

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (50) ' 2021

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2021, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

М. А. МУРАТОВ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
С. В. АБЛАМЕЙКО	академик НАН Беларуси, профессор, доктор технических наук
К. В. ВОРОНЦОВ	профессор, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТАНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
Л. М. МЕСТЕЦКИЙ	профессор, доктор технических наук
А. Б. МУРАВНИК	доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук
В. И. ЧИЛИН	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор): mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Mustafa MURATOV	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Sergey ABLAMEYKO	Full member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, Doctor of Engineering Sciences
Konstantin VORONTSOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoly GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Leonid MESTETSKY	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Andrey MURAVNIK	Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valery CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir CHILIN	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V. Uncertainty and discrete maximin.....	7
Андреищева Е. Н. Связь обратного преобразования Шура обобщенного класса Неванлинны с рациональными матричными функциями специального вида.....	32
Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Применение метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила-Теодореску.....	48
Раецкий К. А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями.....	65
Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции	81
Шмуклер В. И., Починка О. В. Бифуркации, меняющие тип гетероклических кривых 3-диффеоморфизма Морса-Смейла.....	101
Рефераты.....	115
Список авторов номера.....	119

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V. Uncertainty and discrete maximin	7
Andreishcheva E. N. Connection between the inverse Schur transformation for generalized Nevanlinna functions with the rational matrix functions of special type.....	32
Afanasenkova Yu. V., Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. Application of the generalized degree method for constructing solutions of the Moisil-Teodorescu system of differential equations	48
Raetsky K. A. Construction of a motion model of a linear dynamic system with multi-point conditions	65
Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V, Kartanov A. A. On the correctness of mathematical models of diffusion and cathodoluminescence	81
Shmukler V. I., Pochinka O. V. On bifurcations that change the type of heteroclinic curves of a Morse-Smale 3-diffeomorphism	101
Abstracts	115
Authors	119

UDC: 519.833.2

MSC2010: 91A10

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-7-31>

UNCERTAINTY AND DISCRETE MAXIMIN

© V. I. Zhukovskiy

MOSCOW STATE UNIVERSITY NAMED AFTER LOMONOSOV
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© L. V. Smirnova

STATE UNIVERSITY OF HUMANITIES AND TECHNOLOGY
ZELENAYA, 22, OREKHOVO-ZUEVO, 142611, RUSSIA
E-MAIL: smirnovalidiya@rambler.ru

UNCERTAINTY AND DISCRETE MAXIMIN.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V.

Abstract. The article consists of two parts. The first part is devoted to general questions that are related to uncertainty: causes and sources of uncertainties appearance, classification of uncertainties in economic systems and approach to their assessment. In the second part the concept of maximin, based on the principle of guaranteed result (Wald's principle) is considered. In this case, maximin is interpreted from viewpoint of two-level hierarchical game. On the basis of the maximin concept, a guaranteed solution in outcomes for K-stage positional single-criterion linear quadratic problem under uncertainty is formalized. An explicit form of the guaranteed solution for this problem is found.

Keywords: *Nash equilibrium, Berge equilibrium, uncertainty, maximin, difference (multi-stage) system.*

INTRODUCTION

The genealogical tree of game theory has roots going deep into centuries¹, powerful trunks and a thick crown in which numerous modern works on game theory are intertwined. A flowering and fruitful trunk — noncooperative games — was cultivated in 1949 by twenty-one-year-old American mathematician John Nash. In his 27 pages-long doctoral dissertation defended at Princeton University, Nash managed to separate out a «new face» of competition and defined a strategy profile, which was later called Nash equilibrium. After 45 years, J. Nash together with R. Selten and J. Harsanyi were awarded the Nobel Prize in Economic Sciences «for their pioneering analysis of equilibria

¹«The need for making decisions under conflict is as old as humanity itself.» A quote from [1, p. 10].

in the theory of non-cooperative games.» However, the concept of Nash equilibrium has a number of negative properties (internal instability, non-uniqueness, no equivalence, no interchangeability, improvability) [2, Section 2.2.3] and, especially striking, selfishness that permeates it. Really, following the concept of Nash equilibrium, each conflicting party seeks to improve only his result, paying no attention to the interests of others. In [3], we make an attempt to plant a new sprout, dictated by the altruism of the Golden Rule of ethics—the aspiration to help others, sometimes forgetting about oneself. The life-giving rain for this blossom to flourish is triggered by the following factors.

First, an integration of dynamic programming with the Lyapunov function method was proposed by Academician N.N. Krasovskii. As a result, Lyapunov’s brilliant idea to perform the stability analysis of the trajectories of a differential equation using only the definiteness of Lyapunov functions was transformed into the ability to find equilibrium strategies (in particular, Berge equilibrium) by the extreme properties of Bellman–Krasovskii functions.

Second, optimal solutions of guaranteeing control problems are unstable with respect to small disturbances and informational errors. In view of this fact, for regularization of optimal solutions, Academician Krasovskii and his followers introduced and developed the ideology of control procedures in which a real object is considered jointly with a similar reference system–guide. The motion of a guide, conceivable or modeled on a computer, acts as an ideal undisturbed process. Actually, this leads to a stabilization problem in a new game-theoretic statement. In the late 1970s, the control concept of differential and evolutionary systems based on a joint consideration of a real controlled object and an auxiliary model system (guide) was further refined. A convenient tool on that way was a uniform description of the dynamics of a model system suggested by Krasovskii. Guiding control will be adopted to identify a class of differential positional games for which there exists a Berge equilibrium in a corresponding differential positional game with «separated» dynamics.

Third, due to the conceptual specifics of Berge equilibrium, the Germeier convolution of the players’ payoff functions can be successfully applied not only in the static, but also in the dynamic case of the Golden Rule of ethics.

And *fourth*, in mathematical models the presence of uncertain factors (uncertainties) without any probabilistic characteristics, just known ranges (e.g., price jumps in a sales market, disruption and (or) variations in the nomenclature of supplies, man-made changes, etc.), and also multistage control (control at discrete time instants) were successfully taken into account. (As a matter of fact, many problems of economic planning, engineering and production control, military science, ecology, medicine are described by difference

equations: in practice, information on the state of a process is acquired and the process itself is controlled at discrete time instants).

1. UNCERTAINTY AND ITS TYPES

1.1. Causes of uncertainty. In the study of any system, including economic ones, the uncertainties affecting it have to be taken into account.

First, this is due to the peculiarities of the evolution of weakly structured systems—the systems described by both qualitative and quantitative characteristics with dominating qualitative, little-known or uncertain parameters.

Second, economic systems are controlled under insufficient knowledge of the state of an external environment, often with large investments of resources. Moreover, a special class of problems is to study economic systems that will operate at their limiting capability, in order to obtain maximum economic or any other benefits.

Third, the need to consider uncertainty becomes vital if separate, often conflicting subsystems are included into a system under study. In this case, an ambiguous solution cannot be found, and some kind of compromise has to be reached accordingly.

Fourth, both in the theory and practice of control, the starting point is some predetermined goals. In other words, for predicting the evolution of complex economic systems, we have to assign plans that are in essence are rather proactive than corrective.

Fifth, deterministic methods are often used in formal modeling of a particular economic system. With such an approach, certainty is introduced into those situations where it does not actually exist. The inaccuracy of setting parameters during calculations is neglected, or under certain assumptions, inaccurate parameters are replaced by expert appraisals or average values. The resulting violations of equalities, balance relations, etc. make it necessary to vary some parameters for precisely satisfying the given conditions and obtaining an acceptable output. Such situations may occur due to insufficient knowledge of objects and also because of a person or group of persons participating in the control process. The peculiarity of such systems is that a significant part of the information required for their mathematical description exists in the form of beliefs or recommendations of experts.

1.2. Notion of uncertainty and classification of uncertainty in economic systems. The incomplete and/or inaccurate information on the conditions of implementing a chosen strategy is its inherent uncertainty. Uncertainty is caused by *embarras du choix*. For an economic system, the concept of uncertainty characterizes a situation in which there is no reliable information about the possible conditions of the internal and external environment, completely or partially. For example, V.V.

Cherkasov [4] considered uncertainty to be an incomplete or inaccurate representation of the values of various parameters in the future, caused by various reasons and, above all, incomplete or inaccurate information on the conditions of implementing decision, including costs and results.

Information about the external factors of an economic system is never absolutely sufficient, at least because it comes from the past and the present whereas a desired behavior of the system is oriented towards the future. The smaller the completeness and accuracy of information is and the longer the period for which the behavior of the system is planned, the greater the uncertainty will be.

F. Knight [5] understood a situation of uncertainty as a lack of awareness and the need to act based on opinion rather than knowledge.

Cherkasov interpreted uncertainty as the continuous variability of conditions, a fast and flexible reconfiguration of production, the actions of competitors, market changes, etc. He called uncertainty a most typical cause of risk in management.

There exist various approaches to classify the types of uncertainty. In the roughest classification, two classes are distinguished, namely, «good» uncertainty (some statistical or probabilistic characteristics for unknown factors are available) and «bad» uncertainty (such characteristics cannot be obtained in principle). Note that both types of uncertainty arising in real problems are taken into account using appropriate methods; for example, see [1].

In [6], the following classification of uncertainties was suggested:

- by degree of uncertainty: probabilistic, linguistic, interval, and complete uncertainty;
- by the nature of uncertainty: is parametric, structural, situational, and strategic uncertainty;
- by the use of information acquired during control: eliminable and ineliminable uncertainty.

V.S.Diev [7] presented more detailed classifications of uncertainties in modern economic systems.

1.3. Sources of uncertainty in economic systems. Considering the sources of uncertainty, we will distinguish three interconnected factors that cause uncertainty in economic systems [8].

1. The complexity factor: as a rule, an economic system is a large system that cannot be assigned a complete formal description, as well as a system with a variable

structure, a nontrivial hierarchy and internal contradictions that is often controlled using fuzzy criteria.

2. The human factor: human participation is an essential element that determines the behavior of an economic system at different levels and also affects various aspects of its operation. Moreover, the human factor manifests itself in the fact that many concepts, characteristics and parameters of economic behavior are formulated in natural language without an exact formal equivalent, which creates considerable (sometimes insurmountable) difficulties in modeling.
3. The external environment factor: for any economic system, the influence of other (external) systems has to be taken into account, which are often in conflict with the former.

In view of the above factors causing uncertainty in economic systems, we will divide the sources of uncertainty into three groups as follows.

1. Insufficient information about an economic system itself and about the processes running within it. Consequently, full-edged conclusions or assumptions on the evolution of an economic system and the final results cannot be made. In turn, such a situation may be due to
 - few data and other reasons that can be partially eliminated by organizing a system of timely and complete information support (for example, in technical systems, state monitoring is performed using information-measuring systems with inevitable errors, and the number of monitored parameters is limited, which do not prevent the appearance of some uncontrolled technical conditions, possibly causing disasters; in economic systems, the set of possible outcomes is well known, but the probability of a particular outcome can be unknown);
 - imperfect tools used to study an economic system, modeling errors, computational complexity, etc.
2. Accidental or deliberate counteraction of other economic agents. Such counteraction may have the form of violated contractual obligations by suppliers, uncertain demand for products, difficulties in marketing, or the behavior of local and regional authorities, both official and criminal. In addition, there are uncertainties caused by the competitive environment predetermining to a large extent the fate of a particular enterprise (e.g., industrial espionage, the penetration of competitors into trade secrets, and other effects on the internal affairs of a given enterprise).
3. The effect of random external factors that cannot be predicted due to their unexpectedness. Also, the impossibility of predicting further evolution of processes

due to the objectively inaccurate and ambiguous knowledge of the environment at the modern stage of science development. In particular,

- the uncertainties caused by insufficient knowledge of nature (e.g., the exact composition of supply of fish for a given fishing area in a given season is unknown);
- the uncertainties of the natural phenomena themselves (meteorological conditions affecting the average catch of fish, the mobility of supply of fish, etc.).

Thus, uncertainty is associated either with an insufficient amount of necessary information, or with the objective impossibility to acquire it and suggest reliable scenarios for the evolution of economic processes. In any case, the degree of uncertainty is determined by information, its amount, quality and timeliness.

2. MAXIMIN IN STATIC CASE

This subsection is devoted to the single-criterion choice problem under uncertainty, which is described by an ordered triplet $\Gamma_1 = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$.

Here the choice of a strategy (alternative) x from a set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is in charge of a decision-maker (DM). In economic systems, the role of DMs belongs to the general managers of industrial enterprises and business companies, the heads of states, sellers (suppliers) and buyers (customers); in mechanical control systems, to the captains of ships or aircrafts and the chiefs of control centers. In other words, a DM has right or authority to make decisions, give instructions and control their implementation. Each DM chooses from a given set of admissible actions, which will be called strategies. More specifically, a strategy is comprehended as a rule that associates with each state of the player's awareness a certain action (behavior) from a set of admissible actions (behaviors) given this awareness. Consider the case in which the DM's admissible strategies are the elements x of a well-defined set X . For a seller, a strategy is the price of one good; for the general manager of an industrial enterprise, strategies are production output, the amount of raw materials and equipment purchased, investments, innovations and implementation of new technologies, wages reallocation, penalties, bonuses, and other incentive and punishment mechanisms; for the captain of a ship, a strategy is own course (rudder angle, the direction and magnitude of reactive force).

In the single-criterion choice problem under uncertainty Γ_1 , the DM's goal is to choose an appropriate strategy $x \in X$ for maximizing the values of a scalar criterion $f(x, y)$ (outcomes). The DM has to consider a possible realization of any uncertainty $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$ within given limits. The value of $f(x, y)$ may indicate profit or production output. If the

criterion $f_1(x, y)$ is associated with total losses or production cost (to be minimized), then the problem Γ_1 should be solved with $f(x, y) = -f_1(x, y)$, since

$$\max_{x \in X} f(x, y) = -\min_{x \in X} f_1(x, y).$$

Now, we proceed to uncertainty. The following situation seems common for almost everybody: it is necessary to reach a place of employment from home. First of all, a person in such conditions (further called passenger) has to decide which means of transportation to use (subway, bus, tramcar, suburban electric train, etc.). Choosing any means of transportation (strategy), passenger inevitably encounters incomplete and/or inaccurate information: delays or breakdowns of vehicles, sudden changes of schedule, strikes of drivers, weather fluctuations, crashes on routes, and other uncertainties. As was noted by O. Holmes, «The longing for certainty. . . is in every human mind. But certainty is generally illusion.»² At best passenger knows the variation ranges of these factors, without any probabilistic appraisals. Nevertheless, he/she has to make decision anyway! As a matter of fact, the incomplete and/or inaccurate information about the conditions under which his strategy is implemented makes its inherent uncertainty. In the problem Γ_1 denote by y a numerical value of uncertainty and by Y the set of all such values. We assume that the set Y is a priori given and non-empty.

Hereinafter, in accordance with the subject matter of this article, the n -dimensional vector x will be called the DM's strategy in the problem Γ_1 and $f(x, y)$ will be called his payoff function; the value of $f(x, y)$ for a specific pair $(x, y) \in X \times Y$ will be called an outcome for the strategy $x \in X$ and uncertainty $y \in Y$.

Interestingly, Γ_1 can be interpreted as a one-player game with nature.

First, we will introduce the concept of a guaranteed solution in outcomes of the problem Γ_1 and also its hierarchical interpretation using a two-level hierarchical game in the case where the interval uncertainty $y \in Y$ in Γ_1 is replaced by the strategic uncertainty $y(x) : X \rightarrow Y, y(\cdot) \in Y^X$.

2.1. Formalization of guaranteed solution in outcomes. The first attempt to solve the problem Γ_1 was undertaken by Wald in 1939; see [9]. It was based on the maximin principle, also known as the principle of guaranteed result. Let us formulate this principle in the following way.

²Oliver Wendell Holmes, Jr., byname The Great Dissenter, (1841–1935), was a justice of the United States Supreme Court, U.S. legal historian and philosopher who advocated judicial restraint.

Definition 1. The guaranteed solution in payoffs (outcomes) of the problem Γ_1 is a pair $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$ determined by the chain of equalities

$$f^g = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y). \quad (1)$$

The strategy x^g is called guaranteeing, and the value f^g the guaranteed outcome.

The whole essence of this solution can be explained as follows: choosing and using a strategy x^g , the DM guarantees an outcome f^g under any uncertainty $y \in Y$, since $f^g = \min_{y \in Y} f(x^g, y)$ implies

$$f(x^g, y) \geq f^g \quad \forall y \in Y.$$

The maximin (1) includes two successive operations, namely, *first, the inner minimum*, which is intended to find an m -dimensional vector function $y(\cdot) : X \rightarrow Y$ such that, for each $x \in X$,

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in Y} f(x, y),$$

and hence for each $x \in X$ it follows that

$$f(x, y) \geq f(x, y(x)) \quad \forall y \in Y; \quad (2)$$

second, the outer maximum, which is intended to construct a strategy x^g such that

$$\max_{x \in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g,$$

and hence

$$f^g = f(x^g, y(x^g)) \geq f(x, y(x)) \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

In fact, formula (3) means that among all minima of $f(x, y(x))$ in (2) for different $x \in X$, we choose the value f^g maximizing $f(x, y(x))$ in x , which is implemented on the strategy x^g .

Remark 1. Recall that we consider a special class of uncertainties of the form Y^X , which consists of the functions $y(x)$ with the domain X and the codomain Y . (The latter set is yielded by the inner minimum (2)). The actions of uncertainty are treated as the behavior of another (dummy) player, which has no payoff function and directs every effort to do as much harm to the DM as possible. (This is a strategic uncertainty in the terminology of Yu. B. Germeier.) The dummy player can use «any conceivable information. In particular, he/she possibly knows the DM's strategy.» [12, p. 353]. In this case, the so-called informational discrimination of the DM takes place [12, p. 353].

The inner minimum in (2) leads to a parametric problem: for each $x \in X$, find an m -dimensional vector function $y(\cdot) \in Y^X$ such that

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)). \tag{4}$$

In this case, the following result should be taken into account.

Proposition 1. ([10, pp. 17–18]; [11, p. 54]) Let a scalar function $f(x, y)$ be continuous on $X \times Y$ and also let the sets X and Y be compact. Then

a) the function

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) \tag{5}$$

is continuous on X , and the multivalued mapping

$$Y(x) = \{y^* \in Y | f(x, y^*) = \min_{y \in Y} f(x, y)\} \quad \forall x \in X,$$

i.e., $Y(x) : X \rightarrow Y$; has a Borel measurable selector $y(x)$.

b) Moreover, if $f(x, y)$ is strictly convex in $y \in Y$ for each $x \in X$ (i.e., for any $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, $y^{(1)} \neq y^{(2)}$, and for each $x \in X$, the inequality

$$f(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda)y^{(2)}) < \lambda f(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda)f(x, y^{(2)})$$

holds for any constants $\lambda \in (0; 1)$ and the set Y is convex, then the vector function $y(x)$ (5) is continuous on X .

Corollary 1. If a scalar function $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$ and the sets X and Y are compact, then the function

$$\max_{x \in X} f(x, y) \tag{6}$$

is continuous on Y (because $\min_{x \in X} [-f(x, y)] = -\max_{x \in X} f(x, y)$).

The following concepts are well known in game theory and will be used in further presentation: a) the strategy x^g defined by (1) is called the maximin strategy, and f^g is called the maximin; by analogy, the uncertainty y^0 from

$$f^0 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} f(x, y^0)$$

is called the minimax uncertainty, and the value f^0 is called the minimax in the problem Γ_1 ; b) a pair $(x^g, y^0) \in X \times Y$ is a saddle point in the problem Γ_1 if

$$\max_{x \in X} f(x, y^0) = f(x^g, y^0) = \min_{y \in Y} f(x^g, y), \tag{7}$$

or equivalently,

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = f(x^g, y^0) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y),$$

where x^g is the maximin strategy and y^0 is the minimax uncertainty in the problem Γ_1 .

Proposition 2. Assume that in the problem Γ_1 the sets X and Y are compact and the function $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$. Then this problem has a guaranteed solution in outcomes (payoffs).

Proof. By Proposition 1 the function $\min_{y \in Y} f(x, y)$ is continuous in $x \in X$ on the compact set X . According to the Weierstrass extreme-value theorem, a continuous function on a compact set X achieves maximum. \square

2.2. Interpretation of maximin within two-level hierarchical game. Consider the following two-player game with a fixed sequence of moves. Assume player 1 (DM) is given priority in actions over player 2. Such a statement with the first move of player 1 describes well, e.g., an interaction of conflicting parties in two-level hierarchical systems. We will also accept the hypothesis that, whenever the outcome depends on the choice of player 2 only, he/she always minimizes the payoff function $f(x, y)$. Player 1 is informed about this behavior.

Then player 1 takes advantage of the first move, reporting his strategy $x \in X$ to player 2. Making the second move in this game, player 2 responds with a counter strategy $y(x) : X \rightarrow Y$ that minimizes the function $f(x, y(x))$ for each $x \in X$. If for each x this minimum is achieved at a unique point $y(x)$, then the best (guaranteed) result of player 1 makes up

$$f^g = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = \min_{y \in Y} f(x^g, y).$$

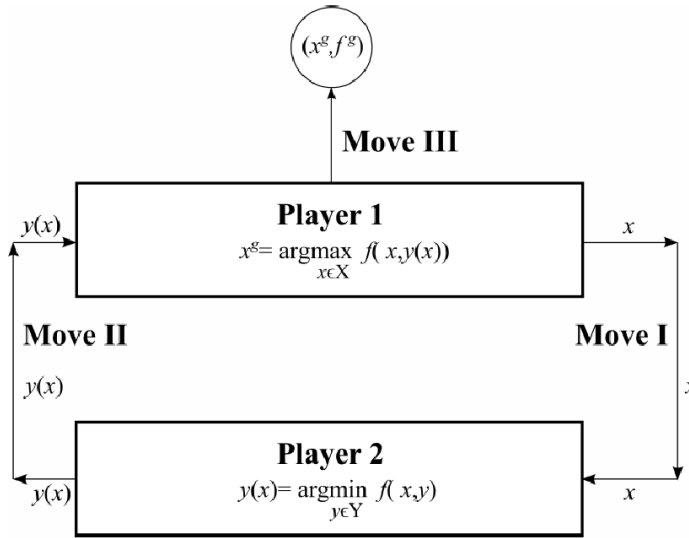
The sequence of moves of the DM and player 2 is illustrated in figure:

As a result, the DM prefers the maximin strategy x^g , which yields the guaranteed payoff

$$f^g \leq f(x^g, y) \quad \forall y \in Y.$$

Note that, for all $x \in X$, this payoff exceeds all other guaranteed payoffs:

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \leq f^g \quad \forall x \in X.$$



3. MULTISTAGE MAXIMIN

For the difference statement of the linear-quadratic problem from section 2, the guaranteed solution in outcomes (maximin) is constructed using an appropriate modification of dynamic programming.

As the mathematical model, let us consider the ordered quadruple

$$\langle \Sigma, \mathfrak{A}, \mathcal{Z}_u, \mathcal{J}(U, Z_u, x_0) \rangle, \tag{8}$$

which will be called the K -stage positional single-criterion linearquadratic problem under uncertainty. We make several assumptions regarding (8) as follows.

- The controlled system Σ evolves over time in accordance with the vector linear difference equation

$$x(k + 1) = Ax(k) + u + z = f(k, x(k), u, z), \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

with the following notations: $k = 0, 1, \dots, K-1$ as time instants, i.e., partition points of an entire time interval $[0, K]$ on which the controlled discrete process Σ is evolving, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ as the value of the state vector x at a time instant $t = k$; $u \in \mathbb{R}^n$ as a DM's control action; $z \in \mathbb{R}^n$ as an uncertain factor, $(k, x(k))$ as a pair determining the position of (8) at a time instant k ; $(0, x_0)$ as an initial position; A as a constant matrix of dimensions $n \times n$.

- A DM's positional strategy $U(k)$ at a time instant k is identified with a vector function $u(k, x) = P(k)x$, where $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a constant matrix of dimensions $n \times n$. (This fact will be indicated by $U(k) \div u(k, x) = P(k)x$.) Hence, at a

time instant k an appropriate strategy is assigned by choosing a specific matrix $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ of dimensions $n \times n$.

Thus, an ordered collection

$$U = (U(0), U(1), \dots, U(K-1)) \div \\ \div (u(0, x), u(1, x), \dots, u(K-1, x)) = (P(0)x, P(1)x, \dots, P(K-1)x)$$

is a DM's strategy in the problem (8), the set of all such strategies U will be denoted by \mathfrak{U} .

- The set of strategic positional uncertainties $Z_u(k)$ at a time instant k will be denoted by $\mathfrak{Z}_u(k)$. It consists of

$$Z_u(k) \div z(k, x, u) = Q(k)x + R(k)u,$$

where $Q(k), R(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are constant matrices of specified dimensions. The special class of uncertainties that depend on the position (k, x) and also on the control action u has been selected due to the reasons discussed in Remark 1. As a result, the uncertainty in the problem (8) is described by the ordered collection

$$Z_u = (Z_u(0), Z_u(1), \dots, Z_u(K-1)) \div \\ \div (z(0, x, u), z(1, x, u), \dots, z(K-1, x, u)) = \\ = (Q(0)x + R(0)u, Q(1)x + R(1)u, \dots, Q(K-1)x + R(K-1)u);$$

the set of such uncertainties is denoted by \mathfrak{Z}_u .

The controlled process in the problem (8) has the following dynamics over time. Assume that the DM has chosen and adopted a specific strategy $U \in \mathfrak{U}$:

$$U \div (u(0, x), u(1, x), \dots, u(K-1, x)) = (P(0)x, P(1)x, \dots, P(K-1)x).$$

Also, let some uncertainty $Z_u \in \mathfrak{Z}_u$ have been realized in Σ regardless of this choice:

$$Z_u = (Z_u(0), \dots, Z_u(K-1)) \div (z(0, x, u), \dots, z(K-1, x, u)) = \\ = (Q(0)x + R(0)u, \dots, Q(K-1)x + R(K-1)u).$$

Substituting the above strategy U and uncertainty Z_u into (9), we obtain

$$x(1) = Ax_0 + u(0, x_0) + z(0, x_0, u(0, x_0)) = \\ = [A + P(0) + Q(0) + R(0)P(0)]x_0 = \\ = f(0, x_0, u(0, x_0), z(0, x_0, u(0, x_0))), \\ x(2) = [A + P(1) + Q(1) + R(1)P(1)]x(1) =$$

$$\begin{aligned}
 &= f(1, x(1), u(1, x(1)), z(1, x(1), u(1, x(1)))) \\
 &\quad \vdots \\
 x(K) &= [A + P(K - 1) + Q(K - 1) + R(K - 1)P(K - 1)]x(K - 1) = \\
 &= f(K - 1, x(K - 1), u(K - 1, x(K - 1)), \\
 &\quad z(K - 1, x(K - 1), u(K - 1, x(K - 1))))).
 \end{aligned}$$

This gives three sequences,

$$\begin{aligned}
 &\{x(k)\}_{k=0}^K, \\
 &\{u[k] = P(k)x(k)\}_{k=0}^K, \\
 &\{z[k] = Q(k)x(k) + R(k)P(k)x(k)\}_{k=0}^K,
 \end{aligned}$$

which form the criterion (also called the payoff or utility function of the DM)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(U, Z_u, x_0) &= x'(K)Cx(K) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{K-1} (u'[k]D(k)u[k] + z'[k]L(k)z[k]) = \\
 &= \Phi(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} F(k, x(k, u[k], z[k])).
 \end{aligned} \tag{10}$$

A value of the function (10) is called an outcome or DM's payoff. In formula (10), all matrices C , $D(k)$, $L(k)$, $P(k)$, $Q(k)$ and $R(k)$ of dimensions $n \times n$ are constant, and the matrices C , $D(k)$ and $L(k)$ are symmetric. Recall that the prime indicates transposition, for a symmetric matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, the expression $M > 0$ (< 0) shows that the quadratic form $u'Mu$ is positive (negative, respectively) definite; E_n is an identity matrix of dimensions $n \times n$; 0_n is a zero n -dimensional vector; finally, $Idem\{u \rightarrow u^g\}$ means the bracketed expression with u replaced by u^g . In addition, $detB$ denotes the determinant of a square matrix B .

At conceptual level, choosing his strategy $U \in \mathfrak{A}$, the DM seeks to maximize the outcome $\mathcal{J}(U, Z_u, x_0)$ in the problem (8) under any realization of the uncertainty $Z_u \in \mathfrak{Z}_u$. Definition 1 naturally leads to the following concept.

A pair $(U^g, \mathcal{J}^g[x_0]) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}$ will be called the guaranteed solution in outcomes of the problem (8) if there exists an uncertainty $Z_u^g \in \mathfrak{Z}_u$ such that

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^g[x_0] &= \max_{U \in \mathfrak{A}} \min_{Z_u \in \mathfrak{Z}_u} \mathcal{J}(U, Z_u, x_0) = \\
 &= \min_{Z_u \in \mathfrak{Z}_u} \mathcal{J}(U^g, Z_u, x_0) = \mathcal{J}(U^g, Z_u^g, x_0).
 \end{aligned} \tag{11}$$

In this case, U^g will be called the guaranteeing strategy, and $\mathcal{J}^g[x_0]$ the guaranteed outcome.

Remark 2. The concept of guaranteed solution in outcomes suggests the DM to use the strategy $U^g \in \mathfrak{A}$ in the problem (8) on two grounds as follows. First, the equality

$$\min_{Z_u \in \mathcal{Z}_u} \mathcal{J}(U^g, Z_u, x_0) = \mathcal{J}^g[x_0]$$

implies that $\mathcal{J}(U^g, Z_u, x_0) \geq \mathcal{J}^g[x_0]$ under any uncertainty realization of the uncertainty $Z_u \in \mathcal{Z}_u$. In other words, with this strategy the outcome will be not smaller than the guaranteed outcome $\mathcal{J}^g[x_0]$ (the lower bound on $\mathcal{J}(U^g, Z_u, x_0)$ over all $Z_u \in \mathcal{Z}_u$).

Second, for each strategy $U \in \mathfrak{A}$ the DM will obtain the guaranteed outcome $\min_{Z_u \in \mathcal{Z}_u} \mathcal{J}(U, Z_u, x_0)$, which is not greater than $\mathcal{J}^g[x_0]$.

Now, we introduce sufficient conditions for the existence of the multistage maximin (11) that are based on dynamic programming. At each time instant $k = K, K-1, K-2, \dots, 1, 0$, we will use the Bellman function

$$V^{(k)}(x) = x' \Theta(k)x,$$

with a symmetric matrix $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as well as scalar functions

$$\begin{aligned} W(k, x, u, z, V^{(k+1)}(Ax + u + z)) &= \\ &= W(k, x, u, z, (x'A' + u' + z')\Theta(k+1)(Ax + u + z)) = \\ &= W[k, x, u, z, \Theta(k+1)] = u'D(k)u + z'L(k)z + \\ &\quad + (x'A' + u' + z')\Theta(k+1)(Ax + u + z) \\ &\quad (k = K-1, K-2, \dots, 1, 0). \end{aligned} \tag{12}$$

Proposition 3. Let $\{V^{(k)}(x) = x'\Theta(k)x\}_{k=0}^{K-1}$, $\{u(k, x, \Theta(k+1)) = P(k, \Theta(k+1))x\}_{k=0}^{K-1}$ and $\{z(k, x, u, \Theta(k+1)) = Q(k, \Theta(k+1))x + R(k, \Theta(k+1))u\}_{k=0}^{K-1}$ be three sequences, the first composed of scalar functions and the last two of n -dimensional vector functions, that satisfy the following assumptions:

$$V^{(K)}(x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

for all $x, u \in \mathbb{R}^n$, $\Theta(k+1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, and $k = K-1, \dots, 1, 0$,

$$\begin{aligned} \min_z W[k, x, u, z, \Theta(k+1)] &= \\ &= W[k, x, u, z(k, x, u, \Theta(k+1)), \Theta(k+1)]; \end{aligned} \tag{14}$$

for each $x \in \mathbb{R}^n$, $\Theta(k+1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $k = K-1, \dots, 1, 0$,

$$\begin{aligned} \max_u W[k, x, u, z(k, x, u, \Theta(k+1)), \Theta(k+1)] &= \\ &= W[k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \\ & z(k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \Theta(k+1)), \Theta(k+1)]; \end{aligned} \tag{15}$$

for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $k = K-1, K-2, \dots, 1, 0$,

$$\begin{aligned} V^{(k)}(x) &= x' \Theta(k) x = W[k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \\ & z(k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \Theta(k+1)), \Theta(k+1)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Then for any initial state vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$, the guaranteed solution in outcomes ($U^g, \mathcal{J}^g[x_0]$) of the problem (8) has the following form: the guaranteed strategy is given by

$$U^g \div (u^g[0, x], u^g[1, x], \dots, u^g[K-1, x]),$$

where

$$u^g[k, x] = u(k, x, \Theta(k+1)) \quad (k = 0, 1, \dots, K-1),$$

and the guaranteed outcome is given by

$$\mathcal{J}^g[x_0] = V^{(0)}(x_0) = x_0' \Theta(0) x_0.$$

(The notations are the same as in (12). Formula (16) is used to successively find the matrices $\Theta(k)$ ($k = K-1, \dots, 1, 0$.)

Proof. This result can be established by a standard procedure, for example, see [13, pp. 366–367]. □

Remark 3. For each time instant ($k = 0, 1, \dots, K-1$), consider the auxiliary problem

$$\Gamma(k) = \langle \mathfrak{A}, \mathcal{Z}, W[k, x, u, z, \Theta(k+1)] \rangle,$$

where \mathfrak{A} is the set of strategies $U = (U(0), U(1), \dots, U(K-1)) \div (u(0, x), u(1, x), \dots, u(K-1, x))$ of the form $u(k, x) = P(k)x$; \mathcal{Z} denotes the set of uncertainties $z(k, x, u, \Theta(k+1)) = Q(k)x + R(k)u$; the criterion $W[k, x, u, z, \Theta(k+1)]$ is given by (12). Then merging the requirements (14) and (15) actually means the equalities

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathfrak{A}} \min_{z \in \mathcal{Z}} W[k, x, u, z, \Theta(k+1)] &= \\ = \min_{z \in \mathcal{Z}} W[k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), z, \Theta(k+1)] &= W[k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \\ z(k, x, u(k, x, \Theta(k+1)), \Theta(k+1)), \Theta(k+1)] &= W^g[k, x, \Theta(k+1)]. \end{aligned} \tag{17}$$

In other words, at each time instant $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ the DM implements the maximin (17) in the auxiliary problem $\Gamma(k)$. Consequently, according to Proposition 3, implementing the local maximin at each time instant $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$, the DM actually arrives at the global maximin (11) in the problem (8).

Taking advantage of Proposition 3, we will find an explicit form of the guaranteed solution in outcomes of the problem (8). Before doing it, let us present three auxiliary results. Recall that if a quadratic form $z'Gz$ is positive (negative) definite and $G = G' \in \mathbf{R}^{n \times n}$, then all n roots λ_i of the characteristic equation $\det[G - \lambda E_n] = 0$ are real and $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i < 0$, respectively).

Lemma 1. *Consider symmetric matrices $L(k-1) > 0$ and $\Theta(k) < 0$ of dimensions $n \times n$. The inequality*

$$L(k-1) + \Theta(k) > 0$$

holds if $\lambda(k-1) > \mu(k)$, where $\lambda(k-1)$ and $-\mu(k)$ are the least roots of the characteristic equations $\det[L(k-1) - \lambda E_n] = 0$ and $\det[\Theta(k) - \mu E_n] = 0$, respectively.

Proof. Let $\lambda(k-1)$ and $-\mu(k)$ be the least roots of the corresponding characteristic equations. In this case,

$$z'L(k-1)z \geq \lambda(k-1)z'z, \quad z'\Theta(k)z \geq -\mu(k)z'z \quad \forall z \in \mathbf{R}^n,$$

and hence

$$z'[L(k-1) + \Theta(k)]z \geq [\lambda(k-1) - \mu(k)]z'z > 0 \quad \forall z \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_n\}.$$

□

Lemma 2. *Consider symmetric constant matrices $D(k)$, C , $L(k-1)$, and $\Theta(k)$ of dimensions $n \times n$ such that*

$$D(k) < 0, C < 0, L(k-1) > 0, L(k-1) + \Theta(k) > 0. \quad (18)$$

Then the matrices

$$M(\Theta(k)) = \Theta(k)\{\Theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \Theta(k)]^{-1}\}\Theta(k),$$

$$\Theta(k-1) = A'M(\Theta(k)) \times \{M^{-1}(\Theta(k)) - [D(k) + M(\Theta(k))]^{-1}\}M(\Theta(k))A$$

are also symmetric, $M(\Theta(k)) < 0$, and $\Theta(k-1) < 0$ if

$$\det A \neq 0. \quad (19)$$

Proof. The symmetry of the matrices $M(\Theta(k))$ and $\Theta(k-1)$ follows from the properties $(AB)' = B'A'$, $[A^{-1}]' = [A']^{-1}$, $A'' = A$ and the two easily checked equalities $M(\Theta(k)) = M'(\Theta(k))$ and $\Theta(k-1) = \Theta'(k-1)$.

The negative definiteness of $M(\Theta(k))$ and $\Theta(k-1)$ is established by the chain of implications

$$\begin{aligned} \Theta(k) < 0 &\Rightarrow \det\Theta(k) \neq 0 \Rightarrow \exists\Theta^{-1}(k) \wedge \Theta^{-1}(k) < 0, \\ [L(k-1) + \Theta(k)] > 0 &\Rightarrow [L(k-1) + \Theta(k)]^{-1} > 0 \Rightarrow -[L(k-1) + \Theta(k)]^{-1} < 0, \\ \Theta^{-1}(k) < 0 \wedge -[L(k-1) + \Theta(k)]^{-1} < 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \Theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \Theta(k)]^{-1} < 0 = \{ \det\Theta(k) \neq 0 \} &\Rightarrow \\ \Rightarrow M(\Theta(k)) = \Theta(k)\{\Theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \Theta(k)]^{-1}\}\Theta(k) < 0; & \\ D(k) < 0 \wedge M(\Theta(k)) < 0 \Rightarrow [D(k) + M(\Theta(k))] - M(\Theta(k)) = D(k) < 0 = & \\ = \{ [14, \text{p. 89}] \} \Rightarrow M^{-1}(\Theta(k)) - [D(k) + M(\Theta(k))]^{-1} < 0; & \\ \det A \neq 0 \wedge M(\Theta(k)) < 0 \Rightarrow \det[AM(\Theta(k))] \neq 0, & \\ \det[AM(\Theta(k))] \neq 0 \wedge M^{-1}(\Theta(k)) - [D(k) + M(\Theta(k))]^{-1} < 0 \Rightarrow \Theta(k-1) = & \\ = A'M(\Theta(k))\{M^{-1}(\Theta(k)) - [D(k) + M(\Theta(k))]^{-1}\}M(\Theta(k))A < 0. & \end{aligned}$$

□

Corollary 2. Under conditions (18) and (19) (see Lemma 2), we have the implication

$$[\Theta(k) < 0] \Rightarrow [\Theta(k-1) < 0]. \quad (20)$$

In fact, the validity of (20) has been demonstrated by Lemma 2.

Remark 4. The concept of guaranteed solution in outcomes itself directly leads to the following design method of the guaranteed solution of the problem (8) using Proposition 3, see the stages described below. The Bellman functions $V^{(k)}(x)$ have to be constructed as quadratic forms $V^{(k)}(x) = x'\Theta(k)x$, with symmetric matrices $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Stage 1 ($k = K$). From (9), due to

$$V^{(K)}(x) = x'\Theta(K)x = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

find the matrix $\Theta(K) = C$.

Stage 2 ($k = K-1$). The function $W[K-1, x, u, z, \Theta(K)]$ (12) takes the form

$$\begin{aligned} W[K-1, x, u, z, \Theta(K)] &= u'D(K-1)u + z'L(K-1)z + \\ &+ (x'A' + u' + z')\Theta(K)(Ax + u + z). \end{aligned} \quad (21)$$

Checking the condition $L(K-1)+C = L(K-1)+\Theta(K) > 0$, construct $z(K-1, x, u, \Theta(K))$ in accordance with

$$\begin{aligned} & \min_z W[K-1, x, u, z, \Theta(K)] = \\ & = W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \Theta(K)), \Theta(K)] \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (22)$$

Next, calculate the vector function $u(K-1, x, \Theta(k))$ in accordance with

$$\begin{aligned} & \max_u W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \Theta(K)), \Theta(K)] = \\ & = W[K-1, x, u(K-1, x, \Theta(K)), \\ & z(K-1, x, u(K-1, x, \Theta(K)), \Theta(K)), \Theta(K)] = \overline{W}[K-1, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

and find the constant matrix $\Theta(K-1)$ of dimensions $n \times n$ from the identity

$$x'\Theta(K-1)x = \overline{W}[K-1, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

Thus, Stage 2 yields the n -dimensional vector function

$$u^g[K-1, x] = u(K-1, x, \Theta(K) = C) = P(K-1, \Theta(K))x$$

and also the symmetric matrix $\Theta(K-1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Then, repeating all operations of Stage 2 for $k = K-2$, obtain the vector function $u^g[K-2, x] = u(K-2, x, \Theta(K-1)) = P(K-2, \Theta(K-1))x$ and the matrix $\Theta(K-2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ of dimensions $n \times n$. And so on, for $k = K-3, \dots, 1$.

Finally, repeat the operations of Stage 2 for $k = 0$, replacing $\Theta(K)$ by $\Theta(1)$. For $k = 0$,

$$\begin{aligned} W[0, x, u, z, \Theta(1)] &= u'D(0)u + z'L(0)z + \\ &+ (x'A' + u' + z')\Theta(1)(Ax + u + z). \end{aligned}$$

Check the requirement $L(0) + \Theta(1) > 0$ and construct the vector function $z(0, x, u, \Theta(1))$ in accordance with

$$\begin{aligned} & \min_z W[0, x, u, z, \Theta(1)] = \\ & = W[0, x, u, z(0, x, u, \Theta(1)), \Theta(1)] \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Next, find the n -dimensional vector function $u(0, x, \Theta(1))$ in accordance with

$$\begin{aligned} & \max_u W[0, x, u, z(0, x, u, \Theta(1)), \Theta(1)] = \\ & = W[0, x, u(0, x, \Theta(1)), \\ & z(0, x, u(0, x, \Theta(1)), \Theta(1)), \Theta(1)] = \overline{W}[0, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

and also the matrix $\Theta(0)$ of dimensions $n \times n$ from the identity

$$x'\Theta(0)x = \overline{W}[0, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

As a result, the vector function $u^g[0, x] = u(0, x, \Theta(1)) = P(0, \Theta(1))x$ and the constant matrix $\Theta(0)$ of dimensions $n \times n$ are obtained.

Thus, for any initial state vector $x(0) = x_0 \neq 0_n$ in (9), the guaranteed solution in outcomes $(U^g, \mathcal{J}^g[x_0])$ of the problem (8) has the explicit form

$$\begin{aligned} U^g &\div (u^g[0, x], u^g[1, x], \dots, u^g[K - 1, x]), \\ u^g[k, x] &= u(k, x, \Theta(k + 1)) = P(k, \Theta(k + 1))x \quad (k = 0, 1, \dots, K - 1), \\ \mathcal{J}^g[x_0] &= x'_0\Theta(0)x_0. \end{aligned} \quad (24)$$

In view of the stages described in Remark 4, we may formulate the following result.

Proposition 4. Consider the problem (8) with

$$C < 0, \quad \det A \neq 0, \quad D(k) < 0, \quad L(k) > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, K - 1) \quad (25)$$

and let the sequence of matrices $\{\Theta(k)\}_{k=0}^K$ constructed by the recursive formulas

$$\begin{aligned} \Theta(K) &= C, \\ M(\Theta(K)) &= C[C^{-1} - (L(K - 1) + C)^{-1}]C, \\ \Theta(K - 1) &= A'M(\Theta(K))\{M^{-1}(\Theta(K)) - \\ &\quad - [D(K - 1) + M(\Theta(K))]^{-1}\}M(\Theta(K))A, \\ M(\Theta(K - 1)) &= \Theta(K - 1)[\Theta^{-1}(K - 1) - \\ &\quad - (L(K - 2) + \Theta(K - 1))^{-1}]\Theta(K - 1), \\ \Theta(K - 2) &= A'M(\Theta(K - 1))\{M^{-1}(\Theta(K - 1)) - \\ &\quad - [D(K - 2) + M(\Theta(K - 1))]^{-1}\}M(\Theta(K - 1))A, \\ &\quad \vdots \\ \Theta(k) &= A'M(\Theta(k + 1))\{M^{-1}(\Theta(k + 1)) - \\ &\quad - [D(k) + M(\Theta(k + 1))]^{-1}\}M(\Theta(k + 1))A, \\ M(\Theta(k)) &= \Theta(k)[\Theta^{-1}(k) - (L(k - 1) + \Theta(k))^{-1}]\Theta(k), \\ \Theta(k - 1) &= A'M(\Theta(k))\{M^{-1}(\Theta(k)) - [D(K - 1) + M(\Theta(k))]^{-1}\}M(\Theta(k))A, \\ &\quad \vdots \\ \Theta(1) &= A'M(\Theta(2))\{M^{-1}(\Theta(2)) - [D(1) + M(\Theta(2))]^{-1}\}M(\Theta(2))A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\Theta(1)) &= \Theta(1)[\Theta^{-1}(1) - (L(0) + \Theta(1))^{-1}]\Theta(1), \\ \Theta(0) &= A'M(\Theta(1))\{M^{-1}(\Theta(1)) - [D(0) + M(\Theta(1))]^{-1}\}M(\Theta(1))A \end{aligned} \quad (26)$$

be such that

$$L(k-1) + \Theta(k) > 0 \quad (k = K, K-1, \dots, 1). \quad (27)$$

Then for any initial state vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in equation (9), the guaranteed solution in outcomes $(U^g, \mathcal{J}^g[x_0])$ of the problem (8) has the form

$$\begin{aligned} U^g &\div (-[D(0) + M(\Theta(1))]^{-1}M(\Theta(1))Ax, \dots \\ &\dots, -[D(K-1) + M(\Theta(K))]^{-1}M(\Theta(K))Ax), \\ \mathcal{J}^g[x_0] &= x_0'\Theta(0)x_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Proof. In accordance with Stage 1, the matrix $\Theta(K)$ is $\Theta(K) = C < 0$ and the Bellman function at the time instant $k = K$ is given by

$$V^{(K)}(x) = x'\Theta(K)x = x'Cx.$$

Following the recommendations of Stage 2, we construct the scalar function (12) for $k = K-1$

$$\begin{aligned} W[K-1, x, u, z, \Theta(K)] &= u'D(K-1)u + z'L(K-1)z + \\ &+ (x'A' + u' + z')\Theta(K)(Ax + u + z), \end{aligned} \quad (29)$$

and find $z(K-1, x, u, \Theta(K))$ from (14), i.e.,

$$\min_z W[K-1, x, u, z, \Theta(K)] = Idem[z \rightarrow z(K-1, x, u, \Theta(K))].$$

Due to the above explicit form of $W[K-1, x, u, z, \Theta(K)]$, the vector function $z(K-1, x, u, \Theta(K))$ simultaneously minimizes the function

$$\begin{aligned} \varphi_1(K-1, x, u, z) &= z'L(K-1)z + \\ &+ z'\Theta(K)z + 2z'\Theta(K)(Ax + u) \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Here, the sufficient conditions can be written as

$$\begin{aligned} grad_z \varphi_1(K-1, x, u, z)|_{z(K-1, x, u, \Theta(K))} &= \\ &= \frac{\partial \varphi_1(K-1, x, u, z)}{\partial z}|_{z(K-1, x, u, \Theta(K))} = \\ &= 2[L(K-1) + \Theta(K)]z(K-1, x, u, \Theta(K)) + 2\Theta(K)(Ax + u) = 0_n \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (30)$$

and the Hessian has the form

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(K-1, x, u, z)}{\partial z^2} = 2[L(K-1) + \Theta(K)] > 0.$$

The last inequality is immediate from (27) with $k = K$. On the other hand, condition (30) implies, first,

$$z(K-1, x, u, \Theta(K)) = -[L(K-1) + \Theta(K)]^{-1} \Theta(K)(Ax + u), \quad (31)$$

and second,

$$\begin{aligned} & z'(K-1, x, u, \Theta(K))[L(K-1) + \Theta(K)]z(K-1, x, u, \Theta(K)) + \\ & + 2z'(K-1, x, u, \Theta(K))\Theta(K)(Ax + u) = \\ = & -z'(K-1, x, u, \Theta(K))[L(K-1) + \Theta(K)]z(K-1, x, u, \Theta(K)). \end{aligned}$$

Using this relation, equality (31) and the first row of formula (2) with $k = K$, we obtain the following chain of equalities from (29) with $z = z(K-1, x, u, \Theta(K))$:

$$\begin{aligned} & W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \Theta(K)), \Theta(K)] = \\ & = u'D(K-1)u + (x'A' + u')\Theta(K)(Ax + u) - \\ - & z'(K-1, x, u, \Theta(K))[L(K-1) + \Theta(K)]z(K-1, x, u, \Theta(K)) = \\ = & u'D(K-1)u + (x'A' + u')\Theta(K)\Theta^{-1}(K)\Theta(K)(Ax + u) - \\ - & (x'A' + u')\Theta(K)[L(K-1) + \Theta(K)]^{-1}\Theta(K)(Ax + u) = \\ = & u'D(K-1)u + (x'A' + u')\Theta(K)\{\Theta^{-1}(K) - \\ - & [L(K-1) + \Theta(K)]^{-1}\}\Theta(K)(Ax + u) = \\ = & u'D(K-1)u + (x'A' + u')M(\Theta(K))(Ax + u) = \\ = & u'[D(K-1) + M(\Theta(K))]u + \\ + & 2u'M(\Theta(K))(Ax + u) + x'A'M(\Theta(K))Ax. \end{aligned}$$

Now, we get back to (4), taking into account the formula

$$\begin{aligned} & W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \Theta(K)), \Theta(K)] = \\ = & u'D(K-1)u + (x'A' + u')M(\Theta(K))(Ax + u) = \\ = & u'[D(K-1) + M(\Theta(K))]u + \\ + & 2u'M(\Theta(K))(Ax + u) + x'A'M(\Theta(K))Ax. \end{aligned}$$

If the maximum in (4) is achieved at $u = u(K-1, x, \Theta(K))$, then

$$\max_u \varphi_2(K-1, x, u) =$$

$$= \max_u \{u'[D(K-1) + M(\Theta(K))]u + 2u'M(\Theta(K))Ax\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (32)$$

is also implemented at the same $u = u(K-1, x, \Theta(K))$. The sufficient conditions of this maximum can be written as

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_2(K-1, x, u)}{\partial u} \Big|_{u(K-1, x, \Theta(K))} = \\ & = 2[D(K-1) + M(\Theta(K))]u(K-1, x, \Theta(K)) + \\ & \quad + 2M(\Theta(K))Ax = 0_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (33) \\ & \frac{\partial^2 \varphi_1(K-1, x, u)}{\partial u^2} = 2[D(K-1) + M(\Theta(K))] < 0. \end{aligned}$$

The second requirement is satisfied due to $D(K-1) < 0$ (see (24) with $k = K-1$) and $M(\Theta(K)) < 0$. In addition, the matrix $M(\Theta(K))$ has symmetry by Lemma 2 with $k = K$.

From (33) it follows that, first,

$$u(K-1, x, \Theta(K)) = -[D(K-1) + M(\Theta(K))]^{-1}M(\Theta(K))Ax; \quad (34)$$

second,

$$\begin{aligned} & u'(K-1, x, \Theta(K))[D(K-1) + M(\Theta(K))]u(K-1, x, \Theta(K)) + \\ & + 2u'(K-1, x, \Theta(K))M(\Theta(K))Ax = -u'(K-1, x, \Theta(K))[D(K-1) + \\ & \quad + M(\Theta(K))]u(K-1, x, \Theta(K)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

In view of this identity, (34), and the second row of formula (2), we obtain

$$\begin{aligned} \overline{W}[K-1, x] &= W[K-1, x, u(K-1, x, \Theta(K))], \\ z(K-1, x, u(K-1, x, \Theta(K)), \Theta(K)), \Theta(K)] &= \\ &= -u'(K-1, x, \Theta(K))[D(K-1) + \\ & \quad + M(\Theta(K))]u(K-1, x, \Theta(K)) + \\ & + x'A'M(\Theta(K))M^{-1}(\Theta(K))M(\Theta(K))Ax = \\ &= x'A'M(\Theta(K))\{M^{-1}(\Theta(K)) - \\ & - [D(K-1) + M(\Theta(K))]^{-1}\}M(\Theta(K))Ax = \\ &= x'\Theta(K-1)x = V^{(K-1)}(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Moreover, by Corollary 2,

$$[\Theta(K)(= C) < 0] \Rightarrow [\Theta(K-1) < 0],$$

and by Lemma 2 the matrix $\Theta(K-1)$ is symmetric.

The same considerations can be applied to the case $k = K-2$ by simply replacing the matrix $\Theta(K)$ with $\Theta(K-1)$ and the number $K-1$ with $K-2$ in all formulas starting from (29). Following this approach, we establish the analogs of (34) and (35),

$$u(K-2, x, \Theta(K-1)) = -[D(K-2) + M(\Theta(K-1))]^{-1}M(\Theta(K-1))Ax,$$

and

$$V^{(K-2)}(x) = x'\Theta(K-2)x,$$

respectively, where the nonnegative definite matrices $M(\Theta(K-1))$ and $\Theta(K-2)$ are given by (19) with $k = K-1$.

Similar operations should be performed for $k = K-3, \dots, 1, 0$. By mathematical induction on k , for each $k = 0, 1, \dots, K-1$ we get

$$\begin{aligned} u(k, x, \Theta(k+1)) &= -[D(k) + M(\Theta(k+1))]^{-1}M(\Theta(k+1))Ax, \\ V^{(k)}(x) &= x'\Theta(k)x. \end{aligned} \tag{36}$$

Finally, the end of Remark 4 in combination with the first and second rows of formula (36) with $k = 0, 1, \dots, K-1$ and $k = 0$, respectively, allows us to prove (25). \square

Remark 5. For obtaining the guaranteed solution in outcomes of the linear-quadratic discrete single-criterion problem (8)–(11) using Proposition 4, we have to first, check the constraints (25), second, for $k = K, K-1, \dots$, construct the two sequences

$$\{\Theta(K), \Theta(K-1), \dots, \Theta(1), \Theta(0)\},$$

and

$$\{M(\Theta(K)), M(\Theta(K-1)), \dots, M(\Theta(1)), M(\Theta(0))\}$$

by the recursive relations (26); third, check whether the requirements (27) are satisfied; if so, analytically design the guaranteed solution in outcomes $(U^g, \mathcal{J}^g[x_0])$ by formulas (28).

CONCLUSION

The article consists of two parts. The first part is devoted to general questions that are related to uncertainty: causes and sources of uncertainties appearance, classification of uncertainties in economic systems and approach to their assessment. In the second part the concept of maximin, based on the principle of guaranteed result (Wald's principle) is considered. In this case, maximin is interpreted from viewpoint of two-level hierarchical game. On the basis of the maximin concept, a guaranteed solution in outcomes for K -stage positional single-criterion linear quadratic problem under uncertainty is formalized.

An explicit form of the guaranteed solution for this problem is found. The article opens the theoretical direction of the research of dynamic multi-stage positional games under uncertainty.

REFERENCES

1. WENTZEL, E. S. (1980) *Issledovanie operatsii: zadachi, printsipy, metodologiya (Operations Research: Problems, Principles, Methodology)*. Moscow: Nauka.
2. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2012) *Uravnoveshivanie konfliktov i prilozheniya (Equilibrating Conflicts and Applications)*. Moscow: URSS.
3. SALUKVADZE, M. E. and ZHUKOVSKIY, V. I. (2020) *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics*. Springer.
4. CHERKASOV, V. V. (1996) *Delovoi risk v predprinimatel'skoi deyatel'nosti (Business Risk in Entrepreneurship)*. Kiev: Libra.
5. KNIGHT, F. H. (1921) *Risk, Uncertainty, and Profit*. Boston: Houghton Mifflin.
6. MOISEEV, N. N. (1975) *Elementy teorii optimal'nykh sistem (Elements of the Theory of Optimal Systems)*. Moscow: Nauka.
7. DIEV, V. S. (2001) *Upravlencheskie resheniya: neopredelennost', modeli, intuitsiya (Managerial Decisions: Uncertainty, Models, Intuition)*. Novosibirsk: Novosibirsk Gos. Univ..
8. BEREZIN, S. F., LAVROVSKII, B. L., RYBAKOVA, T. A. AND SATANOVA, E. A. (1983) *Faktor neopredelennosti v mezhotraslevykh modelyakh (The Uncertain Factor in Interdisciplinary Models)*. Novosibirsk: Nauka.
9. WALD, A. (1939) Contribution to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypothesis. *Annals Math. Statist.* 10. p. 299–326.
10. ASHMANOV, S;A. and TIMOKHOV, A. V. (1991) *Teoriya optimizatsii v zadachakh i uprazhneniyakh (Optimization Theory in Problems and Exercises)*. Moscow: Nauka.
11. MOROZOV, V. V., SUKHAREV, A. G. and FEDOROV, V.V. (1986) *Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh (Operations Research in Problems and Exercises)*. Moscow: Vysshaya Shkola.

12. KRASOVSKII, N. N. and SUBBOTIN, A. I. (1985) *Pozitsionnye differentsial'nye igry (Positional Differential Games)*. Moscow: Nauka.
13. BOLTYANSKII, V. G. (1973) *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami (Optimal Control of Discrete Systems)*. Moscow: Nauka.
14. VOEVODIN, V. V. (1984) *Matritsy i vychisleniya (Matrices and Calculations)*. Moscow: Nauka.

УДК: 517.58

MSC2010: 47A58

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-32-47>

СВЯЗЬ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШУРА ОБОБЩЕННОГО КЛАССА НЕВАНЛИННЫ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ МАТРИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© Е. Н. Андреищева

ЧЕРНОМОРСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЕННО-МОРСКОЕ УЧИЛИЩЕ ИМ. П. С. НАХИМОВА
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
УЛ. ПАРКОВАЯ, 6, СЕВАСТОПОЛЬ, 299057, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: anda_el@mail.ru

CONNECTION BETWEEN THE INVERSE SCHUR TRANSFORMATION FOR GENERALIZED NEVANLINNA FUNCTIONS WITH THE RATIONAL MATRIX FUNCTIONS OF SPECIAL TYPE.

Andreishcheva E. N.

Abstract. In this paper we consider classical Schur transformation and inverse Schur transformation for generalized Nevanlinna functions. The function $N(z)$ is called a *generalized Nevanlinna functions with κ negative squares*, if it is meromorphic in \mathbb{C}^+ and the kernel

$$L_N(z, w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \left(= \frac{(1 - N(z))J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right)$$

has κ negative squares in $\text{hol}_+(N)$ — the domain of holomorphy of $N(z)$ in \mathbb{C}^+ . We denote this class of functions by \mathbf{N}_κ . We often extend the domain of definition of $N(z)$ to the open lower half plane \mathbb{C}^- by setting $N(z^*) = N(z)^*$ with $z \in \text{hol}_+(N)$ and by holomorphy to those points of the real axis where this is possible.

We study rational 2×2 - matrix functions $\Theta(z)$ which have a pole only in the point z_1^* , that is their entries are polynomials in $1/(z - z_1^*)$, and which are J_ℓ -unitary, that is, satisfy on the real line:

$$\Theta(z)J_\ell\Theta(z)^* = J_\ell, \quad z \in \mathbb{R}, \quad J_\ell := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

There the extension of the classical Schur transformation to generalized Schur functions as defined and studied for example, in the papers [3], [4], [5] and [6], played an important role.

In this paper we use the inverse Schur transformation which plays a main role. As fractional linear transformation, this inverse Schur transformation is according to (4) determined by a 2×2 -matrix function $\Theta(z)$. The connection between the Schur transformation and factorization of 2×2 -matrix functions is based on the fact that for generalized Nevanlinna functions the matrix functions $\Theta(z)$, corresponding to the inverse Schur transformation, are the elementary

J_ℓ -unitary factors. The minimal factorization of a given rational J_ℓ -unitary 2×2 -matrix function $\Theta(z)$ can be obtained by a repeated application of the Schur transformation which we call the Schur algorithm.

The reproducing kernel Pontryagin space associated with the kernel $L_N(z, w)$ with $z, w \in \text{hol}(N)$ will be denoted by $\mathcal{L}(N)$ and the reproducing kernel Pontryagin space associated with the same kernel but now with $z, w \in \text{hol}_+(N)$ will be denoted by $\mathcal{L}_+(N)$. The spaces coincide if there is a real interval where N is holomorphic: the elements of the one are the analytic continuations of the elements of the other.

In this paper with a given function $N(z) \in \mathbf{N}$ the reproducing kernel Pontryagin space for the kernel $L_N(z, w)$ from (1) is introduced and studied.

Theorems 1 and 2 are obtained from more general results from [10], [4] and [15].

Keywords: *indefinite metrics, Nevanlinna function, Pontryagin space, Schur transformation, reproducing kernel, factorization of rational matrix function.*

ВВЕДЕНИЕ

Функция $N(z)$ называется *обобщенной функцией Неванлинны с κ отрицательными квадратами*, если она мероморфна в \mathbb{C}^+ и ядро

$$L_N(z, w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \left(= \frac{(1 \quad -N(z)) J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right) \quad (1)$$

имеет κ неотрицательных квадратов в $\text{hol}_+(N)$ — области голоморфизма $N(z)$ в \mathbb{C}^+ . Обозначим этот класс функций \mathbf{N}_κ . Часто область определения $N(z)$ расширяется на открытую нижнюю полуплоскость \mathbb{C}^- , полагая $N(z^*) = N(z)^*$ для $z \in \text{hol}_+(N)$ по голоморфности в тех точках вещественной оси, где это возможно. Область голоморфности расширенной функции будет обозначаться $\text{hol}(N)$. Ядро $L_N(z, w)$, рассматриваемое в $\text{hol}(N)$, по-прежнему имеет κ отрицательных квадратов (см. [13]). При $\kappa = 0$ класс \mathbf{N}_0 состоит из всех *функций Неванлинны*. Это функции $N(z)$, которые являются голоморфными в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ так, что $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \text{hol}(N)$ и соблюдается условие $N(z^*)^* = N(z)$ и $\text{Im } N(z)/\text{Im } z \geq 0$ в этом множестве. Мы расширяем класс \mathbf{N}_0 , добавляя к нему функцию, тождественно равную ∞ . Расширенный класс также обозначается \mathbf{N}_0 , и мы полагаем $\mathbf{N} = \cup_{\kappa \geq 0} \mathbf{N}_\kappa$. Как $\mathbf{N}_\kappa^{z_1}$ мы обозначим класс функций из \mathbf{N}_κ , которые голоморфны в z_1 . Наконец, обозначим $\mathbf{N}^{z_1} = \cup_{\kappa \geq 0} \mathbf{N}_\kappa^{z_1}$. По-прежнему константа ∞ рассматривается как элемент \mathbf{N}^{z_1} . Функцию $f(z)$, определенную на подмножестве из \mathbb{C} , симметричном относительно вещественной оси, мы будем называть *вещественной*, если $f(z^*) = f(z)^*$. Таким образом, функции Неванлинны являются

вещественными, и полином по z является вещественным тогда и только тогда, когда его коэффициенты вещественны.

Напомним, что функция $s(z)$ называется *функцией Шура*, если она определена и голоморфна в открытом единичном диске \mathbb{D} и удовлетворяет условию $|s(z)| \leq 1$ для $z \in \mathbb{D}$. Если $s(z)$ по модулю не равна единичной константе, то ее *преобразование Шура* $\hat{s}(z)$ определяется посредством

$$\hat{s}(z) = \frac{1}{z} \frac{s(z) - s(0)}{1 - s(z)s(0)^*} \quad (2)$$

и также является функцией Шура. Функция $s(z)$ называется *обобщенной функцией Шура с κ отрицательными квадратами*, если она мероморфна в \mathbb{D} , и ядро

$$K_s(z, w) = \frac{1 - s(z)s(w)^*}{1 - zw^*}, \quad z, w \in \text{hol}(s),$$

имеет κ отрицательных квадратов. Расширение преобразования Шура (2) для обобщенных функций Шура описано в [1], [10] и [14].

2×2 -матричная функция

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \quad (3)$$

определяет дробное линейное преобразование $\mathcal{T}_{\Theta(z)}$ на множестве комплексных функций $N(z)$ соотношением

$$\mathcal{T}_{\Theta(z)}(N(z)) = \frac{a(z)N(z) + b(z)}{c(z)N(z) + d(z)}. \quad (4)$$

Оно обладает свойствами $\mathcal{T}_{\Theta_1(z)\Theta_2(z)}(N(z)) = \mathcal{T}_{\Theta_1(z)}(\mathcal{T}_{\Theta_2(z)}(N(z)))$ так, что если определена $\Theta(z)^{-1}$, то

$$\mathcal{T}_{\Theta(z)^{-1}}(N(z)) = \mathcal{T}_{\Theta(z)}^{-1}(N(z)).$$

Связь между преобразованием Шура и разложением 2×2 -матричных функций основана на том факте, что, по аналогии с преобразованием Шура (2) для обобщенных функций Неванлинны, матричные функции $\Theta(z)$, соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными J_ℓ -унитарными множителями. Следовательно, минимальное разложение данной рациональной J_ℓ -унитарной 2×2 -матричной функции $\Theta(z)$ может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура.

Для данной функции $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$ мы введем два дробных линейных преобразования $\hat{N}_S(z)$, $\hat{N}(z)$, связанные простым соотношением $\hat{N}_S(z) = -\hat{N}(z)^{-1}$. $\hat{N}_S(z)$

формально подобно классическому преобразованию Шура (2), однако $\widehat{N}(z)$ для наших целей оказывается более подходящим. Поэтому в данной статье мы называем $\widehat{N}(z)$ преобразованием Шура для обобщенных функций Неванлинны.

Пусть $z_1 \in \mathbb{C}^+$ — фиксирована. Рассмотрим функцию $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$, которая не равна вещественной константе или ∞ , и обозначим ее коэффициенты Тейлора в точке z_1 , как ν_j , $j = 0, 1, 2, \dots$:

$$N(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j (z - z_1)^j. \tag{5}$$

С $N(z)$ связаны два дробных линейных преобразования [10]:

$$\widetilde{N}_S(z) = \frac{N(z) - \alpha(z)}{|\nu_0|^2 - \beta(z)N(z)}, \tag{6}$$

$$\widetilde{N}(z) = \frac{\beta(z)N(z) - |\nu_0|^2}{N(z) - \alpha(z)}; \tag{7}$$

очевидно, что $\widetilde{N}(z) = -1/\widetilde{N}_S(z)$. Функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, используемые в (6) и (7), зависят от условия $\text{Im } \nu_0 \neq 0$ или $\text{Im } \nu_0 = 0$.

Случай $\text{Im } \nu_0 \neq 0$:

В этом случае функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ линейны и определяются следующим образом:

$$\alpha(z) = \frac{\nu_0(z - z_1^*) - \nu_0^*(z - z_1)}{z_1 - z_1^*} = \nu_0 + \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}(z - z_1), \tag{8}$$

$$\beta(z) = \frac{\nu_0^*(z - z_1^*) - \nu_0(z - z_1)}{z_1 - z_1^*} = \nu_0^* - \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}(z - z_1). \tag{9}$$

Случай $\text{Im } \nu_0 = 0$:

В этом случае сначала определим вещественный полином $p(z)$. Так как $N(z)$ тождественно не равна вещественной константе, существует наименьшее $k \geq 1$, при котором $\nu_k \neq 0$. Определим формально комплексные числа a_j по

$$(N(z) - \nu_0) \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_1)^j = (z - z_1)^k (z - z_1^*)^k, \tag{10}$$

в частности,

$$a_j \nu_k + a_{j-1} \nu_{k+1} + \dots + a_0 \nu_{k+j} = \binom{k}{j} (z - z_1^*)^{k-j}, \quad j = 0, 1, \dots, k. \tag{11}$$

В качестве $p(z)$ определим полином

$$p(z) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z - z_1)^j + \sum_{j=k}^{2k-1} b_j(z - z_1)^j \quad (12)$$

степени $\leq 2k - 1$, где коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{k-1} вычисляются по (10), а коэффициенты $b_j, j = k, k + 1, \dots, 2k - 1$, определяются из условия $p(z^*) = p(z)^*$. Благодаря этому свойству $p(z)$, коэффициенты b_j и, следовательно, $p(z)$ определены однозначно. Покажем это. Из (12) и требования $p(z) = p(z^*)^*$ получаем

$$\sum_{j=k}^{2k-1} b_j(z - z_1)^j = \sum_{j=0}^{k-1} a_j^*(z - z_1^*)^j - \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z - z_1)^j + \sum_{j=k}^{2k-1} b_j^*(z - z_1^*)^j.$$

Беря i -ые производные от обеих частей, $i = 0, 1, \dots, k - 1$, и вычисляя их в z_1^* , получаем систему k уравнений с k неизвестными $b_k, b_{k+1}, \dots, b_{2k-1}$:

$$\sum_{j=k}^{2k-1} b_j \frac{j!}{(j-i)!} (z_1^* - z_1)^{j-i} = i! a_i^* - \sum_{j=i}^{k-1} a_j \frac{j!}{(j-i)!} (z_1^* - z_1)^{j-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Так как матрица коэффициентов этой системы является обратимой, эти неизвестные определяются однозначно. Наконец, определим функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ следующим образом:

$$\alpha(z) = \nu_0 + \frac{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}{p(z)}, \quad \beta(z) = \nu_0 - \frac{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}{p(z)}. \quad (13)$$

В статье вводится и изучается пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром $L_N(z, w)$ из (1) для заданной функции $N(z) \in \mathbf{N}$.

1. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУРА

Далее описывается не преобразование Шура, а обратное преобразование, которое играет значимую роль. Как и дробное линейное преобразование, это обратное преобразование Шура определено, согласно (4), для 2×2 -матричной функции $\Theta(z)$, которую мы сейчас рассмотрим. Для заданной функции $N(z) \in \mathbf{N}$, не являющейся линейной и не имеющей вид $N(z) = \alpha(z)$, функцию $\tilde{N}(z)$ запишем в виде:

$$N(z) = \mathcal{F}_{\Psi(z)}(\tilde{N}(z)).$$

Второе преобразование — удаление возможного полюса $\tilde{N}(z)$ в z_1 :

$$\tilde{N}(z) = \mathcal{F}_{\tilde{\Psi}(z)}(\hat{N}(z));$$

здесь, понятно, $\tilde{\Psi}(z)$ — единичная матрица I_2 размером 2×2 , если функция $\tilde{N}(z)$ голоморфна в z_1 . Теперь обратное преобразование Шура может быть записано, как

$$N(z) = \mathcal{T}_{\Psi(z)}(\tilde{N}(z)) = \mathcal{T}_{\Psi(z)}(\mathcal{T}_{\tilde{\Psi}(z)}(\hat{N}(z))) = \mathcal{T}_{\Theta}(z)(\hat{N}(z)) \quad (14)$$

для

$$\Theta(z) = \Psi(z)\tilde{\Psi}(z).$$

Такая матричная функция $\Theta(z)$ называется *матрица коэффициентов, связанная с обратным преобразованием Шура для $N(z)$* .

Обратное преобразование Шура может быть записано в виде:

$$N(z) = \frac{\alpha(z)(\hat{N}(z) + h(z) + h(z^*)^*) - |\nu_0|^2}{\hat{N}(z) + h(z) + h(z^*)^* - \beta(z)},$$

где функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ зависят от того, соблюдается ли $\text{Im } N(z_1) \neq 0$ или $\text{Im } N(z_1) = 0$ (см. (8), (9) и (13)). Теперь нетрудно видеть, что матрицы $\Psi(z)$ и $\tilde{\Psi}(z)$ могут быть выбраны следующим образом; здесь и далее мы полагаем

$$b_\ell(z) = \frac{z - z_1}{z - z_1^*}.$$

Случай $\text{Im } \nu_0 \neq 0$:

$$\Psi(z) = \left(I_2 + (b_\ell(z) - 1) \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell}{\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u}} \right), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nu_0^* \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

видно, что $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} = \nu_0 - \nu_0^* \neq 0$

Случай $\text{Im } \nu_0 = 0$:

$$\Psi(z) = \left(b_\ell(z)^k I_2 - \frac{p(z)}{(z - z_1^*)^{2k}} \mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell \right), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (16)$$

видно, что в этом случае $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} = \nu_0 - \nu_0^* = 0$.

Наконец, в обоих случаях для матрицы $\tilde{\Psi}(z)$ имеем: $\tilde{\Psi}(z) = I_2$, если $\tilde{N}(z)$ голоморфна в z_1 , иначе

$$\tilde{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} 1 & h(z) + h(z^*)^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b_\ell(z)^q, \quad (17)$$

где q — порядок полюса $\tilde{N}(z)$ в точке z_1 и $h(z)$ — главная часть ряда Лорана для $\tilde{N}(z)$ в z_1 . Обратите внимание, что элементы $\Psi(z)$ имеют полюс только в z_1^* , и скалярный

множитель $b_\ell(z)^q$ в определении $\tilde{\Psi}(z)$ гарантирует, что все элементы этой матрицы обладают таким же свойством. Матричная функция в (16) является аналогом матричной функции, впервые предложенной Шамфи [9] в случае окружности.

Следующая теорема содержит некоторую информацию о преобразованиях с матричной функцией вида (16).

Теорема 1. Пусть $\Theta(z)$ имеет вид

$$\Theta(z) = b_\ell(z)^k I_2 - \frac{p(z)}{(z - z_1^*)^{2k}} \mathbf{u} \mathbf{u}^* J_\ell, \quad 0 \neq \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad ab^* = a^*b,$$

где k — целое, $k \geq 1$, $p(z)$ — вещественный полином степени не больше $2k - 1$ и $p(z_1) \neq 0$. Пусть $N_1(z) \in \mathbf{N}$, $N_1(z) \not\equiv \infty$ и пусть $N_2(z) = \mathcal{T}_{\Theta(z)}(N_1(z))$

1. Если $N_2(z)$ имеет полюс в z_1 , $N_1(z)$ голоморфна в z_1 и $bN_1(z_1) \neq a$, то $b = 0$, следовательно, $a \neq 0$ и

$$N_1(z) = N_2(z) + \frac{|a|^2 p(z)}{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}, \quad (18)$$

при этом $\frac{-|a|^2 p(z)}{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}$ является суммой главных частей $N_2(z)$ в точках z_1 и z_1^* .

2. Если $N_2(z)$ голоморфна в z_1 и имеет разложение в ряд Тейлора

$$N_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j (z - z_1)^j, \quad \nu_j \in \mathbb{C},$$

и $N_1(z)$ либо имеет полюс в z_1 и не имеет вид (18), либо голоморфна в z_1 и $bN_1(z_1) \neq a$, то $b \neq 0$, $\nu_0 = a/b$, $\nu_1 = \dots = \nu_{k-1} = 0$, $\nu_k \neq 0$ и $|b|^2 p(z)$ получается из $N_2(z)$ по (10) при замене $N(z)$ на $N_2(z)$; тогда однозначно определен вещественный полином степени не более $2k - 1$ такой, что $|b|^2 p^{(j)}(z_1) = j! a_j$, $j = 0, 1, \dots, k - 1$.

В пункте 1) теоремы функции $N_1(z)$ и $N_2(z)$ связаны с функциями $\hat{N}(z)$ и $\tilde{N}(z)$ соответственно в определении преобразования Шура: предположение, что последняя последняя функция имеет полюс в z_1 подразумевает, что $\Theta(z)$ имеет вид $\tilde{\Psi}(z)$. В пункте 2) обе функции связаны с $\tilde{N}(z)$ и $N(z)$ соответственно: в определении преобразования Шура, если $\tilde{N}(z)$ голоморфна в z_1 , то [10]

$$\tilde{N}(z_1) = \nu_0 - \frac{(z_1 - z_1^*)^k}{b_k - a_k} \neq \nu_0,$$

что соответствует предположению $bN_1(z_1) \neq a$; если $\tilde{N}(z)$ имеет полюс в z_1 , то можно показать, что $\hat{N}(z) \neq N(z)$, что соответствует предположению о том, что (18) не выполняется.

Доказательство. Равенство $N_2(z) = \mathcal{J}_{\Theta(z)}(N_1(z))$ полностью выглядит, как

$$N_2(z) = \frac{[(z - z_1)^k(z - z_1^*)^k - ab^*p(z)]N_1(z) - |a|^2p(z)}{|b|^2p(z)N_1(z) + [(z - z_1)^k(z - z_1^*)^k - a^*bp(z)]}.$$

1) Если $b \neq 0$, то $a/b \in \mathbb{R}$, и знаменатель равен

$$|b|^2p(z)(N_1(z) - a/b) + (z - z_1)^k(z - z_1^*)^k.$$

Так как $p(z_1) \neq 0$ и $N_1(z_1) \neq a/b$, то знаменатель не имеет нуля при $z = z_1$, что противоречит предположению о том, что $N_2(z)$ имеет полюс в этой точке. Следовательно, $b = 0$, и формула (18) для $N_2(z)$ отсюда легко получается.

2) Если $b = 0$, то формула (18) справедлива, что противоречит предположению о том, что $N_2(z)$ голоморфна в z_1 , если $N_1(z)$ голоморфна в z_1 , и предположению, что (18) не справедлива, если $N_1(z)$ имеет полюс в z_1 . Следовательно, $b \neq 0$, $a/b \in \mathbb{R}$ и

$$|b|^2p(z)(N_2(z) - a/b) = (z - z_1)^k(z - z_1^*)^k \left(1 - \frac{N_2(z) - a/b}{N_1(z) - a/b} \right).$$

Так как $N_1(z) - a/b$ имеет полюс в z_1 или, если голоморфна в z_1 , не имеет нуля в этой точке, то правая часть равна $O((z - z_1)^k)$ при $z \rightarrow z_1$, и, следовательно, коэффициенты ряда Тейлора ν_0, \dots, ν_k для $N_2(z)$ имеют свойства, описанные в пункте 2) теоремы. На основании вышеописанного равенства следует, что

$$|b|^2p(z)(N_2(z) - a/b) = (z - z_1)^k(z - z_1^*)^k + O((z - z_1)^{2k}), \quad z \rightarrow z_1,$$

и мы получаем, что $|b|^2p^{(j)}(z_1) = j!a_j$, $j = 0, 1, \dots, k - 1$ для a_j из (10). □

2. ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{L}(N)$

Напомним определение ядра $L_N(z, w)$ из соотношения (1)

$$L_N(z, w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \left(= \frac{(1 - N(z))J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right)$$

Пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром, связанное с ядром $L_N(z, w)$ для $z, w \in \text{hol}(N)$ будет обозначаться $\mathcal{L}(N)$. Пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром, связанное с таким же ядром для $z, w \in \text{hol}_+(N)$ будет обозначаться

$\mathcal{L}_+(N)$. Эти пространства "равны", если существует вещественный интервал, где N голоморфно: элементы первого являются аналитическими продолжениями элементов второго. Сначала приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $N(z) \in \mathbf{N}$ имеет вид $\alpha(z)$ из (8) так, что $N(z) = a + bz$ для $a, b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$. Тогда имеем

$$L_N(z, w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} = b = \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}, \quad \nu_0 = N(z_1).$$

Тогда для любого $w \in \mathbb{C}$

$$b = L_N(w, w) = \langle L_N(z, w), L_N(z, w) \rangle_{\mathcal{L}(N)} = b^2 \langle 1, 1 \rangle_{\mathcal{L}(N)}.$$

Это значит, что $\mathcal{L}(N)$ равно \mathbb{C} , в котором определено внутреннее произведение

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathcal{L}(N)} = \frac{\beta^* \alpha}{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

которое является положительно определенным при $\text{Im } \nu_0 > 0$ и отрицательно определенным при $\text{Im } \nu_0 < 0$.

Если, с другой стороны, $N(z) \in \mathbf{N}$ имеет вид

$$N(z) = a + \frac{b}{\lambda_0 - z}$$

для $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$, то подобные вычисления дают

$$b = |\lambda_0 - z_1|^2 \frac{\nu_0 - \nu_0^*}{z_1 - z_1^*}, \quad \nu_0 = N(z_1),$$

и $\mathcal{L}(N)$ является линейным пространством функций $\alpha/(\lambda_0 - z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ с внутренним произведением

$$\left\langle \frac{\alpha}{\lambda_0 - z}, \frac{\beta}{\lambda_0 - z} \right\rangle_{\mathcal{L}(N)} = \frac{\beta^* \alpha}{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

которое опять является положительно определенным при $\text{Im } \nu_0 > 0$ и отрицательно определенным при $\text{Im } \nu_0 < 0$. Таким образом, в данном случае тоже $\dim \mathcal{L}(N) = 1$. Можно показать, что пространство $\mathcal{L}(N)$ имеет размерность, равную 1, тогда и только тогда, когда $N(z)$ имеет один из рассмотренных в примере видов.

Пример 2. Пусть $N(z)$ представлено в виде $\alpha(z)$ из (13):

$$N(z) = \nu_0 + \frac{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k}{p(z)},$$

где ν_0 вещественно, k — целое, $k \geq 1$, и $p(z)$ — вещественный полином степени максимум $2k - 1$ такой, что $p(z_1) \neq 0$. Пусть

$$M(z) = -1/(N(z) - \nu_0) = -\frac{p(z)}{(z - z_1)^k (z - z_1^*)^k} = h(z) + h(z^*)^*,$$

где $h(z)$ — главная часть ряда Лорана для $M(z)$ в точке z_1 :

$$h(z) = \sum_{j=1}^k \frac{h_j}{(z - z_1)^j}$$

для $h_j \in \mathbb{C}$ и $h_k \neq 0$. Из

$$L_N(z, w) = (N(z) - \nu_0)L_M(z, w)(N(w) - \nu_0)^*$$

мы видим, что $M(z)$ является обобщенной функцией Неванлинны с тем же числом отрицательных квадратов, что и у $N(z)$, и оператор умножения на $(N(z) - \nu_0)$ является унитарным отображением из $\mathcal{L}(M)$ на $\mathcal{L}(N)$. Следовательно, этого достаточно для описания пространства $\mathcal{L}(M)$ (см., например, [8, теорема 1.5.7]). Мы выяснили, что это пространство натянуто на $2k$ линейно независимых функций

$$f_j(z) = \frac{1}{(z - z_1)^j}, \quad f_{k+j}(z) = \frac{1}{(z - z_1^*)^j}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

и что матрица Грамма (Gram) G этих функций:

$$G = (g_{m,n})_{m,n=1}^{2k}, \quad g_{m,n} = \langle f_n(z), f_m(z) \rangle_{\mathcal{L}(M)}$$

определяется посредством

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H^* \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ h_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поэтому пространство $\mathcal{L}(M)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(N)$ являются пространствами Понтрягина размерности $2k$ с отрицательным индексом, равным k .

Для последующих примеров и далее обозначим как \mathbf{H}_2 пространство Харди (Hardy)

в \mathbb{C}^+ так, что гильбертово пространство скалярных функций, аналитических в \mathbb{C}^+ , имеет воспроизводящее ядро

$$(z, w) \mapsto \frac{1}{-2\pi i(z - w^*)},$$

и как \mathbf{H}_2^2 пространство 2-векторных функций с элементами из \mathbf{H}_2 с внутренним произведением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_2^2} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathbf{H}_2} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathbf{H}_2}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство \mathbf{H}_2^2 , имеющее индефинитное внутреннее произведение

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_{2, J_\ell}} = \langle -iJ_\ell \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathbf{H}_2^2},$$

будет обозначаться как \mathbf{H}_{2, J_ℓ} . Это пространство Крейна с воспроизводящим ядром

$$(z, w) \mapsto \frac{J_\ell}{2\pi(z - w^*)}.$$

Наконец, пространство Харди \mathbf{H}_2^- в \mathbb{C}^- является гильбертовым пространством функций, аналитических в \mathbb{C}^- , с воспроизводящим ядром

$$(z, w) \mapsto \frac{1}{2\pi i(z - w^*)}.$$

Пример 3. Пространство $\mathcal{L}(N)$, соответствующее функции $N(z) = \pm i$, $z \in \mathbb{C}^\pm$, может быть описано следующим образом: $f \in \mathcal{L}(N)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $f_+ \in \mathbf{H}_2$ и $f_- \in \mathbf{H}_2^-$ такие, что

$$f|_{\mathbb{C}_+} = f_+ \quad \text{и} \quad f|_{\mathbb{C}_-} = f_-.$$

Кроме того,

$$\|f\|_{\mathcal{L}(N)}^2 = \frac{1}{4\pi} (\|f_+\|_{\mathbf{H}_2}^2 + \|f_-\|_{\mathbf{H}_2^-}^2). \quad (19)$$

В частности, $\mathcal{L}_+(i) = \mathbf{H}_2$ как линейные пространства.

Чтобы убедиться в этом, обозначим за \mathcal{H} гильбертово пространство функций f в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, для которых справедливо $f_+ := f|_{\mathbb{C}_+} \in \mathbf{H}_2$ и $f_- := f|_{\mathbb{C}_-} \in \mathbf{H}_2^-$, имеющее норму

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{4\pi} (\|f_+\|_{\mathbf{H}_2}^2 + \|f_-\|_{\mathbf{H}_2^-}^2).$$

Функция $L_N(z, w)$ является элементом \mathcal{H} и

$$(L_N)_\pm(z, w) = \begin{cases} \pm 2i/(z - w^*), & w \in \mathbb{C}^\pm, \\ 0, & w \in \mathbb{C}^\mp. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления отдельно для $w \in \mathbb{C}^+$ и для $w \in \mathbb{C}^-$ дают

$$\langle f, L_N(z, w) \rangle_{\mathcal{H}} = f(w), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Следовательно, $L_N(z, w)$ является воспроизводящим ядром для \mathcal{H} и, поэтому, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(N)$.

Пример 4. Напомним, что $N(z) \in \mathbf{N}_0$ имеет интегральное представление

$$N(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) d\sigma(t), \quad z \in \text{hol}(N). \tag{20}$$

где $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$ и $\sigma(t)$ — неубывающая функция с

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t^2 + 1} < \infty.$$

Имеем:

$$\mathcal{L}(N) = \left\{ F(z) = b\varphi + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)d\sigma(t)}{t - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid f \in \mathbf{L}_2(d\sigma), \varphi \in \mathbb{C} \right\}.$$

Доказательство этого равенства см. [16] и [11]. Хорошо известно, что линейная оболочка функций

$$t \mapsto \frac{1}{t - w}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ плотна в $\mathbf{L}_2(d\sigma)$. Если как $\mathbf{H}_2(d\sigma)$ обозначим замыкание этих функций в $\mathbf{L}_2(d\sigma)$ при ограничении w полуплоскостью \mathbb{C}^+ , то

$$\mathcal{L}_+(N) = \left\{ F(z) = b\varphi + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)d\sigma(t)}{t - z}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \mid f \in \mathbf{H}_2(d\sigma), \varphi \in \mathbb{C} \right\}.$$

В обоих случаях норма функции $F(z)$ определяется выражением $\|F\|^2 = b|\varphi|^2 + \|f\|_{\mathbf{L}_2(d\sigma)}^2$.

2. Пусть $N(z)$ — обобщенная функция Неванлинны. Из общей теории (см.,

например, [1, теорема 2.3.5]) известно, что функции

$$z \mapsto \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z, w) \Big|_{w=w_0} = \begin{pmatrix} 1 & -N(z) \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} \frac{J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \Big|_{w=w_0} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $w_0 \in \text{hol}(N)$, принадлежат $\mathcal{L}(N)$. Обозначим линейную оболочку функций в больших скобках как $\mathcal{M}(w_0)$. Отметим, что $\mathcal{M}(w_0)$ является инвариантным по отношению к оператору разделенной разности R_0

$$R_0 \mathbf{f}(z) = \frac{\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(0)}{z}.$$

Теорема 2. Для $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$ выполняются следующие равенства:

$$\mathcal{L}(N) = \overline{\text{span}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -N \end{pmatrix} \mathcal{M}(z_1), \begin{pmatrix} 1 & -N \end{pmatrix} \mathcal{M}(z_1^*) \right\}, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_+(N) = \overline{\text{span}} \{ f|_{\mathbb{C}_+} \mid f \in \begin{pmatrix} 1 & -N \end{pmatrix} \mathcal{M}(z_1) \}. \quad (22)$$

Кроме того, отображение $\mathbf{f}(z) \mapsto \sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & -N(z) \end{pmatrix} \mathbf{f}(z)$ является изометрией из линейного многообразия $\mathcal{M}(z_1)$, имеющее внутреннее произведение \mathbf{H}_{2, J_ℓ} , на плотное линейное многообразие из $\mathcal{L}_+(N)$.

Доказательство. Если $f(z) \in \mathcal{L}(N)$ является ортогональной пространству в правой части (21), тогда для всех $j \in \mathbb{N}$

$$f^{(j)}(z_1) = \left\langle f(z), \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z, w) \Big|_{w=z_1} \right\rangle_{\mathcal{L}(N)} = 0,$$

$$f^{(j)}(z_1^*) = \left\langle f(z), \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} L_N(z, w) \Big|_{w=z_1^*} \right\rangle_{\mathcal{L}(N)} = 0,$$

и, следовательно, $f \equiv 0$. Это доказывает (21). Равенство (22) может быть доказано аналогично.

Обозначим через $\mathbf{f}_j(z)$ функции

$$\mathbf{f}_j(z) = \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} \begin{pmatrix} N(w)^* \\ 1 \end{pmatrix} \Big|_{w=z_1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & -N \end{pmatrix} \mathbf{f}_k, \sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & -N \end{pmatrix} \mathbf{f}_j \right\rangle_{\mathcal{L}_+(N)} \\
 &= 2\pi \left\langle \frac{\partial^k}{\partial w^{*k}} L_N(\cdot, w) \Big|_{w=z_1}, \frac{\partial^j}{\partial v^{*j}} L_N(\cdot, v) \Big|_{v=z_1} \right\rangle_{\mathcal{L}_+(N)} \\
 &= 2\pi \frac{\partial^{k+j}}{\partial v^j \partial w^{*k}} L_N(v, w) \Big|_{v=w=z_1} \\
 &= 4\pi^2 \frac{\partial^{k+j}}{\partial v^j \partial w^{*k}} \left\langle \frac{J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{2\pi(\cdot - w^*)}, \frac{J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(v)^* \end{pmatrix}}{2\pi(\cdot - v^*)} \right\rangle_{\mathbf{H}_{2, J_\ell}} \Big|_{v=w=z_1} \\
 &= \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k \rangle_{\mathbf{H}_{2, J_\ell}}.
 \end{aligned}$$

Последнее равенство получается из нижеследующей леммы 1 для $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & -N(z) \end{pmatrix}$ и

$$K_1(z, w) = K_2(z, w) = \frac{J_\ell}{2\pi(z - w^*)}.$$

□

Лемма 1. Пусть $\mathcal{H}(K_1)$ и $\mathcal{H}(K_2)$ — пространства Крейна с воспроизводящими матричными ядрами $K_j(z, w)$ размером $n_j \times n_j$, $j = 1, 2$, являющиеся аналитическими в некоторой общей области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $A(z)$ — аналитическая матричная функция на Ω размером $n_2 \times n_1$ такая, что отображение $M_A: f(z) \mapsto A(z)f(z)$ является ограниченным оператором из $\mathcal{H}(K_1)$ в $\mathcal{H}(K_2)$. Тогда

$$M_A^* \left(\frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} K_2(z, w) \right) = \frac{\partial^j}{\partial w^{*j}} (K_1(z, w) A(w)^*), \quad j = 0, 1, \dots$$

Доказательство может быть получено путем вычисления внутреннего произведения функций в обеих частях равенства для функции $f(z) \in \mathcal{H}(K_1)$. Для $j = 0$ — это хорошо известный результат со множителями, получаемый без условия аналитичности (см., например, [1, сс. 28–29] для доказательства).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуются свойства индефинитных функций Неванлинны $N(z)$. В этом контексте каждой такой функции ставится в соответствие пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром $L_N(z, \omega)$, порождённым рациональной матричной функцией $\Theta(z)$. Подробно изучается понятие обратного преобразования Шура для обобщенных функций класса Неванлинны. Связь между преобразованием Шура и разложением 2×2 -матричных функций основана на том факте, что для обобщенных

функций Неванлинны матричные функции $\Theta(z)$, соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными J_ℓ -унитарными множителями. Минимальное разложение данной рациональной J_ℓ -унитарной 2×2 -матричной функции $\Theta(z)$ может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура. Основным результатом статьи получен путём многократного применения преобразования Шура и обратного преобразования Шура к матричным рациональным функциям, связанными с функциями Неванлинны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ALPAY, D. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. (2007) The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting . *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 176.). p. 1–98.
2. ALPAY D. & DYM H. (1993) On a new class of reproducing kernel spaces and a new generalization of the Iohvidov laws. *Linear Algebra Applications*. (Vol.178). p. 109–183.
3. ALPAY D. & DYM H. (1996) On a new class of realization formulas and their applications. *Linear Algebra Applications*. (Vol. 241-243). p. 3–84.
4. ALPAY D. & GOHBERG I. (1988) Unitary rational matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 33). p. 175-222.
5. ALPAY D. & GOHBERG I. (2006) Discrete analogs of canonical systems with pseudoexponential potential. Definitions and formulas for the spectral matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 161). p. 1–47.
6. ANDREISHCHEVA E. (2006) Approximation of Generalized Schur functions. *International Conference "Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polynomials": Book of abstracts*. Berlin. p. 10–11.
7. DE BRANGES L. (1963) Some Hilbert spaces of analytic functions I. *Trans.Amer.Math.Soc.* (Vol. 106). p. 445–468.
8. DE BRANGES L. & ROVNYAK J. (1966) Canonical models in quantum scattering theory. *Wiley*. New York. p. 295–392.
9. CHAMFY C. (1958) Fonctions méromorphes sur le cercle unité et leurs séries de Taylor,. *Ann. Inst. Fourier*. Vol.76. p. 211–251.

10. DIJKSMA A. & LANGER H. & LUGER A. & SHONDIN Y. (2004) Minimal realizations of scalar generalized Nevanlinna functions related to their basic factorization. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 154). p. 69–90.
11. DYM H. (1989) On reproducing kernel spaces, J -unitary matrix functions, interpolation and displacement rank. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 41). p. 173-239.
12. GOHBERG I. (1986) Schur methods in operator theory and signal processing. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 30-77.
13. IOHVIDOV I. S. & KREIN M. G. & LANGER H. (1982) Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. *Mathematical Research, Akademie-Verlag*. Berlin (Band 9). p. 120.
14. JONAS P. (1981) On the functional calculus and the spectral function for definizable operators in Krein space . *Beitrage Anal..* (Vol.16). p. 121–135.
15. KREIN M. G. (1970) Über die verallgemeinerte Rezolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators in Raume Π_κ . *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai..* Tihany (Hungary) (Vol.5). p. 353–399.
16. KREIN M. G. & LANGER H. (1977) Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math. Nachr..* (Vol.77). p. 187–236.
17. KREIN M. G. & LANGER H. (1981) Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ . *Acta Sci. Math. Szeged.* (Vol. 43). p. 181–205.
18. LANGER H. (1982) Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. *Lecture Notes in Mathematics.* (№948). p. 1–46.
19. SCHUR I. (1986) Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises ähnt sind. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 31–59.

УДК: 517.958, 517.927.2, 517.955

MSC2010: 34B05, 80A20, 00A71

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

© Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева

КАЛУЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

УЛ. СТЕПАНА РАЗИНА, 26, КАЛУГА, 248023, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: dvoryanchikova_y@mail.ru, losh-elena@yandex.ru

APPLICATION OF THE GENERALIZED DEGREE METHOD FOR CONSTRUCTING
SOLUTIONS OF THE MOISIL-TEODORESCU SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Afanasenkova Yu. V., Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A.

Abstract.

The paper presents a generalized degree method for constructing a sequence of basic solutions to a system of first-order linear differential equations known as the Moisila-Teodorescu systems.

To perform this task, the quaternion form of the Moisil-Teodorescu equation is converted to a matrix form. The system is reduced to a form that allows the use of the method of generalized degrees by means of a certain operation called joining. After that, the differentiation operations and the right inverse integration operation are introduced, which are analogs of the differentiation and integration over the complex variable of the solution of the Cauchy-Riemann system. These operations do not deduce from the set of solutions of the Moisila-Teodorescu system with given properties in a certain region of four-dimensional space. The possibility of repeated repetition of these operations provides an algorithm for constructing a sequence of basic solutions of the Moisila-Teodorescu system.

Further, the construction of these solutions is given by the method of generalized degrees (OS). Previously, based on the operators D_1, D_2 , the so-called binary OS operations are constructed with certain formally analogous to the usual numerical powers $X_1^m X_2^n C$ differentiation properties. On their algebraic basis, using the correspondence principle, symmetric OS of the type $\bar{Z}^m Z^n C$ are constructed. The special case $m = 0$ gives an infinite sequence of solutions to the Moisil-Theodorek system.

The proposed apparatus is largely analogous to the algorithm for constructing complex powers of z^n in the theory of functions of complex variables.

Particular examples are given. To facilitate practical calculations, a number of degrees, both binary and symmetric, are given in the applications.

The Moisil-Teodorescu system is closely related to the Maxwell system of electromagnetic field equations and to the Dirac system of quantum electrodynamics for particles with mass

$m = 0$ and coincides with them with a certain identification of the quantities included in it. The proposed work is a direct generalization of the ideas of the American mathematician of European origin L. Bers.

Keywords: *generalized Bers degrees, Moisil-Teodorescu system, Cauchy problem, matrix method, boundary conditions.*

ВВЕДЕНИЕ

Хотя некоторые соображения о свойствах математических объектов, полученных путем многократного интегрирования определенных классов функций, были высказаны и ранее [1], в определенном достаточно общем плане для случая одного действительного переменного эти конструкции были исследованы Л. Берсом в работах [1, 7]. Им был введен термин обобщенные степени (generalized power), используемый в данной работе.

Методы развивались Берсом и рядом других исследователей [2]. Следует отметить работы школы Маркушевича и Лукомской [8]. ОС использовались в основном как способ обобщения теории функций комплексного переменного и нашли свое известное завершение в теории псевдоаналитических функций [4].

Идеи Берса развивались в работах ряда авторов [4–6, 12]. Были попытки ввести идеи Берса для построения решений трехмерного аналога системы Коши-Римана.

В работе [3] он был обобщен для случая нескольких независимых переменных. В данном сообщении показано его применение для построения решений известной системы Мойсила-Теодореску [3].

Интерес к развитию методов обобщенных степеней был вызван тем, что они указывают конкретные конструктивные алгоритмы вычисления результатов, например в газодинамике [5]. Более подробный список литературы можно найти в монографии [6].

В работе использован алгебраический аппарат функций многих комплексных переменных.

Решения уравнений Мойсила-Теодореску могут рассматриваться в двух аспектах: как система уравнений электромагнитного поля [9] или как система Дирака [10, 11] квантовой электродинамики с нулевой массой.

В работе проведен переход от записи системы Мойсила-Теодореску в кватернионной форме к матричной форме. Чтобы удовлетворить требованиям допустимости применения ОС, введена так называемая присоединенная система и получена пара коммутирующих операторов D_1, D_2 , которые далее являются основной порождающей парой всего метода. Прежде всего указано на необходимость наличия непустого

пересечения ядер этих операторов, т.е. существование обобщенных констант. Указаны правые обратные операторы I_1, I_2 , а также проекционные операторы P_1, P_2 . После выполнения всех требований, необходимых для построения бинарных ОС, можно записать

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p!q! I_1^p I_2^q C,$$

где C обобщенная константа.

1. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СИСТЕМЫ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

Система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, известная как система Мойсила-Теодореску [3], может быть записана как

$$\overline{D}F = \left(\frac{\partial}{x_1} e_0 + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} e_i \right) F = 0, \quad (1.1)$$

где F - кватернионная функция вида

$$F = \sum_{i=0}^3 e_i f_{i+1}.$$

В данных выражениях e_i единицы системы кватернионов [4], а f_i непрерывно дифференцируемые функции четырех действительных переменных $x_i, i = \overline{1, 4}$.

Система (1.1) рассматривается как прямое обобщение системы Коши-Римана вида

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{x_1} + i \frac{\partial}{x_2} \right) (f_i + i f_2) = 0$$

теории функции комплексного переменного $z = x_1 + i x_2$. В данном сообщении будем рассматривать систему (1.1) в несколько другом матричном виде, когда формальное сходство с системой Коши-Римана выступает более явно.

Запишем переменные $x_i, i = \overline{1, 4}$ в комплексной форме

$$z_1 = x_1 + i x_2, \overline{z_1} = x_1 - i x_2, z_2 = x_3 + i x_4, \overline{z_2} = x_3 - i x_4. \quad (1.2)$$

Соответствующие операторы дифференцирования по переменным $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}$ следует взять как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Поставим цель - записать систему (1.1) в матричной форме с использованием комплексных операторов (1.3). Для этого прежде всего перейдем к двум единицам e_1, e_2 , обозначив их $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j$. Перепишем (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \overline{D}F &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i \frac{\partial}{\partial x_4} \right) j \right) (F_1 - jF_2) = \\ &= \left(2 \frac{\partial}{\partial z_1} - 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} j \right) (F_1 - jF_2) = \left(2 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} - 2 \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}_2} \right) - j \left(2 \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}_2} + 2 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \right), \end{aligned}$$

где положено $F_1 = f_1 + if_2, F_2 = f_3 - if_4$.

Продолжая принятые в [5] обозначения, запишем систему (1.1) с помощью операторов (1.3) в виде

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} - 2 \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}_2} = 0, \\ 2 \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}_2} + 2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Чтобы согласовать с ранее принятой формой записи, изменим знак координаты x_4 и получим

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial v_3}{\partial z_1} - 2 \frac{\partial v_4}{\partial z_2} = 0, \\ 2 \frac{\partial v_3}{\partial \bar{z}_2} + 2 \frac{\partial v_4}{\partial \bar{z}_1} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $v_3 = F_1(-x_4), v_4 = F_2(-x_4)$.

Значения индексов и обозначения приняты для удобства дальнейшей записи и совпадения с [6]

Для так называемой присоединенной системы запишем

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}_1} - 2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} = 0, \\ 2 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}_2} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial z_1} = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Эта система может быть получена из (1.5) простой заменой переменной z_1 на комплексно сопряженную \bar{z}_1 . Все функции v_1, v_2, v_3, v_4 являются в случае наличия вторых непрерывных производных в некоторой области O четырехмерного пространства гармоническими функциями

$$\Delta(4)\tilde{F}_1 = \Delta(4)\tilde{F}_2 = 0,$$

где

$$\Delta(4) = 4 \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Обратим внимание на полезное свойство системы (1.6). Если f - функция гармоническая, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0,$$

то $F_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}$, $F_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2}$ есть решение систем Мойсила-Теодореску

$$2 \frac{\partial f}{\partial z_1} = -2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2}.$$

Для записи в матричной форме системы (1.5) введем операторы

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ -2 \frac{\partial}{\partial z_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Тогда в матричной форме системы (1.6) и (1.7)

$$(d_1 V_1 - d_2) V_2 = 0, \quad (\tilde{d}_1 - d_2) V_1 = 0,$$

где $V_2 = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

2. ПРИВЕДЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ К ВИДУ, ДОПУСКАЮЩЕМУ ПОСТРОЕНИЕ ОС

Несмотря на то, что любой оператор первого цикла $\frac{\partial}{\partial z_1}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}$ коммутирует с любым оператором второго цикла $\frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}$, что необходимо для построения обобщенных степеней [7], операторы d_1 , и d_2 не коммутируют. Поэтому построение обобщенных степеней (ОС) невозможно [7].

Если предположить, что z_1 действительное переменное $z_1 = \bar{z}_1$, то матрица d_1 , будучи диагональной, коммутирует с d_2 и построение ОС возможно, что сделано в [7].

Однако, как это показано в [6], можно провести операцию присоединения и выбрать матрицы D_1, D_2 следующим образом

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial z_2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & 0 \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial z_2} & 0 & 0 \\ -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Легко непосредственно убедиться, что построенные операторы D_1, D_2 коммутируют

$$D_1 D_2 = D_2 D_1. \quad (2.3)$$

Необходимо помнить, что они действуют в четырехмерном векторном комплексном пространстве удвоенной размерности, которое имеет компоненты

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Основную систему уравнений, с которой будем иметь дело далее, можно записать

$$(D_1 - D_2)V = 0. \quad (2.5)$$

В развернутом виде это дает две системы, которые совпадают с (1.5, 1.6), если принять

$$(D_1 - D_2)V = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial z_1} - \frac{\partial v_4}{\partial z_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial v_3} + \frac{\partial v_4}{\partial v_4} \\ \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial v_1} - \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial v_1} - \frac{\partial z_2}{\partial v_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial z_2} - \frac{\partial z_1}{\partial z_1} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

Из (2.6) непосредственно видно, что оно включает как основную систему (1.5), так и присоединенную (1.6).

Для операторов D_1, D_2 существуют правые обратные I_1, I_2 , которые определены однозначно. Можно предложить наиболее простой случай, приняв

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \int_{\bar{z}_{10}}^{\bar{z}_1} d\bar{z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \int_{z_{10}}^{z_1} dz_1 \\ \frac{1}{2} \int_{z_{10}}^{z_1} dz_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \int_{\bar{z}_{10}}^{\bar{z}_1} d\bar{z}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_1 I_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \int_{\bar{z}_{20}}^{\bar{z}_2} d\bar{z}_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \int_{z_{20}}^{z_2} dz_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \int_{\bar{z}_{20}}^{\bar{z}_2} d\bar{z}_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \int_{z_{20}}^{z_2} dz_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 I_2 = 0. \quad (2.8)$$

В силу выбранной матричной структуры и независимости всех четырех переменных интегральные операторы I_1, I_2 коммутируют

$$I_1 I_2 = I_2 I_1.$$

В качестве правых обратных выбраны простейшие операторы, а именно интегрирование по независимым комплексным переменным с фиксированным нижним пределом.

Введение определенных правых обратных операторов дает возможность, опираясь на определение $P = I - ID$, записать проекционные операторы P_1, P_2, P

$$P_1 = \begin{pmatrix} \dots | \bar{z}_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots | z_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots | z_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots | \bar{z}_{10} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \dots | \bar{z}_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots | z_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots | \bar{z}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots | z_{20} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$P = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} \dots | \bar{z}_{10}, \bar{z}_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots | z_{10}, z_{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots | z_{10}, \bar{z}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots | \bar{z}_{10} z_{20} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Свойства этих операторов с помощью операторов D_1, D_2, I_1, I_2 можно записать как

$$P_1 I_1 = P_2 I_2 = 0, D_1 P_1 = D_2 P_2 = 0.$$

3. ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

Система допускает операцию дифференцирования, а именно, если V решение (2.5), то $V^{(-1)}$, равное

$$V^{(-1)} = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)V, \quad (3.1)$$

при наличии необходимых свойств есть также решения (2.5) в некоторой указанной области. Это следует из соотношений

$$\frac{1}{2}(D_1 - D_2)(D_1 + D_2)V = \frac{1}{4}(D_1 + D_2)(D_1 - D_2)V.$$

Если исходное решение V обладает необходимыми свойствами дифференцируемости, то операция (3.1) может быть проведена многократно. Если учесть, что V удовлетворяет системе (2.5), то (3.1) можно записать короче

$$V^{(-1)} = D_1 V = D_2 V.$$

Обозначение операции символом (-1) заимствовано у Берса [1] и в ряде случаев удобно.

Введение проекционных операторов позволяет ввести правую обратную по отношению к (3.1) операцию интегрирования

$$V^{(1)} = IV = I_1 V + I_2 P_1 V. \quad (3.2)$$

Полученный вектор $V^{(1)}$, снабженный индексом вверху в скобках, должен очевидно прежде всего принадлежать множеству решений системы (2.5)

$$DV^{(1)} = 0, \quad (3.3)$$

а оператор I должен быть правым обратным для D

$$DI = 1. \quad (3.4)$$

Проведем доказательство двух требований (3.3) и (3.4) одновременно. Имеем

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (D_1 + D_2) V^{(1)} &= \\ (D_1 - D_2) V^{(1)} &= \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} (D_1 \pm D_2) (I_1 V + I_2 P_1 V) = \frac{1}{2} (V + D_1 I_2 P_1 V \pm D_2 I_1 V \pm P_1 V) = \\ = \frac{1}{2} (V \pm I_1 D_1 V \pm P_1 V) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} V + (1 - P_1) V - P_1 V \\ P_1 V - P_1 V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} V \\ 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

При доказательстве использованы (2.1, 2.2, 2.7, 2.8, 2.9). При проведении операции интегрирования требования к исходному решению V значительно менее жесткие. Поэтому ее повторное применение значительно проще. Оно обладает свойством создавать бесконечные последовательности базисных решений.

В развернутом виде согласно (2.7, 2.8, 2.9) имеет вид

$$IV = (I_1 + I_2 P_1) V = \begin{pmatrix} \int_{\bar{z}_{10}}^{\bar{z}_1} d\bar{z}_1 v_3 - \int_{\bar{z}_{20}}^{\bar{z}_2} d\bar{z}_2 v_4 (\bar{z}_{10}), \\ \int_{z_{10}}^{z_1} dz_1 v_4 + \int_{z_{20}}^{z_2} dz_2 v_3 (z_{10}), \\ \int_{z_{10}}^{z_1} dz_1 v_1 - \int_{z_{20}}^{z_2} dz_2 v_2 (z_{10}), \\ \int_{\bar{z}_{10}}^{\bar{z}_1} d\bar{z}_1 v_2 + \int_{z_{20}}^{z_2} dz_2 v_1 (\bar{z}_{10}) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Если рассматривать комплексные переменные формально, как обычные переменные, то эти правила ничем не отличаются от нахождения независимых от пути криволинейных интегралов от двух переменных.

Для операции интегрирования можно предположить и другую форму

$$IV = I_2 V + I_1 P_2 V. \quad (3.6)$$

Если учесть системы (1.5, 1.6) в (3.5), то эти результаты легко проверить. Повторное интегрирование некоторого решения системы Мойсила-Теодореску позволяет построить бесконечную последовательность базисных решений. Операции дифференцирования D и интегрирования I есть прямые аналоги дифференцирования и интегрирования по комплексному переменному ТФКП. В частном случае двух переменных формулы (4.2) и (4.3) переходят естественным образом в криволинейные интегралы на плоскости. Введем понятия обобщенной константы как решения системы (2.5) вида

$$c_1 = c_1(z_1, z_2), c_2 = c_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2), c_3 = c_3(\bar{z}_1, z_2), c_4 = c_4(z_1, \bar{z}_2)$$

или в более общем виде

$$D_1C = D_2C = 0, PC = C. \tag{3.7}$$

Обобщенной степенью назовем выражение

$$Z^{(n)}C = n!I^nC, n = 0, 1...$$

Эта бесконечная последовательность линейно независимых решений системы Мойсила-Теодореску. Справедлива формула дифференцирования

$$DZ^{(n)}C = nZ^{(n-1)}C,$$

а также $PZ^{(n)}C = 0, n \neq 0$.

Это позволяет предложить для определения коэффициентов многочлена $V_n = \sum_{i=0}^n Z^{(i)}C_i$ формулу типа Тейлора

$$C_i = \frac{1}{i!}PD^{(i)}V_n. \tag{3.8}$$

При определенных условиях сходимости по заданной норме она может быть использована для нахождения коэффициентов типа (3.8).

4. ПОСТРОЕНИЕ БИНАРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

Если операция многократного дифференцирования решения системы Мойсила-Теодореску согласно (3.1) выражена достаточно просто

$$V^{(-n)} = D_1^nV = D_2^nV,$$

то операция интегрирования дает сложный результат. Наша цель дать достаточно хороший способ аналитического выражения $V^{(n)}$, удобный при вычислении. Как будет видно из дальнейшего, удастся не только решить эту задачу, но и получить аппарат для представления широкого класса многочленов и функций, не обязательно являющихся решениями системы Мойсила-Теодореску. Здесь в известном смысле повторяется идея ОС, предложенная Берсом в [1].

Очевидно, прежде всего следует взять степенные функции в качестве ОК

$$c_1 = c_{1mn}z_1^m z_2^n, c_2 = c_{2mn}\bar{z}_1^m \bar{z}_2^n, c_3 = c_{3mn}z_1^m \bar{z}_2^n, c_4 = c_{4mn}z_1^m z_2^n. \tag{4.1}$$

Таким образом, все условия необходимые и достаточные для построения ОС выполнены. Бинарные ОС определим как вектор $X_1^{(p)} X_2^{(q)} C$ с компонентами

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p!q! \tilde{I}_1^{(p)} \tilde{I}_2^{(q)} C = p!q! I_2^{(q)} I_1^{(p)} C, \tag{4.2}$$

при целых p, q .

Степени на основе ОС по (4.1, 4.2) можно записать

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = \frac{(-1)^j p! q! l! k!}{2^{p+q}} \frac{z_1^i \bar{z}_1^i z_2^j \bar{z}_2^j M^{(pq)}}{i!(i+l)! j!(j+k)!}$$

при

$$M^{(2i, 2j)} = \begin{pmatrix} z_1^l z_2^k C_{1lk} \\ \bar{z}_1^l \bar{z}_2^k C_{2lk} \\ z_1^l z_2^k C_{3lk} \\ z_1^l \bar{z}_2^k C_{4lk} \end{pmatrix},$$

$$M^{(2i, 2j+1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{j+k+1} z_1^l \bar{z}_2^{k+1} C_{4lk} \\ \frac{1}{j+k+1} \bar{z}_1^l z_2^{k+1} C_{3lk} \\ -\frac{1}{j+k+1} \bar{z}_1^l \bar{z}_2^{k+1} C_{2lk} \\ \frac{1}{j+k+1} z_1^l z_2^{k+1} C_{1lk} \end{pmatrix},$$

$$M^{(2i+1, 2j)} = \frac{1}{i+l+1} \begin{pmatrix} \bar{z}_1^{l+1} z_2^k C_{3lk} \\ z_1^{l+1} \bar{z}_2^k C_{4lk} \\ z_1^{l+1} z_2^k C_{1lk} \\ \bar{z}_1^{l+1} \bar{z}_2^k C_{2lk} \end{pmatrix},$$

$$M^{(2i+1, 2j+1)} = \frac{1}{(i+l+1)(j+k+1)} \begin{pmatrix} -\bar{z}_1^{l+1} \bar{z}_2^{k+1} C_{2lk} \\ z_1^{l+1} z_2^{k+1} C_{1lk} \\ -z_1^{l+1} \bar{z}_2^{k+1} C_{4lk} \\ \bar{z}_1^{l+1} \bar{z}_2^{k+1} C_{3lk} \end{pmatrix}.$$

Например, имеем

$$X_1^{(i)} C = \frac{1}{2^{l+i}} \begin{pmatrix} \bar{z}_1^{l+1} z_2^k C_{3lk} \\ z_1^{l+1} \bar{z}_2^k C_{4lk} \\ z_1^{l+1} z_2^k C_{1lk} \\ \bar{z}_1^{l+1} \bar{z}_2^k C_{2lk} \end{pmatrix},$$

$$X_2^{(i)} C = \frac{1}{2^{k+i}} \begin{pmatrix} -z_1^l \bar{z}_2^{k+1} C_{4lk} \\ \bar{z}_1^l z_2^{k+1} C_{3lk} \\ -\bar{z}_1^l \bar{z}_2^{k+1} C_{2lk} \\ z_1^l z_2^{k+1} C_{1lk} \end{pmatrix}.$$

Здесь принято, что $l, k \geq 0$ и целые. Представляет интерес случай $l, k < 0$, когда степени содержат особенности, например, в начале координат, а также дробные l, k .

Векторы, являющиеся ОК, образуют линейное векторное пространство L_c так, что в силу линейности операторов I_1, I_2

$$X_1^{(p)} X_2^{(q)} (C^1 + c^{11}) = X_1^{(p)}, X_2^{(q)} C^1 + X_1^{(p)}, X_2^{(q)} C^{11}.$$

Основное свойство ОС относительно дифференцирования дано выражениями

$$D_1 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p X_1^{(p-1)} X_2^{(q)} C, D_2 X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = p X_1^{(p)} X_2^{(q-1)} C.$$

Справедлива формула проектирования

$$P X_1^{(p)} X_2^{(q)} C = 0, p, q = 0,$$

если только p, q не равны нулю одновременно, когда справедливо (3.7).

Приведенные свойства ОС позволяют утверждать, что «коэффициенты» многочлена

$$V_{m,n} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n X_1^{(p)} X_2^{(q)} C_{pq}$$

можно найти по формуле

$$C_{ij} = P \frac{1}{i!j!} D_1^i D_2^j V_{mn}, \tag{4.3}$$

которая обобщает формулу Тейлора.

Следовательно первым этапом разложения любого вектора с многочленами будет переход к разложению по бинарным ОС $X_1^{(q)} X_2^{(q)} C$.

Простейшим примером будет разложение вектора V с компонентами

$$v_1 = x_1, v_2 = x_2, v_3 = x_3, v_4 = x_4.$$

Прежде всего перейдем к комплексным переменным

$$v_1 = \frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1), v_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1), v_3 = \frac{1}{2}(z_2 + \bar{z}_2), v_4 = \frac{1}{2i}(z_2 - \bar{z}_2).$$

Второй этап состоит в применении операторов D_1, D_2 . В данном случае (4.3) по (3.1, 3.2) имеем

$$D_1 V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, D_2 V = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Третий шаг состоит в применении операции проектирования, что дает

$$C_{00} = PV = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z_1 \\ \frac{1}{2}z_1 \\ -\frac{1}{2}z_1 \\ \frac{1}{2}z_2 \\ \frac{1}{2}z_2 \\ -\frac{1}{2}\bar{z}_2 \end{pmatrix}, C_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, C_{01} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Последний четвертой операцией будет подстановка (4.3) в выражение (4.4) в строгом соответствии с указанным в них порядке.

5. СИММЕТРИЗОВАННЫЕ БИНАРНЫЕ ОС

Принцип соответствия, впервые использованный Л. Берсом [1], позволяет некоторые алгебраические и дифференциальные связи, установленные для обычных числовых степеней, перенести на ОС. Первоначально принцип был сформулирован для случая одного переменного и для многочленов или рядов числового переменного. Он ставит в соответствие обычным многочленам и рядам ряды ОС с теми же числовыми коэффициентами. Обобщенные константы оставались в общем случае комплексными числами.

В работе [7] принцип соответствия принял более общее значение, как изоморфизм между структурами из обычных степеней и ОС. Не ставя цель сформулировать его в наиболее общем виде, приведем его в форме, достаточной для наших целей. Установим соответствие

$$X_1^{(p)} X_2^q C \rightarrow x_1^{(p)} x_2^q C, \quad \tilde{D}_1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tilde{D}_2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (5.1)$$

Справедливы очевидные тождества для числовых переменных величин x_1, x_2

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x_1 - x_2)^m (x_1 + x_2)^n c = n (x_1 - x_2)^m (x_1 + x_2)^{n-1} c = v_{mn}, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x_1 - x_2)^m (x_1 + x_2)^n c = n (x_1 - x_2)^{m-1} (x_1 + x_2)^n c = v_{mn}. \quad (5.3)$$

Если ввести числовые переменные $s = x_1 + x_2, \bar{s} = x_1 - x_2$, то можно записать тождества

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{s}^m s^n c = n \bar{s}^m s^{n-1} c, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \bar{s}^m s^n c = n \bar{s}^{m-1} s^n c. \quad (5.5)$$

Выражение $\bar{s}^m s^n$ однородный многочлен переменных x_1, x_2 порядка $m + n$

$$\bar{s}^m s^n c = (x_1 - x_2)^m (x_1 + x_2)^n c = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha_i^{(m,n)} x_1^{m+n-i} x_2^i c.$$

Коэффициенты $\alpha_i^{(m,n)}$ этого многочлена можно найти по простым соотношениям [7].

При увеличении n до $n + 1$ имеем правило

$$a_i^{(m+1,n+1)} = a_i^{(m,n)} + a_{i-1}^{(m,n)}, i = \overline{0, m+n} \quad (5.6)$$

при условиях $a_{-1} = 0, a_{m+n}^{(m,n)} = 0$. Для показателя степени m имеем

$$a_i^{(m+1,n)} = a_{i-1}^{(m,n)} - a_i^{(m,n)}$$

при условии (5.6).

Правая часть соотношений (3.4) не включает операцию умножения степеней, поэтому можно по принципу соответствия записать это выражение в ОС

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)V_{m,n} &= nV_{m,n-1}, \\ \frac{1}{2}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2)V_{m,n} &= mV_{m-1,n}, \end{aligned}$$

где через большое $V_{m,n}$ обозначен многочлен

$$V_{m,n} = \sum X_1^{(m+n-i)} X_2^{(i)} \alpha_i^{(m,n)} C_{mn}.$$

Если ввести операторы

$$D_s = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2), \bar{D}_s = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 - \bar{D}_2),$$

то удобно чисто формальное обозначение $\bar{Z}^m Z^n C = V_{m,n}$, так как

$$D_s \bar{Z}^m Z^n C = n \bar{Z}^m Z^{n-1} C,$$

$$\bar{D}_s \bar{Z}^m Z C = n \bar{Z}^{m-1} Z^n C.$$

Построенные ОС имеют большую область приложений. Это прежде всего средство нахождения частного решения (1.1) если правая часть представлена в виде разложения по ОС. Они могут быть использованы при решении уравнений типа

$$D_s \bar{D}_s V - k^2 V = 0$$

в виде ряда

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \bar{Z}^m Z^n C_{mn} k^m$$

Среди возможных приложений ОС кроме построения решений четырехмерного уравнения Лапласа следует отметить неоднородные уравнения

$$\bar{D}V = W, D\bar{D}V = W.$$

Если правая часть представлена в виде многочлена по Z, \bar{Z} или даже в виде ряда, то получить частное решение можно путем чисто формального интегрирования. Эти конструкции позволяют построить ОС для уравнения с высокой размерностью. Остановимся на этом более подробно.

Другое возможное применение ОС состоит в возможности использования их для построения ОС при большем числе переменных. Рассмотрим системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_5} - 2D_s f_2 &= 0, \\ 2\bar{D}_s f_1 + \frac{\partial}{\partial x_5} f_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

которые приводят к уравнениям для случая пяти переменных

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_5^2} = 0$$

Возможны другие приложения ОС, например для построения решений параболических систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье следует выделить следующие положения:

1. Система Мойсила-Теодореску записана в форме, допускающие приложения построения ОС.
2. Указаны операции дифференцирования и обратная операция интегрирования, не выводящие из множества решений системы Мойсила-Теодореску.
3. На основе заданных операторов D_1, D_2 построены бинарные ОС.
4. Введены симметризованные ОС, которые дают бесконечную последовательность базисных решений системы Мойсила-Теодореску.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. BERS, L. (1944) On a class of functions defined by partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 56. p. 67-93.
2. FUETERS (1936) Zur Theorie der regulaten Funktionen einer Quaternion variablen. *Monat. Math. Phys.* 43. p. 63-74.

3. MOISIL, M. (1931) Sur les quaternions monogenes. *Bull. Sci. Math.* p. 168-714.
4. Бринкман, Г. Применение спинорных инвариантов / М.: МИР. — , 1950. — 96 с.
BRINKMAN, G. (1950) *Application of spinor invariants*. Moscow: Publishing house of foreign literature.
5. Гладышев, Ю. А. Применение моногенных кватернионных функций к решению задач электродинамики / Ю. А. Гладышев. — Тула: Из-во ТГПУ, 1997. — 96 с.
GLADYSHEV, U. A. (1997) *Application of monogenic quaternion functions to solving problems of electrodynamics*. Tula: Publishing house of the TSPU.
6. Гладышев, Ю. А. Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике / Ю. А. Гладышев. — Калуга: Из-во КГПУ, 1997. — 96 с.
GLADYSHEV, U. A. (1997) *The Beltrami-Bers formalism and its applications in mathematical physics*. Kaluga: Publishing house of the KSPU.
7. Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин. — М: Из-во МГУ, 1980. — 96 с.
KOSTRIKIN, A. I. (1980) *Linear algebra and geometry*. Publishing house of the MSU.
8. Лукомская, М. А. О циклах систем линейных дифференциальных уравнений // Математический сборник 29. — М.: Наука, 1951. — №. 3. — С. 551–558.
LUKOMSKAYA, M. A. (1951) On cycles of systems of linear differential equations. *Mathematical collection 29*. 3. p. 551–558.
9. GLADYSHEV, YU. A., LOSHKAREVA, E. A. (2021) On one physical interpretation of generalized conditions Cauchy-Riemann. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1902. p. 012037.
10. Гладышев, Ю. А., Лошкарева, Е. А. О построении обобщенных степеней для уравнения квантовой электродинамики Дирака // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXXII Современные методы теории краевых задач. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2021. — С. 70–72.
GLADYSHEV, Yu. A., LOSHKAREVA, E. A. (2021) On the construction of generalized degrees for the Dirac quantum electrodynamics equation. *Proceedings of the International Conference Voronezh Spring Mathematical School Pontryaginsky Readings – XXXII Modern Methods of the theory of boundary value problem*. 3. p. 70–72.

11. Гладышев, Ю. А., Лошкарева, Е. А. О приложении метода обобщенных степеней Берса для решения уравнения Дирака // Международная конференция «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П. Л. Чебышёва. — Калуга: Калужский печатный двор, 2021. — С. 300–301.

GLADYSHEV, Yu. A., LOSHKAREVA, E. A. (2021) On the application of the method of generalized powers of Bers to the solution of the Dirac equation. *International Conference "P. L. Chebyshev's Mathematical Ideas and Their Applications to Modern Problems of Natural Science dedicated to the 200th anniversary of the birth of the great Russian mathematician, Academician P. L. Chebyshev.* 13. p. 300–301.

12. Гладышев, Ю. А., Лошкарева, Е. А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса // Вестник Калужского университета. — Калуга: Калужский печатный двор, 2020. — 2(47). — С. 77–80.

GLADYSHEV, Yu. A., LOSHKAREVA, E. A. (2020) On methods for constructing complex generalized Bers degrees. *Bulletin of the Kaluga University.* 2(47). p. 77–80.

УДК: 517.9

MSC2010: 00A72

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-65-80>

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© К. А. Раецкий

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ПЛОЩАДЬ, 1, ВОРОНЕЖ, 394000, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: kraetsky@mail.ru

**CONSTRUCTION OF A MOTION MODEL OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM WITH
MULTI-POINT CONDITIONS.**

Raetsky K. A.

Abstract.

A model of motion of a dynamic system with the condition that the trajectory passes through arbitrarily specified points at arbitrarily specified times is constructed. The simulated motion occurs at the expense of the input vector-function, calculated for the first time by the method of indefinite coefficients. The proposed method consists in the formation of the vector function of the trajectory of the system and the input vector function in the form of linear combinations of scalar fractional rational functions with undefined vector coefficients. To change the shape of the trajectory to the specified linear combinations, an exponential function with a variable exponent is introduced as a factor.

To determine the vector coefficients, the formed linear combinations are substituted directly into the equations describing the dynamic system and into the specified multipoint conditions. As a result, a linear algebraic system is formed.

The resulting algebraic system has coefficients at the desired parameters only matrices included in the Kalman condition of complete controllability of the system, and similar matrices with higher degrees.

It is proved that the Kalman condition is sufficient for the solvability of the resulting algebraic system. To form an algebraic system, the properties of finite-dimensional mappings are used: decomposition of spaces into subspaces, projectors into subspaces, semi-inverse operators. For the decidability of the system, the Taylor formula is applied to the main determinant.

For the practical use of the proposed method, it is sufficient to solve the obtained algebraic system and use the obtained linear formulas. The conditions for complete controllability of the linear dynamic system are satisfied. To prove this fact, we use the properties of finite-dimensional mappings. They are used in the decomposition of spaces into subspaces, in the construction of projectors into subspaces, in the construction of semi-inverse matrices. The process of using these

properties is demonstrated when solving a linear equation with matrix coefficients of different dimensions with two vector unknowns.

A condition for the solvability of the linear equation under consideration is obtained, and this condition is equivalent to the Kalman condition. In order to theoretically substantiate the solvability of a linear algebraic system, to determine the sought vector coefficients, the solvability of an equivalent system of linear equations is proved. In this case, algebraic systems arise with the main determinant of the following form: the first few lines are lines of the Wronsky determinant for exponential-fractional-rational functions participating in the construction of the trajectory of motion at the initial moment of time; the next few lines are the lines of the Wronsky determinant for these functions at the second given moment in time, and so on. The number of rows is also related to the Kalman condition - it is the number of matrices in the full rank controllability matrix. Such a determinant for the exponential-fractional-rational functions under consideration is nonzero.

The complexity of proving the existence of the trajectory and the input vector function in a given form for the system under consideration is compensated by the simplicity of the practical solution of the problem.

Due to the non-uniqueness of the solution to the problem posed, the trajectory of motion can be unstable. It is revealed which components of the desired coefficients are arbitrary and they should be fixed to obtain motion with additional properties.

Keywords: *dynamical system, multipoint motion model, undetermined coefficients method, process implementation.*

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$, A и B – матрицы соответствующих размеров, $t \in [t_0, t_k]$, $\nexists B^{-1}$. Вектор-функцию $x(t)$ называют состоянием, траекторией системы, $v(t)$ – входная вектор-функция, вход.

Таковыми системами моделируются динамические процессы в биологии (изменение численности популяции зверьков и др. [1]), в медицине (распространение инфекционных заболеваний [2], [3] и др.), в экономике (динамическая модель межотраслевого баланса [1], [4] и др.), в электротехнике ([3] и др.); механические движения, описываемые основными законами динамики [3], [5] и мн. др.

Известно [6], что полным условием возможности перевода состояния системы (1) из произвольного начального состояния

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

в произвольное конечное состояние

$$x(t_k) = x_k \quad (3)$$

за произвольный промежуток времени $t \in [t_0, t_k]$, то есть существование входной вектор-функции $v(t)$ такой, что состояние $x(t)$ системы с реализованной этой вектор-функцией и реализованным начальным состоянием (2) примет в момент t_k именно значение x_k , является условие

$$\text{rank}(B AB \dots A^{n-1}B) = n. \quad (4)$$

Это условие использовал акад. Крылов Н.Н. [7] при расчетах кораблестроительных систем, акад. Понтрягин Л. Д. [8]. Позже, после доклада Р.Калмана на конгрессе IFAC в 1959 г. это условие было названо условием Калмана [9].

Начиная с 1960 г. появилось огромное количество научно-исследовательских работ и практических решений задачи (1)-(3) нахождения входа $v(t)$ для существования или для нахождения соответствующего состояния $x(t)$. Как правило, практическое решение поставленной задачи осуществляется лишь приближенными методами. Нам известны лишь два метода построения $v(t)$ и $x(t)$ для задачи (1)-(3) в аналитическом виде:

- 1) построение [5] по формулам

$$W = \int_0^{t_1} e^{-sA} B B^* e^{sA^*} ds, \quad z = W^{-1} \left(e^{-t_1 A} x_1 - x_0 \right),$$

$$v(t) = B^* e^{tA^*} z, \quad x(t) = e^{tA} x_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} B v(s) ds;$$

- 2) метод каскадной декомпозиции [10] – [13].

Недостатками первого метода является наличие в формулах матричных экспонент, то есть матричных рядов; узость класса решений (это ряды по степеням t); метод применим лишь для решения двухточечной задачи (заданы начальное положение системы и конечное).

Метод каскадной декомпозиции применим для решения многоточечных задач; $v(t)$ и $x(t)$ строятся в виде линейных комбинаций линейно-независимых функций различного вида. Для практического применения метода разработан в [13] достаточно простой алгоритм решения, однако, требуется большая работа с заданными условиями на каждом этапе декомпозиции системы.

Построение соответствующих $v(t)$ и $x(t)$ в аналитическом виде остается актуальной задачей.

В настоящей работе рассматривается следующая модель движения: траектория системы (1) выйдя из заданной точки (2) должна пройти в произвольно заданные моменты времени t_i , $i = 0, 1, \dots, k$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, через точки (t_i, x_i) с любыми заданными значениями $x_i \in \mathbb{R}^n$. То есть на $x(t)$ накладываются условия

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (5)$$

К примеру, линеаризованные модели движения летательных аппаратов: самолетов, вертолетов, спутников, в том числе объектов, движущихся под действием реактивных сил [3], [5], имеют вид (1). Для таких систем важно при движении оказаться в нужное время t_i в нужном месте x_i .

Модель движения динамической системы (1), (5) рассматривалась в работах [10] - [13], где для построения соответствующего движения разработан метод каскадной декомпозиции. Доказано, что условие (4) есть полное условие существования входа $v(t)$, при реализации которого траектория системы (1) обладает свойствами (5).

Установлено, что при выполнении условия (4) существуют $x(t)$ и $v(t)$ в виде линейных комбинаций некоторых линейно независимых скалярных функций с векторными коэффициентами. Для вычисления соответствующих векторных коэффициентов в этих работах предлагается произвести несколько однотипных декомпозиций системы (1), и на каждом этапе декомпозиций необходимо проделать преобразования условий (5).

Результаты этих приводят к мысли о возможности моделирования многоточечного движения для стационарных систем более простым методом неопределённых коэффициентов, предлагаемым далее.

В настоящей работе предлагается вычисление $x(t)$ и $v(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j \varphi_j(t), \quad (6)$$

$$v(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j \varphi_j(t), \quad (7)$$

$\varphi_j(t) = e^{at} \frac{1}{(t+c)^j}$, с неопределёнными векторными коэффициентами $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$. Число r зависит от количества контрольных точек $k - 1$ и от числа p такого, что

$$\text{rank}(B AB \dots A^p B) = n, \quad p \leq n - 1. \quad (8)$$

Идея поиска $v(t)$ и $x(t)$ в виде линейных комбинаций линейно независимых функций не нова. В монографии [14] со ссылкой на другие первоисточники для частных динамических систем строятся $v(t)$ в виде обратной связи, если $x(t)$ – линейная комбинация функций $\varphi_i(t)$, где $\varphi_i(t) = t^i$ или $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$. В монографии [5] при решении краевой задачи для нестационарной системы (1) с одномерным $v(t)$ в случае известных линейно независимых импульсных переходных функций объекта $h^i(t, \tau)$, $i = \overline{0, n}$, строится $v(t)$ в виде линейной комбинации этих функций.

В работе [15] доказано лишь существование $v(t)$ в полиномиальном виде в задаче построения для системы (1) траектории $x(t)$ со свойствами (5).

В некоторых случаях более предпочтительными, чем полиномиальные функции, являются убывающие функции от t . При сбое в работе системы (не сработал выключатель в момент t_k , не осуществилось переключение технологических режимов, ...) входная вектор-функция и, соответственно, состояние системы стремятся в этом случае к нулю при $t \rightarrow \infty$, в отличие от полиномиальных вектор-функций, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к ∞ . Поэтому в данной работе используются экспоненциально-дробно-рациональные (ЭДР) функции с некоторым показателем степени a у экспоненты и слагаемым c в знаменателе, которые можно задавать, исходя из особенностей конкретной задачи.

Часть авторов строят управление для некоторой частной задачи в виде достаточно сложных дробно-рациональных функций приближенными методами. Предлагаемый в работе метод состоит в подстановке выражений (6) и (7) непосредственно в уравнение (1) и заданные условия (5), и определении коэффициентов α_j и β_j из полученных соотношений. Система, полученная в результате этих подстановок, может быть недоопределенной, "лишние" компоненты можно положить равными нулю или использовать для получения $v(t)$ и $x(t)$ с дополнительными свойствами. С этой целью количество слагаемых в (6) и (7) можно и увеличить. При этом для вычисления векторных коэффициентов актуально получение линейных алгебраических систем, коэффициентами в которых являются лишь матрицы $A^i B$, $i = 0, 1, \dots$, в отличие от работ других авторов, например [15], где для доказательства существования соответствующего $v(t)$ используются и другие матричные коэффициенты.

Преимущество предлагаемого метода по сравнению с каскадным методом, разработанным в [10]– [13], в том, что здесь не требуется выведения многоточечных условий для вектор-функций последнего шага декомпозиции, а также в том, что в получаемых формулах и системах для нахождения коэффициентов отсутствуют производные от функций, что приводит к минимальной погрешности вычислений.

1. ЭДР МОДЕЛЬ МНОГОТОЧЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Для динамической системы (1) с условиями (5) ставится задача построения траектории движения в виде

$$x(t) = e^{at} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\alpha_j}{(t+c)^j}, \quad (9)$$

для чего входная вектор-функция ищется в виде

$$v(t) = e^{at} \sum_{j=0}^r \frac{\beta_j}{(t+c)^j}. \quad (10)$$

Для нахождения векторных коэффициентов $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$, выражения (9) и (10) подставляются непосредственно в уравнение (1). Сократив полученное выражение на e^{at} и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{1}{t+c}$, приходим к системе

$$\begin{cases} 0 = A\alpha_1 + B\beta_1, \\ -j\alpha_j = A\alpha_{j+1} + B\beta_{j+1}, j = 1, 2, \dots, r-2, \\ -(r-1)\alpha_{r-1} = B\beta_r. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда коэффициенты α_j выражаются через коэффициенты β_{j+1} :

$$\begin{aligned} \alpha_{r-1} &= -\frac{1}{r-1}B\beta_r, \\ \alpha_{r-2} &= \frac{1}{(r-2)(r-1)}(A-aI)B\beta_r - \frac{1}{r-2}B\beta_{r-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_j &= \sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j+1} \frac{(j-1)!}{i!} (A-aI)^{i-j} B\beta_{i+1}, j = 1, 2, \dots, r-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив определенное из (12) выражение для α_1 в первое равенство системы (11), получаем одно из уравнений для нахождения коэффициентов β_j :

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{1}{(r-j-1)!} (A-aI)^{r-j-1} B\beta_{r-j} = 0. \quad (13)$$

Далее выражения (12) и (9) подставляются в условия (5) и вместе с соотношениями (13) формируется система для нахождения коэффициентов $\beta_j, j = 1, 2, \dots, r$:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{1}{(r-j-1)!} (A - aI)^{r-j-1} B \beta_{r-j} = 0, \\ \sum_{j=0}^{r-2} \frac{1}{(t_i + c)^{r-j-2}} \sum_{m=0}^j (-1)^{j+1} \frac{(r-m-j-2)!}{(r-m-1)!} (A - aI)^{j-m} B \beta_{r-m} = \\ = (t_i + c) e^{-at_i} x_i, \end{cases} \quad (14)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, k$. В свою очередь вектор функция $x(t)$ с помощью выражений (9) и (12) приобретает вид

$$x(t) = e^{at} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{(t+c)^j} \sum_{i=j}^{r-1} (-1)^{i-j+1} \frac{(j-1)!}{i!} (A - aI)^{i-j} B \beta_{i+1}. \quad (15)$$

Итак, для построения многоточечного движения динамической системы (1) предлагается поиск вектор-функции $v(t)$ в виде (10) с коэффициентами β_j , определяемыми линейной алгебраической системой (14) с матричными коэффициентами $(A - aI)^s B, s = 0, 1, 2, \dots, r - 1$. При этом траектория движения $x(t)$ системы (1) имеет вид (15).

Ввиду громоздкости системы (14) ее разрешимость исследуется через разрешимость системы (11) с условиями (5), (9), поскольку система (14) получена из (11), (5), (9) эквивалентными преобразованиями.

2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Решается уравнение

$$Ay + Bz = w, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n, \quad (16)$$

относительно $y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m$, если $\nexists A^{-1}, \nexists B^{-1}$. Отображение $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково) производит следующее расщепление пространств в прямые суммы:

$$\mathbb{R}^m = \text{Coim} B \dot{+} \text{Ker} B, \quad \mathbb{R}^n = \text{Im} B \dot{+} \text{Coker} B, \quad (17)$$

где $\text{Im} B$ – образ B ; $\text{Coker} B$ – дефектное подпространство, $\text{Coim} B$ – прямое дополнение к подпространству $\text{Ker} B$ в \mathbb{R}^m . Проекторы на $\text{Ker} B$ и $\text{Coker} B$, отвечающие разложениям (17), обозначаются через P и Q , соответственно. Сужение \tilde{B} отображения B на $\text{Coim} B$ имеет обратный \tilde{B}^{-1} . Вводится полуобратный оператор $B^- = \tilde{B}^-(I - Q)$. Здесь и далее через I обозначаем единичный оператор в любом пространстве.

Лемма 1. Равенство (16) эквивалентно системе

$$\begin{cases} QAy = Qw, \\ z = B^{-}(-Ay + w) + h, \forall h \in \text{Ker}B, (h = Pz). \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство. Достаточно записать (16) в виде

$$B((I - P)z + Pz) = (I - Q)(-Ay + w) + Q(-Ay + w).$$

Поскольку B не действует в $\text{Coker } B$, то $Q(-Ay + w) = 0$. Далее: $B((I - P)z + Pz) = B(I - P)z$ и $B(I - P)$ обратим. Величина Pz остается произвольной. \square

Замечание 1. P , Q и B^{-} могут иметь разные формы, но соотношения (18), полученные при разных формах P , Q и B^{-} , будут эквивалентными. Первое соотношение в (18) есть условие корректности равенства (16).

Используя равенство $I = Q^2 + (I - Q)^2$, запишем первое равенство в (18) в виде

$$QAQ(Qy) + QA(I - Q)((I - Q)y) = Qw. \quad (19)$$

Обозначим

$$Qy = y_1, (I - Q)y = z_1, QAQ = A_1, QA(I - Q) = B_1. \quad (20)$$

Теперь (19) – это

$$A_1y_1 + B_1z_1 = Qw.$$

Равенство (16) эквивалентно теперь системе

$$\begin{cases} z = B^{-}(-Ay + w) + h, \forall h \in \text{Ker}B, \\ y = y_1 + z_1, \\ A_1y_1 + B_1z_1 = Qw \end{cases} \quad (21)$$

в обозначениях (20). Последнее соотношение в этой системе по виду аналогично соотношению (16), только состоит из меньшего количества скалярных уравнений за счет отщепления от (16) первого равенства в (21), поэтому процесс расщепления последнего соотношения в (21) можно продолжить, для чего ввести обозначения

$$\begin{aligned} Q_{i-1}y_{i-1} = y_i, (I - Q_{i-1})y_{i-1} = z_i, Q_{i-1}A_{i-1}Q_{i-1} = A_i, \\ Q_{i-1}A_{i-1}(I - Q_{i-1}) = B_i, Q = Q_0, P = P_0, A = A_0, B = B_0, \\ y = y_0, z = z_0, i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

где Q_{i-1} и P_{i-1} – проекторы на подпространства $\text{Coker } B$ и $\text{Ker } B$, отвечающие разложениям

$$\text{Im}B_{i-2} = \text{Coim}B_{i-1} \dot{+} \text{Ker}B_{i-1}, \quad \text{Coker}B_{i-2} = \text{Im}B_{i-1} \dot{+} \text{Coker}B_{i-1},$$

$B_i^- = \tilde{B}_i^{-1}(I - Q_i)$, \tilde{B}_i – сужение B_i на $\text{Coim } B_i$. В результате получен следующий результат.

Лемма 2. Равенство (16) эквивалентно системе

$$z_{i-1} = B_{i-1}^-(-A_{i-1}y_{i-1} + w_{i-1}) + h_{i-1}, \quad \forall h_{i-1} \in \text{Ker } B_{i-1}, \quad (23)$$

$$y_{i-1} = y_i + z_i, \quad (24)$$

$$A_i y_i + B_i z_i = \prod_{s=1}^i Q_{i-s} w, \quad i = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Процесс расщепления заканчивается, если существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что B_p сюръективно, или $\exists q \in \mathbb{N}$ такое, что $B_q = (0)$.

В работах [10] - [13] доказано, что если $B_q = (0)$, то $\text{rank}(B A B \dots A^{n-1} B) < n$ и не существует $v(t)$ при котором траектория $x(t)$ системы (1), выйдя из точки x_0 придет в точку x_1 , $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, а если B_q – сюръекция, то такое $v(t)$ существует и

$$\text{rank}(B A B \dots A^p B) = n. \quad (26)$$

Поскольку расщепление заканчивается за счет конечномерности (16), то для решения поставленной в этом пункте задачи необходимо существование $p \in \mathbb{N}$, при котором B_p – сюръекция, то есть $\text{Coker } B_p = \{0\}$, $Q_p = (0)$.

Покажем в дальнейшем, что сюръективности B_p и достаточно для решения исходной задачи в виде (9), (10).

Лемма 3. Если $\text{rank}(B A B \dots A^p B) = n$, то решение $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ уравнения (16) существует $\forall w \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Равенство (16) эквивалентно системе (22) с $i = 1, 2, \dots, p$. Из равенства (25) с $i = p$ находится $z_p = B_p^-(Q_{p-1}Q_{p-2}\dots Q_1 Q_0 w - A_p y_p) + h_p$, при $\forall y_p \in \text{Coim } B_p$ и $\forall h_p \in \text{Ker } B_p$. С помощью (24) с $i = p$ определяется y_{p-1} . Затем из (23) с $i = p$ находится z_{p-1} . Далее с помощью (24) с $i = p - 1$ строится y_{p-2} ; потом из (23) с $i = p - 1$ находится z_{p-2} ; далее из (24) с $i = p - 2$ строится y_{p-3} и так далее, пока из (24) с $i = 1$ найдется y_0 и из (23) с $i = 1$ найдется z_0 . \square

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ В ЭДР ВИДЕ

Требуется выявить условия существования векторов $\alpha_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^m$, связанных соотношениями (11) и условиями

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\alpha_j}{(t_i + c)^j} = e^{-at_i} x_i, \quad (27)$$

следующими из (5) и (9).

Умножим каждое j -ое равенство в (11) на $\frac{1}{(t_i + c)^j}$, последнее на $\frac{1}{(t_i + c)^{r-1}}$ и сложим полученные соотношения. С помощью (27) получаем

$$-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j\alpha_j}{(t_i + c)^{j+1}} = e^{-at_i} Ax_i + B \sum_{j=1}^r \frac{\beta_j}{(t_i + c)^j}, \quad (28)$$

и условие корректности этого равенства:

$$-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{jQ\alpha_j}{(t_i + c)^{j+1}} = e^{-at_i} QAx_i. \quad (29)$$

4.1. Случай $p = 1$. Из уравнения (27), умноженного слева на Q , и (29) составим систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{Q\alpha_j}{(t_i + c)^j} = e^{-at_i} Qx_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ -\sum_{j=1}^{r-1} \frac{jQ\alpha_j}{(t_i + c)^{j+1}} = e^{-at_i} QAx_i, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \end{cases} \quad (30)$$

Система состоит из $2(k+1)$ уравнений, из нее находятся $2(k+1)$ векторов $Q\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, r-1$, следовательно, $r = 2(k+1) + 1$, если только определитель Δ_1 этой системы отличен от нуля.

Определитель Δ_1 таков: для каждой компонент $Q\alpha_{js}$, $s = 1, 2, \dots, \dim \text{Coker } B$, векторов $Q\alpha_j$ каждые две строки его – это строки вронскиана для функций $\frac{1}{(t+c)^j}$, $j = 1, 2, \dots, 2(k+1)$, в точках $t = t_i$. Нетрудно доказать, что $\Delta_1 \neq 0$.

Далее из системы (11) находятся $(I - Q)\alpha_j$ и β_j следующим образом. Каждое равенство в (11) есть соотношение вида (16), эквивалентное системе (21). Для первого уравнения в (11) система (21) приобретает вид

$$\beta_1 = -B^- A\alpha_1 + \varphi_1, \quad \forall \varphi_1 \in \text{Ker } B,$$

$$\alpha_1 = Q\alpha_1 + (I - Q)\alpha_1,$$

$$A_1(Q\alpha_1) + B_1(I - Q)\alpha_1 = 0.$$

Здесь B_1 – сюръекция (случай $p = 1$), следовательно,

$$(1 - Q)\alpha_1 = -B_1^- A_1(Q\alpha_1) + \psi_1, \quad \forall \psi_1 \in \text{Ker } B_1,$$

а $Q\alpha_1$ найдено при решении системы (30).

Теперь известны и α_1 и β_1 .

Аналогичным образом из остальных уравнений системы (11) последовательно определяются $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, 2(k + 1)$, и $\beta_j, j = 1, 2, \dots, 2(k + 1) + 1$.

Таким образом, в случае $p = 1$ система (11), (5), (9), и следовательно система (14) разрешима.

4.2. Случай $p = 2$. Каждое уравнение в системе (11) эквивалентно системе

$$\beta_{j+1} = B^-(-j\alpha_j - A\alpha_{j+1}) + \varphi_{j+1}, \forall \varphi_{j+1} \in \text{Ker} B, \quad (31)$$

$$\alpha_{j+1} = Q\alpha_{j+1} + (I - Q)\alpha_{j+1}, \quad (32)$$

$$-jQ\alpha_j = A_1Q\alpha_{j+1} + B_1(I - Q)\alpha_{j+1}, j = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (33)$$

если положить $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_r = 0$.

Равенство (33) в свою очередь эквивалентно системе

$$(I - Q)\alpha_{j+1} = B_1^-(-jQ\alpha_j - A_1Q\alpha_{j+1}) + \psi_{j+1}, \forall \psi_{j+1} \in \text{Ker} B_1, \quad (34)$$

$$Q\alpha_{j+1} = Q_1Q\alpha_{j+1} + (I - Q_1)Q\alpha_{j+1}, \quad (35)$$

$$-jQ_1Q\alpha_j = A_2Q_1Q\alpha_{j+1} + B_2(I - Q_1)Q\alpha_{j+1}. \quad (36)$$

Поскольку $p = 2$, то B_2 — сюръекция, и из (36) имеем

$$(I - Q_1)Q\alpha_{j+1} = B_2^-(-jQ_1Q\alpha_j - A_2Q_1Q\alpha_{j+1}) + \chi_{j+1}, \forall \chi_{j+1} \in \text{Ker} B_2. \quad (37)$$

Для нахождения $Q_1Q\alpha_j$ формируются уравнения: это уравнения (30), умноженные слева на Q_1 :

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{Q_1Q\alpha_j}{(t_i + c)^j} = e^{-at_i} Q_1Qx_i, \quad (38)$$

$$-\sum_{j=1}^{r-1} \frac{jQ_1Q\alpha_j}{(t_i + c)^{j+1}} = e^{-at_i} Q_1QAx_i, \quad (39)$$

и уравнение, получаемое за счет выполнения второго равенства в системе (30). Для получения этого уравнения следует каждое равенство (33) умножить на $\frac{-j}{(t_i + c)^{j+1}}$ и сложить:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(j+1)}{(t_i + c)^{j+2}} Q\alpha_j = -e^{-at_i} A_1QAx_i - B_1 \sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(I - Q)\alpha_j}{(t_i + c)^{j+1}}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j(j+1)}{(t_i + c)^{j+2}} Q_1Q\alpha_j = -e^{-at_i} Q_1A_1QAx_i. \quad (40)$$

Главный определитель линейной системы (38)-(40) для каждой компоненты $Q_1 Q \alpha_{js}$, $s = 1, 2, \dots, \dim \text{Coker} B_1$ элемента $Q_1 Q \alpha_j$ имеет следующий вид: каждые его три строки – это строки вронскиана для функций $\frac{1}{(t+c)^j}$ при $t = t_i$.

Определитель ненулевой, система состоит из $3(k+1)$ уравнений следовательно, она определяет $3(k+1)$ элементов $Q_1 Q \alpha_j$. Таким образом, при $p = 2$ имеем: $r = 3(k+1) + 1$.

Затем, из (37) находится $(I - Q_1) Q \alpha_{j+1}$, из (35) находится $Q \alpha_{j+1}$; из (34) – $(I - Q) \alpha_{j+1}$; далее α_{j+1} и α_j из (32); из (31) находится β_{j+1} , $j = 0, 1, \dots, r-1$.

Таким образом, при $p = 2$ система (11), (5), (9), а значит и система (14) разрешимы.

4.3. Случай произвольного p . Для определения величин $\prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m} \alpha_j$, обозначаемых через γ_j , составляется система

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\gamma_j}{(t_i+c)^j} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m} x_i, \\ -\sum_{j=1}^{r-1} \frac{j\gamma_j}{(t_i+c)^{j+1}} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m} A x_i, \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^p \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(p-1)! \gamma_j}{(j-1)! (t_i+c)^{j+p}} = e^{-at_i} \prod_{m=0}^{p-1} Q_{p-1-m} A_{p-1-m} x_i, \end{array} \right. \quad (41)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, k$. Коэффициенты при каждом γ_j в этой системе есть производные от $\frac{1}{t_i+c}$ до p -го порядка, и в главном определителе Δ_p системы (41) для каждой компоненты γ_{js} , $s = 1, 2, \dots, \dim \text{Coker} B_{p-1}$, каждые p строк – это строки определителя Вронского при $t = t_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Всего $(p+1)(k+1)$ уравнений для определения $r-1$ величин γ_j , следовательно,

$$r = (p+1)(k+1) + 1. \quad (42)$$

С помощью найденных из системы (41) значений γ_j определяются из (11) $(I - Q_{p-1}) \prod_{m=1}^{p-1} Q_{p-1-m} \alpha_j$, затем $\prod_{m=1}^{p-1} Q_{p-1-m} \alpha_j$, и так далее, ..., потом $Q \alpha_j$, $(I - Q) \alpha_j$, α_j и β_j .

Итак, система (14) имеет решение β_j , $j = 1, 2, \dots, (p+1)(k+1) + 1$.

Как следует из (31), решение неединственное, β_j содержат произвольные слагаемые из $\text{Ker} B$. Кроме того β_j выражаются через α_j , α_{j+1} , которые, в свою очередь, содержат произвольные слагаемые из $\text{Ker} B_q$, $q = 1, 2, \dots, p$.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. Если существует $\tilde{v}(t)$, такая, что траектория $\tilde{x}(t)$ системы (1), выйдя из произвольно заданной начальной точки $\tilde{x}(0) = x_0$, непременно придет в момент t_1 в любую заданную точку $\tilde{x}(t_1) = x_1$, то существует $v(t)$ в виде (10) и $x(t)$ в виде (15) с векторными коэффициентами, определяемыми из системы (14), причем траектория $x(t)$, выйдя из произвольно заданной точки $x(0) = x_0$ пройдет непременно через все заданные контрольные точки $x(t_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для моделирования движения (состояния) $x(t) \in \mathbb{R}^n$ с контрольными точками линейной динамической системы под воздействием входной вектор-функции $v(t) \in \mathbb{R}^m$ впервые приводятся формулы для вычисления и $v(t)$ и $x(t)$ в экспоненциально-дробно-рациональном виде.

Дробно-рациональные функции обладают важными в практических системах свойствами: они с течением времени затухают. Для изменения скорости затухания в знаменатели дробно-рациональных функций введен слагаемым некоторый параметр. Дробно-рациональные вектор-функции содержат множителем скалярную экспоненциальную функцию с дополнительным параметром в показателе для получения разных форм траекторий системы.

Для нахождения векторных коэффициентов, входящих в формулы для $v(t)$ и $x(t)$, составлена линейная алгебраическая система, коэффициентами при искомым векторах в которой являются лишь матрицы, участвующие в описании динамической системы.

Заметим, динамическая система описывается с помощью производной от функции состояния системы, но при построении $x(t)$ и $v(t)$ предлагаемым методом не участвуют ни какие-либо производные, ни решения дифференциального уравнения, ни матричные экспоненты, что приводит при вычислениях к минимальным погрешностям.

Значительную трудность представляет доказательство существования решения алгебраической системы, и доказательство приведено в данной работе не для этой системы, а для эквивалентной ей. В основу доказательства положена лемма о существовании решения линейной системы с необратимыми матричными коэффициентами с двумя векторными неизвестными.

Для получения решения этого уравнения совершается многошаговое разложение системы на системы в подпространствах. В одном подпространстве часть неизвестных выражается через другую часть неизвестных. В другом подпространстве для этой другой части неизвестных формируется система, схожая по виду с исходной

системой, но содержащая меньшее количество скалярных уравнений. Эта новая система также расщепляется на системы в новых подпространствах, и т. д.

За счет конечномерности исходной системы процесс расщепления конечен, и на последнем шаге выявляются полные условия на коэффициенты системы, при выполнении которых и эта линейная система, и поставленная задача имеют решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурман, В. И. Вырожденные задачи оптимального управления / В. И. Гурман. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
GURMMAN, V. I. (1977) *Degenerate Optimal Control Problems*. Moscow: Nauka.
2. Нельсон, П. У., Перельсон, А. С. Математический анализ моделей дифференциального уравнения задержки ВИЧ-1-инфекции // Biosci. — М.: Наука, 2004. — Т. 179, 1. — С. 73–94.
NELSON, P. U. and PERELSON, A. S (2004) Mathematical analysis of models of the differential equation of HIV-1 infection delay. *Moscow: Nauka*. Vol. 179 (1). p. 73–94.
3. Дорф, Р., Бишоп, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. — 832 с.
DORF R. and BISHOP, R. (2002) *Modern control systems*. Moscow: Basic knowledge laboratory.
4. Баранов, Э. Ф. Проблемы разработки схемы динамической модели межотраслевого баланса // Экономика и математические методы. — 1968. — № 1. — С. 26.
BARANOV, E. E. (1968) Problems of developing a dynamic model of intersectoral balance. *Economy and mathematical methods*. Vol. 1. p. 3–26.
5. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
KRASOVSKY, N. N. (1968) *Theory of motion control*. Moscow: Nauka.
6. Калман, Р. Е., Фалб, П., Арбиб, М. Очерки по математической теории систем / Р. Е. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Едиториал, 2004. — 400 с.
KALMAN, R. E. and FALB, P. and ARBIB, M. (2004) *Essays on Mathematical Systems Theory*. Moscow: Editorial.

7. Крылов, А. Н. Избранные труды / А. Н. Крылов. — Изд-во Акад.наук СССР, 1958. — 803 с.
KRYLOV, A. N. (1958) *Selected Works*. Publishing House of Academic Sciences of the USSR.
8. Понтрягин, Л. С. Оптимальные процессы регулирования // УМН. — вып.1(85), 1959. — Т. 14. — С. 3–20.
PONTRIAGIN, L. S (1959) Optimal regulation processes. *SMS*. Vol. 14(1). p. 3–20.
9. Калман, Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды IFAC. — Москва, 1960. — С. 521–546.
KALMAN, R. E. (1960) Comparison theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics. *Moscow: IFAC Proceedings*. p. 521–546.
10. ZUBOVA, S. P. (2012) Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method. *Doklady Mathematics*. 86(3). p. 846–849.
11. Зубова, С П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автоматика и Телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27–41.
ZUBOVA, S. P. (2011) On full controllability criteria of a descriptor system. The polynomial solution of a control problem with checkpoints. *Automation and Remote Control*. V. 72(1). p. 23–37.
12. Зубова, С. П., Раецкая, Е. В., Ле, Хай Чунг О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // Автоматика и Телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 41–47.
Zubova, S. P., Trung, L. H., Raetskaya, E. V. (2008) On polynomial solutions of the linear stationary control system. *Automation and Remote Control*. V. 69(11). p. 1852–1858.
13. Зубова, С. П., Раецкая, Е. В. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции // Автоматика и Телемеханика. — 2017. — № 7. — С. 22–38.
Zubova, S. P., Raetskaya, E. V. (2017) Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition. *Automation and Remote Control*. V. 78(7). p. 1189–1202.

14. Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели / П. Д. Крутько. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
KRYTKO, P. D. (1987) *Inverse problems of the dynamics of controlled systems. Linear models.* Moscow: Nauka.
15. AILON, A., LANGHOLZ, G. (1986) More on the controllability of linear time-invariant systems. *Int. J. Contr.* V. 44(4). p. 1161–1176.

УДК: 517.927.21, 517.911.5, 51-73

MSC2010: 34B05, 34C60, 80A19

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100>

О КОРРЕКТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ И КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

© Д. В. Туртин

РОССИЙСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Г. В. ПЛЕХАНОВА
ИВАНОВСКИЙ ФИЛИАЛ
КАФЕДРА МЕНЕДЖМЕНТА, ТЕХНОЛОГИЙ БИЗНЕСА И ГУМАНИТАРНЫХ ДИСЦИПЛИН
УЛ. ДЗЕРЖИНСКОГО, 53, ИВАНОВО, 153025, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: turtin@mail.ru

© М. А. Степович*, В. В. Калманович**, А. А. Картанов***

КАЛУЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО
ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*, **КАФЕДРА ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ, ***КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
УЛ. СТЕПАНА РАЗИНА, 26, КАЛУГА, 248023, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *m.stepovich@rambler.ru, **v572264@yandex.ru, ***kartanovartem@gmail.com

ON THE CORRECTNESS OF MATHEMATICAL MODELS OF DIFFUSION AND
CATHODOLUMINESCENCE.

Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V., Kartanov A. A.

Abstract. Mathematical models of diffusion and cathodoluminescence of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide electron beam in homogeneous and multilayer semiconductor materials are considered. The use of wide electron beams makes it possible to reduce these problems to one-dimensional ones and to describe these mathematical models by ordinary differential equations. For the collective movement model, the corresponding mathematical model is:

$$D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho(z)$$

with boundary conditions

$$D \left. \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right|_{z=0} = v_s \Delta p(0), \quad \Delta p(\infty) = 0.$$

Here the function $\rho(z)$ is the dependence on the coordinate z of the density of minority charge carriers generated by an electron beam in a semiconductor target prior to their diffusion, $\Delta p(z)$ is the sought distribution of minority charge carriers after their diffusion, the remaining parameters for homogeneous materials are constants.

For the model of independent sources, the corresponding mathematical model is:

$$D \frac{d^2 \Delta p(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z, z_0)}{\tau} = -\rho(z) \delta(z - z_0)$$

with boundary conditions

$$D \left. \frac{d\Delta p(z, z_0)}{dz} \right|_{z=0} = \nu_s \Delta p(0, z_0), \quad \Delta p(\infty, z_0) = 0.$$

Here the function $\Delta p(z, z_0)$ describes the distribution over the depth of the minority charge carriers generated by a plane infinitely thin source located at a depth z_0 , $z_0 \in [0, \infty)$. The distribution of nonequilibrium charge carriers $\Delta p(z)$ in this case is found as

$$\Delta p(z) = \int_0^\infty \Delta p(z, z_0) dz_0.$$

For both models, the intensity of cathodoluminescence I taking into account absorption at a fixed radiation wavelength λ was calculated as

$$I \sim \int_{l_s}^\infty \Delta p(z) \exp[-\alpha(\lambda)z] dz.$$

The study of the considered models is carried out, including the proof of the uniqueness of solutions and the continuous dependence of solutions on the data of the problem. Estimates are obtained for solving the problems under consideration, which make it possible to use them in electron probe technologies.

In the case of one-dimensional diffusion into the n -layer final semiconductor structure ($z \in [0, l]$) the depth distribution of the minority charge carrier is found as a solution to the differential equations

$$D^{(i)}(z) \frac{d^2 \Delta p^{(i)}(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)} = -\rho^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}$$

with boundary conditions

$$D^{(1)} \left. \frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = \nu_s^{(1)} \Delta p^{(1)}(0), \quad D^{(n)} \left. \frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz} \right|_{z=l} = -\nu_s^{(n)} \Delta p^{(n)}(l).$$

The superscript in parentheses indicates the layer number.

The possibilities of using this approach for multilayer structures with an arbitrary number of layers are discussed.

Keywords: *mathematical model, stationary differential heat and mass transfer equation, ordinary differential equations, Cauchy problem, cathodoluminescence.*

ВВЕДЕНИЕ

Значительное число различных процессов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В качестве примера можно привести процессы, возникающие при нормальном падении широких пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения на плоскую поверхность твёрдого тела. К числу таких относятся процессы тепломассопереноса, обусловленного взаимодействием широких источников возбуждения с плоской поверхностью конденсированного вещества, а также процессы, непосредственно связанные с процессами тепломассопереноса, например, катодоллюминесценция (КЛ), возникающая при излучательной рекомбинации генерированных электронным пучком и продиффундировавших в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [1–4].

Регистрация и изучение КЛ излучения является весьма важным методом исследования состава и свойств однородных и многослойных полупроводниковых структур опто-, микро-, наноэлектроники и СВЧ-техники — см., например, [3, 4]. Этот метод позволяет получать информацию об объекте исследования, прежде всего о фотоприёмных и светоизлучающих материалах и структурах, которую весьма сложно либо вообще невозможно получить иным способом. Однако изучение и анализ качественных свойств процессов тепломассопереноса в микро- и электроннозондовых технологиях [5–7], в т.ч. проблемы корректности, ранее практически не проводились. В качестве немногих примеров таких исследований можно привести работы, в которых изучались проблемы решения стационарных и нестационарных дифференциальных уравнений диффузии ННЗ и связанные с ними проблемы корректности математических моделей, описывающих взаимодействие остро сфокусированных электронных пучков (электронных зондов) с однородными полупроводниковыми мишенями [8–13]. В то же время для одномерного движения ННЗ такая задача ранее не изучалась и даже не ставилась. Ввиду этого в настоящей работе рассматриваются некоторые возможности решения стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы взаимодействия широких электронных пучков с однородными полупроводниковыми объектами и установление корректности математических моделей КЛ, построенных на основе решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. Изучение таких задач актуально как для однородных толстых (с математической точки зрения полубесконечных) полупроводников [5, 14, 15], так и для материалов и структур конечной толщины [14, 16, 17] — широко используемых на практике для создания различных структур опто-, микро-, наноэлектроники и СВЧ-техники.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНАМИ ПУЧКА В ТВЁРДОМ ТЕЛЕ

При моделировании процессов тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с твёрдым телом, одним из определяющих факторов при проведении расчётов является описание правой части дифференциальных уравнений, задающих количественную характеристику воздействия электронов пучка на облучаемую поверхность мишени. Такой характеристикой является мощность, рассеиваемая первичным пучком электронов в мишени. При проведении практических расчётов для всех проводящих материалов (не только полупроводниковых) и практически для всех энергий пучка киловольтных электронов (до энергий около 50 кэВ) приемлемые результаты могут быть получены с использованием следующей полуэмпирической модели, описывающей плотность потерь энергии широким пучком электронов [18–20]:

$$\rho^*(z) = \frac{1,085 (1 - \eta) P_0}{\sqrt{\pi} z_{ms} \left(1 - \eta + \eta \frac{z_{ss}}{z_{ms}}\right)} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{z - z_{ms}}{z_{ms}} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{1 - \eta} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{ss}}{z_{ss}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь P_0 — мощность электронного пучка, рассеянная в мишени, z_{ms} — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние и поглощёнными в мишени; z_{ss} — глубина максимальных потерь энергии электронами, испытавшими рассеяние на большие углы и покинувшими мишень (обратно рассеянные электроны), $z_{ss} = Z^{-1/3} z_{ms}$; η — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда, $\eta = 0,024eZA^{1,67}$, где e — основание натуральных логарифмов; Z и A — порядковый номер вещества мишени в периодической таблице элементов и её атомный вес, соответственно.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Модель коллективной диффузии. В этом случае дифференциальное уравнение диффузии неравновесных ННЗ, генерируемых широким электронным пучком в полубесконечной однородной полупроводниковой мишени, имеет вид

$$D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho(z) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$D \left. \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right|_{z=0} = v_s \Delta p(0), \quad \Delta p(\infty) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\rho(z)$ — концентрация ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводнике в единицу времени на глубине z (до их диффузии), функция $\Delta p(z)$ описывает искомое распределение ННЗ по глубине после их диффузии, а постоянные D , τ и v_s — коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно. Значение $\rho(z)$ получается делением плотности потерь энергии электронами пучка в единицу времени $\rho^*(z)$ [18–20] на энергию образования ННЗ.

Некоторые возможности этой модели, основанной на решении дифференциального уравнения (2)–(3) рассмотрены в классических работах [21–23] и некоторых последующих работах.

Модель независимых источников. Для математического моделирования пространственного распределения ННЗ, генерированных в полупроводниковом материале электронным зондом, можно использовать так называемую модель независимых источников, согласно которой на диффузию неравновесных ННЗ из любого микрообъема полупроводника не оказывают влияния другие электроны или дырки из других микрообластей материала. Такой подход в принципе может позволить описать локальные неоднородности, имеющиеся в однородных материалах, а также неоднородные, в том числе и многослойные, материалы. Математически это выражается в том, что сначала решается уравнение диффузии для каждого из точечных источников ННЗ, после чего посредством интегрирования по объему, занимаемому источниками ННЗ, находится распределение ННЗ в полупроводнике в результате их диффузии. Идея такого подхода заимствована из классической работы [24] и использовалась нами, в том числе в задачах математического моделирования распределений ННЗ в однородных полупроводниковых материалах [25]. Соответствующее дифференциальное уравнение для однородного полупроводника или слоя многослойной планарной полупроводниковой структуры имеет вид:

$$D \frac{d^2 \Delta p(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z, z_0)}{\tau} = -\rho(z) \delta(z - z_0) \quad (4)$$

с граничными условиями

$$D \left. \frac{d\Delta p(z, z_0)}{dz} \right|_{z=0} = v_s \Delta p(0, z_0), \quad \Delta p(\infty, z_0) = 0. \quad (5)$$

Для однородного полупроводника интегрирование $\Delta p(z, z_0)$ по z_0 ($z_0 \in [0, \infty)$) даёт искомое распределение ННЗ по глубине $\Delta p(z)$:

$$\Delta p(z) = \int_0^\infty \Delta p(z, z_0) dz_0 = \int_0^z \Delta p_2(z, z_0) dz_0 + \int_z^\infty \Delta p_1(z, z_0) dz_0. \quad (6)$$

Модель независимых источников использовалась нами и для неоднородных планарных структур: ранее была решена задача нахождения распределений ННЗ в планарных полубесконечных двух ([26], [27]) и трёхслойных ([28], [29]) полупроводниковых структурах для случая постоянства D и τ внутри каждого слоя. Однако распространить этот метод на планарные структуры с большим числом слоёв нам не удалось ввиду возникших трудностей технического характера.

Модель диффузии для произвольного числа слоёв. В случае одномерной диффузии в конечный полупроводник вдоль оси OZ, перпендикулярной поверхности n -слойной полупроводниковой структуры ($z \in [0, l]$), распределение ННЗ по глубине находится как решение дифференциального уравнения [30–32]

$$D^{(i)}(z) \frac{d^2 \Delta p^{(i)}(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)} = -\rho^{(i)}(z), i = \overline{1, n} \quad (7)$$

с граничными условиями

$$D^{(1)} \left. \frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = \nu_s^{(1)} \Delta p^{(1)}(0), \quad D^{(n)} \left. \frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz} \right|_{z=l} = -\nu_s^{(n)} \Delta p^{(n)}(l). \quad (8)$$

Верхний индекс в скобках указывает номер слоя. Для многослойной структуры обозначим: $z_1 = 0, z_{n+1} = l$ — координаты внешних границ полупроводника, z_2, z_3, \dots, z_n — координаты границ раздела слоёв; $D^{(i)}, L^{(i)}, \tau^{(i)}$ — электрофизические параметры: коэффициент диффузии, диффузионная длина и время жизни ННЗ в i -м слое соответственно, при этом $L^{(i)} = \sqrt{D^{(i)}\tau^{(i)}}$. На границах полупроводника (при $z = 0$ и при $z = l$) приведённые скорости поверхностной рекомбинации $S^{(1)} = L^{(1)}\nu_s^{(1)}/D^{(1)}, S^{(n)} = L^{(n)}\nu_s^{(n)}/D^{(n)}$, где $\nu_s^{(1)}$ и $\nu_s^{(n)}$ — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ в первом и в n -ом слоях соответственно. Функция $\Delta p^{(i)}(z)$ описывает распределение по глубине в i -м слое неравновесных ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием, после их диффузии в полупроводнике. Функция $\rho^{(i)}(z)$ — зависимость от координаты плотности ННЗ, генерированных электронным пучком в полупроводниковой мишени до их диффузии. Для широкого электронного пучка $\rho^{(i)}(z)$ может быть найдена из выражения для плотности потерь энергии электронным пучком $\rho^{*(i)}(z)$, выделяемой в мишени в единицу времени до начала процесса диффузии [18–20]. Отметим также, что использование матричного метода для решения рассматриваемой задачи позволяет получить её решение в аналитическом виде — см., например [30–32].

Модель катодолюминесценции. КЛ излучение, возникающее при взаимодействии электронного пучка с поверхностью полупроводниковой мишени, может быть

использовано для определения её параметров [2–4]. Для прямозонных полупроводников некоторые параметры могут быть получены из измерений зависимости интенсивности I монохроматической КЛ от энергии электронов пучка E_0 . Функциональную зависимость, связывающую I и E_0 , запишем в виде $I = I(E_0, \Theta)$. Здесь $\Theta = (\theta_k)$ — вектор параметров, $k = \overline{1, p}$, p — число параметров. Для широкого электронного пучка, низкого уровня возбуждения и случая линейной излучательной рекомбинации ННЗ, часто реализующихся на практике, используем выражение [4]:

$$I(E_0, \Theta) \sim \left\{ 1 + 0,155 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_c}{L}\right) \right] \right\} \int_{l_s}^{\infty} \Delta p(z) \exp[-\alpha(\lambda)z] dz. \quad (9)$$

Здесь l_s — толщина приповерхностной области, обедненной основными носителями заряда, $\alpha(\lambda)$ — коэффициент поглощения КЛ излучения и z_c — координата центра тяжести $\rho^*(z)$ — распределения потерь энергии электронами в мишени.

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ

Модель коллективной диффузии. Для решения задачи (2), (3) будем использовать стандартные методы математического анализа. Используя метод вариации произвольной постоянной, получим решение уравнения (2) в виде:

$$\Delta p(z) = A_1 \exp(\sqrt{\sigma}z) + B_1 \exp(-\sqrt{\sigma}z) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^z \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(z-\xi)) d\xi, \quad (10)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (3).

Продифференцировав (10), получим

$$\Delta p'(z) = A_1 \sqrt{\sigma} \exp(\sqrt{\sigma}z) - B_1 \sqrt{\sigma} \exp(-\sqrt{\sigma}z) - \frac{1}{D} \int_0^z \rho(\xi) \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma}(z-\xi)) d\xi. \quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в граничные условия (3), получим систему алгебраических уравнения для нахождения A_1 и B_1 :

Из первого граничного условия (на поверхности полупроводника) получим

$$D(A_1 \sqrt{\sigma} - B_1 \sqrt{\sigma}) = v_{s1}(A_1 - B_1). \quad (12)$$

Прежде чем использовать второе граничное условие (на бесконечности $\Delta p(\infty) = 0$ — см. (3)) кратко приведём оценку ядра интеграла

$$I(z) = \int_0^z \rho(\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma}(z - \xi)) d\xi. \quad (13)$$

Отметим, что

$$\operatorname{sh}[\sqrt{\sigma}(z - \xi)] = \frac{\exp \sqrt{\sigma}(z - \xi) - \exp[-\sqrt{\sigma}(z - \xi)]}{2}$$

и

$$I(0) = \int_0^0 \rho(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{\sigma}(-\xi)] d\xi = 0.$$

Функция $\rho(\xi)$ описывается функциями типа Гаусса — см. (1). В силу асимптотики интеграла ошибок

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-z^2)}{z}$$

откуда, в конечном итоге, при больших z следует сходимость $I(z)$ к нулю. Значит из второго граничного условия ($\Delta p(\infty) = 0$ — см. (3)) и формулы (10) следует, что $A_1 = 0$.

Тогда

$$\Delta p(z) = B_1 \exp(-\sigma z) - I(z). \quad (14)$$

Отсюда $\Delta p(0) = B_1$.

Чтобы использовать первое граничное условие (3) (на поверхности полупроводника), продифференцируем интеграл $I(z)$:

$$\begin{aligned} I'(z) &= -\frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \left\{ \int_0^z \rho(\xi) \sqrt{\sigma} \operatorname{ch}[\sqrt{\sigma}(z - \xi)] d\xi + \rho(z) \operatorname{sh} 0 \right\} = \\ &= -\frac{1}{D} \int_0^z \rho(\xi) \operatorname{ch}[\sqrt{\sigma}(z - \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Тогда для левой части этого граничного условия получим

$$D \left. \frac{d\Delta p(z)}{dz} \right|_{z=0} = -B_1 \sigma \exp(0) - \frac{1}{D} \int_0^0 \rho(\xi) \operatorname{ch}(0) d\xi = -B_1 \sigma$$

и в целом это граничное условие примет вид:

$$D(-B_1\sigma) = v_s B_1.$$

Из полученного соотношения для рассматриваемых полупроводниковых материалов следует, что $B_1 = 0$ и для (14) с учётом (13) получим решение рассматриваемой задачи в виде:

$$\Delta p(z) = -I(z).$$

Отметим, что возможна и иная запись решения рассматриваемой задачи — см. [21, 22]. Однако использование решения в виде (10) позволяет провести исследование корректности задачи и получить оценки решения существенно проще.

Теорема 1. *Решение задачи (2), (3) $\forall z \in [0, \infty)$ единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть n_1 и n_2 — два различных решения задачи (2), (3). Рассмотрим функцию $u = n_2 - n_1$, которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$D \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{u}{\tau} = 0 \tag{15}$$

и граничным условиям (3). Применяя к полученной задаче формулы (10) и (11) с $\rho(z) = 0$, получим $u = 0$, откуда следует $n_2 = n_1$. Полученное противоречие и доказывает единственность решения задачи (2), (3). Теорема 1 доказана. \square

Модель независимых источников. Задача (4), (5) $\forall z \in [0, \infty)$ имеет решение, которое определяется следующей формулой:

$$\Delta p(z, z_0) = \begin{cases} \frac{\rho(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right] & \forall z \in [0, z_0], \\ \frac{\rho(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right] & \forall z \in [z_0, \infty). \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $L = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ, а $S = v_s L / D$ — приведённая скорость поверхностной рекомбинации ННЗ.

Решение задачи (4), (5) в виде (16) приведено в [4, 25].

Теорема 2. *Решение задачи (4), (5) $\forall z \in [0, \infty)$ единственно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с $\rho(z_0) = 0$ в правой части дифференциального уравнения. Теорема 2 доказана. \square

Модель диффузии для произвольного числа слоёв. Существование и единственность решения задачи диффузии для произвольного числа слоёв (7), (8) следует

из рассмотренных выше задач о диффузии ННЗ. Отметим также, что решение задачи в матричном виде [31, 32] даёт её аналитическое решение, причём численные и аналитическое решения дают практически совпадающие результаты [33].

Модель катодолюминесценции. Существование и единственность решения задачи КЛ (9) следует из рассмотренных выше задач о диффузии ННЗ. Некоторые особенности практической реализации этой модели для полупроводниковых структур, используемых в микро- и оптоэлектронике, приведены в [34].

4. ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ

Следующие теоремы устанавливают непрерывную зависимость решений рассматриваемых задач от правых частей дифференциальных уравнений и дают количественные оценки решений рассматриваемых задач.

Модель коллективной диффузии.

Теорема 3. Пусть u_1 — решение уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho_1(z)$$

с граничными условиями (3), а u_2 — решение уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p(z)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z)}{\tau} = -\rho_2(z)$$

с граничными условиями (3) и $\forall z \in [0, \infty)$

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Тогда $\forall z \in [0, \infty)$ справедлива оценка

$$|u_2(z) - u_1(z)| \leq \varepsilon c, \quad c = \frac{1}{D\sigma} [\operatorname{ch}(l\sqrt{\sigma}) - 1]. \quad (18)$$

Доказательство. Применив поочередно формулу (10) к задачам для функций u_1 и u_2 , получим

$$u_2(z) = A_1 \exp(\sqrt{\sigma}z) + B_1 \exp(-\sqrt{\sigma}z) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^z \rho_2(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{\sigma}(z-\xi)] d\xi,$$

$$u_1(z) = A_1 \exp(\sqrt{\sigma}z) + B_1 \exp(-\sqrt{\sigma}z) - \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^z \rho_1(\xi) \operatorname{sh}[\sqrt{\sigma}(z-\xi)] d\xi.$$

Вычитая второе равенство из первого и учитывая оценку (17), имеем

$$|u_2(z) - u_1(z)| \leq \varepsilon \frac{1}{D\sqrt{\sigma}} \int_0^z \operatorname{sh} [\sqrt{\sigma}(z - \xi)] d\xi,$$

откуда следует оценка (18). Теорема 3 и в целом корректность математической модели коллективной диффузии доказаны. \square

Модель независимых источников.

Теорема 4. Пусть $\Delta p_1(z, z_0)$ — решение уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p_1(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p_1(z, z_0)}{\tau} = -\rho_1(z) \delta(z - z_0)$$

с граничными условиями (5), $\Delta p_2(z, z_0)$ — решение уравнения

$$D \frac{d^2 \Delta p_2(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p_2(z, z_0)}{\tau} = -\rho_2(z) \delta(z - z_0)$$

с граничными условиями (5) и $\forall z \in [0, \infty)$

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \leq \varepsilon. \tag{19}$$

Тогда $\forall z \in [0, \infty)$ справедлива оценка

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L}.$$

Доказательство. На отрезке $z \in [0, z_0]$ решение задачи (4), (5) определяется формулой (16). Тогда для функций $\Delta p_1(z, z_0)$ и $\Delta p_2(z, z_0)$ имеем

$$\Delta p_1(z, z_0) = \frac{\rho_1(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right],$$

$$\Delta p_2(z, z_0) = \frac{\rho_2(z_0)\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right],$$

откуда

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{|\rho_2(z_0) - \rho_1(z_0)|\tau}{2L} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \right].$$

Применив оценку (19) и учитывая условие $z \in [0, z_0]$, получим

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon\tau}{L} \exp\left(-\frac{z_0 - z}{L}\right). \tag{20}$$

На полуинтервале $z \in [z_0, \infty)$ решение задачи (4), (5) также определяется формулой (16). Тогда для функций $\Delta p_1(z, z_0)$ и $\Delta p_2(z, z_0)$ имеем

$$\Delta p_1(z, z_0) = \frac{\rho_1(z_0) \tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right],$$

$$\Delta p_2(z, z_0) = \frac{\rho_2(z_0) \tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right],$$

откуда

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{|\rho_2(z_0) - \rho_1(z_0)| \tau}{2L} \exp\left(-\frac{z}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{z_0}{L}\right) - \frac{S-1}{S+1} \exp\left(-\frac{z_0}{L}\right) \right].$$

Применив оценку (19) и учитывая условие $z \in [z_0, \infty)$, получим

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon \tau}{L} \exp\left(-\frac{z - z_0}{L}\right). \quad (21)$$

Объединяя оценки (20) и (21), получим, что при всех $z \geq 0$

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon \tau}{L} \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right),$$

откуда вытекает

$$|\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| \leq \frac{\varepsilon \tau}{L}.$$

Теорема 4 доказана. \square

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда $\forall z \in [0, \infty)$ справедлива оценка

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon \tau.$$

Доказательство. Оценим выражение

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| = \int_0^{\infty} |\Delta p_2(z, z_0) - \Delta p_1(z, z_0)| dz_0.$$

Применив оценку (20), получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \frac{\varepsilon \tau}{L} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right) dz_0. \quad (22)$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{|z - z_0|}{L}\right) dz_0 = \int_0^z \exp\left(\frac{z - z_0}{L}\right) dz_0 + \int_z^{\infty} \exp\left(\frac{z_0 - z}{L}\right) dz_0 = L \exp\left(-\frac{z}{L}\right),$$

то из (22) получим

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \leq \varepsilon \tau. \quad (23)$$

Теорема 5 и в целом корректность математической модели независимых источников доказаны. \square

Модель катодолюминесценции.

Теорема 6. Пусть $\forall z \in [0, \infty)$ выполнены условия теоремы (5). Тогда

$$|I_2(E_0, \Theta) - I_1(E_0, \Theta)| \leq \varepsilon \tau \left\{ 1 + 0,155 \left[1 - \exp \left(-\frac{z_c}{L} \right) \right] \right\} \leq 1,155 \varepsilon \tau. \quad (24)$$

Доказательство. Применив формулу (9) для интенсивностей КЛ I_1 и I_2 , получим

$$I_1(E_0, \Theta) = \left\{ 1 + 0,155 \left[1 - \exp \left(-\frac{z_c}{L} \right) \right] \right\} \int_{l_s}^{\infty} \Delta p_1(z) \exp [-\alpha(\lambda)z] dz,$$

$$I_2(E_0, \Theta) = \left\{ 1 + 0,155 \left[1 - \exp \left(-\frac{z_c}{L} \right) \right] \right\} \int_{l_s}^{\infty} \Delta p_2(z) \exp [-\alpha(\lambda)z] dz.$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем

$$|I_2(E_0, \Theta) - I_1(E_0, \Theta)| =$$

$$= \left\{ 1 + 0,155 \left[1 - \exp \left(-\frac{z_c}{L} \right) \right] \right\} \int_{l_s}^{\infty} |\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \exp [-\alpha(\lambda)z] dz.$$

Применив к последнему равенству оценку (23) и учтя, что

$$\int_{l_s}^{\infty} \exp [-\alpha(\lambda)z] dz < \int_0^{\infty} \exp [-\alpha(\lambda)z] dz \leq 1,$$

получим (6).

Теорема 6 и в целом корректность математической модели КЛ доказаны. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены математические модели стационарной диффузии и катодолюминесценции неравновесных неосновных носителей заряда, генерируемых широким электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых материалах. Использование широких электронных пучков позволяет свести эти задачи к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными

уравнениями. Рассмотрены следующие модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда в однородных полупроводниках: модель коллективного движения и модель независимых источников для полугораниченных мишеней — и модель, описывающая диффузионный процесс в многослойной полупроводниковой структуре конечной толщины, имеющей произвольное конечное число слоёв, а также модель катодолюминесценции, возникающей при излучательной рекомбинации генерированных электронным пучком неравновесных носителей заряда. Проведены доказательства единственности решений и непрерывной зависимости решений от данных задач. Получены оценки решений рассматриваемых задач, позволяющие использовать их в электронно-зондовых технологиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект No 18-41-400001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонч-Бруевич, В. Л., Калашников, С. Г. Физика полупроводников: Учебн. пособие для вузов. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1990. — 685 с.
BONCH-BRUEVICH, V. L., and KALASHNIKOV, S. G. (1990) *The Physics of Semiconductors*. Moscow: Nauka. 685 pp. (in Russian)
2. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках. — М.: Мир, 1973. — 384 с.
PANKOV, J. I. (2010) *Optical Processes in Semiconductors*. Dover Publications; 2nd revised ed. 448 pp.
3. YACOBI, B. G., HOLT, D. B. (1990) *Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids*. Plenum Press, New York. 354 pp.
4. Степович, М. А. Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.04.07). — М.: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2003. — 351 с.
STEPOVICH, M. A. (2003) *Quantitative Cathodoluminescent Microscopy of Direct-Gap Materials of Semiconductor Optoelectronics. Thesis Dr. Phys.-Math. Sci.* Moscow: Bauman Moscow State Technical University. 351 pp. (in Russian)

5. Броддай, И., Мерей, Дж. Физические основы микротехнологии. — М.: Мир, 1985. — 496 с.
BRODIE, IVOR, MURAY, JULIUS J. (1982) *The Physics of Microfabrication*. Plenum Press, New York and London: SRI International (formerly Stanford Research Institute). 504 pp.
6. Брандон, Д., Каплан, У. Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля. — М.: Техносфера, 2004. — 377 с.
BRANDON, DAVID, KAPLAN WAYNE D. (2013) *Microstructural Characterization of Materials*. 2nd Ed. John Wiley & Sons Ltd.. 552 pp.
7. Растровая электронная микроскопия для нанотехнологий. Методы и применение / Под ред. У. Жу и Ж. Л. Уанга. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 582 с.
Ed. by Weili ZHOU and Zhong Lin WANG. (2006) *Scanning Microscopy for Nanotechnology. Techniques and Applications*. Springer Science+Business Media, LLC. 522 pp.
8. Поляков, А. Н., Степович, М. А., Туртин, Д. В. Математическое моделирование катодолуминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале // Известия РАН. Серия физическая. — 2016. — Т. 80, № 12. — С. 1629–1633.
POLYAKOV, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2016) Mathematical modeling of the cathodoluminescence of excitons generated by a narrow electron beam in a semiconductor material. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 80 (12). p. 1436–1440.
9. POLYAKOV, A. N., SMIRNOVA, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2018) Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 39(2). p. 259–262.
10. STEPOVICH, MIKHAIL A. Turtin, Dmitry V., Seregina, Elena V., Kalmanovich, Veronika V. (2019) On the correctness of mathematical models of time-of-flight cathodoluminescence of direct-gap semiconductors. *ITM Web of Conferences*. 30. p. Art. No. 07014.
11. STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., and POLYAKOV, A. N. (2019) On the qualitative characteristics of a two-dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low-energy electron beam

in a homogeneous semiconductor material. *Journal of Physics: Conf. Series.* 1203. p. Art. No. 012095.

12. TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., STEP OVICH, M. A. (2020) Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material. *Journal of Mathematical Sciences.* 250(1). p. 166–174.

13. Туртин, Д. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Качественный анализ одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе // Проблемы математического анализа: Межвузовский сборник. — 2020. — Вып. 104. — С. 149–156.

TURTIN, D. V., SEREGINA, E. V., STEP OVICH, M. A. (2020) Qualitative analysis of one class of differential equations of heat and mass transfer in condensed matter. *Problems of Mathematical Analysis: Interuniversity Collection [Problemy matematicheskogo analiza: Mezhvuzovskiy sbornik]*. (104). p. 149–156. (in Russian)

14. Филачев, А. М., Таубкин, И. И., Тришенков, М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фотодиоды. — М.: Физматкнига, 2011. — 448 с.

FILACHEV, A. M., TAUBKIN, I. I., TRISHENKOV, M. A. (2011) *Solid-state photoelectronics. Photodiodes.* Moscow: Fizmatkniga. 448 pp. (in Russian)

15. Филачев, А. М., Таубкин, И.И., Тришенков, М. А. Твердотельная фотоэлектроника. Фоторезисторы и фотоприёмные устройства. — М.: Физматкнига, 2012. — 368 с.

FILACHEV, A. M., TAUBKIN, I. I., TRISHENKOV, M. A. (2012) *Solid-state photoelectronics. Photoresistors and photodetectors.* Moscow: Fizmatkniga. 368 pp. (in Russian)

16. Алексеев Алексей, Красовицкий Дмитрий, Петров Станислав, Чалый Виктор. Многослойные гетероструктуры AlN/AlGa_N/Ga_N/AlGa_N — основа новой компонентной базы твердотельной СВЧ-электроники // Компоненты и технологии. — 2008. — № 2. — С. 138–142.

ALEXEEV, ALEXEI, KRASOVITSKII, DMITRII, PETROV, STANISLAV, TCHALII, VIKTOR (2016) Multi-layered heterostructure AlN/AlGa_N/Ga_N/AlGa_N — the basis of the new component base of the solid-state circuit. *Equipment and technology [Komponenti i tekhnologii]*. (2). p. 138–142. (in Russian)

17. Долгий А. Л., Писаренко Н. С., Бондаренко В. П. Гетероэпитаксиальные пленки нитрида галлия на пористом кремнии // *Материалы и структуры современной электроники: Материалы IX международной научной конференции (14–16 октября 2020 г., г. Минск, Белорусский государственный университет)*. — Минск: БГУ, 2020. — С. 45–50.
- DOLGII, A. L., PISARENKO, N. S., BONDARENKO, V. P. (2020) Heteroepitaxial films of gallium nitride on porous silicon. *Materials and structures of modern electronics: Materials of the international conference (October 14–16, 2020, Minsk, Belarusian State University) [Materialy i struktury sovremennoy elektroniki: Materialy mezhdunarodnoy konferentsii (14–16 oktyabrya 2020, Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet)]*. p. 45–50. (in Russian)
18. Михеев, Н. Н., Никоноров, И. М., Петров, В. И., Степович, М. А. Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолуминесценции // *Известия АН СССР. Серия физическая*. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 274–280.
- MIKHEEV, N. N., NIKONOROV, I. M., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (1990) Determining the Electro-physical Parameters of Semiconductors in a Raster Electron Microscope by the Induced-Current and Cathodoluminescence Methods. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series*. 54 (2). p. 82–88.
19. Михеев, Н. Н., Петров, В. И., Степович, М. А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии // *Известия РАН. Серия физическая*. — 1991. — Т. 55, № 8. — С. 1474–1482.
- MIKHEEV, N. N., PETROV, V. I., STEPOVICH, M. A. (1991) Quantitative Analysis of Semiconductor Optoelectronic Materials by Raster Electron Microscopy. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series*. 55 (8). p. 1–9.
20. Михеев, Н. Н., Степович, М. А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. — 1996. — Т. 62, № 4. — С. 20–25.
- MIKHEEV, N. N., STEPOVICH, M. A. (1996) Distribution of Energy Losses in Interaction of an Electron Probe with Material. *Industrial Laboratory*. 62 (4). p. 221–226.
21. WITTRY, D. B., KYSER, D. F. (1967) Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation. *J. Appl. Phys.* 38(1). p. 375–382.

22. KYSER, D. F., WITTRY, D. B. (1967) Spatial distribution of excess carriers in electron-beam excited semiconductors. *J. Proc. IEEE*. 55(3). p. 733–734.
23. RAO-SAHIB, T. S., WITTRY, D. B. (1969) Measurements of diffusion lengths in *p*-type gallium arsenide by electron beam excitation. *J. Appl. Phys.* 40(9). p. 3745–3750.
24. ROOSBROECK, VAN W. (1955) Injected current transport in semi-infinite semiconductor and determination of lifetimes and surface recombination velocities. *J. Appl. Phys.* 26(1). p. 380–387.
25. Белов, А. А., Петров, В. И., Степович, М. А. Использование модели независимых источников для расчета распределений неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. — 2002. — Т. 66, № 9. — С. 1317–1322.
- BELOV, A. A., PETROV, V. I., STEP OVICH, M. A. (2002) Model of independent sources used in calculation of minority charge carriers generated by electron beam in semiconductor. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Fizicheskaya*. 66 (9). p. 1317–1323.
26. Степович, М. А., Снопова, М. Г., Хохлов, А. Г. Использование модели независимых источников для расчёта распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком // Прикладная физика. — 2004. — № 3. — С. 61–65.
- STEP OVICH, M. A., KHOKHLOV, A. G., SNOPOVA, M. G. (2004) Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two-layer semiconductor by electron beam. *Applied Physics [Prikladnaya fizika]*. (3). p. 61–65. (in Russian)
27. STEP OVICH, M. A., KHOKHLOV, A. G., SNOPOVA, M. G. (2004) Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two-layer semiconductor by electron beam. *Proc. SPIE*. 5398. p. 159–165.
28. Burylova, I. V., Petrov, V. I., Snopova, M. G., Stepovich, M. A. Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam // Физ. и техн. полупроводников. — 2007. — Т. 41, вып. 4. — С. 458–461.
- BURYLOVA, I. V., PETROV, V. I., SNOPOVA, M. G., STEP OVICH, M. A. (2007) Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in

- multy-layer semiconducting structure by a wide electron beam. *Semiconductors*. 41(4). p. 444–447.
29. Снопова, М. Г., Бурьлова, И. В., Петров, В. И., Степович, М. А. Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трёхслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2007. — № 7. — С. 1–6.
- SNOPOVA, M. G., BURYLOVA, I. V., PETROV, V. I., STEP OVICH, M. A. (2007) Analysis of a Model of Minority Charge–Carrier Distributions Generated in a Three–Layer Semiconductor Structure by a Wide Electron Beam. *Journal of Surface Investigation. X–ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 1(4). p. 406–410.
30. Степович, М. А., Серегина, Е. В., Калманович, В. В. О некоторых аспектах математического моделирования процессов теплопереноса, обусловленного облучением киловольтными электронами // Сборник материалов XXX Крымской осенней математической школы–симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (17–29 сентября 2019 г., пос. Батилиман, Республика Крым, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского). — Симферополь: Полипринт, 2019. — С. 282–285.
- STEP OVICH, M. A., SEREGINA, E. V., KALMANOVICH, V. V. (2019) About some aspects of mathematical modeling of heat and mass transfer processes due to irradiation with kilovolt electrons. *Proceedings of the XXXth Crimean Autumn Mathematical School–Symposium on Spectral and Evolutionary Problems (September 17–19, 2019, Settlement Batiliman, Republic of Crimea, V. I. Vernadsky Crimean Federal University)*. — Simferopol: Polyprint. p. 282–285.(in Russian)
31. Серегина, Е. В., Калманович, В. В., Степович, М. А. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2020. — № 7. — С. 69–74.
- SEREGINA, E. V., KALMANOVICH, V. V., STEP OVICH, M. A. (2020) On Modeling the Distributions of Minority Charge Carriers Generated by a Wide Electronic Beam in Planar Multilayer Semiconductor Structures. *Journal of Surface Investigation. X–ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 14(4). p. 713–717.

32. Калманович, В. В., Серегина, Е. В., Степович, М. А. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 7. — С. 1020–1026.
KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Phenomena Caused by Interaction between Electron Beams and Planar Semiconductor Multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 84(7). p. 844–850.
33. KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V., STEPOVICH, M. A. (2020) Comparison of analytical and numerical modeling of distributions of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of medium–energy electrons in a two–layer semiconductor structure. *Journal of Physics: Conf. Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems*. 1479. p. Art. No. 012116.
34. Степович, М. А., Калманович, В. В., Серегина, Е. В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодоллюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 5. — С. 700–703.
STEPOVICH, M. A., KALMANOVICH, V. V., SEREGINA, E. V. (2020) Possibility of Applying the Matrix Approach to Modeling the Cathodoluminescence Caused by a Wide Electron Beam in a Planar Multilayer Semiconductor Structure. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 84(5). p. 576–579.

УДК: 517.9

MSC2010: 37C05

БИФУРКАЦИИ, МЕНЯЮЩИЕ ТИП ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ 3-ДИФФЕОМОРФИЗМА МОРСА-СМЕЙЛА

© В. И. Шмуклер, О. В. Починка

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ, МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
ул. Большая Печерская, д. 25/12, Нижний Новгород, 603155, Российская Федерация.
E-MAIL: *olga-pochinka@yandex.ru*

ON BIFURCATIONS THAT CHANGE THE TYPE OF HETEROCLINIC CURVES OF A
MORSE-SMALE 3-DIFFEOMORPHISM.

Shmukler V. I., Pochinka O. V.

Abstract.

In this paper, we consider the class G of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms defined on a closed 3-manifold whose non-wandering set consists of exactly four points of pairwise distinct Morse indices. It is known that the two-dimensional saddle separatrices of any such diffeomorphism always intersect and their intersection necessarily contains non-compact heteroclinic curves, but may also contain compact ones. The main result of this work is the construction of a path in the space of diffeomorphisms connecting the diffeomorphism $f \in G$ with the diffeomorphism $f' \in G$, which does not have compact heteroclinic curves. This result is an important step in solving the open problem of describing the topology of 3-manifolds admitting gradient-like diffeomorphisms with wildly embedded saddle separatrices.

Consider the class G of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms f defined on the closed manifold M^3 , the non-wandering set of which consists of exactly four points $\omega, \sigma_1, \sigma_2, \alpha$ with positive types of orientation and with Morse indices (dimensions of unstable manifolds) 0, 1, 2, 3, respectively. Despite the simple structure of the non-wandering set, the class under consideration contains diffeomorphisms with wildly embedded saddle separatrices [2] (see Fig. 1). It was proved in [3] that for any diffeomorphism $f \in G$ the set $H_f = W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ is not empty and contains at least one non-compact heteroclinic curve. According to [?], in the case of a manual embedding of the closures of one-dimensional separatrices of the diffeomorphism $f \in G$, the bearing manifold M^3 admits a Heegaard decomposition of genus 1 and, therefore, is a lens space (see, for example, [7]). In the case of a wild embedding, the description of the topology of the supporting manifold is an open problem formulated in [3].

In the present paper, an important step has been taken in solving this problem; namely, the following fact is proved.

Theorem. *Let the manifold M^3 admit a diffeomorphism $f \in G$. Then the same manifold admits a diffeomorphism $f' \in G$, a wandering set that does not contain compact heteroclinic curves.*

Keywords: *Morse-Smale diffeomorphism, heteroclinic curve, unstable manifold, stable manifold, orientation-preserving diffeomorphism manifold, topological flow, regular dynamics, hyperbolic set, chain recurrent set.*

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе рассмотрен класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на замкнутом 3-многообразии, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек попарно различных индексов Морса. Известно, что двумерные седловые сепаратрисы любого такого диффеоморфизма всегда пересекаются и их пересечение необходимо содержит некомпактные гетероклинические кривые, но может содержать и компактные. Основным результатом работы является построение пути в пространстве диффеоморфизмов, соединяющего диффеоморфизм $f \in G$ с диффеоморфизмом $f' \in G$, не имеющим компактных гетероклинических кривых. Полученный результат является важным шагом в решении открытой проблемы описания топологии 3-многообразий, допускающих градиентно-подобные диффеоморфизмы с дико вложенными седловыми сепаратрисами.

Рассмотрим класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f , заданных на замкнутом многообразии M^3 , неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек $\omega, \sigma_1, \sigma_2, \alpha$ с положительными типами ориентации и с индексами Морса (размерностями неустойчивых многообразий) $0, 1, 2, 3$, соответственно.

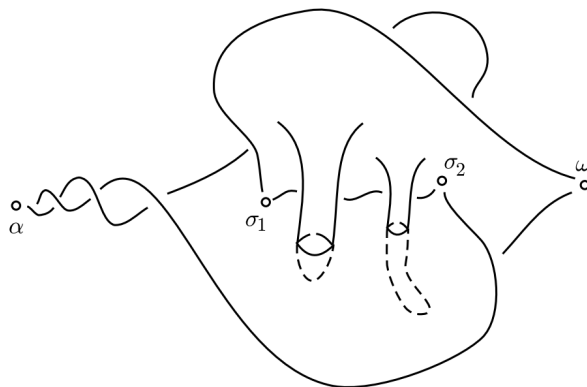


Рис. 1. Динамика диффеоморфизма $f \in G$

Не смотря на простое устройство неблуждающего множества, в рассматриваемом классе существуют диффеоморфизмы с дико вложенными седловыми сепаратрисами [2] (см. Рис. 1). В работе [3] доказано, что для любого диффеоморфизма $f \in G$ множество $H_f = W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ не пусто и содержит как минимум одну некомпактную гетероклиническую кривую. Согласно работе [?], в случае ручного вложения замыканий одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in G$, несущее многообразие M^3 допускает разложение Хегора рода 1 и, следовательно, является линзовым пространством (см., например, [7]). В случае дикого вложения описание топологии несущего многообразия является открытой проблемой, сформулированной в [3].

В настоящей работе сделан важный шаг в решении этой проблемы, именно, доказан следующий факт.

Теорема 1. Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм $f \in G$. Тогда это же многообразие допускает диффеоморфизм $f' \in G$, блуждающее множество, которого не содержит компактных гетероклинических кривых.

Благодарности. Исследование поддержано грантом РФФ, договор 21-11-00010.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

2.1. Сведения из топологии. Для любого подмножества X топологического пространства Y будем обозначать через $i_X : X \rightarrow Y$ отображение включения. Для любого непрерывного отображения $\phi : X \rightarrow Y$ из топологического пространства X в топологическое пространство Y будем обозначать через $\phi_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ – индуцированный им гомоморфизм.

C^r -вложением многообразия X в многообразие Y называется C^r -отображение ($r \geq 0$) $f : X \rightarrow Y$, гомеоморфно отображающее пространство X на подпространство $f(X)$. C^0 -вложение называют также *топологическим вложением*.

Топологическое вложение $\lambda : X \rightarrow Y$ m -многообразия X в n -многообразие Y ($n \leq m$) называется *локально плоским в точке* $\lambda(x)$, $x \in X$, если точка $\lambda(x)$ принадлежит области определения такой карты (U, ψ) многообразия Y , что $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}^m$, где $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ – множество точек, у которых последние $n - m$ координат равны 0 или $\psi(U \cap \lambda(X)) = \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{R}^m$ – множество точек, у которых последняя координата неотрицательна. Вложение λ называется *ручным*, а многообразие X – *ручно вложенным*, если λ является локально плоским в каждой точке $x \in X$. В противном случае вложение λ называется *диким*, а многообразие X – *дико вложенным*. Любая точка $\lambda(x)$, которая не является локально плоской, называется *точкой дикости*.

Пусть $\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ — стандартный n -диск (шар),
 $\mathbb{D}^0 = \{0\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ — стандартная $(n-1)$ -сфера,
 $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$.

Топологически вложенная в n -многообразиие X $(n-1)$ -сфера S^{n-1} называется *цилиндрической или цилиндрически вложенной* в X , если существует топологическое вложение $h : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow X$ такое, что $h(S^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

3-многообразиие X называется *неприводимым*, если любая 2-сфера, цилиндрически вложенная в X , ограничивает в нем 3-шар.

По аналогии с трехмерным случаем мы называем n -многообразиие *неприводимым*, если любая цилиндрически вложенная в него $(n-1)$ -сфера ограничивает в нем n -шар.

3-многообразиие X называется *простым*, если оно либо неприводимо, либо гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Топологически вложенная в 3-многообразиие X поверхность F называется *собственно вложенной*, если $\partial X \cap F = \partial F$. Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

- 1) существует нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset \text{int}F$ и вложенный 2-диск $D \subset \text{int}X$ такой, что $D \cap F = \partial D = c$;
- 2) существует 3-шар $B \subset \text{int}X$ такой, что $F = \partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X , если она не является сжимаемой в X .

Предложение 1 ([1], Theorem 4). Пусть T — двумерный тор, гладко вложенный в многообразиие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ так, что $i_{T*}(\pi_1(T)) \neq 0$. Тогда T ограничивает в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ заполненный тор.

Предложение 2 ([8], Exercise 6). Если 3-многообразиие X неприводимо, тогда двумерный тор $T \subset X$, не лежащий в 3-шаре, является сжимаемым тогда и только тогда, когда он ограничивает заполненный тор в X .

Предложение 3 ([6], Гл. 4, разд. 5, следствие 1). Любое n -мерное многообразиие не может быть разбито подмножеством размерности $\leq n-2$.

Предложение 4 (Лемма о фрагментации, [4], Lemma de fragmentation). Пусть $U = \{U_j\}$ — открытое покрытие многообразииа X и $\varphi : X \rightarrow X$ — гладко изотопный тождественному отображению диффеоморфизм. Тогда существуют гладко изотопные тождественному отображению диффеоморфизмы $\varphi_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, q < \infty$ такие, что:

- i) для каждого $i = \overline{1, q}$ существует элемент покрытия $U_{j(i)} \in U$ такой, что $\text{supp}\{\varphi_{i,t}\} \subset U_{j(i)}$ для гладкой дуги $\varphi_{i,t}$, соединяющей тождественное отображение и φ_i ;
- ii) $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_q$

2.2. Диффеоморфизмы Морса-Смейла. Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом связном ориентируемом n -мерном многообразии ($n \geq 1$) M^n , называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

1. его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
2. многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Обозначим через $MS(M^n)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на ориентируемом n -многообразии M^n .

Компактное f -инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int}(U_A)$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей или изолирующей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} .

Для любой гиперболической периодической точки p диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ будем обозначать через

- m_p – период точки p ;
- ν_p – тип ориентации точки p , то есть $\nu_p = +1(-1)$, если отображение $f^{m_p}|_{W_p^u}$ сохраняет(меняет) ориентацию;
- q_p – индекс Морса (p – сток, если $q_p = 0$, p – источник, если $q_p = n$, p – седло, если $0 < q_p < n$);
- \mathcal{O}_p – орбита точки p ;
- ℓ_p^u – компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ (сепаратриса).

Предложение 5. [4, Теорема 2.1.1.] Пусть $f \in MS(M^n)$. Тогда

1. $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$
2. W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n , диффеоморфным \mathbb{R}^{q_p} , для любой периодической точки $p \in \Omega_f$.
3. $cl(\ell_p^u) \setminus (\ell_p^u \cup p) = \bigcup_{r \in \Omega_f: \ell_p^u \cap W_r^s \neq \emptyset} W_r^u$ для любой неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы $\ell_p^u(\ell_p^s)$ периодической точки $p \in \Omega_f$.

Если σ_1, σ_2 различные седловые периодические точки диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$, для которых $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ называется *гетероклиническим пересечением*. При этом компоненты линейной связности гетероклинического пересечения называются *гетероклиническими точками*, если их размерность равна 0, *гетероклиническими кривыми*, если их размерность равна 1 и *гетероклиническими многообразиями*, если их размерность больше 1.

Диффеоморфизм $f \in MS(M^n)$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$, что эквивалентно отсутствию гетероклинических точек у диффеоморфизма f .

Предложение 6. ([4, Предложение 2.1.3.]) Если сепаратриса ℓ_σ^u седловой точки σ диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ не участвует в гетероклиническом пересечении, то существует единственная стоковая точка ω такая, что

$$cl(\ell_\sigma^u) = \sigma \cup \ell_\sigma^u \cup \omega.$$

Положим $\hat{\mathcal{W}}_{\mathcal{O}_p}^u = (W_{\mathcal{O}_p}^u \setminus \mathcal{O}_p)/f$ и обозначим через $p_{\hat{\mathcal{W}}_{\mathcal{O}_p}^u} : W_{\mathcal{O}_p}^u \setminus \mathcal{O}_p \rightarrow \hat{\mathcal{W}}_{\mathcal{O}_p}^u$ естественную проекцию.

Предложение 7. [4, Теорема 2.1.3.] Проекция $p_{\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u}$ является накрытием, которое индуцирует структуру гладкого q_p -многообразия на пространстве орбит $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$. При этом:

- для $q = 1, \nu = -1$ пространство $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$ гомеоморфно окружности;
- для $q = 1, \nu = +1$ пространство $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$ гомеоморфно паре окружностей;
- для $q = 2, \nu = -1$ пространство $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$ гомеоморфно бутылке Клейна;
- для $q = 2, \nu = +1$ отображение $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$ гомеоморфно двумерному тору;
- для $q \geq 3, \nu = -1$ пространство $\hat{\mathcal{W}}_{q,-1}^u$ гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна;
- для $q \geq 3, \nu = +1$ пространство $\hat{W}_{\mathcal{O}_p}^u$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^1$.

3. СЦЕНАРИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ СЕДЛОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть $f \in MS(M^n)$. Обозначим через $\Omega_f^0, \Omega_f^1, \Omega_f^2$ множество стоков, седел и источников диффеоморфизма f . Разбьем множество Ω_f^1 на два непересекающихся подмножества Σ_A и Σ_R таких, что множества

$$A = \Omega_f^0 \cup W_{\Sigma_A}^u, \quad R = \Omega_f^2 \cup W_{\Sigma_R}^s$$

замкнуты и инвариантны. По построению множества A , R содержат все периодические точки диффеоморфизма f . Наибольшую размерность неустойчивого (устойчивого) многообразия периодических точек из A (R) будем называть *размерностью A* (R).

Предложение 8 ([5], Теорема 1). Пусть $f \in MS(M^n)$. Тогда множество A (соответственно R) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f . Более того, если размерность аттрактора A (репеллера R) $\leq n - 2$, то репеллер R (аттрактор A) является связным.

Следуя [5], будем называть A и R *глобальными аттрактором и репеллером диффеоморфизма Морса-Смейла $f \in MS(M^n)$* . Положим $V = M^n \setminus (A \cup R)$. Обозначим через

$$\hat{V} = V/f$$

множество орбит действия группы $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ на многообразии V , которое совпадает с множеством орбит диффеоморфизма f на V . Пусть

$$p : V \rightarrow \hat{V}$$

естественная проекция, ставящая в соответствие точке $x \in V$ ее орбиту в силу диффеоморфизма f и наделяющая множество \hat{V} фактортопологией.

Предложение 9 ([5], Теорема 2). Пространство \hat{V} является замкнутым гладким ориентируемым n -многообразием. Более того, если размерность аттрактора A и репеллера $R \leq n - 2$, то V связно и \hat{V} либо неприводимо, либо гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Пусть U_A – захватывающая окрестность аттрактора A . Положим $F_A = U_A \setminus f(U_A)$, тогда $cl(F_A)$ – фундаментальная область ограничения диффеоморфизма f на V . Положим $\hat{V}_A = cl(F_A)/f$, тогда \hat{V}_A – гладкое замкнутое n -многообразие, полученное из $cl(F_A)$ отождествлением границ в силу диффеоморфизма f . Обозначим через $p_A : cl(F_A) \rightarrow \hat{V}_A$ естественную проекцию.

Рассмотрим семейство $E_f \in Diff(M^n)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла, таких что для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ $\Omega_{f'} = \Omega_f$ и диффеоморфизм f' совпадает с диффеоморфизмом f на U_A и в некоторой окрестности репеллера R .

Для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ положим $\hat{l}_{f'}^s = p_A(W_{\Sigma_A}^s \cap F_A)$ и $\hat{l}_{f'}^u = p_A(W_{\Sigma_R}^u \cap F_A)$.

Лемма 1. Пусть $\hat{h} : \hat{V}_A \rightarrow \hat{V}_A$ изотопный тождественному диффеоморфизм. Тогда существует дуга $\zeta_t \subset E_f$ такая, что $\zeta_0 = f$, $\zeta_1 = f'$ и $\hat{l}_{f'}^u = \hat{h}(\hat{l}_f^u)$, $\hat{l}_{f'}^s = \hat{l}_f^s$.

Доказательство. Выберем открытое покрытие $D = \{\hat{D}_j\}$ многообразия \hat{V}_A n -мерными дисками. Согласно предложению 4 существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_q : \hat{V}_A \rightarrow \hat{V}_A$ со следующими свойствами:

- i) для каждого $i \in \{1, \dots, q\}$ существует гладкая изотопия $\{\hat{w}_{i,t}\}$, тождественная вне $\hat{D}_{j(i)}$ и соединяющая тождественное отображение и \hat{w}_i ;
- ii) $\hat{h} = \hat{w}_1 \dots \hat{w}_q$.

Продолжим отображение p_A до непрерывного отображения $p_A : V \rightarrow \hat{V}_A$, положив $p_A(v) = p_A(f^k(v))$, $f^k(v) \in F_A$. Тогда множество $p_A^{-1}(\hat{D}_{j(i)})$, $i = 1, \dots, q$ является объединением счетного множества попарно не пересекающихся n -мерных дисков. Выберем q дисков D_1, \dots, D_q по одному в каждом из множеств $p_A^{-1}(\hat{D}_{j(1)}), \dots, p_A^{-1}(\hat{D}_{j(q)})$ так, что $D_i \subset \text{int}(f^{-m_i+1}(U_A) \setminus f^{-m_i}(U_A))$, где $0 = m_1 < m_2 < \dots < m_q < m_{q+1}$ (см. Рис. 1). Пусть $w_{i,t} : V \rightarrow V$ диффеоморфизм, который совпадает с $(p_A|_{D_i})^{-1}\hat{w}_{i,t}p_A$ на D_i и совпадает с тождественным отображением вне D_i . Положим

$$\zeta_t = w_{1,t} \dots w_{q,t} f.$$

По построению $\zeta_t \subset E_f$ и $\zeta_0 = f$. Положим $f' = \zeta_1$. Пусть σ_A – седловая точка

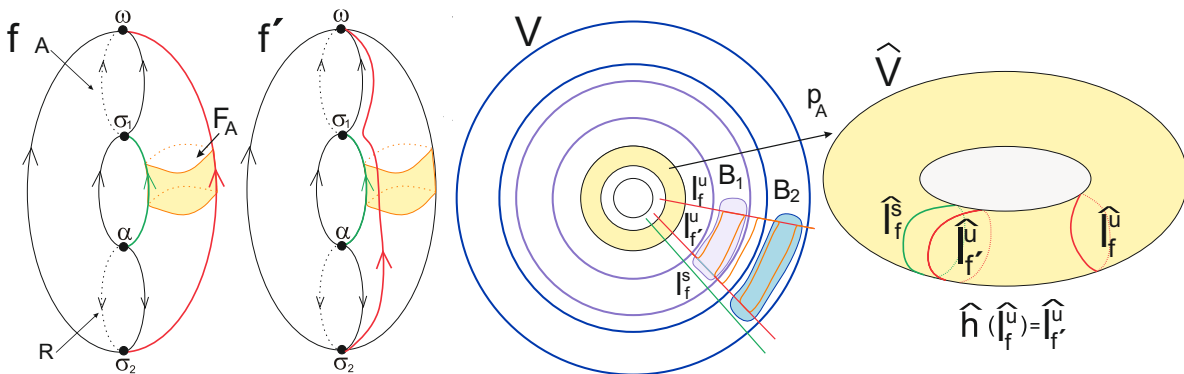


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству леммы 1

из множества Σ_A и $W_{\sigma_A}^s(\zeta_t)$ ее устойчивое многообразие в силу диффеоморфизма ζ_t . Положим $U_{\sigma_A}^s(\zeta_t) = W_{\sigma_A}^s(\zeta_t) \cap (U_A \setminus A)$ и $F_{\sigma_A}^s(\zeta_t) = W_{\sigma_A}^s(\zeta_t) \cap F_A$. Тогда

$$W_{\sigma_A}^s(\zeta_t) \cap V = U_{\sigma_A}^s(\zeta_t) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \zeta_t^{-k}(F_{\sigma_A}^s(\zeta_t)).$$

Так как диффеоморфизмы f и f' совпадают в окрестности U_A , то $F_{\sigma_A}^s(f') = F_{\sigma_A}^s(f)$ и, следовательно, $\hat{l}_{f'}^s = \hat{l}_f^s$.

По построению диффеоморфизмы ζ_t совпадают с f в некоторой окрестности репеллера R . Тогда существует $l \in \mathbb{N}$ и окрестность U_R репеллера R такая, что $F_R = \text{int}(U_R) \setminus f^{-1}(\text{int}(U_R)) = f^{-l}(F_A)$. Поскольку A – Пусть σ_R – седловая точка из

множества Σ_R и $W_{\sigma_R}^u(\zeta_t)$ ее неустойчивое многообразие в силу диффеоморфизма ζ_t . Положим $U_{\sigma_R}^u(\zeta_t) = W_{\sigma_R}^u(\zeta_t) \cap (U_R \setminus R)$ и $F_{\sigma_R}^u(\zeta_t) = W_{\sigma_R}^u(\zeta_t) \cap F_R$. Тогда

$$W_{\sigma_R}^u(\zeta_t) \cap V = U_{\sigma_R}^u(\zeta_t) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \zeta_t^k(F_{\sigma_A}^u(\zeta_t)).$$

Так как диффеоморфизмы f и f' совпадают в окрестности U_R , то $F_{\sigma_R}^u(f') = F_{\sigma_R}^u(f)$. Поскольку A – аттрактор диффеоморфизма f' , то существует $l' \in \mathbb{N}$ такое, что $f'^{l'}(F_R) \subset U_A$. Тогда $p_A(f'^{l'}(v)) = \hat{h}(p_A(v))$ для $v \in F_R$, откуда $p_A(W_{\sigma_R}^u(f') \cap F_A) = \hat{h}(p_A(W_{\sigma_R}^u(f) \cap F_A))$ и, следовательно, $\hat{l}_{f'}^u = \hat{h}(\hat{l}_f^u)$. \square

4. ДИНАМИКА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КЛАССА G

В настоящем разделе мы устанавливаем некоторые динамические свойства диффеоморфизма $f \in G$.

Из определения класса следует, что неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит в точности из четырех точек $\omega, \sigma_1, \sigma_2, \alpha$ с индексами Морса 0, 1, 2, 3, соответственно. В силу отсутствия гетероклинических точек у диффеоморфизма f , одномерные седловые многообразия содержат в своих замыканиях единственную узловую точку (см., предложение 6). Именно,

$$cl(W_{\sigma_1}^u) = W_{\sigma_1}^u \cup \omega, \quad cl(W_{\sigma_2}^s) = \alpha \cup W_{\sigma_2}^s.$$

При этом множества $A_f = cl(W_{\sigma_1}^u)$, $R_f = cl(W_{\sigma_2}^s)$ являются попарно не пересекающимися топологически вложенными окружностями (см. предложение 7), возможно, дикими в узловых точках (см. Рис. 3). Поскольку пересечение $H_f = W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ не пусто, то, в силу предложения 5,

$$cl(W_{\sigma_1}^s) = W_{\sigma_1}^s \cup R_f, \quad cl(W_{\sigma_2}^u) = W_{\sigma_2}^u \cup A_f.$$

В силу предложения 8 множества A_f и R_f являются глобальными аттрактором и репеллером, соответственно. Положим

$$V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f).$$

В силу предложения 9 пространство орбит $\hat{V}_f = V_f/f$ является гладким замкнутым ориентируемым 3-многообразием, а естественная проекция $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм

$$\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z},$$

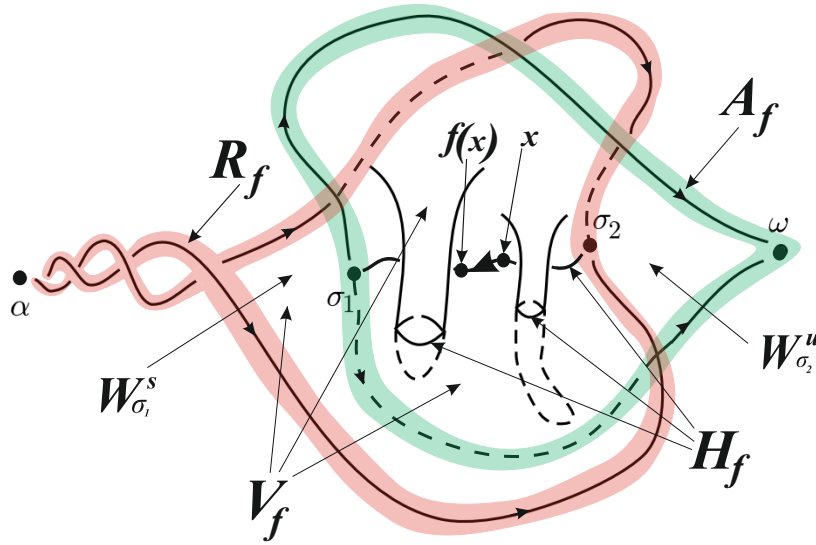


Рис. 3. Фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G$

ставящий в соответствие элементу $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ число $\mu \in \mathbb{Z}$ такое, что любое поднятие элемента \hat{c} соединяет точку $x \in V_f$ с точкой $f^\mu(x)$. Положим

$$T_f^s = p_f(W_{\sigma_1}^s), T_f^u = p_f(W_{\sigma_2}^u), C_f = p_f(H_f).$$

Основным результатом раздела является следующая лемма.

Лемма 2. Для любого диффеоморфизма $f \in G$ справедливо следующее:

1. множества T_f^s, T_f^u являются гладко вложенными 2-торами в \hat{V}_f такими, что $\eta_f(i_{T_f^s}) = \eta_f(i_{T_f^u}) = \mathbb{Z}$;
2. многообразие \hat{V}_f является неприводимым и торы T_f^s, T_f^u являются несжимаемыми в нем;
3. множество C_f состоит из конечного числа гладко вложенных замкнутых кривых, при этом, $\eta_f([c]) = 0$, если кривая $c \subset C_f$ является проекцией компактной гетероклинической кривой и $\eta_f([c]) \neq 0$ в противном случае; при этом, любая кривая $c \subset C_f$ такая, что $\eta_f([c]) = 0$, ограничивает единственный 2-диск $d_c^s \subset T_f^s$ и единственный 2-диск $d_c^u \subset T_f^u$.

Доказательство. Докажем последовательно все утверждения леммы.

1. В силу предложения 7, множество T_f^s является гладко вложенным в \hat{V}_f тором (см. Рис. 4). Поскольку седловая точка σ_1 неподвижна, то $W_{\sigma_1}^s$ содержит кривую, соединяющую точку x с точкой $f(x)$ и, следовательно, $\eta_f(i_{T_f^s}) = \mathbb{Z}$. Для T_f^u доказательство аналогичное.

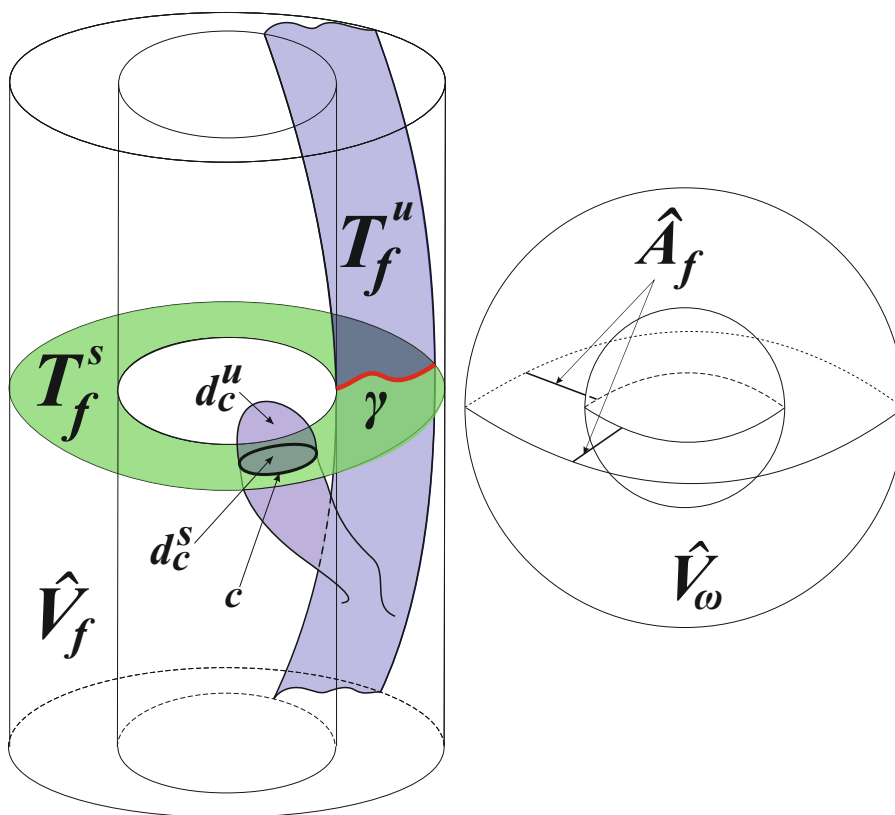


Рис. 4. Факторпространства \hat{V}_f и \hat{V}_ω

2. В силу предложения 8 многообразие \hat{V}_f является простым. В силу пункта 1, тор T_f^s является гомотопически нетривиальным в \hat{V}_f и, следовательно, не лежит в 3-шаре. Покажем от противного, что тор T_f^s не ограничивает заполненный тор в \hat{V}_f . Отсюда, в силу предложения 1, будет следовать, что многообразие \hat{V}_f не гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и, следовательно, является неприводимым, а, в силу предложения 2, тор T_f^s является несжимаемым в \hat{V}_f .

Если предположить, что $\hat{V}_f \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то тор T_f^s ограничивает там заполненный тор в силу предложения 1, и, следовательно, $\hat{V}_f \setminus T_f^s$ состоит из двух компонент связности. Рассмотрим пространство орбит $\hat{V}_\omega = (W_\omega^s \setminus \omega)/f$. Согласно предложению 7, оно диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через p_ω естественную проекцию $p_\omega : W_\omega^s \setminus \omega \rightarrow \hat{V}_\omega$. Положим $\hat{A}_f = p_\omega(A_f)$. В силу предложения 7, \hat{A}_f – пара окружностей, гладко вложенных в \hat{V}_ω . Поскольку одномерное подмногообразие не делит многообразие размерности три (см., предложение 3), то множество $\hat{V}_\omega \setminus \hat{W}_{\sigma_1}^u$ является связным (см. Рис. 4). С другой стороны, в силу предложения 5,

$$M^3 = W_\omega^s \cup W_{\sigma_1}^s \cup W_{\sigma_2}^s \cup W_\alpha^s$$

Тогда $V_f \setminus W_{\sigma_1}^s = W_{\omega}^s \setminus A_f$ и, следовательно, многообразия $\hat{V}_f \setminus T_f^s$ и $\hat{V}_{\omega} \setminus \hat{A}_f$ гомеоморфны. Получили противоречие с тем, что связное многообразие гомеоморфно не связному.

3. Непосредственно из определения эпиморфизма η_f следует, что $\eta_f([c]) = 0$ в случае, когда $c \subset C_f$ – проекция компактной гетероклинической кривой. Если $c \subset C_f$ – проекция некомпактной гетероклинической кривой, то $\eta_f([c]) = m$, где $m \neq 0$. Покажем, что если $\eta_f([c]) = 0$, то существуют единственный диск d_c^s такой, что $d_c^s \subset T_f^s$ и $c = \partial d_c^s$. Для тора T_f^u доказательство аналогичное.

Из описания рассматриваемого класса G следует, что любой диффеоморфизм $f \in G$ имеет хотя бы одну некомпактную гетероклиническую кривую. Пусть γ – проекция этой кривой в множестве C_f . Тогда $\eta_f([\gamma]) \neq 0$ и, следовательно, γ – существенная кривая на торе T_f^s , то есть множество $T_f^s \setminus \gamma$ гомеоморфно двумерному кольцу (см., например, [9]). Таким образом, любая кривая $c \subset (T_f^s \setminus \gamma)$ либо лежит в одном гомотопическом классе с кривой γ , либо ограничивает диск в этом кольце. Поскольку $\eta_f([c]) = 0$, то кривая c ограничивает диск $d_c^s \subset T_f^s$ (см. Рис. 4). \square

5. СЦЕНАРИЙ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ КОМПАКТНЫХ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В настоящем разделе мы докажем теорему 1. Именно, пусть $f \in G$ и множество H_f содержит компактные гетероклинические кривые. Докажем, что диффеоморфизм f соединяется устойчивой дугой $\varphi_t : M^3 \rightarrow M^3, t \in [0, 1]$ с диффеоморфизмом f' таким, что $H_{f'}$ состоит только из некомпактных гетероклинических кривых.

Поскольку пересечение инвариантных седловых многообразий $W_{\sigma_2}^u \cap W_{\sigma_1}^s$ содержит компактные гетероклинические кривые, то, в силу леммы 2, множество C_f содержит простые замкнутые кривые c такие, что $\eta_f([c]) = 0$. Обозначим через B_f множество всех таких кривых. Их объединение \mathcal{B}_f является проекцией всех некомпактных гетероклинических кривых в пространство \hat{V}_f . В силу леммы 2, любая кривая $c \in B_f$ ограничивает диск $d_c^s \subset T_f^s$. Следовательно, среди кривых множества B_f существует *крайняя кривая* c , то есть такая, что $\text{int } d_c^s \cap \mathcal{B}_f = \emptyset$.

Такая крайняя кривая c ограничивает также диск $d_c^u \subset T_f^u$. Поскольку $d_c^s \cap d_c^u = c$, то множество $d_c^s \cup d_c^u$ является цилиндрически вложенной в многообразии \hat{V}_f двумерной сферой. В силу леммы 2, многообразие \hat{V}_f неприводимо и, следовательно, эта сфера ограничивает в нем единственный трехмерный шар b_c . Обозначим через $T_{f,c}^u$ двумерный тор, полученный сглаживанием тора $(T_f^u \setminus d_c^u) \cup d_c^s$. Повторяя этот процесс для каждой крайней кривой, мы получим тор T_{f,B_f}^u , пересечение которого с тором T_f^s не содержит кривых c таких, что $\eta_f([c]) = 0$.

Рассмотрим семейство E_f диффеоморфизмов из класса G таких, что для любого диффеоморфизма $f' \in E_f$ $\Omega_{f'} = \Omega_f$ и диффеоморфизм f' совпадает с диффеоморфизмом f в некоторых окрестностях аттрактора A_f репеллера R_f . По построению существует изотопный тождественному диффеоморфизм $\hat{h} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_f$ такой, что $\hat{h}(T_f^u) = T_{f,B_f}^u$. Тогда в силу леммы 1 существует дуга $\zeta_t \subset E_f$ такая, что $\zeta_0 = f$, $\zeta_1 = f'$ и $T_{f'}^u = T_{f,B_f}^u$, $T_{f'}^s = T_f^s$.

Благодарности: Результаты получены при финансовой поддержке гранта РФФ 21-11-00010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. BONATTI, C. GRINES, V Z. (2000) Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 . *J. Dynam. Control Systems*. [Online] Volume 6, Issue 4. p. 579–602. Available from: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>. [Accessed: September 2000].
2. BONATTI, C. GRINES, V Z. POCHINKA, O (2019) Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. *Duke Mathematical Journal*. [Online] Duke University Press Volume 168, Issue 13. p. 2507-2558. Available from: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>. [Accessed: 15 September 2019].
3. Гринес, В. З., Жужома, Е. В., Медведев, В. С. Новые соотношения для систем Морс-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // Матем. сб. — 2003. — 194, № 7. — С. 25-56.
GRINES, V. Z., ZHUZHOMA, E. V., MEDVEDEV, V. S (2003) On Morse-Smale Diffeomorphisms with Four Periodic Points on Closed Orientable Manifolds. *Mathematical Notes*. Springer (Volume 74, Issue 3). p. 352-366. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1026154718469> September 2003
4. GRINES, V. Z., MEDVEDEV, T., POCHINKA, O (2016) *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*. Switzerland, Springer International.
5. GRINES, V. Z., MEDVEDEV, V., ZHUZHOMA, E (2010) Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. [Online] Switzerland, Springer International Volume 271, Issue 1. p. 103–124. Available from:

<https://link.springer.com/article/10.1134/S0081543810040097>. [Accessed: March 2011].

6. Гуревич, В., Волмэн, Г Теория размерности / В. Гуревич, Г. Волмэн. — Изд-во иностр. лит, 1984. — 232 с.

GUREVICH, V., VOLMEN, G. (1948) *Dimension theory*. Izd. inostr. lit.. .

7. Фоменко, А. Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире / А. Т. Фоменко. — 2-е изд. — Изд-во Моск. ун-та, Изд-во “ЧеРо”, 1998. — 416 с.

FOMENKO, A. T. (1998) *Visual geometry and topology: Mathematical images in the real world*. Moscow university. .

8. NEUMAN, W. D. (1996) *Notes on geometry and 3-manifolds*. Topology Atlas. .

9. ROLFSEN, D. (1977) *Knots and links*. Bull. Amer. Math. Soc. 1-335.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V. Uncertainty and discrete maximin / V. I. Zhukovskiy, L. V. Smirnova // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 7–31.

УДК: 519.833.2

Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена общим вопросам, связанным с неопределенностью таких как: причины и источники появления неопределенностей, их классификация в экономических системах и подходы к их оценке. Во второй части рассматривается понятие максимина, основанное на принципе гарантированного результата (принципе Вальда). При этом максимин интерпретируется с позиции двухуровневой иерархической игры. На основе максимина формализуется гарантированное по исходам решение для многошаговой позиционной линейно-квадратичной задачи при неопределенности и найден его явный вид.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, равновесие по Бернсу, неопределенность, максимин, разностные (многошаговые) системы.

Андреищева Е. Н. Связь обратного преобразования Шура обобщённого класса Неванлинны с рациональными матричными функциями специального вида / Е. Н. Андреищева // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 32–47.

УДК: 517.58

В статье рассматривается понятие обратного преобразования Шура для обобщенных функций класса Неванлинны. Связь между преобразованием Шура и разложением 2×2 -матричных функций основана на том факте, что для обобщенных функций Неванлинны матричные функции $\Theta(z)$, соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными J_ℓ -унитарными множителями. Минимальное разложение данной рациональной J_ℓ -унитарной 2×2 -матричной функции $\Theta(z)$ может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура.

Ключевые слова: индефинитная метрика, пространство Понтрягина, функция Неванлинны, преобразование Шура, воспроизводящее ядро, факторизация рациональных матричных функций.

Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Применение метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила-Теодореску / Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 48 – 64.

УДК: 517.958, 517.927.2, 517.955

В статье приведен метод обобщенных степеней (ОС) для построения последовательности базисных решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, известной как системы Мойсила-Теодореску. Для выполнения этой задачи кватернионная форма записи уравнения Мойсила-Теодореску переведена в матричную форму. Система с помощью определенной операции, названной присоединением, приводится к виду, допускающему использование метода ОС. После этого введены операции дифференцирования и правая обратная операция интегрирования, которые являются аналогами дифференцирования и интегрирования по комплексному переменному решения системы Коши-Римана. Эти операции не выводят результаты из множества решений системы Мойсила-Теодореску с заданными свойствами в определенной области четырехмерного пространства. Возможность многократного повторения этих операций дает алгоритм для построения последовательности базисных решений системы Мойсила-Теодореску. Данная система тесно связана с системой уравнений электромагнитного поля Максвелла и с системой Дирака квантовой электродинамики для частиц с массой $m = 0$ и совпадает с ними при определенном отождествлении входящих в нее величин. Предложенная работа — это прямое обобщение идей американского математика европейского происхождения Л. Берса.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, система Мойсила-Теодореску, задача Коши, матричный метод, граничные условия.

Раецкий К. А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями / К. А. Раецкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 65 – 80.

УДК: 517.9

Для динамической системы моделируется движение с условием прохождения траектории через произвольно заданные контрольные точки. Движение осуществляется

за счет рассчитываемой входной вектор-функции. Для построения входной вектор-функции и соответствующей траектории впервые применяется метод неопределенных коэффициентов. Предлагаемый метод состоит в формировании искомым вектор-функций в виде линейных комбинаций некоторых скалярных функций с векторными коэффициентами и подстановке их непосредственно в уравнения, описывающие динамическую систему, и в заданные многоточечные условия. Формируется линейная алгебраическая система и формулы для определения векторных коэффициентов. Исследуется разрешимость полученной системы. Решение неединственное, оно содержит произвольные параметры, позволяющие изменять форму траектории движения.

Ключевые слова: динамическая система, многоточечное движение, метод неопределенных коэффициентов.

Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции / Д. В. Туртин, М. А. Степович, В. В. Калманович, А. А. Картанов // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 81 – 100.

УДК: 517.927.21, 517.911.5, 51-73

Рассмотрены математические модели стационарной диффузии и катодолюминесценции неравновесных неосновных носителей заряда, генерируемых широким электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых материалах. Использование широких электронных пучков позволяет свести эти задачи к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрены следующие модели диффузии неравновесных неосновных носителей заряда в однородных полупроводниках: модель коллективного движения и модель независимых источников для полуограниченных мишеней — и модель, описывающая диффузионный процесс в многослойной полупроводниковой структуре конечной толщины, имеющей произвольное конечное число слоёв, а также модель катодолюминесценции, возникающей при излучательной рекомбинации генерированного электронным пучком неравновесных носителей заряда. Проведено исследование рассмотренных моделей, включая доказательство единственности решений и непрерывной зависимости решений от данных задачи для полуограниченных материалов. Получены оценки решения рассматриваемых задач, позволяющие использовать их в электронно-зондовых технологиях.

Ключевые слова: математическая модель, стационарное дифференциальное уравнение тепломассопереноса, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, катодоллюминесценция.

Шмуклер В. И., Починка О. В. Бифуркации, меняющие тип гетероклинических кривых 3-диффеоморфизма Морса-Смейла / В. И. Шмуклер О. В. Починка // Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — № 1 (50). — С. 101 – 114.

УДК: 517.9

В настоящей работе рассмотрен класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на замкнутом 3-многообразии, неблуждающее множество которого состоит ровно из четырех точек попарно различных индексов Морса. Известно, что двумерные седловые сепаратрисы любого такого диффеоморфизма всегда пересекаются, и их пересечение обязательно содержит некомпактные гетероклинические кривые, но также может содержать компактные. Основным результатом работы является построение пути в пространстве диффеоморфизмов, соединяющего диффеоморфизм $f \in G$ с диффеоморфизмом $f' \in G$, который не имеет компактных гетероклинических кривых. Этот результат является важным шагом в решении открытой проблемы описания топологии 3-многообразий, допускающих градиентно-подобные диффеоморфизмы с дико вложенными седловыми сепаратрисами.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, гетероклинические кривые, инвариантные многообразия, дуга в пространстве диффеоморфизмов.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Андреищева Елена
Николаевна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и начертательной геометрии Черноморского высшего военно-морского училища имени П. С. Нахимова, г. Севастополь, Российская Федерация
e-mail: anda_el@mail.ru

*Афанасенкова Юлия
Вячеславовна*

аспирант кафедры физики и математики инженерно-технологического института Калужского государственного университета, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

*Гладышев Юрий
Александрович*

к. ф.-м. н, профессор кафедры физики и математики инженерно-технологического института Калужского государственного университета, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: losh-elena@yandex.ru

*Жуковский Владислав
Иосифович*

д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

*Калманович Вероника
Валерьевна*

старший преподаватель Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: v572264@yandex.ru

*Картанов Артем
Алексеевич*

магистрант Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: kartanovartem@gmail.com

- Лошкарева Елена
Анатольевна** к. т. н, доцент кафедры физики и математики инженерно-технологического института института Калужского государственного университета, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: losh-elena@yandex.ru
- Починка Ольга
Витальевна** д. ф.-м. н, доцент кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Российская Федерация
e-mail: olga-pochinka@yandex.ru
- Раецкий Кирилл
Александрович** аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
e-mail: kraetsky@mail.ru
- Смирнова Лидия
Викторовна** к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru
- Степович Михаил
Адольфович** д. ф.-м. н, профессор, профессор Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Российская Федерация
e-mail: m.stepovich@rambler.ru
- Туртин Дмитрий
Витальевич** к. ф.-м. н, доцент Ивановского филиала Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, г. Иваново, Российская Федерация
e-mail: turtin@mail.ru
- Шмуклер Валерия
Ильинична** магистр факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Российская Федерация
e-mail: shmukler9797@mail.ru.com

Подписано к печати 04.06.2021. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 04.12.2021.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7