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t)$$

для почти всех  $t \in [0; T]$ .

**Лемма 2.** ([27], Теорема 4.2.1.) Пусть последовательность функций  $\{\xi_n\} \subset L^p([0; T]; E)$  является  $L^p$ -интегрально ограниченной. Предположим, что

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leq q(t)$$

для почти всех  $t \in [0; T]$ , где  $q \in L^p_+([0; T])$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует компактное множество  $K_\delta \subset E$  и множество  $m_\delta \subset [0; T]$  с мерой Лебега  $(m_\delta) < \delta$ , а также последовательность функций  $G_\delta \subset L^p([0; T]; E)$  со значениями в  $K_\delta$  такие, что для каждого  $n \geq 1$  существует функция  $b_n \in G_\delta$ , для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2q(t) + \delta, \quad t \in [0; T] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность  $\{b_n\}$  может быть выбрана так, что  $b_n \equiv 0$  на  $m_\delta$  и эта последовательность слабо компактна.

Пусть  $(\mathcal{A}, \geq 0)$  — некоторое частично упорядоченное множество,  $\mathcal{E}$  — нормированное пространство.

**Определение 4.** Отображение  $\beta : P(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$  называется мерой некомпактности (МНК) в  $\mathcal{E}$ , если для любого  $\Omega \in P(\mathcal{E})$  выполнено

$$\beta(\overline{c\partial}\Omega) = \beta(\Omega).$$

Мера некомпактности  $\beta$  называется:



- 1) монотонной, если из  $\Omega_1, \Omega_2 \in P(\mathcal{E})$  и  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$  вытекает, что  $\beta(\Omega_1) \leq \beta(\Omega_2)$ ;
- 2) несингулярной, если для любых  $\Omega \in P(\mathcal{E})$ ,  $a \in \mathcal{E}$  выполнено  $\beta(\Omega \cup \{a\}) = \beta(\Omega)$ .

Если  $\mathcal{A}$  — конус в нормированном пространстве, то МНК  $\beta$  называется:

- 3) вещественной, если  $\mathcal{A}$  множество действительных чисел с естественным порядком;
- 4) регулярной, если  $\beta(\Omega) = 0$  равносильно относительной компактности  $\Omega$ .

Мерой некомпактности, для которой выполнены все вышеприведенные свойства, является МНК Хаусдорфа

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Также в качестве примеров рассмотрим меры некомпактности определенные в пространстве непрерывных функций  $C([0, T]; E)$ , где  $E$  — банахово пространство:

- 1) модуль равностепенной непрерывности:

$$\text{mod}_C(\Omega) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \max_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| < \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|_E;$$

- 2) модуль послойной некомпактности:

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0, T]} \chi_E(\Omega(t)),$$

где  $\chi_E$  — МНК Хаусдорфа в  $E$ ,  $\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\}$ ;

- 3) затухающий модуль послойной некомпактности:

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t \in [0, T]} e^{-Lt} \chi_E(\Omega(t)),$$

где  $L > 0$  — заданное число.

Эти меры некомпактности обладают всеми вышеуказанными свойствами за исключением регулярности. Кроме того, если мы обозначим  $\chi_C$  МНК Хаусдорфа в пространстве  $C([0, T]; E)$ , то мы имеем следующее соотношение ([27], Пример 2.1.3):

$$\varphi_C(\Omega) \leq \chi_C(\Omega). \tag{1}$$

Пусть  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  — нормированные пространства с мерами некомпактности  $\beta$  и  $\beta'$  соответственно;  $\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  — непрерывный линейный оператор.

**Определение 5.** Оператор  $\mathcal{L}$  называется  $(\beta, \beta')$ -ограниченным, если найдется  $C \geq 0$  такое, что  $\beta'(\mathcal{L}\Omega) \leq C\beta(\Omega)$  для всех ограниченных множеств  $\Omega \subset \mathcal{E}$ . Значение  $\|\mathcal{L}\|^{(\beta, \beta')}$ , равное точной нижней грани множества всех таких коэффициентов, называется  $(\beta, \beta')$ -нормой оператора  $\mathcal{L}$ .

В частности, если  $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$  и  $\beta = \beta'$ , то  $\|\mathcal{L}\|^{(\beta, \beta)}$  будем обозначать как  $\|\mathcal{L}\|^{(\beta)}$  и называть  $\beta$ -нормой оператора  $\mathcal{L}$ . Для вычисления  $\chi$ -нормы оператора  $\mathcal{L}$  мы можем применять формулу

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} = \chi(\mathcal{L}S) = \chi(\mathcal{L}B),$$

где  $S$  и  $B$  — единичные сфера и шар в  $\mathcal{E}$ , соответственно. Легко видеть, что

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi)} \leq \|\mathcal{L}\|$$

и

$$\chi(\mathcal{L}\Omega) \leq \|\mathcal{L}\| \chi(\Omega)$$

для любого ограниченного подмножества  $\Omega \subset \mathcal{E}$ .

Пусть  $E$  — банахово пространство,  $\mathcal{L}: E \rightarrow C([a, b]; E)$  — ограниченный линейный оператор и  $\varphi_C$  — модуль послойной некомпактности в  $C([a, b]; E)$ .

Из (1) вытекает, что

$$\|\mathcal{L}\|^{(\chi, \varphi)} \leq \|\mathcal{L}\|^{(\chi)}. \quad (2)$$

**Определение 6.** ([27]) Непустое компактное метрическое пространство  $\mathcal{A}$  называется  $R_\delta$ -множеством, если существует убывающая последовательность  $\{\mathcal{A}_n\}$  компактных стягиваемых множеств такая, что

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{A}_n.$$

Ясно, что компактные выпуклые или, более общо, стягиваемые множества являются примерами  $R_\delta$ -множеств. В то же время,  $R_\delta$ -множество может быть не стягиваемым (см. пример в [28]).

Пусть  $\mathfrak{X}$  — подмножество в  $\mathcal{E}$ .

**Определение 7.** Пн.св. мультиотображение  $\mathcal{F}: \mathfrak{X} \rightarrow K(\mathcal{E})$  называется:

(i)  $R_\delta$ -мультиотображением (или  $J$ -мультиотображением), если каждое значение  $\mathcal{F}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{X}$  является  $R_\delta$ -множеством;

(ii) квази- $R_\delta$ -мультиотображением (или  $CJ$ -мультиотображением), если существует нормированное пространство  $\mathcal{E}_1$ ,  $R_\delta$ -мультиотображение  $\mathcal{F}_1: \mathfrak{X} \rightarrow K(\mathcal{E}_1)$  и непрерывное отображение  $\mathfrak{g}: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}$  такие, что  $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \circ \mathcal{F}_1$ .

Из этого определения и свойств непрерывности мультиотображений (см., например, [27]) вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.** Если  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow K(\mathcal{E})$  — квази- $R_\delta$ -мультиотображения, то их сумма  $\mathcal{F} + \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow K(\mathcal{E})$ ,

$$(\mathcal{F} + \mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{G}(x)$$

также является квази- $R_\delta$ -мультиотображением.

Пусть  $\beta$  — монотонная несингулярная МНК в  $\mathcal{E}$ ,  $\mathfrak{U}$  — открытое ограниченное подмножество  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F} : \overline{\mathfrak{U}} \rightarrow K(\mathcal{E})$  —  $\beta$ -уплотняющее квази- $R_\delta$ -мультиотображение такое, что  $x \notin \mathcal{F}(x)$  для всех  $x \in \partial\mathfrak{U}$ , где  $\partial\mathfrak{U}$  обозначает границу множества  $\mathfrak{U}$ . Тогда для соответствующего мультиполя  $i - \mathcal{F}$  определена числовая характеристика

$$\text{deg}(i - \mathcal{F}, \overline{\mathfrak{U}}),$$

называемая *топологической степенью* ([27], Глава 3.4). Эта характеристика обладает всеми стандартными свойствами топологической степени, в частности, ее отличие от нуля влечет существование по крайней мере одной неподвижной точки  $x \in \mathfrak{U}$ ,  $x \in \mathcal{F}(x)$ .

В качестве следствия этой теории топологической степени мы получаем следующий принцип неподвижной точки ([27], Следствие 3.4.2).

**Предложение 2.** Пусть  $\mathfrak{M}$  — замкнутое ограниченное подмножество  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F} : \mathfrak{M} \rightarrow K(\mathfrak{M})$  —  $\beta$ -уплотняющее квази- $R_\delta$ -мультиотображение. Тогда  $\mathcal{F}$  имеет хотя бы одну неподвижную точку  $x_* \in \mathfrak{M}$ ,  $x_* \in \mathcal{F}(x_*)$ .

**2.2. Каузальные мультиоператоры.** Пусть  $E$  — сепарабельное банахово пространство,  $L^p([0, T]; E)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  — банахово пространство всех суммируемых по Бохнеру функций  $f : [0, T] \rightarrow E$  с обычной нормой.

Для каждого подмножества  $\mathcal{N} \subset L^p([0, T]; E)$  и  $\tau \in (0, T)$  определим сужение  $\mathcal{N}$  на  $[0, \tau]$  как

$$\mathcal{N} |_{[0, \tau]} = \{f |_{[0, \tau]} : f \in \mathcal{N}\}.$$

**Определение 8.** Для заданного  $h \geq 0$  мультиотображение  $\mathcal{Q} : C((-h, T]; E) \rightarrow L^p([0, T]; E)$  будем называть *каузальным мультиоператором*, если для каждого  $\tau \in (0, T)$  и для любых  $u(\cdot), v(\cdot) \in C((-h, T]; E)$  условие  $u |_{(-h, \tau]} = v |_{(-h, \tau]}$  влечет  $\mathcal{Q}(u) |_{[0, \tau]} = \mathcal{Q}(v) |_{[0, \tau]}$ .

Приведем примеры каузальных мультиоператоров.

**Пример 1.** Предположим, что мультиотображение

$$F : [0, T] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$$

удовлетворяет следующим условиям:

- (F1) для любого  $\psi \in C([-h, 0]; E)$  мультифункция  $F(\cdot, \psi) : [0, T] \rightarrow Kv(E)$  допускает измеримое сечение;
- (F2) для п. в.  $t \in [0, T]$  мультиотображение  $F(t, \cdot) : C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$  пн. св.;

(F3) для любого  $r > 0$  найдется функция  $\alpha_r \in L^p_+[0, T]$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  такая, что

$$\|F(t, \psi)\|_E := \sup\{\|z\|_E : z \in F(t, \psi)\} \leq \alpha_r(t)$$

для п. в.  $t \in [0, T]$  и  $\|\psi\|_C \leq r$ .

Из условий (F1) – (F3) (см., например, ([27], [28]) вытекает, что суперпозиционный мультиоператор  $\mathcal{P}_F : C([-h, T]; E) \rightarrow P(L^p([0, T]; E))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  заданный как

$$\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^p([0, T]; E) : f(t) \in F(t, x_t) \text{ п. в. } t \in [0, T]\} \quad (3)$$

корректно определен. Здесь  $u_t \in C([-h, 0]; E)$  определяется как  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ . Ясно, что мультиоператор  $\mathcal{P}_F$  является каузальным.

**Пример 2.** Пусть  $F : [0, T] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$  — мультиотображение, удовлетворяющее условиям (F1) – (F3) Примера 1. Предположим, что  $\{K(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$  является непрерывным (с соответствующей нормой) семейством ограниченных линейных операторов в  $E$  и  $m \in L^1([0, T]; E)$  заданная функция. Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерра  $\mathcal{G} : C([-h, T]; E) \rightarrow L^1([0, T]; E)$ , определенный как

$$\mathcal{G}(u)(t) = m(t) + \int_0^t K(t, s)F(s, u_s)ds,$$

т. е.

$$\mathcal{G}(u) = \{y \in L^1([0, T]; E) : y(t) = m(t) + \int_0^t K(t, s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(u)\}. \quad (4)$$

Также очевидно, что мультиоператор  $\mathcal{G}$  является каузальным.

**Пример 3.** Пусть мультиотображение  $F : [0, T] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow Kv(E)$  удовлетворяет условию (F3) и следующему условию почти полунепрерывности снизу:

(F<sub>L</sub>) существует последовательность непересекающихся компактных подмножеств  $\{J_n\}$ ,  $J_n \subseteq [0, T]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  такая, что  $\mu([0, T] \setminus \bigcup_n J_n) = 0$  и сужение  $F$  на каждое множество  $J_n \times C([-h, 0]; E)$  пн. сн.

Тогда (см., например, [27], [28]) суперпозиционный мультиоператор  $\mathcal{P}_F : C([-h, T]; E) \rightarrow L^1([0, T]; E)$  корректно определен и является каузальным.

### 2.3. Дробная производная.

**Определение 9.** ([10]–[12]). Дробной первообразной порядка  $\alpha \in (0, 1)$  от функции  $g \in L^1([0, T]; E)$  называется функция  $I^\alpha g$  следующего вида:

$$I^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

**Определение 10.** ([10]–[12]). Дробной производной Римана–Лиувилля порядка  $\alpha \in (0, 1)$  от функции  $g \in L^1([0, T]; E)$  называется функция  $D^\alpha g$  следующего вида:

$$D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds.$$

**Определение 11.** ([12]). Дробной производной Герасимова–Капуто порядка  $\alpha \in (N-1, N]$  от функции  $g \in \mathcal{C}^N([0, T]; E)$  называется функция  ${}^C D^\alpha g$  следующего вида:

$${}^C D^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{N-\alpha-1} g^{(N)}(s) ds.$$

Для определенных выше дробной первообразной и дробной производной имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha I^\alpha u(t) &= u(t), \\ I^{\alpha C} D^\alpha u(t) &= u(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Нам понадобятся следующие утверждения, представляющие собой варианты лемм Гронуолла и Гронуолла–Беллмана.

**Лемма 3.** ([12]). Пусть  $u, w : [0, a] \rightarrow [0, +\infty)$  непрерывные функции, причем  $w(\cdot)$  неубывающая, и имеются константы  $b$  и  $0 < \gamma < 1$  такие, что выполнено:

$$u(t) \leq w(t) + b \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\gamma} ds,$$

тогда существует константа  $q = q(\gamma)$  такая, что для любого  $t \in [0, a]$  выполняется:

$$u(t) \leq w(t) + bq \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\gamma} ds.$$

**Лемма 4.** ([12]) Пусть  $h(t)$ ,  $q(t)$  и  $y(t)$  — неотрицательные, интегрируемые на  $[a, b]$  функции, удовлетворяющие неравенству:

$$y(t) \leq q(t) + \int_a^t h(s)y(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

тогда выполняется следующее неравенство:

$$y(t) \leq q(t) + \int_a^t \exp \left\{ \int_a^t h(\theta)d\theta \right\} h(s)q(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

### 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть  $E$  — сепарабельное банахово пространство,  $E_1$  — банахово пространство управлений.

Рассмотрим в  $E$  управляемую систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка:

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + \mathcal{F}(x)(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad q \in (0; 1), \quad (5)$$

удовлетворяющую условию обратной связи

$$u \in \Psi x, \quad u \in L^\infty([0, T]; E) \quad (6)$$

и общему граничному условию:

$$\mathcal{Q}x \in \mathcal{S}x. \quad (7)$$

Относительно операторов входящих в условие задачи будем предполагать выполненным следующее:

(A) замкнутый линейный оператор  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы ограниченных линейных операторов  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ ;

каузальный оператор  $\mathcal{F} : C([-h, T]; E) \rightarrow C(L^p([0, T]; E))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  удовлетворяет условиям:

- ( $\mathcal{F}1$ )  $\mathcal{F}$  является слабо замкнутым в следующем смысле: условия  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C([-h, T]; E)$ ,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p([0, T]; E)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(u_n)$ ,  $n \geq 1$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ ,  $f_n \rightarrow f_0$  влекут  $f_0 \in \mathcal{F}(u_0)$ ;
- ( $\mathcal{F}2$ ) для любого  $r > 0$  найдется функция  $\delta_r(\cdot) \in L_+^\infty([0, T])$  такая, что для любой функции  $u \in C([-h, T]; E)$ , такой что  $\|u\|_C \leq r$  выполняется  $\|\mathcal{F}(u)(t)\|_E \leq \delta_r(t)$  для п. в.  $t \in [0, T]$ ;
- ( $\mathcal{F}3$ ) существует функция  $\omega : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что
- ( $\omega 1$ ) для любого  $x \in \mathbb{R}_+$   $\omega(\cdot, x) \in L_+^p([0, T])$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ;
  - ( $\omega 2$ ) для п. в.  $t \in [0, T]$  функция  $\omega(t, \cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  является непрерывной, неубывающей и однородной в том смысле, что  $\omega(t, \lambda x) = \lambda \omega(t, x)$  для каждого  $x \in \mathbb{R}_+$  и  $\lambda \geq 0$ ;
  - ( $\omega 3$ ) для каждого ограниченного множества  $\Delta \subset C([-h, T]; E)$  выполнено

$$\chi(\mathcal{F}(\Delta)(t)) \leq \omega\left(t, \sup_{s \in [0, t]} \varphi(\Delta_s)\right) \text{ для п. в. } t \in [0, T],$$

где множество  $\Delta_s \subset C([-h, 0]; E)$  определено как  $\Delta_s = \{y_s : y \in \Delta\}$  и  $\varphi$  — модуль послыонной некомпактности в  $C([-h, 0]; E)$ .

Заметим, что условие ( $\omega 2$ ) означает, что  $\omega(t, 0) = 0$  для п. в.  $t \in [0, T]$  и в качестве примера такой функции мы можем рассмотреть  $\omega(t, x) = k(t) \cdot x$ , где  $k(\cdot) \in L_+^p([0, T])$ .

Относительно ограниченного линейного оператора  $B : E_1 \rightarrow E$  и мультиотображения обратной связи  $\Psi : C([-h, T]; E) \rightarrow K(C([0, T]; E_1))$  будем предполагать, что

- ( $\Psi$ ) мультиотображение  $B\Psi : C([-h, T]; E) \rightarrow K(C([0, T]; E))$  является вполне пн. св. и квази- $R_\delta$ .

Для операторов из краевого условия (7) предполагаются выполненными условия:

- ( $\mathcal{Q}$ )  $\mathcal{Q} : C([-h, T]; E) \rightarrow C([-h, 0]; E)$  линейный ограниченный оператор;
- ( $\mathcal{S}$ ) мультиотображение  $\mathcal{S} : C([-h, T]; E) \rightarrow Kv(C([-h, 0]; E))$  является вполне пн. св.

**Определение 12.** Пара функций  $x \in C([-h, T]; E)$  и  $u \in C([0, T]; E_1)$  образуют интегральное решение задачи (5)–(7), если функция  $x$  удовлетворяет условию (7) и при  $t \in [0, T]$  имеет вид

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{F}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^{\infty} \xi_q(\theta) \exp(t^q \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^{\infty} \theta \xi_q(\theta) \exp(t^q \theta) d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}^+,$$

$f \in \mathcal{F}(x)$ , а функция  $u$  удовлетворяет (6). Функция  $x$  называется траекторией системы, а функция  $u$  — соответствующее управление.

Для операторов  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{T}$  верно утверждение.

**Лемма 5.** ([12], Лемма 3.2.) Операторы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{T}$  обладают следующими свойствами:

- 1) для любого  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{G}(t)$  и  $\mathcal{T}(t)$  являются линейными ограниченными операторами и удовлетворяют для каждого  $x \in E$  оценкам:

$$\|\mathcal{G}(t)x\|_E \leq M \|x\|_E; \quad (8)$$

$$\|\mathcal{T}(t)x\|_E \leq \frac{qM}{\Gamma(1+q)} \|x\|_E, \quad (9)$$

где  $M = \sup_{t \geq 0} \|\{U(t)\}\|$ ;

- 2) операторы  $\mathcal{G}(t)$  и  $\mathcal{T}(t)$  сильно непрерывны для всех  $t \in [0, T]$ , то есть функции  $t \in [0, a] \rightarrow \mathcal{G}(t)x$  и  $t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{T}(t)x$  непрерывны для всех  $x \in E$ .

Рассмотрим линейный оператор  $G : L^p([0, T]; E) \rightarrow C([-h, T]; E)$ ,  $p > 1/q$ , определенный как

$$Gf(x) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \in [-h, 0], \end{cases}$$

Очевидно, что оператор  $G$  является каузальным ([2], [12]).

**Лемма 6.** ([27], Лемма 4.2.1) Оператор  $G$  обладает следующими свойствами:

(G1) для  $1 \leq p < \infty$  существует константа  $D \geq 0$  такая, что

$$\|G(\xi)(t) - G(\eta)(t)\|_E^p \leq D \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E^p ds, \quad \xi, \eta \in L^p([0, T]);$$

если  $p = \infty$  тогда существует константа  $D_1 \geq 0$  такая, что

$$\|G(\xi)(t) - G(\eta)(t)\|_E \leq D_1 \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds, \quad \xi, \eta \in L^\infty([0, T]);$$



(G2) для произвольного компактного множества  $K \subset E$  и последовательности  $\{\eta_n\} \subset L^p([0, T]; E)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  такой, что  $\{\eta_n(t)\} \subset K$  для всех  $t \in [0, T]$  слабая сходимость  $f_n \rightharpoonup f_0$  влечет  $Gf_n \rightarrow Gf_0$  в  $C([0, T]; E)$

(G3)  $(Gf)(0) = 0$  для каждой функции  $f \in L^p([0, T]; E)$ .

**Лемма 7.** ([12], Лемма 3.5) Пусть последовательность функций  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p([0, T]; E)$   $L^p$ -интегрально ограничена и существует функция  $v \in L^p_+([0, T])$  такая, что

$$\chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty) \leq v(t) \text{ для п. в. } t \in [0, T].$$

Для оператора  $G$  при  $1 \leq p < \infty$  имеем

$$\chi(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) \leq (4D \int_0^t v^p(s) ds)^{1/p},$$

и при  $p = \infty$

$$\chi(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) \leq 2D_1 \int_0^t v(s) ds,$$

для всех  $t \in [0, T]$ , где  $D, D_1$  константы из условия (G1).

Для описания основного свойства этого оператора нам понадобится следующее понятие.

**Определение 13.** Последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p([0, T]; E)$  называется  $L^p$ -полукомпактной, если она  $L^p$ -интегрально ограничена, т. е. существует функция  $\zeta \in L^p([0, T])$  такая, что

$$\|f_n(t)\|_E \leq \zeta(t) \text{ для п. в. } t \in [0, T], n = 1, 2, \dots$$

и множество  $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$  относительно компактно в  $E$  для п. в.  $t \in [0, T]$ .

**Лемма 8.** ([27], Предложение 4.2.1.) Каждая  $L^p$ -полукомпактная последовательность слабо компактна в  $L^1([0, T]; E)$ .

**Лемма 9.** ([28], Теорема 5.1.1.) Пусть  $G : L^p([0, T]; E) \rightarrow C([-h, T]; E)$  оператор, удовлетворяющий условиям (G1)–(G2). Тогда для каждой  $L^p$ -полукомпактной последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  из  $L^p([0, T]; E)$  последовательность  $\{Gf_n\}_{n=1}^\infty$  относительно компактна в  $C([0, T]; E)$  и, более того, слабая сходимость  $f_n \rightharpoonup f_0$  влечет  $Gf_n \rightarrow Gf_0$ .

**Предложение 3.** ([2], Theorem 3) Композиция  $G \circ \mathcal{F} : C([-h, T]; E) \rightarrow Kv(C([-h, T]; E))$  является пн. св. мультиотображением с компактными значениями.

Обозначим  $C_0$  подпространство  $C([-h; T]; E)$ , состоящее из функций, имеющих на  $[0, T]$  вид

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0), \quad t \in [0, T]$$

и обозначим  $\mathcal{Q}_0$  сужение  $\mathcal{Q}$  на  $C_0$ .

Основным требованием на граничные операторы  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{S}$  будет следующее условие:

( $\mathcal{QS}$ ) существует непрерывный линейный оператор  $\Lambda : C([-h; 0]; E) \rightarrow C_0$  такой, что

$$(I - \mathcal{Q}_0\Lambda)(y - \mathcal{Q}G[f + Bu]) = 0$$

для всех  $x \in C([-h, T]; E)$ ,  $y \in \mathcal{S}(x)$ ,  $f \in \mathcal{F}$  и  $u \in \Psi x$ .

Для того, чтобы привести пример выполнения данного условия, рассмотрим линейный ограниченный оператор  $r : C([-h; 0]; E) \rightarrow C_0$ , который определим как

$$(rc)(t) = \begin{cases} c(t), & t \in [-h, 0]; \\ \mathcal{G}(t)c(0), & t \in [0; T]. \end{cases}$$

Предположим следующее:

( $\tilde{\mathcal{Q}}$ ) линейный ограниченный оператор  $\tilde{\mathcal{Q}} : C([-h; 0]; E) \rightarrow C([-h; 0]; E)$ , определенный как  $\tilde{\mathcal{Q}}c = \mathcal{Q}(rc)$  является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия ( $\tilde{\mathcal{Q}}$ ) оператор  $\Lambda$  можно задать явным образом:

$$\Lambda c = r[\tilde{\mathcal{Q}}^{-1}(c)].$$

В предположении, что выполнено условие ( $\mathcal{QS}$ ), рассмотрим мультиоператор

$$\Gamma : C([-h; T]; E) \rightarrow K(C([-h; T]; E)),$$

заданный следующим образом:

$$\Gamma(x) = \Lambda\mathcal{S}(x) + (I - \Lambda\mathcal{Q})G[\mathcal{F}(x) + B\Psi(x)].$$

Из условий, наложенных на операторы  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $B$ ,  $\Psi$ ,  $\Lambda$  и Предложений 1 и 3 следует, что мультиоператор  $\Gamma$  является  $R_\delta$ -мультиотображением.

Основное свойство мультиоператора  $\Gamma$  характеризуется следующим утверждением.

**Теорема 1.** *Каждая неподвижная точка  $\Gamma$ , т. е. функция  $x(\cdot)$ , удовлетворяющая соотношению*

$$x = \Lambda z + (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f + Bu) \tag{10}$$

для некоторых  $z \in \mathcal{S}(x)$ ,  $f \in \mathcal{F}(x)$  и  $u \in \Psi(x)$  вместе с функцией  $u$  образуют интегральное решение задачи (5)–(7).

Обратно, при условии  $(\tilde{\mathcal{Q}})$ , если  $x$  и  $u$  — траектория и соответствующее управление для задачи (5)–(7), то функция  $x$  удовлетворяет (10) для  $z = \mathcal{Q}x \in \mathcal{S}(x)$  и  $f \in \mathcal{F}(x)$ , т. е.  $x$  является неподвижной точкой мультиоператора  $\Gamma$ .

Доказательство. (i) Поскольку функция  $x$  может быть представлена в виде

$$x = \Lambda(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)) + G(f + Bu),$$

мы получаем, что  $x$  удовлетворяет интегральному равенству из определения решения.

Проверим выполнение граничного условия. Используя условие  $(\mathcal{QS})$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}x &= \mathcal{Q}_0\Lambda z + \mathcal{Q}(I - \Lambda\mathcal{Q})G(f + Bu) = z - (z - \mathcal{Q}_0\Lambda z) + \mathcal{Q}G(f + Bu) + \mathcal{Q}_0\Lambda\mathcal{Q}G(f + Bu) = \\ &= z - (I - \mathcal{Q}_0\Lambda)(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)) = z \in \mathcal{S}x. \end{aligned}$$

(ii) Пусть теперь  $x$  и  $u$  — интегральное решение задачи (5)–(7). Тогда функция  $x$  удовлетворяет соотношению

$$x = r(\psi) + G(f + Bu)$$

для некоторого  $f \in \mathcal{F}(x)$ , где  $\psi = x|_{[-h,0]}$ . Тогда

$$\mathcal{Q}x = \tilde{\mathcal{Q}}(\psi) + \mathcal{Q}G(f + Bu),$$

откуда мы получаем

$$\psi = \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu))$$

и следовательно

$$r(\psi) = \Lambda(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu)).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} x &= \Lambda(\mathcal{Q}x - \mathcal{Q}G(f + Bu)) + G(f + Bu) = \\ &= \Lambda\mathcal{Q}x + (I - \Lambda\mathcal{Q})G(f + Bu) \in \Gamma(x). \end{aligned}$$

□

Покажем теперь, что при некоторых дополнительных ограничениях мультиоператор  $\Gamma$  является уплотняющим.

Пусть выполнены следующие условия:

(H1) найдется  $b \geq 0$  такое, что для любого ограниченного множества  $\Omega \subset C([-h; T]; E)$  выполнено

$$\varphi_{C([-h;0];E)}(\mathcal{Q}\Omega) \leq b\varphi_{C([-h;T];E)}(\Omega);$$

(H2) константа  $L > 0$  выбрана так, что

$$\max\{q_1, q_2\} < 1,$$

где

$$q_1 = \sup_{t \in [0, T]} [4D^{1/p}(1 + \lambda b) \left( \int_0^t e^{-Lp(t-s)} \omega^p(s, 1) ds \right)^{1/p}] < 1,$$

$$q_2 = \sup_{t \in [0, T]} [2D_1(1 + \lambda b) \left( \int_0^t e^{-L(t-s)} \omega^p(s, 1) ds \right)] < 1$$

и  $\lambda > 0$  такого, что  $\|\Lambda\| \leq \lambda$ .

Рассмотрим МНК  $\nu$  на пространстве  $C([-h; T]; E)$  со значениями в конусе  $\mathbb{R}_+^2$ :

$$\nu(\Omega) = (\gamma(\Omega), \text{mod}_C(\Omega)),$$

где  $\gamma$  — затухающий модуль послойной некомпактности и  $\text{mod}_C$  — модуль равномерной непрерывности.

**Теорема 2.** При выполнении условий (H1) — (H2) мультиоператор  $\Gamma$  является  $\nu$ -уплотняющим на ограниченных подмножествах пространства  $C([-h; T]; E)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Omega \subset C([-h; T]; E)$  непустое ограниченное множество и  $\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega)$ . Покажем, что тогда  $\Omega$  — относительно компактное множество. Представим мультиоператор  $\Gamma$  в виде суммы

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) + \Gamma_3(x),$$

где  $\Gamma_1(x) = \Lambda \mathcal{S}(x)$ ,  $\Gamma_2(x) = (I - \Lambda \mathcal{Q})G \mathcal{F}$  и  $\Gamma_3(x) = (I - \Lambda \mathcal{Q})GB\Psi(x)$ . В силу условий, наложенных на мультиотображения  $\mathcal{S}$  и  $B\Psi$ , мультиоператоры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$  являются вполне п.с.в. Тогда проверка утверждения теоремы сводится к проверке  $\nu$ -уплотняемости мультиоператора  $\Gamma_2$ .

В силу сепарабельности пространства  $E$ , мы можем без ущерба для общности считать, что множества  $\Omega$  и  $\Gamma_2(\Omega)$  счетны:  $\Omega = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\Gamma_2(\Omega) = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ , и более того

$$y_n \in \Gamma_2(x_n). \quad (11)$$

А значит

$$y_n(t) = (I - \Lambda Q)G f_n(t), \quad f_n \in \mathcal{F}(x_n), \quad n \geq 1.$$

Из исходного неравенства следует, что:

$$\varphi_{C([-h; T]; E)}(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi_{C([-h; T]; E)}(\Omega),$$

то есть  $\varphi(\{y_n\}_{n=1}^\infty) \geq \varphi(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$ .

Применяя условие ( $\mathcal{F}3$ ) и используя свойства функции  $\omega$  получаем для п. в.  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \chi(\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty) &\leq \omega\left(t, \sup_{0 \leq s \leq t} \varphi(\{(x_n)_s\}_{n=1}^\infty)\right) = \omega\left(t, \varphi(\{x_n|_{[-h,t]}\}_{n=1}^\infty)\right) \\ &= \omega\left(t, e^{Lt}e^{-Lt}\varphi(\{x_n|_{[-h,t]}\}_{n=1}^\infty)\right) \leq \omega\left(t, e^{Lt}\gamma(\{x_n|_{[-h,t]}\}_{n=1}^\infty)\right) \\ &\leq \omega\left(t, e^{Lt}\gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty)\right) \leq \omega(t, e^{Lt}) \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty). \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим случай  $1 \leq p < \infty$ . По Лемме 7 для каждого  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} \chi(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) &\leq \left(4^p D \int_0^t \omega^p(s, e^{Ls}) ds \cdot \gamma^p(\{x_n\}_{n=1}^\infty)\right)^{1/p} \leq \\ &\leq 4D^{1/p} \left(\int_0^t e^{pLs} \omega^p(s, 1) ds\right)^{1/p} \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\{y_n(t)\}_{n=1}^\infty) &\leq \chi(\{(I - \Lambda Q)Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) \leq (1 + \lambda b)\chi(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty), \\ e^{-Lt}\chi(\{y_n(t)\}_{n=1}^\infty) &\leq (1 + \lambda b)\chi e^{-Lt}(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) \leq \\ &\leq (1 + \lambda b)4D^{1/p} \left(\int_0^t e^{-Lp(s-t)} \omega^p(s, 1) ds\right)^{1/p} \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = q_1 \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty). \end{aligned}$$

То есть  $\gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \leq q_1 \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$ .

Из условий теоремы и предположения в начале доказательства мы получаем, что  $\gamma(\Omega) = 0$ .

Теперь рассмотрим случай  $p = \infty$ . По Лемме 7 для каждого  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} \chi(\{Gf_n(t)\}_{n=1}^\infty) &\leq 2D_1 \int_0^t \omega(s, e^{Ls}) ds \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \leq \\ &\leq 2D_1 \int_0^t e^{Ls} \omega(s, 1) ds \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty). \end{aligned}$$

Снова умножая обе части последнего неравенства на  $e^{-Lt}$  и беря  $\sup$  по  $t \in [0, T]$ , получим  $\gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty) \leq q_2 \cdot \gamma(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$ .

Значит и в этом случае  $\gamma(\Omega) = 0$ .

Осталось показать, что множество  $\Omega$  равномерно непрерывно. Рассмотрим последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$  и  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(x_n)$ . Из условий (F2) – (F3) следует, что последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$   $L^p$ -полукомпактна и значит по Лемме 9 последовательность  $\{Gf_n\}_{n=1}^{\infty}$  относительно компактна. Тогда  $\text{mod}_C(\{Gf_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$ . Следовательно  $\nu(\omega) = (0, 0)$  и это означает относительную компактность множества  $\omega$ .  $\square$

Доказанные свойства мультиоператора  $\Gamma$  дают возможность применить для его исследования теорию топологической степени уплотняющих мультиполей. Закончим рассмотрение задачи применением к оператору  $\Gamma$  Предложения 2 и формулировкой общего принципа существования интегральных решений задачи (5)–(7).

**Теорема 3.** *При указанных выше условиях, пусть ограниченное открытое множество  $\Omega \subset C((-h; T]; E)$  не имеет траекторий задачи (5)–(7) на  $\partial\Omega$  и пусть*

$$\text{deg}(i - \Gamma, \bar{\Omega}) \neq 0.$$

*Тогда множество интегральных решений  $\{x, u\}$  задачи (5)–(7) таких, что  $x \in \Omega$ , не пусто.*

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: задача нахождения траектории и соответствующего управления для рассматриваемой системы была сведена к задаче поиска неподвижной точки многозначного оператора. Для мультиоператора было доказано, что он является уплотняющим относительно введенной меры некомпактности, что позволило применить к нему теорию топологической степени.

*Работа В. В. Обуховского поддержана грантом РФФ № 20-11-20131.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. LUPULESCU, V. (2008) Causal functional differential equations in Banach spaces. *Nonlinear Anal.* 69 (12). p. 4787–4795.
2. OBUKHOVSKII, V., & ZECCA, P. (2011) On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces. *Nonlinear Anal.* 74 (8). p. 2765–2777.
3. Кулманакова М. М., Ульянова Е. Л. О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием // Вестник российских университетов. Математика. — 2019, Т. 24. — № 127. — С. 293–315.

- KULMANAKOVA, M., UL'YANOVA, E. (2019) On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay. *Russian universities reports. Mathematics.* 24 (127). p. 293–315.
4. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. ун-та. — Астрахань: Волга, 1938. — Секц. А, Вып. 8, Т. 1. — С. 1–25.
- ТИХОНОВ, А. (1938) On Volterra-type functional equations and their applications to some problems of mathematical physics. *Vyull. Mosk. un-ta.* Sect. A, Вып. 8 (V. 1). p. 1–25.
5. CORDUNEANU, C. (2002) *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications.* London, Taylor and Francis. 528.
6. Булгаков А. И., Максимов В. П. Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами // Дифференц. уравнения. — 1981, Т. 17. — № 8. — С. 1362–1374.
- BULGAKOV, A., MAKSIMOV, V. (1981) Functional and functional-differential inclusions with voltaire operators. *Diff. equation.* 17 (8). p. 1362–1374.
7. DRICI, Z., MCRAE, F. A. & VASUNDHARA DEVI, J. (2005) Differential equations with causal operators in a Banach space. *Nonlinear Anal.* 62 (2). p. 301–313.
8. DRICI, Z., MCRAE, F. A. & VASUNDHARA DEVI, J. (2006) Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators. *Nonlinear Anal.* 64 (6). p. 1271–1277.
9. JANKOWSKII, T. (2008) Boundary value problems with causal operators. *Nonlinear Anal.* 68 (12). p. 3625–3632.
10. KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M. & TRUJILLO, J. J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B.V.
11. PODLUBNY, I. (1999) *Fractional Differential Equation.* San Diego. Academic Press.
12. AFANASOVA, M., LIOU, Y. CH., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G. (2019) On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis.* 20 (9). p. 1919–1935.

13. APPELL, J., LOPEZ, B., SADARANGANI, K. (2018) Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives. *J. Nonlinear Var. Anal.* 2. p. 25–33.
14. GOMOYUNOV, M. I. (2018) Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 21. p. 1238–1261.
15. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2019) Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions. *Fixed Point Theory and Applications.* 30 (2). p. 1–21.
16. MAINARDI, F, RIONERO, S., RUGGERI, T. (1994) On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. *In Waves and Stability in Continuous Media.* Singapore, World Scientific. p. 246–251.
17. AGARWAL, R. P., AHMAD, B. (2011) Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions. *Comput. Math. Appl.* 62. p. 1200–1214.
18. GOMOYUNOV, M. I. (2019) Approximation of fractional order conflict-controlled systems. *Prog. Fract. Differ. Appl.* 5. p. 143–155.
19. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2019) On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. *Mathematics.* 7 (12). p. 5–19.
20. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2021) On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. *Mathematics.* 9 (2). p. 136–154.
21. KAMENSKII, M., PETROSYAN, G., WEN, C.-F. (2021) An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis.* 5 (1). p. 155–177.
22. PETROSYAN, G. (2021) Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order. *The Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics* (34). p. 51–66.
23. PETROSYAN, G. (2020) On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space. *Ufa Mathematical Journal.* 12 (3). p. 69–80.



24. Кулманакова, М. М., Обуховский, В. В., Ульянова Е. Л. Обобщенная граничная задача для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018, Т. 23. — № 121. — С. 44–64.  
KULMANAKOVA, M., OBUKHOVSKII, V., UL'YANOVA, E. (2018) Generalized boundary value problem for a controlled system with feedback and infinite delay. *Bulletin of the Tambov University. Series: Natural and Technical Sciences.* 23 (121). p. 44–64.
25. Афанасова, М. С., Петросян, Г. Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Серия: Математика. — 2019, № 9. — С. 3–15.  
AFANASOVA, M., PETROSYAN, G. (2019) On the Cauchy problem for a functional-differential inclusion of a fractional order with a common initial condition in a Banach space. *News of higher educational institution. Series: Mathematics.* 9. p. 3–15.
26. AFANASOVA, M. M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G. (2021) A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions. *Adv. Syst. Sci. Appl.* 3. p. 40–62.
27. Борисович, Ю. Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. — М.: Книжный дом "Либроком", 2011. — 224 с.  
BORISOVICH, Y. and GEL'MAN, B. and MYSHKIS, A. and OBUKHOVSKII, V. (2011) *Introduction to the theory multivalued mappings and differential inclusions.* 2nd edition. Moscow.
28. KAMENSKII, M. and OBUKHOVSKII, V. and ZECCA, P. (2001) *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Berlin-New York. Walter de Gruyter.

---

Novikov V. V. On a consistency of nonparametric estimator for regression function / V. V. Novikov // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 7–12.

УДК: 519.23

Доказано достаточное условие состоятельности непараметрической оценки функции регрессии, основанной на частных суммах Фурье–Лагранжа.

*Ключевые слова:* непараметрическая регрессия, непротиворечивость, оценочная функция, ортогональный ряд.

---

Германчук М. С. Прикладные задачи многоагентной маршрутизации / М. С. Германчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 13–25.

УДК: 519.16

Прикладные сетевые задачи многоагентной маршрутизации (applied network tasks of multiagent routing или *mTSP*) возникают во многих прикладных областях и приводят к различным моделям псевдобулевой оптимизации. Такие задачи, как правило, являются *NP*-трудными, для них точные алгоритмы применимы только в случае малой размерности исходной сети (графа). Модели таких задач в работах автора возникли при планировании многодневных туристических маршрутов по достопримечательностям; выборе маршрутов агентами в условиях чрезвычайных ситуаций; при использовании беспилотных летающих аппаратов, дронов (*БПЛА*) *mTSP* для построения маршрутов; в задачах обхода кластеров (обход сообществ социальных сетей).

Приведены результаты согласованной с *mTSP* кластеризации сети и сравнительный анализ композиций алгоритмов. Важным в процессе исследования является учет всей имеющейся информации, фактов, знаний, прецедентов как для построения иерархии моделей, так и для разработки практических алгоритмов решения.

Предложенный сценарий исследования *mTSP* может быть перспективным для разработки интеллектуализированных многоагентных систем прикладной маршрутизации.

*Ключевые слова:* multiagent traveling salesman problems (*mTSP*), прикладные алгоритмы маршрутизации, согласованная кластеризация.

---

Гетманская И. В. Интервальное оценивание нелинейной параметрической регрессии в пассивном эксперименте / И. В. Гетманская // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 26–39.

УДК: 519.23

В работе приводится метод построения точечных и интервальных оценок регрессионного коэффициента (РК) нелинейной регрессии в пассивном, в определённом смысле, эксперименте. При этом в качестве исходных данных оценивания выступают наблюдаемые реализации РК (РРК), которые результат решения обратной задачи: нахождения параметра РК функции регрессии по измеренным значениям её зависимой и независимой переменных без учёта погрешностей.

*Ключевые слова:* регрессия, регрессионный коэффициент, нелинейное, точечное, интервальное, состоятельное и эффективное оценивание, математическое ожидание, дисперсия, среднееквадратичное отклонение, средневывборочные числовые характеристики случайной величины.

---

---

Жужома Е. В., Медведев В. С. Полярные системы Морса–Смейла с двумя седлами на  $n$ -мерной сфере / Е. В. Жужома, В. С. Медведев // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 40–51.

УДК: 517.938

В работе построены примеры полярных систем Морса–Смейла с одним стоком, одним источником и двумя седлами на многомерной сфере, при этом индекс Морса одного из седел может принимать любые значения от 1 до коразмерности один. Доказано, что индексы Морса седел всегда различны, и неустойчивое многообразие седла с большим индексом Морса пересекается с устойчивым многообразием другого седла.

*Ключевые слова:* динамическая система Морса–Смейла, сепаратриса, индекс Морса.

---

---

Кубышкин Е. П., Пахомов А. И. Исследование устойчивости вращения твердого тела на гибком стержне / Е. П. Кубышкин, А. И. Пахомов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 52–68.

УДК: 517.9, 531.38

В работе исследуется устойчивость вращения симметричного твердого тела на вертикальном гибком стержне (валу). Материал вала рассматривается наследственно вязкоупругим. Уравнения движения гибкого вала построены в рамках линейной модели Эйлера-Бернулли. Математическая модель рассматриваемой механической системы представляет собой начально-краевую задачу для уравнений в частных производных и бесконечным (интегральным) запаздыванием аргумента. Краевые условия содержат производные по времени. Введено понятие обобщенного решения начально-краевой задачи и доказано его существование и единственность. Исследована устойчивость решений начально-краевой задачи, в плоскости основных параметров математической модели - скорости вращения и коэффициента внешнего трения, построены области устойчивости решений. Исследованы механизмы потери устойчивости.

*Ключевые слова:* роторные системы, начально-краевая задача для уравнений в частных производных и запаздывающим аргументом, функционально-дифференциальные уравнения, устойчивость решений, метод D-разбиений.

---

**Куликов В. А. Анализ устойчивости состояний равновесия параболического уравнения с оператором растяжения и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи / В. А. Куликов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 69 – 84.**

**УДК: 517.9**

В работе рассматривается динамика и устойчивость однородных состояний равновесия математической модели нелинейного генератора оптического излучения с оператором растяжения пространственных координат световой волны и временным запаздыванием в контуре обратной связи. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу для уравнения параболического типа в круге с оператором растяжения пространственного аргумента и временным запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Исследуется динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров начально-краевой задачи. В плоскости основных параметров управления (коэффициента усиления и величины временного запаздывания) с использованием метода D-разбиений построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Изучены возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия. Показана возможность колебательной потери устойчивости, которая обусловлена прохождением через мнимую ось комплексной плоскости при изменении

параметров начально-краевой задачи одной или двух пар комплексно сопряженных точек спектра характеристического пучка операторов. В случае прохождения двух пар комплексно сопряженных точек спектра между ними возможны резонансные соотношения. Показана возможность потери устойчивости одновременно несколькими состояниями равновесия.

*Ключевые слова:* уравнение с запаздывающим аргументом, устойчивость решений, метод  $D$ -разбиений.

---

Обуховский В. В., Кулманакова М. М., Боровикова М. М. Задача разрешимости для управляемой системы с дробной производной и каузальным оператором / В. В. Обуховский, М. М. Кулманакова, М. М. Боровикова // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 4 (53). — С. 85 – 105.

УДК: 517.927+977

В работе рассматривается обобщенная граничная задача для управляемой системы с обратной связью, описываемая дифференциальным включением с дробной производной и каузальным оператором, удовлетворяющая условию обратной связи и общему граничному условию. Построен многозначный оператор, неподвижные точки которого будут являться решениями исходной задачи.

*Ключевые слова:* управляемая система, обратная связь, функционально-дифференциальное включение, дробная производная, конечное запаздывание, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, топологическая степень.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

---

- Боровикова Марина Михайловна*** к. ф.-м. н, доцент кафедры математики ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", г. Воронеж, РФ  
*e-mail: monnyu@yandex.ru*
- Германчук Мария Сергеевна*** ассистент кафедры информатики Физико-технического института (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, РФ  
*e-mail: m.germanchuk@yandex.ru*
- Гетманская Ирина Васильевна*** к. т. н, доцент кафедры математического анализа факультета информационных технологий Московского технического университета связи и информатики, г.Москва, РФ  
*e-mail: getmi@mail.ru*
- Жужома Евгений Викторович*** д. ф.-м. н, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 603155, РФ  
*e-mail: zhuzhoma@mail.ru*
- Кубышкин Евгений Павлович*** доктор физ.мат.наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования математического факультета Ярославского государственного университета, г.Ярославль, РФ  
*e-mail: kubysh.e@yandex.ru*
- Куликов Владимир Александрович*** аспирант кафедры математического моделирования математического факультета Ярославского государственного университета, г.Ярославль, РФ  
*e-mail: kulikov7677@gmail.com*
- Кулманакова Марина Михайловна*** к. ф.-м. н, доцент кафедры математики ВУНЦ ВВС "ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", г. Воронеж, РФ  
*e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru*

**Медведев Владислав  
Сергеевич**

к. ф.-м. н, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, Нижний Новгород, 603155, РФ

*e-mail: medvedev-1942@mail.ru*

**Новиков Владимир  
Васильевич**

к. ф.-м. н, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа механико-математического факультета Саратовского государственного университета, г. Саратов, РФ

*e-mail: vnovikov@yandex.ru*

**Обуховский Валерий  
Владимирович**

д. ф.-м. н, профессор, заведующий кафедрой высшей математики физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического университета, г. Воронеж, РФ, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, г. Москва, РФ

*e-mail: valerio-ob2000@mail.ru*

**Пахомов Александр  
Игоревич**

магистрант кафедры математического моделирования математического факультета Ярославского государственного университета, г.Ярославль, РФ

*e-mail: aleksandr.pakhomov98@gmail.com*

Подписано к печати 20.05.2022. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж ?? экз.  
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: ?? ?? ????.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7