Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 3 (52) ' 2021

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2021, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 2 от 02 апреля 2022 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: **www.tvim.info**

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 517.95

MSC2010: 35E05

DIFFERENTIAL EQUATION ASSOCIATED WITH INVOLUTIONS

© F. N. Dekhkonov

National University of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: *f.n.dehqonov@mail.ru*

Differential equation associated with involutions.

Dekhkonov F. N.

Abstract. In this paper, we consider with a class of system of differential equations whose argument transforms are involutions. In this an initial value problem for a differential equation with involution is reduced to an initial value problem for a higher order ordinary differential equation. Then either two initial conditions are necessary for a solution; the equation is then reduced to a boundary value problem for a higher order ODE.

Keywords: *involution, linear differential equation, fixed point, boundary value problem*

INTRODUCTION

When studying the general properties of functional differential equations, it is always important to find and solve selected classes of equations as explicitly as possible, using methods that are capable of generalization. Differential equations with involutions is one of those classes.

The concept of involution is fundamental for the theory of groups and algebras, but, at the same time, being an object in mathematical analysis properties allow the obtaining of further information concerning this object. In order to be clear in this respect, let us define what we understand by involution in this analytical context. We follow the definitions of [1], [2] and [8].

Definition 1. Let $A \subset \mathbb{R}$ be a set containing more that one point and $f : A \to A$ a function such that f is not the *identity* Id. Then f is an *involution* if

$$f^2 \equiv f \circ f = Id$$

or, equivalently, if

$$f = f^{-1}.$$

If $A = \mathbb{R}$, we say that f is a strong involution (see, [2]).

Example 1. The following involutions are the most common examples:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x$ is an involution known as *reflection*.
2. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ known as *inversion*.
3. Let $a,b,c\in\mathbb{R}$, $cb+a^2\neq 0$, $c\neq 0$,

$$f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\},\quad f(x)=\frac{ax+b}{cx-a},$$

is a family of functions known as *bilinear involutions*.

1. Differential equations with involutions

Differential equations with involutions were introduced for the first time [6], [7], [9] and [10] and since then have become an important part in the general theory of functional differential equations, with applications to certain biomedical models [3], stability of motion [4], and the pantograph equation [5]. They can be transformed into ordinary differential equations and thus provide an abundant source of relations with analytic solutions, as well as heuristic ideas for equations of more general nature.

Definition 2. An expression of the form

$$F(x,y(f_1(x)),...,y(f_k(x)),...,y^{(n)}(f_1(x)),...,y^{(n)}(f_k(x)))=0,\quad x\in\mathbb{R},$$

where $f_1,...f_k$ are involutions and F is a real function of $nk+1$ real variables is called *differential equations with involutions*.

Example 2. The solution of the initial-value problem for the differential equation with reflection of the argument,

$$y'(x)=a\,y(-x),\quad y(0)=y_0.$$

Then, we get the following solution (see, [1])

$$y(x)=y_0\,(\cos ax+\sin ax).$$

Set a "new"involution function

$$f(x)=\log_a\left(b-a^x\right),\quad a>0,a\neq 1,\quad b>0,$$

where, if $a>1,x<\log_a b$, if $0<a<1,x>\log_a b$.

We consider the following problem

$$y'(x)=y(f(x)),\quad y(0)=y_0,\quad f(x)=\ln(4-e^x),\quad x<\ln 4. \tag{1}$$

If $y(x)$ is a C^1 solution then it is C^2. By differentiation we have

$$y''(x)=f'(x)\,y'(f(x)),$$

than from $f(f(x)) = x$ and (1), we get

$$y''(x) = f'(x)\, y(x) = \frac{e^x}{e^x - 4}\, y(x).$$

So we have (1) is equivalent to the ordinary Cauchy problem

$$y''(x) = \frac{e^x}{e^x - 4}\, y(x), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0, \quad x < \ln 4. \tag{2}$$

Obviously,

$$y(x) = C_1 \Big((e^x - 4)\, \ln(4 - e^x) - x\,(e^x - 4) + e^x \Big) + C_2\,(e^x - 4).$$

Then from the initial conditions, we can write

$$\begin{cases} y_0 = C_1(1 - 3\ln 3) - 3C_2 \\ y_0 = C_1(\ln 3 + 5) + C_2 \end{cases}$$

Consequently, we have

$$C_1 = \frac{y_0}{4}, \quad C_2 = -y_0\, \frac{1 + \ln 3}{4},$$

and

$$y(x) = \frac{y_0}{4} \Big((e^x - 4)\, \ln(4 - e^x) - x\,(e^x - 4) + e^x \Big) - \frac{y_0\,(1 + \ln 3)}{4}\,(e^x - 4).$$

2. System of differential equations with involutions

In this section, we consider a system of differential equations with involution.

Theorem 1. *Let the initial value problem*

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(t, x(t), y(t), y(f(t))), \\ y'(t) = F_2(t, x(t), y(t), x(f(t))), \end{cases} \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

satisfy the following hypotheses:

(1) The function $f(t)$ is a continuously differentiable strong involution with a fixed point t_0.

(2) The functions F_1, F_2 are defined and are continuously differentiable in the whole space of its arguments.

(3) The given equations are uniquely solvable with respect to $y(f(t))$, $x(f(t))$:

$$y(f(t)) = G_1(t, x(t), y(t), x'(t)), \tag{4}$$

$$x(f(t)) = G_2(t, x(t), y(t), y'(t)). \tag{5}$$

Then the solution of the system of ordinary differential equations

$$x''(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x(f(t))}\, f'(t)\, F_1(f(t), x(f(t)), y(f(t)), y(t)), \quad (6)$$

and

$$y''(t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(f(t))}\, f'(t)\, F_2(f(t), x(f(t)), y(f(t)), x(t)), \quad (7)$$

(where $y(f(t))$ and $x(f(t))$ are given by expression (4) and (5)) with the initial conditions

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = F_1(t_0, x_0, y_0, y_0), \tag{8}$$

and

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = F_2(t_0, x_0, y_0, x_0). \tag{9}$$

Proof. Equations (6) and (7) are obtained by differentiating (3). Indeed, we can write

$$x''(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x(f(t))}\, f'(t)\, x'(f(t)),$$

and

$$y''(t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(f(t))}\, f'(t)\, y'(f(t)),$$

than from (3) and relation $f(f(t)) = t$ its follows that

$$x'(f(t)) = F_1(f(t), x(f(t)), y(f(t)), y(t)),$$

and

$$y'(f(t)) = F_2(f(t), x(f(t)), y(f(t)), x(t)).$$

The second of the initial conditions (8), (9) are compatibility condition and is found from (3), with regard to (3) initial condition and $f(t_0) = t_0$. $\square$

Example 3. We consider the following initial value problem

$$\begin{cases} x'(t) = y(f(t)), \\ y'(t) = x(f(t)), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad f(t) = -t. \tag{10}$$

We can write

$$\begin{cases} x''(t) = f'(t)\, y'(f(t)), \\ y''(t) = f'(t)\, x'(f(t)). \end{cases}$$

Than from $f(f(t)) = t$ and (10) we get

$$\begin{cases} x''(t) = f'(t)\, x(t), \\ y''(t) = f'(t)\, y(t). \end{cases}$$

So we have (10) is equivalent to the boundary value problem

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0, \\ y''(t) + y(t) = 0, \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x'(0) = y_0, \quad y'(0) = x_0$$

Obviously,

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t. \end{cases}$$

Then from the boundary conditions, we can write

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y(t) = y_0 \cos t + x_0 \sin t. \end{cases}$$

Theorem 2. *Let the initial value problem*

$$\begin{cases} x'(t) = F_1(t, x(t), y(t), x(f(t))), \\ y'(t) = F_2(t, x(t), y(t), y(f(t))), \end{cases} \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{11}$$

satisfy the following hypotheses:

(1) The function $f(t)$ is a continuously differentiable strong involution with a fixed point t_0.

(2) The functions F_1, F_2 are defined and are continuously differentiable in the whole space of its arguments.

(3) The given equations are uniquely solvable with respect to $y(f(t))$, $x(f(t))$:

$$x(f(t)) = G_1(t, x(t), y(t), x'(t)), \tag{12}$$

$$y(f(t)) = G_2(t, x(t), y(t), y'(t)). \tag{13}$$

Then the solution of the system of ordinary differential equations

$$x''(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y(t)}\, y'(t) +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial y(f(t))}\, f'(t)\, F_1(f(t), x(f(t)), y(f(t)), x(t)), \tag{14}$$

and

$$y''(t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x(t)}\, x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(t)}\, y'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial x(f(t))}\, f'(t)\, F_2(f(t), x(f(t)), y(f(t)), y(t)), \tag{15}$$

(where $x(f(t))$ and $y(f(t))$ are given by expression (12) and (13)) with the initial conditions

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = F_1(t_0, x_0, y_0, x_0), \tag{16}$$

and

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = F_2(t_0, x_0, y_0, y_0). \tag{17}$$

Proof. This theorem proof similar to theorem 1. Equations (14) and (15) are obtained by differentiating (11). Indeed, we can write

$$x''(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x(t)} x'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial y(t)} y'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x(f(t))} f'(t)\, x'(f(t)),$$

and

$$y''(t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x(t)} x'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(t)} y'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial y(f(t))} f'(t)\, y'(f(t)),$$

than from (11) and relation $f(f(t)) = t$ its follows that

$$x'(f(t)) = F_1(f(t), x(f(t)), y(f(t)), y(t)),$$

and

$$y'(f(t)) = F_2(f(t), x(f(t)), y(f(t)), x(t)).$$

The second of the initial conditions (16), (17) are compatibility condition and is found from (11), with regard to (11) initial condition and $f(t_0) = t_0$. □

Example 4. We consider the following problem

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha\, x(f(t)), \\ y'(t) = \beta\, y(f(t)), \end{cases} \quad x(1) = x_0, \quad y(1) = y_0, \quad f(t) = \frac{1}{t}, \quad \alpha, \beta > \frac{1}{2}. \tag{18}$$

We can write the following system

$$\begin{cases} x''(t) = \alpha\, f'(t)\, x'(f(t)), \\ y''(t) = \beta\, f'(t)\, y'(f(t)). \end{cases}$$

Than, according to $f(f(t)) = t$ and (18) we get

$$\begin{cases} x''(t) = \alpha^2\, f'(t)\, x(t), \\ y''(t) = \beta^2\, f'(t)\, y(t). \end{cases}$$

Then we have (18) is equivalent to the boundary value problem

$$\begin{cases} t^2\, x''(t) + \alpha^2\, x(t) = 0, \\ t^2\, y''(t) + \beta^2\, y(t) = 0, \end{cases} \quad x(1) = x_0, \quad y(1) = y_0, \quad x'(1) = \alpha\, x_0, \quad y'(1) = \beta\, y_0.$$

Obviously,

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2} \ln t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2} \ln t\right), \\ y(t) = \sqrt{t}\left(C_3 \cos \frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2} \ln t + C_4 \sin \frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2} \ln t\right). \end{cases}$$

Then from the boundary conditions, we can write the following solution

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \sqrt{t}\left(\cos \frac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2} \ln t + \frac{2\alpha-1}{\sqrt{4\alpha^2-1}} \sin \frac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2} \ln t\right), \\ y(t) = y_0 \sqrt{t}\left(\cos \frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2} \ln t + \frac{2\beta-1}{\sqrt{4\beta^2-1}} \sin \frac{\sqrt{4\beta^2-1}}{2} \ln t\right). \end{cases}$$

References

1. WIENER, J., WATKINS, W. (2002) A glimpse into the wonderland of involutions. *Missouri J.Math.Sci.* 14(3). p. 175-185.

2. WIENER, J. (1993) *Generalized solutions of functional differential equations.* World Scientific.

3. BUSENBERG, S., TRAVIS, C. (1982) On the Use of Reducible-Functional Differential Equations in Biological Modeles. *J. Math. Anal. Appl.* 89. p. 46-66.

4. CASTELAN, W. G., INFANTE, E. F. (1977) On a Functional Equation Arising in the Stability Theory of Difference-Differential Equations. *Quart. Appl. Math.* 35. p. 311-319.

5. DERFEL, G., ISERLES, C. (1997) The Pantograph Equation in the Complex Plane. *J. Math. Anal. Appl.* 213. p. 117-132.

6. WIENER, J. (1969) Differential equations with Involutions. *Differential Equations.* 5. p. 1131-1137.

7. WIENER, J. (1970) Differential equations in Partial Derivatives with Involutions. *Differential Equations.* 6. p. 1320-1322.

8. WATKINS, W. (2001) Modified Wiener equations. *Int. J. Math. Sci.* 27. p. 347-356.

9. ASHYRALYEV, A., SARSENBI, A. M. (2017) Well-Posedness of a Parabolic equation with Involution. *Numerical Functional Analysis and Optimazation.* 38(10). p. 1295-1304.

10. SILBERSTEIN, L. (1940) Solution of the Equation $f'(x) = f(1/x)$. *Philos. Magazine.* 30. p. 185-186.

УДК: 517.984
MSC2010: 46L60, 47L90, 70H06, 70F05.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. QUINTET STATE. ONE-DIMENSIONAL CASE

© S. M. Tashpulatov, R. T. Parmanova

Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan
100214, Republic of Uzbekistan, Tashkent, M. Ulugbek region, M. Ulugbek village, U. Gulyamov st. 1.
e-mail: *sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru, togaymurodota@gmail.com*

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model. Quintet state. One-dimensional case.

Tashpulatov S. M. and Parmanova R. T.

Abstract. We consider the energy operator of four electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the quintet state of the system. It is shown that there are such situations: a). the essential spectrum of the four-electron quintet state operator is consists of the union of four segments, and the discrete spectrum of the four-electron quintet state operator is consists of single eigenvalue; b). the essential spectrum of the four-electron quintet state operator is consists of the union of ten segments, and the discrete spectrum of the four-electron quintet state operator is consists of five eigenvalues; c). the essential spectrum of the four-electron quintet state operator is consists of single segment, and the discrete spectrum of the four-electron quintet state operator is empty set; Provided that every situation occurs. Found the conditions, when every situation to take place.

Keywords: *Impurity Hubbard model, four-electron system, essential spectra, discrete spectrum, quintet state, triplet state, singlet state*

Introduction

In the early 1970s, three papers [2, 3, 5], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems, appeared almost simultaneously and independently. In that model, a single nondegenerate electron band with a local Coulomb interaction is considered. The model Hamiltonian contains only two parameters: the matrix element t of electron hopping from a lattice site to a neighboring site and the parameter U of the on-site Coulomb repulsion of two electrons. In the secondary quantization representation, the Hamiltonian can be written as

$$H = t \sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + U \sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow} a_{m,\uparrow} a^{+}_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow}, \tag{1}$$

where $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ denote Fermi operators of creation and annihilation of an electron with spin γ on a site m and the summation over τ means summation over the nearest neighbors on the lattice.

The model proposed in [2, 3, 5] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system, although the local form of Coulomb interaction was first introduced for an impurity model in a metal by Anderson [1]. We also recall that the Hubbard model is a particular case of the Shubin-Wonsowsky polaron model [11], which had appeared 30 years before [2, 3, 5]. In the Shubin-Wonsowsky model, along with the on-site Coulomb interaction, the interaction of electrons on neighboring sites is also taken into account. The simplicity and sufficiency of Hamiltonian (1) have made the Hubbard model very popular and effective for describing strongly correlated electron systems.

The Hubbard model well describes the behavior of particles in a periodic potential at sufficiently low temperatures such that all particles are in the lower Bloch band and long-range interactions can be neglected. If the interaction between particles on different sites is taken into account, then the model is often called the extended Hubbard model. It was proposed for describing electrons in solids, and it remains especially interesting since then for studying high-temperature superconductivity. Later, the extended Hubbard model also found applications in describing the behavior of ultracold atoms in optical lattices. In considering electrons in solids, the Hubbard model can be considered a sophisticated version of the model of strongly bound electrons, involving only the electron hopping term in the Hamiltonian. In the case of strong interactions, these two models can give essentially different results. The Hubbard model exactly predicts the existence of so-called Mott insulators, where conductance is absent due to strong repulsion between particles. The Hubbard model is based on the approximation of strongly coupled electrons. In the strongcoupling approximation, electrons initially occupy orbitals in atoms (lattice sites) and then hop over to other atoms, thus conducting the current. Mathematically, this is represented by the so-called hopping integral. This process can be considered the physical phenomenon underlying the occurrence of electron bands in crystal materials. But the interaction between electrons is not considered in more general band theories. In addition to the hopping integral, which explains the conductance of the material, the Hubbard model contains the so-called on-site repulsion, corresponding to the Coulomb repulsion between electrons. This leads to a competition between the hopping integral, which depends on the mutual position of lattice sites, and the on-site repulsion, which is independent of the atom positions. As a result, the Hubbard model explains the metal–insulator transition in oxides of some transition metals. When such a material is heated, the distance between nearest-neighbor sites increases, the hopping integral decreases, and on-site repulsion becomes dominant.

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [4, 6–8, 12]. Therefore, obtaining exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model is of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [6]. It is known that two-electron systems can be in two states, triplet and singlet [4, 6–8, 12]. It was proved in [6] that the spectrum of the system Hamiltonian H^t in the triplet state is purely continuous and coincides with a segment $[m, M] = [2A-4B\nu, 2A+4B\nu]$, and the operator H^s of the system in the singlet state, in addition to the continuous spectrum $[m, M]$, has a unique antibound state for some values of the quasimomentum. For the antibound state, correlated motion of the electrons is realized under which the contribution of binary states is large. Because the system is closed, the energy must remain constant and large. This prevents the electrons from being separated by long distances. Next, an essential point is that bound states (sometimes called scattering-type states) do not form below the continuous spectrum. This can be easily understood because the interaction is repulsive. We note that a converse situation is realized for $U < 0$: below the continuous spectrum, there is a bound state (antibound states are absent) because the electrons are then attracted to one another.

For the first band, the spectrum is independent of the parameter U of the on-site Coulomb interaction of two electrons and corresponds to the energy of two noninteracting electrons, being exactly equal to the triplet band. The second band is determined by Coulomb interaction to a much greater degree: both the amplitudes and the energy of two electrons depend on U, and the band itself disappears as $U \to 0$ and increases without bound as $U \to \infty$. The second band largely corresponds to a one-particle state, namely, the motion of the doublet, i.e., two-electron bound states.

The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [13]. In the three-electron systems are exists quartet state, and two type doublet states. The quartet state corresponds to the free motion of three electrons over the lattice with the basic functions $q^{3/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$. In the work [13] is proved that the essential spectrum of the system in a quartet state consists of a single segment and the three-electron bound state or the three-electron antibound state is absent. The doublet state corresponds to the basic functions

${}^1d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$, and ${}^2d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}\varphi_0$. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of first doublet state operator $\widetilde{H}^d_1$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of $\widetilde{H}^d_1$ consists of a single point, i.e., in the system exists unique antibound state. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator $\widetilde{H}^d_1$ is the union of three segments and the discrete spectrum of operator $\widetilde{H}^d_1$ consists of a single point, i.e., in the system exists only one antibound state, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator $\widetilde{H}^d_1$ is the union of two segments and the discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}^d_1$ is empty, or the essential spectrum of the system in the first doublet state operator $\widetilde{H}^d_1$ is consists of a single segment, and discrete spectrum is empty, i.e., in the system the antibound state is absent. In the one-dimensional case, the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}^d_2$ of second doublet state is the union of three segments, and the discrete spectrum of operator $\widetilde{H}^d_2$ consists of no more than one point. In the two-dimensional case, we have analogous results. In the three-dimensional case, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator $\widetilde{H}^d_2$ is the union of three segments and the discrete spectrum of operator $\widetilde{H}^d_2$ consists of no more than one point, i.e., in the system exists no more than one antibound state, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator $\widetilde{H}^d_2$ is the union of two segments and the discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}^d_2$ is empty, or the essential spectrum of the system in the second doublet state operator $\widetilde{H}^d_2$ is consists of a single segment, and discrete spectrum is empty, i.e., in the system the antibound state is absent.

The spectrum of the energy operator of system of four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian in the triplet state were studied in [14]. In the four-electron systems are exists quintet state, and three type triplet states, and two type singlet states. The triplet state corresponds to the basic functions ${}^1t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}\varphi_0$, ${}^2t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$, ${}^3t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system first triplet state operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is exactly the union of two segments and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is empty. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system first triplet-state operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is the union of two segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is empty, or the essential spectrum of the system first triplet-state operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is single segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^1_t$ is empty. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system second triplet state operator ${}^2\widetilde{H}^1_t$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}^1_t$ is consists no more than one point.

In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is consists no more than one point, or the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is the union of two segments and the discrete spectrum of the system second triplet state operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is empty, or the essential spectrum of the system second triplet-state operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is consists of single segment and the discrete spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_t^1$ is empty.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists no more than one point. In two-dimensional case, we have analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is the union of three segments, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists no more than one point or the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is the union of two segments, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty, or the essential spectrum of the system third triplet-state operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of single segment, and the discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is empty. We see that there are three triplet states, and they have different origins.

The spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard model in the quintet, and singlet states were studied in [15]. The quintet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice with the basic functions $q^2_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$. In the work [15] proved, that the spectrum of the system in a quintet state is purely continuous and coincides with the segment $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, and the four-electron bound states or the four-electron antibound states is absent. The singlet state corresponds to the basic functions ${}^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$, ${}^2s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$, and these two singlet states have different origins.

If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is consists only one point. In the two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system first singlet-state operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is consists only one point, or the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is the union of two segment and the discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is empty, or the essential spectrum of the system of first singlet-state operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is consists of single segment and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_4^s$ is empty. If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is exactly the union of three segments and the discrete spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is consists only one point. In two-dimensional case, we have the analogous results. In the three-dimensional case, the essential spectrum of the system second singlet-state operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is the union of three segments and the discrete spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is consists only one point, or the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is the union of two segment and the discrete spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is empty, or the essential spectrum of the system of second singlet-state operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is consists of single segment and the discrete spectrum of operator ${}^2\widetilde{H}_4^s$ is empty.

The use of films in various areas of physics and technology arouses great interest in studying a localized impurity state (LIS) of a magnet. Therefore, it is important to study the spectral properties of electron systems in the impurity Hubbard model. The spectrum of the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model in the second doublet state were studied [16]. The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model in the Quartet state were studied in [17].

1. Hamiltonian of the system

We consider the energy operator of four-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectrum of the system for second quintet states in the one-dimensional lattice. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} +$$

$$+(B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (2)$$

Here $A\,(A_0)$ is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, $B\,(B_0)$ is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B>0$ $(B_0>0)$ for convenience), $\tau = \pm e_j,\ j=1,2,...,\nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, $\gamma=\uparrow$ or $\gamma=\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m\in Z^\nu$.

In the four electron systems has a quintet state, and two type singlet state, and three type triplet states. The energy of the system depends on its total spin S. Along with the Hamiltonian, the N_e electron system is characterized by the total spin $S,\ S=S_{max}, S_{max}-1, ..., S_{min}, S_{max}=\frac{N_e}{2}, S_{min}=0, \frac{1}{2}$.

Hamiltonian (2) commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathtt{H}_{as}$.

2. Four-electron quintet state in the impurity Hubbard model

Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathtt{H}_{as}$. The quintet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice with the basic functions $q^2_{m,n,k,l\in Z^\nu} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$. The subspace $\mathtt{H}^q_2$, corresponding to the quintet state is the set of all vectors of the form $\psi^q_2 = \sum_{m,n,k,l\in Z^\nu} f(m,n,k,l)q^2_{m,n,k,l\in Z^\nu}$, $f \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^4)$. We denote by H^q_2 the restriction of operator H to the subspace $\mathtt{H}^q_2$. We let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, and $\varepsilon_2 = B_0 - B$, and $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Theorem 1. *The subspace $\mathtt{H}^q_2$ is invariant under the operator H, and the restriction H^q_2 of operator H to the subspace $\mathtt{H}^q_2$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}_2{}^q$ acting in the space l^{as}_2 as*

$$\overline{H}^q_2\psi^q_2 = 4Af(m,n,k,l) + B\sum_\tau[f(m+\tau,n,k,l) + f(m,n+\tau,k,l) + f(m,n,k+\tau,l)+$$
$$+f(m,n,k,l+\tau)] + \varepsilon_1[\delta_{m,0}+\delta_{n,0}+\delta_{k,0}+\delta_{l,0}]f(m,n,k,l)+$$
$$+\varepsilon_2\sum_\tau[\delta_{m,0}f(\tau,n,k,l)+\delta_{n,0}f(m,\tau,k,l)+\delta_{k,0}f(m,n,\tau,l)+\delta_{l,0}f(m,n,k,\tau)+\delta_{m,\tau}f(0,n,k,l)+$$
$$\delta_{n,\tau}f(m,0,k,l) + \delta_{k,\tau}f(m,n,0,l) + \delta_{l,\tau}f(m,n,k,0)]. \tag{3}$$

The operator H^q_2 acts on a vector $\psi^q_2 \in \mathtt{H}^q_2$ as

$$H^q_2\psi^q_2 = \sum_{m,n,k,l\in Z^\nu}(\overline{H}^q_2 f)(m,n,k,l)q^2_{m,n,k,l\in Z^\nu}. \tag{4}$$

Proof. We act with the Hamiltonian H on vectors $\psi^q_2 \in \mathtt{H}^q_2$ using the standard anticommutation relations between electron creation and annihilation operators at lattice sites, $\{a_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a^+_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \theta$, and also take into account that $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, where θ is the zero element of $\mathtt{H}^q_2$. This yields the statement of the theorem. □

Lemma 1. *The spectra of the operators H^q_2 and $\overline{H}^q_2$ coincide.*

Proof. Because the operators H^q_2 and $\overline{H}^q_2$ are bounded self-adjoint operators, it follows that if $\lambda \in \sigma(H^q_2)$, then the Weyl criterion ([9], chapter VII, paragraph 3, pp. 262- 263) implies that there is a sequence $\{\psi_n\}^\infty_{n=1}$ such that $||\psi_n|| = 1$ and

$\lim_{n\to\infty}||(H_2^q-\lambda)\psi_n||=0$. We set $\psi_n=\sum_{p,r,t,k}f_n(p,r,t,k)a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0$. Then

$$||(H_2^q-\lambda)\psi_n||^2=((H_2^q-\lambda)\psi_n,(H_2^q-\lambda)\psi_n)=\sum_{p,r,t,k}||(\overline{H}_2^q-\lambda)f_n(p,r,t,k)||^2\times$$

$$\times(a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0)=\sum_{p,r,t,k}||(\overline{H}_2^q-\lambda)F_n(p,r,t,k)||^2\times$$

$$\times(a_{k,\uparrow}a_{t,\uparrow}a_{r,\uparrow}a_{p,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{p,r,t,k}||(\overline{H}_2^q-\lambda)F_n(p,r,t,k)||^2(\varphi_0,\varphi_0)=$$

$=\sum_{p,r,t,k}||(\overline{H}_2^q-\lambda)F_n(p,r,t,k)||^2\to 0$, as $n\to\infty$, where $F_n=\sum_{p,r,t,k}f_n(p,r,t,k)$. It follows that $\lambda\in\sigma(\overline{H}_2^q)$. Consequently, $\sigma(H_2^q)\subset\sigma(\overline{H}_2^q)$.

Conversely, let $\overline{\lambda}\in\sigma(\overline{H}_2^q)$. Then, by the Weyl criterion, there is a sequence $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ such that $||F_n||=1$ and $\lim_{n\to\infty}||(\overline{H}_2^q-\overline{\lambda})\psi_n||=0$. Setting $F_n=\sum_{p,r,t,k}f_n(p,r,t,k)$, $||F_n||=(\sum_{p,r,t,k}|f_n(p,r,t,k)|^2)^{\frac{1}{2}}$, we conclude that $||\psi_n||=||F_n||=1$ and $||(\overline{H}_2^q-\overline{\lambda})F_n||=||(\overline{H}_2^q-\overline{\lambda})\psi_n||\to 0$ as $n\to\infty$. This means that $\overline{\lambda}\in\sigma(H_2^q)$ and hence $\sigma(\overline{H}_2^q)\subset\sigma(H_2^q)$. These two relations imply $\sigma(H_2^q)=\sigma(\overline{H}_2^q)$. □

We call the operator H_2^q the four-electron quintet state operator in the impurity Hubbard model.

Let $\mathtt{F}:l_2((Z^\nu)^4)\to L_2((T^\nu)^4)\equiv\widetilde{\mathtt{H}}_2^q$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu)=1$.

We set $\widetilde{H}_2^q=\ \mathtt{F}\,\overline{H}_2^q\mathtt{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator $\overline{H}_2^q$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 2. *The Fourier transform of operator $\overline{H}_2^q$ is an operator $\widetilde{H}_2^q=F\,\overline{H}_2^qF^{-1}$ acting in the space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ be the formula*

$$\widetilde{H}_2^q\,\psi_2^q=h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)+\varepsilon_1[\int_{T^\nu}f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int_{T^\nu}f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\int_{T^\nu}f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+$$

$$+\int_{T^\nu}f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi]+2\varepsilon_2[\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos s_i]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i+\cos t_i]\times$$

$$\times f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos k_i]f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\theta_i+\cos\xi_i]f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi,\tag{5}$$

where $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)=4A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i+cos\mu_i+cos\gamma_i+cos\theta_i]$, and L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Proof. The proof is by direct calculation in which we use the Fourier transformation in formula (3). □

In the impurity Hubbard model, the spectral properties of the considered operator of the energy of four-electron systems are closely related to those of its two-particle subsystems (one-electron systems with impurity). Therefore, we first study the spectrum and localized impurity electron states of the one-electron impurity systems.

3. One-electron systems in the impurity Hubbard model

The Hamiltonian of a one-electron systems in the impurity Hubbard model also has form (2). We let $\mathtt{H}_1$ denote the space of one-electron states of the operator H. It is clear that the space $\mathtt{H}_1$ is also invariant under operator H. We let H_1 denote the restriction of H to the space $\mathtt{H}_1$.

Theorem 3. *The space $\mathtt{H}_1$ is a invariant under the operator H, and the restriction H_1 of operator H to the subspace $\mathtt{H}_1$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}_1$, acting in the space l_2^{as} as*

$$(\overline{H}_1 f)(p) = Af(p) + B\sum_{\tau} f(p+\tau) + \varepsilon_1\delta_{p,0}f(p) + \varepsilon_2\sum_{\tau}[\delta_{p,0}f(\tau) + \delta_{p,\tau}f(0)], \quad (6)$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_1 acts on a vector $\psi \in \mathtt{H}_1$ as

$$H_1\psi = \sum_{p,\tau}(\overline{H}_1 f)(p)a^+_{p,\uparrow}\varphi_0. \quad (7)$$

Lemma 2. *The spectra of the operators H_1 and $\overline{H}_1$ coincide.*

We let $\mathtt{F}$ denote the Fourier transform: $\mathtt{F} : l_2(Z^\nu) \to L_2(T^\nu)$. We set $\widetilde{H}_1 = \mathtt{F}\overline{H}_1\mathtt{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation the operator $\overline{H}_1$ acts in the Hilbert space $L_2(T^\nu)$.

Theorem 4. *The Fourier transform of the operator $\overline{H}_1$ is an bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_1$ acting in the space $\widetilde{\mathtt{H}}_1$ be the formula*

$$(\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = [A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\lambda_i]f(\lambda) + \varepsilon_1\int_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos s_i]f(s)ds. \quad (8)$$

Comparing the formulas (5) and (8), and using tensor products of Hilbert spaces and tensor products of operators in Hilbert spaces [17], and taking into account that the function $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)$ is an antisymmetric function, we can verify that the operator $\widetilde{H}_2^q$ can be represented in the form

$$\widetilde{H}_2^q = \widetilde{H}_1 \bigotimes I \bigotimes I \bigotimes I + I \bigotimes \widetilde{H}_1 \bigotimes I \bigotimes I + I \bigotimes I \bigotimes \widetilde{H}_1 \bigotimes I + I \bigotimes I \bigotimes I \bigotimes \widetilde{H}_1, \quad (9)$$

where I is the unit operator in space $\widetilde{\mathtt{H}}_1$.

It is known that the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ fills the entire segment $[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$.

We set $D_\nu(z) = (b_2 - b_3)^{\nu-1}\{a_1[b_2 + (\nu - 1)b_3] - \nu a_2 b_1\}$, where

$$a_1 = 1 + \int\limits_{T^\nu} \frac{[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i]ds_1...ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}, a_2 = \int\limits_{T^\nu} \frac{\cos s_i[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i]ds_1...ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z},$$

$$b_1 = 2\varepsilon_2 \int\limits_{T^\nu} \frac{ds_1...ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}, b_2 = 1 + 2\varepsilon_2 \int\limits_{T^\nu} \frac{\cos s_i ds_1...ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z},$$

$b_3 = 2\varepsilon_2 \int\limits_{T^\nu} \frac{\cos s_i ds_1...ds_\nu}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}$, and ν is lattice dimensionality.

Lemma 3. *A number $z_0 \notin [m_\nu, M_\nu]$ is an eigenvalue of operator $\widetilde{H}_1$ if and only if it is a zero of the function $D_\nu(z)$.*

Proof. Let the number $z = z_0 \notin [m_\nu, M_\nu]$ be an eigenvalue of the operator $\widetilde{H}_1$, and $\varphi(x)$ be the corresponding eigenfunction, i.e.,

$$[A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos \lambda_i]\varphi(\lambda) + \varepsilon_1 \int\limits_{T^\nu} \varphi(s)ds + 2\varepsilon_2 \int\limits_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu}[\cos \lambda_i + \cos s_i]\varphi(s)ds = z_0\varphi(\lambda).$$

Let $\psi(x) = \{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos \lambda_i - z\}\varphi(x)$. Then

$$\psi(x) + \int\limits_{T^\nu} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu}[\cos \lambda_i + \cos s_i]}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}\psi(s)ds = 0,$$

i.e., the number $\mu = 1$ is a eigenvalue of the operator

$$K(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i + coss_i]}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}\psi(s)ds_1...ds_\nu.$$

It then follows that $D_\nu(z_0) = 0$.

Now let $z = z_0$ be a zero of the function $D_\nu(z)$, i.e, $D_\nu(z_0) = 0$. It follows from the Fredholm theorem that the homogeneous equation

$$\psi(x) + \int\limits_{T^\nu} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{\nu}[\cos \lambda_i + \cos s_i]}{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i - z}\psi(s)ds = 0$$

has a nontrivial solution. This means that the number $z = z_0$ is an eigenvalue of the operator $\widetilde{H}_1$. □

Definition 1. *The eigenfunction $\varphi \in L_2(T^\nu)$ of the operator $\widetilde{H}_1$ corresponding to an eigenvalue $z \notin [m_\nu, M_\nu]$ is called an local impurity state (LIS) of $\widetilde{H}_1$, and z is called the energy of this state.*

The following Theorem describe the change of spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$ in the case $\nu = 1$.

Theorem 5. *A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \varepsilon_1$, lying the below (respectively, above) the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.*

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 < 0$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 > 0$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), lying the below (respectively, above) the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

C). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ (respectively, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, (respectively, $z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$), where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, lying the below (respectively, above) the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

D). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$,) then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$ (respectively, $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$), where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, lying the above (respectively, below) the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

E). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the above the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

F). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and the real number $\alpha > 1$, lying the below the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

K). If $\varepsilon_2 > 0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the operator $\widetilde{H}_1$ has a exactly two eigenvalues $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, and $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$, where $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, and real number $|\alpha| < 1$, lying the above and below the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

M). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the operator $\widetilde{H}_1$ has no eigenvalue lying the outside of the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

Proof. In the case $\nu = 1$, the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$ coincide with the segment $[m_1, M_1] = [A - 2B, A + 2B]$. Expressing all integrals in the equation $D_1(z) = 0$ through the integral $J(z) = \int_T \frac{ds}{A+2B\cos s - z}$, we find that the equation $D_1(z) = 0$ is equivalent to the equation

$$[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \tag{10}$$

Moreover, the function $J(z)$ is a differentiable function on the set $\mathbb{R}\setminus[m_1, M_1]$, in addition, $J'(z) = \int_T \frac{ds}{[A+2B\cos s - z]^2} > 0$, $z \notin [m_1, M_1]$. Thus the function $J(z)$ is an monotone increasing function on $(-\infty, m_1)$ and on $(M_1, +\infty)$. Furthermore, $J(z) \to +0$ as $z \to -\infty$, $J(z) \to +\infty$ as $z \to m_1 - 0$, $J(z) \to -\infty$ as $z \to M_1 + 0$, and $J(z) \to -0$ as $z \to +\infty$.

If $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$ then from (10) follows that

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

The function $\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}$ has a point of asymptotic discontinuity $z_0 = A - \frac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Since $\psi'(z) = \frac{(B+\varepsilon_2)^2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)]^2}$ for all $z \neq z_0$ it follows that the function $\psi(z)$ is an monotone increasing (decreasing) function on $(-\infty, z_0)$ and on $(z_0, +\infty)$ in the case $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (respectively, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$), in addition, and if $\varepsilon_2 > 0$, or $\varepsilon_2 < -2B$, then $\psi(z) \to +0$ as $z \to -\infty$, $\psi(z) \to +\infty$ as $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to -\infty$ as $z \to z_0 + 0$, $\psi(z) \to -0$ as $z \to +\infty$ (respectively, if $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then $\psi(z) \to -0$ as $z \to -\infty$, $\psi(z) \to -\infty$ as $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to +\infty$ as $z \to z_0 + 0$, $\psi(z) \to +0$ as $z \to +\infty$).

A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the equation for eigenvalues and eigenfunctions (10) has the form

$$\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\}J(z) = 0. \tag{11}$$

It is clear, that $J(z) \neq 0$ for the values $z \notin \sigma_{cont}(\widetilde{H}_1)$. Therefore, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, i.e., $z = A + \varepsilon_1$. If $\varepsilon_1 < -2B$, then this eigenvalue lying the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, if $\varepsilon_1 > 2B$, then this eigenvalue lying the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the equation for the eigenvalues and eigenfunctions has the form $\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0$, that is, $J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. It is clear, what the integral $J(z)$ calculated in a quadrature, of the below (above) of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, the integral $J(z) > 0$, $(J(z) < 0,)$ consequently, $\varepsilon_1 < 0$ $(\varepsilon_1 > 0.)$ The calculated the integral $J(z) = \int_{T^\nu} \frac{ds}{A+2B\cos s - z}$, the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, we have the equation of the form $\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. This equation has a solution $z = A - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, lying the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. In the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, the equation take the form $-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1}$. This equation has a solution of the form $z = A + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, lying the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

C). If $\varepsilon_1=0$ and $\varepsilon_2>0$ (respectively, $\varepsilon_1=0$ and $\varepsilon_2<-2B$), then the equation for the eigenvalues and eigenfunctions take in the form

$$(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)J(z)=-(B+\varepsilon_2)^2,\ or\ J(z)=-\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Denote $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. Then $J(z)=-\frac{E}{z-A}$, or $J(z)=\frac{E}{A-z}$. In the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, we have the equation of the form $\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z}$. This equation has a solution $z=A-\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$. It is obviously, that $E^2>1$. This eigenvalue lying the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. In the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, the equation for the eigenvalues and eigenfunctions has the form $-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A}$. From here, we find $z=A+\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$. This eigenvalue lying the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

D). If $\varepsilon_1=\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, then the equation for eigenvalues and eigenfunctions has the form $(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2B)J(z)=-(B+\varepsilon_2)^2$, from this

$$J(z)=-\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2B)}. \tag{12}$$

We denote $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. In the first we consider the equation (12) in the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. In equation (12) we find the equation of the form $\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z-2B}$. From this, we find $z_1=A+\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, and $z_2=A-2B$. Now we verify the conditions $z_i<A-2B, i=1,2$. The inequality $z_1<A-2B$, is incorrectly, and inequality $z_2<A-2B$, is incorrectly. We now consider the equation (12) in the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. We have $-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A+2B}$. From this equation we find the same solutions z_1 and z_2, the outside of the domain of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. Now we verify the conditions $z_i>A+2B, i=1,2$. The inequality $z_1>A+2B$, is correctly, and inequality $z_2>A+2B$, is incorrectly. Consequently, in this case the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1=A+\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, lying the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

Let $\varepsilon_1=-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, then the equation of eigenvalues and eigenfunctions take in the form $J(z)=-\frac{E}{z-A-2B}$, where $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

In the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, we have equation of the form $\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z+2B}$. From here we find $z_1=A-\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, and $z_2=A+2B$. The appear inequalities $z_1<A-2B$, is correct, and $z_2<A-2B$, is incorrect. In the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, we have equation of the form $-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A-2B}$. It follows that, what $z_1=A-\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, and $z_2=A+2B$.

The inequality $z_1 > A + 2B$, and $z_2 > A + 2B$, are incorrectly. Therefore, in this case the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, lying the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

E). If $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then consider necessary, that $\varepsilon_1 = \alpha \times \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, where $\alpha > 1-$ real number. Then the equation for eigenvalues and eigenfunctions has the form

$$\{\alpha \times \frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} \times B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0,$$

$$or\ (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.\ From\ this$$

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

We denote $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, then $J(z) = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}$. In the first we consider this equation in the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. Then $\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}} = \frac{E}{A-z-2\alpha B}$. This equation has the solutions

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1},\ and\ z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Now, we verify the condition $z_i < A - 2B, i = 1, 2$. The solution z_1 no satisfy the condition $z_1 < A - 2B$, but z_2 satisfy the condition $z_2 < A - 2B$. We now verify the conditions $z_2 < A - 2\alpha B$. The appear, this inequality is incorrectly. The appear inequalities $z_1 > A + 2B$ is correct, and $z_2 > A + 2B$, is incorrect. We now verify the conditions $z_1 > A - 2\alpha B$. So far as, $A - 2\alpha B < A + 2B$, the appear, this inequality is correctly. Consequently, in this case, the operator $\widetilde{H}_1$ has a unique eigenvalue $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

F). If $\varepsilon_2 > 0$, and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$, and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then we assume that $\varepsilon_1 = -\alpha \times \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, where $\alpha > 1-$ real number. The equation for eigenvalues and eigenfunctions take in the form

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

From here $J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A-2\alpha B)}$. The introduce notation $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. Then

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \tag{13}$$

In the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$, we have the equation

$$J(z) = \frac{E}{A - z + 2\alpha B},\ from\ here\ \frac{1}{\sqrt{(A - z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B};$$

This equation take the form

$$(E^2-1)(A-z)^2-4\alpha B(A-z)-4B^2(E^2+\alpha^2)=0.$$

We find

$$z_1=A-\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} \; and \; z_2=A-\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

We now verify the conditions $z_i<m_1=A-2B, i=1,2$. The appear, that $z_1<A-2B$, is correctly and $z_2<A-2B$, is incorrectly. Now we consider the equation (13) in the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. Then $J(z)=-\frac{E}{z-A-2\alpha B}$. From this $-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A-2\alpha B}$. We find

$$z_1=A-\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \; and \; z_2=A+\frac{2B(-\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

We verify the conditions $z_i>A+2B, i=1,2$. The appear $z_1>A+2B$, it is not true, and the $z_2>A+2B$, is true. We now verify the conditions $z_2>A+2\alpha B$. The appear, this inequality is incorrectly. Consequently, in this case, the operator $\widetilde{H}_1$ have unique eigenvalue $z_1=A-\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}<m_1$, i.e., lying the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

K). If $\varepsilon_2>0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2<-2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), the we take $\varepsilon_1=\alpha\times\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, where $-1<\alpha<1-$ real number. Then the equation for eigenvalues and eigenfunctions has the form

$$(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2\alpha B)J(z)=-(B+\varepsilon_2)^2, |\alpha|<1. \tag{14}$$

We denote $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. Then the equation (14) receive the form

$$J(z)=-\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

In the below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$ we have equation of the form

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z-2\alpha B}, |\alpha|<1.$$

This equation has a solutions

$$z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \; and \; z_2=A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

The inequalities $z_1<A-2B$, and $z_1<A-2\alpha B$, is incorrectly. The inequalities $z_2<A-2B$, is correctly. We now verify the conditions $z_2<A-2\alpha B$, since

$A-2B < A-2\alpha B$, this inequality is true. We now consider the equation (14) in the above of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. We have the equation of the form

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B}.$$

This equation has a solutions

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \ and \ z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

The inequalities $z_1 > A+2B$, and $z_1 > A-2\alpha B$ is true, as $A+2B > A-2\alpha B$, that the inequality $z_1 > A-2\alpha B$ is correctly. The inequalities $z_2 > A+2B$, and $z_2 > A+2\alpha B$ is incorrectly. Consequently, in this case the operator $\widetilde{H}_1$ has a exactly two eigenvalues

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \ and \ z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

lying the above and below of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$.

M). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, and the function $\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)}$ is a decreasing function in the intervals $(-\infty, z_0)$ and $(z_0, +\infty)$; By, $z \to -\infty$ the function $\psi(z) \to -0$, and by $z \to z_0 - 0$, the function $\psi(z) \to -\infty$, and by $z \to +\infty$, $\psi(z) \to +0$, and by $z \to z_0 + 0$, $\psi(z) \to +\infty$. The function $J(z) \to 0$, by $z \to -\infty$, and by $z \to m_1 - 0$, the function $J(z) \to +\infty$, and by $z \to M_1 + 0$, the function $J(z) \to -\infty$, by $z \to +\infty$, the function $J(z) \to -0$. Therefore, the equation $\psi(z) = J(z)$, that's impossible the solutions in the outside the continuous spectrum of operator $\widetilde{H}_1$. Therefore, in this case, the operator $\widetilde{H}_1$ has no eigenvalues lying the outside of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. □

Consequently, the spectrum of operator $\widetilde{H}_1$ is consists from continuous spectrum and at most two eigenvalues.

4. Main results of the work

Now, using the obtained results and representation (9), we describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the energy operator of four electron systems in the impurity Hubbard model in the quintet state.

Theorem 6. *Let $\nu = 1$. Then*

A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of four segments:

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup$$
$$\cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A + \varepsilon_1$, *lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ *and* $\varepsilon_1 < 0$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *and* $\varepsilon_1 < 0$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 > 0$ *or* $\varepsilon_2 = 0$ *and* $\varepsilon_1 > 0$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ *(respectively,* $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$*), lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

C). If $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 > 0$ *(respectively,* $\varepsilon_1 = 0$ *and* $\varepsilon_2 < -2B$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, *(respectively,* $z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$*), and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *lying the below (respectively, above) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

D). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*,) then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$, *where* $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$ *(respectively,* $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$*), and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *lying the above (respectively, below) of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

E). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A - 8B, 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z, 3A + 6B + z] \cup$$

$$\cup [2A - 4B + 2z, 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z, A + 2B + 3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q)=\{4z\}$, *where* $z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and the real number* $\alpha>1$, *lying the above of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

F). If $\varepsilon_2>0$ *and* $\varepsilon_1<-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2<-2B$ *and* $\varepsilon_1<-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of four segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z,3A+6B+z]\cup$$

$$\cup[2A-4B+2z,2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,A+2B+3z],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a single eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q)=\{4z\}$, *where* $z_1=A-\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and the real number* $\alpha>1$, *lying the below of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

K). If $\varepsilon_2>0$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2<-2B$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the union of ten segments:*

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z_1,3A+6B+z_1]\cup$$

$$\cup[3A-6B+z_2,3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1,2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+z_1+$$

$$+z_2,2A+4B+z_1+z_2]\cup[2A-4B+2z_2,2A+4B+2z_2]\cup[A-2B+3z_1,A+2B+$$

$$+3z_1]\cup[A-2B+2z_1+z_2,A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2,A+2B+$$

$$+z_1+2z_2]\cup[A-2B+3z_2,A+2B+3z_2],$$

and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of a five eigenvalue:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q)=\{4z_1,3z_1+z_2,2z_1+2z_2,z_1+3z_2,4z_2\}$, *where* $z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}>M_1$, *and* $z_2=A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}<m_1$, *and* $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and real number* $|\alpha|<1$, *lying the outside of the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$.

M). If $-2B<\varepsilon_2<0$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is consists of the single segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)=[4A-8B,4A+8B]$, *and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^q$ *is empty set:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q)=\emptyset$.

Proof. A). It follows from representation (9), and from Theorem 5, that in one-dimensional case, the continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$ is consists from $\sigma_{cont}(\widetilde{H}_1)=[A-2B,A+2B]$, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$ is consists of unique eigenvalue z. Therefore, the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists from of the union of four segments:

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z,3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z,2A+4B+2z]\cup$$

$\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]$, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists is the unique eigenvalue: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z\}$. These is given to the proof of statement A). from Theorem 6.

The statements B),C),D),E),F) from Theorem 6 are proved similarly.

We now is proved the statement K) from Theorem 6. It can be seen from Theorem 5 (statement K) in one-dimensional case the operator $\widetilde{H}_1$ has exactly two eigenvalues z_1 and z_2 outside the domain of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. Therefore, the set $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)$ consists of the union of ten intervals:

$$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2]\cup$$
$$\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2]\cup[2A-4B+2z_2, 2A+$$
$$+4B+2z_2]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2,$$
$$A+2B+z_1+2z_2]\cup[A-2B+3z_2, A+2B+3z_2].$$

The discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$, is consists of five eigenvalues: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \{4z_1, 3z_1+z_2, 2z_1+2z_2, z_1+3z_2, 4z_2,\}$, where $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} > M_1$, and $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1} < m_1$, and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, real number $|\alpha| < 1$. These is given to the proof of statement K) from Theorem 6.

We now is proved the statement M) from Theorem 6. It can be seen from Theorem 5 (statement M) in one-dimensional case the operator $\widetilde{H}_1$ has no eigenvalues the outside of continuous spectrum of the operator $\widetilde{H}_1$. Therefore, the set $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q)$ consists of unique segment: $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^q) = [4A-8B, 4A+8B]$, and the operator has no eigenvalues, i.e., $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^q) = \emptyset$. $\square$

CONCLUSION

The following results were obtained in the work: If $\nu = 1$ and $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$) or $\varepsilon_2 = -2B$ and $\varepsilon_1 < 0$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 0$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$) or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ (respectively, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$), or $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$,) or $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), or $\varepsilon_2 > 0$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of four segments, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of unique eigenvalue. If $\nu = 1$ and $\varepsilon_2 > 0$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ (respectively, $\varepsilon_2 < -2B$ and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$), then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of ten segments, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of five eigenvalues. Besides exists such case, where the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of single segment, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is empty. Consequently, the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of no more than ten segments, and discrete spectrum of the operator $\widetilde{H}_2^q$ is consists of no more than five eigenvalues.

References

1. ANDERSON P. W. *Localized Magnetic States in Metals.* Phys. Rev., 1961, vol. 124. pp. 41–53.

2. GUTZWILLER M. C. *Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals.* Phys. Rev. Lett.,1963, vol. 10. pp. 159–162.

3. HUBBARD J. *Electron correlations in narrow energy bands.* Proc. Roy. Soc. A., 1963, vol. 276, pp. 238–257.

4. IZYUMOV Yu. A. and SKRYABIN Yu. N. *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems* [in Russian]. Nauka, Moscow. 1987, English transl. Consultants Bureau. New York. 1988.

5. KANAMORI J. *Electron correlation and ferromagnetism of transition metals.* Prog. Theor. Phys., 1963, vol. 30. pp. 275–289.

6. KARPENKO B. V., DYAKIN V. V., and BUDRINA G. L. *Two electrons in the Hubbard Model.* Phys. Met. Metallogr., 1986, vol. 61, pp. 702–706.

7. LIEB E. *Two theorems on the Hubbard Model.* Phys. Rev. Lett., 1989, vol. 62, pp. 1201–1204.

8. MATTIS D. *The few-body problems on a lattice.* Rev. Mod. Phys., 1986, vol. 58. pp. 370–379.

9. REED M., and SIMON B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* vol. 1. *Functional Analysis.* Acad. Press, New York. 1972.

10. REED M., and SIMON B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* vol. 4.*Operator Analysis.* Acad. Press, New York. 1982.

11. SHUBIN S. P., WONSOWSKY S. V. *On the electron theory of metals.* Proc. Roy. Soc. A., 1934, vol. 145. pp. 159–172.

12. TSVELICK A. M., and WIEGMAN P. B. *Exact results in the theory of magnetic alloys.* Adv. Phys., 1983, vol. 32 (4), pp. 453–713.

13. TASHPULATOV S. M. *Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model.* Theoretical and Mathematical Physics., 2014, vol. 179 (3), pp. 712–728.

14. TASHPULATOV S. M. *Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplete state in the Hubbard Model.* Journal Phys. Conf. Ser., 2016, vol. 697, 012025, pp. 1–25.

15. TASHPULATOV S. M. *The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state.* Lobachevskii Journal of Mathematics., 2017, vol. 38 (3). pp. 530–541.

16. TASHPULATOV S. M. *The spectrum of the energy operator in three-electron systems with an impurity in the Hubbard model. The second doublet state.* Modern problems of mathematics and physics. Moscow. 2019. vol. 65, No 1. pp. 109–123.

17. TASHPULATOV S. M. *The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. Quartet state.* Journal of Applied Mathematics and Physics. 2021. vol. 9, No 6. pp. 1391–1421.

УДК: 378:51(09)

MSC2010: 01A61:00A35

О СОВРЕМЕННЫХ ИНСТРУМЕНТАХ И МЕТОДАХ ВЕДЕНИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ[1]

© Е. М. Богатов[1,2], А. В. Коренев[1], И. С. Михайлов[1]

[1] Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС"

мкр. им. Макаренко, 42, 309516, г. Старый Оскол, Российская Федерация

[2] Филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» в г. Губкине Белгородской области

ул. Комсомольская, 16, 309186, г. Губкин, Российская Федерация

e-mail: *embogatov@inbox.ru*

About the modern tools and methods of scientific research conducting in the field of the history of mathematics.

Bogatov E. M., Korenev A. V., Mikhailov I. S.

Abstract. In recent years, there has been a revival of interest in the history of mathematics in Russia, especially domestic. However, the inclusion of young researchers in this scientific work is very difficult. One of the reasons for this is the violation of the continuity of scientific generations of historians of mathematics, caused, in turn, by the "brain drain"and the departure of researchers to other fields of activity since the 1990s in the absence of sufficient motivation. As a result, the methods and tools of research on the history of mathematics turned out to be the weak link of applicants for academic degrees in this specialty. This was especially evident at the beginning of XXI century on the periphery, when scientific archives were digitized and the ability to connect and work with them began to affect the quality of scientific research.

There was a need to systematize the search for primary sources and articles on related topics, as well as to learn how to use the new features of the Internet: forums and social networks of scientists.

The availability of information about conferences and seminars (All-Russian and international) with sections on the history of mathematics makes it possible to plan your scientific work correctly, using these events as peculiar "mileposts"when extensive scientific topics is developed.

Currently, there is no journal on the history of mathematics in Russia, and not all ordinary mathematical journals accept articles on historical-scientific topics. Therefore, the list of such journals, supplemented with information about the format of accepted articles (MS Word,

[1]Работа является расширенным и дополненным вариантом доклада [1].

LATEX), the speed of their publication and the status of the journal will allow a young scientist to save a lot of time.

In addition to systematizing the activities of the historian of mathematics, the work will also propose a scheme for organizing research and search work in the writing of scientific articles and reports on the history of science, consisting of the following stages:

a) Detailed study of the subject area;
b) Search for materials on a similar research topic;
c) Using forums and scientific social networks to find answers to questions that have arisen;
d) Search and study of primary sources;
e) Recreating the evolution of mathematical ideas;
f) Approbation at seminars and conferences;
g) Preparation of article for publication.

The work also provides recommendations for the preparation of the substantive part of the historically-mathematical research, which can be adopted by specialists in the history of natural sciences.

Keywords: *a scheme for organizing research on the history of mathematics, a methodology for preparing articles and reports on the history of mathematics, modern tools for historical and mathematical research; source base of the historian of mathematics*

...История наук даёт лучший и наиболее надёжный материал, на котором могут быть изучены закономерности в развитии человечества.

В. Оствальд

Введение

До конца XX века историки науки (как отечественные, так и зарубежные располагали лишь библиотечным фондом на бумажном носителе. В России это: Российская государственная библиотека, библиотеки ведущих университетов, архивы РАН и т.д. Несмотря на это, интерес к истории физико-математических наук был довольно высоким: издавались серьезные журналы: ИМИ (Историко-математические исследования); ИАИ (Историко-астрономические исследования); ИМЕН (История и методология естественных наук); труды ИИЕТ РАН[2] (Институт истории естествознания и техники имени С. И. Вавилова РАН); выходили энциклопедии по истории

[2]Значительная часть этих изданий доступна на сайте В. Е. Пыркова [2].

математики [3]–[5] и механики [6]. Наиболее известным и полным (на конец 1960-х гг.) изданием по праву считается «История отечественной математики» [7]–[10].

К концу XX – началу XXI вв. в России история математики стала понемногу сдавать свои позиции; долгое время она отсутствовала даже в рубрикаторе РФФИ (ситуация поменялась только в конце 2010-х гг.). Это привело к нарушению непрерывности передачи опыта организации историко-математических исследований от старшего поколения к младшему, особенно в научных коллективах, расположенных на периферии. С другой стороны, с развитием сети Интернет появились новые возможности для доступа к первоисточникам и статьям по истории науки, опубликованным на иностранных языках. Отметим, что история математики помогает решить проблемы мотивации, особенно это касается нынешнего поколения. Если молодые исследователи будут равняться на кого-то из великих людей, внесших вклад в развитие науки (в частности математики), то у них будет дополнительный стимул к получению высоких результатов в своей области.

Кроме того, работы по истории математики всегда имеют пропагандистский характер. Они в большей или меньшей степени демонстрируют важность математики, и как составной части общей культуры, и как инструмента для решения прикладных задач. История математики способствует развитию таких навыков, как коммуникативность и критическое мышление, что может стимулировать введение модулей истории математики в учебные планы ВУЗов. В некоторых странах она активно используется для мотивации изучения математики школьниками и студентами [11].

Настоящая работа имеет своей целью систематизировать современный инструментарий историко-математических исследований, а также сориентировать начинающего исследователя в области историко-математических журналов; конференций и литературы справочного характера. Будут предложены рекомендации молодым учёным по написанию статей по истории естественных наук.

1. Схема организации исследований

После того, как обозначена постановка задачи (обычно это делает научный руководитель), целесообразно сделать шаги в разных направлениях:

1.1. ***Детальное изучение предметной области.*** Сначала нужно постараться разобраться в предмете как можно лучше. Здесь на помощь может прийти хороший учебник, брошюра из серии «Популярные лекции по математике» издательства «Наука», научно-популярные статьи в журнале «Квант» и в сборнике «Математическое просвещение» [12], материалы летних/зимних математических школ, в том числе, представленных в виде лекций на канале YouTube. Например, если нас интересует история выпуклости, полезно прочесть статью В.М. Тихомирова Геометрия выпуклости [13].

Большую ценность для историка науки представляет собой общероссийский портал Math-Net.Ru. Он выполнен в виде современной информационной системы, предоставляющей российским и зарубежным ученым различные возможности в поиске научной информации по математике и другим наукам. Кроме печатных источников, портал предлагает большое количество разнообразных видеороликов по математике, расположенных во вкладке «Видеотека» (например, по теореме о неподвижной точке можно рекомендовать лекцию [14]).

Значимая информация может быть почерпнута также из обзоров последних десятилетий в той или иной области математики, опубликованных в журнале УМН (см. например обзор "О некоторых основных направлениях общей топологии" [15]).

1.2. ***Поиск материалов на схожую тему исследования.*** Здесь стоит посмотреть выпуски ИМИ [16] на предмет наличия статей на близкую к нему тему, а также осуществить поиск в Интернете. Например, сформулировать запрос с помощью Google как на русском, так и на английском языках. В случае с историей выпуклости, к примеру, мы набираем *history of convexity* и среди ответов видим большую обзорную статью П.М. Грубера в учебнике [17], в которой много ссылок. После этого имеет смысл пристально изучить найденные источники.

Если нам известен хотя бы один из математиков, который занимался интересующей нас темой (например, Архимед), то мы можем воспользоваться интернет-архивом по истории математики MacTutor [18], созданным учеными из университета Сент-Эндрюс в Шотландии Джоном О'Коннором и Эдмундом Робертсоном. Во вкладке BIOGRAPHIES мы обнаружим большую обзорную статью о результатах Архимеда со ссылками на работы историков науки, в том числе отечественных.

На этом этапе можно воспользоваться статьями к юбилеям [19], научными автобиографиями [20] и некрологами [21].

Неоспоримую помощь в поиске необходимых материалов сможет оказать старейший научный архив России - архив Российской академии наук [22]. Он представляет совокупность документов, образующихся в деятельности Российской академии наук и её учреждений, имеющих научное, социально-культурное и историческое значение. В этом архиве, например, имеются письма известных ученых к своим коллегам, из которых иногда бывает можно почерпнуть мотивацию к возникновению той или иной идеи или метода.

Параллельно с работой над статьями по истории математики (п.1.2)) можно обратиться к энциклопедиям и хрестоматиям таким, как "The Oxford Handbook of The

History of Mathematics" [23], "Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences" [24], «История математики от Декарта до середины XIX столетия» [25], «Краткий очерк истории математики» [26], а также к книгам по истории отдельных разделов математики таких, как история топологии [27].

Следует отдельно отметить трёхтомный сборник «Математика, ее содержание, методы и значение» [28]–[30], изданный в 1956 году в СССР, который знакомит читателя с с содержанием и методами отдельных математических дисциплин, их основами и путями развития.

Для изучения вклада зарубежных ученых помощью будет обращение к путеводителю по историко-математической литературе на английском языке [31].

1.3. ***Использование форумов и научных социальных сетей для поиска ответов на возникшие вопросы.*** В сети Интернет достаточно большое количество форумов, на которых обсуждаются вопросы по истории математики. Можно выделить несколько из них:

- Math10.com

  Данный русскоязычный форум носит любительский характер. На нем обсуждается возникновение математики, предпосылки ее зарождения, а также последовательность ее развития. Поднимаются, в частности, вопросы о первенстве возникновения «числа» или письменности. URL: https://www.math10.com/ru/forum/viewforum.php?f=40

- Readit. History of Mathematics?

  Этот форум представлен на английском языке. На нем выносятся на обсуждение отдельные моменты развития математики, важные и интересные этапы ее становления. Также на нем можно найти полезные ссылки на книги по истории математики.

  URL: https://www.reddit.com/r/history/comments/a16xoj /history_of_mathematics

- MATHEMATICS

  Этот форум также представлен на английском языке. На нем поднимаются самые разнообразные вопросы, посвященные истории математики (от причин обозначения той или иной величины определенной буквой до поиска книг по истории математики).

  URL: https://math.stackexchange.com/questions/tagged/math-history

1.4. ***Поиск и изучение первоисточников.*** После изучения предмета исследований и истории вопроса 1.1-1.3 весьма важно обратиться к первоисточникам. Статьи на русском языке можно искать на общероссийском математическом портале MathNet.ru. Несомненную пользу принесёт обращение к электронной библиотеке «Научное наследие России» [32]. Проект электронной библиотеки «Научное наследие России» нацелен на обеспечение решения задачи о сохранении научного наследия и создании условий его эффективного освоения.

Эта библиотека создавалась учреждениями РАН как общедоступная с целью предоставить пользователям Интернет информацию о выдающихся российских учёных, внесших вклад в развитие фундаментальных естественных наук, и полных текстов опубликованных ими наиболее значительных работ. На этом сайте, в частности, можно найти такие редкие издания, как сборник трудов П. И. Чебышева.

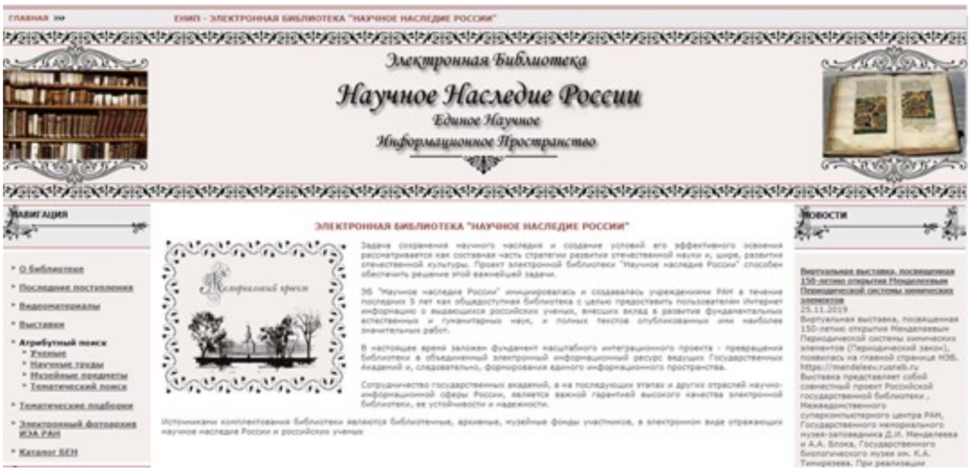

Рис. 1. Внешний вид сайта электронной библиотеки «Научное наследие России».

Помимо этого, в поиске первоисточников может помочь электронный ресурс Project Euclid [34]. Первоначально он был создан для того, чтобы обеспечить платформу для небольших научных издателей журналов по математике и статистике, а также чтобы перейти от печатной к электронной форме экономически эффективным способом. Благодаря сочетанию поддержки со стороны подписавшихся библиотек и участвующих издателей более 70% журнальных статей, размещенных на сайте Project Euclid, находятся в открытом доступе. В настоящее время целью Project Euclid является предоставление издательских услуг для теоретической и прикладной математики и статистики по всему миру. В рамках данного проекта возможно опубликование препринтов — предпечатных версий статей с целью обозначить приоритет в определённом направлении исследований.

Статьи на других (европейских) языках можно найти на сайтах:

- http://www.digizeitschriften.de (немецкая цифровая библиотека Гёттингена)

  Предоставляется доступ к более чем 700 известным немецким академическим журналам из 21 предметной области с 9 миллионами страниц. Все статьи доступны для скачивания в формате PDF и печати.

- https://gallica.bnf.fr (французская национальная библиотека)

  Французский архив ставит своей целью оцифровать все содержимое Национальной библиотеки Франции — более 12 миллионов книг и манускриптов, 500 тысяч периодических изданий. В рамках проекта выложено в интернет около 80 тысяч работ и 70 тысяч изображений, идёт работа по оцифровке архива французских статей XIX в. В интерфейсе есть поддержка русского языка.

- https://eudml.org (европейская цифровая математическая библиотека)

  Цель проекта The European Digital Mathematics Libriaryu (EuDML) — создать единую информационную систему математической литературы, опубликованной в Европейских изданиях. Проект осуществляется при поддержке ведущих Европейских университетов и научных организаций. EuDML индексирует более 250 тысяч публикаций из 14 коллекций журналов. В интерфейсе есть поддержка русского языка

- https://www.jstor.org (международная цифровая библиотека академического контента)

  Journal STORage предоставляет доступ к более чем 12 миллионам научных журнальных статей, книг и первоисточников по 75 дисциплинам. JSTOR - мощная исследовательская и преподавательская платформа, с помощью которой можно изучить широкий спектр научного контента, в том числе и по истории математики. https://archive.org (американский цифровой архив)

  Этот архив содержит редкие и ценные издания XIX-XXв (книги и статьи), опубликованные, в основном на английском языке. Доступ к некоторым историко-математическим материалам XXI века (таким, как, например, монография Дж. Лютцена о Лиувилле [34]) осуществляется по подписке.

Для того чтобы приступить к переводу статьи на русский язык машинным способом (например, с помощью переводчиков Google или Deepl), находящимися в свободном доступе, необходимо преобразовать файлы pdf в текст. Это можно сделать с помощью интернет-сервисов распознания текста (http://tools.pdf.24.org; https://www.onlineocr.net/ и т.п.)

1.5. ***Воссоздание эволюции математических идей.*** Самое трудное – это воссоздание эволюции той или иной математической идеи. В отличие от научного обзора, упор здесь должен делаться не столько на то, как появилась и развилась та или иная идея, сколько на то, почему ее развитие происходило тем или иным образом. Очень важно видеть историю математики в целом, как большой и связный процесс, и если мы выделим какую-то линию в этом процессе, то необходимо зафиксировать её связи и взаимодействие с другими линиями и процессами.

При работе в области истории математики полезно ставить перед собой вопросы следующего характера[3].

«Почему возникла та или иная область математики? Какие задачи решались с её помощью? Какую роль при этом играли конкретные разделы обсуждаемой области? Что из обсуждаемых идей пришло из практики, а что решало внутри математические задачи? Как это конфликтовало между собой? Что стояло за теми или иными поворотами в данном научном направлении?»

Суть методологии историко-научных исследований очень образно представил академик Б.В. Гнеденко в докладе на секции истории математики IV Всесоюзного математического съезда: *«...для правильности исторической перспективы надо любое явление в истории науки рассматривать не только в его генезисе, с точки зрения предшествующего, но и с точки зрения последующего, т.е. с учетом его влияния и его последствий, которые следует прослеживать до наших дней. Чтобы охарактеризовать плод, надо знать и дерево, на котором он созрел, и семена, которые он в себе содержит, и ростки, которые дали эти семена»* [35].

1.6. ***Апробация.*** Предположим, что первая версия статьи по истории математики создана. Естественно, она не будет являться окончательным вариантом. Для апробации таких работ и их улучшения в учёном сообществе существует неписаное правило: научный результат должен пройти обсуждение. Это обсуждение происходит либо на семинарах, либо на конференциях. По истории математики в России известны два постоянно работающих семинара:

- в МГУ при кабинете истории и методологии математики под руководством президента Международной академии истории науки профессора С.С. Демидова;
- в ПОМИ РАН под руководством доктора физико-математических наук Г.И. Синкевич [36]. Семинар Г.И. Синкевич в последнее время проводится дистанционно и привлекает много иностранных участников [37].

[3] Вопросы воспроизводятся из переписки доцента СТИ НИТУ МИСиС Е.М. Богатова и профессора МГУ А.В. Боровских, электронное письмо от 26.03.2019.

Имеется возможность принять в зарубежных семинарах по истории математики, проходящих на кафедре истории и философии науки в Кембриджском университете [38]. В настоящее время участники этих семинаров могут делать доклады (и слушать коллег) дистанционно, что делает их более доступными для исследователей всего мира.

Помимо годичной научной конференции ИИЕТ РАН им. Вавилова, проходящей в Москве и Санкт-Петербурге, на которой есть секции истории математики и механики, большое значение в последние годы приобрела международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», которая проходит ежегодно при Тульском государственном педагогическом университете. Кроме того, секция «история математики» с недавнего времени появилась на Крымской осенней математической школе (КРОМШ) и на Всероссийском симпозиуме по промышленной и прикладной математике (ВСППМ).

Следует отметить, что в нашей стране недавно было создано «Русское общество истории и философии науки» в целях усиления междисциплинарного взаимодействия в области науки, под эгидой которого проходят конференции и семинары [39]. Часть известных международных конференций по истории математики проходят в Лондоне и Париже, например «International Conference on History of Mathematics» [40]. Эти конференции призваны объединить ведущих ученых для обмена опытом и результатами исследований по всем аспектам истории математики. Они также обеспечивают междисциплинарную платформу для исследователей, практиков и преподавателей, чтобы представить и обсудить самые последние инновации, тенденции и проблемы, с которыми приходится сталкиваться в области истории математики.

Перейдём к теме подготовки докладов на международных конференциях. Ряд учёных предпочитают делать доклады, используя только мел и доску. Однако, при слабом владении языком рекомендуется делать презентацию в одной из версий Power Point. При этом желательно, чтобы текст был отредактирован специалистом. Во время показа следует проговаривать ту информацию, которая выводится на экран, пояснять ее. Вводную часть следует сделать короткой и сразу перейти к сути дела.

Если докладчик использует проектор, удобно пользоваться лазерной указкой. Это позволит привлечь внимание к ключевым моментам доклада. Если в докладе присутствуют громоздкие формулы, желательно использовать экран для их демонстрации [41].

После выступления на конференции (семинаре) с изложением своих результатов текст статьи, как правило, дополняется и претерпевает коррекцию в сторону улучшения.

1.7. ***Публикация.*** Заключительный этап исследований — представление своих результатов в виде, пригодном для опубликования. Так как разные журналы, предъявляют разные требования к электронной версии статьи, нужно сначала определиться с выбором журнала.

Рассмотрим возможные варианты:

1. Журнал «Таврический вестник математики и информатики». Принимает статьи по истории математики в формате TEX. Индексируется в РИНЦ, входит в список ВАК.
   URL: https://tvim.info/
2. Журнал «Чебышевский сборник». С 2015 г. принимает статьи по истории математики в формате TEX, в том числе большого объема. Среднее время нахождения статьи в редакции до момента публикации - 12 месяцев. С 2018 г. входит в базу данных Scopus и выходит четыре раза в год.
   URL: https://www.chebsbornik.ru
3. Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика и Физика». Принимает статьи по истории математики в формате TEX. Среднее время нахождения статьи в редакции до момента публикации - шесть месяцев. Индексируется в РИНЦ, входит в список ВАК.
   URL: https://www.bsu.edu.ru/bsu/science/public/bsu-science-journal/
4. Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» - старейшее российское специализированное периодическое издание по нелинейной динамике, теории хаоса и их приложениям, издается с 1993 года. С 2008 года журнал входит в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендуемых для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук» ВАК РФ. С 2009 года индексируется в РИНЦ (загружены все выпуски, начиная с 1993 года). С 2017 года индексируется Scopus. С 2018 года индексируется Web of Science (ESCI). Принимает статьи в формате TEX.
   URL: https://andjournal.sgu.ru/
5. Журнал «Historia Mathematica» - академический журнал по истории математики, издаваемый компанией Elsevier. Он был основан Кеннетом О. Май в 1971 г., как бесплатный информационный бюллетень Notae de Historia Mathematica, но к 1974 году превратился в полноценный журнал. Historia Mathematica публикует исследования по истории математики и ее развитию. В частности, журнал поощряет исследования о математиках и их работе в историческом контексте, об историографических темах в истории математики и о взаимосвязях

между математическими идеями и наукой. Журнал индексируется в Scopus. Статьи принимаются на английском языке в формате TEX.

URL: https://www.journals.elsevier.com/historia-mathematica/

6. Журнал «Archive for History of Exact Sciences» принимает статьи высокого качества по истории математических наук. Его цель - обеспечить быструю и полную публикацию статей, а также пролить свет на концептуальную основу наук, анализируя исторический ход математической и естественнонаучной мысли. Журнал индексируется в Scopus. Статьи принимаются на английском языке.

   URL: https://www.springer.com/journal/407

Так как значительная часть журналов принимает статьи в формате TEX, полезным будет ознакомление с издательской системой для набора текста LaTeX. LaTeX – это система общего назначения для набора текстов, которая использует TEX в качестве средства форматирования. Благодаря своей гибкости, простоте использования и профессиональному полиграфическому качеству, LaTeX в настоящее время применяется при подготовке изданий почти по всем областям естественных наук [42].

Система для набора текста LaTeX имеет несколько преимуществ перед текстовым редактором Word:

- Отличное качество подготовки научных текстов (удобно поддержана верстка математических формул).
- Автоматическая рубрикация документа, нумерация формул, рисунков и списка литературы. При этом все элементы грамотно располагаются на странице.
- TEX, форматирующее ядро LATEX, чрезвычайно мобилен и свободно доступен. Поэтому система работает практически на всех существующих платформах.

В освоении данный системы полезными будут пособия [43]-[44].

Многие ученые используют в своей работе веб-редактор LaTeX «Overleaf» . «Overleaf» — это бесплатная система совместного написания и опубликования текста, которая сильно ускоряет процесс создания научных работ как для авторов, так и издателей [45].

«Overleaf» можно охарактеризовать как сервис, который позволяет легко создавать, редактировать и делиться своими научными идеями в Интернете с помощью LaTeX.

2. Рекомендации по подготовке содержательной части научной статьи[4]

Для успешности статьи полезно рассмотреть ряд аспектов, которые помогут в ее написании. Желательно определить целевую аудиторию, от чего зависит глубина раскрытия основных и частных понятий. Она может быть адресована специалистам в данной области науки, математикам в целом и историкам математики[5].

Суть хорошей статьи по истории науки состоит в том, что она показывает независимую и критическую мысль. Статья не должна выглядеть, как отчет о какой-то теме, которая была затронута раньше: нужно найти такие способы представления материала, которые дают возможность для размышления.

Отправной точкой для развития мысли может послужить несогласие хотя бы с одним утверждением из вторичной литературы. Ошибки и неточности очень распространены, особенно в популярных книгах по истории математики. При проведении собственного исследования важно сосредоточиться на небольшом вопросе и попытаться выяснить, что различные вторичные источники говорят о нем. Как только вы хорошо поймете тему, скорее всего, обнаружится, что некоторые из более слабых вторичных источников очень поверхностны и, вполне возможно, совершенно неверны. Рекомендуется отметить такие недостатки в литературе и объяснить, что в них не так, и почему их ошибки значительны с точки зрения правильного понимания вопроса.

Один из способов настроиться критически - это вступить в дискуссию, уже имеющуюся во вторичной литературе. Есть много случаев, когда историки науки расходятся во мнениях и предлагают конкурирующие интерпретации, часто в довольно жарких спорах. Выбор такой темы уведет от соблазна просто накапливать информацию и факты. Вместо этого придется критически взвесить доказательства и аргументы обеих сторон. Вероятно, вы окажетесь на той или иной стороне, и тогда будет вполне естественно внести свой собственный аргумент в пользу одной из сторон и свои собственные ответы на аргументы противоположной стороны.

Статья, построенная на сравнении и контрасте - это менее конфронтационный вариант статьи, основанной на дискуссии. Здесь мы также имеем дело с различными интерпретациями во вторичной литературе, но вместо того, чтобы пытаться “выбрать победителя”, можно проиллюстрировать разнообразие подходов. Сравнивая различные точки зрения, мы поднимаем новые вопросы и освещаем новые стороны, которые

[4]Данный параграф написан с использованием материалов сайта доцента университета г. Утрехта (Нидерланды) В. Бласьо [46].

[5]Некоторые рекомендации П.Р. Халмоша, приведённые им в статье «Как писать математические тексты» [47], вполне подойдут и для подготовке статьи по истории математики.

не были очевидны, когда каждая точка зрения рассматривалась изолированно. Таким образом, более четко выявляются сильные и слабые стороны вопроса, а также предположения и следствия каждой точки зрения.

3. Получение академических и учёных степеней по истории математики

Поступление в магистратуру и аспирантуру дает возможность продолжить более глубокое изучение данной области и построить профессиональную карьеру в качестве исследователя истории математики.

Прием в аспирантуру по направлению «История науки и техники» осуществляется в Институте истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН (ИИЕТ РАН), город Москва. Для защиты диссертации по истории физико-математических наук в ИИЕТ РАН существует диссертационный совет, в состав которого входят доктора физико-математических, технических, исторических, философских и других наук. Соискателям, успешно прошедшим процедуру защиты диссертации, присваивается ученая степень кандидата (доктора) физико-математических наук по специальности «история науки и техники».

Для желающих продолжить своё образование в области истории и философии математики за границей можно порекомендовать следующие университеты:

- Кафедра истории и философии Университета Калгари, Канада
- Математический факультет Университета Саймона Фрейзера, Канада
- Институт истории и философии науки и техники Университета Торонто, Канада
- Исторический факультет Оксфордского университета, Великобритания
- Школа философии, религии и истории науки Лидского университета, Великобритания
- Кафедра истории науки Гарвардского университета, США
- Исторический факультет Чикагского университета, США
- Факультет философии Мичиганского университета, США.

4. Премии по истории математики

Самые успешные исследования в области истории математики, как это принято и в других областях науки, поощряются в виде различных премий и призов.

Рассмотрим наиболее известные из них.

Taylor and Francis early career research prize (Премия Тейлора и Фрэнсиса за исследования в начале карьеры).

Премия в размере 1000 фунтов стерлингов предоставляется за эссе объемом до 8000 слов по любому аспекту истории математики.

Победившее эссе принимается к публикации в журнале Британского Общества по истории математики. Победитель будет назначен координатором социальных сетей Общества в течение двух лет, получит доступ к аккаунтам Общества в Twitter и Facebook и будет приглашен вести блог по истории математики.

Претендентами на данную премию начинающие исследователи могут быть как аспиранты, так и лица, получившие степень кандидата наук не ранее, чем 5 лет назад [48].

Конкурс диссертаций по истории науки DHST.

Организаторами этого конкурса выступают Международный союз истории и философии науки и техники, Отдел истории науки и техники (IUHPST/DHST). Материалы диссертации, представляемой на конкурсе, должны быть посвящены истории науки, техники или медицины. Победителям предоставляется сертификат, освобождающий от регистрационных сборов конгрессе IUHPST/DHST и позволяющий компенсировать оплату проезда и проживания [49].

Otto Neugebauer Prize (Премия Отто Нойгебауэра по истории математики).

Премия присуждается за оригинальную и основополагающую работу в области истории математики, которая значительно углубляет наше понимание развития математики или конкретного математического предмета в любой период и в любом географическом регионе. Награда включает в себя именной сертификат и денежный приз в размере 5000 евро. Премия вручается на Европейском математическом конгрессе президентом Европейского математического общества. Лауреату дается возможность представить на конгрессе работу, получившую приз) [50].

Премия Неймана по истории математики.

Премия присуждается за монографию на английском языке (включая книги в переводе), посвященную истории математики и предназначенную для читателей-неспециалистов. Никаких дополнительных ограничений в отношении предмета, а также гражданства автора или места публикации не существует. Премия названа в честь Питера М. Неймана, бывшего президента и давнего члена Британского общества истории науки. Величина приза составляет 1000 фунтов стерлингов [51].

В 2009 году премия Неймана была присуждена Р. Нетц и У. Ноэль за работу «The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist» («Кодекс Архимеда: как средневековый молитвенник раскрывает истинного гения величайшего ученого Древности») [52].

Kenneth O. May Prize in the History of Mathematics (Премия Кеннета О. Мэйя по истории математики).

Премия Кеннета О. Мэйя вручается раз в 4 года за выдающийся вклад в историю математики. Впервые была присуждена в 1989 году Д. Дж. Струику и А.П. Юшкевичу (московскому учёному) на XVIII Международноv конгресса по истории науки. В 1993 году в рамках премии Кеннета О. Мэйя была учреждена бронзовая медаль [53].

Премия Монтукла

Премия Монтукла присуждается Исполнительным комитетом Международной комиссии по истории математики каждые четыре года молодому ученому - автору лучшей статьи, опубликованной в журнале Historia Mathematica за четыре года, предшествовавшие очередному Международному конгрессу по истории науки и техники. Премия составляет 1000 долларов [54]. Впервые премия Монтукла была присуждена в 2009 году.

The Grattan-Guinness archival research travel grant (Грант на архивные исследования Grattan-Guinness).

Гранты на поездки для проведения архивных исследований Grattan-Guinness были учреждены для оказания помощи ученым на ранних этапах их исследовательской карьеры в области истории и философии математики, а также в области истории математического образования и его связи с современными проблемами. Указанные гранты открыты для докторантов или ученых, имеющих не более шести лет «постдоковских» исследований в области истории и/или философии математики. Гранты предоставляются специально для того, чтобы можно было добраться до места проведения исследований в архиве по выбору получателя. Такие гранты не предназначены для полного покрытия общей стоимости предлагаемого исследовательского проекта, но для покрытия командировочных расходов [55].

Заключение

Авторы выражают надежду на то, что предложенная ими схема организации исследований в области истории математики и соответствующий инструментарий помогут молодым учёным:

- правильно распределить свои силы на всех этапах исследований;
- структурировать свою научную работу от постановки задачи до отправки статьи в научный журнал;

- познакомиться с возможностями национальных библиотек России, Европы и США и использовать их для поиска первоисточников и статей историко-математического характера;
- получить представление об имеющихся всероссийских и международных конференциях и семинарах по истории математики;
- определиться с выбором журнала, в котором будет опубликована статья по истории математики;
- повысить уровень своей мотивированности за счёт возможного участия в конкурсах на соискание международной премий и грантов по истории науки;
- узнать, в какие учреждения можно поступить, для получения академической степени магистра или ученой степени кандидата наук по специальности «история математики и механики».

Ожидается, что в недалёком будущем часть рутинной работы, связанной с поиском и анализом первоисточников и материалов по близкой к исследуемой теме можно будет поручить электронному помощнику, работающему на принципах искусственного интеллекта [56], что позволит сэкономить время на содержательную часть исследований по истории науки.

Авторы выражают благодарность доценту В.П. Богатовой (Воронеж) за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402.

Список литературы

1. Богатов, Е. М., Коренев, А. В., Михайлов, И. С. Об организации научно-исследовательской работы по истории математики в современных условиях / Сб. научных статей 5-й Междунар. науч. конф. перспективных разработок молодых ученых «Наука молодых-будущее России» (10-11 декабря 2020 года), в 4-х томах, Том 1. Юго-Зап. гос. ун-т., - Курск:, 2020, с. 290-295.

   BOGATOV, E.M. & KORENEV, A.V. & MIHAJLOV, I.S. About the organization of research work on the history of mathematics in modern conditions / Collection of scientific articles of the 5th International Scientific Conference of Promising Developments of Young Scientists “Young Science-the Future of Russia” (December 10-11, 2020), in 4 volumes, Volume 1. Southwestern State University, - Kursk:, 2020, p. 290-295.

2. Сайт онлайн-поддержки изучения курсов профессионально-исторической направленности для будущих и настоящих учителей математики // pyrkov-professor.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
http://pyrkov-professor.ru/

pyrkov-professor.ru. (2021) *Website of online support for the study of professional-historical courses for future and current teachers of mathematics.* [Online] Available from:
http://pyrkov-professor.ru/.

3. Курош, А. Г. Математика в СССР за 30 лет (1917-1947). Курош А. Г. (гл. ред.), Маркушевич А. И. (ред.), Рашевский П. К. (ред.) // М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 1043 с.

KUROSH, A. G. Matematika v SSSR za 30 let (1917-1947). Ed. Kurosh A.G. // M.-L.: GITTL, 1948. 1043 p.

4. Курош, А. Г. Математика в СССР за 40 лет (1917-1957). Курош А.Г. (гл. ред.). Том 1. Обзорные статьи. Сборник М.: Физматгиз, 1959. 1002 с.

KUROSH, A. G. Matematika v SSSR za 40 let (1917-1957). Ed. Kurosh A.G. Book 1. Obzorny‘e stat‘i. Sbornik M.: Fizmatgiz, 1959. 1002 p.

5. Курош, А. Г. 5. Математика в СССР за 40 лет (1917-1957). Курош А.Г. (гл. ред.). Том 2. Библиография. Сборник М.: Физматгиз, 1959. 821 с.

KUROSH, A. G. Matematika v SSSR za 40 let (1917-1957). Ed. Kurosh A.G. Book 2. Bibliografiya. Sbornik M.: Fizmatgiz, 1959. 821 p.

6. Лаврентьев, М. А. Механика в СССР за 50 лет. В 4-х т. т. 1-3 // Л.И. Седов (гл. ред.), Зельдович Я.Б., Ишлинский А.Ю., Лаврентьев М.А., Михайлов Г.К., Мусхелишвили Н.И., Черный Г. Г. – 1968.

LAVRENTEV, M. A. Mekhanika v SSSR za 50 let. V 4-h t. t. 1-3 // L.I. Sedov (head editor), 1968.

7. Штокало, И. З. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 1. - Киев: Наукова думка, 1966. - 493 с.

SHTOKALO, I. Z. Istoriya otechestvennoj matematiki. Ed. SHTOKALO I.Z. In 4 volumes. In five books. Volume 1. - Kiev: Naukova dumka, 1966. - 493 p.

8. Штокало, И. З. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 2. - Киев: Наукова думка, 1967. - 616 с.

SHTOKALO, I. Z. Istoriya otechestvennoj matematiki. Ed. Shtokalo I.Z. In 4 volumes. In five books. Volume 2. - Kiev: Naukova dumka, 1967. - 616 p.

9. Штокало, И. З. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 3. - Киев: Наукова думка, 1968. - 726 с.

   SHTOKALO, I. Z. Istoriya otechestvennoj matematiki. Ed. Shtokalo I.Z. In 4 volumes. In five books. Volume 3. - Kiev: Naukova dumka, 1968. - 726 p.

10. История отечественной математики. Отв. ред. Штокало И.З. В четырех томах. В пяти книгах. Том 4. Книга 1. Киев: Наукова думка, 1970. – 884 с.

    SHTOKALO, I. Z. Istoriya otechestvennoj matematiki. Ed. Shtokalo I.Z. In 4 volumes. In five books. Volume 4. Book 1. Kiev: Naukova dumka, 1970. - 884 p.

11. JANKVIST, U. T. & KJELDSEN, T. H. (2011) New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & education.* V. 20 (Iss. 9). p. 831–862.

12. Сборник «Математическое Просвещение». Третья серия. // mccme.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
    https://www.mccme.ru/free-books/matpros.html

    mccme.ru. (2021) *Matematicheskoe Prosveshchenie. Third series.*. [Online] Available from:
    https://www.mccme.ru/free-books/matpros.html.

13. Тихомиров, В. М. Геометрия выпуклости // Квант. — 2003. — Вып. 4. — С. 1–2.

    TIKHOMIROV, V. M (2003) Geometry of convexity. *Kvant.* No. 4. p. 1–2.

14. Лемма Шпернера: приложения и обобщения. Занятие 1 // mathnet.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
    http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=12048

    mathnet.ru. (2015) *Sperner's Lemma: applications and generalizations. Lesson 1.* [Online] Available from:
    http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=12048.

15. Александров, П. С. О некоторых основных направлениях в общей топологии // УМН / 1964. — 19:6, 120. — С. 3–46.

    ALEXANDROV, P. S (1964) On some basic directions in general topology. *Uspekhi Mat. Nauk.* 19:6 (120). p. 3–46.

16. Пырков, В. Е. Тематический указатель статей сборника «Историко-математические исследования» за 1948 — 2009 годы / Ин-т истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН. — М.: Янус-К, 2011. — 84 с.

PYRKOV, V. E. (2011) *«Istoriko-matematicheskie issledovaniya»: Tematicheskij ukazatel statej sbornika za 1948 – 2009 gody.* Ros. akad. nauk. In-t istorii estestvoznaniya i tekhniki im. S.I. Vavilova. Moscow: Yanus-K.

17. GRUBER, P. M. & WILLS, J. M. (1993) Handbook of convex geometry. *North Holland.* Elsever. p. 803.

18. mathshistory.st-andrews.ac.uk. (2021) *MacTutor History of Mathematics archive.* [Online] Available from:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/.

19. Борисов, Ю. Ф., Залгаллер, В. А. и др. К 90-летию со дня рождения А.Д. Александрова (1912–1999) // УМН / 2002. — 57:5, 347. — С. 169–181.

    BORISOV, Y. F & ZALGALLER, V. A (2002) On the 90th anniversary of the birth of A. D. Alexandrov (1912–1999). *Uspekhi Mat. Nauk.* 57:5 (347). p. 169–181.

20. Канторович, Л. В. Мой путь в науке // УМН / 1987. — Т. 42, №. 2. — С. 183–213.

    KANTOROVICH, L. V (1987) My journey in science. *Uspekhi Mat. Nauk.* Vol. 42 (No. 2). p. 183–213.

21. Банах, С. Некролог // УМН / 1946. — 1:3-4, 13-14. — С. 13–16.

    BANACH, S. (1946) My journey in science. *Uspekhi Mat. Nauk.* 1:3-4 (13-14). p. 13–16.

22. Архив Российской академии наук // arran.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
http://www.arran.ru

    arran.ru. (2021) *Archive of the Russian Academy of Sciences.* [Online] Available from: http://www.arran.ru.

23. ROBSON, E., STEDALL, J. (2009) *The Oxford Handbook of The History of Mathematics.* Oxford. Oxford University Press. 918.

24. GRATTAN-GUINNESS, I. (2003) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Baltimore. J. Hopkins University Press.2 vols. 1806

25. Вилейтнер, Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Физматлит, 1960. — 468 с.

    WIELEITNER, G. (1960) *Istoriya matematiki ot Dekarta do serediny XIX stoletiya.* Per. s nem. pod red. A.P. Yushkevicha. Moscow: Fizmatlit.

26. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / пер. с нем. и доп. И. Б. Погребысского. — М.: Наука, 1969. — 328 с.

    STRUICK, D. (1963) *Abriss der Geschichte der Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

27. JAMES, I. M. (1999) *History of topology.* North Holland. Amsterdam.

28. Александров, А. Д., Колмогоров, А. Н., Лаврентьев, М. А. (ред.) Математика: её содержание, методы и значение / Том 1. — М.: Наука, 1956. — 296 с.

    ALEXANDROV, A. D., KOLMOGOROV, A. N., LAVRENTEV, M. A. (1956) *Matematika: eyo soderzhanie, metody i znachenie.* Vol. 1. Moscow: Izd. AN SSSR.

29. Александров, А. Д., Колмогоров, А. Н., Лаврентьев, М. А. (ред.) Математика: её содержание, методы и значение / Том 2. — М.: Наука, 1956. — 397 с.

    ALEXANDROV, A. D., KOLMOGOROV, A. N., LAVRENTEV, M. A. (1956) *Matematika: eyo soderzhanie, metody i znachenie.* Vol. 2. Moscow: Izd. AN SSSR.

30. Александров, А. Д., Колмогоров, А. Н., Лаврентьев, М. А. (ред.) Математика: её содержание, методы и значение / Том 3. — М.: Наука, 1956. — 336 с.

    ALEXANDROV, A. D., KOLMOGOROV, A. N., LAVRENTEV, M. A. (1956) *Matematika: eyo soderzhanie, metody i znachenie.* Vol. 3. Moscow: Izd. AN SSSR.

31. intellectualmathematics.com. (2016) *History of mathematics literature guide.* [Online] Available from: http://intellectualmathematics.com/blog/history-of-mathematics-literature-guide/.

32. Электронная библиотека «Научное наследие России». // e-heritage.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.e-heritage.ru/about.html

    e-heritage.ru. (2021) *Library «Nauchnoe nasledie Rossii».* [Online] Available from: http://www.e-heritage.ru/about.html.

33. projecteuclid.org. (2016) *Project Euclid.* [Online] Available from: https://projecteuclid.org.

34. Lutzen, J. (2012) Joseph Liouville 1809–1882: Master of pure and applied mathematics. *Springer Science & Business Media.* V. 15. p. 1806.

35. Рыбкина, Г. Ф. Историко-математические исследования. Выпуск XV / Г. Ф. Рыбкина, А. П. Юшкевич. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 480 с.

RYBKINA, G. F and YUSHKEVICH, A. P. (1974) *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* . Issue XV. Moscow: GIFML.

36. Одинец, В. П., Синкевич, Г. И. Сто докладов по истории математики на семинаре в Санкт-Петербурге // Математика в высшем образовании. — 2018. — № 16. — С. 79–84.

    ODINETS, V. P. & SINKEVICH, G. I (2004) One hundred reports on the history of mathematics at a seminar in St. Petersburg. *Mathematics in Higher Education.* No. 16. p. 279–84.

37. Семинары: Sumio Yamada, Evolution of geometric ideas, and the role of Relativity // mathnet.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=30178

    mathnet.ru. (2021) *Seminars: Sumio Yamada, Evolution of geometric ideas, and the role of Relativity.* [Online] Available from: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=30178.

38. hps.cam.ac.uk. (2021) *Department of History and Philosophy of Science.* [Online] Available from: https://www.hps.cam.ac.uk/news-events/seminars-reading-groups/departmental.

39. РОИФН | Русское общество истории и философии науки // rshps.org [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://rshps.org

    rshps.org. (2021) *Russian Society for the History and Philosophy of Science.* [Online] Available from: http://rshps.org.

40. waset.org. (2021) *International Conference on History of Mathematics (ICHM).* [Online] Available from: https://waset.org/history-of-mathematics-conference.

41. Сосинский, А. Б. Mathematical English : Учебник английского для математиков. — М.: МЦНМО, 2017. — 88 с.

    SOSINSKY, A. V (2017) *Mathematical English: An English textbook for mathematicians.* Moscow: MCCME.

42. Гуссенс, М. Путеводитель по пакету Latex и его расширению Latex2e: Пер. с англ. / М. Гуссенс, Ф. Миттельбах, А. Самарин. — М.: Мир, 1999. — 621 с.

GOOSSENS, M., MITTELBACH, F., SAMARIN, A. (1997) *The LaTeX companion. Vol. 1.* Reading: Addison-Wesley.

43. Балдин, Е. М. Компьютерная типография LaTeX. — БХВ-Петербург, 2012. — 304 с.

    BALDIN, E. M. (2012) *Computer printing house LaTeX.* BHV-Petersburg.

44. Кнут, Д. Все про TEX = The TEXBook. — М.: Вильямс, 2003. — 560 с.

    KNUTH, D. (1986) *The TEXbook Boston.* ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY.

45. ru.overleaf.com. (2021) *Overleaf, Online LaTeX Editor.* [Online] Available from: https://ru.overleaf.com/learn/latex/Russian.

46. intellectualmathematics.com. (2016) *How to write a history of mathematics essay.* [Online] Available from: http://intellectualmathematics.com/blog/how-to-write-a-history-of-mathematics-essay/.

47. Халмош, П. Р. Как писать математические тексты // УМН / 1971. — Т. 26, Вып. 5(161). — С. 243–269.

    HALMOSH, P. (1971) How to write mathematical texts. *Uspekhi Mat. Nauk.* Vol. 26 (No. 5(161)). p. 243–269.

48. bshm.ac.uk. (2021) *Taylor and Francis early career research prize.* [Online] Available from: https://www.bshm.ac.uk/2021-taylor-and-francis-early-career-research-prize.

49. ichst2021.org. (2021) *DHST dissertation prize competition call for applications.* [Online] Available from: https://www.ichst2021.org/a2021-dhst-dissertation-prize-competition-call-for-applications/.

50. euro-math-soc.eu. (2021) *Otto Neugebauer Prize.* [Online] Available from: https://euro-math-soc.eu/otto-neugebauer-prize.

51. bshm.ac.uk. (2021) *Neumann Prize.* [Online] Available from: https://www.bshm.ac.uk/neumann-prize.

52. MANN, T. (2011) History of Mathematics and History of Science. *The University of Chicago Press.* Vol. 102 (No. 3). p. 518–526.

53. mathunion.org. (2021) *Kenneth O. May Prize in the History of Mathematics.* [Online] Available from:
https://www.mathunion.org/ichm/prizes/kenneth-o-may-prize-history-mathematics.

54. mathunion.org. (2021) *ICHM Montucla Prize.* [Online] Available from:
https://www.mathunion.org/ichm/prizes/ichm-montucla-prize.

55. mathunion.org. (2021) *THE GRATTAN-GUINNESS ARCHIVAL RESEARCH TRAVEL GRANT.* [Online] Available from:
https://www.mathunion.org/fileadmin/ICHM/Grants/IGG-Grants-4.pdf.

56. Шамина, О., Козлов, Д. Автоматический поиск научных статей в сети Интернет // Материалы летней школы по информационному поиску RuSSIR. — 2008. — Вып. 6. — С. 43–62.

    SHAMINA, O. & KOZLOV, D. (2008) Automatic search for scientific articles on the Internet. *Materials of the summer school on information search RuSSIR.* No. 6. p. 43–62.

УДК: 517.9

MSC2010: 37D15

О СВЯЗИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТИ С МНОГООБРАЗИЯМИ ЗЕЙФЕРТА И ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МОРСА-СМЕЙЛА

© Е. С. Косолапов, О. В. Починка

СПбПУ Петра Великого

Образовательная программа: "Механика и математическое моделирование"

ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, 194021, Российская федерация.

e-mail: *egor-kosolapov@bk.ru*

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики

Факультет Информатики, Математики и Компьютерных Наук

ул. Большая Печерская, д. 25/12, Нижний Новгород, 603155, Российская Федерация.

e-mail: *olga-pochinka@yandex.ru*

On the connection of periodic homeomorphisms of a surface with Seifert manifolds and the Morse-Smale diffeomorphism.

Kosolapov E. S., Pochinka O. V.

Abstract.

In this paper we consider periodic homeomorphism φ which acts on genus p surface. Homeomorphism is called *periodic* if exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n \equiv \mathrm{id}$. We study connections of such homeomorphisms with 3-dimensional topology. More accurately, we have established the condition that given 3-dimensional Seifert manifold is realised as mapping torus of some periodic homeomorphism φ. Moreover, this periodic homeomorphism is almost fully determined by topology of its mapping torus. This connection allowed us to proof, for instance, that there are no homotopy identical periodic homeomorphisms without points of smaller period on surfaces of positive genus. Using the connection between Morse-Smale diffeomorphisms and periodic homeomorphisms, we succeeded in classification of corresponding periodic homeomorphism of arbitrary Morse-Smale diffeomorphism with one source, one sink and one saddle orbit with negative type of orientation, what can be used in solution of problem of realisation of arbitrary Morse-Smale diffeomorphism on 2-dimensional manifold

Keywords: *Periodic homeomorphism, Seifert manifolds, Morse-Smale diffeomorphism*

Введение

Периодическим гомеоморфизмом называется такое отображение, применение которого некоторое конечное количество раз оказывается тождественным отображением. Мы будем рассматривать данные периодические преобразования с точностью до отношения эквивалентности, которое сохраняет структуру орбит. Более формально, два периодических гомеоморфизма φ, φ' топологического пространства X *топологически сопряжены*, если существует гомеоморфизм $h : X \to X$ такой, что $h \circ \varphi = \varphi' \circ h$.

Я. Нильсен [6] показал, что для топологической классификации всех сохраняющих ориентацию периодических преобразований замкнутых ориентируемых поверхностей, с точностью до вышеуказанной эквивалентности, достаточно знать некоторое число параметров, которые формируют так называемую *полную характеристику периодического отображения* φ. Неформально говоря, полная характеристика определяется точками, в которых период оказывается меньшим, чем период исходного отображения, а также некоторыми характеристиками, отвечающим за локальное поведение функции в окрестности данных точек меньшего периода. Более того, оказывается, что существование периодического отображения с заданной полной характеристикой определяется некоторой системой уравнений на числа, входящие в полную характеристику. Одним из основных результатов этой работы является получение эквивалентной системы, которая намного удобней по некоторым причинам, которые будут объяснены в соответствующем разделе.

Одним из основных способов расширения списка многообразий является так называемая конструкция *надстройки*. Более точно, пусть у нас есть топологическое пространство X и действующий на ней гомеоморфизм φ. Рассмотрим многообразие $\Sigma = (X \times [0,1]) / \sim$, где $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$. Если φ — периодический гомеоморфизм поверхности, то оказывается, что Σ является так называемым *многообразием Зейферта*, широко используемым в теории трехмерных многообразий. В данной работе найдены необходимые и достаточные условия того, что заданное многообразие Зейферта является надстройкой над периодическим гомеоморфизмом.

Также в работе рассмотрены *диффеоморфизмы Морса-Смейла*. Динамика, порождаемая такими диффеоморфизмами не меняет структуру разбиения на орбиты при малых изменениях диффеоморфизма, такие диффеоморфизмы называются *структурно устойчивыми*. При этом диффеоморфизмы Морса-Смейла являются простейшими среди структурно устойчивых, поскольку имеют лишь конечное число периодических точек. Однако их класс достаточно широк, поскольку они существуют на любых многообразиях. Среди диффеоморфизмов Морса-Смейла специальное место занимают *градиентно-подобные диффеоморфизмы*, динамика которых схожа с динамикой типичных градиентных потоков функций Морса. В силу результатов А. Безденежных и В. Гринеса (см., например, [4]), любой диффеоморфизм Морса-Смейла f на поверхности представляется в виде $f = \xi^1 \varphi$, где ξ^1 — сдвиг вдоль градиентно-подобного потока ξ^t на единицу времени, а φ — периодическое отображение. Связь периодических характеристики φ с диффеоморфизмом f заключается в том, что все точки меньшего периода отображения φ являются периодическими точками отображения f. Используя эту связь и свойства периодических преобразований, в данной работе получены содержательные результаты о периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Благодарности. Исследование поддержано грантом РНФ, договор 21-11-00010.

1. Основные определения и результаты

Здесь мы дадим основные формальные определения и сформулируем основные полученные результаты и следствия из них

Определение 1. Сохраняющий ориентацию и отличный от тождественного гомеоморфизм φ ориентируемого многообразия X называется периодическим, если существует такое натуральное число $n > 1$, что для любого $x \in X$ выполнено равенство $\varphi^n(x) = x$. Наименьшее из таких n называется периодом периодического отображения.

Везде в данной работе X — сфера с p ручками.

Определение 2. Гомеоморфизмы $\varphi, \psi : X \to X$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : X \to X$ такой, что для любого $x \in X$ выполнено равенство выполнено равенство $h\varphi(x) = \psi h(x)$.

Определение 3. Орбитой $\mathscr{O}_x$ точки x в силу гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ называется множество $\{y \in X \,|\, \exists k \in \mathbb{Z} : \varphi^k(x) = y\}$.

Определение 4. Точкой меньшего периода периодического гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ называют такую точку $x_0 \in X$, что существует $n_0 < n$ (n — период гомеоморфизма) такое, что $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Я. Нильсена [6] (см. также [1]) для любого периодического гомеоморфизма $\varphi : X \to X$ множество точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на X является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\dfrac{\delta_0}{\lambda_0}$, где $\lambda_0 = \dfrac{n}{n_0}$. Коль множество всех точек меньшего периода конечно, то занумеруем их орбиты и будем их впредь обозначать как x_i, $i = 1, \ldots, k$, а периоды точек этих точек будем обозначать n_i, полагать $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$ и обозначать через $\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ соответствующее число вращения. Определим число d_i удовлетворяющее условию $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$.

Определение 5. Пара (d_i, n_i) называется валентностью точки меньшего периода x_i.

Я. Нильсен показал, что верна следующее

Утверждение 1 ([6]). *Два периодических отображения сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей меньшего периода.*

Из этого утверждения естественным образом вытекает следующее определение

Определение 6. Набор параметров $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ периодического гомеоморфизма φ называется его полной характеристикой.

Утверждение 2 ([6]). *Полная характеристика $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ реализуется каким-то периодическим гомеоморфизмом φ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2)$
- $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i n_i \equiv 0 \pmod n$
- *если* $g = 0$, *то* $\gcd(d_1 n_1, \dots, d_k n_k, n) = 1$.

Используя приведенные условия в работе получены следующие оценки параметров полной характеристики.

Теорема 1. *Пусть дан периодический гомеоморфизм φ с полной характеристикой $(n, p, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ тогда выполнены следующие неравенства:*

1. $g \leqslant p$;
2. $k \leqslant 2(p + 1)$;
3. $n \leqslant 4p + 2$.

Заметим, что из этих неравенств сразу следует, что поиск всех периодических гомеоморфизмов на поверхности с фиксированным числом ручек является чисто алгоритмической задачей. Следующая теорема дает алгоритмический критерий реализуемости характеристики периодическим гомеоморфизмом.

Теорема 2. *Набор чисел $(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$ является полной характеристикой периодического отображения φ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (ниже $\lambda_i = \dfrac{n}{n_i}$, $\lambda = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$):*

В случае $g = 0$

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \dots, k - 1\}$;

2. $n = \lambda$ *и* $p = \dfrac{\lambda - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda}{\lambda_i}}{2} + 1$*;*
3. $\gcd(\lambda, d_1, \ldots, d_k) = 1$.

В случае $g \neq 0$*:*

1. $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{d_i}{\lambda_i} \in \{1, \ldots, k-1\}$
2. $n = \tau\lambda$, $\tau \in \mathbb{N}$ *и* $p = \dfrac{\lambda(2g + k - 2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda}{\lambda_i}}{2}\tau + 1$

Ниже приведены некоторые следствия алгоритмического критерия.

Следствие 1. *Не существует периодических гомеоморфизмов ровно с одной точкой меньшего периода.*

Следствие 2. *Любой периодический гомеоморфизм с 2 точками меньшего периода при* $g \neq 0$ *имеет полную характеристику следующего вида:*

$$(n = \tau\lambda,\ p = \tau(2g - 1) + 1,\ n_1 = n_2 = \lambda,\ d_1 + d_2 = \lambda).$$

А в случае $g = 0$ *любой периодический гомеоморфизм это поворот сферы вокруг оси полюсов на некоторый рациональный угол.*

Конструкция надстройки над периодическим гомеоморфизмов приводит в класс многообразий Зейферта. Дадим точные определения.

Определение 7. Рассмотрим полноторие $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ и рассмотрим разбиение на окружности $\{x\} \times \mathbb{S}^1$. Такое полноторие с таким расслоением на окружности называется тривиально расслоенным полноторием.

Естественно определить нетривиально расслоенное полноторие.

Определение 8. Рассмотрим пространство $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]/\sim$, где $(x, 0) \sim (f(x), 1)$, где f — поворот окружности на рациональный угол $2\pi\dfrac{\nu}{\alpha}$, где $0 < \nu < \alpha$. Взаимно простые числа ν, α называются орбитальными инвариантами, а получившееся пространство называется нетривиально расслоенным пространством с особым слоем $\{0\} \times \mathbb{S}^1$.

Определение 9. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие, разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые(слои), называется многообразием Зейферта, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию.

Обозначим через $(\alpha_i, \nu_i), 1 \leqslant i \leqslant k$ параметры нетривиально расслоенных полноториев многообразия Зейферта. Определим числа β_i следующим образом: $\beta_i \nu_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$.

Определение 10. Базой многообразия Зейферта M называется фактор-многообразие $B = M/\sim$, получающееся отождествлением точек из слоя.

Определение 11. Числом Эйлера многообразия Зейферта называется число $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$.

Будем обозначать многообразия Зейферта следующим образом

$$M(B; (\alpha_i, \beta_i), 1 \leqslant i \leqslant k).$$

Теорема 3. *Для того, чтобы многообразие Зейферта $M(B; (\alpha_i, \beta_i), 1 \leqslant i \leqslant k)$ было надстройкой над периодическим гомеоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (ниже $\alpha = \operatorname{lcm}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$):*
В случае, когда B сфера

1. *число Эйлера принадлежит множеству $\{1, \ldots, k-1\}$;*
2. *число $p = \dfrac{\alpha - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha}{\alpha_i}}{2} + 1$ является целым и неотрицательным;*
3. $\gcd(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k) = 1$.

При этом период гомеоморфизма будет равен α, а род поверхности на котором он действует будет равен p.
В случае, когда база B — сфера с g ручками, где $g > 0$

1. *Число Эйлера принадлежит множеству $\{1, \ldots, k-1\}$*
2. *число $p = \dfrac{\alpha(2g + k - 2) - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha}{\alpha_i}}{2} \tau + 1$ должно быть целым неотрицательным числом для некоторого $\tau \in \mathbb{N}$.*

При этом период гомеоморфизма будет равен $\alpha\tau$, а род поверхности на котором он действует будет равен p.

Эта теорема позволяет связать периодические гомеоморфизмы с топологией многообразий Зейферта. Например, будут доказаны следующие следствия.

Следствие 3. *Если периодический гомеоморфизм действует на сфере с $p > 0$ ручками и у него есть хотя бы одна точка меньшего периода, то такой гомеоморфизм не гомотопен тождественному отображению.*

Следствие 4. *Если у многообразия Зейферта M ровно два особых слоя, база B гомеоморфна сфере, число Эйлера равно 1, то тогда M гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Ещё одним приложением периодических гомеоморфизмов можно считать изучение диффеоморфизмов Морса-Смейла. Хорошее изложение всех следующих ниже определений и теорем есть в [4]

Определение 12. Пусть $f : X \to X$ диффеоморфизм. Подмножество $A \subset \text{int}X$ называется f-инвариантным, если $f(A) = A$

Определение 13. Пусть $f : X \to X$ диффеоморфизм. f-инвариантное подмножество $A \subset \text{int}X$ называется гиперболическим, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного расслоения T_AX в прямую сумму: $E^s_A \oplus E^u_A$ такие, что

$$\begin{cases} ||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k ||v||, v \in E^s_A, k > 0 \\ ||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k ||v||, v \in E^u_A, k > 0 \end{cases}$$

для какого-то фиксированного $c > 0$ и $0 < \lambda < 1$.

Существует гладкая иммерсия J касательного пространства к точке в окрестность этой точки на многообразии.

Определение 14. Устойчивым (неустойчивым) многообразием W^s_x (W^u_x) называется подмногообразие $J(E^s_x)$ ($J(E^u_x)$).

Определение 15. Точка x называется блуждающей, если существует такая открытая окрестность U_x точки x, что для любого отличного от нуля целого числа n выполнено $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$. В ином случае, точку x называют неблуждающей.

Определение 16. Диффеоморфизмом Морса-Смейла называется такой диффеоморфизм $f : X \to X$, что множество его неблуждающих точек конечно, состоит только из гиперболических точек, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются друг с другом трансверсально.

Определение 17. Гиперболическая точка $x \in X$, где $\text{dim}X = n$, называется стоком (источником), если $\text{dim}(W^s_x) = n$ ($\text{dim}(W^u_x) = n$). Если точка гиперболическая, но при этом не выполняются условия на размерность выше, то тогда такую точку называют седлом. Говорят, что периодическая точка x периода $per(x)$ имеет положительный (отрицательный) тип ориентации, если отображение $f^{per()}|_{W^u_x}$ сохраняет (меняет) ориентацию.

Утверждение 3 ([4]). *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла f представляются в виде композиции $f = \varphi \circ \xi^1$, где ξ^1 есть сдвиг вдоль* *потока ξ^t на единицу времени, а φ — периодический гомеоморфизм. Причём точки меньшего периода гомеоморфизма φ являются также периодическими точками диффеоморфизма f, причём их периоды совпадают.*

Основным результатом данной работы применительно к диффеоморфизмам Морса-Смейла является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть у сохраняющего ориентацию диффеоморфизма f Морса-Смейла на сфере с p ручками есть единственная седловая орбита отрицательного типа ориентации. Тогда относительно периодического отображения φ ($f = \varphi \circ \xi^1$) можно сказать следующее:*

1. *отображение φ имеет либо две, либо три орбиты меньшего периода;*
2. *если отображение φ имеет две орбиты меньшего периода, то φ имеет следующую полную характеристику ($n = 2, g = 0, p = 0, n_1 = n_2 = 1, d_1 = d_2 = 1$) и является поворотом сферы относительно некоторой оси на 180 градусов, причём одна из неподвижных точек φ — седловая точка диффеоморфизма f;*
3. *если отображение φ имеет ровно три точки меньшего периода, то оно имеет одну из следующих полных характеристик:*
   1) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p - d_2)$, $0 < d_2 < 2p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
   2) $(n = 4p, g = 0, p > 0, n_1 = 2p, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p - d_2)$, $2p < d_2 < 4p$, $\gcd(d_2, 2p) = 1$;
   3) $(n = 4p+2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 2p+1-2d_2)$, $0 < d_2 \leqslant p$, $\gcd(d_2, 2p+1) = 1$;
   4) $(n = 4p+2, g = 0, p > 0, n_1 = 2p+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3 = 6p+3-2d_2)$, $p < d_2 \leqslant 2p$, $\gcd(d_2, 2p+1) = 1$.

На рисунках 1, 2 приведены результаты численного подсчета числа периодических гомеоморфизмов.

2. Оценки параметров полной характеристики

В данном разделе будут доказаны теоремы 1 и 2 и следствия из них.

Доказательство. (Теоремы 1)

- $2p + \sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 2 = n(2g + k - 2) \Rightarrow 2p - 2 = n(2g - 2) + nk - \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \geqslant n(2g - 2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2p - 2 \geqslant n(2g - 2) \Rightarrow 2g - 2 \leqslant \dfrac{2p - 2}{n} \leqslant 2p - 2 \Rightarrow g \leqslant p.$

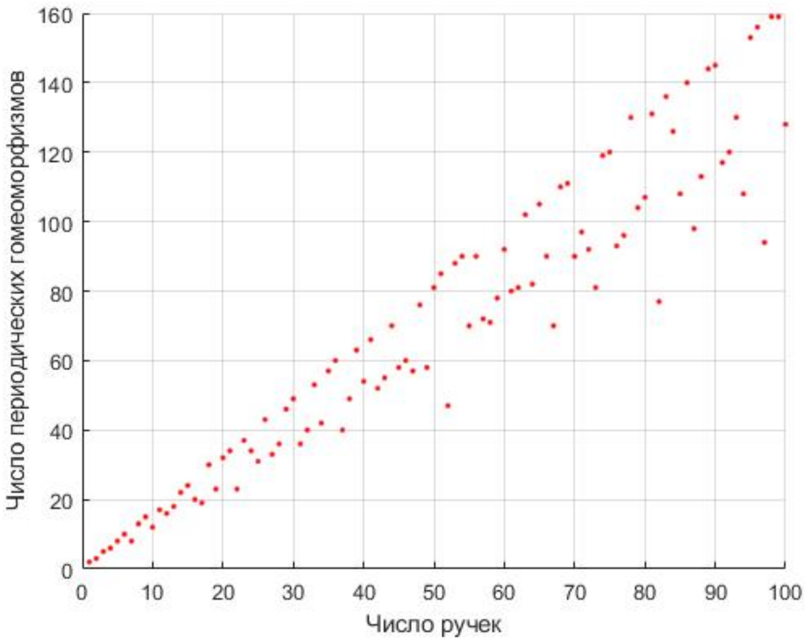

Рис. 1. Число гомеоморфизмов типов 1), 2)

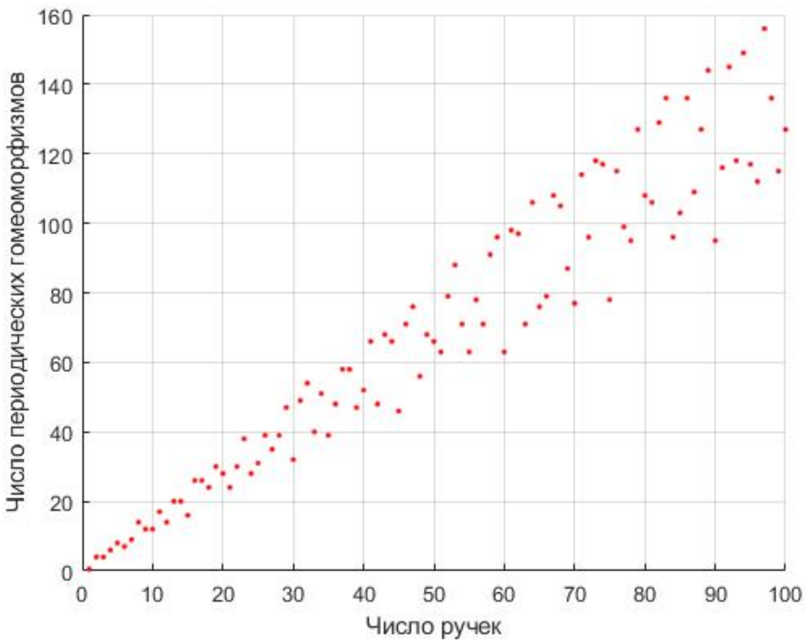

Рис. 2. Число гомеоморфизмов типов 3), 4)

- $2p+\sum_{i=1}^{k} n_i-2 = n(2g+k-2) \Rightarrow nk = 2p-2+\sum_{i=1}^{k} n_i-2ng+2n \leqslant 2p-2+\dfrac{nk}{2}-2ng+2n \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{k}{2} \leqslant \dfrac{2p-2}{n} - 2g + 2 \leqslant p-1+2 = p+1 \Rightarrow k \leqslant 2(p+1).$
- Доказательство этого факта известно и есть, например, в статье [5].

$\square$

Доказательство. (Теоремы 2)

Сначала докажем теорему в предположении, что род модульной поверхности равен 0.

Первое условие вытекает из равенства $d_1n_1 + \cdots + d_kn_k = 0 \pmod n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{d_1n}{\lambda_1} + \cdots + \dfrac{d_kn}{\lambda_k} = 0 \pmod n$. Так как $0 < d_i < \lambda_i$, то $0 < \dfrac{d_in}{\lambda_i} < n$. Отсюда следует, что $\dfrac{d_1n}{\lambda_1} + \cdots + \dfrac{d_kn}{\lambda_k} = \{n, 2n, \dots, (k-1)n\} \Rightarrow \dfrac{d_1}{\lambda_1} + \cdots + \dfrac{d_k}{\lambda_k} = \{1, 2, \dots, k-1\}$
Второе условие сразу следует из уравнения на эйлеровы характеристики (выражаем род p исходной поверхности и требуем, чтобы оно было натуральным), а также из того факта, что $n = \mathrm{lcm}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, который будет доказан ниже.

Так как d_i взаимно прост с λ_i, то для того, чтобы число $\dfrac{d_i}{\lambda_i}n$ было целым необходимо и достаточно, чтобы λ_i делило n. Отсюда, n должно иметь вид $k\lambda$, где k какое-то положительное целое число. Докажем, что $k = 1$. Действительно, пусть это не так. Тогда $\gcd\left(\dfrac{d_1n}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{d_kn}{\lambda_k}, n\right) = \gcd\left(k\dfrac{\lambda}{\lambda_1}d_1, \dots, k\dfrac{\lambda}{\lambda_k}d_k, k\lambda\right) \geqslant k > 1$. Противоречие. Следовательно, $k = 1$ и $n = \lambda$. В итоге получили уравнение $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1}d_1, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k}d_k, \lambda\right) = 1$. По определению НОКа: $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k}\right) = 1$. Действительно, если бы это не было так и НОД равнялся бы b, то тогда число $\dfrac{\lambda}{b}$ было бы кратным и причём меньшим чем λ, что противоречит минимальности λ. Из этого факта следует, что $\gcd\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_1}d_1, \dots, \dfrac{\lambda}{\lambda_k}d_k\right) = \gcd(d_1, \dots, d_k)$. Действительно, НОД левой части уж никак не меньше НОДа правой части, но строго больше он не может быть. Действительно, он мог бы стать больше только из-за общих делителей чисел вида $\dfrac{\lambda}{\lambda_i}$, но у них нет общих делителей. Остаётся только равенство.

Обозначим $b = \gcd(d_1, \dots, d_k)$. Если $b = 1$, то нужное уравнение для периодического гомеоморфизма выполняется. Если $b \neq 1$, то тогда для выполнения нужного уравнения необходимо и достаточно, чтобы $\gcd(b, \lambda) = 1$. Доказательство в случае модульной поверхности в виде сферы закончено.

Доказательство при произвольном g аналогично. Значительная разница будет заключаться в том, что третье равенство в теореме 2 можно отбросить. Отсюда, получаем, что $n = \tau\lambda$, где τ — произвольное натуральное число. □

Доказательство. (Следствия 1 и 2)

Следствие 1 автоматически следует из пункта 1 Теоремы 2. Докажем Следствие 2.

Из Теоремы 2 следует, что $\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} = 1 \to \frac{d_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 - d_1}{\lambda_1}$. Следовательно λ_2 делит λ_1. Аналогично можно доказать, что λ_1 делит λ_2. Отсюда, $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Отсюда сразу следует, что $d_2 = \lambda - d_1$. В дальнейшем в доказательстве будем предполагать, что $g \neq 0$. Согласно Теореме 2, $n = \tau\lambda$, где τ — произвольное натуральное число. Отсюда, из первого уравнения теоремы, получим, что $p = 2\tau g + 1 - \tau$.

Если же $g = 0$, то тогда $p = 1 - \tau \geqslant 0 \Rightarrow \tau \leqslant 1 \Rightarrow \tau = 1, p = 0, n_1 = n_2 = 1$. Для любых d_1, d_2 можно легко подобрать вращение сферы вокруг оси так, чтобы получившееся периодическое отображение имело заданную полную характеристику. Таким образом, доказательство завершено. □

3. Связь периодических гомеоморфизмов с многообразиями Зейферта

В этом разделе доказывается Теорема 3 и следствия из нее.

Доказательство. (Теоремы 3)

Достаточность условий теоремы следует из очевидной переформулировки Теоремы 2 на языке многообразий Зейферта. Необходимость условий следует из существования глобальной секущей к слоям у расслоения Зейферта с целым числом Эйлера (см., например, [2]). □

Доказательство. (Следствия 3)

Существование гомеоморфизма многообразия Зейферта с базой в виде сферы с $p > 0$ ручками влечёт существование послойного гомеоморфизма (см., например, [3]), при котором число Эйлера сохранятся (см., например, [2]). Если бы периодический гомеоморфизм φ был гомотопен тождественному, то тогда полученное при помощи надстройки многообразие Зейферта было бы гомеоморфно $\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}_p$ — сфера p ручками, но у этого многообразия Зейферта число Эйлера равно 0, так как нет особых слоев. С другой стороны, если у φ есть хотя бы одна особая точка, то тогда число Эйлера равно $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\lambda_i} > 0$. Таким образом, полученное многообразие Зейферта не может быть гомеоморфно $\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}^1$. Противоречие. Значит φ не гомотопен тождественному отображению. □

Доказательство. (Следствия 4)

Если у многообразия Зейферта M с базой B, гомеоморфной сфере, ровно два особых слоя, то оно является надстройкой над периодическом гомеоморфизмом φ над сферой с 2 особыми точками. Как было показано в Следствии 1, φ есть поворот сферы на рациональный угол, то есть φ изотопен тождественному, а значит получающееся при надстройке многообразие Зейферта гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, что и требовалось $\square$

4. Связь периодических гомеоморфизмов с диффеоморфизмами Морса-Смейла

Доказательство. (Теоремы 4)

Для доказательства нам нужны следующие два факта, доказанные, например, в [4].

Пусть f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на ориентируемой поверхности рода p, и $y_1, \ldots, y_m$ – его периодические точки. Пусть m_i — это период периодической точки y_i. Тогда выполнено равенство Морса $\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^{\delta_i} m_i = 2 - 2p$, где $\delta_i = 0$, если точка y_i является стоком или источником и $\delta_i = 1$, если точка y_i является седлом. Причём, если y_i – седловая точка отрицательного типа ориентации, то $m_i = \dfrac{n}{2}$, где n — период гомеоморфизма φ. Если диффеоморфизм f имеет единственную периодическую седловую орбиту и она отрицательного типа ориентации, то кроме нее в неблуждающем множестве находится ровно две периодические орбиты, одна из которых источниковая, другая стоковая. Теперь приступим к доказательству теоремы

1. Если бы у периодического отображения φ было строго больше трех точек меньшего периода, то тогда у отображения f было бы строго больше трех периодических точек, что противоречит условию. Так как период седловой точки равен $\dfrac{n}{2} < n$, то у отображения φ должна быть хотя бы одна точка меньшего периода. Ровно одной точки меньшего периода быть не может, так как ни у какого периодического гомеоморфизма не может быть ровно одной периодической точки (см. Следствие 1).
2. Согласно равенству Морса, в случае двух точек меньшего периода у гомеоморфизма φ, имеем $-\dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{\lambda_2} + n = 2 - 2p$. Подставим данное равенство в первое равенство Теоремы 2: $\dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{\lambda_2} + \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{\lambda_2} - n = n \cdot 2g$. Отсюда, $n - n = n \cdot 2g$. Следовательно, $g = 0$. Тогда из следствия 2 следует, что периодический гомеоморфизм φ есть поворот сферы на некоторый рациональный угол. Ясно, что в

нашем случае этот угол будет равен 180 градусам. Действительно, период седловой точки равен 1, но с другой стороны её период равен $\frac{n}{2}$, а значит период отображения φ равен 2. Отсюда и следует искомое утверждение.

3. Теперь предположим, что у соответствующего диффеоморфизму f периодического гомеоморфизма φ следующая полная характеристика: $(n, p, g, n_i, d_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 3)$. В силу второго пункта Теоремы 1, $p > 0$. Согласно условию и факту выше, $n_1 = \frac{n}{2}$. Из равенства Морса $-\frac{n}{2} + n_2 + n_3 = -\frac{n}{2} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = 2 - 2p$. Тогда из первого равенства Теоремы 2 получаем: $n = n \cdot (2g+1) \Rightarrow g = 0$. Получаем, что $n_1 = \frac{n}{2}$. Обозначим $n_2 = \frac{n}{\lambda_2}, n_3 = \frac{n}{\lambda_3}$. Так как $g = 0$, то, согласно Теореме 2, получим, что $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_2, \lambda_3)$. Согласно второму условию Теоремы 2 $\frac{1}{2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} = z$, где z — целое число, равное 1 или 2. Перенесем всё, кроме последнего слагаемого в правую часть. Получим какую-то дробь со знаменателем λ_3. Так как дроби слева и справа равны и d_i взаимно просто с λ_i, то равенство возможно тогда и только тогда, когда λ_3 делит $2\lambda_2$. Аналогично можно показать, что λ_2 делит $2\lambda_3$. Следовательно, $2\lambda_2 = t_1\lambda_3, 2\lambda_3 = t_2\lambda_2 \Rightarrow 4\lambda_2 = t_1 t_2 \lambda_2 \Rightarrow t_1 t_2 = 4$. Отсюда, с точностью до перенумерации, получаем всего два случая: a) $\lambda_2 = \lambda_3$ или b) $\lambda_2 = 2\lambda_3$.

В случае b) $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_3, 2\lambda_3) = 2\lambda_3 \Rightarrow n_2 = 2, n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство Теоремы 2, получим полную характкристику $(n = 4k+2, g = 0, p = k, n_1 = 2k+1, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}, \gcd(d_2, 2k+1) = \gcd(d_3, 4k+2) = 1, 2d_2 + d_3 = 2k+1$ или $2d_2 + d_3 = 3(2k+1)$. Ясно, что в первом случае $2d_2 = 2k + 1 - d_3 \leqslant 2k$, откуда $d_2 \leqslant k$, а во втором случае $2d_2 = 6k + 3 - d_3 > 6k + 3 - (4k + 2)$, откуда $d_2 > k$. Из равенства $\gcd(d_2, 2k+1) = 1$ следует, что $\gcd(2d_2, 2k+1) = 1$. Действительно, если числа d_2 и $2k+1$ взаимно просты, то тогда $\gcd(2d_2, 4k+2) = 2$, а значит $\gcd(2d_2, 2k+1) = 1$, что и требовалось. Поскольку $d_3 = 2k + 1 - 2d_2$ или $d_3 = 3(2k+1) - 2d_2$, то $\gcd(d_3, 2k+1) = \gcd(2d_2, 2k+1) = 1$. Учитывая, что d_3 нечетное, получаем $\gcd(d_3, 4k+2) = 1$.

В случае a) нужно рассмотреть два подслучая: a1) λ_3 — чётное; a2) λ_3 — нечётное.

В случае a1) $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_3) = \lambda_3$. Отсюда, $n_2 = n_3 = 1$. Подставив известные значения n, d_1, n_1, n_2, n_3 во второе равенство Теоремы 2, получим полную характеристику $(n = 4k, g = 0, p = k, n_1 = 2k, n_2 = 1, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2, d_3)$, $k \in \mathbb{N}$, $\gcd(d_2, 4k) = \gcd(d_3, 4k) = 1$, $d_2 + d_3 = 2k$ или $d_2 + d_3 = 6k$. Ясно, что в первом случае $d_2 < 2k$, а во втором случае $2k < d_2 < 4k$. Также ясно, что $\gcd(d_2, 4k) = 1$ эквивалентно $\gcd(d_2, 2k) = 1$. Действительно, если d_2 и $4k$ взаимно просты, то тем более d_2 и $2k$ взаимно просты. Если же d_2 и $2k$ взаимно просты, то отсюда следует, что d_2 обязательно нечётно, а значит d_2 взаимно просто с $2 \cdot 2k = 4k$. Так как $d_3 = \{2, 6\}k - d_2$, то d_3 имеет такой же остаток деление на $2k$, как и d_2. Отсюда, условие $\gcd(d_2, 2k) = \gcd(d_3, 2k) = 1$ можно упростить до одного соотношения $\gcd(d_2, 2k) = 1$.

В случае a2) $n = \mathrm{lcm}(2, \lambda_3) = 2\lambda_3$. Отсюда, $n_2 = n_3 = 2$. Тогда из равенства Морса, получим $\frac{-2\lambda}{2} + \frac{2\lambda}{\lambda} + \frac{2\lambda}{\lambda} = 2 - 2p$. Отсюда, $\lambda = 2p + 2$ — противоречие (λ предполагалось нечётным).

$\square$

Список литературы

1. БАРАНОВ, Д. А., ПОЧИНКА, О. В. (2021) Классификация периодических преобразованиий ориентируемой поверхности рода два. *Журнал СВМО.* Том 23 (Номер 2). p. 147–158.

2. ФОМЕНКО, А. Т., МАТВЕЕВ, С. В (1998) *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* 2-изд, перераб. и доп., М.: Наука. 304.

3. HATCHER, A. E. (2007) *Notes on Basic 3-Manifold Topology.* 73. .

4. GRINES, V. Z., MEDVEDEV, T. V., POCHINKA,O. V. (2016) *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.* Springer,Developments in Mathematics. Volume 46. 314

5. WANG, S. (1991) *Maximum orders of periodic maps on closed surfaces.* Topology and its Applications 41. 255–262.

6. NIELSEN, J. (1937) *Die struktur periodischer transformationen von flachen.* Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. M.-f. Meddelelser. 1–77.

УДК: 514.7

MSC2010: 51F15, 14L24

О БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТАХ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКА $\frac{1}{p}\gamma_n^m$

© О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Физико-технический институт
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *oirud58@gmail.com*

On a basic invariants of the symmetry group of polyhedron $\frac{1}{p}\gamma_n^m$.

Rudnitskii O. I.

Abstract. In a n-dimensional unitary space U^n $(n > 4)$ there are three series of regular polytopes: the regular simplex α_n, the generalized cross polytopes β_n^m and the generalized n-cube γ_n^m. The generalized n-cube has m^n vertices:

$$(\theta^{k_1}, \theta^{k_2}, \dots, \theta^{k_n}),$$

where $k_1, k_2, \dots, k_n$ take any integral values and θ is a primitive mth root of unity.

For a certain divisor p of the number m the vertices of γ_n^m with

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \equiv 0 \pmod p$$

(there are qm^{n-1} of them if $m = pq$) determine a complex polytope $\frac{1}{p}\gamma_n^m$. The symmetry group of $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ is the imprimitive group $G(m,p,n)$ generated by reflections. It is well known that the set of polynomials invariant with respect to $G(m,p,n)$ forms an algebra generated by n algebraically independent homogeneous polynomials of degrees $m, 2m, \dots, (n-1)m, qn$ (a system of basic invariants of group $G(m,p,n)$).

In this paper, we study the properties of basic invariants of group $G(m,p,n)$. It is given a positive solution to the «vertex problem» for the polytope $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ if p and n is mutually prime. Namely, polynomials

$$V_s = \sum_{k_i} (\theta^{k_1}x_1 + \theta^{k_2}x_2 + \dots + \theta^{k_n}x_n)^{ms}, \sum_{i=1}^{n} k_i \equiv 0 \pmod p), s = \overline{1, n-1}$$

are algebraically independent and are basic invariants of group $G(m,p,n)$ if p and n is mutually prime.

Keywords: *unitary space, reflection, basic invariant, algebra of invariants, complex polyhedron.*

Введение

Зададим в n-мерном унитарном пространстве U^n систему координат началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $(i=\overline{1,n})$; вектор $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$. Отражением σ порядка l в пространстве U^n называется унитарное преобразование порядка l, множество неподвижных точек которого является гиперплоскостью (плоскостью размерности $n-1$). Эту плоскость называют гиперплоскостью отражения или симметрии. Обозначим через G конечную неприводимую группу, порождённую отражениями σ относительно гиперплоскостей с общей точкой O. Классификация групп G впервые получена в работе [1].

Определим действие группы G в кольце $R=\mathbf{C}[x_1,\ \ldots,x_n]$ многочленов от n переменных над полем комплексных чисел с помощью равенства

$$\sigma\cdot f=\sigma\cdot f(\vec{x})=f(\sigma^{-1}\vec{x}),\ \sigma\in G, f(\vec{x})=f(x_i)\in R.$$

Многочлен $f\in R$ называется инвариантом группы G ($G-$инвариантом), если $\sigma\cdot f=f$ для всех $\sigma\in G$. Известно, что множество всех G-инвариантных многочленов $f\in R$ образует алгебру I^G, порождённую n алгебраически независимыми однородными многочленами (базисными инвариантами) f_i степеней $m_i,\ i=\overline{1,n}$ [1]. Отметим, что числа m_i для заданной группы G определяются однозначно, а сами базисные инварианты нет.

Вершины правильного $n-$мерного многогранника M_n зададим векторами $\overrightarrow{OV_r}$, $r=\overline{1,p}$. Его группа симметрий G есть конечная группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей с началом O [2].Тогда многочлены

$$V_{m_i}^G=\sum_{r=1}^{p}(\vec{x},\overrightarrow{OV}_r)^{m_i} \tag{1}$$

принадлежат алгебре I^G.

Естественно возникает вопрос: являются ли многочлены (1) базисными инвариантами группы или, другими словами, являются ли многочлены (1) алгебраически независимыми?

Впервые такая задача («проблема вершин») была сформулирована в работах Леопольда Флатто (см. [3–5]). Там же он дал ее положительное решение для групп G симметрий правильных вещественных многогранников, отличных от группы B_n симметрий $n-$куба γ_n, и высказал предположение об алгебраической независимости многочленов (1) в случае $G=B_n$. Его подтвердил Хейслейн [6], а также другим методом В.Ф. Игнатенко [7].

В [8] автор решил указанную задачу для групп симметрий правильных комплексных многогранников, при этом для решения задачи в случае группы $G(m,1,n) = B_n^m$ симметрий обобщенного $n-$куба γ_n^m был использован метод работы [7].

Цель настоящей заметки: *решить вопрос об алгебраической независимости многочленов (1) для группы $G(m,p,n)$ симметрий комплексного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$, если p и n взаимно простые.*

1. Постановка задачи

Естественным обобщением вещественного $n-$мерного куба γ_n на пространство U^n является комплексный многогранник γ_n^m $(m \geq 2)$, называемый обобщённым $n-$кубом $(\gamma_n^2 = \gamma_n)$ [2]. Вершины γ_n^m зададим следующими m^n векторами

$$\overrightarrow{OV_r} = \sum_{i=1}^{n} \theta^{k_i} \vec{e_i}, \tag{2}$$

где $\theta-$ первообразный корень степени m из единицы, $k_i = \overline{1,m}$, $r = \overline{1,m^n}$.

Его группа симметрий $B_n^m = G(m,1,n)$ имеет порядок $m^n \cdot n!$ и порождается отражениями порядка m относительно гиперплоскостей с уравнениями [9]

$$x_j = 0 \tag{3}$$

и отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей

$$x_i - x_j = 0 \quad (i,j = \overline{1,n}, \ \ i < j). \tag{4}$$

Числа $m_i = m, 2m, ..., (n-1)m, nm$ [1].

Интерес к изучению геометрии обобщённого $n-$куба, его группы симметрий B_n^m и инвариантов обусловлен их различными применениями, например, в теории кодирования [10]. Обобщённый $n-$куб также является основой для построения «дробных γ многогранников» $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ с импримитивной группой симметрий $G(m,p,n)$, где p — делитель m $(m = pq)$ [11].

Вершины многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ могут быть заданы qm^{n-1} векторами (2) при условии $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \equiv 0 \pmod p$ и $r = \overline{1, qm^{n-1}}$ [11]. Его импримитивная группа симметрий $G(m,p,n)$ порождена отражениями порядков q и 2 относительно гиперплоскостей с уравнениями (3) и (4) соответственно [9]. Степени базисных инвариантов $m_i = m, 2m, ..., (n-1)m, qm$ [1].

Утверждение. Если $G = G(m,p,n)$ есть группа симметрий многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ $(n > 2)$, где n и p — взаимно простые, то многочлены (1) степеней

$m_i = mt \quad (t = \overline{1, n-1})$ алгебраически независимы, то есть являются базисными инвариантами группы $G(m,p,n)$.

2. Доказательство утверждения

1. Первоначально рассмотрим случай $p = 1$, то есть обобщённый $n-$куб γ_n^m (см., также [8]).

Так как степени $m_i = m, 2m, ..., (n-1)m, nm$, то формы (1) имеют вид

$$V_{ms}^{B_n^m} = V_{n,sm} = \sum_{k_i} (\theta^{k_1} x_1 + \dots + \theta^{k_n} x_n)^{sm}, \tag{5}$$

где $s = \overline{1, n}$ и суммирование производится по всем наборам k_i (их m^n).

Доказательство алгебраической независимости форм (5) проведем индукцией по размерности n.

Если $n = 2$, то, очевидно, формы

$$V_{2,m} = m^n(x_1^m + x_2^m) \quad V_{2,2m} = m^n(x_1^{2m} + C_{2m}^m x_1^m x_2^m + x_2^{2m})$$

алгебраически независимы в случае, когда $m \geq 2$ и, таким образом, порождают алгебру $I^{B_2^m}$.

Будем считать, что формы (5) независимы в пространстве $U^k \ (k < n)$. Докажем их независимость в случае $k = n$.

Рассмотрим линейную функцию

$$\eta = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k, \quad a_k \in \{1, \theta, \dots, \theta^{m-1}\}.$$

Тогда

$$\sum_{a_k} \eta^{ml} = V_{n-1,ml}, \quad l = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где суммирование по всем m^{n-1} значениям a_k.

Запишем формы (5) в следующем виде:

$$V_{n,ms} = \sum_{k_i} (\theta^{k_1} x_1 + \dots + \theta^{k_n} x_s)^{ms} = \sum_{a_k} [(\eta + x_n)^{ms} + (\eta + \theta x_n)^{ms} + \dots + (\eta + \theta^{m-1} x_n)^{ms}] =$$

$$= m \sum_{a_k} \sum_{t=0}^{s} C_{m(s-t)}^{mt} \eta^{m(s-t)} x_n^{mt} = m \sum_{t=0}^{s} C_{m(s-t)}^{mt} \left(\sum_{a_k} \eta^{m(s-t)} \right) x_n^{mt}.$$

Используя соотношение (6) для $l = s - t \quad (t < s)$, мы окончательно получим рекуррентное соотношение:

$$V_{n,ms} = m \sum_{t=0}^{s} C_{m(s-t)}^{mt} V_{n-1,m(s-t)} x_n^{mt}, \quad V_{n-1,0} = 1. \tag{7}$$

Будем считать, что формы $V_{n,ms} \quad (s = \overline{1,n})$ алгебраически зависимы в U^n. Тогда существует многочлен $F(\overrightarrow{x})$, тождественно не равный нулю, такой что:

$$F(V_{n,ms}) = 0, \quad s = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Так как $V_{n-1,mn}$ многочлен от $V_{n-1,ms} \quad (s < n)$, следовательно, если положить $x_n = c \neq 0$ в (8), то из (7) получим алгебраическую зависимость между $V_{n-1,ms} \quad (s = \overline{1,n-1})$, что невозможно по допущению индукции.

Таким образом, формы (5) алгебраически независимы и порождают алгебру $I^{B_n^m}$.

2. Пусть $p \neq 1$, а числа p и n взаимно простые. Тогда множество S, всех векторов (2), можно представить в виде объединения p множеств S_j, векторы которых удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=0}^{n} k_i \equiv j \pmod p$, $\; j = \overline{0,p-1}$ (множество S_0, как и любое из S_j, очевидно определяет вершины многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$). Так как p и n взаимно простые, уравнение $nt \equiv j \pmod p$ имеет решение для всех $j = \overline{0,p-1}$ (см. [12], Теорема 131, стр. 113), то всегда можно подобрать такое значение t, что множество S_j состоит из векторов множества S_0, умноженного на θ^t.

Пусть

$$V_{ms}^{G(m,p,n)} = \widetilde{V}_{n,sm} = \sum_{k_i} (\theta^{k_1} x_1 + ... + \theta^{k_n} x_n)^{ms},$$

суммирование проводится по всем k_i, удовлетворяющим условию $\sum\limits_{i=0}^{n} k_i \equiv 0 \pmod p$.

Тогда,

$$V_{n,sm} = p\widetilde{V}_{n,sm}$$

или

$$\widetilde{V}_{n,sm} = \frac{1}{p} V_{n,sm}.$$

Следовательно, алгебраическая независимость $\widetilde{V}_{n,sm}$ вытекает из алгебраической независимости $V_{n,sm}$, доказанной в пункте 1.

Таким образом, многочлены вида (1) для $G = G(m,p,n)$, где n и p – взаимно простые, являются алгебраически независимы, и, следовательно, являются базисными инвариантами группы симметрий комплексного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$.

Заключение

В работе дано положительное решение «проблемы вершин» для комплексного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$, если n и p – взаимно простые.

Список литературы

1. SHEPHARD, G. C. Finite unitary reflection groups / G. C. Shephard, J. A. Todd // *Can. J. Math.* – 1954. – Vol. 6. – № 2. – P. 274–304.
2. COXETER, H. S. M. Regular complex polytopes. – London Cambridge Univ. Press, 1974. – 185 p.
3. FLATTO, L. Functions with a mean value property // *Amer. J. Math.* – 1963. – V. 85. – № 2. – P. 248–270.
4. FLATTO, L. Basis sets of invariants for finite reflection groups // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1968. – V. 74. – № 4. – P. 730–734.
5. FLATTO, L. Regular polytopes and harmonic polynomials // *Canad. J. Math.* – 1970. – V. 22. – P. 7–21.
6. HAEUSLEIN, G. K. On the algebraic independence of symmetric functions // *Proc. Am. Math. Soc.* – 1970. – V. 25. – № 1. – P. 179–182.
7. Игнатенко, В. Ф. Об одной системе базисных инвариантов группы B_n //*Укр. геом. сб.* – 1986. – № 29. – P. 54–55.

   IGNATENKO, V. F. (1986) A system of basic invariants of the group B_n //*Ukr. Geometr. Sb.* – 1986. – № 29. – P. 54–55.
8. RUDNITSKII, O. I. On invariants of symmetry groups of regular polytopes //*Journal of Mathematical Sciences* – 1998. – V. 90. – № 6. – P. 2505–2508.
9. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1990. – 115 с.

   RUDNITSKII, O. I. (1990) Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. *The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences.* Minsk.
10. CONWAY, J. H. The Coxeter-Todd lattice, the Mitchell group and related sphere packings / J. H. CONWAY, N. J. A. SLOANE // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1983. – Vol.93. – № 3. – P. 421–440.

11. SHEPHARD, G. C. Unitary groups generated by reflections // *Canad. J. Math.* – 1953. – V. 5. – P. 364–383.

12. Бухштаб, А. А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

    BUHSHTAB, A. A. (1966) Theory of number. – Moscow: Prosveschenie, 1966. – 384 p.

УДК: 531.091
MSC2010: 01A55

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАБОТАХ АБЕЛЯ, ЯКОБИ, ВЕЙЕРШТРАССА, СОМОВА

© А. О. Юлина, Г. И. Синкевич

Военно-Космическая академия имени А.Ф. Можайского
e-mail: *parfenova19761976@mail.ru*

The history of the development of the theory of elliptic functions in the works of Abel, Jacobi, Weierstrass, Somov..

Yulina A. O. and Sinkevich G. I.

Abstract. The article explores the practical necessity of using elliptic functions. The history of the origin of the concept of an elliptic function is considered in detail. Clear conclusions on the formation of the apparatus of the theory of elliptic functions in the works of Abel, Jacobi, Weierstrass and Somov are proposed. Based on the proof of Abel's theorem, a representation of elliptic functions in terms of theta functions is shown.

The introduction and use of elliptic and hyperelliptic functions bring the problems of control and orientation of mechanical objects to the simplest elements. The sought parameters of motion (direction cosines of the Euler angles) are the composition of such functions. General concepts and definitions of elliptic functions are reduced to the operation of integration. All methods of integration consist either in reducing the considered integral to elementary functions, or in its direct investigation, when this reduction is possible. Therefore, integral calculus is divided into separate sections. Among them, the first place after the theory of logarithmic and circular functions is occupied by the theory of elliptic functions.

Giulio Carlo Fagnano (1682-1766, Italian mathematician, the first to pay attention to the theory of elliptic functions) discovered a remarkable relationship between arcs taken on one ellipse or one hyperbola. Euler proved analytically and generalized the property discovered by Fagnano.

Soon John Landen (1719-1790, British mathematician, his transformations refer to elliptic integrals and elliptic functions) found that the arc of a hyperbola can be expressed in terms of two arcs belonging to ellipses with different eccentricities.

The first systematic presentation on the theory of elliptic functions in Russia was presented by the St. Petersburg academician Osip Ivanovich Somov. This difficult and to this day branch of integral calculus is described in detail and clearly in his fundamental work "Foundations of the theory of elliptic functions"(1850). The book contains seven chapters, and a separate chapter is devoted to applications of elliptic functions to some questions of geometry and mechanics. In the presented article, the solution of the problem of the rotation of a rigid body about a fixed point, presented by Somov, will be presented.

Keywords: *Elliptic function, theorem, Abel, Jacobi, Weierstrass, Somov.*

Введение

В статье рассмотрена история развития и применения теории эллиптических функций. Введение и использование эллиптических и гиперэллиптических функций сводит задачу о вращении твердого тела после первоначального удара к простейшим элементам. Искомые параметры движения (направляющие косинусы углов Эйлера) являются композицией таких функций. Общие понятия и определения эллиптических функций сводятся к операции интегрирования. Все способы интегрирования состоят или в приведении рассматриваемого интеграла к элементарным функциям, или в непосредственном его исследовании, когда это приведение возможно. Поэтому интегральное исчисление распадается на отдельные разделы. Между ними первое место после теории логарифмических и круговых функций занимает теория эллиптических функций.

1. Эллиптические функции. История возникновения.

Это название дают трансцендентным функциям, к которым приводятся интегралы алгебраических выражений вида $f(x, \sqrt{R})dx$, где $\sqrt{R}$ целая функция третьей или четвертой степени относительно x, а f рациональная относительно x и $\sqrt{R}$. Подобные интегралы встречаются уже у Ньютона, основателя этого исчисления, он дает разложение в ряды эллиптических функций, которыми выражаются дуги эллипса и гиперболы (1676 год). После этого эллиптические функции встречаются в задаче об упругой линии[5]. Яков Бернулли в своем решении этой задачи находит, что ордината упругой линии относительно абсциссы выражается интегралом: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, а дуга интегралом $\int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, и полагает, что эти интегралы не могут быть приведены ни к квадратурам, ни к спрямлению (вычисление длины дуги кривой) какого-либо сечения. Того же мнения, сначала был и Эйлер. Иван Бернулли старший нашел, что сумма этих интегралов может быть выражена дугою эллипса, у которого малая ось равна $2a$, а большая $2a\sqrt{2}$. Он также заметил, что $\int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ приводится к спрямлению кривой, называемой лемнискатой.

Джулио Карло Фаньяно (1682-1766 гг., итальянский математик, первый обратил внимание на теорию эллиптических функций) открыл замечательное соотношение между дугами, взятыми на одном эллипсе или на одной гиперболе. Эйлер доказал аналитически и обобщил свойство, открытое Фаньяно: он нашел алгебраическое уравнение между переменными x и y, удовлетворяющее дифференциальному уравнению вида [3]: $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}} = \dfrac{dy}{\sqrt{[f(y)]}}$, где f целая функция четвертой степени; оно совместно с трансцендентным уравнением $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}} = \dfrac{dy}{\sqrt{[f(y)]}} + C$, в котором для постоянного C можно взять значение интеграла $\dfrac{dx}{\sqrt{[f(x)]}}$, соответствующее частному значению переменной x. На основе этих двух уравнений Эйлер вывел способ для сравнения эллиптических функций через сложение, вычитание, умножение и деление, посредством алгебраических действий над переменными, от которых зависят эти функции [5].

Вскоре Джон Ланден (1719–1790 гг., британский математик, его преобразования относятся к эллиптическим интегралам и эллиптическим функциям) нашел, что дуга гиперболы может быть выражена посредством двух дуг, принадлежащих эллипсам с различными эксцентриситетами. В этом важном свойстве заключается соотношение между эллиптическими функциями, отличающимися на константу, и входящими в корень $\sqrt{f}$. То же соотношение нашел Лагранж и применил его к приблизительному вычислению всякой эллиптической функции. В этом состоянии находилась теория эллиптических функций к началу 19 века. Значительные усовершенствования в теорию эллиптических функций внёс Лежандр. Распределив на виды и приведя к простейшим выражениям все эллиптические функции, Лежандр упростил и значительно продвинул вперёд исследования своих предшественников; разобрал много новых интегралов, приводимых к эллиптическим функциям, решил некоторые вопросы геометрии и механики, оставшиеся нерешенными из-за несовершенства способов вычисления эллиптических функций. Лежандр составил таблицы, с помощью которых эллиптические функции могут быть использованы в анализе, таким же образом, как и круговые и логарифмические функции. Первый его опыт систематического изложения теории эллиптических функций находится в мемуаре "Memoire sur les transcendantes elliptiques, des methodes faciles pour comparer et evaluer ces transcendantes" (1792 год) [3]. Лежандр, ориентируясь более на практические цели исследования, упустил из виду некоторые важные теоретические вопросы, связанные с высшими трансцендентными выражениями, тесно связанные с эллиптическими функциями. С выходом в свет первых двух томов «Traite des fonctions elliptiques» в математических журналах Крелле и Шумахера стали появляться гениальные открытия Якоби и Абеля [1]. В номерах 123 и 127 журнала Шумахера Якоби дал общий способ для преобразования эллиптических функций, включающий как частный случай преобразование Лагранжа и другое подобное, найденное Лежандром.

Этот способ послужил источником важных открытий в теории эллиптических функций. Одновременно с открытиями Якоби во втором томе журнала Крелле появилась статья Абеля, в которой автор доказывает основные свойства обратных эллиптических функций и, через введение в анализ мнимых величин, обнаруживает в этих функциях двойную периодичность. («Recherches sur les fonctions elliptiques», 1827). Он приводит общие формулы для умножения и деления эллиптических функций на целое число; рассматривает подробно способы для решения в радикалах алгебраических уравнений, относящихся к делению, и выводит выражения эллиптических функций в виде произведений, состоящих из бесконечного числа множителей, а также в виде быстро сходящихся бесконечных рядов. В следующей работе («Ueber die Functionen welche der Gleichung genugthun») опубликованной в 3-м номере журнала Крелле, Абель предлагает способ решения алгебраических уравнений, относящиеся к делению лемнискаты. После этого Абель доказал общим способом формулы Якоби, относящиеся к преобразованию эллиптических функций. В том же томе журнала Крелле он дал общую теорему, относящуюся к сравнению интегралов вида $\frac{dx}{\sqrt{R}}$, гдеR целая функция x какой-нибудь степени; эта теорема заключает в себе, как частный случай, теорему Эйлера и распространяется на высшие трансцендентные, названные ультра–эллиптическими или Абелевыми функциями; потом Абель распространил ее на все трансцендентные, имеющие алгебраические дифференциалы. Эта его работа была удостоена премией Парижской Академии Наук.

Все аналитические приемы Абеля отличаются общностью и математической точностью. Абель, поставив себе аналитический вопрос, ищет его решение самым логичным, естественным путем, а потому достигает решения самого общего, если таковое возможно; в противном случае доказывает невозможность решения. Таким образом он доказал невозможность общего радикального решения уравнений 5-й степени и рассмотрел случаи, в которых интегралы вида $\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ могут быть приведены к алгебраическим и логарифмическим функциям. Абель умер очень рано, в 26 лет, но оставил науке богатое наследие, в котором разбираемся мы до сих пор. Все творения Абеля изданы вместе, под заглавием «Oeuvres completes de N.H. Abel, mathematicien, avec des notes et developpements». Теория эллиптических функций, обогатившись открытиями Лежандра, Абеля и Якоби, заняла важное место в математическом анализе и теоретической механике в период с 18 по 19 век.

Первое систематическое изложение по вопросам теории эллиптических функций в России представлено у петербургского академика Осипа Ивановича Сомова. Подробно и ясно изложена эта непростая и поныне отрасль интегрального исчисления в его фундаментальном труде «Основания теории эллиптических функций» (1850 год).

Книга содержит семь глав, и отдельная глава посвящена приложениям эллиптических функций к некоторым вопросам геометрии и механики.

К середине восемнадцатого века в теории эллиптических функций был сформирован следующий аппарат.

2. Понятие эллиптической функции. Приведение, сравнение и преобразование таких функций

В том случае, когда интеграл от алгебраической функции не приводится к другой алгебраической функции, его рассматривают как трансцендентную функцию. Это интегралы вида $z = \int f(x, \sqrt{R})$, где R целая функция относительно x, а f — рациональная относительно x и R. Если R имеет первую или вторую степень, то соответствующий интеграл $z = \int f(x, \sqrt{R})$ приводится или к алгебраической функции или к обратной тригонометрической функции (круговые функции). Если же степень третья и выше, то подобные интегралы называют эллиптическими, а обращение таких интегралов, соответственно, эллиптическими функциями [3]. Названия этих функций пошли с задачи вычисления длины дуги эллипса.

Уравнение, определяющее связь между алгебраическими функциями и интегралами вида $\int \dfrac{x^m dx}{\sqrt{R}}$ записывается следующим образом:

$$b_0 \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + b_1 \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + b_2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \ldots + b_m \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-3} x^{m-3})\sqrt{R}.$$

Это уравнение дает возможность замены эллиптического интеграла на простейшие алгебраические разложения в том случае, когда $m > 2$.

Множитель при $\sqrt{R}$ во второй части уравнения должен содержать только положительные степени x (исходное предположение), тогда m должно быть не меньше 3. Отсюда делается важное следствие: интеграл $\int \dfrac{Pdx}{\sqrt{R}}$, при условии, что степень целой функции P ниже 3 не может быть выражен алгебраической функцией. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

не имеют алгебраического представления, и являются трансцендентными относительно функции x.

Аналогичные выводы справедливы и в том случае, когда P — правильная дробь.

$P = \dfrac{A}{(x-\alpha)^m}$, где A и α — постоянные, а m — целое положительное число. Тогда, рассматриваемый интеграл $\int \dfrac{Pdx}{\sqrt{R}}$ разложится на члены вида

$$A\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{R}}$$

Представленный интеграл приводится к простейшим таким же образом, что и $\int \dfrac{x^m dx}{\sqrt{R}}$ с помощью замены: $x-\alpha = \dfrac{1}{z}$. Тогда уравнение, определяющее связь между алгебраическими функциями и интегралами вида $\int \dfrac{(x-\alpha)^m dx}{\sqrt{R}}$ записывается следующим образом:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{R}} = b_0\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + b_1\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}} + \\ + b_2\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{R}} + \left(\frac{a_0}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^3} + \ldots + \frac{a_{m-3}}{(x-\alpha)^{m-3}}\right)\sqrt{R}$$

В том случае, когда $m > 1$ рассмотренный интеграл приводится к трансцендентным вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

Из сказанного выше, заключаем, что $\int \dfrac{Pdx}{\sqrt{R}}$, где P — некая рациональная функция, выражается алгебраическими функциями и трансцендентными вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

Выполняя замены $x = \dfrac{p+qy}{1+y}$, $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$, $\lambda = \dfrac{p-\alpha}{q-\alpha}$, где p, q, a, c — произвольные константы в соответствующих алгебраических разложениях, переходим на интегралы вида:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{dy}{(y^2-\lambda^2)\sqrt{R_1}}.$$

Последний интеграл запишем через тригонометрические функции:

$$\int \frac{f(\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

где f — рациональная функция, k — действительное положительное число> 1 и φ-действительная угловая величина.

Используя, подстановку $y^2 = \dfrac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}$, и последовательно, рассматривая возможные знаки в выражении $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$ получаем:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ — постоянные, причем $k^2 > 1$. Такие интегралы Абель называл *модулярными функциями* [2] для сокращения, вводя обозначения $\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)} = \Delta(k, \varphi)$ или просто $\Delta\varphi$. Дуга φ — амплитуда, постоянная k — модуль, величина $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль.

После введенных обозначений, эллиптический интеграл или модулярная функция запишется:

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

Абель рассмотрел этот интеграл как функцию φ:

$$H(\varphi) = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Теперь рассмотрим некоторые свойства этой функции:

Во-первых эта функция нечетная $H(-\varphi) = -H(\varphi)$; во-вторых функция периодическая $H(\varphi) = H(n\pi \pm \psi) = 2nH(\frac{\pi}{2}) \pm H(\psi), 0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$.

Далее, работая с функцией $H(\varphi)$, а именно, перебирая все возможные значения коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k$ приходим к выводу, что все эллиптические функции приводятся к трем:

$$F(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \text{ функция первого рода,}$$

$$E(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \Delta\varphi \cdot d\varphi - \text{ функция второго рода,}$$

$$\Pi(n, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \text{ функция третьего рода.}$$

где $n = \dfrac{\delta}{\gamma}$ — параметр эллиптической функции $\Pi(n, \varphi)$. Этот параметр может быть мнимым, и тогда выделяется особый класс функций — *гиперэллиптические или ультраэллиптические*.

Иногда заменяют функции $F(\varphi), E(\varphi), \Pi(n,\varphi)$ тремя другими, в которых переменной величиной является $\sin\varphi = x$:

$$T_1(x) = \int\limits_0^x \frac{d\,x}{\Delta x}, \quad T_2(x) = \int\limits_0^x \frac{x^2 d\,x}{\Delta x}, \quad T_3(n,x) = \int\limits_0^x \frac{d\,x}{(1+nx^2)\Delta x},$$

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2(1-k^2x^2))}.$$

Карл Якоби дополнительно ввел обозначения для обратных функций. Если α величина функции $F(\varphi)$, тогда для обозначения обратной функции используем обозначение:

$$\varphi = am(\alpha).$$

Тогда α называется аргументом своей амплитуды φ. Соответствующие тригонометрические зависимости φ от своей амплитуды α:

$$\sin am(\alpha), \quad \cos am(\alpha), \quad \tan am(\alpha) \quad \text{и т. д.}$$

$$\Delta\varphi = \Delta am(\alpha).$$

Общее свойство всех эллиптических функций открыл Фаньяно, что полностью доказано Леонардом Эйлером (“Institutionum calculi integralis. V.I.”). Оно состоит в следующем. Если $\psi(x)$ трансцендентная функция, а $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ алгебраическая, то можно найти такую алгебраическую зависимость между частными значениями $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, при которой сумма

$$m_1\psi(x_1) + m_2\psi(x_2) + \ldots m_n\psi(x_n),$$

где $m_1, m_2, \ldots m_n$ соизмеримые положительные или отрицательные числа, может быть выражена или постоянными, или алгебраической функцией относительно $x_1, x_2, \ldots x_n$, или же логарифмической функцией этих величин [1].

На все трансцендентные функции, имеющие алгебраические дифференциалы, распространил это свойство Абель. Это обобщение является центральной теоремой теории эллиптических функций и носит название *теоремы Абеля.* Формулировка и доказательство этой теоремы иложено Абелем в “Precis d′une theorie des fonctions elliptiques”.

Издали этот труд Абеля уже после его смерти в 1841 году, “Memoires par divers savants a l′ Academie royale des sciences de l′ Institut de France. T. VII, 1841.”

Теорема (Абель). *Задана эллиптическая функция* $T_3(x) = \int \frac{d\,x}{(1-\frac{x^2}{a^2})\Delta x}$, *где* $\Delta x = \sqrt{(1-x^2(1-k^2x^2))}$, $k^2 > 1$ *и* a *— постоянная. Допускается следущее разложение:*

$$\psi(x) = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\dots(x^2 - x_\mu^2),$$

функция $\psi(x)$ *есть композиция двух функций* $\varphi(x)$ *и* $f(x)$*:*

$$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2$$

$f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *— целые функции с неопределенными коэффициентами,* $f(x)$ *— четная,* $\varphi(x)$ *— нечетная.*

Тогда сумма значений функции $T_3(x)$ *для* $x = x_1, x_2, \dots x_\mu$ *выразится логарифмической функцией:*

$$T_3(x_1) + T_3(x_2) + \dots T_3(x_\mu) = const - \frac{a}{2\Delta a} \cdot \log\left[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}\right].$$

Доказывая теорему Абеля, Карл Якоби ввел знаменитые θ функции, с помощью которых гиперэллиптические интегралы могут быть представлены алгебраическими разложениями или быстросходящимися рядами. Последнее представление, с помощью рядов, очень важно в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки. Используя эти разложения Сомов О. И., получил кинематические параметры движения в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара [1].

Петербургский математик и механик, профессор Сомов О. И., к 1851 г. дал первое обобщенное решение задачи вращения тела вокруг неподвижной точки. О. И. Сомов получил решение задачи о вращении твердого тела около точки после первоначального удара, интегрируя дифференциальные уравнения движения с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода с мнимым параметром. Решение Сомова показало, что основные параметры движения выражаются через композицию эллиптических функций простейшего вида и, вводя их, задача о вращении твердого тела отностельно неподвижной точки сводится к простейшим элементам. В 1871 году Карл Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комлексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ-функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Таким образом, рассмотренное решение задачи, представленное Сомовым О. И. в 1850 году, вполне объясняет дальнейшее направление исследований как в кватернионном представлении, так и в решении Ковалевской С. В. Представленное решение очень важно в практических задачах ориентации и управления космических и других объектов механического движения.

3. Представление эллиптических функций через тета функции

Коротко изложим доказательство теоремы Абеля [1].

Возьмем для x одну из величин: $x_1, x_2, \dots x_\mu$, тогда

$$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$$

Это уравнение определяет зависимости x от коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$. Рассматривая эти коэффициенты как переменные запишем дифференциал для этого уравнения:

$$\psi^{'}(x)dx + \delta\psi(x) = 0,$$

где $\psi^{'}(x)$ - производная $\psi(x)$ по x, а $\delta\psi(x)$ - дифференциал той же функции относительно переменных коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$. При этом дифференцировании, x будем считать, соответственно постоянной величиной.

$$\delta\psi(x) = 2[f(x)\delta f(x) - \varphi(x)\delta\varphi(x)](\Delta x)^2$$

Соответствующие функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ выразим из уравнения:

$\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$. Получим: $f(x) = \pm\varphi(x)\Delta x, \varphi(x)(\Delta x)^2 = \pm f(x)\Delta x$.

Следовательно

$$\delta\psi(x) = -2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]\Delta x = -\Theta(x)\Delta x$$

Вводя обозначения:

$$\Theta(x) = 2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]$$

Получим:

$$\psi^{'}(x)dx = \Theta(x)\Delta x \Rightarrow \tfrac{dx}{\Delta x} = \frac{\Theta(x)}{\psi'(x)} \Rightarrow T_3(x) = \int \frac{\Theta(x)}{(1 - \dfrac{x^2}{a^2})\psi'(x)}$$

Подставив в это выражение $x_1, x_2, \dots x_\mu$ вместо x и суммируя результаты (обозначая для сокращения $\sum$), получим:

$$\sum T_3(x) = \int \sum \left[\frac{\Theta(x)}{(1 - \dfrac{x^2}{a^2})\psi'(x)} \right]$$

Подынтегральное выражение представляет собой рациональную симметричную функцию корней уравнения $\psi(x) = [f^2(x)] - [\varphi^2(x)](\Delta x)^2 = 0$, поэтому она может быть выражена рациональной функцией его коэффициентов и следовательно рациональной функцией коэффициентов функций $\varphi(x)$ и $f(x)$.

Таким образом:

$$\sum T_3(x) = \int \frac{\Theta(x)}{(1 - \frac{x^2}{a^2})\psi'(a)} = \int \frac{a\Theta(a)}{2\psi(a)}.$$

Подставляя сюда значения функций $\Theta(x)$ и $\psi(x)$, имеем

$$\sum T_3(x) = \frac{a}{2} \int \frac{\varphi(a)\delta f(a) - f(a)\delta\varphi(a)}{[f^2(a) - \varphi^2(a)](\Delta a)^2}$$

Теперь проинтегрируем, пользуясь заменой $\dfrac{\varphi(a)\Delta a}{f(a)} = z$. Получим

$$\sum T_3(x) = -\frac{a}{2\Delta a} \int \frac{\delta z}{1 - z^2} = Const. - \frac{a}{4\Delta a} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

Таким образом, окончательно

$$\sum T_3(x) = Const. - \frac{a}{4\Delta a} \log\left[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}\right]^2$$

Доказанная теорема дает аналогичные формулы и для эллиптических функций первого и второго рода:

$$T_1(x) = \int \frac{d\,x}{\Delta x}, T_2(x) = \int \frac{x^2 d\,x}{\Delta x.}$$

Функция $T_1(x)$ есть значение функции $T_3(x)$ при $a = \infty$, а $T_2(x)$ значение функции $a^2[T_3(x) - T_1(x)]$ при $a = \infty$.

$$a = \infty \Rightarrow \frac{a}{4\Delta a} = 0, \log(\frac{1+z}{1-z})^2 = \log(1) = 0, \Rightarrow \sum T_1(x) = Const,$$

$$\sum T_2(x) = Const. - \frac{a^3}{4\Delta a} \log[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2 \Bigg|_{a=\infty}.$$

Некоторые из величин $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ берутся произвольно, оставшиеся определяются по ним.

Рассмотрим применение теоремы Абеля к простейшему (но практически очень важному) случаю $\mu = 3$. Тогда

$$f(x) = (a0 + x^2)x, \varphi(x) = b_0,$$

$$\psi(x) = (a_0 x + x^3)^2 - b_0^2(1-x^2)(1-k^2x^2) = (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2).$$

Предполагая x_1 и x_2 заданными, для определения неизвестных коэффициентов a_0, b_0 будем иметь два линейных уравнения:

$$a_0 x_1 + x_1^3 + b_0 \Delta x_1 = 0, a_0 x_2 + x_2^3 + b_0 \Delta x_2 = 0.$$

Из этих уравнений получаем значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{x_2^3 \Delta x_1 - x_1^3 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}, \quad b_0 = \frac{x_1^3 x_2 - x_2^3 x_1}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}.$$

Далее, домножим каждую дробь на $(x_1\Delta x_2 + x_2 \Delta x_1)$ и в уравнении для $\psi(x)$ возьмем $x = 0$.

Тогда x_3 определится следующим образом:

$$x_3 = \pm \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Для определения Δx_3 используем уравнение:

$$f(x_3) + i\Delta x_3 \cdot \varphi(x_3) = 0, \quad i = \pm 1.$$

Отсюда получим

$$\Delta x_3 = \frac{\pm f(x_3)}{\varphi(x_3)}$$

Далее, обозначая $y = \pm x_3$, т.е $y = \dfrac{b_0}{x_1 x_2}$ получим: $y = \dfrac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2}$

Окончательно, получаем следующие соотношения для эллиптических функций первого, второго и третьего рода:

$$\begin{cases} T_1(x_1) + T_1(x_2) - T_1(y) = Const, \\ \\ T_2(x_1) + T_2(x_2) - T_2(y) = Const - \dfrac{a^3}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2_{a=\infty}, \\ \\ T_3(x_1) + T_3(x_2) - T_3(x) = Const. - \dfrac{a}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2. \end{cases}$$

Ранее мы говорили о том,что иногда заменяют функции $F(\varphi), E(\varphi), \Pi(n,\varphi)$ тремя другими, в которых переменной величиной является $\sin\varphi = x$. Тогда, полагая

$$x_1 = \sin\varphi, \quad x_2 = \sin\psi, \quad y = \sin\mu$$

получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} (F(\varphi) + F(\psi) - F(\mu) = Const \\ \\ E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = Const + k^2 \dfrac{a^3}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2_{a=\infty} \\ \\ \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \varphi) + \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \psi) - \Pi(-\dfrac{1}{a^2}, \mu) = Const. - \dfrac{a}{4\Delta a} \log[\dfrac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}]^2) \end{cases}$$

Далее, работая с логарифмами, Карл Якоби получает две тета-функции и раскладывает их в быстросходящиеся ряды.

Блестящее продолжение теория эллиптических функций нашла в работах Карла Вейерштрасса [3]. Работая под руководством знаменитого профессора Гудермана, молодой ученый увлекся исследованиями Абеля и Якоби в области эллиптических функций. Вейрштрассу удалось не только вникнуть, но и решить проблемы, которые были Абелем и Якоби только обозначены. Так, он нашел представление модулярной функции в виде частного двух рядов, обобщил это представление на другие известные эллиптические функции. Это ему удалось сделать летом 1840 года, а осенью того же года защитить свою работу "Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen". Часть этой работы вошла в его мемуары об абелевых функциях, напечатанных в 52 журнале Крелле (I том его Mathematische Werke). Все частные виды θ-функции Вейерштрасс заменил одной $\wp$-функцией [5]. В 1871 году Вейерштрасс упрощает систему эллиптических функций Якоби, вводя вместо трех тета-функций одну, имеющую своим аргументом комплексное время.

4. Заключение

Исследования Вейерштрасса в области теории эллиптических функций обратили на него внимание ученых Германии, и в 1856 году он был приглашени в Берлинский университет экстраординарным профессором на кафедру чистой математики, а в 1857 году был избран в члены Берлинской Академии наук. В дальнейшем, Вейерштрасс, обобщая и уточняя выводы Абеля и Якоби, показал, что условия интегрируемости эллиптического интеграла в логарифмических функциях могут быть выведены, если такие интегралы разбить на три класса: первого, второго и третьего рода. Свести их, как показано выше в представленной работе, к эллиптическим интегралам третьего рода, которые на основании теоремы Абеля приводятся к алгебраическим соотношениям. Основные исследования, относящиеся к гиперэллиптическим интегралам Вейерштрасс сообщал или на своих лекциях, или в письмах к ученым.

Список литературы

1. Сомов О. И. Основания теории эллиптических функций. СПб: АН, 1850 г. — 250 с.

   SOMOV, O. I. (1850) *Foundations of the theory of elliptic functions.* St. Petersburg: Academy of Sciences.

2. Пшеборский А. П. О методах Абеля, Якоби, Лиувилля и Вейерштрасса в теории эллиптических функций. — Киев, 1895 г. — 198 с.

   PSHEBORSKY, A. P. (1895) *On the methods of Abel, Jacobi, Liouville and Weierstrass in the theory of elliptic functions.* Kiev.

3. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. — М.:ГИТТЛ; 1951. — 128 с.

   MARKUSHEVICH, A. I. (1951) *Essays on the history of the theory of analytic functions.* Moscow, GITT.

4. М. А. Тихомандрицкий. Обращение гиперэллиптических интегралов. Харьков. Университетская типография. — 254 с. 1885 год.

   TIKHOMANDRITSKIY, M. A. (1885) *Inversion of hyperelliptic integrals.* Kharkiv, University printing house.

5. Теория аналитических и эллиптических функций. Гурвиц; ред. Н. Е. Кочина. — М: Изд.-во ЛКИ. — 1933 г. — 187 с.

   Hurwitz; ed. by N. E. Kochina (1993) *Theory of analytic and elliptic function.* Moscow, Publishing house of LKI.

Dekhkonov F. N. Differential equation associated with involutions / F. N. Dekhkonov // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 7 – 13.

УДК: 517.95

В этой статье мы рассматриваем класс систем дифференциальных уравнений, преобразования аргумента которых являются инволюциями. При этом начальная задача для дифференциального уравнения с инволюцией сводится к начальной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения более высокого порядка. Тогда для решения необходимы либо два начальных условия; уравнение затем сводится к краевой задаче для ОДУ более высокого порядка.

Ключевые слова: *инволюция, линейное дифференциальное уравнение, неподвижная точка, краевая задача.*

Tashpulatov S. M., Parmanova R. T. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model. Quintet state. One-dimensional case / S. M. Tashpulatov, R. T. Parmanova // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 14 – 34.

УДК: 517.984

Рассматривается четырех электронная система в примесном модели Хаббарда и исследуется структура существенного спектра и дискретного спектра системы в квинтетном состоянии системы. Показано, что существует такие ситуации: а). существенный спектр оператора четырех электронного квинтета состоит из объединений четырех отрезков, а дискретный спектр оператора четырех электронного квинтета состоит из единственного собственного значения; б). существенный спектр оператора четырех электронного квинтета состоит из объединений десяти отрезков, а дискретный спектр оператора четырех электронного квинтета состоит из пяти собственных значений; в). существенный спектр оператора четырех электронного квинтета состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора четырех электронного квинтета пуст; Найдены условии, когда имеет место каждые стуации.

Ключевые слова: *Примесной модели Хаббарда, четырех-электронная система, существенный спектр, дискретный спектр, квинтетное состояние, триплетное состояниеб синглетное состояние.*

Богатов Е. М., Коренев А. В., Михайлов И. С. О современных инструментах и методах ведения научных исследований по истории математики / Е. М. Богатов, А. В. Коренев, И. С. Михайлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 35 – 57.

УДК: 378:51(09)

Предложен один из вариантов систематизации деятельности историка математики, а также схема организации исследовательской и поисковой работы при подготовке научных статей и докладов по истории науки в XXI веке. В работе приводятся рекомендации по подготовке содержательной части историко-математического исследования, которые могут быть также взяты на вооружение специалистами по истории естественных наук.

Ключевые слова: *схема организации исследований по истории математики, методика подготовки статей и докладов по истории математики, современный инструментарий историко-математических исследований; источниковая база историка математики.*

Косолапов Е. С., Починка О. В. О связи периодических гомеоморфизмов поверхности с многообразиями Зейферта и диффеоморфизмами Морса-Смейла / Е. С. Косолапов, О. В. Починка // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 58 – 71.

УДК: 517.9

В настоящей работе изучаются периодические гомеоморфизмы φ, действующий на поверхности рода p. Гомеоморфизм называется *периодическим*, если существует *n in mathbbN* такой, что *varphi*^{n} *equiv mathrmid.*

Мы установили связь таких гомеоморфизмов с трехмерной топологией. Более точно, мы сформулировали и доказали условие того, что данное трехмерное многообразие Зейферта реализуется как надстройка некоторого периодического гомеоморфизма *varphi*. Более того, этот периодический гомеоморфизм почти полностью определяется топологией надстройки. Эта связь позволила нам доказать, например, что не существует периодических гомеоморфизмов, гомотопных тождественному отображению, без точек меньшего периода на поверхностях положительного рода.

Используя связь между диффеоморфизмами Морса-Смейла и периодическими гомеоморфизмами, удалось классифицировать соотвествующие периодические гомеоморфизмы произвольного диффеоморфизма Морса-Смейла с одной источниковой, одним стоковой и одной седловой орбитой с отрицательным типом ориентации, что может быть использовано при решении проблемы реализация произвольного диффеоморфизма Морса-Смейла на двумерном многообразии

Ключевые слова: *Периодический гомеоморфизм, Зейфертовы многообразия, диффеоморфизм Морса-Смейла.*

Рудницкий О. И. О базисных инвариантах группы симметрий многогранника / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 72 – 78.

УДК: 514.7

В n-мерном унитарном пространстве изучается алгебра инвариантов группы симметрий комплесного многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$. Дано положительное решение «проблемы вершин» для указанного многогранника, если p и n взаимно простые.

Ключевые слова: *унитарное пространство, отражение, базисный инвариант, алгебра инвариантов, комплексный многогранник.*

Юлина А. О. История развития теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова. / А. О. Юлина // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 3 (52). — С. 79 – 92.

УДК: 531.091

В статье изложена история развития теории эллиптических функций. Предложены четкие выводы по становлению аппарата теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова. На основе доказательства теоремы Абеля показано представление эллиптических функций через тета функции.

Ключевые слова: *Эллиптическая функция, теорема, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Сомов.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Богатов Егор Михайлович	к. ф.-м. н, доцент кафедры горного дела ГФ НИТУ «МИСиС», г. Губкин; к. ф.-м. н, доцент кафедры высшей математики и информатики СТИ НИТУ «МИСиС», г. Старый Оскол, РФ *e-mail: embogatov@inbox.ru*
Коренев Артем Викторович	студент СТИ НИТУ «МИСиС», г. Старый Оскол, РФ *e-mail: korenev01@mail.ru*
Михайлов Илья Сергеевич	студент СТИ НИТУ «МИСиС», г. Старый Оскол, РФ *e-mail: mikhaylov.is@yandex.ru*
Парманова Рухсат Тогаймурадовна	стажер исследовательница лаборатории «Физика многочастичных систем» института ядерной физики АН РУз., г. Ташкент, Республика Узбекистан *e-mail: togaymurodota@gmail.com*
Починка Ольга Витальевна	Заведующая лаборатории динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305 *e-mail: olga-pochinka@yandex.ru*
Косолапов Егор Сергеевич	Студент 3-го курса бакалавриата. Образовательная программа: “Механика и математическое моделирование”, СПбПУ Петра Великого (194021, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.) *e-mail: egor-kosolapov@bk.ru*
Рудницкий Олег Иванович	к. ф.-м. н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии Физико-технического института ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь, РФ *e-mail: oirud58@gmail.com*

Ташпулатов Садулла Мамаражабович — д. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник лаборатории «Физика многочастичных систем» института ядерной физики АН РУз., г. Ташкент, Республика Узбекистан
e-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

Юлина Анна Олеговна — старший преподаватель 114 кафедры ВКА имени А. Ф. Можайского
e-mail: parfenova19761976@mail.ru

Подписано к печати 02.04.2022. Формат 38х30/2. Бумага тип ОП. Объем 10 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7