Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 2 (51) ' 2021

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2021, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Протокол № 4 от 04 июня 2021 г.

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

UDC: 517.9

MSC2010: 35K10, 35B10, 35R10, 35K99

DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-7-11

ON PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR PARABOLIC PROBLEMS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

© O. V. Solonukha

Federal Research Center "Informatics and Control", Russian Academy of Science,
Vavilov str. 40, 119333, Moscow, Russia;
RUDN University, Miklukho-Maklaya str. 6, 117198, Moscow, Russia
e-mail: *solonukha@yandex.ru*

On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions.

Solonukha O. V.

Abstract. A linear parabolic equation with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze-Samarsky type is considered. The existence and uniqueness theorem of the periodic solution is proved.

Keywords: *nonlocal problem, parabolic equation, monotone operator.*

Nonlocal elliptic boundary value problems have been considered since the 30s of the XXth century in the work of T. Carleman. In the 50–60s of the XXth century, the abstract nonlocal elliptic problems were studied by M. I. Vishik, F. Browder, etc. Nonlocal parabolic problems in a bounded cylinder were considered mainly in the cases of parabolic delay differential equations, parabolic integro–differential equations, and parabolic operator– differential equations. In this paper, we consider a parabolic equation with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze-Samarsky type, cf. [1]. The peculiarity of these nonlocal conditions is that they are set using shifts in spatial variables in a bounded domain. A method for studying elliptic boundary value problems with such nonlocal conditions was developed in the 80-90s, see [2–4]. In this paper, the time–periodic solutions of a linear parabolic equation with nonlocal boundary conditions are investigated. The proofs are given for a model example. However the method is suitable for the general case of nonlocal boundary conditions of this type.

In the rectangular parallelepiped $\Omega_T = (0,T)\times(0,2)\times(0,1)$ we consider the parabolic equation

$$\partial_t w(t,x) - \sum_{i,j=1,2} \partial_i \left(A_{ij}(t,x)\partial_j w(t,x)\right) = f(t,x) \qquad ((t,x)\in\Omega_T), \tag{1}$$

with nonlocal boundary conditions

$$\begin{cases} w(t,x_1,0) = w(t,x_1,1) = 0 & (0<t<T; 0\le x_1\le 2),\\ w(t,x)|_{x_1=0} = \gamma_1 w(t,x)|_{x_1=1}, & (0<t<T; 0<x_2<1),\\ w(t,x)|_{x_1=2} = \gamma_2 w(t,x)|_{x_1=1} & (0<t<T; 0<x_2<1). \end{cases} \tag{2}$$

Here $f\in L_2(\Omega_T)$, the functions $A_{ij}\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ are 1–periodic in x_1 and T–periodic in t. Moreover, $A_{ij}(t,x)=A_{ji}(t,x)$ $(i,j=1,2)$, and there exists $c_1>0$ such that

$$\sum_{i,j=1,2} A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge c_1 \sum_{i=1,2}|\xi_i|^2 \qquad \forall (t,x)\in\overline{\Omega_T}. \tag{3}$$

Time–periodic solution of (1)–(2) must satisfy the condition

$$w(0,x) = w(T,x) \qquad (x=(x_1,x_2)\in Q=(0,2)\times(0,1)). \tag{4}$$

We consider our problem in Sobolev space $L_2(0,T;W_2^1(Q))$, this is the set of functions $u\in L_2(\Omega_T)$ such that $\partial_i u\in L_2(\Omega_T)$. Let

$$L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q)) := \{w\in L_2(0,T;W_2^1(Q)) : w\,\text{satisfies (2)}\}. \tag{5}$$

In this paper we consider the spaces of real–valued functions. We define the operator $A: L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))\to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ by the formula

$$\langle Aw,v\rangle = \sum_{1\le i,j\le n}\int\limits_{\Omega_T} A_{ij}(t,x)\partial_j w(t,x)\,\partial_i v(t,x)\,dx\,dt \qquad \forall v\in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)).$$

We introduce the unbounded operator $\partial_t : L_2(\Omega_T)\supset \mathscr{D}(\partial_t)\to L_2(\Omega_T)$ with the domain

$$\mathscr{D}(\partial_t) := \{w\in L_2(0,T;W_2^1(Q)) : \partial_t w\in L_2(\Omega_T),\ w(0,x)=w(T,x)\}. \tag{6}$$

Definition 1. The function $w\in W_\gamma$ is called the generalized solution of problem (1), (2), (4) if it satisfies the operator equation

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w\in W_\gamma, \tag{7}$$

where $W_\gamma := \mathscr{D}(\partial_t)\cap L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$.

Note that nonlocal conditions bind the values of the unknown function on some parts of boundary with its values on shifts of these parts into domain Ω_T. The above shifts are generated by a certain difference operator. Properties of such difference operators in the spaces $L_2(Q)$ and $W_2^1(Q)$ were studied earlier, see [3, 4]. In this paper we use the above results to formulate the properties of difference operators acting in different function spaces $R_Q: L_2(\Omega_T)\to L_2(\Omega_T)$ and $R_Q: L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))\to L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$.

We consider the difference operator

$$Ru(t,x) = u(t,x) + a_1 u(t, x_1+1, x_2) + a_{-1} u(t, x_1-1, x_2).$$

This operator corresponds to boundary conditions (2). We define the operator R_Q given by $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$. Here $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ is the operator of extension of functions from $L_2(\Omega_T)$ by zero in $(0,T)\times(\mathbb{R}^n \setminus Q)$, the operator $P_Q : L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n) \to L_2(\Omega_T)$ is the operator of restriction of functions from $L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ to Ω_T. Then for any $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ and $w = R_Q u$ we have

$$w|_{x_1=0} = R_Q u|_{x_1=0} = a_1 u|_{x_1=1}, \qquad w|_{x_1=2} = R_Q u|_{x_1=2} = a_{-1} u|_{x_1=1},$$
$$w|_{x_1=1} = R_Q u|_{x_1=1} = u|_{x_1=1}.$$

Thus, if $a_1 = \gamma_1$, $a_{-1} = \gamma_2$, and $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$, then the function $w = R_Q u \in L_2(0,T;W_2^1(Q))$ satisfies the nonlocal boundary conditions (2), i.e. $R_Q(L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))) \subset L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$, where $\gamma = \{\gamma_1,\gamma_2\}$. Conversely, if $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$, it can be proved that $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q)) \subset R_Q(L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)))$, see [3, 4]. Therefore, R_Q maps continuously and bijectively $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ onto $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$. Hence there exists a bounded inverse operator $R_Q^{-1} : L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q)) \to L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$. Consequently, instead of equation (7), we can consider the equation

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \qquad u \in W, \tag{8}$$

where $W := \mathscr{D}(\partial_t) \cap L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$.

Definition 2. A linear operator $\Lambda : L_2(\Omega_T) \supset \mathscr{D}(\Lambda) \to L_2(\Omega_T)$ is **monotone** if

$$\langle \Lambda u, u\rangle := \int\limits_{\Omega_T} \Lambda u \cdot u\, dx\, dt \geq 0 \qquad \forall u \in \mathscr{D}(\Lambda).$$

A linear densely defined monotone operator Λ is **maximally monotone** if there is no linear monotone operator that is a strict extension of Λ.

As is known, in reflexive strictly convex with its conjugate spaces, the maximum monotonicity of the operator is equivalent to the condition:

$$\langle \Lambda u, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathscr{D}(\Lambda), \qquad \langle \Lambda^* u, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathscr{D}(\Lambda^*), \tag{9}$$

see Lemme 1.1 [5, Chapter 3]. It is also known that ∂_t with domain (6) is maximally monotone and $\partial_t^* = -\partial_t$, see [5, Chapter 3, sec.2.2].

Lemma 1. *Let $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$. Then $\partial_t R_Q : L_2(\Omega_T) \supset W \to L_2(\Omega_T)$ is maximally monotone.*

Proof. Let $R_Q^c = \dfrac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)$ and $R_Q^{cs} = \dfrac{1}{2}(R_Q - R_Q^*)$. Note that

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \big(u(t), R_Q^* u(t)\big)_{L_2(Q)} = \big(R_Q^* u(t), u(t)\big)_{L_2(Q)} = \big(R_Q^c u(t), u(t)\big)_{L_2(Q)}.$$

Moreover,

$$\begin{aligned}\partial_t \left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} &= (\partial_t R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (R_Q u(t), \partial_t u(t))_{L_2(Q)} \\ &= (R_Q \partial_t u(t), u(t))_{L_2(Q)} + \big(u(t), R_Q^* \partial_t u(t)\big)_{L_2(Q)} = 2\left(\partial_t R_Q^c u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)}.\end{aligned}$$

Since $\langle \partial_t R_Q^{cs} u, u\rangle = 0$, we obtain

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \langle \partial_t R_Q^c u, u\rangle = \int\limits_0^T \left(\partial_t R_Q^c u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau = \frac{1}{2}\left(R_Q^c u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} \Big|_{t=0}^{T} = 0$$

due to $u(T,x) = u(0,x)$. On the other hand,

$$\langle (\partial_t R_Q)^* u, u\rangle = \langle R_Q^* \partial_t^* u, u\rangle = \langle \partial_t^* R_Q^* u, u\rangle = -\langle \partial_t R_Q^* u, u\rangle = -\langle \partial_t R_Q^c u, u\rangle = 0.$$

The condition (9) is fulfilled. □

Lemma 2. *Let $R_Q^c > 0$, functions $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $A_{ij}(t,x) = A_{ji}(t,x)\,(i,j = 1,2)$ are 1–periodic in x_1 and T–periodic in t, and inequality* (3) *holds. Then*

$$\langle AR_Q u, u\rangle \geq c_2 \|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}, \tag{10}$$

where $c_2 > 0$ does not depend on u.

For the operator $(AR_Q)(t,\cdot)$, similar estimate is proved in [3, 4].

Note that operator $AR_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2((0,T;W_2^{-1}(Q))$ satisfying (10) is **monotone** and **coercive** in terms of [5].

Theorem 1. *Let $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$, functions $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $A_{ij}(t,x) = A_{ji}(t,x)\,(i,j = 1,2)$ are 1–periodic in x_1 and T–periodic in t, and inequality* (3) *holds. Then for any $f \in L_2(\Omega_T)$ there exists a unique generalized solution of problem* (1), (2), (4).

Proof. As stated above, the generalized solution of (1), (2), (4) is the function $w = R_Q u$, where u is the solution of equation (8). Note that if $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$, then $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$ and $R_Q^c > 0$, see Examples in [3, 4]. According to Lemma 1, the operator $\partial_t R_Q$ is maximally monotone, and according to Lemma 2, the operator AR_Q is monotone and coercive. The conditions of Theorem 1.1 [5, Chapter III, §1] hold. Thus, the solution of equation (8) exists. The uniqueness of this solution follows from (10). □

This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation: agreement no. 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

References

1. BITSADZE A. V. AND SAMARSKII A. A. (1969) On some simple generalized linear elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **185**:4. p. 739–740.
2. SKUBACHEVSKII A. L. (1986) The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. *J. of Differential Equations.* **63**. p. 332–361.
3. SKUBACHEVSKII A. L. (1997) *Elliptic Functional Differential Equations and Applications.* Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin.
4. SKUBACHEVSKII A. L. (2016) Boundary–Value Problems for Elliptic Functional–Differential Equationa and its Applications. *Russ.Math.Surv.* **71**:5. p. 801–906.
5. LIONS J.–L. (1969) *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris.

УДК: 517.98, 517.15

MSC2010: 47A10, 26A12 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-12-23**

О СВЯЗИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КОМПАКТНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© В. И. Войтицкий

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Таврическая академия

факультет математики и информатики

просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация

e-mail: victor.voytitsky@gmail.com

On connection of asymptotic formulas for the counting function and for the characteristic numbers of a compact positive operator.

Voytitsky V. I.

Abstract.

Let operator G be compact positive operator acting in separable Hilbert space. According with theorem of Hilbert-Schmidt its characteristic numbers μ_n are positive finite multiple with unique limit point at infinity. In spectral problems of mathematical physics such numbers, as a rule, have power (Weyl's) asymptotic. Sometimes it is more convenient to use asymptotic of counting function $N(r)$ that is equal to number (taking into account the multiplicity) of characteristic numbers μ_n in the interval $(0; r)$. For single eigenvalues recalculation of asymptotic formulas is a simple exercise. We prove several theorems on connection between asymptotic of μ_n and $N(r)$ for an arbitrary compact positive operator G.

Theorem 1. If $\mu_n = an^{\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$, where $\alpha > 0$, then

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty.$$

Theorem 2. If $N(r) = ar^{\alpha}(1 + o(1)),\ r \to +\infty,\ \alpha > 0$, then

$$\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty.$$

Theorem 3. If $\mu_n = an^{\alpha} + O(n^{\beta}),\ n \to \infty$, where $\alpha > \beta \geq \alpha - 1, \quad \alpha > 0$, then

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad r \to +\infty.$$

Theorem 4. If $N(r) = ar^{\alpha} + O(r^{\beta}),\ r \to +\infty$, where $\alpha > \beta \geq 0$, then

$$\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad n \to \infty.$$

As an application we study asymptotic of a diagonal operator-matrix $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ if it is known the power asymptotic of operators A and B.

Keywords: *compact operator, infinitely large sequence, subsequence, power asymptotic, Landau symbols.*

1. Введение

Как известно ненулевой спектр компактного самосопряжённого оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, состоит из действительных собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой в нуле (см., например, [1], п. 9.2). Если дополнительно оператор имеет нулевое ядро, то система соответствующих собственных функций образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве. Эти важные результаты являются основой спектральной теории линейных операторов и известны как теорема Гильберта-Шмидта.

Если компактный самосопряжённый оператор G в бесконечномерном гильбертовом пространстве имеет обратный $A = G^{-1}$, то последний является неограниченным, при этом его спектр состоит из изолированных конечнократных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. В этом случае говорят, что оператор A имеет дискретный спектр. Резольвента оператора с дискретным спектром $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ в каждой регулярной точке λ является компактным оператором.

Многие задачи математической физики приводят к самосопряжённым операторам с дискретным спектром, при этом для приложений кроме свойства базисности важным является конкретный вид асимптотики собственных значений. Как правило краевые задачи имеют степенную (или Вейлевскую) асимптотику собственных значений с известной оценкой остаточного члена в виде символов Ландау (О-большое, о-малое). Например, собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, допускающей разделение переменных (см. [2], с. 33), имеют асимптотику

$$N(r) = ar^{m/2} + br^{(m-1)/2} + o(r^{(m-1)/2}), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

где через $N(r)$ обозначено число собственных значений (с учетом кратности), лежащих в интервале $(0; r)$. При этом константа $a > 0$ зависит лишь от меры области Ω, а константа b зависит лишь от меры границы области $\partial\Omega$ ($b < 0$ для задачи Дирихле и $b > 0$ для задачи Неймана). В случае произвольной ограниченной области Ω (см. [2], с. 19) можно утверждать лишь, что

$$N(r) = ar^{m/2}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty. \tag{2}$$

Напомним, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

В работах Н. Д. Копачевского (см. [3], с. 79), А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [4], с. 146) без предъявления доказательства утверждается, что асимптотика считающей функции (2) равносильна асимптотике для собственных значений

$$\lambda_n = a^{-2/m} n^{2/m}(1 + o(1)), \quad n \to +\infty. \tag{3}$$

По мнению автора статьи этот вывод действительно прост в случае однократных собственных значений, при этом если собственные значения кратные, то доказательство перестаёт быть тривиальным.

В работе приводится ряд теорем о переводе асимптотических формул для считающей функции в асимптотические формулы для характеристических чисел компактного самосопряжённого оператора и наоборот. В частности, доказывается равносильность формул вида (2) и (3), а также формулы пересчета для асимптотик вида $N(r) = ar^{\alpha} + O(r^{\beta})$ или $\lambda_n = an^{\alpha} + O(n^{\beta})$ для $\beta < \alpha$.

2. Формулы, содержащие только главный член асимптотики

Пусть $G = G^* > 0$ данный абстрактный компактный положительный оператор, действующий в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots \tag{4}$$

— счетный набор его положительных характеристических чисел, расположенных по неубыванию с учетом кратности. Эти числа являются собственными значениями обратного оператора $A = G^{-1}$, т.е. для каждого μ_k существует ненулевая функция $u_k \in H$ такая, что $Au_k = \mu_k u_k$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта функции u_k можно выбрать ортонормированными, при этом

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = +\infty,$$

и в цепочке неравенств (4) равенства возможны лишь в конечных группах. Количество собственных значений в каждой группе равно кратности собственного значения (алгебраическая кратность для самосопряженного оператора равна геометрической). При этом кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, являющегося линейной оболочкой всех собственных функций, отвечающих данному собственному значению.

Перейдем от набора (4) к подпоследовательности собственных значений без учета кратности. Для этого в каждой группе равных собственных значений нужно выбрать по одному представителю. Для удобства выберем подпоследовательность μ_{n_k} последовательности (4) так, чтобы n_k являлись минимальными индексами. Тогда номер k

отвечает за номер собственного значения без учета кратности. Обозначим через ν_k — последовательность кратностей. Например, для последовательности собственных значений

$$1 \le 2 \le 2 \le 3 \le 3 \le 3 \le 4 \le 4 \le 4 \le 4 \le 5 \ldots$$

имеем $\nu_k = k$, $\mu_{n_k} = k$, поэтому $n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 4,\ n_4 = 7,\ n_5 = 11, \ldots$. Отметим, что для краевых задач в размерностях 2 и выше последовательность ν_k может быть неограниченной (см., например, [5]).

Введем считающую функцию $N(r)$ как число собственных значений μ_n, лежащих в интервале $(0; r)$. Тогда, согласно определению

$$N(\mu_{n_k}) = n_k - 1, \tag{5}$$

причем $N(\mu_n) = n - 1$ верно лишь для тех натуральных n, которые являются членами подпоследовательности n_k. Действительно, в примере выше $N(1) = N(\mu_1) = 0,\ N(2) = N(\mu_2) = N(\mu_3) = 1,\ N(3) = N(\mu_4) = N(\mu_5) = N(\mu_6) = 3,$ $N(4) = N(\mu_7) = 6, \ldots$.

Теорема 1 (прямая)**.** *Пусть* $\mu_n = an^\alpha(1 + o(1)),\ n \to \infty$*, где* $\alpha > 0$*, тогда*

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to +\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Переходя к подпоследовательности n_k, получаем асимптотику $\mu_{n_k} = an_k^\alpha(1 + o(1)),\ k \to \infty$. Следовательно

$$n_k \sim a^{-1/\alpha}\mu_{n_k}^{1/\alpha},\ k \to \infty.$$

Отсюда с учетом формулы (5) получаем, что $N(\mu_{n_k}) + 1 \sim a^{-1/\alpha}\mu_{n_k}^{1/\alpha},\ k \to \infty$.

Так как функция $N(r)$ является кусочно-постоянной и имеет скачки лишь в точках μ_{n_k}, то

$$N(r) + 1 \sim a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha},\ r \to \infty.$$

Отсюда с учётом $\alpha > 0$ получаем формулу (6). □

Теорема 2 (обратная)**.** *Пусть*

$$N(r) = ar^\alpha(1 + o(1)), \quad r \to +\infty, \quad \alpha > 0, \tag{7}$$

тогда $\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$.

Доказательство. Подставим в формулу (7) $r = \mu_{n_k}$, тогда с учётом (5) получаем

$$n_k - 1 = N(\mu_{n_k}) = a\mu_{n_k}^\alpha(1 + o(1)), \quad k \to \infty. \tag{8}$$

Отсюда

$$\mu_{n_k}^\alpha \sim a^{-1} n_k, \quad k \to \infty, \tag{9}$$

т.е. мы доказали нужную асимптотическую формулу для подпоследовательности μ_{n_k}. В случае однократных собственных значений теорема является доказанной.

В общем случае, чтоб доказать теорему для последовательности μ_n, выберем некоторую бесконечно малую последовательность из положительных чисел ε_k так, чтобы $\mu_{n_k+1} < \mu_{n_k} + \varepsilon_k$ (это можно сделать в силу дискретности спектра). Тогда по определению считающей функции $N(r)$ с учетом формул (5) и (8) получаем, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = \nu_k + n_k - 1 = \nu_k + a\mu_{n_k}^{\alpha}(1 + o(1)), \quad k \to \infty,$$

где ν_k — кратность собственного значения μ_{n_k}. С другой стороны из формулы (7) следует, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^{\alpha}(1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Таким образом $\nu_k + a\mu_{n_k}^{\alpha}(1 + o(1)) = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^{\alpha}(1 + o(1)),\ k \to \infty$, и мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{\mu_{n_k}^{\alpha}} + a = a \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\mu_{n_k} + \varepsilon_k}{\mu_{n_k}}\right)^{\alpha}.$$

Предел в правой части равен единице, т.к. $\varepsilon_k/\mu_{n_k} \to 0,\ k \to \infty$. Следовательно

$$\nu_k = o(\mu_{n_k}^{\alpha}) = o(n_k), \quad k \to \infty. \tag{10}$$

Далее, заметим, что любое натуральное число n представимо в виде $n = n_k + p(k)$, где $p(k)$ — поправочная функция, значения которой являются целыми числами из отрезка $[0; \nu_k - 1]$, при этом $\mu_n = \mu_{n_k}$. Отсюда

$$n_k \le n \le n_k + \nu_k - 1;$$

$$\frac{a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha}}{\mu_{n_k}} \le \frac{a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}}{\mu_n} \le \frac{a^{-1/\alpha}(n_k + \nu_k - 1)^{1/\alpha}}{\mu_{n_k}}.$$

С учетом свойств (9) и (10) левая и правая части двойного неравенства сходятся к единице при $k \to \infty$. Значит при $n \to \infty$ центральная часть неравенства тоже сходится к единице. Теорема доказана. □

Замечание 1. Иногда считающую функцию $N(r)$ вводят как число собственных значений на отрезке $[0; r]$. При этом результаты теорем 1 и 2 останутся верными. В этом случае удобно рассмотреть подпоследовательность μ_{n_k}, состоящую из различных собственных значений с максимальными индексами n_k. Тогда формула (5) будет иметь вид $N(\mu_{n_k}) = n_k$, доказательство теоремы 1 полностью сохраняется, а в теореме 2 нужно использовать соотношение $N(\mu_{n_k} - \varepsilon_k) = n_k - \nu_k$. При этом, если $\mu_n = \mu_{n_k}$, то $n = n_k - p(k)$, где $p(k) \in [0; \nu_k - 1]$.

3. Формулы с уточненным остаточным членом

Пусть теперь в рамках теоремы 1 собственные значения μ_n имеют степенную асимптотику с оценкой остаточного члена в терминах символа Ландау O-большое. Будем говорить, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to +\infty$, если на некотором луче $(x_0; +\infty)$ существует константа $C > 0$ такая, что для всех $x > x_0$ выполнено $|f(x)| \le C|g(x)|$. Тогда можно уточнить оценку остаточного члена считающей функции.

Теорема 3 (прямая). *Пусть* $\mu_n = an^\alpha + O(n^\beta),\ n \to \infty$, *где*

$$\alpha > \beta \ge \alpha - 1, \quad \alpha > 0, \tag{11}$$

тогда

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad r \to +\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку из условий теоремы следует справедливость теоремы 1, то

$$N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + \xi(r),$$

где $\xi(r) = o(r^{1/\alpha})$. Наша цель — доказать, что $\xi(r) = O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$.

Перейдя к подпоследовательности μ_{n_k} различных собственных значений с минимальными индексами n_k, с учетом формулы $N(\mu_{n_k}) = n_k - 1$ получаем, что

$$\mu_{n_k} - an_k^\alpha = \mu_{n_k} - a(N(\mu_{n_k}) + 1)^\alpha = O(n_k^\beta), \quad k \to \infty.$$

Так как $\alpha > \beta$, то $\mu_{n_k} \sim an_k^\alpha$, а значит $n_k \sim a^{-1/\alpha}\mu_{n_k}^{1/\alpha}$ и мы получаем

$$\mu_{n_k} - a(N(\mu_{n_k}) + 1)^\alpha = O(\mu_{n_k}^{\beta/\alpha}), \quad k \to \infty.$$

Последнее равносильно соотношению

$$r - a(N(r) + 1)^\alpha = r - O(r^{\beta/\alpha}), \quad r \to \infty.$$

Преобразуем выражение в левой части равенства

$$r - a(N(r) + 1)^\alpha = r - a(a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + \xi(r) + 1)^\alpha = r - (r^{1/\alpha} + a^{1/\alpha}(\xi(r) + 1))^\alpha =$$

$$= r - r(1 + a^{1/\alpha} r^{-1/\alpha}(\xi(r) + 1))^\alpha = r - r(1 + \varphi(r))^\alpha.$$

Здесь функция $\varphi(r) := a^{1/\alpha} r^{-1/\alpha}(\xi(r) + 1) = o(1),\ r \to \infty$, так как $\xi(r) = o(r^{1/\alpha})$. Отсюда

$$r - r(1 + \varphi(r))^\alpha = r - r[1 + \alpha\varphi(r) + o(\varphi(r))] = -r\alpha\varphi(r) + ro(\varphi(r)) = O(r^{\beta/\alpha}).$$

После деления обеих частей на r получаем

$$-\alpha\varphi(r)(1 + o(1)) = O(r^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}),$$

т.е. $\varphi(r) = a^{1/\alpha} r^{-1/\alpha}(\xi(r)+1) = O(r^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}})$. Следовательно

$$\xi(r) = -1 + O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}).$$

Из условия (11) следует, что $1+\beta-\alpha \geq 0$. Так как $1 = O(r^\gamma)$ для любого $\gamma \geq 0$, то $\xi(r) = O(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$. Что и требовалось доказать. □

Замечание 2. Можно заметить, что данная теорема останется верной при замене оценок в асимптотиках на o-малое, если $\alpha > \beta > \alpha - 1$. То есть из соотношения $\mu_n = an^\alpha + o(n^\beta),\ n \to \infty$, следует что $N(r) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha} + o(r^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ r \to +\infty$.

Оценки с O-большим и o-малым останутся верными, если считающую функцию $N(r)$ ввести как число собственных значений на отрезке $[0; r]$. Тогда для подпоследовательности μ_{n_k}, состоящей из различных собственных значений с максимальными индексами n_k, получим $N(\mu_{n_k}) = n_k$. Доказательство теоремы 3 почти не изменится и, по-видимому, условие $\beta \geq \alpha - 1$ можно опустить.

Теорема 4 (обратная)**.** *Пусть*

$$N(r) = ar^\alpha + O(r^\beta), \quad r \to +\infty, \tag{13}$$

где $\alpha > \beta \geq 0$, *тогда* $\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad n \to \infty.$

Доказательство. Поскольку из условий теоремы следует справедливость теоремы 2, то

$$\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}(1+o(1)) = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha} + \xi(n), \quad n \to \infty,$$

где $\xi(n) = o(n^{1/\alpha})$. Докажем, что $\xi(n) = O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ n \to \infty$.

Сначала докажем данное свойство на подпоследовательности μ_{n_k}, для которой $N(\mu_{n_k}) = n_k - 1$. Действительно, согласно формуле (13) при $r = \mu_{n_k}$ получаем

$$N(\mu_{n_k}) = n_k - 1 = a\mu_{n_k}^\alpha + O(\mu_{n_k}^\beta), \quad k \to \infty. \tag{14}$$

Так как $\mu_{n_k} \sim a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha}$, то отсюда

$$n_k - 1 = a(a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha} + \xi(n_k))^\alpha + O(n_k^{\beta/\alpha}).$$

Значит

$$n_k - 1 - (n_k^{1/\alpha} + a^{1/\alpha}\xi(n_k))^\alpha = n_k - 1 - n_k(1 + a^{1/\alpha} n_k^{-1/\alpha}\xi(n_k))^\alpha =$$
$$= n_k - 1 - n_k(1+\varphi(n_k))^\alpha = O(n_k^{\beta/\alpha}),$$

где функция $\varphi(n_k) := a^{1/\alpha} n_k^{-1/\alpha} \xi(n_k) = o(1)$ в силу свойства $\xi(n) = o(n^{1/\alpha})$. Таким образом

$$n_k - 1 - n_k(1 + \alpha\varphi(n_k) + o(\varphi(n_k))) = -n_k \alpha \varphi(n_k)(1+o(1)) = O(n_k^{\beta/\alpha}), \quad k \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\varphi(n_k) = a^{1/\alpha} n_k^{-1/\alpha} \xi(n_k) = O(n_k^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}})$, т.е. $\xi(n_k) = O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})$.

Оценим рост последовательности кратностей ν_k. Для этого выберем как в теореме 2 некоторую бесконечно малую последовательность из положительных чисел ε_k так, чтобы $\mu_{n_k+1} < \mu_{n_k} + \varepsilon_k$. Тогда по определению считающей функции $N(r)$ с учетом (13) получаем, что

$$N(\mu_{n_k} + \varepsilon_k) = \nu_k + n_k - 1 = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\alpha + O((\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\beta), \quad k \to \infty.$$

Следовательно с учетом формулы (14) имеем

$$a\mu_{n_k}^\alpha + O(\mu_{n_k}^\beta) + \nu_k = a(\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\alpha + O((\mu_{n_k} + \varepsilon_k)^\beta), \quad k \to \infty.$$

Так как последовательность ε_k можно выбрать сколь угодно быстро стремящейся к нулю, то отсюда $\nu_k = O(\mu_{n_k}^\beta),\ k \to \infty$.

Для завершения доказательства (аналогично теореме 2) воспользуемся тем фактом, что любое натуральное число n представимо в виде $n = n_k + p(k)$, где $\mu_n = \mu_{n_k}$, $p(k)$ — поправочная функция, удовлетворяющая двойному неравенству $0 \le p(k) \le \nu_k - 1$. Тогда с учетом неравенства $\beta \ge 0$ выполнено свойство $\nu_k - 1 = O(\mu_{n_k}^\beta)$, следовательно $p(k) = O(\mu_{n_k}^\beta),\ k \to \infty$. Так как $\mu_{n_k} \sim a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha}$, то в силу неравенства $\beta < \alpha$ имеем $p(k) = O({n_k}^{\beta/\alpha}) = o(n_k),\ k \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O((n_k + p(k))^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O((n_k(1 + o(1)))^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Так как функция $\varphi(k) = p(k)/n_k = O(n_k^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}) = o(1),\ k \to \infty$, то

$$n^{1/\alpha} = (n_k + p(k))^{1/\alpha} = n_k^{1/\alpha}(1 + \varphi(k))^{1/\alpha} = n_k^{1/\alpha}[1 + (1/\alpha)\varphi(k) + o(\varphi(k))] =$$

$$= n_k^{1/\alpha} + (1/\alpha) n_k^{1/\alpha} \varphi(k)(1 + o(1)) = n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Следовательно асимптотика $\mu_n = a^{-1/\alpha} n^{1/\alpha} + O(n^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}),\ n \to \infty$, равносильна соотношению

$$\mu_{n_k+p(k)} = a^{-1/\alpha}\left(n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}})\right) + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}) = a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Последнее выполнено в силу того, что $\mu_n = \mu_{n_k+p(k)} = \mu_{n_k}$ и согласно доказанному ранее

$$\mu_{n_k} = a^{-1/\alpha} n_k^{1/\alpha} + O(n_k^{\frac{1+\beta-\alpha}{\alpha}}), \quad k \to \infty.$$

Теорема доказана. □

Замечание 3. Теорема останется верной при замене оценок в асимптотиках на o-малое, если $\alpha > \beta > 0$. Эти результаты сохранятся, если считающую функцию $N(r)$ ввести как число собственных значений на отрезке $[0; r]$.

4. Асимптотика характеристических чисел диагональной операторной матрицы

В качестве приложения доказанных теорем рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется операторная диагональная матрица

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где A и B являются положительными компактными операторами с заданной асимптотикой характеристических чисел, пронумерованных по неубыванию с учетом кратности. Исследуем асимптотической поведение характеристических чисел $\mu_n(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$.

Утверждение 1. *Пусть*

$$\mu_n(A) = an^{\alpha}(1 + o(1)), \quad \mu_n(B) = bn^{\beta}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \tag{16}$$

тогда в случае $\alpha = \beta$ имеем

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\alpha} + b^{-1/\alpha})^{-1/\alpha} n^{\alpha}(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Если $\alpha \neq \beta$, то асимптотика $\mu_n(\mathscr{A})$ совпадает с асимптотикой того из операторов A и B, у которого показатель степени меньше.

Доказательство. На основании теоремы 1 из формул (16) следует асимптотика считающих функций

$$N(A) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad N(B) = b^{-1/\beta} r^{1/\beta}(1 + o(1)), \quad r \to \infty. \tag{18}$$

Так как множество характеристических чисел оператора $\mathscr{A}$ является объединением множеств характеристических чисел операторов A и B, то

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)) + b^{-1/\beta} r^{1/\beta}(1 + o(1)), \quad r \to \infty. \tag{19}$$

Отсюда в случае $\alpha = \beta$ получаем, что

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = (a^{-1/\alpha} + b^{-1/\alpha}) r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to \infty.$$

Применяя теперь теорему 2, получаем асимптотическую формулу (17).

В случае $\alpha \neq \beta$ будем считать для определенности, что $\alpha < \beta$. Тогда $r^{1/\beta} = o(r^{1/\alpha}),\ r \to \infty$ и из формулы (19) получаем, что

$$N(\mathscr{A}) = a^{-1/\alpha} r^{1/\alpha}(1 + o(1)), \quad r \to \infty.$$

Отсюда на основании теоремы 2 получаем, что $\mu_n(\mathscr{A}) = a n^{\alpha}(1 + o(1)),\ n \to \infty$, т.е. $\mu_n(\mathscr{A}) \sim \mu_n(A)$. □

Следствие 1. *При выполнении условий утверждения 1 операторы A и B лежат в классах Неймана-Шаттена (см. [6], стр. 120)*

$$A \in \mathfrak{S}_{p_A},\ p_A > 1/\alpha, \quad B \in \mathfrak{S}_{p_B},\ p_B > 1/\beta,$$

где класс $\mathfrak{S}_p$ определяется как множество компактных операторов, сингулярные числа которых суммируются со степенью p, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty.$$

Для неотрицательных компактных операторов сингулярные числа совпадают с собственными значениями, которые согласно (16) *имеют асимптотику*

$$\lambda_n(A) = a_1 n^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad \lambda_n(B) = b_1 n^{-\beta}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad a_1 := a^{-1},\ b_1 := b^{-1}. \tag{20}$$

Согласно утверждению 1 в случае $\alpha < \beta$ имеем $\lambda_n(\mathscr{A}) \sim \lambda_n(A),\ n \to \infty$. Если же $\alpha = \beta$, то

$$\lambda_n(\mathscr{A}) = (a_1^{1/\alpha} + b_1^{1/\alpha})^{1/\alpha} n^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{21}$$

В общем случаем верно, что

$$\mathscr{A} \in \mathfrak{S}_p, \quad p > \max\{1/\alpha, 1/\beta\}.$$

Утверждение 2. *Пусть*

$$\mu_n(A) = a n^{\gamma} + O(n^{\alpha}), \quad \mu_n(B) = b n^{\gamma} + O(n^{\beta}), \quad n \to \infty, \tag{22}$$

где $\gamma > 0,\ \gamma > \alpha \geq \gamma - 1,\ \gamma > \beta \geq \gamma - 1$, тогда

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})^{-1/\gamma} n^{\gamma} + O(n^{\delta}), \quad n \to \infty, \tag{23}$$

где $\delta = \max\{\alpha,\ \beta\}$.

Доказательство. На основании теоремы 3 имеем соотношения

$$N(A) = a^{-1/\gamma} r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\alpha-\gamma}{\gamma}}), \quad N(B) = b^{-1/\gamma} r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\beta-\gamma}{\gamma}}), \quad r \to \infty. \tag{24}$$

Тогда, обозначая $\delta = \max\{\alpha,\ \beta\}$, получаем

$$N(\mathscr{A}) = N(A) + N(B) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})r^{1/\gamma} + O(r^{\frac{1+\delta-\gamma}{\gamma}}), \quad r \to \infty.$$

Отсюда, применяя теорему 4, получаем, что

$$\mu_n(\mathscr{A}) = (a^{-1/\gamma} + b^{-1/\gamma})^{-1/\gamma} n^{\gamma} + O(n^{\theta}), \quad n \to \infty,$$

где

$$\theta = \frac{1 + \frac{1+\delta-\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}} = \gamma + 1 + \delta - \gamma - 1 = \delta.$$

□

Список литературы

1. Бирман, М. Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. — СПБ: Лань, 2010. — 458 с.

   BIRMAN, M. Sh. and SOLOMYAK, M. Z. (2010) *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilber space.* S.-Petersburg: Lan'.

2. Бирман, М. Ш. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1977. — Т. 14. — С. 5–58.

   BIRMAN, M. Sh., Solomyak, M. Z. (1979) Asymptotic properties of the spectrum of differential equations. *J. Soviet Math.* Vol. 12, no. 3. p. 247–283.

3. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. and NGO ZUY CAN (1989) *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

4. Маркус, А. С. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики / А. С. Маркус, В. И. Мацаев // Труды ММО. — 1982. — Т. 45. — С. 133–181.

   MARKUS, A. S. and MATSAEV, V. I (1982) Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*. Vol. 45. p. 133–181.

5. Надирашвили, Н. С Кратные собственные значения оператора Лапласа / Н. С. Надирашвили // Матем. сборник. — 1987. — Т. 133(175), номер 2 (6). — С. 223–237.

NADIRASHVILI, N. S (1988) Multiple eigenvalues of the Laplace operator. *Math. USSR-Sb.*. Vol. 61(1). p. 225–238.

6. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   GOHBERG,I. Ts. and KREIN, M. G. (1965) *Introdution to the theory of linear non-selfadjoint operators.* Moscow: Nauka.

УДК: 537.52:519.624

MSC2010: 00A72

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ПО ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ПАРАМЕТРАМ МОДЕЛЬ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО РАЗРЯДА ПОНИЖЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

© В. С. Желтухин, А. Ю. Шемахин, Т. Н. Терентьев, Е. С. Самсонова

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Российская Федерация

e-mail: *terentievt@yandex.ru*

Self-consistent in internal and external parameters model of indactively coupled RF discharge at low-pressure.

Zheltukhin V. S., Shemakhin A. Yu., Terentiev T. N., Samsonova E. S.

Abstract.

A model of a low-pressure ICRF discharge is considered as a nonlinear eigenvalue problem with a parameter for a system including electron balance equations and Maxwell's equations with mixed boundary conditions. The problem is considered in a cylindrical coordinate system for a plasmatron with solenoid coil. Maxwell's equations are considered in the transformed form to a system of elliptic equations in the squares of the modulus of electric and magnetic strengths. The coefficients of ambipolar diffusion, the ionization frequency and the frequency of elastic collisions of electrons with atoms and ions are assumed to be functions of the reduced electric field $E(r)/N$, they are calculated by the BOLSIG+ program using the LXCAT cross-section database. It is shown that the spectral parameter of the problem is the electric field strength at the discharge boundary E_R, and the free parameter is the value of the electron concentration in the center of the plasma bunch n_{e0}. A condition for the existence of a nontrivial solution of the system is obtained as a nonlinear function of the smallest eigenvalue of the auxiliary linear Sturm-Liouville problem versus the value of the electric field strength at the discharge boundary. This approach makes it possible to find not only the self-consistent distribution of the electron concentration, electric, and magnetic fields in the discharge, but also to relate the value of n_{e0} (an internal parameter) with the inductor current I_{ind} (an external parameter). A program in Python has been developed to solve the system of boundary value problems. The equations of the system were discretized by the finite differences. The system of difference equations was solved using the Seidel-type iteration. The results of calculating the dependences of n_{e0}, electric and magnetic fields on I_{ind} for an IC RF discharge in a discharge chamber 24 cm in diameter at a pressure of 60 Pa and a generator frequency of 13,56 MHz are presented.

Keywords: *ICRF discharge, low pressure, numerical simulation, self-consistent model, eigenvalue problem, electron balance equation, Maxwell's equations, electron concentration, electric field strength, magnetic field strength, inductor current.*

1. Введение

Высокочастотный индукционный разряд по природе своей является самосогласованным явлением, в котором пространственное распределение заряженных частиц подстраивается под изменение электрического поля, а поле подстраивается под изменение концентрации заряженных частиц. Для исследования условий самосогласованности модели разработана одномерная математическая модель, которая представляет собой систему краевых задач:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rD_a\frac{dn_e}{dr}\right)+\nu_i n_e=0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{dn_e}{dr}\right|_{r=0}=0, \quad -D_a\left.\frac{dn_e}{dr}\right|_{r=R}=\gamma \left.n_e\right|_{r=R}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\sigma}\frac{dH^2}{dr}\right)=2\sigma E^2, \tag{3}$$

$$\left.\frac{dH^2}{dr}\right|_{r=0}=0, \quad H^2(R)=H_R^2, \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2E^2\right)}{dr}\right]=2\left(\mu_0\omega\right)^2H^2, \tag{5}$$

$$E(0)=0, \quad \left.\frac{d}{dr}\left(r^2E^2\right)\right|_{r=R}=2\mu_0\omega R^2\left|E\right|\left|H\right|, \tag{6}$$

где r — радиальная координата, R — радиус разрядной трубки, $n_e=n_e(r)$ — концентрация электронов, $D_a=D_a\left[E\left(r\right)/N\right]$ — коэффициент амбиполярной диффузии, $\nu_i=\nu_i\left[E\left(r\right)/N\right]$ — частота ионизации, N — концентрация нейтральных атомов, γ — коэффициент отражения электронов от потенциального барьера, создаваемого двойным слоем у стенки разрядной камеры, $H=H(r)=|H_z(r)|$ — модуль аксиальной составляющей напряженности магнитного поля, H_R — напряженность магнитного поля, создаваемая на границе разряда индуктором, $E=E(r)=|E_\phi(r)|$ — азимутальная составляющая напряженности электрического поля, $\omega=2\pi f$ — циклическая частота, f — частота генератора, μ_0 — магнитная постоянная, $\sigma=\sigma(r)$ — проводимость плазмы,

$$\sigma=\frac{n_e e^2\nu_c}{m_e\left(\nu_c^2+\omega^2\right)}, \tag{7}$$

e — заряд электрона, $\nu_c\left[E\left(r\right)/N\right]$ — частота упругих столкновений электронов с атомами и ионами, m_e — масса электрона. Значение напряженности магнитного поля на границе разряда, создаваемое индуктором, может быть задано по формуле $H\approx I_{\text{инд}}/2R$, где $I_{\text{инд}}$ — ток индуктора. В системе (1)–(7) коэффициенты D_a, ν_i, ν_c

вычисляются с помощью программы BOLSIG+ [1]–[3] с использованием базы данных сечений реакций LXCAT [4].

Уравнения (3), (5) представляют собой уравнения Максвелла, преобразованные к системе вещественных эллиптических уравнений относительно квадратов модулей напряженностей [5] в предположении, что H_z, $E_\phi \sim exp(i\omega t)$, где i — мнимая единица, t — время.

2. Условия существования нетривиального решения уравнения баланса электронов

Одним из решений уравнения (1) с граничными условиями (2) является тривиальное: $n_e(r) \equiv 0,\ 0 \leqslant r \leqslant R$, а любое нетривиальное решение $n_e(r) \neq 0$, если оно существует, определяется с точностью до произвольного множителя. Нетрудно убедиться, что, если $n_e(r)$ — некоторое нетривиальное решение задачи (1), (2), то функция $n_e^{(1)}(r) = Cn_e(r)$, где C — произвольная константа, тоже является решением.

Это означает, что уравнение ((1)) с граничными условиями ((2)) есть задача на собственные значения. При этом в исходной постановке коэффициенты уравнения D_a и ν_i задаются из физических соображений и каких-либо дополнительных множителей в правой части уравнения не предусматривается.

Для того, чтобы определить, что же является спектральным параметром задачи, приведем ее к безразмерному виду, вводя переменные

$$\rho = r/R, \quad \bar{n}(\rho) = n_e(\rho R)/n_{e0}, \quad n_{e0} = n_e(0),$$
$$\bar{E}(\rho) = E(\rho R)/E_R, \quad E_R = E(R) = \max_r E(r), \quad \mu = E_R/N,$$
$$\bar{D}\left[\mu\bar{E}(\rho)\right] = D_a\left[E(\rho R)/N\right]/D_{a0}, \quad D_{a0} = \max_r D_a\left[E(r)/N\right],$$
$$\bar{\nu}\left[\mu\bar{E}(\rho)\right] = \nu_i\left[E(\rho R)/N\right]/\nu_{i0}, \quad \nu_{i0} = \max_r \nu_i\left[E(r)/N\right].$$

В рассматриваемом диапазоне напряженностей электрического поля и давлений газа коэффициенты задачи (1), (2) являются возрастающими функциями отношения $E(r)/N$, при этом $E(r)$ — также возрастающая функция радиальной координаты. Поэтому $D_{a0} = D_a(E_R/N)$, $\nu_{i0} = \nu_i(E_R/N)$.

Подставляя новые переменные в уравнение (1) и граничные условия (2), получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(r\bar{D}\frac{d\bar{n}}{d\rho}\right) + \bar{\lambda}\bar{\nu}\bar{n} = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{d\bar{n}}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 0, \quad -\bar{D}\left.\frac{d\bar{n}}{d\rho}\right|_{\rho=1} = \bar{\alpha}\bar{n}\Big|_{\rho=1}, \tag{9}$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{R^2 \nu_{i0}}{D_{a0}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\gamma R}{D_{a0}} \tag{10}$$

Очевидно, что уравнение (8) с граничными условиями (9) является обобщенной задачей на собственные значения.

Из теории краевых задач [6] известно, что обобщенная задача на собственные значения (8), (9) имеет нетривиальные решения на дискретном множестве вещественных значений параметра $\{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots\}$, где $\{\bar{\lambda}_0 \leq \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \ldots\}$. Собственные функции $\bar{n}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, отвечающие собственным значениям $\{\bar{\lambda}_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ определяются с точностью до произвольного множителя; принято нормировать их к единице, полагая $\|\bar{n}_k\| = 1$. Существует единственная неотрицательная собственная функция $\bar{n}_0 \geqslant 0$, $\bar{n}_0 \neq 0$, отвечающая наименьшему собственному значению $\bar{\lambda}_0$. Так как концентрация по определению не может быть отрицательной величиной, то задача (8), (9), а следовательно, и задача (1), (2) являются задачами на определение наименьшего собственного значения и отвечающей ему неотрицательной собственной функции.

Известно [7, 8], что минимальное собственное значение является инфимумом отношения Рэлея,

$$\bar{\lambda}_0 = \inf_{n \neq 0} \left[\int_0^1 \bar{D} \left(\frac{d\bar{n}}{d\rho} \right)^2 \rho \, d\rho \Big/ \int_0^1 \bar{\nu} \bar{n}^2 \rho \, d\rho, \right] \tag{11}$$

который достигается на собственной функции, соответствующей наименьшему собственному значению. Так как, по определению, функции $\bar{D}$, $\bar{\nu} \leqslant 1$, то из соотношений (10), (12) следует, что

$$\bar{\lambda}_0 \equiv \bar{\lambda}_0(\mu) = \bar{\lambda}_0(E_R/N). \tag{12}$$

Отметим, что последнее равенство не является тождеством и не может быть выполнено при произвольных значениях E_R в силу нелинейности зависимостей $D_a(E_R/N)$ и $\nu_i(E_R/N)$ и независимости от них отношения Рэлея (11). Поэтому его необходимо рассматривать как уравнение для определения значения E_R (концентрация нейтральных частиц N в данной задаче предполагается постоянной).

Произведем в уравнении (8) и граничных условиях (9) обратную замену переменных, приводя их к размерному виду. Получим краевую задачу

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r D_a \frac{dn_e}{dr} \right) + \lambda \nu_i n_e = 0, \tag{13}$$

$$\left. \frac{dn_e}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. -D_a \frac{dn_e}{dr} \right|_{r=R} = \gamma \left. n_e \right|_{r=R}, \tag{14}$$

где

$$\lambda = \bar{\lambda}\frac{D_{a0}}{R^2\nu_{i0}}. \tag{15}$$

Очевидно, что задача (13), (14) также является задачей на собственные значения. Ее минимальное собственное значение

$$\lambda_0\left(E_R/N\right) = \inf_{n\neq 0}\left[\int_0^R \bar{D}_a\left(\frac{dn_e}{dr}\right)^2 r\,dr \Big/ \int_0^R \nu_i n_e^2 r\,dr\right] = \bar{\lambda}_0\left(E_R/N\right)\frac{D_{a0}}{R^2\nu_{i0}} = 1. \tag{16}$$

Отметим, что последнее равенство в (16), также как и равенство (12), не является тождеством, оно представляет собой уравнение, задающее *дополнительное условие разрешимости* задачи (1), (2), а, следовательно, и системы (1)–(6) в целом. Так как собственные функции задачи (13), (14) определяются с точностью до произвольного множителя, то значение n_{e0} является свободным параметром, для определения которого необходимо привлечь дополнительную информацию.

3. Условие согласования внутренних и внешних параметров задачи

В соответствии с соотношением (7), свободный параметр n_{e0} является множителем в уравнении (3). Дважды интегрируя это уравнение, получим

$$H^2(r) = 2\int\left(\frac{\sigma}{r}\int \sigma E^2 r\,dr\right)dr + C_1\ln r + C_2, \tag{17}$$

где $C_1 = 0$, а C_2 определяется граничным условием $H^2(R) = H_R^2$. Отсюда видно, что при фиксированном значении H_R увеличение n_{e0} ведет к уменьшению $H^2(0)$. Следовательно, верхняя граница n_{e0} определяется соотношением $H^2(0) \geqslant 0$.

При $n_{e0} = 0$ решением задачи (3), (4) является $H^2(r) = H_R^2$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Таким образом, свободный параметр задачи (1)–(6) должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant n_{e0} \leqslant n_{eb}$, где n_{eb} определяется условием $H^2(0) = 0$.

Из задачи (5), (6) следует, что

$$E^2(r) = 2\int\left(\int H^2 r\,dr\right) r\,dr + \frac{C_1}{r} + C_2, \tag{18}$$

где $C_1 = C_2 = 0$. Видно, что при уменьшении (увеличении) $H^2(r)$ на отрезке $0 \leqslant r \leqslant R$ значения $E^2(r)$, а следовательно, и $E(R)$ уменьшаются (увеличиваются). Отсюда следует, что значение $E_R = E(R)$, удовлетворяющее уравнению

$$\lambda_0\left(E_R/N\right) = 1, \tag{19}$$

может быть найдено подходящим выбором n_{e0}.

4. Обсуждение и результаты моделирования

Резюмируя вышесказанное, условие самосогласованности задачи (1)—(6) по внутренним и внешним параметрам формулирается в виде следующего утверждения.

Утверждение. Задача (1)—(6) представляет собой параметрическую задачу на собственные значения, в которой спектральный параметр $E_R = E(R)$ входит нелинейно в коэффициент и правую часть подзадачи (1), (2), а свободный параметр $n_{e0} = n_e(0)$, являясь нормирующим множителем этой подзадачи, определяется так, чтобы значение E_R было решением подзадачи (3)–(6) при заданном значении напряженности магнитного поля H_R на границе разряда. Спектральный параметр E_R определяется как решение уравнения $\lambda_0(E_R/N) = 1$, где λ_0 — наименьшее собственное значение вспомогательного уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rD_a\frac{dn_e}{dr}\right) + \lambda\nu_i n_e = 0, \tag{20}$$

с граничными условиями (2).

Так как граничное значение напряженности магнитного поля определяется током индуктора $I_{\text{инд}}$ (см. выше), то учет самосогласованности системы краевых задач (1)–(7) и наличие свободного параметра позволяют решать прямую и обратную задачи:

1) при заданном токе индуктора найти самосогласованное распределение внутренних параметров разряда $n_e(r), E(r), H(r)$ и значение значения концентрации электронов в центре разряда n_{e0};

2) для заданного значения концентрации в центре разряда n_{e0} найти ток индуктора, обеспечивающий поддержание разряда с такими характеристиками.

Для решения системы краевых задач (1)—(6) разработана программа на языке Python. Уравнения системы дискретизовались методом конечных разностей. Система разностных уравнений решалась с применением метода итераций типа Зейделя.

Результаты расчетов по этой модели позволили установить зависимость концентрации электронов в сгустке разряда от тока индуктора для поддержания ВЧИ-разряда в разрядной камере диаметром 2,4 см при давлении 60 Па и частоте генератора 13,56 МГц (рис. 1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10055).

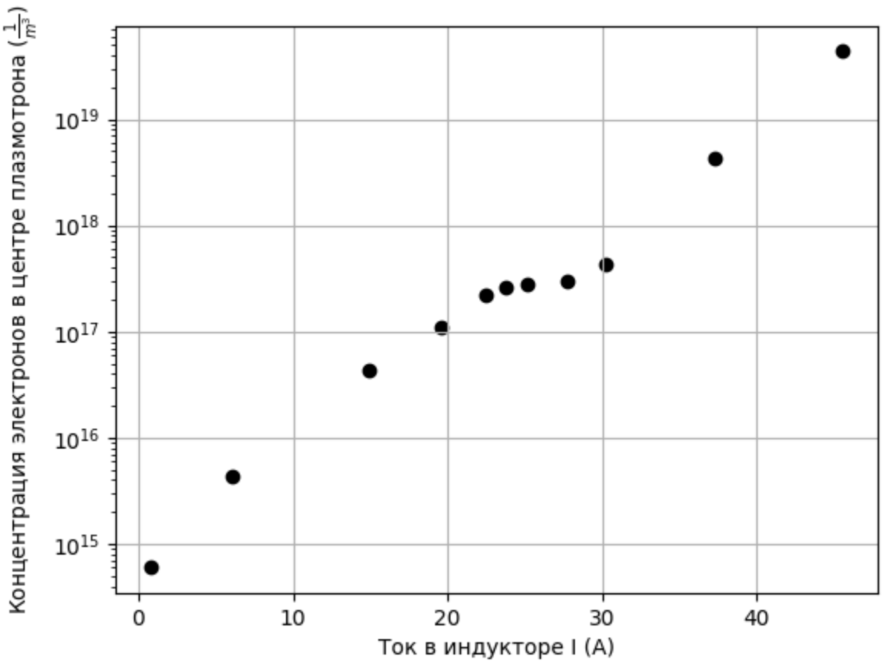

Рис. 1. Зависимость концентрации электронов в плазменном сгустке в условиях поддержания ВЧИ-разряда при давлении 60 Па для генератора с частотой 13,56 МГц.

Список литературы

1. BOLSIG+. Electron Boltzmann equation solver. — URL: http://www.bolsig.laplace.univ-tlse.fr/ Latest version: 12/2019 (beta)

2. BOEUF J. P., PITCHFORD L. C. (1995) Two-dimensional model of a capacitively coupled rf discharge and comparisons with experiments in the Gaseous Electronics Conference reference reactor. *Physical Review E.*. Vol. 51(2). p. p. 1376.

3. HAGELAAR G. J. M., PITCHFORD L. C. (2005) Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. *Plasma Sources Science and Technology.* Vol. 14(4). p. p. 722.

4. UBC database, Database of scattering cross sections. — URL: www.lxcat.net, retrieved on November 12, 2019

5. ABDULLIN I. SH., ZHELTUKHIN V. S. Matematicheskoe modelirovanie indukcionnogo diffuznogo razryada / Abdullin I. Sh., Zheltukhin V. S. // Izv. Sib. Otd-niya AN SSSR. Ser. tekhn. nauk.. — 1985. — No 16(3). — C. 106-109.

6. LADYZHENSKAYA O. A., URAL'CEVA N. N. (1973) *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya ellipticheskogo tipa.* M.: Nauka.

7. PARLETT B. N. (1980) The Symmetric Eigenvalue Problem. *Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.* XX. p. 348.

8. DUNFORD N., SCHWARTZ J. T. (1963) *Linear Operators. Part II. Spectral Theory Self Adjoint Operators in Hilbert Space.* N. Y., London: Intersci. Publ.

УДК: 519.83

MSC2010: 91A65

ДВУХУРОВНЕВАЯ ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ТРЁХ ФИРМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© Ю. Н. Житенева, Л. В. Смирнова, Ю. А. Бельских

Государственный гуманитарно-технологический университет
факультет математики, физики и экономики
ул. Зеленая, 22, г. Орехово-Зуево, Московская обл., 142611, Российская Федерация
e-mail: *ulya_zhiteneva@mail.ru, smirnovalidiya@rambler.ru, belskihja@gmail.com*

Two-level hierarchical model of competition between three firms under uncertainty.

Zhiteneva J. N., Smirnova L. V., Belskih J. A.

Abstract.

The paper considers a problem of competition between three manufacturing firms in the market of homogeneous infinitely divisible products. It is assumed that the nature of the interaction of manufacturing firms in the market has a hierarchical structure. Namely, one of the companies, the leader company, is the leading manufacturer and is the first to decide on the volume of product deliveries to the market. While the other two firms decide on the number of products delivered after the leading firm and must take into account the volume of its deliveries. Taking into account such a hierarchy in the interaction of firms leads to the need to formalize the problem in the form of a two-level hierarchical game. In this case, the leader firm is identified with the top-level player, and the other two firms are identified with the lower-level players. In addition, it is assumed that the cooperation of lower-level players is impossible. As a result, when formalizing the optimal solution for lower-level players, the concept of Nash equilibrium from the game theory is used.

In addition to the above, the problem under consideration assumes the presence of uncontrolled uncertain factors, about which only a set of possible values is known, and there are no probabilistic characteristics. The presence of uncertainty in the framework of this problem is interpreted as the presence of an importing company on the market, the volume of products supplied by which is not known in advance by any of the manufacturing companies. However, it is possible for them to estimate the limits of the estimated volume of imports. The presence of uncertainty obliges all manufacturing firms to take this fact into account and, as a result, in their choice of the optimal solution, use one of the principles of the theory of decision-making under uncertainty. The paper considers the case when one of the lower-level players uses the Wald principle (maximin principle, the principle of guaranteed results), and the second one is guided by the Savage principle (the principle of minimax regret) when choosing his decision. For a top-level player — a leading firm — two cases are considered in this paper. The first is when the player uses the Wald principle, and the second is the Savage principle.

Thus, the problem described in this paper is formalized as a two-level hierarchical game with uncertainty. For the game in this setting, the algorithm for constructing the proposed optimal solution is described and its explicit form is found for a specific type of payoff functions of all participants in the game. In addition, coefficient criteria for the existence of an optimal solution are obtained.

Keywords: *hierarchical game, uncertainty, Nash equilibrium, Wald's principle, Savage's principle.*

Введение

В работах [1]–[3] формализованы различные виды иерархических моделей конкуренции фирм-производителей в условиях действия неконтролируемых неопределенных факторов. Отличительной особенностью рассматриваемых моделей является наличие как одного игрока верхнего уровня (центра, лидера), так и одного игрока второго уровня (агента). Вместе с тем, при моделировании практических задач вполне реальным является наличие на каждом уровне иерархии не одного, а нескольких участников. В предлагаемой работе рассматривается иерархическая модель конкуренции трех фирм, одна из которых является игроком верхнего уровня, а две других - игроками нижнего уровня.

Рассматривается модель конкуренции трех предприятий (фирм), производящих и реализующих на одном рынке однородную бесконечно делимую продукцию. Помимо указанных фирм на рынок поставляет аналогичную продукцию фирма-импортер. Объем импортной продукции заранее не известен, имеется информация только о его максимально возможной величине d, $d > 0$.

Обозначим x_i – объем продукции, произведенный i-ой фирмой ($i \in \{1, 2, 3\}$), y – объем импорта.

Рассмотрим случай, когда фирмы поставляют на рынок всю произведенную продукцию. При этом производственные мощности предприятий ограничены. Именно, каждая i-ая фирма может произвести продукцию в объёме не более c_i. Постоянные величины $c_i > 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$).

Предположим, что цена единицы продукции линейно зависит от суммарного объема продукции на рынке, т.е.

$$p(x_1, x_2, x_3, y) = a - b\Big(x_1 + x_2 + x_3 + y\Big), \tag{1}$$

где положительная величина a – цена товара при нулевом предложении, b – показатель падения цены при увеличении предложения, $b > 0$.

Далее считаем, что цена является положительной величиной, т.е. выполнено неравенство

$$a - b\Big(c_1 + c_2 + c_3 + d\Big) > 0.$$

Предполагаем, что предприятия обладают разными производственными возможностями и оказывают неодинаковое влияние на рассматриваемый рынок. Именно, одна из фирм является ведущим производителем указанной продукции. Будем называть её фирмой-лидером. Эта фирма первой принимает решение об объеме поставок продукции на рынок. Оставшиеся две фирмы, принимая решение об объеме производства, учитывают количество продукции, поставляемое фирмой-лидером. При этом они действуют одновременно и независимо друг от друга. Кроме того, все фирмы должны учитывать возможный объем поставок аналогичной импортной продукции. Рассмотрим случай, когда импортер принимает решение о поставке продукции одновременно с фирмами, не являющимися лидерами. Будем считать, что импортеру выбор фирмы-лидера может быть известен, а информацией о действиях оставшихся двух фирм он не обладает.

Пусть прибыль i-ой фирмы ($i \in \{1, 2, 3\}$) задана равенством

$$f_i(x_1, x_2, x_3, y) = p(x_1, x_2, x_3, y)x_i - k_i x_i,$$

или, с учетом (1),

$$f_i(x_1, x_2, x_3, y) = \Big(a - b\Big(x_1 + x_2 + x_3 + y\Big)\Big)x_i - k_i x_i. \qquad (2)$$

В (2) положительная постоянная величина k_i определяет издержки на выпуск единицы продукции i-ой фирмы ($i \in \{1, 2, 3\}$).

Каждая фирма стремится получить наибольшую возможную прибыль, при этом кооперация фирм невозможна. О намерениях фирмы-импортера какая-либо информация отсутствует.

Формализуем рассматриваемую математическую модель задачи оптимизации производства в виде двухуровневой иерархической игры трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{X_i\}_{i=1,2,3}, Y, \{f_i(x_1, x_2, x_3, y)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

В игре Γ игроки отождествляются с соответствующими фирмами, причем фирма-лидер является первым игроком – игроком верхнего уровня. Игроков с порядковыми номерами 2 и 3 будем считать игроками нижнего уровня. Множества стратегий игроков $X_i = [0, c_i]$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Действия неопределенности отождествляются с поставками фирмы-импортера. Совокупность значений неопределенности $Y = [0, d]$. Функция выигрыша i-го игрока ($i \in \{1, 2, 3\}$) определена в (2).

Игра происходит следующим образом (рис. 1). Первый ход совершает игрок с номером 1. Он выбирает стратегию $x_1 \in X_1$. Второй ход делают игроки нижнего уровня. Имея информацию о выборе игрока верхнего уровня, второй и третий игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают стратегии $x_2(x_1) \in X_2$ и $x_3(x_1) \in X_3$, соответственно. Одновременно и независимо от действий игроков нижнего уровня реализуется неопределенность $y \in Y$. В результате складывается ситуация игры $(x, y) = (x_1, x_2(x_1), x_3(x_1), y)$. Игроки получают выигрыши – значения своих функций выигрыша в сложившейся ситуации.

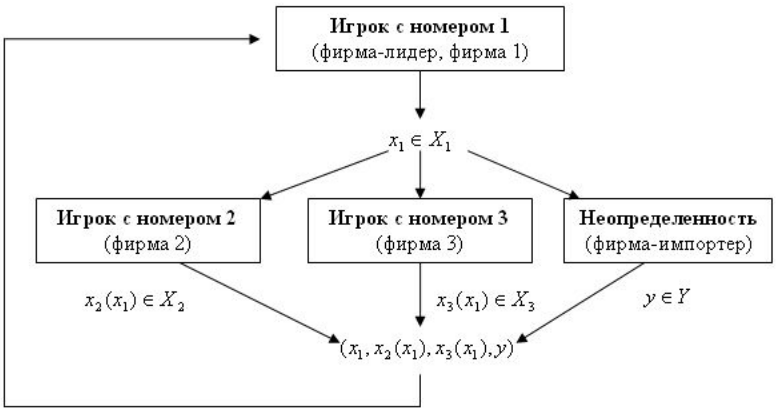

Рис. 1. Схема принятия решений в игре Г

Цель каждого i-игрока в игре Г – выбором своей стратегии $x_i \in X_i$ добиться наибольшего возможного значения своей функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, x_3, y)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). При этом игроки действуют независимо друг от друга и каждый из них должен учитывать интересы остальных игроков, а также возможность реализации любой неопределенности y, о которой заранее известно только множество возможных значений Y.

Формализация решения

Разобьем процесс построения решения в игре Г на два этапа.

I этап. Формализация решения игроков нижнего уровня

Учитывая иерархическую процедуру принятия решений в игре Г, будем считать, что второй и третий игроки имеют информацию о выборе первого игрока, т.е. значение $x_1 \in X_1$ известно. При этом игрокам нижнего уровня не известна реализация неопределенности $y \in Y$.

Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности

$$\Gamma_1 = \langle \{X_i\}_{i=2,3}, Y, \{f_i(x_1, x_2, x_3, y)\}_{i=2,3} \rangle.$$

В этой игре стратегия i-го игрока $x_i = x_i(x_1) \in X_i = [0, c_i]$, $c_i > 0$ $(i \in \{2, 3\})$. Множество значений неопределенности $Y = [0, d]$, $d > 0$. Функция выигрыша i-го игрока $(i \in \{2, 3\})$ определена в (2).

Решение игры Γ_1 является решением игроков нижнего уровня исходной игры Г.

Предположим, что игроки в игре Γ_1 (т.е. игроки нижнего уровня в игре Г) для учета действий неопределенности используют разные принципы принятия решений в условиях действия неконтролируемых факторов. Именно, пусть второй игрок является рискофобом, т.е. выбирая решение, использует принцип Вальда [4]. Третий игрок при выборе своей стратегии руководствуется принципом Сэвиджа [5].

В соответствии с принципом Вальда второй игрок ориентируется на реализацию самой «плохой» для него неопределенности. Следовательно, для оценки выбора своей стратегии он использует функцию

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3, y^V) = \min_{y \in Y} f_2(x_1, x_2, x_3, y).$$

Поскольку $y^V = d$, получим

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3, d),$$

или, с учетом (2),

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = -bx_2^2 + 2b\Big(h_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + d)\Big)x_2, \tag{3}$$

где величина $h_2 = \frac{a-k_2}{2b}$.

Руководствуясь принципом Сэвиджа, третий игрок при выборе своей стратегии использует функцию сожаления

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3, y) = \max_{x_3 \in X_3} f_3(x_1, x_2, x_3, y) - f_3(x_1, x_2, x_3, y).$$

При выполнении ограничений

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_2 + d) \le h_3 \le c_3 \tag{4}$$

функция сожаления третьего игрока, с учетом (2), примет вид

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3, y) = b\Big(x_3 - h_3 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y)\Big)^2, \tag{5}$$

где величина $h_3 = \frac{a-k_3}{2b}$.

Следуя принципу Сэвиджа, третий игрок ориентируется на реализацию неопределенности, максимизирующей его функцию сожаления. Следовательно, принимая решение, он оценивает значения функции

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = -\max_{y \in Y} \Phi_3(x_1, x_2, x_3, y).$$

Учитывая (5), получим

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -b\Big(x_3 - h_3 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Big)^2, \ 0 \le x_3 \le h_3 - \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{d}{4}, \\ -b\Big(x_3 - h_3 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + d)\Big)^2, \ h_3 - \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{d}{4} \le x_3 \le c_3. \end{cases} \tag{6}$$

От игры Γ_1 перейдем к бескоалиционной игре

$$\Gamma_2 = \langle \{X_i\}_{i=2,3}, \{F_i(x_1, x_2, x_3)\}_{i=2,3} \rangle.$$

В игре Γ_2 множество стратегий i-го игрока $X_i = [0, c_i]$ $(i \in \{2, 3\})$, функции выигрыша второго и третьего игроков определены в (3) и (6) соответственно.

Определение 1. Пару $(x_2^e(x_1), x_3^e(x_1)) \in X_2 \times X_3$ назовём *VSN-решением* игры Γ_1, если для любых значений $x_1 \in X_1$ она является равновесной по Нэшу ситуацией в игре Γ_2, т.е. совместна система неравенств

$$\begin{cases} F_2(x_1, x_2(x_1), x_3^e(x_1)) \le F_2(x_1, x_2^e(x_1), x_3^e(x_1)) \ \forall x_2 \in X_2, \\ F_3(x_1, x_2^e(x_1), x_3(x_1)) \le F_3(x_1, x_2^e(x_1), x_3^e(x_1)) \ \forall x_3 \in X_3. \end{cases}$$

Пусть для параметров игры Γ_2 выполнены неравенства

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3}c_1 \le \frac{4}{3}h_2 - \frac{2}{3}h_3 - \frac{1}{2}d \le c_2, \\ \frac{1}{3}c_1 \le \frac{4}{3}h_3 - \frac{2}{3}h_2 \le c_3, \end{array} \tag{7}$$

где постоянные $h_i = \frac{a-k_i}{2b}$ $(i \in \{2, 3\})$. Используя достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу, получим явный вид VSN-решения в игре Γ_1

$$\begin{array}{l} x_2^e(x_1) = \frac{4}{3}h_2 - \frac{2}{3}h_3 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}d, \\ x_3^e(x_1) = \frac{4}{3}h_3 - \frac{2}{3}h_2 - \frac{1}{3}x_1. \end{array} \tag{8}$$

Используя подстановку $h_i = \frac{a-k_i}{2b}$ $(i \in \{2,3\})$, преобразуем (4), (7) и равенства (8). Получим

$$\begin{array}{l} b(c_1 + c_2 + d) \le a - k_3 \le 2dc_3, \\ \frac{1}{3}c_1 \le \frac{a-2k_2+k_3}{3b} - \frac{1}{2}d \le c_2, \\ \frac{1}{3}c_1 \le \frac{a-2k_3+k_2}{3b} \le c_3 \end{array} \tag{9}$$

и

$$\begin{array}{l} x_2^e(x_1) = \frac{a-2k_2+k_3}{3b} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}d, \\ x_3^e(x_1) = \frac{a-2k_3+k_2}{3b} - \frac{1}{3}x_1. \end{array} \tag{10}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение

Лемма 1. *Пусть в игре* Γ

$$\begin{array}{c} a > 0,\ b > 0,\ d > 0,\ c_i > 0,\ k_i > 0\ (i \in \{1,2,3\}), \\ a - b(c_1 + c_2 + c_3 + d) > 0 \end{array} \tag{11}$$

и выполнены условия (9).

Тогда для любых значений $x_1 \in X_1$ *в игре* Γ_1 *существует и единственно* VSN*-решение (10).*

II этап. Формализация решения игрока верхнего уровня

Будем считать, что игрок верхнего уровня знает об отношении к риску игроков нижнего уровня, а так же о том какие принципы эти игроки будут использовать для учета действий неопределенности. Помимо этого первый игрок предполагает, что игроки нижнего уровня при выборе своих оптимальных стратегий руководствуются принципом равновесия по Нэшу. Поэтому при выборе своей стратегии игрок верхнего уровня рассчитывает на то, что игроки нижнего уровня используют стратегии из VSN-решения игры Γ_1. Согласно Лемме 1 при выполнении в игре Γ условий (9) и (11) указанное решение $(x_2^e(x_1), x_3^e(x_1))$ игроков нижнего уровня существует и единственно.

Как и игрокам нижнего уровня, первому игроку заранее не известно значение неопределенности $y \in Y$.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока верхнего уровня является решением следующей игры с природой

$$\Gamma_3 = \langle X_1, Y, F_1(x_1, y) \rangle.$$

Здесь множество стратегий игрока совпадает с $X_1 = [0, c_1]$, множество неопределенностей, как и прежде, $Y = [0, d]$. Функция выигрыша игрока

$$F_1(x_1, y) = f_1(x_1, x_2^e(x_1), x_3^e(x_1), y)$$

или, с учетом (2) и (8),

$$F_1(x_1,y) = -\frac{b}{3}x_1^2 + 2b\Big(h_1 - \frac{1}{3}h_2 - \frac{1}{3}h_3 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}d\Big)x_1, \tag{12}$$

где постоянные величины

$$h_i = \frac{a-k_i}{2b}\ (i \in \{1,2,3\}). \tag{13}$$

Выбирая решение в игре Γ_3, игрок может руководствоваться любым принципом оптимальности, применяемым в теории игр с природой. Выбор принципа оптимальности определяется, прежде всего, склонностью игрока к риску. Рассмотрим два возможных подхода к формализации решения игрока верхнего уровня.

1 случай. Первый игрок использует в игре Γ_3 принцип Вальда

В этом случае игрок выбирает стратегию $x_1^V \in X_1$, обеспечивающую наибольшее значение его функции выигрыша $F_1(x_1,y)$ при самом неблагоприятном значении неопределенности.

Определение 2. Стратегию $x_1^V \in X_1$ назовём *оптимальным по Вальду решением* игрока верхнего уровня в игре Γ, если она является оптимальным по Вальду решением игры Γ_3, т.е. выполнено равенство

$$\min_{y\in Y} F_1(x_1^V, y) = \max_{x_1\in X_1}\min_{y\in Y} F_1(x_1,y).$$

Поскольку в игре Γ_3

$$\min_{y\in Y} F_1(x_1^V, y) = F_1(x_1^V, d),$$

то

$$F_1(x_1^V, d) = \max_{x_1\in X_1} F_1(x_1, d).$$

Нетрудно показать, что при выполнении условий

$$0 \le 3h_1 - h_2 - h_3 - \frac{3}{4}d \le c_1 \tag{14}$$

оптимальное по Вальду решение игрока верхнего уровня в игре Γ

$$x_1^V = 3h_1 - h_2 - h_3 - \frac{3}{4}d. \tag{15}$$

Используя (13), ограничения (14) и оптимальную по Вальду стратегию (15) можно представить в виде

$$0 \le \frac{a - 3k_1 + k_2 + k_3}{2b} \le c_1 + \frac{3}{4}d \tag{16}$$

и

$$x_1^V = \frac{a - 3k_1 + k_2 + k_3}{2b} - \frac{3}{4}d, \tag{17}$$

соответственно.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 1. *Пусть в игре* Γ *выполнены условия (9), (11), (16) и игроки нижнего уровня при любых значениях* $x_1 \in X_1$ *выбирают* VSN*-решение* $(x_2^e(x_1), x_3^e(x_1))$*. Тогда в этой игре оптимальное по Вальду решение игрока верхнего уровня определяется равенством (17).*

Пусть игрок верхнего уровня в игре Γ использует оптимальное по Вальду решение (17). Тогда оптимальные стратегии игроков нижнего уровня (8) имеют вид

$$\begin{aligned} x_2^e &= \tfrac{a+3k_1-5k_2+k_3}{6b} - \tfrac{3}{4}d, \\ x_3^e &= \tfrac{a+3k_1+k_2-5k_3}{6b} + \tfrac{3}{4}d. \end{aligned} \tag{18}$$

2 случай. Первый игрок использует в игре Γ_3 принцип Сэвиджа

Согласно принципу Сэвиджа, игрок при выборе своей стратегии должен ориентироваться на значение функции сожаления по Сэвиджу

$$\Phi_1(x_1, y) = \max_{x_1 \in X_1} F_1(x_1, y) - F_1(x_1, y).$$

Оптимальная по Сэвиджу стратегия игрока x_1^S минимизирует функцию сожаления $\Phi_1(x_1, y)$ при неблагоприятных для него значениях неопределенности.

Определение 3. Стратегию $x_1^S \in X_1$ назовём *оптимальным по Сэвиджу* решением игрока верхнего уровня игры Γ, если она является оптимальным по Сэвиджу решением игры Γ_3, т.е. выполнено равенство

$$\max_{y \in Y} \Phi_1(x_1^S, y) = \min_{x_1 \in X_1} \max_{y \in Y} \Phi_1(x_1, y).$$

При выполнении в игре Γ условия

$$\frac{3}{4}d \le 3h_1 - h_2 - h_3 \le c_1 - \frac{3}{4}d \tag{19}$$

функция сожаления по Сэвиджу игрока в игре Γ_3 имеет вид

$$\Phi_1(x_1, y) = \frac{b}{3}\Big(x_1 - 3h_1 + h_2 + h_3 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}d\Big)^2. \tag{20}$$

Здесь постоянные h_i $(i \in \{1,2,3\})$ определены в (13).

Нетрудно показать, что при выполнении условий (19)

$$\max_{y \in Y} \Phi_1(x_1, y) = \begin{cases} \frac{b}{3}\Big(x_1 - 3h_1 + h_2 + h_3 - \frac{3}{4}d\Big)^2, & 0 \le x_1 \le 3h_1 - h_2 - h_3, \\ \frac{b}{3}\Big(x_1 - 3h_1 + h_2 + h_3 + \frac{3}{4}d\Big)^2, & 3h_1 - h_2 - h_3 \le x_1 \le c_1. \end{cases}$$

и оптимальная по Сэвиджу стратегия игрока верхнего уровня

$$x_1^S = 3h_1 - h_2 - h_3, \tag{21}$$

где h_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ определены в (13).

Используя (13), ограничения (19) и оптимальную по Сэвиджу стратегию первого игрока (21) можно представить в виде

$$\frac{3}{4}d \leq \frac{a - 3k_1 + k_2 + k_3}{2b} \leq c_1 - \frac{3}{4}d \tag{22}$$

и

$$x_1^S = \frac{a - 3k_1 + k_2 + k_3}{2b}, \tag{23}$$

соответственно.

Следовательно, справедливо утверждение

Теорема 2. *Пусть в игре* Γ *выполнены условия (9), (11), (22) и игроки нижнего уровня при любых значениях стратегии* $x_1 \in X_1$ *выбирают* VSN*-решение* $(x_2^e(x_1), x_3^e(x_1))$*. Тогда в этой игре оптимальное по Сэвиджу решение игрока верхнего уровня определяется равенством (23).*

Пусть игрок верхнего уровня в игре Γ использует оптимальное по Сэвиджу решение (23). Тогда оптимальные стратегии игроков нижнего уровня (8) имеют вид

$$\begin{array}{l} x_2^e = \frac{a+3k_1-5k_2+k_3}{6b} - \frac{1}{2}d, \\ x_3^e = \frac{a+3k_1+k_2-5k_3}{6b}. \end{array} \tag{24}$$

Замечание 1. Следует отметить, что выполнение условий (22) влечет за собой выполнение ограничений (16). Поэтому при выполнении в игре Γ условий теоремы 2 для игрока верхнего уровня существуют оба рассмотренных оптимальных решения.

Заключение

Описанная в работе модель конкуренции трех фирм формализована как двухуровневая иерархическая игра при неопределенности. Для игры в такой постановке описан алгоритм построения предложенного оптимального решения и для конкретного вида функций выигрыша всех участников игры найден его явный вид. Кроме того, получены коэффициентные критерии существования оптимального решения.

В работе исследован случай, когда один из игроков нижнего уровня является рискофобом и использует принцип гарантированного результата, а второй при выборе своего решения руководствуется принципом минимаксного сожаления. Для игрока верхнего уровня – фирмы-лидера в работе рассмотрены два случая. Первый, когда игрок использует принцип Вальда, а второй – принцип Сэвиджа. Предложенный подход к формализации оптимальных решений игроков может быть модифицирован при использовании игроками других принципов оптимальности из теории принятия решений при неопределенности.

Список литературы

1. Бардин, А. Е. Гарантированное равновесие в иерархической игре при неопределенности // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов XII Международной школы-симпозиума АМУР-2018. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2018. — С. 42–46.

   BARDIN, A. (2018) Equilibrium of guarantee for hierarchical game under uncertainties. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the Twelfth International School-Symposium AMUR–2018.* p. 42–46.

2. Бардин, А. Е., Житенева, Ю. Н. Иерархическая модель задачи оптимизации деятельности двух фирм при неопределенности // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов XIII Всероссийской с международным участием школы-симпозиума АМУР-2019. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2019. — С. 24–28.

   BARDIN, A. & ZHITENEVA, J. (2019) The hierarchical model the problem of activities optimization of the two companies under uncertainty. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the Thirteenth All-Russian School-Symposium with International Participation AMUR–2019.* p. 24–28.

3. Житенева, Ю. Н. Иерархическая модель конкуренции двух фирм при неопределенности // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов XI Международной школы-симпозиума АМУР-2017. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. — С. 150–156.

   ZHITENEVA, J. (2017) The hierarchical model of two firms competition under uncertainty. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the Eleventh International School-Symposium AMUR–2017.* p. 150–156.

4. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Смирнова, Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: КРАСАНД, 2013. — 324 с.

   ZHUKOVSKIY, V. & CUDRYAVCEV, K. & SMIRNOVA, L. (2013) *Guaranteed conflict solutions and their applications.* Moscow: KRASAND.

5. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association.* 46. p. 55–67.

УДК: 517.958

MSC2010: 35K05, 35R05 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-43-52**

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С НЕИДЕАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ СЛОЯМИ

© В. В. Калманович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

кафедра физики и математики

ул. Степана Разина, 26, Калуга, 248023, Российская Федерация

e-mail: *v572264@yandex.ru*

On the construction of solution of the heat equation in a multilayer medium with imperfect contact between the layers.

Kalmanovich V. V.

Abstract. The paper considers the solution of a one-dimensional homogeneous equation of heat conduction in a multilayer

$$a_2^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\right)=\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t},\quad i=\overline{1,n}$$

where the superscript in parentheses indicates the layer number, $a_1(x)$ and $a_2(x)$ depend on the geometrical and physical parameters of the layer. The flow is directed along the axis x Matching conditions of the third type are accepted at the contact points of the layers

$$T^{(i+1)}(x_{i+1},t)-T^{(i)}(x_{i+1},t)=-r^{(i+1)}J^{(i)}(x_{i+1},t),$$
$$J^{(i)}(x_{i+1},t)=J^{(i+1)}(x_{i+1},t),\ \ i=\overline{1,n-1},$$

where $r^{(i+1)}$ is a thermal resistance coefficients at the contact points of the layers x_{i+1} and $J^{(i)}$ is the flow.

The initial temperature distribution is given

$$T^{(i)}(x,0)=g(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=\overline{1,n}$$

and the first boundary value problem is posed

$$T^{(1)}(x_1,t)=0,\quad T^{(n)}(x_{n+1},t)=0.$$

The solution is constructed by combining the Fourier method, the matrix method and the method of generalized powers of Bers. Previously, this approach was used to construct solutions of the heat equation under continuous matching conditions at the layer boundary.

The method of generalized powers makes it possible to obtain a unified analytical form for solving the problem for various geometries of a multilayer medium: translational, axial or central symmetry.

The essence of the matrix method is reduced to the sequential multiplication of functional matrices that depend on the physical and geometric parameters of the layers of the medium (the elements of these matrices are expressed in terms of generalized powers) and matrices describing the thermal resistance at the points of contact of the layers. Thus, it is possible to express the relationship between the value of the amplitude function at the point x_1 and the values of this function at any other point in the medium. Thus, it is possible to find uniform eigenvalues and the corresponding eigenfunctions for the entire medium for any finite number of layers by linking the values of the amplitude function at the boundary points x_1 and x_{n+1} of the medium.

In this paper, the orthogonality of the obtained eigenfunctions is proved.

Keywords: *heat conduction equation, matrix method, multilayer medium, imperfect thermal contact.*

Введение

Решение многих задач современной инженерной практики связано с исследованием и прогнозированием процессов тепломассопереноса в многослойных конструкциях. Особенно интересны задачи с неидеальным тепловым контактом между слоями, возникающим вследствие зазоров, шероховатостей поверхностей, наличием термического сопротивления и др. При изучении реальных тепловых процессов методами математического моделирования важно иметь аналитические или приближенные аналитические методы решения, которые заметно могут упростить анализ процессов, прогноз поведения отдельных материалов конструкции, выявить возможные нежелательные явления и др. В качестве одного из таких аналитических методов может быть применен подход, состоящий в сочетании матричного метода и метода обобщённых степеней Берса.

Идея матричного метода применительно к задачам теплопроводности в составных пластинах была описана в [1]. Однако для решения задач тепломассопереноса в многослойных средах он не получил распространения, возможно, из-за того, что формулы аналитического решения получались очень громоздкими, системы компьютерной алгебры в то время (середина XX в.) только начинали зарождаться, так что численные методы были предпочтительными. В настоящее время самые разные программные продукты успешно справляются с этой проблемой, что позволило нам применить матричный метод для моделирования стационарных [2, 3] и нестационарных процессов [4], причем слоёв может быть произвольное конечное число. В этих работах используется сочетание матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса [5, 6], что позволило в единой аналитической форме получить алгоритм решения задачи тепломассопереноса в средах с различной геометрией, а именно обладающей сдвиговой, осевой или центральной симметрией. Отметим, что идея матричного метода может быть использована не только для прикладных расчётов, но и успешно применяется в теоретических работах [7].

Ранее сочетание матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса применялось нами для моделирования процессов переноса в многослойных средах с идеальным контактом. В настоящей работе построено решение задачи теплопроводности при неидеальном контакте, когда в граничных точках слоёв поток тепла непрерывен, а функция температуры терпит разрыв.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное однородное уравнение процесса теплопроводности

$$a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1}$$

Поток направлен по оси x

$$J(x) = -a_1(x)\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Для дальнейшего удобства введём дифференциальные операторы

$$D_1 = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Коэффициенты уравнения (1) имеют вид $a_1(x) = p_s\lambda(x)x^s$,$a_2(x) = c(x)\rho(x)x^{s-1}$, где $\lambda^{(i)}$, $c^{(i)}(x)$, $p^{(i)}(x)$ - соответственно коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность среды на i-м слое. Процессу в среде со сдвиговой симметрией (плоские слои) по оси x соответствует показатель $s = 1$, с осевой симметрией (цилиндрические слои) — показатель $s = 1$, с центральной симметрией (сферические слои) — показатель $s = 2$. Коэффициент p_s для процессов с различными видами симметрии определен формулами $p_0 = 1$, $p_1 = 2\pi$, $p_2 = 4\pi$. С учётом введенных обозначений уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$D_2^{(i)}D_1^{(i)}T^{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

$$J^{(i)} = -D_1^{(i)}T^{(i)}, \quad i = \overline{1,n},$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер слоя.

На границах слоев примем условия согласования третьего типа

$$T^{(i+1)}(x_{i+1},t) - T^{(i)}(x_{i+1},t) = -r^{(i+1)}J^{(i)}(x_{i+1},t), \tag{3}$$

$$J^{(i)}(x_{i+1},t) = J^{(i+1)}(x_{i+1},t), \ \ i = \overline{1,n-1}, \tag{4}$$

где $r^{(i+1)}$ — коэффициент теплообмена в точке x_{i+1} контакта i-го и $(i+1)$-го слоёв.

Пусть задано начальное распределение температуры

$$T^{(i)}(x,0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Поставим первую краевую задачу

$$T^{(1)}(x_1,t) = 0, \quad T^{(n)}(x_{n+1},t) = 0. \tag{6}$$

Решение поставленной задачи будем строить с помощью сочетания метода Фурье, матричного метода и метода обобщённых степеней Берса.

2. Обобщённые степени Берса

Понятие обобщённой степени было введено Л. Берсом [5] в середине XX века.

Пусть в линейном функциональном пространстве функций $f(x)$, определённых и непрерывных на промежутке (a,b) и имеющих на этом промежутке производную, заданы операторы

$$D_1 = a_1(x)\frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{d}{dx}$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ — положительные функции на указанном промежутке. Существуют правые обратные операторы I_1 и I_2:

$$I_1 = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{d\xi}{a_1(\xi)} \cdots, \quad I_2 = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{d\xi}{a_2(\xi)} \cdots$$

Операция присоединения определяется как замена D_1 на D_2 (соответственно I_1 на I_2) и обратно. Это соответствует замене функций $a_1(x)$ и $a_2(x)$ друг на друга. Обозначим эту операцию знаком "$\sim$".

Обобщённые степени Берса с нуль точкой x_1 — это последовательность функций, определённая выражениями:

$$X^{(0)}(x,x_1) = \widetilde{X}^{(0)}(x,x_1) = 1,$$

$$X^{(n)}(x,x_1) = n! \begin{cases} (I_1 I_2)^p \cdot 1, \text{ при } n = 2p \\ I_1 (I_2 I_1)^p \cdot 1, \text{ при } n = 2p+1. \end{cases}$$

$$\widetilde{X}^{(n)}(x,x_1) = n! \begin{cases} (I_2 I_1)^p \cdot 1, \text{ при } n = 2p \\ I_2 (I_1 I_2)^p \cdot 1, \text{ при } n = 2p+1. \end{cases}$$

Имеют место правила дифференцирования

$$D_1 X^{(n)}(x,x_1) = n\widetilde{X}^{(n-1)}(x,x_1), \quad D_2 \widetilde{X}^{(n)}(x,x_1) = nX^{(n-1)}(x,x_1)$$

Л. Берс также ввел принцип соответствия, по которому обычному степенному ряду ряду $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i(x - x_1)^i$ сопоставляется ряд обобщённых степеней вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^{(i)}(x, x_1)$$

На основе принципа соответствия Л. Берсом были введены символы $\cos \mu X(x, x_1)$, $\sin \mu X(x, x_1)$, которым были сопоставлены ряды обобщенных степеней

$$\cos \lambda X(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mu^{2i}}{(2i)!} X^{(2i)}(x, x_1), \tag{7}$$

$$\sin \mu X(x, x_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mu^{2i+1}}{(2i+1)!} X^{(2i+1)}(x, x_1), \tag{8}$$

удовлетворяющие относительно дифференциальных операторов D_1, D_2 правилам, формально аналогичным обычным правилам дифференцирования:

$$D_1 \cos \mu X(x, x_1) = -\mu \sin \mu \widetilde{X}(x, x_1), \quad D_2 \cos \mu \widetilde{X}(x, x_1) = -\mu \sin \mu X(x, x_1),$$

$$D_1 \sin \mu X(x, x_1) = \mu \cos \mu \widetilde{X}(x, x_1), \quad D_2 \sin \mu \widetilde{X}(x, x_1) = \mu \cos \mu X(x, x_1),$$

$$D_2 D_1 \cos \mu X(x, x_1) = -\mu^2 \cos \mu X(x, x_1), \;\; D_2 D_1 \sin \mu X(x, x_1) = -\mu^2 \sin \mu X(x, x_1).$$

3. Построение решения уравнения

Частное решение уравнений (2) ищем в виде

$$T^{(i)}(x, t) = u^{(i)}(x) e^{-\mu^2 t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} u^{(i)}(x) + \mu^2 u^{(i)}(x) = 0, \tag{9}$$

а также условиям третьего типа на контакте слоёв

$$u^{(i+1)}(x_{i+1}) - u^{(i)}(x_{i+1}) = -r^{(i+1)} j^{(i)}(x_{i+1}), \tag{10}$$

$$j^{(i)}(x_{i+1}) = j^{(i+1)}(x_{i+1}), \tag{11}$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1) = 0, \quad u^{(n)}(x_{n+1}) = 0, \tag{12}$$

где $j^{(i)}(x) = -D_1^{(i)} u^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du^{(i)}/dx)$, $i = \overline{1, n}$,

Поставим на каждом слое задачу Коши, то есть зададим значение функции $u^{(i)}(x_i)$ и потока $j^{(i)}(x_i)$ в начальной точке x_i слоя. Тогда решение задачи Коши для уравнения (3) на слое запишем в формализме Берса.

$$u^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\cos\mu X_i(x,x_i) - \frac{1}{\mu}j^{(i)}(x_i)\sin\mu X(x,x_i), \tag{13}$$

$$j^{(i)}(x) = u^{(i)}(x_i)\mu\sin\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) + j^{(i)}(x_i)\cos\mu\widetilde{X}(x,x_i). \tag{14}$$

Далее введём вектор-столбцы $V(x)$ и $V(x_i)$ и матрицу K на каждом слое, а также матрицу контактного сопротивления на границе слоёв R

$$V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x) \\ j^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \quad V^{(i)}(x_i) = \begin{pmatrix} u^{(i)}(x_i) \\ j^{(i)}(x_i) \end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(x,x_i) = \begin{pmatrix} \cos\mu X_i(x,x_i) & -\frac{1}{\mu}\sin\mu X_i(x,x_i) \\ \mu\sin\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) & \cos\mu\widetilde{X}_i(x,x_i) \end{pmatrix}, \quad R^{(i+1)} = \begin{pmatrix} 1 & -r^{(i+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем в матричной форме решение (13)–(14) на i-м слое

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i), \quad x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i = \overline{1,n},$$

а также условия согласования (10)–(11) на контакте слоёв в точке x_{i+1}

$$V^{(i+1)}(x_{i+1}) = R^{(i+1)}V^{(i)}(x_{i+1}), \quad i = \overline{1,n-1}.$$

Отметим, что при постоянных коэффициентах a_1 и a_2 ряды обобщённых степеней (7) и (8) сходятся к известным функциям, через которые, таким образом, могут быть выражены элементы матрицы K при постоянных физических параметрах на слое. В случае плоских слоёв матрица K имеет вид

$$K^{(i)}(x,x_i) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} & -\frac{1}{\mu}\beta^{(i)}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} \\ \mu\beta^{(i)}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} & \cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} \end{pmatrix},$$

в случае осесимметричной среды элементы матрицы K могут быть выражены через функции Бесселя

$$k_{11}^{(i)} = \frac{\pi\mu x_i}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{12}^{(i)} = -\frac{\pi}{2\alpha^{(i)}\beta^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_0\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{21}^{(i)} = \frac{\pi\mu^2\beta^{(i)}x_i x}{2\alpha^{(i)}}\left(J_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - N_1\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

$$k_{22}^{(i)} = \frac{\pi\mu x}{2\alpha^{(i)}}\left(N_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)J_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right) - J_0\left(\frac{\mu x_i}{\alpha^{(i)}}\right)N_1\left(\frac{\mu x}{\alpha^{(i)}}\right)\right),$$

а в случае центральной симметрии среды элементы матрицы K имеют вид

$$k_{11}^{(i)} = \frac{1}{x}\left(x_i\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} + \frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

$$k_{12}^{(i)} = -\frac{1}{\mu\beta^{(i)}x_i x}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}},$$

$$k_{21}^{(i)} = \mu\beta^{(i)}\left(\left(xx_i + \left(\frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\right)^2\right)\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} - \frac{\alpha^{(i)}(x-x_i)}{\mu}\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

$$k_{22}^{(i)} = \frac{1}{x_1}\left(x\cos\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}} - \frac{\alpha^{(i)}}{\mu}\sin\frac{\mu(x-x_i)}{\alpha^{(i)}}\right),$$

где $\alpha^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}(c^{(i)}\rho^{(i)})^{-1}}$, $\beta^{(i)} = \sqrt{\lambda^{(i)}c^{(i)}\rho^{(i)}}$.

Далее начиная с первого слоя и выполняя последовательную подстановку, получим

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_1 \le x \le x_2;$$
$$V^{(2)}(x_2) = R^{(2)}V^{(1)}(x_2) = R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1);$$
$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x,x_2)V^{(2)}(x_2) = K^{(2)}(x,x_2)R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_2 \le x \le x_3;$$
$$...$$
$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i) =$$
$$= K^{(i)}(x,x_i)R^{(i)}K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})R^{(i-1)}...R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x_i \le x \le x_{i+1};$$
$$...$$

Введём обозначение для последовательного произведения матриц K и R

$$K^{(i,1)}(x,x_1) = K^{(i)}(x,x_i)R^{(i)}K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})R^{(i-1)}...R^{(2)}K^{(1)}(x_2,x_1), \quad x_i \le x \le x_{i+1}.$$

Таким образом, в конечной точке системы слоев приходим к системе уравнений

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1},x_1)V^{(1)}(x_1),$$

которая связывает значения функций $u^{(i)}(x)$ и $j^{(i)}(x)$ в граничных точках среды. Подставляя граничные условия (12), получим условие определения собственных значений μ_k

$$k_{12}^{(n,1)} = 0$$

Обозначим $u_k^{(i)}(x)$ базисную функцию, соответствующую собственному значению μ_k. Покажем, что полученные функции ортогональны.

Теорема 1. *Собственные функции $u_k(x)$ и $u_l(x)$ задачи (9)–(12), отвечающие различным собственным значениям μ_k и μ_l, ортогональны с весом $1/a_2(x)$.*

Доказательство. Запишем собственные функции $u_k(x)$ и $u_l(x)$ послойно, то есть $u_k(x) = u_k^{(i)}(x)$ и $u_l(x) = u_l^{(i)}(x)$ при $x_i \le x \le x_{i+1}$. Также на каждом слое обозначим $j_k^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du_k^{(i)}/dx)$, $j_l^{(i)}(x) = -a_1^{(i)}(x)(du_l^{(i)}/dx)$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим тождества

$$\frac{d}{dx}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x) - u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right) = u_l^{(i)}(x)\frac{dj_k^{(i)}}{dx} - u_k^{(i)}(x)\frac{dj_l^{(i)}}{dx}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Так как $u_k^{(i)}(x)$ и $u_l^{(i)}(x)$ — решения уравнений (9), а значит, удовлетворяют равенствам

$$\frac{dj_k^{(i)}}{dx} = \frac{\mu_k^2 u_k^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)}, \quad \frac{dj_l^{(i)}}{dx} = \frac{\mu_l^2 u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)},$$

то перепишем (15) в виде

$$\frac{d}{dx}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x) - u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right) = (\mu_k^2 - \mu_l^2)\frac{u_k^{(i)}(x)u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)}.$$

Тогда

$$(\mu_k^2 - \mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx = (\mu_k^2 - \mu_l^2)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{u_k^{(i)}(x)u_l^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)}dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} d\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x) - u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(u_l^{(i)}(x)j_k^{(i)}(x) - u_k^{(i)}(x)j_l^{(i)}(x)\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

В последней сумме после подстановки пределов интегрирования сгруппируем слагаемые относительно $j_k^{(i)}(x)$ и $j_l^{(i)}(x)$, после чего получим

$$(\mu_k^2 - \mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx = u_l^{(1)}(x_1)j_k^{(1)}(x_1) - u_k^{(1)}(x_1)j_l^{(1)}(x_1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(u_k^{(i)}(x_{i+1}) - u_k^{(i+1)}(x_{i+1})\right)j_l^{(i)}(x_{i+1}) + \left(u_l^{(i+1)}(x_{i+1}) - u_l^{(i)}(x_{i+1})\right)j_k^{(i)}(x_{i+1})\right] +$$

$$+ u_k^{(n)}(x_{n+1})j_l^{(n)}(x_{n+1}) - u_l^{(n)}(x_{n+1})j_k^{(n)}(x_{n+1}).$$

После подстановки в последнюю формулу граничных условий (12) исчезают первые два и последние два слагаемых, а подстановка условий согласования в точках контакта слоёв (10)–(11) приводит оставшиеся слагаемые к виду

$$(\mu_k^2 - \mu_l^2)\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(r^{(i+1)}j_k^{(i)}(x_{i+1})j_l^{(i)}(x_{i+1}) - r^{(i+1)}j_l^{(i)}(x_{i+1})j_k^{(i)}(x_{i+1})\right) = 0.$$

Так как $\mu_k \neq \mu_l$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_{n+1}} \frac{u_k(x)u_l(x)}{a_2(x)}dx = 0,$$

следовательно, собственные функции ортогональны с весом $1/a_2(x)$. $\square$

При $\mu_k = \mu_l$ скалярное произведение собственных функций дает квадрат нормы

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a_2^{(i)}(x)} \left(u_k^{(i)}(x)\right)^2 dx.$$

Коэффициенты в разложении Фурье имеют вид

$$c_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \frac{u_k^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)} dx.$$

Таким образом, получаем решение поставленной задачи (2)–(6)

$$T^{(i)}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{u_k^{(i)}(x)}{N_k} e^{-\mu_k^2 t}.$$

Заключение

В работе построено аналитическое решение первой краевой задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом на границах слоёв. Метод построения основан на совместном применении метода Фурье, метода обобщенных степеней Берса и матричного метода, что позволило получить единую аналитическую форму решения для среды, обладающей различными видами симметрии (сдвиговой, осевой или центральной). Показана ортогональность собственных функций, отвечающих различным собственным значениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271).

Список литературы

1. CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C. (1959) *Conduction of Heat in Solids.* Oxford: Oxford University Press.

2. Степович, М. А., Калманович, В. В., Серегина, Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой

структуре // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №5. — С. 700–703.

STEPOVICH, M. A., KALMANOVICH, V. V. & SEREGINA, E. V. (2020) Possibility of applying the matrix method to modeling the cathodoluminscescence caused by a wide electron beam in a planar multilayer semiconductor structures. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84(5). p. 576–579.

3. Калманович, В. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2020. — Т. 84. — №7. — С. 1020–1026.

   KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V. & STEPOVICH, M. A., (2020) Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena caused by interaction between electron beams and planar semiconductor multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics.* 84 (7). p. 844–850.

4. KALMANOVICH, V. V., KARTANOV, A. A. & STEPOVICH, M. A. (2021) On some problems of modelling the non-stationary heat conductivity process in an axisymmetric multilayer medium. *Journal of Physics: Conference Series.* 1902. p. 6012073.

5. BERS, L. & GELBART, A. (1944) On a class of functions defined by partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society.* 56. p. 67–93.

6. Гладышев, Ю. А. О последовательности обобщенных степеней Берса с внутренней структурой // Математические заметки. — 1994. — Т. 55. — №3. — С. 21–34.

   GLADYSHEV, Yu A. (1994) On a sequence of generalized Bers exponential functions with inte-rior structure Mathematical Notes. *Mathematical Notes.* 55 (3). p. 251–261.

7. Голубков, А. А. Краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочноцелым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 1005–1027.

   GOLUBKOV, A. A. (2019) A boundary value problem for the Sturm-Liouville equation with piecewise entire potential on the curve and solution discontinuity conditions. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 16. p. 1005-1027.

УДК: 517.977
MSC2010: 93B05

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СМЕНОЙ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

© И. С. Максимова

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Математический институт им. С. М. Никольского
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Российская Федерация
e-mail: *irismax@yandex.ru*

Controllability of the nonlinear systems with phase space change.

Maximova I. S.

Abstract.

The problems with changing phase space are a subclass of the so-called hybrid (composite) systems. They are characterized by the fact that at different time intervals they are described by different differential systems and certain links for the connection of the trajectories. The systems can have the similar dimensionality and also the transfer both from the dimension with the higher dimensionality to the lower dimensionality and vice versa. The original source of such problems were the multistage processes of space flights.

This work researches the task of controllability of the object, described by the predetermined system, from the initial set of one dimension to the predetermined set of another dimension through the null point. The transfer of the object from one dimension to another dimension is giver by certain mapping.

Thus, in the first space, the movement of an object is described by the so-called triangular systems. Triangular systems are one of the most important classes of nonlinear systems that allow mapping to linear systems. In the second space, the movement of the object is described by a nonlinear system with control actions of a special kind. The control action has a special structure due to physical applications.

For the problem in which the nonlinear triangular system in the initial space is fully controllable and the nonlinear system in the second space is locally null-controlled the sufficient controllability conditions are achieved. Both nonlinear systems have physical applications. Taking into account the applicative manner of the given problem the results achieved in this work are of both theoretical and practical significance.

Keywords: *controllability, local controllability, phase space change, triangular system, full controllability.*

Введение

Задачи со сменой фазового пространства являются подклассом так называемых гибридных (составных) систем и характеризуются тем, что на разных интервалах времени описываются разными дифференциальными системами и некоторыми связями для стыковки траекторий. Первоначальным источником таких задач послужили многостадийные процессы космического полета (см. [1]).

Задачи со сменой фазового пространства встречаются в различных прикладных задачах авиастроения, робототехники, экономики и др. Например, задача запуска ракеты с подводного объекта - в данном случае размерность пространства не изменяется, но меняется среда и условия движения.

Задачами оптимального управления составными системами в разное время занимались, например, В. Г. Болтянский, Л. Т. Ащепков, В. Н. Розова (см. [2]–[5] соответственно).

Во многих работах, посвященных задачам подобного рода, изучается в основном вопрос оптимизации. Меж тем во всех типичных теоремах существования оптимального управления предполагается существование хотя бы одного допустимого управления, порождающего траекторию, удовлетворяющую заданным краевым условиям, например, управления, переводящего траекторию из одного заданного положения в другое. Последняя задача и составляет сущность проблемы упавляемости. Таким образом, проблема управляемости является важной и актуальной при решении задач оптимального управления.

Условия управляемости для составных систем получены В. Р. Баргсегяном в работе [6], но лишь в линейном случае.

Вопрос управляемости для некоторых классов нелинейных систем со сменой фазового пространства изучался автором в работах [7] и [8]. Но постанока задачи, рассмотренная в настоящей работе, является новой. Подобное сочетание диффереციальных нелинейных систем ранее не изучалось.

Так в первом пространстве движение объекта описывается так называемыми треугольными системами. Треугольные системы - один из важнейших классов нелинейных систем, допускающих отображение на линейные системы. Этот класс систем описывает ряд физических процессов (ориентацию спутника на орбите, управление роботом-манипулятором и другие). Класс треугольных систем был введен и впервые рассмотрен В. И. Коробовым в 1973 году (см. [9], стр. 615).

Во втором пространстве движение объекта описывается нелинейной системой с управляющими воздействиями специального вида. Управляющее воздействие имеет специальную структуру, обусловленную физическими приложениями. Например, подобные управляющие воздействия возникают в задачах о посадке самолета в условиях ветрового возмущения, об изменении угла наклона плоскости круговой орбиты спутника (см. [10]).

Принимая во внимание прикладной характер поставленной задачи, результаты, полученные в настоящей работе, представляют как теоретический, так и практический интерес.

1. Постановка задачи

В фазовых пространствах $X = R^n$, $Y = R^m$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ движение объекта описывается нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, v), \end{cases} \tag{1}$$

где $v \in R$, $t \in [0, \tau]$, $x(t) \in X$,

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{2}$$

где $f(y) \in C^1(R^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $t \in [\tau, T]$, $y(t) \in Y$, $B(t)$ - матрица размера $m \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\phi_1(t) + B_2\phi_2(t).$$

Функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ являются четными.

Моменты времени τ и T заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in R^r | \ u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset R^r\}$, $0 \in int\Omega$. Здесь $int\Omega$ — внутренность множества Ω.

Функции $f(y)$, $g_i(x_1, \ldots, x_i)$, $i = \overline{1, n}$ таковы, что решение задачи Коши для систем (1) и (2) существует и единственно.

Будем использовать схему движения управляемого объекта с переходом системы через ноль. Опишем эту схему подробно.

В пространстве X задано некоторое начальное множество M_0, в пространстве Y задано конечное множество M_1. На отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется по закону (1) из начального множества M_0, в момент времени τ он попадает в точку ноль.

Далее происходит переход в пространство Y, заданный некоторым отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (2). Причем $q(x(\tau)) \notin M_1$ (если $q(x(\tau)) \in M_1$, то задача решена).

Задача: найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), будет управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y.

Определение 1. Объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1, если существуют такие допустимые управления v и $u(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) = 0$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$. (см. [7] стр. 742)

Для решения поставленной задачи будем использовать следующий подход. Пусть при выполнении некоторых условий, объект, описываемый системой (1) является полностью управляемым. Тогда найдется допустимое управление, переводящее объект из заданного начального множества M_0 в ноль простраства X по решениям системы (1) на отрезке времени $[0, \tau]$. Далее осуществим переход в пространство Y, заданный отображением $q : X \to Y$, причем $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau) = 0$. Причем $0 \notin M_1$. В пространстве Y при некоторых условиях объект, описываемый системой (2) является локально нуль-управляемым. Если конечное заданное множество M_1 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, то по определению локальной управляемости мы имеем возможность попасть из нуля в M_1.

Рассморим данный подход к исследованию более подробно, при этом разобьем задачу на две подзадачи:

1. управляемость нелинейных систем в пространсте X;
2. локальная нуль-управляемость нелинейных систем в пространсте Y.

2. Управляемость нелинейных систем в пространсте X

В данной главе рассмотрим условия управляемости треугольных систем.

В пространстве X переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, v), \end{cases} \tag{3}$$

где $v \in R, \quad t \in [0,\tau], \quad x \in R^n = X$.

Рассмотрим следующую задачу управляемости - выбрать управление v таким образом, чтобы попасть из множества M_0 в ноль в пространстве X по решениям системы (3). В главе 3 будет приведен пример, в котором будет дан способ выбора управления, решающего поставленную задачу.

Обозначим v через x_{n+1} и сформулируем теорему об управляемости (см. [11] стр. 258):

Теорема 1. *Пусть в системе (3) функции* $g_i(x_1,\ldots,x_{i+1}), \quad i = 1,\ldots,n,$ *имеют непрерывные частные производные до* $(n-i+1)$ *- го порядка включительно и пусть*

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geq b > 0, \quad i = 1,\ldots,n \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad x_1,\ldots,x_{n+1}, \tag{4}$$

где b *- постоянная, не зависящая от* $x_1,\ldots,x_{n+1}$. *Тогда система (3) полностью управляема за время* τ.

Определение 2. Объект, описываемый системой (3), называется полностью управляемым на отрезке $[0,\tau]$, если для любых $x_0, x_1 \in R^n$ найдется допустимое управление $v(t) \in V$ на $[0,\tau]$, переводящее систему (3) из состояния x_0 в момент времени 0 в состояние x_1 в момент времени τ.

При выполнении условий данной теоремы, система (3) полностью управляема за время τ, тогда по определению полной управляемости, найдется допустимое управление, переводящее объект из заданного начального множества M_0 в ноль простраства X по решениям системы (3) на отрезке времени $[0,\tau]$, тем самым осуществляется искомый переход системы (3) из множества M_0 в ноль в пространстве X.

Далее осуществим переход в пространство Y, заданный отображением $q : X \to Y$, причем $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau) = 0$. И продолжим исследование в пространстве Y.

3. Локальная нуль-управляемость нелинейных систем в пространсте Y

В данной главе рассмотрим условия локальной нуль-управляемости для нелинейной системы специального вида.

В пространстве $Y = R^m$ рассмотрим управляемую систему:

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{5}$$

где $f(y) \in C^1(R^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $y \in R^m$, $t \in [\tau, T]$.

$B(t)$ - матрица размера $m \times r$ вида: $B(t) = B_1\phi_1(t) + B_2\phi_2(t)$. Функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ являются четными.

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in R^r | u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset R^r\}$, $0 \in int\Omega$.

Задача: Найти условия локальной нуль-управляемости системы (5) на $[\tau, T]$ и выразить их через элементы матриц A, B_1 и B_2, где

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0.$$

Обозначим через $S_\epsilon(0)$ открытый шар радиуса ϵ с центром в точке 0.

Определение 3. (см. [12] стр. 111) Управляемый объект, описываемый системой (5), называется локально нуль-управляемым на отрезке времени $[\tau, T]$, если существует $\epsilon > 0$ такое, что для любой точки $y_0 \in S_\epsilon(0)$ объект является управляемым на отрезке $[\tau, T]$ из начального положения y_0 на конечное множество $M = 0$. Это означает, что для любой точки $y_0 \in S_\epsilon(0)$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее этому управлению решение $y(t)$ системы (5) перейдет из точки y_0 в нуль на отрезке времени $[\tau, T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения на $f(y)$, $B(t)$ и $u(t)$ и на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где*

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), ...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда система (5) локально нуль – управляема на отрезке $[\tau, T]$.

Доказательстводанной теоремы подробно приведено в [8].

Таким образом, при выполении условий теоремы 1 объект, описываемый системой (5), локально нуль – управляем на $[\tau, T]$. Если множество M_1 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, тогда при выполнении условий теоремы 1 и в силу локальной управляемости системы (5) объект попадает из нуля в множество M_1. При этом мы воспользумся свойством автономности системы (5) и, рассматривая движение объекта "в обратном времени" , т.е. рассматривая систему $\dot{y} = -f(y) - B(t)u$, выберем управление таким образом, что соответствующая ему траектория соединит точку нуль с точкой из заданного множества M_1.

Учитывая результаты глав 2 и 3, условия управляемости для исходной задачи, можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть функции $g_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ - го порядка включительно и*

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geq b > 0, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad x_1, \ldots, x_{n+1},$$

где b - постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Пусть выполнены все предположения на $f(y)$, $B(t)$ и $u(t)$. Также на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), ...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда объект, описываемый системами (1) и (2), является управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0, T]$.

4. Пример

Пусть в пространстве $X = R^3$ переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ движение объекта описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -15x_1^7 - 15x_1^4x_2 + v, \end{cases} \tag{6}$$

где $v \in R$, $\quad t \in [0, 1]$.

Задана начальная точка $x_0 = (1, -2, -1)$ и конечная точка $x_1 = (0, 0, 0)$. Также в пространстве X задано отображение q, с помощью которого осуществляется переход объекта из пространства X в пространство Y: $q(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$, причем $q(0, 0, 0) = (0, 0)$.

В пространстве $Y = R^2$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1^2 - y_2 + t \sin tu_1, \\ \dot{y}_2(t) = y_2^2 - y_1 + \cos tu_2, \end{cases} \tag{7}$$

где $t \in [1, 5]$, $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in R^2 | u(\cdot) \in L_\infty[1, 5]; u(t) \in \Omega \subset R^2\}$, $0 \in int\Omega$.

В пространстве $Y = R^2$ задано конечное множество $M_1 = (1, 1)$.

Задача: Исследовать, является ли объект, описываемый системами (6) и (7) управляемым из точки x_0 пространства $X = R^3$ на множество M_1 пространства $Y = R^2$ на отрезке $[0, 5]$.

Решение:

Рассмотрим сначала задачу управляемости из точки $x_0 = (1, -2, -1)$ в точку $x_1 = (0, 0, 0)$ за время $T = 1$ в пространстве X:

Система (6) является системой треугольного вида и с помощью замены переменных

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_1^3 + x_2, \\ z_3 = 3x_1^5 + x_3 \end{cases} \tag{8}$$

приводится к линейной системе:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = v. \end{cases} \tag{9}$$

Управление $v(t)$ выберем таким образом, чтобы за время $T = 1$ попасть из точки $z_0 = (1, -1, 1)$ в точку $z_1 = z(1) = (0, 0, 0)$. Т.о. управление $v(t)$ имеет вид:

$$v(t) = -b_0^T e^{-A_0^T t} W_0^{-1} z_0,$$

где W_0^{-1}- матрица обратная к матрице

$$W_0 = \int\limits_0^1 e^{-A_0 \tau} b_0 b_0^T e^{-A_0^T \tau} d\tau.$$

Выбранное управление $v(t)$, переводящее точку $x_0 = (1, -2, -1)$ в точку $x_1 = (0, 0, 0)$ в силу системы (6), совпадает с управлением, переводящим точку $z_0 = (1, -1, 1)$ в точку $z_1 = (0, 0, 0)$ в силу системы (9).

Итак, получаем:

$$W_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_0^{-1} = \begin{pmatrix} 720 & 360 & 60 \\ 360 & 192 & 36 \\ 60 & 36 & 9 \end{pmatrix}$$

и управление $v(t)$ примет вид

$$v(t) = -210t^2 + 204t - 33.$$

Таким образом, траектории системы (9), соединяющие точки

$$z_0 = (1, -1, 1) \quad \text{и} \quad z_1 = (0, 0, 0),$$

имеют вид:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2}, \\ z_2 = -\frac{35t^4}{2} + 34t^3 - \frac{33t^2}{2}, \\ z_3 = -70t^3 + 102t^2 - 33t. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда, используя замену (8) и (10) получаем, что траектории системы (6) соединяющие точки $x_0 = (1, -2, -1)$ и $x_1 = (0, 0, 0)$, имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2}, \\ x_2 = -\frac{35t^4}{2} + 34t^3 - \frac{33t^2}{2} - (-\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2})^3, \\ x_3 = -70t^3 + 102t^2 - 33t - 3(-\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2})^5. \end{cases} \tag{11}$$

Т. о. управление $v(t) = -210t^2 + 204t - 33$ перводит объект, описываемый системой (6) по траекториям (11) из точки $x_0 = (1, -2, -1)$ в точку $x_1 = (0, 0, 0)$.

Далее осуществим переход в постранство $Y = R^2$ и исследуем локальную нуль-управляемость системы (7).

Возьмем в качестве точки t^* точку $t = \frac{\pi}{2}$. Тогда ранг матрицы

$$L(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} + 1 & 2 \end{pmatrix}$$

равен двум и по теореме 2 система (7) является локально нуль-управляемой на отрезке [1, 5].

В силу того, что конечное множество M_1 имеет непустое пересечение с окрестностью локальной нуль-управляемости и учитывая автономность системы (7), рассмотрев движение объекта "в обратном времени", найдется допустимое управление, что соответствующая ему траектория, соединит точку нуль и множество M_1.

Заключение

В работе исследована управляемая дифференциальная система следующей структуры. На двух интервалах времени заданы две нелинейные системы, каждая из которых имеет прикладное значение, и отображение, задающее переход из одного пространства в другое. Для задачи изучена проблема управляемости и получены достаточные условия управляемости заданной системы из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства. Данный класс составных систем ранее не рассматривался. Также в работе рассмотрен пример, иллюстрирующий данный подход к исследованию.

В силу того, что поставленная задача имеет прикладной характер, планируется ее дальнейшее развитие, т.е. рассмотрение других классов нелинейных систем, а также различных вариантов движения объекта.

Список литературы

1. Величенко В. В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями / В. В. Величенко // Автоматика и телемеханика. — 1966. — №. 7. — С. 20–23.

   VELICHENKO, V. V. (1966) On optimal control problems for equations with discoutinuous right sides. *Automation and telemechanics.* 7. p. 20–30.

2. Болтянский В. Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства / В. Г. Болтянский // Дифференциальные уравнения. — 1966. — Т. XIX, №3. — С. 518–521.

   BOLTAYNSKIY, V. G. (1983) Optimization problem with phase space change. *Differential equations.* Vol. XIX (3). p. 518–521.

3. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями / Л. Т. Ащепков // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, вып. 2. — С. 215–222.

   ASHEPKOV, L. T. (1981) Optimal system control with intermediate conditions. *Applied mathematics and mechanics.* Vol 45 (2). p. 215–222.

4. Медведев В. А., Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. А. Медведев, В. Н. Розова // Автоматика и телемеханика. — 1972. — №3. — С. 27–32.

   MEDVEDEV, V. A. and ROZOVA, V. N. (1972) Optimal control of step systems. *Automation and telemechanics.* 3. p. 27–32.

5. Розова В. Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. Н. Розова // Вестник РУДН. Серия: физико-математические науки. — 2006. — №3. — С. 15–23.

   ROZOVA, V. N. (2006) Optimal control of step systems. *RUDN Reports. Series: Natural and Technical Sciences.* 3. p. 15–23.

6. Барсегян В. Р. Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами / В. Р. Барсегян // Проблемы управления. — 2012. — №4. — С. 11–17.

   BARGSEGAYN, V. R. (2012) Constructive approach to the study of control problems of linear composite systems. *Control problems.* Vol. 4. p. 11–17.

7. Максимова И. С., Розова В. Н. Достаточные условия упраляемости в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник ТГУ, Серия естественные и технические науки. — 2012. — Т. 3. — С. 742–747.

   MAKSIMOVA, I. S. and ROZOVA, V. N. (2011) The sufficient conditions for controllability in the problem with phase space change. *Tambov University Reports, Series: Natural and Technical Sciences.* Vol. 3 . p. 742–747.

8. Максимова И. С., Розова В. Н. Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник РУДН. Серия МИФ. — 2017. — Т. 25, №4. — С. 331–338.

   MAKSIMOVA, I. S. and ROZOVA, V. N. (2017) *Local controllability in the problem with phase space change.* RUDN Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Vol. 25.4331–338

9. Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем / В. И. Коробов // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. IX, №4. — С. 614–619.

   KOROBOV, V. I. (1973) *Controllability, stability of non-linear systems.* Differential equations. Vol. IX.4614–619

10. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов / Е. В. Тарасов. — М.: Оборонгиз, 1963. — 248 с.

    TARASOV, E. V. (1963) *Optimal flight modes of aircraft.* Moscow.

11. Коробов В. И. Метод функции управляемости / М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", Институт компьютерных исследований. — В. И. Коробов, 2007. — 567 с.

KOROBOV, V. I. (2007) *Metod of the controllability function.* M. —Izhevsk. Institute for computer research.

12. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление (линейная теория) / В. И. Благодатских. — М.: Высшая школа, 2001. — 239 с.

    BLAGODATSKIKH, V. I. (2001) *Introduction to Optimal Control.* Moscow: Vysshaya Shkola.

УДК: 517.927.4
MSC2010: 34B27 **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-2-65-87**

ОБ АНТИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $2 < q < 3$[1]

© Г. Г. Петросян

Воронежский государственный университет инженерных технологий
Научно-образовательный центр
просп. Революции, 19, Воронеж, 394036, Российская Федерация
e-mail: *garikpetrosyan@yandex.ru*

On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of a fractional order $2 < q < 3$.

Petrosyan G. G.

Abstract. The investigation of control systems with nonlinear units forms a complicated and very important part of contemporary mathematical control theory and harmonic analysis, which has numerous applications and attracts the attention of a number of researchers around the world. In turn, the development of the theory of differential inclusions is associated with the fact that they provide a convenient and natural tool for describing control systems of various classes, systems with discontinuous characteristics, which are studied in various branches of the optimal control theory, mathematical physics, radio physics, acoustics etc. One of the best approaches to the study of this kind of problems is provided by the methods of multivalued and nonlinear analysis, which are distinguished as very powerful, effective and useful. However, the solving of these problems within the frameworks of existing theories is often a very difficult problem, since many of them find sufficiently adequate description in terms of differential equations and inclusions with fractional derivatives. The theory of differential equations of fractional order originates from the ideas of Leibniz and Euler, but only by the end of the XX century, interest in this topic increased significantly. In the 70s - 80s, this direction was greatly developed by the works of A. A. Kilbas, S. G. Samko, O. I. Marichev, I. Podlubny, K. S. Miller, B. Ross, R. Hilfer, F. Mainardi, H. M. Srivastava. Notice that the research in this direction will open up prospects and new opportunities for the studying of non-standard systems that specialists encounter while describing the development of physical and chemical processes in porous, rarefied and fractal media. It is known that a periodic boundary value problem is one of the classical boundary value problems of differential equations and inclusions. At the same time, in recent years, along with periodic boundary value problems, antiperiodic boundary value problems are of great interest due to their applications in physics and interpolation problems.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

In this paper, we study an antiperiodic boundary value problem for semilinear differential inclusions with Caputo fractional derivative of order $2 < q < 3$ in Banach spaces. We assume that the nonlinear part is a multivalued map obeying the conditions of the Caratheodory type, boundedness on bounded sets, and the regularity condition expressed in terms of measures of noncompactness. In the first section, we present a necessary information from fractional analysis, Mittag – Leffler function, theory of measures of noncompactness, and multivalued condensing maps. In the second section, we construct the Green's function for the given problem, then, we introduce into consideration a resolving multivalued integral operator in the space of continuous functions. The solutions to the boundary value problem are fixed points of the resolving multioperator. Therefore, we use a generalization of Sadovskii type theorem to prove their existence. Then, we first prove that the resolving multioperator is upper semicontinuous and condensing with respect to the two-component measure of noncompactness in the space of continuous functions. In a proof of a main theorem of the paper, we show that a resolving multioperator transforms a closed ball into itself. Thus, we obtain that the resolving multioperator obeys all the conditions of the fixed point theorem and we prove the existence of solutions to the antiperiodic boundary value problem.

Keywords: *differential inclusion, fractional derivative, antiperiodic boundary value problem, Green function, measure of noncompactness, fixed point, condensing multimap.*

Введение

В последние десятилетия значительное развитие получила теория дробного анализа и дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. Интерес к этой тематике усилился не случайно, так как данная теория имеет многочленные приложения в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [1]–[5]). На данный момент разработаны различные подходы к разрешимости дифференциальных уравнений и краевых задач для них, в случае дробного порядка $q \in (0, 1)$ (см. статьи [6]–[9] и имеющиеся в них ссылки). В последнее время активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $q > 1$.

В тоже время в последние годы на ряду с периодическими краевыми задачами большой интерес представляют антипериодические краевые задачи благодаря приложениям в физике и в интерполяционных задачах (см., например, работы [10]–[12] и имеющиеся в них ссылки). Опишем кратко некоторые уже полученные результаты в этом направлении исследований. В работе [13] авторы с помощью теории степени Лере–Шаудера и метода функции Грина, доказывают существование решений для краевой антипериодической задачи вида

$$ {}^{C}D^{q}x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, T], $$

$$ x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T), $$

где символом ${}^{C}D^{q}$ – обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (1, 2)$ и $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. В статье [14] авторы на основе метода функции Грина и теоремы Красносельского–Крейна о неподвижной точке разрешили следующую краевую задачу

$$ {}^{C}D^{q}x(t) = f(t, x(t)),\ t \in [0, T], $$

$$ x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),\, x''(0) = -x''(T),\, x'''(0) = -x'''(T), $$

для случая дробного порядка $q \in (3, 4)$ и непрерывной функции $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В работе [15] исследовалась разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E краевой задачи для полулинейного дифференциального уравнения дробного порядка следующего вида

$$ {}^{C}D^{q}x(t) = \lambda x(t) + f(t, x(t)),\ t \in [0, T], $$

с граничным антипериодическим условием

$$ x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T), $$

где дробная производная Капуто порядка $q \in (1, 2)$, число $\lambda > 0$, $f \colon [0, T] \times E \to E$ – нелинейное отображение.

В настоящей статье мы исследуем разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве E антипериодической краевой задачи для полулинейного дифференциального включения дробного порядка следующего вида

$$ {}^{C}D^{q}x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)),\ t \in [0, T], \tag{1} $$

$$ x(0) = -x(T),\, x'(0) = -x'(T),\, x''(0) = -x''(T) \tag{2} $$

где ${}^{C}D^{q}$ – дробная производная Капуто порядка $q \in (2, 3)$, число $\lambda > 0$, $F \colon [0, T] \times E \multimap E$ – нелинейное многозначное отображение.

1. Предварительные сведения

1.1. **Дробный анализ.** Вначале приведем необходимые базовые сведения из дробного анализа (см. монографии [3, 4]).

Определение 1. Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ называется функция $I^q g$ следующего вида:

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ – это гамма-функция Эйлера.

Отметим, что для гамма-функции Эйлера имеет место свойство (см., например, [4]):

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0, \text{ для } q = 0, -1, -2, \ldots. \tag{3}$$

Определение 2. Дробной производной Капуто порядка $q \geq 0$ функции $g \in C^n([0,T])$ называется функция ${}^C D^q g$ следующего вида:

$${}^C D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int\limits_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [q]+1.$$

Важное значение в дробном анализе имеет функция Миттаг–Лефлера.

Определение 3. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn+\beta)}, \quad q > 0, \ \beta \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C},$$

называется функцией Миттаг–Леффлера.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного дифференциального уравнения дробного порядка $2 < q < 3$:

$${}^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$x(0) = c_1, \ x'(0) = c_2, \ x''(0) = c_3, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Единственным решением (см. [3]) данной задачи является функция

$$x(t) = c_1 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждения (см. [1])

$$E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \tag{7}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\beta-1}E_{q,\beta}(\lambda t^q)) = t^{\beta-n-1}E_{q,\beta-n}(\lambda t^q), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^z t^{\beta-1}E_{q,\beta}(\lambda t^q)dt = z^\beta E_{q,\beta+1}(\lambda z^q), \tag{9}$$

Лемма 1. *(см. [16]) Для функции $f \in L^\infty([0,T];E)$ и $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, справедливо равенство*

$$\Big(\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda(t-s)^\alpha)f(s)\,ds\Big)'_t = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\beta-1}(\lambda(t-s)^\alpha)f(s)\,ds.$$

1.2. **Меры некомпактности и уплотняющие мультиотображения.** Пусть $\mathscr{E}$ банахово пространство. Введем следующие обозначения:

- $P(\mathscr{E}) = \{A \subseteq \mathscr{E} : A \neq \varnothing\}$;
- $Pb(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A -$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A -$ выпукло$\}$;
- $K(\mathscr{E}) = \{A \in Pb(\mathscr{E}) : A -$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathscr{E}) = Pv(\mathscr{E}) \cap K(\mathscr{E})$.

Определение 4. (См., например, [17, 18]). Пусть $(\mathscr{A}, \geq)$ частично–упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathscr{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ выполняется $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathscr{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathscr{A}$ конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

4) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$;
5) *вещественной,* если $\mathscr{A}$ подмножество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком;
6) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathscr{E}\}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству полуоднородности $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$. Более того, если $\mathscr{L} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ – линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathscr{L}(\Omega)) \leq \|\mathscr{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$.

Норма множества $M \in Pb(\mathscr{E})$ определяется по формуле $\|M\| = \sup_{x\in M} \|x\|_{\mathscr{E}}$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [17, 18].

Определение 5. Пусть X – метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathscr{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathscr{F}(x) \subset V\}$ – открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$,

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathscr{F}} = \{(x, y) : y \in \mathscr{F}(x)\}$ – замкнутое подмножество $X \times \mathscr{E}$,

(iii) *компактным*, если $\mathscr{F}(X)$ – относительно компактно в $\mathscr{E}$,

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 2. *Пусть X и Y – метрические пространства и $\mathscr{F} : X \to K(Y)$ – замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathscr{F}$ – п.н.с.*

Определение 6. Мультиотображение $\mathscr{F} : X \subseteq \mathscr{E} \to K(\mathscr{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (β - уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным выполнено $\beta(\mathscr{F}(\Omega)) \not\geq \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [17]).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \mathscr{M} \to Kv(\mathscr{M})$ – замкнутое β - уплотняющее мультиотображение, где β – несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$. Тогда множество неподвижных точек $\mathscr{F}$: $\mathrm{Fix}\,\mathscr{F} := \{x : x \in \mathscr{F}(x)\}$ – непустое множество.*

1.3. **Измеримые мультифункции.** Напомним некоторые понятия (см., например, [17, 18]). Пусть E – банахово пространство.

Определение 7. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$, для $p \geq 1$, называется:

•L^p *-интегрируемой*, если она допускает L^p - интегрируемое сечение по Бохнеру, т.е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;

•L^p -*интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что:

$$\|G(t)\| := sup\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq \xi(t)$$

для п. в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p - интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается $\mathscr{S}_G^p$.

Определение 8. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$, $p \geq 1$, называется L^p-полукомпактной, если она L^p-интегрально ограничена, то есть

$$\|\xi_n(t)\|_E \leq v(t) \,\text{для всех}\, n = 1, 2, ..., \text{ и п.в.}\, t \in [0,T],$$

где $v \in L_+^p([0,T])$ и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0,T]$.

Определение 9. Мультифункция G называется измеримой, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется сильно измеримой, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что:

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{H}(G_n(t), G(t)) = 0,$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где $\mathscr{H}$ – хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E, понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p - интегрально ограничена, то она L^p - интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathscr{S}_G^p \right\},$$

для любого $t \in [0,T]$.

Лемма 3. *(см. [17], Теорема 4.2.3.) Пусть E – сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ L^p - интегрируемая и L^p - интегрально ограниченная мультифункция такая, что*

$$\chi(G(t)) \leq q(t),$$

для п. в. $t \in [0,T]$, где $q \in L_+^p([0,T])$. Тогда

$$\chi(\int_0^t G(s)ds) \leq \int_0^t q(s)ds,$$

для всех $t \in [0,T]$. *В частности, если мультифункция* $G : [0,T] \to K(E)$ *измерима и* L^p *- интегрально ограничена, то функция* $\chi(G(\cdot))$ *интегрируема, причем:*

$$\chi(\int\limits_0^t G(s)ds) \leq \int\limits_0^t \chi(G(s))ds,\ t \in [0,T].$$

Лемма 4. *(см. [17], Теорема 4.2.1.) Пусть последовательность функций* $\{\xi_n\} \subset L^1([0,T];E)$, *для всех* $n = 1,2,...$ *и п. в.* $t \in [0,T]$, *является* L^1*- интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\chi(\{\xi_n(t)\}) \leq \alpha(t),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, *где* $\alpha \in L^1_+([0,T])$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует компактное множество* $K_\delta \subset E$ *и множество* $m_\delta \subset [0,T]$, *с лебеговой мерой* $m_\delta < \delta$, *а также множество функций* $G_\delta \subset L^1([0,T];E)$ *со значениями в* K_δ, *такие, что для каждого* $n \geq 1$ *существует функция* $b_n \in G_\delta$, *для которой*

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2\alpha(t) + \delta, \qquad t \in [0,T]\backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ *может быть выбрана так, что* $b_n \equiv 0$ *на* m_δ *и эта последовательность слабо компактна.*

2. Полученные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу (4)–(5):

$$^C D^q x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad 2 < q < 3,$$

$$x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2,\ x''(0) = c_3$$

где $f : [0,T] \to E$.

Определение 10. Решением краевой задачи (4)–(5) называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) = c_1 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + c_3 t^2 E_{q,3}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Лемма 5. *Пусть* $f \in C([0,T];E)$ *и*

$$v := (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^3 + E^2_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q) E^2_{q,2}(\lambda T^q) -$$
$$E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - 2E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) \neq 0. \quad (10)$$

Тогда краевая задача (4), (2) имеет единственное решение $x(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds$, *где функция Грина* $G(t,s)$ *имеет следующий вид*

$$G(t,s) = \begin{cases} v^{-1}\Big[v_1(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_2T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_3T^2(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]E_{q,1}(\lambda t^q)+ \\ v^{-1}\Big[v_4T^{-1}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_5(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_2T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q)+ \\ v^{-1}\Big[v_6T^{-2}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_4T^{-1}(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_1(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+ \\ (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), \qquad 0 \le s \le t < T, \\ \\ v^{-1}\Big[v_1(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_2T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_3T^2(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]E_{q,1}(\lambda t^q)+ \\ v^{-1}\Big[v_4T^{-1}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_5(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_2T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q)+ \\ v^{-1}\Big[v_6T^{-2}(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) + v_4T^{-1}(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+ \\ v_1(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q), \quad 0 \le t < s < T, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) - (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\ v_2 &= E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q), \\ v_3 &= E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E^2_{q,2}(\lambda T^q), \\ v_4 &= E_{q,0}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q), \\ v_5 &= E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q) - (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\ v_6 &= E_{q,-1}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) - E^2_{q,0}(\lambda T^q). \end{aligned}$$

Доказательство. Решение краевой задачи (4), (5) в банаховом пространстве E, как было отмечено выше, имеет следующий вид

$$x(t) = c_1E_{q,1}(\lambda t^q) + c_2tE_{q,2}(\lambda t^q) + c_3t^2E_{q,3}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Используя формулу (8), а также лемму 1, мы можем найти его производные

$$x'(t) = c_1 t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda t^q) + c_3 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

$$x''(t) = c_1 t^{-2} E_{q,-1}(\lambda t^q) + c_2 t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) + c_3 E_{q,1}(\lambda t^q) + \int\limits_0^t (t-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Благодаря свойству (3) справедливы равенства

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0,$$

поэтому для функций $E_{q,0}(\lambda t^q)$ и $E_{q,-1}(\lambda t^q)$ мы имеем

$$E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

$$E_{q,-1}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \frac{1}{\Gamma(-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn-1)},$$

следовательно

$$t^{-1} E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)}, \quad t^{-2} E_{q,-1}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{qn-2}}{\Gamma(qn-1)}.$$

Используя последние равенства, имеем

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \quad x''(0) = c_3.$$

В силу краевых условий (2), мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -c_1 = c_1 E_{q,1}(\lambda T^q) + c_2 T E_{q,2}(\lambda T^q) + c_3 T^2 E_{q,3}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds, \\ -c_2 = c_1 T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda T^q) + c_3 T E_{q,2}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds, \\ -c_3 = c_1 T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q) + c_2 T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + c_3 E_{q,1}(\lambda T^q) + \\ \qquad \int\limits_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda (T-s)^q) f(s)\, ds. \end{cases}$$

Решение последней системы есть тройка

$$c_1 = v^{-1}\Big[v_1\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_2T\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_3T^2\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big],$$

$$c_2 = v^{-1}\Big[v_4T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_5\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_2T\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big],$$

$$c_3 = v^{-1}\Big[v_6T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_4T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_1\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big].$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу для решения, мы получаем

$$x(t) = v^{-1}\Big[v_1\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds + v_2T\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_3T^2\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]E_{q,1}(\lambda t^q) +$$

$$v^{-1}\Big[v_4T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_5\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds +$$

$$v_2T\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]tE_{q,2}(\lambda t^q) +$$

$$v^{-1}\Big[v_6T^{-2}\int\limits_0^T(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds+$$

$$v_4T^{-1}\int\limits_0^T(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds+$$

$$v_1\int\limits_0^T(T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)f(s)ds\Big]t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\int\limits_0^t(t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds=\int\limits_0^T G(t,s)f(s)ds.$$

□

Для того, чтобы установить аналогичный результат для функции $f\in L^\infty([0,T];E)$, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 6. *Для всякой функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ существует последовательность $\{f_n\}\subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t)\to f(t)$ во всех точках Лебега функции f из $[0,T]$, причем $\|f_n\|_{C([0,T];E)}\le\|f\|_{L^\infty([0,T];E)}$.*

Примером такой последовательности может послужить следующая, построенная на основе проектора Стеклова

$$f_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{2n}\int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}\hat{f}(s)ds, t\in[0,T];\\ 0, t\notin[0,T],\end{cases}$$

$$\hat{f}(t)=\begin{cases}f(t), t\in[0,T];\\ 0, t\notin[0,T].\end{cases}$$

Лемма 7. *(см. [19]) Для всякой функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ множество ее точек Лебега есть множество полной меры для $[0,T]$.*

Таким образом, для функции $f\in L^\infty([0,T];E)$ существует последовательность $\{f_n\}\subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t)\to f(t)$ для п.в. $t\in[0,T]$. Поэтому мы можем построить функцию Грина для краевой задачи (4), (2), имеющую тот же вид, что и в последней лемме, но уже при условии, что $f\in L^\infty([0,T];E)$.

Будем полагать, что мультиотображение $F:[0,T]\times E\to Kv(E)$ из задачи (1)–(2) удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для всех $x\in E$ мультифункция $F(\cdot,x):[0,T]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot) : E \to Kv(E)$ – полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого $x \in E$ с $\|x\|_E < r$, мы имеем

$$\|F(t,x)\|_E \leq \omega_r(t);$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$, мы имеем

$$\chi(F(t,\Omega)) \leq \mu(t)\chi(\Omega),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где χ – мнк Хаусдорфа в E.

Для $x \in C([0,T];E)$ введем в рассмотрение мультифункцию:

$$\Phi_F : [0,T] \to Kv(E), \qquad \Phi_F(t) = F(t,x(t)).$$

Из условий $(F1)-(F3)$ следует (см., [17], теорема 1.3.5), что мультифункция Φ_F является L^p–интегрируемой для любого $p \geq 1$.

Для решения нашей задачи мы будем использовать суперпозиционный мультиоператор $\mathscr{P}^\infty_F : C([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$, определенный как:

$$\mathscr{P}^\infty_F(x) = \mathscr{S}^\infty_{\Phi_F}.$$

Рассмотрим мультиоператор Γ, заданный следующим образом:

$$\Gamma x(t) = \int\limits_0^T G(t,s)f(s)ds.$$

где $f \in \mathscr{P}^\infty_F(x)$.

Из условий $(F1)-(F4)$ следует, что для функции $x \in C([0,T];E)$, функция $f \in L^\infty([0,T];E)$. При этом, из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0,T]$ и $2 < q < 3 : G(\cdot,s) \in L^p([0,T]), p \geq 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = T$, поэтому $\Gamma : C([0,T];E) \multimap C([0,T];E)$. Очевидно, если функция $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (1)–(2), то она является неподвижной точкой мультиоператора Γ. Поэтому, мы в дальнейшем будем доказывать существование неподвижных точек мультиоператора Γ.

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор $S : L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E)$ вида

$$S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Имеют место следующие утверждения (см. [7], [16]).

Лемма 8. *Для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0,T];E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0,T];E)$.*

Лемма 9. *Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ – непустое ограниченное множество, тогда*

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathscr{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным множеством.

Для доказательства, того что мультиоператор Γ уплотняющий, рассмотрим конус $\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0\}$ с естественным частичным порядком, и введем в пространстве $C([0,T];E)$ векторную меру некомпактности $\nu : Pb(C([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+$, определенную как $\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_C(\Omega))$, где $\varphi(\Omega)$ есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента суть модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Обозначим через $v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6$ сопряженные для $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, то есть

$$\begin{aligned}
v'_1 &= E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q) + (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\
v'_2 &= E_{q,2}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q), \\
v'_3 &= E_{q,3}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E^2_{q,2}(\lambda T^q), \\
v'_4 &= E_{q,0}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q), \\
v'_5 &= E_{q,-1}(\lambda T^q) E_{q,3}(\lambda T^q) + (1 + E_{q,1}(\lambda T^q))^2, \\
v'_6 &= E_{q,-1}(\lambda T^q)(1 + E_{q,1}(\lambda T^q)) + E^2_{q,0}(\lambda T^q).
\end{aligned}$$

Теорема 2. *При выполнении условий* $(F1)-(F4)$, (10), *а так же следующего условия*

$$L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} < 1, \tag{11}$$

где

$$L = |v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+ \\ v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big) + v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+ \\ v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,2}(\lambda T^q) + E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) + v_5'E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)+ \\ v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big] + E_{q,1}(\lambda T^q) - 1, \tag{12}$$

$\mu(\cdot)$ – *функция из условия* $(F4)$, *мультиоператор* Γ *является* ν*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ не пустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \tag{13}$$

Докажем, что Ω относительно компактное множество.

Из неравенства (13) следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \tag{14}$$

Используя условие $(F4)$, а также свойства монотонности, алгебраической полуаддитивности и полуоднородности мнк Хаусдорфа, для $t \in [0,T]$ мы имеем следующие оценки

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds + v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+ \\ v_3'T^2\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\|\mu\|_\infty E_{q,1}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'T^{-1}\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds + v_5'\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+ \\ v_2'T\int_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\|\mu\|_\infty tE_{q,2}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds+$$

$$v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\chi(\Omega(s))ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\, t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\|\mu\|_\infty\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\chi(\Omega(s))\,ds\le$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+v_2' T\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_3' T^2\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\, E_{q,1}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+v_5'\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_2' T\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\, tE_{q,2}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_4' T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\,\|\mu\|_\infty\, t^2E_{q,3}(\lambda t^q)\varphi(\Omega)+$$

$$\|\mu\|_\infty\,\varphi(\Omega)\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds.$$

Для дальнейшей оценки $\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right)$ вычислим интегралы в последнем выражении с помощь формулы (9):

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds = -\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)d(T-s) =$$

$$\int\limits_0^T y^{q-1}E_{q,q}(\lambda y^q)dy = T^qE_{q,q+1}(\lambda T^q).$$

Аналогичным образом, мы имеем

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = T^{q-1}E_{q,q}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\,ds = T^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)ds = t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Теперь, заметим, что если мы возьмем $\beta = 1$ в формуле (7), мы получим

$$E_{q,1}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda T^qE_{q,q+1}(\lambda T^q) = 1 + \lambda T^qE_{q,q+1}(\lambda T^q),$$

$$E_{q,1}(\lambda t^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Используя свойство (3) и считая $\beta = 0$ или $\beta = -1$ в формуле (7), мы имеем

$$E_{q,0}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(0)} + \lambda T^qE_{q,q}(\lambda T^q) = \lambda T^qE_{q,q}(\lambda T^q).$$

$$E_{q,-1}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(-1)} + \lambda T^qE_{q,q-1}(\lambda T^q) = \lambda T^qE_{q,q-1}(\lambda T^q).$$

Таким образом, мы получаем следующие равенства

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds = T^q\frac{1}{\lambda T^q}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right),$$

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = \frac{1}{\lambda T}E_{q,0}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^T (T-s)^{q-3} E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)\, ds = \frac{1}{\lambda T^2} E_{q,-1}(\lambda T^q),$$

$$\int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) ds = \frac{1}{\lambda}\left(E_{q,1}(\lambda t^q) - 1\right).$$

Мы теперь можем продолжить оценку $\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right)$ следующим образом

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_2' T T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3' T^2 T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} E_{q,1}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4' T^{-1}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_5' T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2' T T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} t E_{q,2}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6' T^{-2}\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_4' T^{-1} T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1' T^{-2} E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} t^2 E_{q,3}(\lambda t^q)\varphi(\Omega) +$$

$$\left(E_{q,1}(\lambda t^q) - 1\right) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_2' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} E_{q,1}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_5' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} T^{-1} T E_{q,2}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) + v_4' E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1' E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big] \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} T^{-2} T^2 E_{q,3}(\lambda T^q)\varphi(\Omega) +$$

$$\left(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\right) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) =$$

$$\Big(|v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) +$$

$$v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) + E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big) + v_3' E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q) +$$

$$v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,2}(\lambda T^q) + E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big) + v_5' E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) +$$

$$v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q) - 1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big] + E_{q,1}(\lambda T^q) - 1\Big) \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega) = L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Из последней оценки мы получаем, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega),$$

или, что тоже самое

$$\varphi\left(\Gamma(\Omega)\right) \leq L\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Учитывая условия (11) и (15) вместе с последним неравенством, мы получаем

$$\varphi(\Omega) = 0.$$

Из неравенства (13) следует, что

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) \geq mod_C(\Omega). \tag{15}$$

Из леммы 9 известно, что множество функций

$$M = \left\{ S(f)(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds : f \in \mathscr{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega \right\}$$

является равностепенно непрерывным, поэтому

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) = 0,$$

следовательно и $mod_C(\Omega) = 0$, поэтому $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Теорема 3. *Мультиоператор* Γ *является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [17]), следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$ является квазикомпактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0,T];E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathscr{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathscr{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \to x_0 \in A$. Из условия $(F4)$ следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компактна для п.в. $t \in [0,T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1-полукомпактной. По критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [20]), мы можем предположить для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, что $f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [17], лемма 5.1.1), мы получаем тогда, что $f_0 \in \mathscr{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 8, мы для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \to y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathscr{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично рассуждая мы придем к утверждению о том, что мультиоператор $S \circ \mathscr{P}_F^\infty$ является замкнутым. Сославшись на утверждение леммы 2 мы получаем желаемый результат. □

Теперь мы можем доказать главное утверждение работы.

Теорема 4. *При выполнении условий* $(F1), (F2), (F4)$, (10), *положим дополнительно, что вместо условия* $(F3)$ *выполняется*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L_+^\infty([0,T])$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|x\|_E).$$

Если

$$L\frac{k}{\lambda} < 1,$$

где $k = \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, *функция* μ *из условия* $(F4)$, L *– константа определенная по формуле* (12), *тогда задача* (1)–(2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in \mathscr{C} = C([0,T];E)$, тогда для $f \in \mathscr{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0,T]$ мы имеем следующую оценку:

$$\|\Gamma x(t)\|_E \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds + v_2'T\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_3'T^2\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,1}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds + v_5'\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_2'T\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})tE_{q,2}(\lambda t^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'T^{-2}\int\limits_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_4'T^{-1}\int\limits_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)ds+$$

$$v_1'\int\limits_0^T (T-s)^{q-3}E_{q,q-2}(\lambda(T-s)^q)ds\Big]\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})t^2E_{q,3}(\lambda t^q)+$$

$$\|\alpha\|_\infty(1+\|x\|_{\mathscr{C}})\int\limits_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds \leq$$

$$|v|^{-1}\Big[v_1'(E_{q,1}(\lambda T^q)-1) + v_2'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,1}(\lambda T^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_4'(E_{q,1}(\lambda T^q)-1) + v_5'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_2'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,2}(\lambda T^q)+$$

$$|v|^{-1}\Big[v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q)-1) + v_4'E_{q,0}(\lambda T^q) + v_1'E_{q,-1}(\lambda T^q)\Big]\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})E_{q,3}(\lambda T^q)+$$

$$
(E_{q,1}(\lambda T^q)-1)\,\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})=
$$
$$
\Big(|v|^{-1}\Big[v_1'\big((E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,1}(\lambda T^q)+E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+
$$
$$
v_2'\big(E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)\big)+v_3'E_{q,-1}(\lambda T^q)E_{q,1}(\lambda T^q)+
$$
$$
v_4'\big((E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,2}(\lambda T^q)+E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,3}(\lambda T^q)\big)+v_5'E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)+
$$
$$
v_6'(E_{q,1}(\lambda T^q)-1)E_{q,3}(\lambda T^q)\Big]+E_{q,1}(\lambda T^q)-1\Big)\frac{\|\alpha\|_\infty}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}})\le L\frac{k}{\lambda}(1+\|x\|_{\mathscr{C}}).
$$

Теперь, если мы возьмем

$$
R\ge\frac{Lk\lambda^{-1}}{1-Lk\lambda^{-1}},
$$

тогда неравенство $\|x\|_{\mathscr{C}}\le R$, влечет за собой следующее $\|\Gamma x\|_{\mathscr{C}}\le R$. Следовательно, мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0)\subset\mathscr{C}$ в себя. Таким образом, мультиоператор Γ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому Γ имеет неподвижные точки, а задача (1)–(2) имеет решение. □

Заключение

В статье была исследована разрешимость в сепарабельном банаховом пространстве антипериодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q\in(2,3)$. Исходная краевая задача была сведена к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего интегрального мультиоператора. Используя теорию топологической степени для уплотняющих отображений и обобщенную теорему типа Б.Н. Садовского о неподвижной точке, были получены условия при которых для разрешающего мультиоператора существуют неподвижные точки.

Список литературы

1. GORENFLO, R, KILBAS, A. A, MAINARDI, F. and ROGOSIN, S. V. (2014) *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

2. HILFER, R. (2000) *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World Scientific.

3. KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., and TRUJILLO, J. J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies.

4. PODLUBNY, I. (1999) *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press.

5. TARASOV, V. E. (2010) *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. London, New York: Springer.

6. AFANASOVA, M., LIOU, Y. CH., OBUKHOVSKII, V. and PETROSYAN, G. (2019) On Controllability for a System Governed by a Fractional-order Semilinear Functional Differential Inclusion in a Banach Space. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*. 20 (9). p. 1919–1935.

7. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2017) On Semilinear Fractional Order Differential Inclusions in Banach spaces. *Fixed Point Theory*. 18 (1). p. 269–292.

8. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2019) On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space. *Mathematics*. 7 (12). p. 5–19.

9. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., PETROSYAN, G., YAO, J. C. (2021) On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space. *Mathematics*. 9 (2). p. 136–154.

10. CHEN, Y., NIETO, J. J., O'REGAN, D. (2007) Antiperiodic Solutions for Fully Nonlinear First-order Differential Equations. *Math. Comput. Modelling*. 46. p. 1183-–1190.

11. DELVOS, F. J., KNOCHE, L. (1999) Lacunary Interpolation by Antiperiodic Trigonometric Polynomials. *BIT*. 39. p. 439-–450.

12. SHAO, J. (2008) Anti-periodic Solutions for Shunting Inhibitory Cellular Neural Networks with Time-varying Delays. *Phys. Lett. A.*. 372. p. 5011-–5016.

13. AHMAD, B., NIETO, J. J. (2010) Existence of Solutions for Anti-periodic Boundary Value Problems Involving Fractional Differential Equations via Leray-Schauder Degree Theory. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 35. p. 295-–304.

14. AGARWAL, R. P., AHMAD, B. (2011) Existence Theory for Anti-periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations and Inclusions. *Computers and Mathematics with Applications*. 62. p. 1200-–1214.

15. PETROSYAN, G. (2020) Antiperiodic Boundary Value Problem for a Semilinear Differential Equation of Fractional Order. *The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics*. 34. p. 51–66.

16. KAMENSKII, M., PETROSYAN, G., WEN, C. F (2021) An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space. *Journal of Nonlinear and Variational Analysis.* 5 (1). p. 155–177.

17. KAMENSKII, M., OBUKHOVSKII, V., ZECCA, P. (2001) *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Berlin–New–York: Walter de Gruyter.

18. OBUKHOVSKII, V. V, GELMAN, B. D. (2020) *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications.* Singapore: World Scientific.

19. BOGDAN, V. M. (2010) *Generalized Vectorial Lebesgue and Bochner Integration Theory.* arXiv:1006.3881v1 [math.FA].

20. DIESTEL, J., RUESS, W. M., SCHACHERMAVER, W. (1993) On weak compactness in $L^1(\mu, X)$. *Proc. Amer. Math. Soc..* 118. p. 447–453.

УДК: 519.765, 51-7, 517.9

MSC2010: 35B35, 35Q99

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЯХ

© М. В. Половинкина

Воронежский государственный университет инженерных технологий
Кафедра высшей математики и информационных технологий
просп. Революции, 19, Воронеж, 394936, Российская Федерация
e-mail: *polovinkina-marina@yandex.ru*

© И. П. Половинкин

Воронежский государственный университет
Кафедра математического и прикладного анализа
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394018,
Белгородский государственный университет,
Центр прикладной математики,
ул. Победы, 85, корп.17, к.4-31, г. Белгород,
Российская Федерация
e-mail: *polovinkin@yandex.ru*

On the stability of stationary states in diffusion models.

Polovinkina M. V., Polovinkin I.P.

Abstract. We consider the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u),\ s = 1, \ldots, m,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \overrightarrow{\nu}}\right)\bigg|_{x \in \partial\Omega} = B_s(x),\ \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0,\ \mu_s \geq 0,\ \eta_s \geq 0,$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x),\ s = 1, \ldots, m,$$

where Ω is a bounded domain with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$, $\overrightarrow{\nu}$ is a unit external normal vector to the boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω, $u = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \geq 0$, $\mathrm{diam}\Omega = d$, $B_s(x) \in C(\partial\Omega)$, $u_s^0(x) \in C(\overline{\Omega})$, $s = 1, \ldots, m$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, Δ is the Laplace operator defined by the formula

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

It is assumed that the functions F_s are differentiable at a stationary point.

Let $w = (w_1(x), \ldots, w_m(x))$ be a stationary solution of the considered problem, that is, the solution of the boundary problem

$$\vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) = 0,\ s = 1, \ldots, m,\ x \in \Omega,$$

$$\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \overrightarrow{\nu}}\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x),\ s = 1, \ldots, m.$$

We showed that a sufficient condition for the stability of a stationary solution is the negative definiteness of the quadratic form

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_{sk}\, z_k z_s\,,$$

where

$$A_{sk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_k} + \frac{\partial F_k}{\partial x_s}\right) - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2.$$

We note from a general point of view that adding diffusion terms to ordinary differential equations, for example, to logistic ones, can in some cases improve sufficient conditions for the stability of a stationary solution. We give examples of models in which the addition of diffusion terms to ordinary differential equations changes the stability conditions of a stationary solution.

Keywords: *diffusion model, initial boundary value problem, stationary solution (state), stability, sufficient stability condition.*

Введение

В настоящей работе затрагивается проблема устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые чаще всего возникают в математической биологии. Такие системы возникают при описании количественного роста и распространения (диффузии) некоторых субстанций. К подобным субстанциям можно отнести, в частности, биологические популяции. Первая модель роста популяции, записанная в виде дифференциального уравнения, была предложена Т. Р. Мальтусом (Thomas Robert Malthus, 1766–1834) вскоре после открытия дифференциального и интегрального исчисления (1798). В этой модели рассматривается однородная популяция в условиях неограниченных ресурсов питания и пространства обитания. При этом считается, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности. Динамика численности (биомассы) такой популяции описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см., напр., [1]) $du/dt = Au$, где A — врожденная (собственная, специфическая) скорость естественного увеличения популяции. Решением этого уравнения является функция

$$u(t) = u\left(t_0\right)\exp(At), \tag{1}$$

то есть со временем численность популяции растет неограниченно по показательному закону (в геометрической прогрессии при дискретных измерениях). В соответствии с этим законом изолированная популяция развивалась бы в условиях неограниченных ресурсов. В природе подобные условия практически не встречаются. Немногочисленные примеры размножения видов, завезенных в места, где имеется много пищи и отсутствуют конкурирующие популяции и хищники известны всем (кролики в Австралии). Уравнение Мальтуса достаточно точно описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой в условиях избытка пищи и места популяции простейших организмов, например, пенициллиновых грибков, выращиваемых в культиваторе, до истощения культуральной среды.

Уравнение (1) адекватно описывает процесс роста популяции лишь для ограниченного периода времени, поскольку наступает время, когда растущая популяция исчерпает имеющиеся ресурсы. Численность популяции может стабилизироваться на некотором устойчивом уровне; она может испытывать регулярные или нерегулярные флуктуации или может сокращаться. Поведение популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, часто описывают с помощью логистического уравнения, предложенного П. Ф. Ферхюльстом (Pierre François Verhulst, 1804–1849) в 1838 г.:

$$\frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \frac{u\left(t_0\right) K \exp(rt)}{K - u\left(t_0\right) + \exp(At)}.$$

Непосредственное исследование этой функции показывает, что при малых значениях u уравнение Ферхюльста с достаточной точностью может быть заменено уравнением Мальтуса, а рост носит взрывной экспоненциальный характер, с возрастанием же значения t величина $u(t)$ приближается к постоянному значению K, называемому емкостью экологической ниши популяции. Функции, удовлетворяющие таким свойствам, дифференциальные уравнения, дающие в качестве решений такие функции, а также модели, в которые входят такие уравнения, часто называют **логистическими**.

Хорошо известно, что частное стационарное решение $u(t) \equiv 0$ уравнения Ферхюльста является неустойчивым. Это легко проверить с помощью первого линейного приближения.

Г. Хотеллинг (Harold Hotelling, 1895–1973) в 1921 г. предложил для описания популяций животных и людей учитывать кроме логистического закона еще и миграционные закономерности (см., напр., [2]). Для этого он предложил уравнение вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, A, B, ξ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: A — темп роста популяции, B — темп распространения, ξ — порог насыщения численности (или коэффициент насыщенной плотности), p — размер (в другом варианте — плотность) популяции, t — время, x, y — координаты на плоскости. Это же уравнение используется и для моделирования развития злокачественной опухоли [3]. Первое слагаемое в правой части уравнения Хотеллинга называют логистическим (составляющая роста). Второе же слагаемое принято называть **диффузионным** членом. Оно отражает влияние миграционных (диффузионных) процессов на изменение численности популяции. Уравнения и модели, отражающие изменения размера биомассы под влиянием логистических и диффузионных составляющих, стали называть **диффузионно-логистическими**, а иногда просто диффузионными, подразумевая, видимо, что логистическая составляющия присутствует в модели по умолчанию. Такие модели могут включать в себя не одно уравнение, но и системы уравнений в частных производных.

В настоящей работе мы рассматриваем некоторое семейство математических моделей с уравнениями в частных производных (модели с распределенными параметрами), которые получаются из моделей с обыкновенными дифференциальными уравнениями (модели с сосредоточенными параметрами) с помощью добавления так называемых диффузионных членов. Тенденцию подобных усложнений математических моделей можно отследить в некоторых работах, связанных с моделированием роста и распространения популяций, роста и распространения инфекций, роста опухолей. В связи с этим см. прежде всего монографию [1]. В работе [4] приведена диффузионная модель злокачественной опухоли. Математическая модель роста глиомы основана на классическом определении рака как неконтролируемой пролиферации клеток с потенциалом инвазии и метастазирования, упрощенном для глиом, которые практически не метастазируют. Эта модель приведена в [3].

Нас интересует вопрос об устойчивости стационарных решений диффузионных моделей. Этот вопрос обсуждается в монографии [1]. В этой книге отмечается, что добавление диффузионных членов может изменить характер устойчивости стационарного решения как в худшую, так и в лучшую сторону. Для моделей определенного типа мы пытаемся конкретизировать достаточные условия устойчивости стационарного решения. Укажем сначала на простой пример. В монографии Т. Пу [2] с помощью функции Ляпунова (Александр Михайлович Ляпунов, 1857–1918) специального вида было найдено достаточное условие устойчивости регулярного стационарного решения w начально-краевой задачи с краевым условием 1-го, 2-го или третьего рода для уравнения Хотеллинга (2) в ограниченной области: $w > \xi/2$. Это условие позже было улучшено (ослаблено), а именно, было показано, что условие

$$w > \xi/2 - B/\big(2Ad^2\big)$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x, y)$ начально-краевой задачи с краевым условием 1-го, 2-го или третьего рода для уравнения Хотеллинга (2) в ограниченной области с диаметром d (см. [5], [6]). Это условие при $B > 0$ выполняется при небольшом диаметре области Ω. Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Тривиальное решение является стационарным решением уравнения Хоттелинга как при $B = 0$ (в этом случае оно совпадает с уравнением Ферхюльста), так и при $B > 0$. Однако в случае $B = 0$, как уже было отмечено, тривиальное решение неустойчиво, а в случае $B > 0$ тривиальное решение устойчиво. Ниже мы распространяем результаты работ [5], [6] на один класс систем уравнений в частных производных.

1. Исследуемая начально-краевая задача

Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных (см. также [7]):

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t > 0, \tag{3}$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x),\ \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0,\ \mu_s \geq 0,\ \eta_s \geq 0,\ \mu_s = const,\ \eta_s = const, \tag{4}$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x),\ s = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu = \overrightarrow{\nu}$ — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω (далее стрелку сверху у вектора нормали будем опускать), $u = (u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t))$, $\vartheta_s \geq 0$, $s = 1, \ldots, m$, Δ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 v/\partial x_j^2.$$

Конечно, мы должны потребовать выполнения условий согласования начальных и граничных данных. Однако в рамках настоящей работы мы уходим от этого вопроса. Будем считать, что выполнены все условия существования классического (регулярного) решения рассматриваемой задачи, а кроме того все исходные функции наделены нужными свойствами, позволяющими нам производить все операции, которые мы производим ниже.

При

$$\vartheta_s = 0,\ s = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

(в модели с сосредоточенными параметрами без диффузионных членов) переменные $x_1, \ldots, x_n$ входят в уравнения (3) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Если же

$$\sum_{s=1}^{m} \vartheta_s^2 > 0, \tag{7}$$

то мы имеем дело с системой с распределенными параметрами.

2. Стационарное решение и его устойчивость

Пусть $w = w(x) = (w_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n))$ — стационарное решение начально-краевой задачи (3)–(5), то есть решение краевой задачи

$$\vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \nu}\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x),\ s = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Предположим, что функции $F_s(u)$, $s = 1, \ldots, m$, дифференцируемы в точке w. Тогда для достаточно малых отклонений $z_s = z_s(x_1, \ldots, x_n, t) = u_s - w_s$, $s = 1, \ldots, m$, имеют место представления

$$F_s(u) = F_s(w + z) = F_s(w) + \sum_{k=1}^{m} b_{sk}\, z_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(z)\, z_k, \tag{10}$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(w)}{\partial z_k},\ \lim_{z\to 0} \epsilon_{sk}(z) = 0, s, k = 1, \ldots, m.$$

Подставляя в уравнение (3) представление $u_s = w_s + z_s$, с учетом (10) мы получим:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) + \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^{m} b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(z)\, z_k,\ s = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Учитывая, что w — стационарное решение, в силу (8) мы из (11) получим:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^{m} b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^{m} \epsilon_{sk}(z)\, z_k,\ s = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Умножим (для каждого фиксированного s) уравнение (3) в системе на z_s, полученное равенство проинтегрируем по области Ω. Получим с учетом (10):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega z_s^2\,dx = \vartheta_s\int\limits_\Omega z_s\,\Delta z_s\,dx + \int\limits_\Omega\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_s\,z_k\,dx + \int\limits_\Omega\sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z)\,z_s\,z_k\,dx,\ \ s=1,\ldots,m. \tag{13}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (13) при малых отклонениях z не влияет на знак всей суммы и может быть отброшено. К первому слагаемому в правой части применим формулу Грина (см. [8]). В результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega z_s^2\,dx = -\vartheta_s\int\limits_\Omega |\nabla z_s|^2\,dx + \vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega} z_s\,\frac{\partial z_s}{\partial\nu}\,d\Gamma + \int\limits_\Omega\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_s\,z_k\,dx,\ \ s=1,\ldots,m, \tag{14}$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $\partial\Omega$, так что второе слагаемое в правой части равенства (14) представляет собой поверхностный (при $n\geq 3$) или криволинейный (при $n=2$) интеграл первого рода по границе области Ω, а в случае $n=1$ этот интеграл следует поменять на сумму значений на концах интервала Ω. В интеграле по границе при $\mu_s=0$ или при $\eta_s=0$ подынтегральная функция равна нулю в силу краевого условия (4). Из этого же краевого условия при $\mu_s\eta_s>0$ получим:

$$\left.\frac{\partial z_s}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\mu_s}{\eta_s}\,z_s\right|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому равенство (14) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega z_s^2\,dx = -\vartheta_s\int\limits_\Omega |\nabla z_s|^2\,dx - \sigma\vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s}\,z_s^2\,d\Gamma + \int\limits_\Omega\sum_{k=1}^m b_{sk}\,z_s\,z_k\,dx,\ \ s=1,\ldots,m, \tag{15}$$

где $\sigma=1$ в случае $\mu_s\eta_s>0$ или $\sigma=0$ в случае $\mu_s\eta_s=0$. Сложим m равенств (15), после чего получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega |z|^2\,dx = \sum_{s=1}^m\left(-\vartheta_s\int\limits_\Omega |\nabla z_s|^2\,dx - \sigma\vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s}\,z_s^2\,d\Gamma\right) + \int\limits_\Omega\sum_{s=1}^m\sum_{k=1}^m \Theta_{sk}\,z_s\,z_k\,dx, \tag{16}$$

где

$$\Theta_{sk} = (b_{sk}+b_{ks})/2.$$

Знак левой части равенства (16) рассматривается как индикатор устойчивости тривиального решения. Поэтому важно найти соотношение слагаемых в правой части, приводящее к тому, чтобы это выражение было отрицательным. В скобках в правой части как первое слагаемое, так и второе слагаемое не больше нуля. Далее нужно учесть знак последнего слагаемого в правой части. Очевидно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Theta_{sk}\, z_k z_s\, dx$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (16), а значит, устойчивость стационарного решения.

В случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), то есть при выполнении (6), отрицательная определенность квадратичной формы (2) является и необходимым условием устойчивости тривиального решения.

Перейдем к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного решения. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова-Пуанкаре-Фридрихса (см. [9] с. 62, [10] с. 150, [11], [12])

$$\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown z_s|^2 dx \geq \frac{1}{d^2}\int\limits_{\Omega} z_s^2 dx,$$

где $d = \operatorname{diam}\Omega$ — диаметр области Ω. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} |\, z\,|^2\; dx \leqslant -\sum_{s=1}^{m}\frac{\vartheta_s}{d^2}\int\limits_{\Omega} z_s^2\, dx - \sum_{s=1}^{m}\vartheta_s\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu_s}{\eta_s} z_s^2 d\Gamma + \int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\Theta_{sk}\, z_k z_s\, dx \quad (17)$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_{sk}\, z_k z_s\,, \quad (18)$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2. \quad (19)$$

3. Примеры

3.1. **Уравнение Хоттелинга.** Выше уже приведен один пример — модель Ферхюльста, обладающая неустойчивым тривиальным решением, которое становится устойчивым, если путем добавления диффузионного члена перейти к модели Хотеллинга в области с небольшим диаметром.

3.2. **Модель Вольтерры.** Рассмотрим еще один классический пример: модель "хищник-жертва" В. Вольтерры (Vito Volterra, 1860–1940). Без учета миграций (диффузии) система уравнений в простейшем варианте этой модели имеет следующий вид (см., напр., [1]):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha u_1 - \beta u_1 u_2, \frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa\beta u_1 u_2 - m u_2. \tag{20}$$

Начальные условия задаются в виде

$$u_s(x,0) = u_s^0,\ s = 1,2. \tag{21}$$

Добавив диффузионные слагаемые, мы получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha u_1 - \beta u_1 u_2 + \vartheta_1 \Delta u_1, \frac{\partial u_2}{\partial t} = \kappa\beta u_1 u_2 - m u_2 + \vartheta_2 \Delta u_2. \tag{22}$$

Будем рассматривать систему уравнений (22) в ограниченной области Ω с диаметром d, с кусочно гладкой границей и потребуем от решения выполнения краевых условий

$$\left.\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu}\right)\right|_{x\in\partial\Omega} = B_s(x),\quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0,\ \mu_s\eta_s \geq 0,\ \mu_s = const,\ \eta_s = const, \tag{23}$$

и начальных условий

$$u_s(x,0) = u_s^0(x),\ s = 1,2. \tag{24}$$

Пусть $w = (w_1, w_2)$ — стационарное решение задачи (22)–(24). Коэффициенты (19) квадратичной формы (18) для системы (22) имеют вид:

$$A_{11} = \alpha - \beta w_2 - \vartheta_1/d^2,\ A_{22} = \kappa\beta w_1 - m - \vartheta_2/d^2,\ A_{12} = A_{21} = \beta(\kappa w_2 - w_1)/2. \tag{25}$$

Эта квадратичная форма тогда и только тогда будет отрицательно определенной, а значит, в этом случае будет асимптотически устойчивым стационарное решение w, когда будут выполнены неравенства

$$A_{11} = \alpha - \beta w_2 - \vartheta_1/d^2 < 0, \tag{26}$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = (\alpha - \beta w_2 - \vartheta_1/d^2)(\kappa\beta w_1 - m - \vartheta_2/d^2) - \beta^2(\kappa w_2 - w_1)^2/4 > 0. \tag{27}$$

Очевидно, что если стационарное решение постоянно, эти неравенства заведомо выполнены в областях с малыми диаметрами. Поэтому стационарные решения бездиффузионной модели $w_1 = w_2 = 0$ и $w_1 = m/(\kappa\beta)$, $w_2 = \alpha/\beta$, оставаясь стационарными решениями и в диффузионной модели в области с малым диаметром (разумеется, при соответствующем наборе начальных и краевых условий), меняют характер устойчивости, а именно становятся асимптотически устойчивыми. С другой стороны, как показано в [1], при большом значении диаметра области может иметь место так называемая диффузионная неустойчивость.

3.3. **Диффузионные модели онкологических процессов.** Приводимое ниже описание интересующей нас модели иммунного ответа почерпнуто нами из работы [4]. Там же можно познакомиться с весьма представительным обзором литературы по теме математического моделирования в онкологии. Пусть u_1 – линейная плотность делящихся клеток, $q = q(x, t)$ – линейная плотность лимфоцитов. Тогда математическая модель, описывающая взаимодействие делящихся клеток и лимфоцитов, в предположении об отсутствии их взаимодействия с нормальными и погибшими клетками, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 - \gamma_{12} u_1 q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= D_4 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - v \frac{\partial q}{\partial x} - \gamma_{21} u_1 q. \end{aligned} \tag{28}$$

Мы перейдем от модели из [4] с точечным возникновением делящихся клеток к модели, в которой предполагается некоторое их гладкое распределение в начальный момент времени. Тогда мы будем иметь начальные условия вида

$$u_1(x, 0) = u_1^0(x) \in C^\infty([0, l]), \quad q(x, 0) = q^0. \tag{29}$$

При выборе граничных условий предполагается, что

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left. q \right|_{x=0} = q^0, \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad \left. q \right|_{x=l} = q^0. \tag{31}$$

Уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения состоит в выполнении двух неравенств [13]:

$$\mu_1 - \gamma_{12} w_2 - 2D_1/l^2 < 0, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} 4\left(\mu_1 - \gamma_{12} w_2 - 2D_1/l^2\right)\left(-\exp(-\sigma x)\gamma_{21} w_1 - \frac{\sigma^2 D_4}{\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma}\right) - \\ - \left(\gamma_{12} w_1 + \exp(\sigma l)\gamma_{21} w_2\right)^2 > 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Если формально перейти к точечной модели от модели (28), отбрасывая диффузионные и конвективные члены с частными производными по пространственной переменной, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 - \gamma_{12} u_1 q,$$

$$\frac{dq}{dt} = -\gamma_{21} u_1 q. \tag{34}$$

Очевидно, что векторная функция с координатами $u_1 = 0, q = 0$ является неустойчивым стационарным решением системы (34). Однако для системы (28) эта же векторная функция может оказаться и устойчивым стационарным решением при выполнении условия

$$\mu_1 - 2D_1/l^2 < 0. \tag{35}$$

Условие (33) для нулевого решения оказывается излишним, так как оно становится следствием условия (35).

Для доказательства достаточности условий (32)–(35) из-за наличия во втором уравнении конвективного члена $-v\partial q/\partial x$ в работе [13] авторам пришлось использовать весовой вариант неравенства Стеклова-Пуанкаре-Фридрихса. Другой весовой вариант использован в работе [14], где показано, что условие

$$M\frac{(\gamma+1)^2}{4h^2} - A(s - 2p_0) > 0 \tag{36}$$

является достаточным для асимптотической устойчивости стационарного решения p_0 начально-краевой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ap(s-p) + MB_\gamma p, \tag{37}$$

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial r} = 0,\ p(h,t) = \beta,\ t \geq 0. \tag{38}$$

Здесь B_γ — олператор Бесселя, определенный формулой

$$B_\gamma p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\gamma}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = r^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\gamma \frac{\partial p}{\partial r}\right). \tag{39}$$

Весьма обширные сведения, включая внушительные обзоры литературы, о краевых задачах, фунциональных пространствах, связанных с сингулярными дифференциальными уравнениями с оператором Бесселя, см. [15], [16], [17], [18].

Заключение

В работе получено достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения в системе уравнений с частными производными, полученными из автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений путем добавления диффузионных членов. Отмечается, что характер устойчивости постоянных стационарных решений меняется при замене моделей с сосредоточенными параметрами моделями с распределенными параметрами (в областях с малыми диаметрами в лучшую сторону).

Список литературы

1. Свирежев, Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978. — 352 с.

   SVIREZHEV, YU. M. and LOGOFET D. O. (1978) *Stability of biological communities.* Moscow: Nauka.

2. PUU, T. (1997) *Nonlinear economic dynamics.* Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hong Kong; London; Milan; Paris; Santa Clara; Singapore; Tokyo: Springer-Verlag.

3. SWANSON, K. R., ROSTOMILY, R. C. & ALVORD, E. C. (2008) A mathematical modelling tool for predicting survival of individual patients following resection of glioblastoma: a proof of principle. *Jr Br J Cancer.* 98 (1). p. 113–119.

4. Жукова, И. В., Колпак, Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2014, Сер. 10. — Вып. 3. — С. 5–18.

   ZHUKOVA, I. V. & KOLPAK, E. P. (2014) Mathematical models of malignant tumour (in Russian). *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya.* 3. p. 5–18.

5. Мешков, В. З., Половинкин, И. П., Семенов, М. Е. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2002, Т. 9. — вып. 1. — С. 226–227.

   MESHKOV, V. Z., POLOVINKIN, I. P. & SEMENOV, M. E. (2002) On the stability of a stationary solution of the Hotelling equation (in Russian). *Appl. and Industrial Math. Rev..* 9 (1). p. 226-7.

6. GOGOLEVA, T. N., SHCHEPINA, I. N., POLOVINKINA M. V. & RABEEAKH S. A. (2019) On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. *J. Phys.: Conf. Ser. 1203 012041.* p. 1–9.

7. Половинкина, М. В., Половинкин, И. П. Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами // Прикладная математика & Физика. — 2020, Т. 52, No. 4. — С. 255–261.

   POLOVINKINA, M. V., & POLOVINKIN, I. P. (2021) On the change in the nature of stability of a trivial solution in the transition from a model with lumped parameters to a model with distributed parameters (in Russian). *Applied Mathematics & Physics.* 52(4) (255–261). p. .

8. GILBARG, D. and TRUDINGER, N. S. (2001) *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* New York: Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg.

9. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — Москва: Наука, 1973. — 408 с.

   LADYZHENSKAYA, O. A. (1985) *Boundary value problems of mathematical phisics.* New York: Springer-Verlag.

10. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — Москва: Наука, 1976. — 392 с.

    MIKHAILOV, V. P. (1978) *Partial differential equations.* Moscow: Mir Publisher.

11. FRIEDRICHS, K. O. (1973) *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space.* New York: Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg.

12. REKTORYS, K. (2012) *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering.* Springer Science & Business Media.

13. DEBBOUCHE, A., POLOVINKINA, M. V., POLOVINKIN, I. P., ,VALENTIM, C. A., & DAVID, S. A. (2021) On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes. . The European Physical Journal Plus (136(1)). p. 1–18.

14. POLOVINKINA, M. V., DEBBOUCHE, A., POLOVINKIN, I. P., & DAVID, S. A. (2021) Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries. . Mathematical Methods in the Applied Sciences. p. 1–14.

15. Киприянов, И. А Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М.: Наука, 1997. — 208 с.

    KIPRIYANOV, I. A. (1997) *Singular elliptic boundary value problems (in Russian).* Moscow: Nauka.

16. Катрахов, В. В., Ситник, С. М. Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018, Т. 64. — No. 2. — С. 211–426.

    KATRAKHOV, V. V. & SITNIK, S. M. (2018) The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations (in Russian). *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* (64(2)). p. 211-426.

17. Ляхов, Л. Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк: ЛГПУ, 2007. — 232 с.

    LYAKHOV, L. N. (2007) *B-hypersingular integrals and their applications to the description of the Kupriyanov functional classes and to integral equations with B-potential nuclei (in Russian)*. Lipetsk: LSPU.

18. Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 224 с.

    SITNIK, S. M. and SHISHKINA, E. L. (2019) *Method of transmutations for differential equations with Bessel operators (in Russian)*. Moscow: Fizmatlit.

Solonukha O. V. On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions / O. V. Solonukha // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 7 – 11.

УДК: 517.9

Рассмотрено линейное параболическое уравнение с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности периодического решения.

Ключевые слова: *нелокальная задача, параболическое уравнение, монотонный оператор.*

Войтицкий В. И. О связи асимптотических формул для считающей функции и для характеристических чисел компактного положительного оператора / В. И. Войтицкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 12 – 23.

УДК: 517.98, 517.15

В работе изучается проблема перехода от асимптотики характеристических чисел компактного положительного оператора к асимптотике соответствующей считающей функции. Рассмотрен случай, когда учитывается лишь главный член асимптотики, а также асимптотика с оценкой остаточного члена. В качестве приложения рассмотрена задача об асимптотике диагональной операторной матрицы.

Ключевые слова: *компактный оператор, бесконечно большая последовательность, подпоследовательность, степенная асимптотика, символы Ландау.*

Желтухин В. С., Шемахин А. Ю., Терентьев Т. Н., Самсонова Е. С. Самосогласованная по внутренним и внешним параметрам модель высокочастотного индукционного разряда пониженного давления / В. С. Желтухин, А. Ю. Шемахин, Т. Н. Терентьев, Е. С. Самсонова // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 24 – 31.

УДК: 537.52:519.624

Модель ВЧИ разряда пониженного давления рассматривается как нелинейная задача на собственные значения с параметром для системы, включающей уравнения баланса электронов и уравнения Максвелла со смешанными граничными условиями. Свободным параметром задачи является значение концентрации электронов в центре плазменного сгустка n_{e0}. Получено условие существования нетривиального решения рассматриваемой системы в виде нелинейного соотношения, связывающего значение напряженности электрического поля на границе разряда с наименьшим собственным значением вспомогательной линейной задачи Штурма-Лиувилля. Такой подход позволяет найти не только самосогласованное распределение концентрации электронов, напряженности электрического и магнитного полей в разряде, но также и согласовать значение n_{e0} (внутренний параметр) с током индуктора I_{ind} (внешний параметр). Приводятся результаты расчета зависимостей n_{e0}, напряженностей электрического и магнитного полей от I_{ind} для ВЧИ-разряда в разрядной камере диаметром 2,4 см при давлении 60 Па и частоте генератора 13,56 МГц.

Ключевые слова: *ВЧИ разряд, пониженное давление, численное моделирование, самосогласованная модель, задача на собственные значения, уравнение баланса электронов, уравнения Максвелла, концентрация электронов, напряженность электрического поля, напряженность магнитного поля, ток индуктора.*

Житенева Ю. Н., Смирнова Л. В., Бельских Ю. А. Двухуровневая иерархическая модель конкуренции трёх фирм при неопределенности / Ю. Н. Житенева, Л. В. Смирнова, Ю. А. Бельских // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 32 – 42.

УДК: 519.83

В работе рассматривается проблема конкуренции трех фирм-производителей на рынке однородной бесконечно делимой продукции. Задача формализована как двухуровневая иерархическая игра при неопределенности. Для указанной игры описан алгоритм построения предложенного оптимального решения и для конкретного вида функций выигрыша всех участников игры найден его явный вид. Кроме того, получены коэффициентные критерии существования оптимального решения.

Ключевые слова: *иерархическая игра, неопределенность, равновесие по Нэшу, принцип Вальда, принцип Сэвиджа.*

Калманович В. В. О построении решения задачи теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом между слоями / В. В. Калманович // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 43 – 52.

УДК: 517.958

В работе рассмотрено одномерное однородное уравнение теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом на границах слоёв. Построено решение данной задачи путём сочетания метода Фурье, матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса. Показано, что собственные функции уравнения теплопроводности ортогональны. Дан единый алгоритм решения для случаев многослойной среды, обладающей сдвиговой, осевой или центральной симметрией.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, матричный метод, многослойная среда, неидеальный тепловой контакт.*

Максимова И. С. Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства / И. С. Максимова // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 53 – 64.

УДК: 517.977

В настоящей работе исследуется дифференциальная управляемая система следующей структуры: на двух последовательных отрезках времени движение объекта описывается двумя различными системами дифференциальных уравнений. Рассматривается вопрос перевода объекта из заданного множества одного пространства в заданное множество другого пространства. При этом пространства могут быть одной размерности, а также возможен переход как из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности, так и наоборот.

Ключевые слова: *смена фазового пространства, управляемость, локальная управляемость, полная управляемость, треугольные системы.*

Петросян Г. Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка $2 < q < 3$ / Г. Г. Петросян // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 65 – 87.

УДК: 517.927.4

В настоящей статье, на основе терии топологической степени для уплотняющих многозначных отображений, исследуется существование решений для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $2 < q < 3$ в банаховых пространствах, подчиняющихся антипериодическому краевому условию. Для краевой задачи конструируется соответствующая функция Грина, с помощью которой вводится разрешающий многозначный оператор в пространстве непрерывных функций. Затем, мы доказываем существование неподвижных точек разрешающего мультиоператора, которые дают существование решения исходной задачи.

Ключевые слова: *дифффеpенциальное включение, дробная производная, антипериодическая краевая задача, функция Грина, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющий мультиоператор.*

Половинкина М. В., Половинкин И. П. Об устойчивости стационарных состояний в диффузионных моделях / М. В. Половинкина, И. П. Половинкин // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 2 (51). — С. 88 – 101.

УДК: 519.765, 51-7, 517.9

Рассматривается проблема устойчивости стационарных решений традиционных начально-краевых задач для систем уравнений, описывающих рост и распространение субстанции. Отмечается положительное влияние миграционных (диффузионных) процессов на устойчивость в малых областях.

Ключевые слова: *диффузионная модель, начально-краевая задача, стационарное решение (состояние), устойчивость, достаточные условия устойчивости.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Бельских Юлия Анатольевна — к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и экономики факультета математики, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: belskihja@gmail.com

Войтицкий Виктор Иванович — к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Желтухин Виктор Семенович — д. ф.-м. н, профессор кафедры «Плазмохимические и нанотехнологии высокомолекулярных материалов» Казанского национального исследовательского технологического университета, г. Казань, РФ
e-mail: vzheltukhin@gmail.com

Житенева Юлия Николаевна — к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики и физики факультета математики, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: ulya_zhiteneva@mail.ru

Калманович Вероника Валерьевна — старший преподаватель кафедры физики и математики Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, РФ
e-mail: v572264@yandex.ru

Максимова Ирина Сергеевна — ассистент Математического института им. С. М. Никольского, факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов, г. Москва, РФ
e-mail: irismax@yandex.ru

Петросян Гарик Гагикович	к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник научно-образовательного центра Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, РФ *e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru*
Половинкина Марина Васильевна	к. ф.-м. н, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, РФ *e-mail: polovinkina-marina@yandex.ru*
Половинкин Игорь Петрович	д. ф.-м. н, доцент кафедры математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета, г. Воронеж, РФ, старший научный сотрудник Центра прикладной математики Белгородского государственного университета, г. Белгород, РФ *e-mail: polovinkin@yandex.ru*
Смирнова Лидия Викторовна	к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики и физики факультета математики, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, РФ *e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru*
Солонуха Олеся Владимировна	к. ф.-м. н, ведущий математик Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" Российской академии наук, научный сотрудник Российского университета дружбы народов, г. Москва, РФ *e-mail: solonukha@yandex.ru*
Самсонова Екатерина Сергеевна	инженер института физики кафедры радиофизики Казанского (Приволжского) федерального университета, аспирант кафедры «Плазмохимические и нанотехнологии высокомолекулярных материалов» Казанского национального исследовательского технологического университета, г. Казань, РФ *e-mail: ek.s.pavlova@gmail.com*

Терентьев Тимур Николаевич	инженер института физики кафедры радиофизики Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Казань, РФ *e-mail: terentievt@yandex.ru*
Шемахин Александр Юрьевич	доцент, старший научный сотрудник института физики кафедры радиофизики Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Казань, РФ *e-mail: shemakhin@gmail.com*

Подписано к печати 04.06.2021. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,5 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 04.12.2021.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7