# Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 4 (49) ' 2020

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

**ISSN 1729-3901**

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

# TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

## 2020, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**
**Key title**: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**



**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

| | |
|---|---|
| Тел. гл. редактора: | +7 (3652) 63-75-42 |
| Тел. редакции: | +7 (3652) 602-466 |
| e-mail (гл. редактор): | mustafa_muratov@mail.ru |
| e-mail (для переписки): | article@tvim.info |
| сайт журнала: | www.tvim.info |

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

- Функциональный анализ и его приложения
- Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы
- Спектральные и эволюционные задачи
- Математические проблемы гидродинамики
- Дискретная оптимизация
- Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений
- Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
- Дедуктивные системы и базы знаний
- Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
- Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
- Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 4 от 30 ноября 2020 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: **www.tvim.info**

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel**. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
**Email**: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

## THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

## TABLE OF CONTENTS

**УДК: 517.98**

**MSC2010: 46E30, 37A30, 47A35**

# ERGODIC THEOREMS FOR FLOWS IN THE IDEALS OF COMPACT OPERATORS

**© A. N. Azizov, V. I. Chilin**

National University of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: *azizov.07@mail.ru, vladimirchil@gmail.com*

**Ergodic theorems for flows in the ideals of compact operators.**

**Azizov, A. N., Chilin, V. I.**

**Abstract.** Let $\mathscr{H}$ be an infinite-dimensional complex Hilbert space, let $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^\star$-algebra of all bounded linear operators acting in $\mathscr{H}$, and let $\mathscr{C}_E$ be the symmetric ideal of compact operators in $\mathscr{H}$ generated by the fully symmetric sequence space $E \subset c_0$. If $T_t : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H}),\ t \geq 0,$ is a semigroup of positive Dunford-Schwartz operators, which is strongly continuous on $C_1$, then the following versions of individual and mean ergodic theorems are true: For each $x \in \mathscr{C}_E$ the net $A_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(x)ds$ converges to some $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$ with respect to the norm $\|\cdot\|_\infty$, as $t \to \infty$; moreover, if $E$ is separable and $E \neq l_1$ (as a set), then $\lim\limits_{t\to\infty} \|A_t(x) - \widehat{x}\|_{\mathscr{C}_E} = 0$.

***Keywords***: *Symmetric sequence space, Banach ideal of compact operators, Dunford-Schwartz operator, individual ergodic theorem, mean ergodic theorem.*

## Introduction

Let $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^\star$–algebra of all bounded linear operators in a complex infinite-dimensional Hilbert space $\mathscr{H}$. The study of noncommutative individual ergodic theorems in the space of measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ equipped with a faithful normal semifinite trace $\tau$ was initiated by F. Yeadon. In [16], as a corollary of a noncommutative maximal ergodic inequality in $L^1 = L^1(\mathscr{M}, \tau)$, it was established that for any positive $L^1 - \mathscr{M}$ – contraction $T : L^1 \to L^1$ and every $x \in L^1$ there exists $\widehat{x} \in L^1$ such that the averages $A_n(T)(x) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} T^k(x)$ converge to $\widehat{x}$ bilaterally almost uniformly, that is, given $\varepsilon > 0$, there exists a projection $e \in \mathscr{M}$ such that $\tau(\mathbf{1} - e) < \varepsilon$ and $\|e(A_n(T)(x) - \widehat{x})e\|_\infty \to 0$ as $n \to \infty$, where $\mathbf{1}$ is the unit of $\mathscr{M}$.

The study of individual ergodic theorems beyond $L^1(\mathscr{M}, \tau)$ started much later with another fundamental paper by M. Junge and Q. Xu [11], where, among other results, individual ergodic theorem was extended to the case with a positive Dunford-Schwartz operator acting in the space $L^p(\mathscr{M},\tau)$, $1 < p < \infty$. In [1] ([2]) an individual ergodic theorem was proved for a positive Dunford-Schwartz operator in a noncommutative Lorentz (respectively, Orlicz) space.

Advancing Lance's extension of the pointwise ergodic theorem for actions of the group of integers on von Neumann algebras, Conze and Dang-Ngoc [4] and Watanabe [15] studied continuous extensions of Lance's results. In particular, the noncommutative individual ergodic theorems were established for actions of the semigroups $R_+^d$ and $R_+$ respectively. The corresponding ergodic theorem for actions of $R_+$ and with respect to bilaterally almost uniform convergence was initially considered by Junge and Xu [11]. In particular, they derived that these averages converge bilaterally almost uniformly in any noncommutative $L^p$-space for $1 \le p < \infty$ and almost uniformly if $2 \le p < \infty$.

Let $\mathscr{H}$ be a complex infinite-dimensional Hilbert space, and let $c_0$ be the Banach space of converging to zero sequences of complex numbers. Every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ generates a symmetric ideal of compact operators $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$, acting in $\mathscr{H}$, by the following rule (see, for example, [12, Chapter 3, Section 3.5]):

$$\mathscr{C}_E = \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E,$$

where $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ is the two-sided ideal of compact linear operators in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ and $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order.

Let $\{T_t\}_{t\ge 0}$ be a strongly continuous on $\mathscr{C}_{l_1}$ semigroup of Dunford-Schwartz operators (definition of Dunford-Schwartz operator see below, Section 1) and let

$$A_t(x) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t T_s(x)ds, \;\; x \in \mathscr{C}_{l_1}, t > 0,$$

be the corresponding ergodic averages. We show that the operators $A_t$ extend to the Dunford-Schwarz operators, in particular, $A_t(\mathscr{C}_E) \subset \mathscr{C}_E$ for any fully symmetric sequence space $E \subset c_0$. Therefore, we can talk about the convergence of the averages $A_t(x)$ as $t \to \infty$.

We prove that for each $x \in \mathscr{C}_E$ the net $A_t(x)$ converges to some $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$ with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$ as $t \to \infty$ (noncommutative version of the individual ergodic theorem). Besides, we show that in the case when $(E, \|\cdot\|_E)$ is separable space and $\mathscr{C}_E \ne \mathscr{C}_{l_1}$ as sets, the averages $A_t(x)$ converge to $\widehat{x}$ with respect to the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}$ as $t \to \infty$ (noncommutative version of the mean ergodic theorem). In conclusion, we give versions of the individual and mean ergodic theorems for the Orlicz and Lorentz ideals of compact operators.

## 1. Preliminaries

Let $l^\infty$ (respectively, $c_0$) be the Banach lattice of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers.

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, then the non-increasing rearrangement $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$ of $\xi$ is defined by

$$\xi_n^* = \inf\left\{\sup_{n\notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N},\ |F| < n\right\}.$$

The Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space $l^\infty$ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec\prec \eta = \{\eta_n\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \le \sum_{n=1}^m \eta_n^* \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l^\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric* (*fully symmetric*) sequence space if

$$\eta \in E,\ \xi \in l^\infty,\ \xi^* \le \eta^* \text{ (respectivelly, } \xi^* \prec\prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \le \|\eta\|_E.$$

Let $(\mathscr{H}, (\cdot,\cdot))$ be an infinite-dimensional separable Hilbert space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers, and let $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the $C^*$-algebra of bounded linear operators in $\mathscr{H}$. Denote by $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ the two-sided ideal of compact linear operators in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Let $\mathscr{B}_h(\mathscr{H}) = \{x \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : x = x^*\}$, $\mathscr{B}_+(\mathscr{H}) = \{x \in \mathscr{B}_h(\mathscr{H}) : x \ge 0\}$, and let $\tau : \mathscr{B}_+(\mathscr{H}) \to [0,\infty]$ be the canonical trace on $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, that is, $\tau(x) = \sum\limits_{i=1}^\infty (x\varphi_i, \varphi_i)$, $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, where $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ is an orthonormal basis in $\mathscr{H}$.

Let $\mathscr{P}(\mathscr{H})$ be the lattice of projections in $\mathscr{H}$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ and $e \in \mathscr{P}(\mathscr{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, and let $\{e_\lambda\}_{\lambda\ge 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of $x$, that is, $e_\lambda = \{|x| \le \lambda\}$. If $t > 0$, then the $t$-th generalized singular number of $x$, or the non-increasing rearrangement of $x$, is defined as (see [9])

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \tau(e_\lambda^\perp) \le t\}.$$

A non-zero linear subspace $X \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called noncommutative symmetric (fully symmetric) space if the conditions

$$x \in X,\ y \in \mathscr{B}(\mathscr{H}),\ \mu_t(y) \le \mu_t(x)\ \forall\ t > 0$$

$$\text{(respectively, } \int_0^s \mu_t(y)dt \le \int_0^s \mu_t(x)dt\ \forall\ s > 0 \text{ (writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \le \|x\|_X$.

The spaces $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathscr{K}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$, as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathscr{C}_p = \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}): \ \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \ 1 \le p < \infty,$$

are examples of noncommutative fully symmetric spaces.

If $x \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, then $|x| = \sum\limits_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and $p_n$ is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. Consequently, the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$, we set $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in $\mathscr{H}$. Let $p_n$ be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C}\cdot\varphi_n \subset \mathscr{H}$. If $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ is a symmetric space then the set

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0: \ x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X \right\}$$

(the series converges uniformly) is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ generates a symmetric space $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ by the following rule (see, for example, [14, Chapter 3, Section 3.5]):

$$\mathscr{C}_E = \{x \in \mathscr{K}(\mathscr{H}): \ \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathscr{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

The pair $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is called a Banach ideal of compact operators (cf. [10, Chapter III]). It is known that $(\mathscr{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathscr{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_{l^p}})$ for all $1 \le p < \infty$ and $(\mathscr{K}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathscr{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_{c_0}})$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the Banach ideal $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ is defined by

$$x \prec\prec y, \ x, y \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

Using Lemma 2.5 $(ii)$ [9] and Theorem 4.4 $(iii)$ [9] we get

$$x \prec\prec y, z \prec\prec y, \ x, y, z \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \Longrightarrow x + z \prec\prec 2y. \tag{1}$$

We say that a Banach ideal $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is fully symmetric, if conditions $y \in \mathscr{C}_E$, $x \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, $x \prec\prec y$ entail that $x \in \mathscr{C}_E$ and $\|x\|_{\mathscr{C}_E} \le \|y\|_{\mathscr{C}_E}$. It is clear that $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is a fully symmetric ideal if and only if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

Note that, along with any Schatten ideals $\mathscr{C}_p,\ 1 \leq p < \infty,$ of compact operators, the family of such fully symmetric ideals $\mathscr{C}_E$ contains many noncommutative counterparts of classical symmetric sequence spaces, examples of which are given in the last section of this note.

A linear contraction $T : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ is called a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), if $T(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{C}_1$ and $\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ for all $x \in \mathscr{C}_1$. We will write $T \in DS^+$ if $T$ is a positive Dunford-Schwartz operator, that is, $T \in DS$ and $T(\mathscr{B}_+(\mathscr{H})) \subset \mathscr{B}_+(\mathscr{H})$.

Any fully symmetric ideal $\mathscr{C}_E$ is an exact interpolation space in the Banach pair $(\mathscr{C}_1, \mathscr{B}(\mathscr{H}))$ (see [5, Theorem 2.4]). It then follows that $T(\mathscr{C}_E) \subset \mathscr{C}_E$ and $\|T\|_{\mathscr{C}_E \to \mathscr{C}_E} \leq 1$ for all $T \in DS$. In particular, $T(\mathscr{K}(\mathscr{H})) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ and the restriction of $T$ on $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ is a linear contraction (also denoted by $T$). In addition, $T(x) \prec\prec x$ for all $T \in DS$ and $x \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ (see [6, Theorem 4.7]).

We will utilize the next fundamental fact, which can be found, for example, in [13, Corollary 2.9].

**Theorem 1.** *Let $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ be $C^*$-algebras, and let $\mathbf{1}$ be the unit of $\mathscr{A}$. If $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ is a positive linear map, then $\|T\| = \|T(\mathbf{1})\|$.*

The following theorem establishes an extension of any positive linear contraction $T : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_1$ with the property $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathscr{C}_1$ up to the Dunford-Schwarz operator $\widetilde{T} : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

**Theorem 2.** *Let $T : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_1$ be a positive linear contraction such that $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathscr{C}_1$. Then there exists a unique operator $\widetilde{T} \in DS$ such that $\widetilde{T}(x) = T(x)$ for all $x \in \mathscr{C}_1$, and $\widetilde{T}$ is $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$-continuous.*

*Proof.* Since $(\mathscr{C}_1)^* = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, the adjoint operator $T^*$ acts in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ and is $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$-continuous. Moreover, since

$$\tau(T^*(x)y) = \tau(xT(y)) \ \ \forall\, x \in \mathscr{B}(\mathscr{H}),\ y \in \mathscr{C}_1,$$

it follows that the linear operator $T^*$ is positive.

Choose $p_n \in \mathscr{P}(\mathscr{H}),\ n = 1, 2, \ldots,$ satisfying

$$p_n \leq p_{n+1}, \quad \tau(p_n) < \infty \quad \text{for all } n \text{ and } \sup_{n \geq 1} p_n = \mathbf{1}.$$

Since $\|T(p_n)\|_\infty \leq \|p_n\|_\infty \leq 1$ and $T(p_n) \geq \mathbf{0}$ it follows that $T(p_n) \leq \mathbf{1}$ for each $n \in \mathbb{N}$. Consequently, for any $x \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{B}_+(\mathscr{H})$ we have that

$$\|T^*(x)\|_1 = \tau(T^*(x)) = \lim_{n\to\infty} \tau(T^*(x)p_n) = \lim_{n\to\infty} \tau(xT(p_n)) \leq \tau(x) = \|x\|_1.$$

Therefore, $T^*$ is $\|\cdot\|_1$ - continuous on $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{B}_+(\mathscr{H})$, hence on $\mathscr{C}_1$.

Next, replacing in the above argument $T$ by $T^*$, we obtain that the operator $(T^*)^* : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_1$ is positive $\|\cdot\|_1$ - continuous linear operator. Since

$$\tau(x(T^*)^*(y)) = \tau(T^*(x)y) = \tau(xT(y)) \quad \forall\ x, y \in \mathscr{C}_1,$$

it follows that $T(x) = (T^*)^*(x)$ for all $x \in \mathscr{C}_1$. Consequently, $(T^*)^*$ coincides with $T$ on $\mathscr{C}_1$.

Furthermore, as $T = (T^*)^*$ is $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$ - continuous and $\mathscr{C}_1$ is $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$ - dense in $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $T$ uniquely extends to a linear $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$ - continuous operator $\widetilde{T}$ on $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ for which $\widetilde{T}(x) = T(x)$ for all $x \in \mathscr{C}_1$.

Let us now show that $\|\widetilde{T}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})} \leq 1$. Indeed, given $x \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{B}_+(\mathscr{H})$, we have

$$\tau(x\widetilde{T}(\mathbf{1})) = \tau(\widetilde{T}^*(x)\mathbf{1}) \leq \tau(x),$$

and we conclude that $\widetilde{T}(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$, hence $\|\widetilde{T}(\mathbf{1})\|_\infty \leq 1$. Therefore, in view of Theorem 1 with $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, we have

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})} = \|\widetilde{T}(\mathbf{1})\|_\infty \leq 1.$$

This completes the proof of the Theorem 2, since the operator $\widetilde{T} : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ defined by above is Dunford-Schwartz operator. $\square$

## 2. Individual and Mean Ergodic theorems for flows in Banach ideals of compact operators

Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers and let $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$. In what follows, $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \subset DS^+$ is a semigroup such that $T_0(x) = x$ for all $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. A semigroup $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ is said to be strongly continuous on fully symmetric ideal $\mathscr{C}_1$, if $\lim\limits_{t \to s} \|T_t(x) - T_s(x)\|_{\mathscr{C}_1} = 0$ for each $x \in \mathscr{C}_1$.

If $\{T_t\}_{\in \mathbb{R}_+} \subset DS^+$ is a strongly continuous semigroup on $\mathscr{C}_1$ then for any $x \in \mathscr{C}_1$ and $y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ the function $\varphi_{x,y}(t) = \tau(T_t(x)y)$ is continuous on $\mathbb{R}_+$. Therefore, for the Lebesgue measure $\mu$ on $\mathbb{R}_+$ we have that the map $U_x : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{C}_1$ defined as $U_x(t) = T_t(x)$ is weakly $\mu$-measurable, that is, the complex function $\tau(U_x(t)y)$ is a measurable function on $(\mathbb{R}_+, \mu)$ for all $y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (recall that $(\mathscr{C}_1)^* = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ and every $f \in (\mathscr{C}_1)^*$ has the following form $f(x) = \tau(xy)$ for some $y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$). Since, in addition, $U_x(\mathbb{R}_+)$ is a separable subset in $\mathscr{C}_1$, Pettis theorem [18, Chapter V, § 4] entails that the real function $\|U_x(t)\|_1 = \|T_t(x)\|_1$ is $\mu$-measurable on $\mathbb{R}_+$. Using the inequality $\|T_t(x)\|_1 \leq \|x\|_1$, we obtain that $\|T_s(x)\|_1$ is an integrable function on $[0, t]$ for any $t > 0$. By [18, Chapter V, § 5, Theorem 1], the function $T_s(x)$ is Bochner $\mu$-integrable on $[0, t]$ for every $t > 0$. Consequently, for any $x \in \mathscr{C}_1$ and $t > 0$ there exists the Bochner integral

$A_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(x)ds \in \mathscr{C}_1$. It is clear that $\|A_t(x)\|_1 \le \|x\|_1$ and $\|A_t(x)\|_\infty \le \|x\|_\infty$ for all $x \in \mathscr{C}_1$. Consequently, by Theorem 2, there exists a unique operator $\widetilde{A_t} \in DS^+$ such that $\widetilde{A_t}(x) = A_t(x)$ for all $x \in \mathscr{C}_1$, and $\widetilde{A_t}$ is $\sigma(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \mathscr{C}_1)$-continuous. Below, the operator $\widetilde{A_t}$ is denoted by $A_t$.

**Theorem 3.** *Let $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ be a fully symmetric Banach ideal, and let $\{T_t\}_{t\in R_+} \subset DS^+$ be a strongly continuous semigroup on $\mathscr{C}_1$. Then given $x \in \mathscr{C}_E$, the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$ with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$ as $t \to \infty$.*

*Proof.* Using Theorem 6.4 $(i)$ [11], we get that for each $x \in \mathscr{C}_2$ there exists $\widehat{x} \in \mathscr{C}_2$ such that the averages $A_t(x)$ converge to $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$ almost uniformly, that is, given $\varepsilon > 0$, there exists a projection $e \in \mathscr{P}(\mathscr{H})$ such that $\tau(\mathbf{1} - e) < \varepsilon$ and $\|(A_t(x) - \widehat{x})e\|_\infty \to 0$ as $t \to \infty$, where $\tau$ is the canonical trace on $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. In particular, for $\varepsilon = \frac{1}{2}$ we obtain that $\mathbf{1} - e = 0$, thus $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ as $t \to \infty$. Consequently,

$$\|A_t(x) - A_s(x)\|_\infty \to 0 \ \text{ as } \ t, s \to \infty \ \ \forall \ \ x \in \mathscr{C}_2. \tag{2}$$

Since $\mathscr{C}_2$ contains the linear subspace of all finite-dimensional operators, it follows that $\mathscr{C}_2$ is everywhere dense in $\mathscr{K}(\mathscr{H})$. Therefore, for each $x \in \mathscr{C}_E$ and $\varepsilon > 0$, there exists $x_\varepsilon \in \mathscr{C}_2$ such that $\|A_t(x) - A_t(x_\varepsilon)\|_\infty \le \|x - x_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ for all $t > 0$ . Using (2) and following inequalities

$$\|A_t(x) - A_s(x)\|_\infty \le \|A_t(x) - A_t(x_\varepsilon)\|_\infty + \|A_t(x_\varepsilon) - A_s(x_\varepsilon)\|_\infty + \|A_s(x_\varepsilon) - A_s(x)\|_\infty =$$

$$= \|A_t(x - x_\varepsilon)\|_\infty + \|A_t(x_\varepsilon) - A_s(x_\varepsilon)\|_\infty + \|A_s(x_\varepsilon - x)\|_\infty \le 2\varepsilon + \|A_t(x_\varepsilon) - A_s(x_\varepsilon)\|_\infty$$

we obtain that

$$\|A_t(x) - A_s(x)\|_\infty \to 0 \ \text{ as } \ t, s \to \infty.$$

Since $(\mathscr{K}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ is the Banach space it follows that there exists $\widehat{x} \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ such that $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ as $t \to \infty$.

By [10, Chapter II, §2, Corollary 2.3] we have that $|s_n(A_t(x)) - s_n(\widehat{x})| \le \|A_t(x) - \widehat{x}\|_\infty$ for all $n \in \mathbb{N}$. Consequently, $s_n(A_t(x)) \to s_n(\widehat{x})$ as $t \to \infty$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since $A_t \in DS^+$ it follows that $A_t(x) \prec\prec x$ (see [6, Theorem 4.7]), that is

$$\sum_{n=1}^{m} s_n(A_t(x)) \le \sum_{n=1}^{m} s_n(x) \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N} \ \text{ and } \quad t > 0.$$

Thus

$$\sum_{n=1}^{m} s_n(\widehat{x}) \le \sum_{n=1}^{m} s_n(x) \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N},$$

that is $\widehat{x} \prec\prec x \in \mathscr{C}_E$. Finally, using that $(\mathscr{C}_E, \|\cdot\|_{\mathscr{C}_E})$ is a fully symmetric Banach ideal we obtain that $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$. □

**Remark 1.** An analogue of Theorem 3 for the averages $A_n(T) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$ was obtained in [3], where it was proved that for any $T \in DS$ and fully symmetric Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ for each $x \in \mathcal{C}_E$ the averages $A_n(T)(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ (as $n \to \infty$) with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$.

Using the reflexivity of $\mathcal{C}_p$-spaces, $1 < p < \infty$, and the well-known mean ergodic theorem for linear contractions of reflexive spaces (see, for example, [8, Chapter VII, §5, Corollary 4]), we have the following version of the mean ergodic theorem for the Dunford-Schwarz operators:

If $T \in DS$ and $1 < p < \infty$, then the averages $A_n(T) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$ converge strongly in $\mathcal{C}_p$, that is, given $x \in \mathcal{C}_p$, there exists $\widehat{x} \in \mathcal{C}_p$ such that $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_p \to 0$ as $n \to \infty$. If $p = 1$, this is not true in general. As a consequence, mean ergodic theorem may not hold in some fully symmetric Banach ideals $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$.

It is known that every separable symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space. In this case a symmetric Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal. Using Yeadon's paper [17], we have the following version of the mean ergodic theorem for the Dunford-Schwarz operators.

**Theorem 4.** *Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a separable symmetric sequence space, let $T \in DS^+$, and let $\frac{\|e_n\|_{\mathcal{C}_E}}{\tau(e_n)} \to 0$ for any increasing sequence of projections $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}_1$, $0 < \tau(e_n) < \infty$, with $\tau(e_n) \to \infty$. Then for any $x \in \mathcal{C}_E$ there exists $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ such that $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $n \to \infty$.*

It is clear that Theorem 4 cannot be used for the ideal $(\mathcal{C}_1, \|\cdot\|_1)$.

The following theorem essentially extends the class of fully symmetric ideals for which a version of the non-commutative mean ergodic theorem for flows $\{T_t\}_{t\in R_+} \subset DS^+$ is true.

**Theorem 5.** *Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a separable symmetric sequence space and $E \neq l^1$ as sets. Then for any strongly continuous semigroup $\{T_t\}_{t\in R_+} \subset DS^+$ on $\mathcal{C}_1$ the averages $A_t$ converge strongly in $\mathcal{C}_E$.*

To prove the Theorem 5, we need the following property of separable symmetric sequence spaces [7, Proposition 2.2].

**Proposition 1.** Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a separable symmetric sequence space and $E \neq l^1$ as sets. If $y_n \in \mathcal{C}_E$, $y_n \prec\prec x \in \mathcal{C}_E$ for every $n \in \mathbb{N}$ and $\|y_n\|_\infty \to 0$ as $n \to \infty$, then $\|y_n\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $n \to \infty$.

*Proof of Theorem 5.* By Theorem 3, for every $x \in \mathcal{C}_E$ there exists $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$ such that $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ as $t \to \infty$. Moreover, $(-\widehat{x}) \prec\prec \widehat{x} \prec\prec x$ and $A_t(x) \prec\prec x$ for every $t > 0$ (see proof of Theorem 3). Using (1) we obtain that $A_t(x) + (-\widehat{x}) \prec\prec 2x \in \mathcal{C}_E$. Consequently, by Proposition 1, for every sequence $0 < t_n \to \infty$ we have that $\|A_{t_n}(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $n \to \infty$. It means that $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $t \to \infty$. $\square$

## 3. Applications to Orlicz and Lorentz Banach ideals

In this section we give applications of Theorems 3 and 5 to Orlicz and Lorentz ideals of compact operators.

1. Let $\Phi$ be an *Orlicz function*, that is, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is left-continuous, convex, increasing and such that $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(u) > 0$ for some $u \neq 0$. Let

$$l_\Phi(\mathbb{N}) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \sum_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{|\xi_n|}{a}\right) < \infty \text{ for some } a > 0 \right\}$$

be the corresponding *Orlicz sequence space*, and let $\|\xi\|_\Phi = \inf\left\{ a > 0 : \sum\limits_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{|\xi_n|}{a}\right) \leq 1 \right\}$ be the *Luxemburg norm* in $l_\Phi(\mathbb{N})$. It is well-known that $(l_\Phi(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\Phi)$ is a fully symmetric sequence space.

If $\Phi(u) > 0$ for all $u \neq 0$, then $\sum\limits_{n=1}^\infty \Phi\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$ for each $a > 0$. Hence $\mathbf{1} = \{1, 1, ...\} \notin l_\Phi(\mathbb{N})$ and $l_\Phi(\mathbb{N}) \subset c_0$. If $\Phi(u) = 0$ for all $0 \leq u < u_0$, then $\mathbf{1} \in l_\Phi$ and $l_\Phi(\mathbb{N}) = l^\infty$.

It is said that an Orlicz function $\Phi$ satisfies $(\Delta_2)$-*condition at* 0 if there exist $u_0 \in (0,\infty)$ and $k > 0$ such that $\Phi(2u) < k \cdot \Phi(u)$ for all $0 < u < u_0$ . It is well known that an Orlicz function $\Phi$ satisfies $(\Delta_2)$-condition at 0 if and only if $(l_\Phi(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\Phi)$ is a separable space.

We also note that $l_\Phi(\mathbb{N}) = l^1$ as sets if and only if $\limsup\limits_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} > 0$ [14, Chapter 16, §16.2].

Set $\mathcal{C}_\Phi = \mathcal{C}_{l_\Phi(\mathbb{N})}$ and $\|x\|_\Phi = \|x\|_{\mathcal{C}_{l_\Phi(\mathbb{N})}}$, $x \in \mathcal{C}_\Phi$. Theorems 3 and 5 are yield the following.

**Theorem 6.** *Let $\Phi$ be an Orlicz function, let $\{T_t\}_{t\in R_+} \subset DS^+$ be a strongly continuous semigroup on $\mathcal{C}_1$. Then*

*(i). If $\Phi(u) > 0$ for all $u > 0$ and $x \in \mathcal{C}_\Phi$, then the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x} \in \mathcal{C}_\Phi$ with respect to the uniform norm as $t \to \infty$;*

*(ii). If $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0$ and the Orlicz function $\Phi$ satisfy $(\Delta_2)$-condition at 0, then $\|A_t(x) - \widehat{x}\|_\Phi \to 0$ as $t \to \infty$.*

2. Let $\psi$ be a concave function on $[0,\infty)$ with $\psi(0)=0$ and $\psi(t)>0$ for all $t>0$, and let

$$\Lambda_\psi(\mathbb{N})=\left\{\xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^\infty:\ \|\xi\|_{\Lambda_\psi}=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^*(t)(\psi(n)-\psi(n-1))<\infty\right\}$$

be the corresponding *Lorentz sequence space*. It is well-known that $(\Lambda_\psi(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ is a fully symmetric sequence space (see, for example, [14, Part III, Ch.9, § 9.1]); moreover, if $\psi(\infty)=\infty$, then $\mathbf{1}\notin\Lambda_\psi(\mathbb{N})$ and $\Lambda_\psi(\mathbb{N})\subset c_0$. If $\psi(\infty)<\infty$, then $\mathbf{1}\in\Lambda_\psi(\mathbb{N})$ and $\Lambda_\psi(\mathbb{N})=l^\infty$. In addition, the space $(\Lambda_\psi(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ is separable if and only if $\psi(+0)=0$ and $\psi(\infty)=\infty$ [14, Ch.9, §9.3, Theorem 9.3.1]. It is clear that $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}>0$ if and only if the norms $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi}$ and $\|\cdot\|_1$ are equivalent on $\Lambda_\psi(\mathbb{N})$, i.e. the equality $\Lambda_\psi(\mathbb{N})=l^1$ (as sets) is true.

Set $\mathscr{C}_{\Lambda_\psi}=\mathscr{C}_{\Lambda_\psi(\mathbb{N})}$ and $\|x\|_{\Lambda_\psi}=\|x\|_{\mathscr{C}_{\Lambda_\psi(\mathbb{N})}}$, $x\in\mathscr{C}_{\Lambda_\psi}$. Theorems 3 and 5 are imply the following.

**Theorem 7.** *Let $\psi$ be a concave function on $[0,\infty)$ with $\psi(0)=0$, $\psi(t)>0$ for all $t>0$, and let $\{T_t\}_{t\in R_+}\subset DS^+$ be a strongly continuous semigroup on $\mathscr{C}_1$. Then*

*(i). If $\psi(\infty)=\infty$, then the averages $A_t(x)$ converge to some $\widehat{x}\in\mathscr{C}_{\Lambda_\psi}$ with respect to the uniform norm;*

*(ii). If $\psi(+0)=0$, $\psi(\infty)=\infty$ and $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=0$, then $\|A_t(x)-\widehat{x}\|_{\Lambda_\psi}\to 0$ as $t\to\infty$.*

## Список литературы


1. CHILIN, V., LITVINOV, S. (2015) Ergodic theorems in fully symmetric spaces of $\tau$-measurable operators. *Studia Math.* 288 (2). p. 177–195.
2. CHILIN, V., LITVINOV, S. (2017) Individual ergodic theorems in noncommutative Orlicz spaces. *Positivity.* 21 (1). p. 49–59. DOI: 10.1007/s11117-016-0402-8.
3. AZIZOV, A., CHILIN, V., LITVINOV, S. (2019) Ergodic theorems in banach ideals of compact operators. *arXiv: 1902.00759 v1. [math.FA].* p. 16.
4. CONZE, J. P., DANG-NGOC N. (1978) Ergodic theorems for noncommutative dynamical systems. *Invent. Math.* 46. p. 11–15.
5. DODDS, P. G., DODDS, T. K., and PAGTER, B. (1992) Fully symmetric operator spaces. *J. Integr. Equat. Oper. Theory.* 15. p. 942–972.
6. DODDS, P. G., DODDS, T. K., and PAGTER, B. (1993) Noncommutative Köthe duality. *Trans. Amer. Math. Soc.* 339 (2). p. 717–750.

7. DODDS, P., G., DODDS, T. K., and SUKOCHEV, F. A. (2007) Banach-Saks properties in symmetric spaces of measurable operators. *Studia Math.* 178. p. 125–166.

8. DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T. (1988) *Linear Operators, Part I: General Theory.* John Willey and Sons.

9. FACK, T., KOSAKI, H. (1986) Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators. *Pacific. J. Math.* 123. p. 269–300.

10. GOHBERG, I. C., KREIN, M. G. (1969) *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translations of Mathematical Monographs 18. Amer. Math. Soc., Providence, RI 02904.

11. JUNGE, M, XU, Q. (2007) Noncommutative maximal ergodic theorems. *J. Amer. Math. Soc.* 20 (2). p. 385–439.

12. LORD, S., SUKOCHEV, F, ZANIN, D. (2013) *Singular Traces.* Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston..

13. PAULSEN, V. (2002) *Completely Bounded Maps and Operator Algebras.* Cambridge University Press.

14. RUBSHTEIN, B. A., GRABARNIK, G. Ya., MURATOV, M. A. and PASHKOVA, Yu. S. (2016) *Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces.* Springer International Publishing, Switzerland.

15. WATANABE, S. (1979) Ergodic theorems for dynamical semi-groups on operator algebras. *Hokkaido Math. J.* 8. p. 176–190.

16. YEADON, F. J. (1977) Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. I. *J. London Math. Soc.* 16 (2). p. 326–332.

17. YEADON, F. J. (1980) Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras: II. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 88. p. 135–147.

18. YOSIDA, K. (1965) *Functional Analysis.* Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

**УДК: 519.83**

**MSC2010: 91A65** **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-4-18-29**

# ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

**© А. Е. Бардин, Ю. Н. Житенева**

Государственный гуманитарно-технологический университет
факультет математики, физики и экономики
ул. Зеленая, 22, г. Орехово-Зуево, Московская обл., 142611, Российская Федерация
e-mail: *bardin.ae@yandex.ru, ulya_zhiteneva@mail.ru*

## Hierarchical model of competition under uncertainty.

**Bardin A. E., Zhiteneva J. N.**

**Abstract.**

Oligopoly is a basic concept in the theory of competition. This structure is the central object of research in the economics of markets. There are many mathematical models of the market that are formalized in the form of an oligopoly in economic theory.

The Cournot oligopoly is an elementary mathematical model of competition. The principle of equilibrium formalizes the non-cooperative nature of the conflict. Each player chooses the equilibrium strategy of behavior that provides the greatest profit, provided that the other competitors adhere to their equilibrium strategies.

The Stackelberg model describes a two-level hierarchical model of firm competition. The top-level player (center, leader) chooses his strategy, assuming reasonable (optimal) decision-making by the lower-level players. Lower-level players (agents, followers) recognize the leadership of the center. They consider the center's strategies known. These players choose their strategies, wanting to maximize their payoff functions. This hierarchical structure is from a game point of view a case of a hierarchical game $\Gamma_1$.

The indefinite uncontrolled factors (uncertainties) are the values for which only the range of possible values is known in this paper. Recently, studies of game models under uncertainty have been actively conducted. In particular, non-coalitional games under uncertainty are investigated.

The concepts of risk and regret are formalized in various ways in the theory of problems with uncertainty. At the same time, the decision-maker takes into account both the expected losses and the possibility of favorable actions of factors beyond his control. This article examines the two-level hierarchical structure of decision-making in the problem of firm competition. A linear-quadratic model with two levels of hierarchy is considered. This model uses the concepts of Cournot and Stackelberg under uncertainty. Uncontrolled factors (uncertainties) are identified with the actions of the importing company.

The Wald and Savage principles are used to formalize the solution. According to Wald's maximin criterion, game with nature is seen as a conflict with a player who wants to harm the decision-maker as much as possible.

Savage's minimax regret criterion, when choosing the optimal strategy, focuses not on winning, but on regret. As an optimal strategy, the strategy is chosen in which the amount of regret in the worst conditions is minimal.

A new approach to decision-making in the game with nature is formalized. It allows you to combine the positive features of both principles and weaken their negative properties. The concept of $U$-optimal solution of the problem in terms of risks and regrets is considered. The problems of formalization of some types of optimal solutions for a specific linear-quadratic problem with two levels of hierarchy are solved.

***Keywords***: *two-level hierarchical structure, Cournot oligopoly, the Stackelberg model, problem with uncertainty, the optimality principle*

## Введение

Олигополия является распространенной рыночной структурой. В экономике отраслевых рынков данная структура выступает центральным объектом анализа.

Основными чертами олигополистического рынка являются: немногочисленность фирм, а также взаимозависимость. Олигополии возникают в отраслях, производящих как стандартизированные однородные (например, нефть), так и дифференцированные (автомобили) продукты.

Существуют различные модели, предложенные экономистами при анализе рынка, относящегося к олигополистическому типу рыночной структуры. Можно выделить модели Курно, Бертрана, Штакельберга и др.

Олигополия Курно — простейшая математическая модель конкуренции. Основные предположения:

– фирмы производят одну и ту же продукцию;
– каждая фирма предполагает выпуск продукции конкурента постоянным;
– все фирмы знают, что цена на продукцию зависит от общего производства и знают функцию рыночной цены;
– фирмы принимают решения одновременно, независимо друг от друга;
– основным принципом оптимальности является равновесие (по Курно–Нэшу).

Принцип равновесия формализует некооперативное (бескоалиционное) поведение участников конфликта: каждая фирма принимает решения, которые дают наибольшие возможные прибыли при данных действиях своих конкурентов. Это означает, что ни одной из фирм невыгодно изменять равновесную стратегию (объем выпуска) при условии, что остальные фирмы не меняют своих равновесных стратегий.

Модель Штакельберга формализует иерархическую модель конкуренции фирм по принципу «лидер-последователь». Последователь, зная лидерство конкурента, рассматривая объем выпуска лидера как заданный, следовательно, принимает решение об оптимальном объеме своего выпуска, желая максимизировать свою прибыль.

Лидер (игрок верхнего уровня), в свою очередь, понимает, что оказывает влияние на принятие решений конкурента (игрока нижнего уровня), и поэтому учитывает стратегию последователя при решении задачи на максимум своей функции прибыли.

Модель Штакельберга с игровой точки зрения является случаем иерархической игры $\Gamma_1$. Игрок верхнего уровня (центр), выбирая свою стратегию, предполагает рациональное поведение игрока нижнего уровня. Именно, нижний уровень, зная стратегию центра, выбирает свою стратегию, для которой достигается наибольшее значение его функции выигрыша. При этом центр предполагает благожелательное отношение к нему игрока нижнего уровня.

В работе формализуется игровая модель конкуренции фирм, которая использует идеи Курно и Штакельберга в условиях действия неконтролируемых (неопределенных) факторов.

Неконтролируемые факторы (неопределенности) отождествляются с действиями компании-импортера. При этом предполагается выполнение следующих условий:

1. фирмы производят однородный товар;
2. известна зависимость цены на товар от количества поставляемой на рынок продукции;
3. о действиях компании импортера имеется неполная информация;
4. решения о поставляемой продукции принимается участниками игры независимо друг от друга.

В работах [1]–[4] формализованы различные виды моделей в условиях неопределенности. Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Согласно максиминному критерию Вальда игра с природой рассматривается как конфликт с разумным и агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать лицу, принимающему решение, достигнуть успеха. Таким образом, осторожная (максиминная) стратегия лица, принимающего решение (ЛПР) является оптимальной согласно этому критерию. Этот критерий олицетворяет «позицию пессимизма». Он ориентируется на самую неблагоприятную для ЛПР реализацию неопределенности. Такой подход естественен для того, кто боится проиграть.

Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа [5] при выборе оптимальной стратегии ориентируется не на выигрыш, а на сожаления. В качестве оптимальной стратегии выбирается та стратегия, при которой величина сожаления в наихудших условиях минимальна. Такая стратегия поведения часто соответствует принципам азартного игрока.

Очевидно, разумный игрок должен учитывать как возникающие риски при принятии решения, так и возможность получения большего выигрыша. Возникает идея формализации нового подхода к принятию решений в игре с природой, который мог бы соединить позитивные особенности обоих принципов и ослабить их негативные свойства. В данной работе формализуется понятие $U$-оптимального по рискам и сожалениям решения задачи и указан алгоритм построения оптимального решения.

## 1. Постановка задачи

Пусть имеются несколько предприятий (фирм), производящих и реализующих на одном рынке однородную бесконечно делимую продукцию. Предполагаем, что предприятия обладают разными производственными возможностями и оказывают неодинаковое влияние на рассматриваемый рынок. Именно, одна фирма является ведущим производителем указанной продукции. Будем называть её фирмой-лидером. Оставшиеся $n$ фирм, принимая решение об объеме производства, учитывают количество продукции, поставляемое фирмой-лидером. Помимо рассматриваемых фирм на рынок поставляет аналогичную продукцию фирма-импортер. Объем импортной продукции заранее не известен, имеется информация только о его максимальной возможной величине $d$, $d > 0$.

Обозначим $x_0$ – объем продукции, произведенный фирмой-лидером, $x_i$ -– количество продукции, произведенной $i$-ой фирмой ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), $y$ – объем импорта.

Предположим,что фирмы поставляют на рынок всю произведенную продукцию. При этом производственные мощности предприятий ограничены. Именно, фирма-лидер может произвести продукцию в объеме не более чем $c_0$, каждая $i$- фирма — в объёме не более $c_i$. Постоянные величины $c_i > 0$ ($i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$).

Цена единицы продукции линейно зависит от суммарного объема продукции на рынке

$$p(x_0, x_1, \ldots, x_n, y) = a - b\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i + y\Big), \tag{1}$$

где положительная величина $a$ – цена товара при нулевом предложении, $b$ – показатель падения цены при увеличении предложения, $b > 0$.

Рассмотрим случай, когда цена является положительной величиной, т. е. считаем выполненным неравенство

$$a - b\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i + d\Big) > 0.$$

Принятие решения об объеме поставляемой продукции осуществляется участниками игры не одновременно. Рассмотрим случай, когда первыми принимают решение фирма-лидер и импортер. При этом они действуют одновременно и независимо друг от друга. Оставшиеся фирмы получают информацию о количестве продукции, поставляемой фирмой-лидером, и объеме импортной продукции, и с учетом этих сведений осуществляют выбор своих стратегий.

Прибыль $i$-ой фирмы ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) задана равенством

$$f_i(x_0, x_1, \dots, x_n, y) = p(x_0, x_1, \dots, x_n, y)x_i - kx_i,$$

или, с учетом (1),

$$f_i(x_0, x_1, \dots, x_n, y) = \bigg(a - b\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i + y\Big)\bigg)x_i - kx_i. \tag{2}$$

В (2) положительная постоянная величина $k$ определяет издержки на выпуск единицы продукции фирмы. Предполагаем, что величина $k$ одинакова для всех фирм.

Каждая фирма стремится получить наибольшую возможную прибыль, при этом кооперация фирм невозможна.

Формализуем математическую модель задачи оптимизации производства в условиях действия неконтролируемых факторов в виде двухуровневой иерархической игры лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{X_i\}_{i=0,1,\dots,n}, Y, \{f_i(x_0, x_1, \dots, x_n, y)\}_{i=0,1,\dots,n} \rangle.$$

В игре $\Gamma$ игроки отождествляются с соответствующими фирмами, причем фирма-лидер является нулевым игроком – игроком верхнего уровня. Игроков с порядковыми номерами $1, 2, \dots, n$ будем считать игроками нижнего уровня. Множества стратегий игроков $X_i = [0, c_i]$ ($i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$). Действия неопределенности отождествляются с поставками фирмы-импортера. Совокупность значений неопределенности $Y = [0, d]$. Функция выигрыша $i$-го игрока ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) определена в (2).

Игра происходит следующим образом (рис. 1). Первый ход совершает игрок с номером 0. Он выбирает стратегию $x_0 \in X_0$. Одновременно и независимо от действий игрока верхнего уровня реализуется неопределенность $y \in Y$. Второй ход делают игроки нижнего уровня. Зная $x_0$ и $y$, эти игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии $x_1(x_0, y), x_2(x_0, y), \dots, x_n(x_0, y)$. В результате складывается ситуация игры $(x, y) = (x_0, x_1(x_0, y), \ldots, x_n(x_0, y), y)$. Игроки получают выигрыши – значения своих функций выигрыша в сложившейся ситуации.

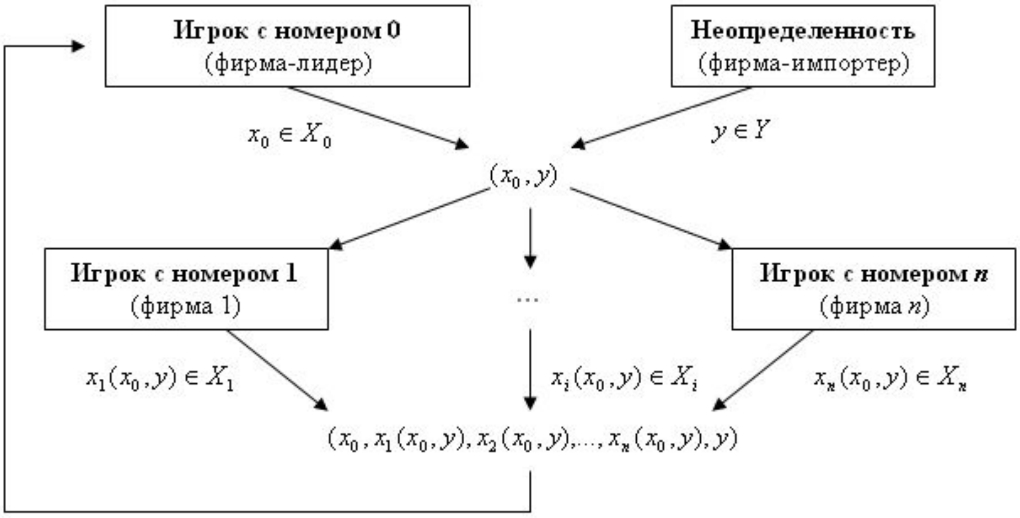


*Рис.* 1. Схема принятия решений в игре Г

В игре Г каждый $i$-игрок выбором своей стратегии $x_i \in X_i$ стремится добиться наибольшего возможного значения своей функции выигрыша $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, y)$ $(i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\})$. Игроки действуют независимо друг от друга. При этом игрок верхнего уровня должен учитывать возможность реализации любой неопределенности $y$, о которой заранее известно только множество возможных значений $Y$, а реализоваться может любое значение этого множества.

## 2. Формализация решения

Реализуем один из возможных подходов к формализации оптимального решения в игре Г. Именно пусть игроки второго уровня выбирают равновесные по Нэшу стратегии $x_i^e$, т. е. при любых значениях $x_0 \in X_0$ и $y \in Y$ выполнена система неравенств

$$f_i(x_0, x^e \| x_i, y) \leq f_i(x_0, x^e, y), \; i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

где набор

$$x^e \| x_i = (x_1^e(x_0, y), \ldots, x_{i-1}^e(x_0, y), x_i^e(x_0, y), x_{i+1}^e(x_0, y), \ldots, x_n^e(x_0, y)).$$

Рассмотрим случай, когда множества стратегий игроков нижнего уровня совпадают (производственные мощности всех фирм, кроме фирмы-лидера, одинаковы), т. е. справедливы равенства

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c.$$

Используя достаточные условия существования равновесной по Нэшу ситуации, получим для любых значений $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$x_i^e = \frac{2h - x_0 - y}{n+1}, \tag{3}$$

где постоянная величина

$$h = \frac{a-k}{2b}. \tag{4}$$

Заметим, что при любых значениях стратегии игрока верхнего уровня $x_0 \in X_0$ и неопределенности $y \in Y$ должны быть выполнены неравенства

$$0 < \frac{2h - x_0 - y}{n+1} \le c. \tag{5}$$

С учетом множеств возможных значений стратегии игрока верхнего уровня $X_0$ и неопределенности $Y$ ограничения (5) примут вид

$$\frac{\mathrm{c}_0 + d}{2} < h < \frac{c(n+1)}{2}. \tag{6}$$

Учитывая (3), запишем функцию выигрыша игрока верхнего уровня следующим образом

$$f_0(x_0, x^e(x_0, y), y) = -\frac{b}{n+1}\Big[x_0^2 + (y - 2h)x_0\Big]. \tag{7}$$

Примем предположение о том, что для любого значения неопределенности $y \in Y$ выполнены неравенства

$$0 < h - \frac{y}{2} < c_0,$$

т. е. имеют место ограничения

$$\frac{d}{2} < h < c_0. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует

$$\frac{\mathrm{c}_0 + d}{2} < h < \min\left\{\frac{c(n+1)}{2}, c_0\right\}.$$

**Лемма 1.** *Пусть в игре* $\Gamma$ *выполнены условия*

$$\begin{gathered} a > 0,\ b > 0,\ k > 0,\ c_0 > 0,\ c_i = c > 0\ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}),\ d > 0, \\ a - b(c_0 + nc + d) > 0, \\ \tfrac{\mathrm{c}_0 + d}{2} < h < \min\left\{\tfrac{c(n+1)}{2}, c_0\right\}, \end{gathered} \tag{9}$$

*где величина* $h$ *определена в (4).*

*Тогда для любых значений пар* $(x_0, y) \in X_0 \times Y$ *существует и единственно равновесие по Нэшу* $x^e(x_0, y) = (x_1^e(x_0, y), \ldots, x_n^e(x_0, y))$, *где*

$$x_i^e(x_0, y) = \frac{2h - x_0 - y}{n+1}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**Замечание 1.** Система ограничений (9) непротиворечива. Она выполняется, например, при следующих значениях параметров игры Γ:

$$a = 10,\ b = 0{,}4,\ c_0 = 8,\ c = 2,\ n = 7,\ d = 1,\ k = 4.$$

Перейдем к построению оптимального решения для игрока верхнего уровня в игре Γ. Данный игрок предполагает, что игроки нижнего уровня используют принцип равновесия по Нэшу. Согласно Лемме 1 при выполнении в игре Γ условий (9) равновесие по Нэшу $x^e(x_0, y)$ для игроков нижнего уровня существует и единственно.

В исследуемой модели игрок верхнего уровня заранее не имеет информации о величине неопределенности. Поэтому при выборе своей стратегии $x_0 \in X_0$ он должен учитывать возможность реализации любого значения $y \in Y$. Рассмотрим возможные подходы к формализации решения игрока верхнего уровня в зависимости от его склонности к риску.

**Случай 1.** Игрок верхнего уровня использует принцип Вальда

Принцип Вальда предполагает ориентацию игрока на возможность реализации самой плохой для него неопределенности. Следуя этому принципу, игрок в качестве решения выбирает стратегию $x_0^V \in X$, обеспечивающую наибольшее значение его функции выигрыша при наихудшем значении неопределенности $y \in Y$.

**Определение 1.** Стратегию $x_0^V \in X$ назовём *оптимальным по Вальду* решением игрока верхнего уровня игры Γ, если выполнено равенство

$$\min_{y \in Y} f_0(x_0^V, x^e(x_0^V, y), y) = \max_{x_0 \in X_0} \min_{y \in Y} f_0(x_0, x^e(x_0, y), y).$$

Поскольку в игре Γ

$$\min_{y \in Y} f_0(x_0, x^e(x_0, y), y) = f_0(x_0, x^e(x_0, d), d),$$

то

$$f_0(x_0^V, x^e(x_0^V, d), d) = \max_{x_0 \in X_0} f_0(x_0, x^e(x_0, d), d).$$

Нетрудно показать, что при выполнении условий (9)

$$x_0^V = h - \frac{d}{2}, \tag{10}$$

где величина $h$ определена в (4).

Таким образом, справедливо утверждение

**Теорема 1.** *Пусть в игре* $\Gamma$ *выполнены условия (9) и игроки нижнего уровня при любых значениях пары* $(x_0, y) \in X_0 \times Y$ *выбирают равновесное по Нэшу решение* $x^e(x_0, y)$. *Тогда в этой игре оптимальное по Вальду решение игрока верхнего уровня определяется равенством (10).*

Пусть игрок верхнего уровня в игре $\Gamma$ использует оптимальное по Вальду решение (10). Тогда оптимальные стратегии игроков нижнего уровня (3) имеют вид

$$x_i^e = \frac{1}{n+1}\Big(h + \frac{d}{2} - y\Big),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**Случай 2.** Игрок верхнего уровня использует принцип Сэвиджа

Согласно принципу Сэвиджа, игрок при выборе своей стратегии должен ориентироваться на значение функции сожаления по Сэвиджу

$$\Phi(x_0, x^e(x_0, y), y) = \max_{x_0 \in X_0} f_0(x_0, x^e(x_0, y), y) - f_0(x_0, x^e(x_0, y), y).$$

Оптимальная по Сэвиджу стратегия игрока $x_0^S$ минимизирует функцию сожаления $\Phi(x_0, x^e(x_0, y), y)$ при неблагоприятных для него значениях неопределенности.

**Определение 2.** Стратегию $x_0^S \in X$ назовём *оптимальным по Сэвиджу* решением игрока верхнего уровня игры $\Gamma$, если выполнено равенство

$$\max_{y \in Y} \Phi(x_0^S, x^e(x_0^S, y), y) = \min_{x_0 \in X_0} \max_{y \in Y} \Phi(x_0, x^e(x_0, y), y).$$

В игре $\Gamma$ функция сожаления по Сэвиджу для игрока верхнего уровня имеет вид

$$\Phi(x_0, x^e(x_0, y), y) = \frac{b}{n+1}\Big(x_0 - h + \frac{y}{2}\Big)^2. \tag{11}$$

Нетрудно показать, что при выполнении условий (10)

$$\max_{y \in Y} \Phi(x_0, x^e(x_0, y), y) = \begin{cases} \frac{b}{n+1}(x_0 - h)^2, & 0 \le x_0 \le h - \frac{d}{4}, \\ \frac{b}{n+1}\Big(x_0 - h + \frac{d}{2}\Big)^2, & h - \frac{d}{4} \le x_0 \le c_0. \end{cases} \tag{12}$$

и оптимальная по Сэвиджу стратегия игрока верхнего уровня

$$x_0^S = h - \frac{d}{4}, \tag{13}$$

где величина $h$ определена в (4).

Следовательно, справедливо утверждение

**Теорема 2.** *Пусть в игре* $\Gamma$ *выполнены условия (9) и игроки нижнего уровня при любых значениях пары* $(x_0, y) \in X_0 \times Y$ *выбирают равновесное по Нэшу решение*

$x^e(x_0, y)$. *Тогда в этой игре оптимальное по Сэвиджу решение игрока верхнего уровня определяется равенством (13).*

Пусть игрок верхнего уровня в игре Γ использует оптимальное по Сэвиджу решение (13). Тогда оптимальные стратегии игроков нижнего уровня (3) имеют вид

$$x_i^e = \frac{1}{n+1}\Big(h + \frac{d}{4} - y\Big),\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**Случай 3.** Игрок верхнего уровня использует смешанный подход

Каждую стратегию $x_0 \in X_0$ игрок верхнего уровня оценивает, используя два критерия:

– риск по Вальду

$$R^V(x_0) = \max_{x_0 \in X_0} \min_{y \in Y} f_0(x_0, x^e(x_0, y), y) - \min_{y \in Y} f_0(x_0, x^e(x_0, y), y),$$

– сожаление по Сэвиджу

$$R^S(x_0) = \max_{y \in Y} \Phi(x_0, x^e(x_0, y), y) - \min_{x_0 \in X_0} \max_{y \in Y} \Phi(x_0, x^e(x_0, y), y),$$

где функции $f_0(x_0, x^e(x_0, y), y)$ и $\Phi(x_0, x^e(x_0, y), y)$ определены в (7) и (11), соответственно.

С учетом (7) риск по Вальду для игрока верхнего уровня примет вид

$$R^V(x_0) = \frac{b}{n+1}\Big[x_0 - h + \frac{d}{2}\Big]^2. \tag{14}$$

Используя (11) и (12), сожаление по Сэвиджу для игрока верхнего уровня преобразуем к виду

$$R^S(x_0) = \begin{cases} \frac{b}{n+1}\Big[(x_0 - h)^2 - \frac{d^2}{16}\Big], & 0 \le x_0 \le h - \frac{d}{4}, \\ \frac{b}{n+1}\Big[\Big(x_0 - h + \frac{d}{2}\Big)^2 - \frac{d^2}{16}\Big], & h - \frac{d}{4} \le x_0 \le c_0. \end{cases} \tag{15}$$

Следует отметить, что имеют место равенства

$$R^V(x_0^V) = 0,\ \ R^S(x_0^S) = 0.$$

Здесь стратегии $x_0^V$ и $x_0^S$ определены в (10) и (13) соответственно.

Оптимальной стратегией $x_0^*$ для игрока верхнего уровня будет решение двухкритериальной задачи

$$\langle X_0, \{R^V(x_0), R^S(x_0)\}\rangle, \tag{16}$$

где множество $X_0 = [0, c_0]$, критерии определены в (14) и (15).

Используя метод «идеальной точки», получаем единственное минимальное по Парето решение задачи (16), которое является решением оптимальной задачи

$$\begin{cases} G(x_0) = \Big(R^V(x_0)\Big)^2 + \Big(R^S(x_0)\Big)^2 \to \min, \\ x_0 \in [x_0^V, x_0^S]. \end{cases} \tag{17}$$

**Определение 3.** Стратегию $x_0^U \in X_0$ назовём *$U$-оптимальным решением* игрока верхнего уровня игры $\Gamma$, если она является решение задачи (17).

Справедливость следующего утверждения следует из непрерывности функций $R^V(x_0)$ и $R^V(x_0)$ на отрезке $[0, c_0]$.

**Теорема 3.** *Пусть в игре $\Gamma$ выполнены условия (9) игроки нижнего уровня при любых значениях пары $(x_0, y) \in X_0 \times Y$ выбирают равновесное по Нэшу решение $x^e(x_0, y)$. Тогда в игре $\Gamma$ существует $U$-оптимальное решение игрока верхнего уровня.*

## Заключение

В данной статье исследована иерархическая структура принятия решений в задаче конкуренции фирм. Рассмотрена линейно-квадратичная модель с двумя уровнями иерархии, в которой используются концепции Курно и Штакельберга в условиях неопределенности. Неконтролируемые факторы (неопределенности) отождествляются с действиями компании-импортера.

В рассматриваемой математической модели учитываются как ожидаемые потери при принятии рискованных решений, так и возможность благоприятных для лиц, принимающих решения (игроков) действий внешних факторов. Именно, наличие риска в процессе принятия решений не всегда является негативной особенностью реальной проблемы. Конкретные задачи, связанные с экономическими, социальными, политическими и военными конфликтами, свидетельствуют о возникающей часто необходимости принятия рискованного выбора.

Для конкретной линейно-квадратичной задачи с двумя уровнями иерархии решены проблемы формализации некоторых видов оптимальных решений. Рассмотренная модель допускает различные обобщения, например, усложнение иерархической структуры.

## Список литературы

1. Бардин, А. Е., Житенева, Ю. Н., Макаркина, Т. В. $U$-оптимальное по рискам и сожалениям решение игры с природой // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов X Международной школы-симпозиума АМУР-2016. — Симферополь: ТНУ, 2016. — С. 29–35.

   BARDIN, A. & ZHITENEVA, J. & MAKARKINA, T. (2016) The $U$-optimal on risks and regrets solution game with nature. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the Eighth International School-Symposium AMUR–2016.* p. 29–35.

2. Бардин, А. Е., Солдатова, Н. Г. Сильно гарантированное равновесие в одной иерархической двухуровневой игре при неопределенности // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2014. — Т. 1. — С. 17–23.

   BARDIN, A. & SOLDATOVA, N. (2014) The strongly guaranteed equilibrium in one hierarchical two-level game under uncertainty. *Bulletin of the South Ural state University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 1. p. 17–23.

3. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Смирнова, Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: КРАСАНД, 2013. — 324 с.

   ZHUKOVSKIY, V. & CUDRYAVCEV, K. & SMIRNOVA, L. (2013) *Guaranteed conflict solutions and their applications.* Moscow: KRASAND.

4. Жуковский, В. И., Салуквадзе, М. Е. Математические основы золотого правила. — Москва - Тбилиси: Национальная Академия Наук Грузии, 2016. — 263 с.

   ZHUKOVSKIY, V. & SALUKVADZE, M. (2016) *The mathematical foundations of the Golden rule.* Moscow-Tbilisi: The National Academy Of Sciences Of Georgia.

5. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association.* 46. p. 55–67.

**УДК: 519.16**
**MSC2010: 90C27** **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-4-30-55**

# РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ПСЕВДОБУЛЕВОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТИПА МНОГИХ КОММИВОЯЖЕРОВ

**© М. С. Германчук**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *m.german4uk@yandex.ru*

**Solvability of pseudobulous conditional optimization problems of the type of many salesmen.**

**Germanchuk M. S.**

**Abstract.** Formalizing routing problems of many traveling salesman (*mTSP*) in complex networks leads to *NP*-complete pseudo-Boolean conditional optimization problems. The subclasses of polynomially solvable problems are distinguished, for which the elements of the distance matrix satisfy the triangle inequality and other special representations of the original data.

The polynomially solvable assignment problem can be used to determine the required number of salesmen and to construct their routes. Uses a subclass of tasks in the form of pseudo-Boolean optimization with disjunctive normal shape (*DNS*) constraints to which the task is reduced *mTSP*. Problems in this form are polynomially solvable and allow to combine knowledge about network structure, requirements to pass routes by agents (search procedures) and efficient algorithms of logical inference on constraints in the form of *DNS*. This approach is the theoretical justification for the development of multi-agent system management leading to a solution *mTSP*.

Within the framework of intellectual planning, using resources and capabilities, and taking into account the constraints for each agent on the selected clusters of the network, the construction of a common solution for the whole complex network is achieved.

***Keywords***: *Pseudo-Boolean optimization with DNS constraints, polynomially solvable problems of many salesmen, algorithms of solution*

## Введение

Задача одного или многих коммивояжеров на сетях большой размерности и сложной структуры в приложениях возникают в результате формализации, в ходе которой пренебрегают спецификой, особенностями и некоторыми ограничениями. Может оказаться, что более точный или избирательный учет всех знаний о задаче и сети, позволит выделить индивидуальный экземпляр задачи, разрешимой за полиномиальное время или класс таких задач. Существует путь формализации задачи и организации структуры исходных данных, при котором полученный экземпляр будет полиномиально разрешимым.

Для задачи, в которой необходимо определить количество агентов-коммивояжеров полностью обслуживающих сеть и необязательно каждый агент посещает заданное количество вершин, достаточно воспользоваться полиномиально разрешимым алгоритмом решения задачи о назначении. Полученные $m$ контуров потребуют $m$ коммивояжеров. Дальнейшие преобразования найденных контуров улучшают решение общей задачи и удовлетворяют необходимым требованиям. Если коммивояжеры уже распределены по кластерам сети, то на отдельном кластере могут возникать полиномиально разрешимые экземпляры *TSP*, в которых исходные данные матрицы весов (расстояний) $C$ представлены в специальном виде.

Прикладная теория задач маршрутизации на сложных сетях (типа многих агентов-коммивояжеров) базируется на точных решениях выделенных классов задач с полиномиальными алгоритмами решения, использовании приближенных алгоритмов решения (например, с гарантированной функциональностью) и декомпозиции (кластеризации) исходной задачи, т. е. сведения к задачам меньшей размерности и уточняющих преобразованиях для возврата к исходной задаче. Важным в этом процессе является учет всей имеющейся информации, знаний, фактов и прецедентов, как для построения иерархии моделей (извлечение моделей), так и для разработки практических алгоритмов решения [1, 4, 8, 9, 12–15, 24, 25].

Разнообразие алгоритмов решения задач типа многих коммивояжеров ($mTSP$) связано с наличием априорных знаний о решении или структуре сети, прецедентным характером знаний и требованиями к точности решения. Рационально использование, как точных, так и приближенных алгоритмов и их композиций.

Многоагентные системы ($MAC$) с роевым интеллектом используются для решения сложных задач дискретной оптимизации (в том числе и $mTSP$), которые нельзя эффективно решать классическими алгоритмами. Агентная модель для сложной сети задачи типа многих коммивояжеров $mTSP$ становится интеллектуализированной системой, определяющей эвристические алгоритмы поиска оптимального решения реактивными агентами (следующих заложенным в них правилам).

Синтез $MAC$ искусственного интеллекта ($ИИ$) по частичной, прецедентной, априорной информации базируется на результатах наблюдения над поведением $MAC$

на основе накопленной информации в виде «... вектора состояния, значения качества функционирования системы, бинарного индикатора допустимости этого состояния» [24]. В данной статье для $MAC$ маршрутизации типа $mTSP$ используется модель скалярной псевдобулевой условной оптимизации с ограничениями в виде дизъюнктивной нормальной формы (*ДНФ*). Такие модели естественным образом учитывают линейные ограничения по прохождению вершин сети, декларативные требования, требования предшествования, обязательного прохождения выделенного множества дуг и другую прецедентную информацию.

В разделе 2 задачи $mTSP$ сводятся к псевдобулевым оптимизационным моделям с сепарабельными целевыми функциями и *ДНФ* ограничениями, имеющими ограниченную постоянной длину, которые являются полиномиально разрешимыми. Представляют интерес классы задач, которые приведены или легко приводятся к форме с *ДНФ* ограничениями, так как в общем случае такие приведения являются экспоненциальными. Синтез модели с *ДНФ* ограничениями из данных можно осуществлять приближенно и сложность такой аппроксимации оказывается полиномиальной. Можно воспользоваться результатами работы [24], где показано, что число конъюнкций в извлеченной *ДНФ* не превышает числа примеров в исходной прецедентной информации. При этом указывается, что для построения *ДНФ* ограничений целесообразно использовать решающие деревья. В случае монотонности и линейности частично заданной целевой функции в работах В. И. Донского [8, 24] и М. Г. Козловой [12, 13] предложены алгоритмы решения задач псевдобулевой скалярной оптимизации при наличии неполной, прецедентной начальной информации. Методология такого подхода далее будет применена для решения многоагентных задач типа многих коммивояжеров.

В статье приводятся результаты, которые анонсировались в декабре 2020 года на Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» [4]. Исторические аспекты по задачам коммивояжера, их обобщениям, точным и приближенным алгоритмам решения можно найти в работах [16–18].

## 1. Подклассы полиномиально разрешимых задач коммивояжера

Рассмотрим случай $mTSP$, когда каждый коммивояжер решает свою задачу комбинаторной оптимизации на выделенном кластере. Будем предполагать, что исходные данные задачи коммивояжера представлены (или могут быть представлены) специальным образом так, что данный экземпляр полиномиально разрешим.

Метод, в котором исходные данные представлены определенным образом в работе [7], называется методом моделирования исходных данных. Метод, который основан на распознавании структуры входных данных и заданном упорядочении комбинаторных комбинаций [21], называют методом структурно-алфавитного поиска оптимального решения задач комбинаторной оптимизации.

Пусть $C$ — весовая матрица расстояний с элементами $c_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ из класса $R^n$ симметричных $n \times n$ матриц над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Постановка $TSP$, как комбинаторной задачи оптимизации, состоит в нахождении перестановки $\pi$ на множестве индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$, которая минимизирует функцию расстояния

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi(i)}. \tag{1}$$

Т. е. коммивояжер должен объехать все города (вершины) в произвольной последовательности и вернутся в исходный город кратчайшим путем $\gamma = (1, \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n) = 1)$.

**Определение 1.** Через $PS$ будем обозначать подкласс $NP$-полных задач коммивояжера, которые полиномиально разрешимы при дополнительных ограничениях (условиях) $S$.

Приведем некоторые примеры $TSP$ из подкласса $PS$. Для $TSP$ на плоскости полиномиально разрешимой является задача, элементы матрицы $C$ которой удовлетворяют неравенству треугольника. Другие подклассы определяются через четыре различных элементам матрицы $C$. Пусть $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n$, $C \in R^n$ произвольная матрица расстояний.

Симметричная матрица $C \in R^n$ называется матрицей Кальмансона ($\mathscr{K}$) [32], если выполняется условия

$$\theta_1 = c_{ij} + c_{kl} \leqslant c_{ik} + c_{jl} \equiv \theta_2, \quad \theta_3 \equiv c_{ij} = c_{jk} \leqslant c_{ik} + c_{jl} \equiv \theta_2. \tag{2}$$

или $\theta_2 = max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3.\}$ Если $C \subset \mathscr{K}$, то оптимальным маршрутом $TSP$ будет $\gamma = (1, 2, \ldots, n-1, n)$.

Матрицы Супника ($\mathscr{S}$) [34] удовлетворяют условиям

$$\theta_1 \leqslant \theta_2, \quad \theta_3 \geqslant \theta_2 \tag{3}$$

или $\theta_1 = min\{\theta_1, \theta_2, \theta_3.\}$ Для матриц Супника ($\mathscr{S}$) оптимальным маршрутом будет $\gamma = (1, 3, 5, 7, \ldots, 8, 6, 4, 2)$. Более мощным является класс матриц Демиденко [5, 6] $\mathscr{K} \cup \mathscr{S} \in \mathscr{D}$.

Пирамидальным называется такой маршрут $TSP$ $\gamma = (1, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, n, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{n-2})$, в котором $i_1 < i_2 < \ldots < i_{k+1}$, и $i_{k+1} > i_{k+2} > \ldots > i_{n-2}$. В. М. Демиденко доказал, что для матрицы $C \subset \mathscr{D}$ существуют оптимальный маршрут, который является пирамидальным. Число пирамидальных маршрутов не меньше $2^{n-2}$. Лучший из них можно найти полиномиальным алгоритмом порядка $O(n^2)$ [20].

Произвольная матрица $C \in R^n$ называется матрицей Монжа, если $\theta_1 \equiv c_{ij} + c_{kl} \leqslant \leqslant c_{il} + c_{kj}$ для всех $1 \leqslant i < k \leqslant n$, $1 \leqslant j < l \leqslant n$. Матрица $C$ не обязательно симметрическая. Задача коммивояжера с переупорядоченной матрицей расстояний Монжа называется задачей Монжа [28].

Возникает задача распознавания, которая состоит в том, чтобы найти перестановку $\delta$ элементов матрицы $C$ такую, чтобы новая матрица с элементами $c_{\delta(i)\delta(j)}$ принадлежала бы к разрешимым $TSP$ (Демиденко, Кальмансона, Супника, ...). В [7] утверждается, что до сих пор не доказано существование такой перестановки для конкретной матрицы расстояний $C$.

Заметим, что подкласс разрешимых задач с матрицей Монжа найден в результате разной перестановки для строк и столбцов: $c_{\delta(i)\tau(j)}$, $\delta$ — перестановка для строк, а $\tau$ — для столбцов.

Дальнейшее описание полиномиально разрешимых $TSP$ связано с функцией натурального аргумента $\varphi(t)$ [7, 20, 21], с помощью которой представляются элементы матрицы $C$. Для симметрической матрицы $C$ достаточно использовать наддиоганальные элементы, которые представляются построчно в виде одномерного массива $c_{11}, c_{13}, \ldots, c_{1n}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}, c_{34}, \ldots, c_{n-1}, n$. Такой последовательности ставится в соответствии функция натурального аргумента $\varphi(t) = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(m)\}$, $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Для $j > i$ имеет место соответствие $\varphi(t) = c_{ij}$, $t = n(i-1) - \frac{i(i+1)}{2} + j$. Справедливы утверждения [7]:

1. Если $\varphi(t)$ — линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом, то соответствующая $TSP$ принадлежит к классу разрешимых задач.

2. Если $\varphi(t)$ — выпуклая и невозрастающая функция, то соответствующая $TSP$ принадлежит подклассу разрешимых задач.

Матрица расстояний, представленная линейной функцией $\varphi(t)$, является одновременно матрицей Кальмансона и Супника. Впервые линейную функцию в качестве расстояний предложила Н. К. Тимофеева [21]. В [20] взята функция расстояний, удовлетворяющая условиям: $|j - i| < |l - k| \Rightarrow c_{ij} < c_{kl}$, $c_i j = c_{ji}$. В этом случае оптимальный маршрут является пирамидальным циклом.

В [21] для подклассов разрешимых задач $TSP$ доказано, что методом структурно-алфавитного поиска построением не более чем $\frac{n^2}{2}$ перестановок находится упорядоченная последовательность локальных экстремумов $f = (f(\delta^1), f(\delta^2), \ldots, f(\delta^{k*}))$

таких, что $f(\delta^{i*}) = \underset{\delta^k}{globextr} f(\delta^k)$, где $k^*$, $i^* \in \left(1, \ldots, \dfrac{n^2}{2}, \right)$ $f \in \{1, \ldots, n!\}$, $\delta^k$ — перестановка, которая в $TSP$ является аргументом целевой функции.

На основании этого утверждения приводится полиномиальный алгоритм [21, 34-35] («вычислительная схема») решения $TSP$, если входные данные заданы функциями натурального аргумента, которые изменяются как монотонные, унимодальные (вогнутые или выпуклые), периодические или наименьшие элементы матрицы $C$ одинаковые и образуют гамильтонов цикл. Соответствующие правила отсечения неэффективных вариантов основываются на закономерности изменения значений целевой функции $f$ от упорядочивания комбинаторных комбинаций и от структуры входных данных.

Выбор алгоритма структурно-алфавитного поиска, наряду с алгоритмами метода ветвей и границ, динамического программирования, последовательного анализа вариантов для прикладных задач многих коммивояжеров обусловлен его быстродействием и сравнимой точностью.

Эффективность применения алгоритма связывается с выбором кластера (фрагмента сети), на котором решают задачу один из агентов-коммивояжеров, также с предварительным исследованием структуры входных данных $TSP$ на этом кластере. Прецедентные знания позволяют накапливать базу шаблонов, т. е. выделять случаи структур данных, на которых целевые функции изменяются и к таким $TSP$ применимы одинаковые схемы решения. Поиск шаблонов можно осуществить с помощью технологий машинного обучения (например, искусственных нейронных сетей). На входе: комбинации элементов матрицы $C$. На выходе: оценки принадлежности $C$ к одному из классов комбинаторных функций $\varphi(t)$. Такой подход может привести к более широкому классу полиномиально разрешимых $TSP$. Для $mTSP$ на каждом кластере может быть свой алгоритм решения.

Для выделенных классов $TSP$ существуют приближенные полиномиальные алгоритмы. Представляют интерес связанные классы задач, допускающие полиномиально разрешимые алгоритмы. Это класс задач $TSP$, к которым применимы итерационные алгоритмы локального улучшения; алгоритмы реоптимизации: задачи, для которых эффективно применять конструктивные алгоритмы, метаэвристики и на каждом направлении возникают свои трудности как в возможности применения, так и в эффективности реализации. Кроме того, необходимо иметь критерии принадлежности $TSP$ к тому или иному классу.

## 2. Модели псевдобулевой условной оптимизации с дизъюнктивными ограничениями для задачи многих коммивояжеров

Задача $mTSP$ с общими интересами соответствует одна целевая функция, выражающая минимум общего расстояния, как и в задаче для одного коммивояжера. Ограничения линейные. Задача приводится к задаче псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями.

2.1. **Псевдобулевые модели задач многих коммивояжеров.** Рассмотрим задачу коммивояжера, формализованную в виде модели линейной псевдобулевой условной оптимизации с неотрицательными коэффициентами ($c_{ij} \geqslant 0$) целевой функции

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i,j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqslant n-1,\ i,j = \overline{2,n},\ i \neq j. \tag{6}$$

Здесь $u_i$ — произвольные действительные числа (нумерация вершин маршрута коммивояжера). Ограничения (6) препятствуют образованию подциклов.

Рассмотрим одну из постановок задачи $mTSP$.

Пусть дан граф $G(V,U)$, где $V$ — множество вершин $V = 0, 1, \ldots, n$, и $U$ — множество дуг (ребер) и $C = (c_{ij})$ — матрица весов (расстояний), связанная с каждой дугой $(i,j) \in U$. Пусть $m$ коммивояжеров расположены в вершине-депо $i = 0$. Многоагентный подход к решению задачи коммивояжера при расположении всех агентов в одной вершине-депо включает в себя нахождение всех маршрутов для $m$ коммивояжеров, таких, что они начинаются и заканчиваются в одной вершине. Все остальные вершины распределены по конкретным маршрутам. Количество вершин, посещаемых агентом, находится в пределах предопределенного интервала, и общая стоимость посещения всех вершин минимизируется.

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если агент проходит по дуге } (i,j), \\ 0, \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$u_i$ — количество вершин, посещенных от источника до вершины $i$ (т. е. номер посещения $i$-й вершины); $L$ — максимальное количество вершин, которые коммивояжер может посетить; $K$ — минимальное количество вершин, которые коммивояжер должен посетить, то есть $K \leqslant u_i \leqslant L$.

Формализация многоагентной задачи коммивояжера в этом случае имеет вид:

$$\min \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}, \tag{7}$$

$$\sum_{j=2} x_{1j} = m, \tag{8}$$

$$\sum_{j=2} x_{j1} = m, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = 1, j = 2, \ldots, n, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, i = 2, \ldots, n, \tag{11}$$

$$u_i + (L-2)x_{1i} - x_{i1} \leqslant L-1, i = 2, \ldots, n, \tag{12}$$

$$u_i + x_{1i} + (2-K)x_{i1} \geqslant 2, i = 2, \ldots, n, \tag{13}$$

$$x_{1i} + x_{i1} \leqslant 1, i = 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L-2)x_{ji} \leqslant L-1, 2 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{15}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in U. \tag{16}$$

Целевая функция (7) минимизирует общее пройденное расстояние в маршруте. Условия (8) и (9) гарантируют, что $m$ коммивояжеров начинают и заканчивают свой путь в одной вершине. Уравнения (10) и (11) являются ограничениями посещения вершин. Условия (12) и (13) накладывают ограничение на количество вершин, которые коммивояжер посетит (при $u_i = 1$, если $i$ — первая вершина в маршруте). Ограничение (14) не позволяет коммивояжеру посещать только одну вершину. Неравенство (15) гарантирует, что $u_j = u_i + 1$, тогда и только тогда, когда $x_{ij} = 1$. Таким образом, ограничения запрещают формирование каких-либо подмаршрутов между вершинами в $V \backslash \{1\}$ [33].

Многоагентный подход к решению задачи коммивояжера при расположении всех агентов в разных вершинах является обобщением рассматриваемой ранее задачи, при котором у каждого агента разные вершины-депо.

Пусть дан граф $G(V,U)$, где $V$ — множество вершин $V = 0, 1, \ldots, n$, и $U$ — множество дуг $U = \{(i,j) : i, j \in V, i \neq j\}$, $n$ — количество вершин. Множество всех вершин графа есть объединение $V = D \cup \widetilde{V}$, где $D$ — это множество стартовых позиций агентов — депо. В узле $i$ расположен коммивояжер $m_i$. И общее количество агентов — $m$.

Пусть $\widetilde{V} = \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ будет множеством клиентов, где $|D| = d$. $C$ — матрица стоимостей переходов из одной вершины в другую графа $G$, которая обладает свойствами: $c_{ij} = c_{ji}$ и $c_{ij} + c_{jk} \geqslant c_{ik}$ для каждого $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $x_{ij}$, $L$, $K$ определены, как и раньше. Тогда получим следующую формализацию многоагентной задачи коммивояжера:

$$\min \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}, \tag{17}$$

$$\sum_{j\in\widetilde{V}} x_{ij} = m_i, i \in D, \tag{18}$$

$$\sum_{i\in\widetilde{V}} x_{ij} = m_j, j \in D, \tag{19}$$

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = 1, j \in \widetilde{V}, \tag{20}$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1, i \in \widetilde{V}, \tag{21}$$

$$u_i + (L-2)\sum_{k\in D} x_{ki} - \sum_{k\in D} x_{ik} \leqslant L - 1, i \in \widetilde{V}, \tag{22}$$

$$u_i + \sum_{k\in D} x_{ki} + (2-K)\sum_{k\in D} x_{ik} \geqslant 2, i \in \widetilde{V}, \tag{23}$$

$$x_{ki} + x_{ik} \leqslant 1, k \in D, i \in \widetilde{V}, \tag{24}$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L-2)x_{ji} \leqslant L - 1, i \neq j; i, j \in \widetilde{V}, \tag{25}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j \in V. \tag{26}$$

Целевая функция (17) минимизирует общее пройденное расстояние маршруте. В данной формулировке для каждого $i \in D$ уравнения (18) и (19) гарантируют, что $m_i$ коммивояжер начинает путь в вершине $i$. Уравнения (20) и (21) являются ограничениями посещения вершин. Условия (22) и (23) накладывают ограничения на количество вершин, которые коммивояжер посетит, при $u_i = 1$, если $i$ — это первая вершина в маршруте. Ограничение (24) не позволяет коммивояжеру посещать только одну вершину. Ограничение (25) разбивает все подмаршруты между агентами [33].

В постановке задачи $mTSP$ (7)–(16) и (17)–(26) агенты-коммивояжеры не конкурируют друг с другом, а обеспечивают минимальный по стоимости (расстоянию) маршрут. При помощи анной модели возможно добавлять ограничения в виде *ДНФ* [2]. Добавление ограничений и учет априорных знаний в виде *ДНФ*, позволяет уточнить псевдобулевую постановку задач (7)–(16) и (17)–(26).

2.2. **Задачи псевдобулевой условной оптимизации.** В предыдущем разделе приведены модели задач $TSP$ и $mTSP$ в виде задач псевдобулевой условной оптимизации с линейной целевой функцией и линейными ограничениями относительно переменных $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

Приведем необходимые сведения, которые используются для представления задач $TSP$ и $mTSP$ с *ДНФ* ограничениями. Далее обозначим через $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, вектор который зависит от одного индекса. С таким же успехом можно использовать $\widetilde{x} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn})$, $x_{ij} \in \{0, 1\}$ с двухиндексным обозначением булевых переменных, которые присутствуют в $mTSP$.

Оптимизационные задачи с булевыми переменными имеют широкие приложения [1, 8, 23]. В связи с задачами маршрутизации на графах особый интерес представляют задачи псевдобулевой оптимизации. Достаточно подробно такие задачи исследовались в работах [27, 31], где разработаны методы решения в случае аналитически заданных моделей псевдобулевой оптимизации. В работе [22] псевдобулевые функции рассматриваются, как отображения из семейства подмножеств конечного исходного множества действительных чисел. Оптимизация на графах в классе псевдобулевых функций представлена в работах [26, 29]. Базовые результаты содержатся в [10, 11].

Введем обозначения:

$B^n = \{0, 1\}^n$ — единичный $n$-мерный куб, $P_2(n) = \{F : B^n \to \{0, 1\}\}$ — класс функций алгебры логики (*ФАЛ*), зависящих от $n$ переменных, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$.

Функция вида $f : B^n \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, называется псевдобулевой [1, 8, 22]. Для обозначения класса таких функций будем использовать обозначение $PS_2(n)$, а для обозначения класса линейных псевдобулевых функций — $LPS_2(n)$.

Задача вида

$$extr f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega \subseteq B^n, \quad f \in PS_2(n) \tag{27}$$

называется задачей псевдобулевой оптимизации.

Введем характеристическую функцию множества ограничений $\Omega$:

$$F_\Omega(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in \Omega; \\ 0, & \tilde{x} \in B^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Задачу (27) можно представить в эквивалентной форме:

$$extr\ f(\tilde{x}), \quad F_\Omega(\tilde{x}) = 1, \quad f \in PS_2(n), \quad F_\Omega \in P_2(n), \quad \tilde{x} \in B^n, \tag{28}$$

где $P_2(n)$ — класс функций алгебры логики от $n$ переменных.

Пусть $K_j$ — элементарная конъюнкция, $D_{F_\Omega} = \bigvee\limits_{j=1}^{m} K_j$ — любая дизъюнктивная нормальная форма функции $F_\Omega(\tilde{x})$; тогда задача, эквивалентная задачам (27) и (28), имеет вид:

$$extr\ f(\tilde{x}), \quad D_{F_\Omega}(\tilde{x}) = 1, \quad \tilde{x} \in B^n. \tag{29}$$

Задача (29) называется задачей псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением, и форму ее представления называют канонической.

**Определение 2.** Переменная $x_i$ называется существенной для $f \in PS_2(n)$, если найдется такой набор значений переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. В противном случае переменная называется фиктивной.

**Определение 3.** Псевдобулевые функции $f_1$ и $f_2$ называются равными, если функция $f_2$ может быть получена из $f_1$ путем введения или удаления фиктивных переменных.

Каноническая форма псевдобулевой функции $f$ аналогична совершенной дизъюнктивной нормальной форме в $P_2(n)$ и имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\tilde{\sigma} \in B^n} a_{\tilde{\sigma}} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_i^{\sigma_i} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \tag{30}$$

где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{\tilde{\sigma}} \in \mathbb{R}, \quad x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$

Каждая псевдобулевая функция может быть представлена в полиномиальной форме над полем действительных чисел

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k_f} c_j x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_{r_j}} + c_0, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k_f. \tag{31}$$

Задача псевдобулевой оптимизации в форме слабых неравенств имеет вид:

$$\begin{gathered} extr\ f(x_1, \ldots, x_n), \quad g_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ (x_1, \ldots, x_n) \in B^n, \quad f, g_j \in PS_2(n). \end{gathered} \tag{32}$$

**Определение 4.** Две формы представления оптимизационной задачи называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

**Теорема 1** ([9])**.** *Для любой задачи псевдобулевой оптимизации в форме* (*27*) *существует эквивалентная форма представления*

$$extr\ f(\tilde{x}), \quad h(\tilde{x}) \leqslant 0, \quad \tilde{x} \in B^n \tag{33}$$

*с единственным ограничением в виде нестрогого неравенства, где* $f, h \in PS_2(n)$ *есть некоторые полиномы.*

Полиномиальное представление для функции $f \in PS_2(n)$ существует всегда.

**Теорема 2** ([9])**.** *Любая задача оптимизации псевдобулевой функции с ограничениями, определяющими непустое множество допустимых решений* $\Omega$ *задачи* (*27*), *может быть представлена в эквивалентной форме с дизъюнктивным условием* (*29*).

Доказательство теоремы следует из существования эквивалентной формы задачи с характеристическими функциями на наборе допустимых значений $F_{\Omega}(\tilde{x})$ и полноты представления функций алгебры логики в виде дизъюнктивных нормальных форм.

**Определение 5.** Представление задач класса $Z$ в форме $F$ называется полным в $Z$, если любая задача этого класса может быть представлена в форме $F$.

**Следствие 1.** *Представление задач условной оптимизации псевдобулевой функции в форме с дизъюнктивным условием является полным.*

Область допустимых решений задачи (29) и эквивалентной ей задачи (27) может быть представлена в виде: $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{m} N_{K_j}$, где $N_{K_j}$— интервал ранга $r_j$, соответствующий элементарной конъюнкции $K_j = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j r_j}}$, что приводит к еще одной эквивалентной форме задачи (27):

$$\underset{1 \leqslant j \leqslant m}{extr} \ \underset{\tilde{x} \in N_{K_j}}{extr} \ f(\tilde{x}). \tag{34}$$

Действительно, учитывая, что область допустимых решений есть объединение интервалов $N_{K_j}$, $j = \overline{1, m}$, легко убедиться, что экстремальное решение задачи можно определить путем его выбора из предварительно найденных допустимых решений, являющихся экстремальными в интервалах $N_{K_j}$.

Рассмотрим основной алгоритм решения задачи псевдобулевой оптимизации. Пусть дана задача псевдобулевой оптимизации с линейной целевой функцией

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \bigvee_{j=1}^{m} K_j(\tilde{x}) = 1, \quad \tilde{x} \in B^n, \tag{35}$$

где $K_j(\tilde{x}) = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}$, $j = \overline{1, m}$. Приведем к эквивалентной форме:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \qquad \tilde{x} \in \bigcup_{j=1}^{m} N_{K_j}, \tag{36}$$

где $N_{K_j}$ — интервал в $B^n$, соответствующий конъюнкции $K_j$; интервал $N_{K_j}$ определяется набором значений $\{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$ (направление) и множеством $\{\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_{r_j}}\}$ (код интервала).

Решение (36) сводится к решению задачи

$$\max_{1 \le j \le m} \max_{\tilde{x} \in N_{K_j}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{37}$$

которое, в свою очередь, требует решения $m$ задач вида:

$$\max_{\tilde{x}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \tilde{x}: \ (x_{j_1} = \sigma_{j_1}) \& \ldots \& (x_{j_{r_j}} = \sigma_{j_{r_j}}). \tag{38}$$

Задача (38) решается следующим образом: допустимыми являются только те булевы наборы $\tilde{x}$, у которых зафиксированы координаты $x_{j_1}{=}\sigma_{j_1}, \ldots,\ x_{j_{r_j}}{=}\sigma_{j_{r_j}}$, а остальные могут иметь любые значения из множества $\{0, 1\}$. Свободные переменные (вне множества номеров $\{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$) можно назначать единичными или нулевыми в зависимости от значения $c_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$ — коэффициентов целевой функции. Экстремальные решения $\tilde{x}^*$ задачи (38) будут определяться формулой [30]:

$$x_i^* = \begin{cases} \sigma_i, & i \in \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}, \\ \varphi(c_i), & i \notin \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}, \end{cases} \tag{39}$$

где

$$\varphi(c_i) = \begin{cases} 1, & c_i > 0, \\ 0, & c_i < 0, \\ \alpha, & c_i = 0, \end{cases}$$

$\alpha$ — любое значение из $\{0, 1\}$. В случае, когда все $c_i \neq 0$, задача (38) имеет единственное решение, а исходная задача (37) — не более $m$ решений.

На каждом интервале $N_{K_j}$ при вычислении $x_i^*$, согласно (39), просматривается $n$ значений, а интервалов всего $m$, поэтому сложность решения $O(mn)$.

**Теорема 3** ([9]). *Если задача условной оптимизации линейной псевдобулевой функции с ограничениями-неравенствами приводится к эквивалентной форме с дизъюнктивным ограничением за число шагов, ограниченное полиномом от размерности задачи, то она разрешима за полиномиальное время.*

Так как любую задачу псевдобулевой оптимизации можно представить в эквивалентной форме с *ДНФ* ограничением, то это справедливо и для задач с линейной целевой функцией. Следовательно, решение $mTSP$ можно осуществлять по схеме, представленной на рис. 1.

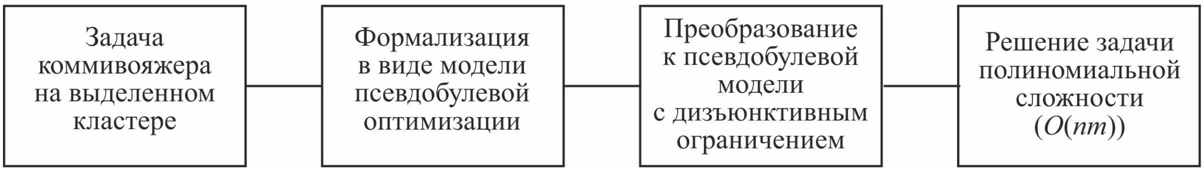


*Рис.* 1. Схема решения задачи

## 3. Псевдобулевая модель с дизъюнктивными ограничениями задачи многих коммивояжеров

Для того, чтобы упростить выкладки и применить результаты раздела 2, будем использовать обозначение двухиндексных величин через одноиндексные: $\tilde{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_N)=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) \in B^N$, $c=(c_1, c_2, \ldots, c_N)=(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn})$, где $N=n^2$. Ограничениям можно поставить в соответствие функции $F_j(\tilde{x}) \in P_2(N)$, $j=\overline{1,M}$, где $M$ — число ограничений. Можно в $\tilde{x}$ использовать и другую нумерацию элементов: $x_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$. Удельная перестановка $\pi$ элементов матрицы $C$ может привести к одной из полиномиально разрешимых задач раздела 1.

**Определение 6.** Вершина $\tilde{\alpha}$ куба $B^n$ называется верхним нулем монотонной функции $f(\tilde{x})$, если $f(\tilde{\alpha})=0$, и для всякой вершины $\tilde{\beta}$ из $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\beta})=1$ [19].

**Лемма 1.** *Если*

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ i,j=\overline{1,n},\ u_i-u_j+nx_{ij} \leqslant n-1,\quad i \neq j\right\} \Leftrightarrow \{F_j(\tilde{x})=0\}$$

*то $F_j$ — монотонные ФАЛ и задачу (4)–(6) можно записать в виде*

$$(c,\tilde{x}) \to \min,\ F_0(\tilde{x})=\bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x})=0, \tag{40}$$

*где $c=(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn})$, $(c,\tilde{x})$ — скалярное произведение, $F_0(\tilde{x})$ — монотонная ФАЛ.*

*Доказательство.* Покажем монотонность функций $F_j(\tilde{x})$. Пусть $\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta} \in B^N$ такие, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, т. е. $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij},\ \forall i,j=\overline{1,n}$. Тогда

$$S(\tilde{\alpha}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} - 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - 1,\ i,j=\overline{1,n},\ u_i - u_j + n\alpha_{ij} - (n-1),\ i,j=\overline{2,n} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} - 1,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} - 1,\ i,j=\overline{1,n},\ u_i - u_j + n\beta_{ij} - (n-1),\ i,j=\overline{2,n} \right\} = S(\tilde{\beta}).$$

Неравенства выполняются покомпонентно, в силу $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij},\ \forall i,j=\overline{1,n}$.

По условию леммы $(S(\tilde{\alpha}) \leqslant 0) \Leftrightarrow (F_j(\tilde{\alpha})=0)$, $(S(\tilde{\beta}) \leqslant 0) \Leftrightarrow (F_j(\tilde{\beta})=0)$. Учитывая, что $S(\tilde{\alpha}) \preccurlyeq S(\tilde{\beta})$, имеем $(F_j(\tilde{\alpha})=1) \Rightarrow (F_j(\tilde{\beta})=1)$, поэтому $F_j(\tilde{\alpha}) \leqslant F_j(\tilde{\beta})$. Следовательно, $F_j(\tilde{x})$ — монотонная *ФАЛ*.

Функция $F_0(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x})$ является монотонной. Это следует из того, что класс монотонных *ФАЛ* является замкнутым и содержит дизъюнкцию. Функция $F_0(\tilde{x})$ равна нулю тогда и только тогда, когда выполняются все ограничения (4)–(6), так как дизъюнкция $\bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x})$ равна нулю только при $F_j(\tilde{x})=0$ для всех $j=\overline{1,M}$. $\square$

Результаты полученные для одного коммивояжера остаются справедливыми и для $mTSP$. В выражении для $S(\tilde{\alpha})$ будут ограничения (8)–(15) или (18)–(25) в случае нескольких депо.

**Теорема 4.** *Задачи $mTSP$ представимы в виде задач псевдобулевой условной оптимизации с ДНФ ограничениями.*

Из теоремы 4 следует, что если область допустимых решений $\Omega = \left\{\tilde{x} \in B^N :\ F_0(\tilde{x}) = 0\right\} \neq \emptyset$, то решением задачи является верхний ноль функций $F_0(\tilde{x})$. Задача (40) сводится к задаче расшифровки монотонной *ФАЛ* или к поиску ее верхних нулей [9].

Псевдобулевая задача линейного программирования (40)

$$\min_{x\in\Omega}(c,\tilde{x}),\ \Omega = \left\{\tilde{x} \in B^N :\ F_0(\tilde{x}) = 0\right\} \tag{41}$$

с *ДНФ* ограничениями позволяет учитывать знания о решении задачи коммивояжера, которые представимы в *ДНФ* форме. Например, если необходимо включить прохождение дуг $x_{kl}$ и $x_{pm}$, тогда к ограничениям добавляется условие $(x_{kl}-1)\vee$ $\vee(x_{pm}-1)=0$. Если, наоборот, не включать, то $x_{kl} \vee x_{pm} = 0$ [3].

Полученный формализм позволяет учитывать знания о модели и решениях, а также использовать их в теоретических обоснованиях и конкретных алгоритмах решения.

Задача каждого коммивояжера на выделенном кластере является задачей скалярной псевдобулевой условной оптимизации, т. е. может быть представлена в канонической форме с дизъюнктивными ограничениями (35):

$$\min\left\{f_k(\tilde{x})=(c^k,\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}c_{ij}^k x_{ij},\ \bigvee_{j=1}^{m_k}x_{j_1}^{\sigma_{j_1}}\&\ldots\&x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}=1,\ k=\overline{1,m}\right\}. \qquad (42)$$

Каноническая модель является исчерпывающей в своем классе в силу полноты. Левая часть ограничения (42) является *ДНФ* характеристической функции множества $\Omega^k$-ограничений искомой задачи на $k$-ом кластере, в которой может быть учтена дополнительная информация о структуре кластера и искомого решения (запреты, предписания и др.).

В случае общих интересов модель будет однокритериальной:

$$\min f_0(\tilde{x})=\min\sum_{k=1}^{m}f_k(\tilde{x}),\ \bigvee_{j=1}^{M}x_{j_1}^{\sigma_{j_1}}\&\ldots\&x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}=1. \qquad (43)$$

Процессом выбора решения будем называть поиск такого набора значений $\alpha\in X^N,\ X\in\{0,1\}$ признаковых предикатов, чтобы (одновременно или по отдельности):

— обращался в единицу один или несколько целевых предикатов;

— достигала экстремального значения несколько (или одна в однокритериальной постановке) псевдобулевых функций $f_k, k=\overline{1,m}$.

Единственное ограничение канонической модели (43) в виде *ДНФ* характеристического множества ограничений задает И/ИЛИ граф, которому соответствует логическая система продукций. Существование логической системы продукций (*ЛСП*)

$$x_{j_1}^{\sigma_{j_1}}\&\ldots\&x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}\to g_j,$$

$$g_j\to g_0,\ j=\overline{1,M}$$

позволяет выводить целевой факт $g_0$ =«$\tilde{x}$ — допустимое решение». Граф И/ИЛИ ограничения канонической модели задачи $mTSP$ является трехярусным. Любой граф *ЛСП*, не имеющий циклов, может быть сведен к трехярусному и представлен в виде *ДНФ*. Откуда следует, что соответствующая база знаний (*БЗ*) системы построения допустимого решения $mTSP$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1) решения $mTSP$ должны удовлетворять ограничениям задачи, следовательно, *ЛСП* должна обеспечивать возможность вывода целевых предикатов, соответствующих этим ограничениям;

2) группа ограничений, которые должны выполняться одновременно, задаются вершиной типа «И», связывающей эти ограничения вместе.

Заметим, что *ДНФ* ограничение может быть получено с помощью обучения по прецедентной (эмпирической) информации [12, 24]. Для синтеза *ДНФ* по заданным *ЛСП* можно использовать $D$- и $DS$-алгоритмы [8], реализующие, соответственно, стратегии «сверху вниз» и «снизу вверх». То есть реализуется синтез областей допустимости решений в знаниеориентированных продукционных системах моделей псевдобулевой условной оптимизации, соответствующих $mTSP$ (в этих же работах можно найти оценки сложности алгоритмов).

Вопрос полноты знаний об ограничениях в *БЗ* задачи коммивояжера является важным и рассматривается самостоятельно в теории знаниеориентированных систем.

## 4. Выбор решения задачи многих коммивояжеров в условиях неопределенности

При большой размерности задачи (сложность сети) условной псевдобулевой оптимизации с *ДНФ* ограничениями прямо применять полиномиальные алгоритмы, предназначенные для такого класса задач может быть нерационально. Требуется упрощение задачи (применение приближенных, эвристических методов) с помощью отсечения излишних вариантов перебора на основе имеющихся знаний. Прежде всего снижение сложности (размерности) достигается с помощью кластеризации сети. При этом количество агентов и депо, их расположение, количество кластеров может быть задано, искомо или быть произвольным.

Следуя идеологии сведения исходной задачи к нескольким задачам меньшей размерности, рассмотрим следующий подход к решению задачи маршрутизации для многих агентов. Пусть $m = 2$ (два агента).

---

**Алгоритм решения задачи для двух коммивояжеров ($AmTSP$)**

---

Вход: сеть $S = (G, C)$, $G = (U, V)$, $n = |V|$, $U$ — множество дуг,
$C$ — матрица расстояний (весов); информация о структуре сети.
Выход: маршруты коммивояжеров, длина общего маршрута.

---

1: Провести кластеризацию сети: $S = S_1 \cup S_2$, $G = G_1 \cup G_2$, $V = V_1 \cup V_2$ $(V_1 \cap V_2 = \varnothing)$
2: На сетях $S_1, S_2$ сформировать задачи коммивояжеров,
выписать все основные и дополнительные ограничения.

3: Трансформировать задачи коммивояжеров к задачам псевдобулевой оптимизации с ДНФ ограничениями.

4: Найти решения задач с ДНФ ограничениями.

5: Провести локальные преобразования, обмениваясь вершинами множеств $V_1, V_2$. Добавление вершины приводит к изменению ДНФ ограничений (добавление интервалов конъюнкций). Алгоритм остается полиномиальным.

6: Выбрать лучший вариант (или провести заданное число итераций).

7: Получить решение исходной задачи.

---

Каждый шаг алгоритма $AmTSP$ конкретизируется в зависимости от структуры (сложности) исходной сети и всей имеющейся информации (знаний).

Уточним шаги 4, 5 алгоритма $AmTSP$ с точки зрения преодоления неопределенности (для $m = 2$, аналогичная ситуация для $m > 2$). Задачи псевдобулевой оптимизации для каждого кластера имеют вид:

$$\begin{gathered} \min f_1(\tilde{x}) = \min(c^1, \tilde{x}),\ F_1(\tilde{x}) = 0, \\ \min f_2(\tilde{x}) = \min(c^2, \tilde{x}),\ F_2(\tilde{x}) = 0, \\ c^k = (c^k_{11}, c^k_{12}, \ldots, c^k_{nn}) \equiv (c^k_1, c^k_2, \ldots, c^k_j, \ldots, c^k_N), \\ \tilde{x} \in B^N,\ N = n^2,\ F_k(\tilde{x}) \in P_2(N),\ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{44}$$

В том случае, когда кластеры определены единственным образом, а целевые функции и ограничения заданы точно, решение полученных задач на кластерах сводится к расшифровке монотонной функции алгебры логики (или к поиску ее верхних нулей). В более общем случае модели $mTSP$ получены как неполное представление исходной задачи $mTSP$, когда в результате кластеризации (или при другом сведении к задаче меньшей размерности) при исследовании линейной модели не удалось получить полную информацию об ее ограничениях. Но, по доказанному выше, $F_j(\tilde{x})$ являются монотонными функциями алгебры логики.

Будем предполагать, что существуют множества

$$\begin{gathered} M^{F_k}_{k0} = \left\{\tilde{x} \in B^N : F_k(\tilde{x}) = 0\right\};\ M^{F_k}_{k1} = \left\{\tilde{x} \in B^N : F_k(\tilde{x}) = 1\right\}; \\ M^{f_k}_{k0} = \left\{\tilde{x} \in B^N : f_k(\tilde{x}) = 0\right\};\ M^{f_k}_{k1} = \left\{\tilde{x} \in B^N : f_k(\tilde{x}) = 1\right\},\ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{45}$$

С позиции первого коммивояжера ($k = 1$) $F_k(\tilde{x})$ — функция, определяющая допустимые решения, задана частично с помощью указания множеств наборов $M^{f_k}_{k0}, M^{f_k}_{k1}$ (прецедентов или фактов), т. е. заданы некоторые частичные функции алгебры логики $f_k, k = 1, 2$.

Пусть $\Phi_k$ — множество монотонных функций алгебры логики из $P_2(n)$, принимающих значение «0» на множестве $M_{0k}^{f_k}$ и значение «1» на множестве $M_{1k}^{f_k}$, а $Z_k(\Phi_k)$ — множество всех верхних нулей всех функций из $\Phi_k$.

Непротиворечивым решением задач (44) называется такой набор $\tilde{z}_k^* \in Z_k(\Phi_k)$, что

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k z_j^* = \min_{z \in Z_k(\Phi_k)} \sum_{j=1}^{N} c_j^k z_j.$$

Не теряя общности, можно считать, что булевы переменные упорядочены так, что $c_1^k > \ldots > c_N^k$. Это легко выполнить для любой исходной задачи.

**Теорема 5.** *Функция $f_k \in P_2(N)$, не являющаяся константой, монотонна тогда и только тогда, когда для любых пар вершин $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^N$ таких, что $f_k(\tilde{x}) = 1$, $f_k(\tilde{y}) = 0$, найдется переменная с номером $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такая, что $x_i = 1$, $y_i = 0$.*

*Доказательство.* Необходимость. Докажем необходимость методом от противного. Пусть $f_k \in P_2(N)$ не константа, монотонна и не существует переменной с номером $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такой, что $x_i = 1,\ y_i = 0$, т. е. $x_i \leqslant y_i,\ i = \overline{1, N}$. Тогда $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$, но $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$, что противоречит условию монотонности функции $f_k$.

Достаточность. Рассмотрим три множества пар наборов $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^N$:

$$W_{k1} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) :\ f_k(\tilde{x}) = 1,\ f_k(\tilde{y}) = 0\};$$

$$W_{k2} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) :\ f_k(\tilde{x}) = 0,\ f_k(\tilde{y}) = 1\};$$

$$W_{k3} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) :\ f_k(\tilde{x}) = f_k(\tilde{y})\}.$$

Пусть $\tilde{x} \in W_{k1}$. Тогда $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$ и по условию теоремы $\exists i :\ x_i > y_i$. Следовательно, либо $\tilde{x} \succ \tilde{y}$, либо наборы $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — несравнимы. Для всех сравнимых наборов из $W_{k1}$ имеем: $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ и $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$.

Аналогично проверяется выполнение условия монотонности функции $f_k$ на множества $W_{k2}$.

Пусть $\tilde{x} \in W_{k3}$, тогда $f_k(\tilde{x}) = f_k(\tilde{y})$, в том числе всегда, когда $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$. Учитывая, что объединение $W_{k1} \cup W_{k2} \cup W_{k3}$ содержит любую пару вершин куба $B^N$, получаем, что $f_k$ — монотонная функция: если $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$, то $f_k(\tilde{x}) \leqslant f_k(\tilde{y})$. $\square$

На основании теоремы 5 можно сделать следующий вывод. Если во множествах $M_{k0}^{f_k}$ и $M_{k1}^{f_k}$ частичной функции алгебры логики $f_k$ найдутся такие наборы $\tilde{\alpha} \in M_{k0}^{f_k}$ и $\tilde{\beta} \in M_{k1}^{f_k}$, что не существует переменной с номером $i \in \{1, \ldots, N\}$, для которой $\alpha_i < \beta_i$, то $f_k$ не может быть доопределена монотонной функцией.

Пусть частичная функция $f_k$ доопределена монотонной функцией $\varphi_k$. Необходимо, чтобы $M_{k1}^{f_k} \subseteq M_{k1}^{\varphi_k},\ M_{k0}^{f_k} \subseteq M_{k0}^{\varphi_k}$, следовательно, любой набор из $M_{k1}^{f_k}$ должен покрываться некоторым интервалом $N_j^k \subseteq M_{k1}^{\varphi_k}$, но $N_j^k$ не должен содержать точек из $M_{k0}^{f_k}$, каждый набор из $M_{k0}^{f_k}$ должен покрываться некоторым интервалом $N_L^k \subseteq M_{k0}^{\varphi_k}$, но $N_L^k$ не должен содержать точек из $M_{k1}^{f_k}$. Класс монотонных функций $\varphi_k$, доопределяющих $f_k$, обозначим $\Phi_k \subset M_k$. Функции класса $\Phi_k$ определяют множество:

$$\overline{\Phi}_k = \{g_k \in P_2(N):\ g_k(\tilde{x}) = \overline{\varphi}_k(\tilde{x}), \varphi_k \in \Phi_k\}.$$

Любая функция может быть представлена сокращенной *ДНФ* так, что может быть указан набор максимальных вне $M_{k1}^{f_k}$ интервалов, покрывающих все точки из множества $M_{k0}^{f_k}$.

Рассмотрим любой максимальный интервал $N_L^k \subseteq M_{k1}^{g_1}$ произвольной функции $g_k \in \overline{\Phi}_k$ и соответствующую ему элементарную конъюнкцию $L = \overline{x}_{i_1} \& \ldots \& \overline{x}_{i_r}$. Вхождение переменных в простую импликанту только с инверсиями доказывается с учетом монотонности функции $\overline{g}_k(\tilde{x})$.

Любой набор $\tilde{\alpha} \in N_L^k$ является допустимым решением и в этом наборе $\alpha_{i_1} = 0,\ \ldots,\ \alpha_{i_r} = 0$. Среди всех наборов $\tilde{\alpha} \in N_L^k$ наибольшее значение целевой функции будет достигаться на наборе, в котором $\alpha_j = 1$ для всех $j$ из множества $\{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$. Назовем такой набор экстремальным.

Если теперь для каждой простой импликанты всех функций из множества $\Phi_k$ выбрать экстремальный набор, то в полученном множестве будут содержаться все непротиворечивые решения задачи.

Различные доопределения функции $f_k$ функциями $\varphi_k \in \Phi_k$ отличаются значениями $\varphi_k(\tilde{x})$ на множестве $B^N \setminus \left\{M_{k0}^{f_k} \cup M_{k1}^{f_k}\right\}$, поэтому простые импликанты различных функций $g_k$ из $\overline{\Phi}_k$ могут отличаться рангом. Экстремальная постановка задачи требует из всех простых импликант всех функций $g_k \in \overline{\Phi}_k$ выделить кратчайшие. Для построения таких простых импликант с инверсиями, необходимыми для любых доопределений, можно использовать следующий

---

**Алгоритм построения простых импликант**

---

1: Для каждого набора $\tilde{\alpha} \in M_{k0}^{f_k}$ выписать конъюнктивную нормальную форму (КНФ) $K_k(\tilde{\alpha})$, каждая дизъюнкция которой состоит из переменных $\overline{x}_i$ (с инверсиями) таких, что $\alpha_i < \beta_i$ для одного из наборов $\tilde{\beta} \in M_{k1}^{f_k}$; КНФ $K_k(\tilde{\alpha})$ будет содержать $m_1^k = \left|M_{k1}^{f_k}\right|$ дизъюнкций — число наборов в множестве $M_{k1}^{f_k}$.

2: В полученных КНФ $K_k(\tilde{\alpha}_1), \ldots, K_k(\tilde{\alpha}_{m_0^k})$, где $m_0^k = |M_{k0}^{f_k}|$ (число наборов в $M_{k0}^{f_k}$) раскрыть скобки и выполнить операции поглощения, получая ДНФ $D_1, \ldots, D_{m_0^k}$.

3: Записать ДНФ $D_1 \vee \ldots \vee D_{m_0}$ и выполнить все возможные операции поглощения. Будет получена ДНФ $D(\overline{\Phi}_k)$.

Множества $M_{k0}^{f_k}$ и $M_{k1}^{f_k}$, являющиеся частью исходной информации в задаче (44) и содержащие $(m_0^k + m_1^k)$ двоичных наборов, можно рассматривать как стандартную обучающую информацию задачи $Z_k$ распознавания: в обучающей таблице $T_{m_0^k m_1^k}^k = M_{k0}^{f_k} \cup M_{k1}^{f_k}$, наборы $\tilde{x} \in M_{k0}^{f_k}$ относятся к классу $K_1^k$ допустимых решений задачи (44), а $\tilde{x} \in M_{k1}^{f_k}$ — к классу $K_2^k$ недопустимых решений.

Обозначим через $A_z^k = A_z^k(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x})$ алгоритм распознавания класса произвольного набора $\tilde{x} \in B^N \backslash T_{m_0^k m_1^k}$; пусть $A_Z^{k*}$ — корректный алгоритм:

$$A_z^{k*}(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x}) = \begin{cases} 1, \ \tilde{x} \in K_2^k = B^n \backslash \Omega_k, \\ 0, \ \tilde{x} \in K_1^k = \Omega_k, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

Очевидно, что если информация в $T_{m_0^k m_1^k}$ достоверна, и алгоритм $A_z^{k*}$ относит экстремальный набор $\tilde{x}^*$, являющийся непротиворечивым решением задачи (44), к классу $K_1^k = \Omega_k$, то $\tilde{x}^*$ является решением задачи

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i^k x_i / \tilde{x} \in \Omega_k.$$

Пусть алгоритм $A_z^k$ — экстремальный в некотором классе алгоритмов распознавания или построен с применением корректирующих (алгебраических) методов, т. е. является в некотором смысле наилучшим для решения задачи $Z_k(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x})$.

Подход к решению $mTSP$, как задачи линейного псевдобулевого программирования с частично заданными ограничениями с применением алгоритмов распознавания образов, состоит в следующем:

1) при помощи алгоритма находится множество экстремальных наборов $\aleph^k = \{\tilde{x}^*\}$ для задачи (44-45);

2) алгоритм $A_z^k$ определяет принадлежность экстремальных наборов из $\aleph^k$ к классу $K_1$; $\aleph_A^k \subseteq \aleph^k$; $\aleph_A^k = \left\{\tilde{x}^* \in \aleph^k : A(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x}^*) = 0\right\}$;

3) если $\aleph_A^k \neq 0$, то входящий в него экстремальный набор, которому соответствует наибольшее значение целевой функции, объявляется решением задачи;

4) если $\aleph_A^k = 0$, то к множеству $M_{k1}^{f_k}$ добавляются наборы $\aleph^k$, т. е. $M_{k1}^{f_k} := M_{k1}^{f_k} \cup \aleph^k$, и повторяется п. 1), внутри которого обеспечивается проверка монотонности, обеспечивающая линейность модели.

**Замечание 1.** Добавление к множеству $M_{k1}^{f_k}$ множества экстремальных наборов $\aleph^k$ равносильно переопределению для некоторых функций алгебры логики верхних нулей единицами.

Линейность задачи $mTSP$ позволила эффективно «сузить» область поиска решения, что обеспечивается указанным алгоритмом (см. [14] по сужающим запросам).

## Заключение

Представлена методика решения задач маршрутизации многих агентов-коммивояжеров на сетях большой размерности и сложной структуры. Предлагается использовать для подзадач меньшей размерности методику сведения к полиномиально разрешимым задачам и применять полиномиальные алгоритмы с учетом специфики класса таких задач. Приведена формализация задач $mTSP$ к задачам псевдобулевой условной оптимизации и получено представление в виде задачи псевдобулевой оптимизации с *ДНФ* ограничениями. В такой постановке решение задач $mTSP$ на сложных сетевых структурах можно отнести к задачам интеллектуального планирования, в которых сочетаются стратегии поиска и логического вывода на знаниях. Выбранный подход позволил моделировать неопределенность задачи. Действительно, действия по кластеризации сети с учетом ее структуры не является окончательным для каждого агента, так как присутствует неопределенность в определении границ кластера. Процедура нахождения маршрутов итерационная, для оптимальности $mTSP$ необходимо уточнять вершины сети, принадлежащие конкретному агенту. Представленные теоретические результаты и алгоритмы могут быть использованы для прикладных задач $mTSP$ и в разработках по интеллектуальному управлению в многоагентных системах совместного построения маршрутов многими агентами-коммивояжерами.

## Список литературы

1. Антамошкин, А. А. Поисковые алгоритмы псевдобулевой оптимизации / А. А. Антамошкин, И. С. Масич // Системы управления, связи и безопасности. — 2016. — № 1. — С. 103–145.

   ANTAMOSHKIN, A. A. and MASICH, I. S. (2016) Pseudobulous optimization search algorithms. *Management, communications and security systems.* № 1. p. 103–145.

2. Германчук, М. С. Использование дополнительной информации в задачах дискретной оптимизации типа многих коммивояжеров / М. С. Германчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 4 (33). — С. 68–82.

   GERMANCHUK, M. S. (2016) Information exploration for discrete optimization problems such as multiple traveling salesman problems. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* № 4 (33). p. 68–82.

3. Германчук, М. С. Задачи практической маршрутизации / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем. — 2017. — С. 116–120.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. and LUKIANENKO, V. A. (2017) Practical routing tasks. *Analysis, modelling, governance, socio-economic development.* p. 116–120.

4. Германчук, М. С. Знаниеориентированные модели маршрутизации многих коммивояжеров / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Интеллектуализация обработки информации: Тезисы докладов 13-й Международной конференции, г. Москва. — 2020. — С. 352-353.

   GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. and LUKIANENKO, V. A. (2020) Knowledgeoriented routing models for many traveling salesmen. *Intelligent Data Processing: Theory and Applications: Book of abstract of the 13th International Conference.* p. 352-353.

5. Демиденко, В. М. Специальный случай задачи о бродячем торговце / В. М. Демиденко // Весцi акад. навук Беларус. ССР. — 1976. — № 5. — С. 28–32.

   DEMIDENKO, V. M. (1976) Special case of a traveling salesman. *News of the Academy of Sciences of the Belarusian SSR.* № 5. p. 28–32.

6. Демиденко, В. М. Условия полиномиальной разрешимости задачи о коммивояжере и верхние оценки ее оптимума / В. М. Демиденко, В. С. Гордон, Ж.-М. Прот // Докл. НАН Беларуси. — 2003. — № 1 (47). — С. 36–40.

   DEMIDENKO, V. M., GORDON, V. S. and PROT, Zh.-M. (2003) Terms of polynomial decision of the travelling salesman problem and top estimates of its optimum. *Reports of the NAS of Belarus.* № 1 (47). p. 36–40.

7. Донец, Г. А. Метод моделирования структуры исходных данных и подклассы разрешимых задач комбинаторной оптимизации / Г. А. Донец, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 1. — С. 3–10.

   DONETS, G. A. and SERGIENKO, I. V. (2014) Method of modelling input structure and sub-class of solvable combinatorial optimization problems. *Cybernetics and system analysis.* № 1. p. 3–10.

8. Донской, В. И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации / В. И. Донской, А. И. Башта. — Симферополь: Таврия, 1992. — 166 с.

   DONSKOY, V. I. and BASHTA, A. I. (1974) *Pattern recognition theory.* Moscow: Nauka.

9. Донской, В. И. Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением / В. И. Донской // Журнал выч. математики и матем. физики. — 1994. — № 4. — С. 461–472.

   DONSKOY, V. I. (1994) Pseudobule optimization problems with disjunctive constraint. *Journal subtract. Mathematics and Mathematics. Physics.* № 4. p. 461–472.

10. Журавлев, Ю. И. О локальных алгоритмах над дизъюнктивными нормальными формами / Ю. И. Журавлев // Докл. АН СССР. — 1979. — 245:2. — С. 289–292.

    ZHURAVLEV, YU. I. (1979) On local algorithms over disjunctive normal forms. *Reports of the USSR Academy of Sciences.* 245:2. p. 289–292.

11. Журавлев, Ю. И. Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи / Ю. И. Журавлев // Докл. АН СССР. — 1985. — 285:4. — С. 795–799.

    ZHURAVLEV, YU. I. (1985) Implementation of boolean functions with small number of zeros disjoint normal forms and related problems. *Reports of the USSR Academy of Sciences.* 285:4. p. 795–799.

12. Козлова, М. Г. Знаниеориентированные модели принятия решений / М. Г. Козлова // Ученые записки СГУ. — 1998. — № 7. — С. 76–83.

    KOZLOVA, M. G. (1998) Knowledge-based decision-making models. *SSU Science Notes.* № 7. p. 76–83.

13. Козлова, М. Г. Многокритериальные модели принятия решений с линейными псевдобулевыми функциями и дизъюнктивным ограничением / М. Г. Козлова // Искусственный интеллект. — 2000. — № 2. — С. 67–73.

    KOZLOVA, M. G. (2000) Multi-criteria decision-making models with linear pseudobular functions and disjunctive constraint. *Artificial Intelligence.* № 2. p. 67–73.

14. Козлова, М. Г. Синтез сужающих запросов / М. Г. Козлова // Динамические системы. — 2000. — № 16. — С. 208–211.

    KOZLOVA, M. G. (2000) Synthesis of narrowing queries. *Dynamic Systems.* № 2. p. 208–211.

15. Масич, И. С. Поисковые алгоритмы условной оптимизации: монография / И. С. Масич. — Красноярск: СибГАУ, 2013. — 160 с.

MASICH, I. S. (2013) *Conditional optimization search algorithms: monograph.* Krasnoyarsk: SibSAU.

16. Меламед, И. И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // Автомат. и телемех. — 1989. — № 9. — С. 3–33.

    MELAMED, I. I., SERGEEV, S. I. and SIGAL, I. H. (1989) Traveling salesman's problem. Theory issues. *Automatics and telemechanics.* № 9. p. 3–33.

17. Меламед, И. И. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // Автомат. и телемех. — 1989. — № 10. — С. 3–29.

    MELAMED, I. I., SERGEEV, S. I. and SIGAL, I. H. (1989) Traveling salesman problem. Precise algorithms. *Automatics and telemechanics.* № 10. p. 3–29.

18. Меламед, И. И. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // Автомат. и телемех. — 1989. — № 11. — С. 3–26.

    MELAMED, I. I., SERGEEV, S. I. and SIGAL, I. H. (1989) Traveling salesman problem. Approximate algorithms. *Automatics and telemechanics.* № 11. p. 3–26.

19. Сапоженко, А. А. О поиске максимального верхнего нуля монотонных функций на ранжированных множествах / А. А. Сапоженко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — № 12 (31). — С. 1871–1884.

    SAPOZHENKO, A. A. (1991) On finding the maximum upper zero of monotone functions on ranked sets. *J. calculates. math. and math. physical.* № 12 (31). p. 1871–1884.

20. Супруненко, Д. А. К задаче о бродячем торговце / Д. А. Супруненко // Кибернетика и системный анализ. — 1975. — № 5. — С. 121–128.

    SUPRUNENKO, D. A. (1975) To the problem of the traveling salesman. *Cybernetics and systems analysis.* № 5. p. 121–128.

21. Тимофеева, Н. К. Метод структурно-алфавитного поиска и подклассы разрешимых задач из класса задачи коммивояжера / Н. К. Тимофеева // УСиМ. — 2008. — № 4. — С. 20–36.

    TIMOFEEVA, N. K. (2008) Method of structurally alphabetic search and subclass of solvable problems from the class of the salesman problem. *USiM.* № 4. p. 20–36.

22. BOROS, E. and HAMMER, P. (2002) Pseudo-Boolean optimization. *Discret. Appl. Math.* (123). p. 155–225.

23. CRAMA, Y. and HAMMER, P. (2011) *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. New York: Cambridge Universuty Press.
24. DONSKOY, V. (2018) A synthesis of pseudo-Boolean empirical models by precedential information. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* 2 (11). p. 96—107.
25. DONSKOY, V. and PEREKHOD, I. (1997) Multiple criteria models with the linear pseudoboolean functions and disjunctive restrictions. *Multiple Criteria Decision Making*. p. 13–21.
26. EBENEGGER, C., HAMMER, P. and WERRA, D. (1984) Pseudo-Boolean functions and stability of graphs. *North-holland Mathematics Studies*. (95). p. 83–97.
27. FOLDES, S. and HAMMER, P. (2000) Disjunctive and conjunctive normal forms of pseudo-Boolean functions. *Discret. Appl. Math.* (107). p. 1–26.
28. GILMORE, P. and GOMORY, R. (1964) Sequencing a one state-variable machine: a solvable case of the traveling salesman problem. *Operations Research*. № 5 (12). p. 655–679.
29. HAMMER, P. L. (1977) Pseudo-Boolean remarks on balanced graphs. *Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben Band 3: Optimierung bei graphentheoretischen und ganzzahligen Problemen*. p. 69–78.
30. HAMMER, P. and RUDEANU, S. (1966) *Pseudo-Boolean methods for bivalent programming*. Warsaw: Institute of Management Sciences and of the Econometric Institute.
31. HAMMER, P. and RUDEANU, S. (1968) *Boolean methods in operations research and related areas*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
32. KALMANSON, K. (1975) Edgeconvex circuits and the traveling salesman problem. *Canadian Journal of Mathematics*. № 5 (27). p. 1000—1010.
33. KARA I. and BEKTAS T. (2006) Integer linear programming formulations of multiple salesman problems and its variations. *Eur. J. Oper. Res.* (174). p. 1449–1458.
34. SUPNICK, F. (1957) Extreme hamiltonian lines. *Annals of Mathematics*. № 1 (66). p. 179—201.

**УДК: 519.833**

**MSC2010: A91.A10** **DOI: https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-4-56-82**

# ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ИГРА $N$ ЛИЦ КАК АНАЛОГ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

**© В. И. Жуковский, С. П. Самсонов, В. Э. Романова**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления, д. ф-м. н., профессор
Ленинские горы, МГУ, ВМК, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

**© Л. В. Жуковская**

Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ)РАН
ведущий научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Нахимовский пр, 47, Москва, 117418, Российская Федерация
e-mail: *zhukovskaylv@mail.ru*

**© Ю. С. Мухина**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра высшей алгебры, студент
Ленинские горы, МГУ, Главное здание, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
e-mail: *js.mukhina@mail.ru*

LINEAR QUADRATIC GAME OF N PERSONS AS THE ANALOG OF ANTAGONISTIC GAME.

**Zhukovskiy V. I., Samsonov S. P., Zhukovskaya L. V., Mukhina Yu. S., Romanova V. E.**

**Abstract.** Publications on mathematical game theory with many (not less than 2) players one can conditionally distribute in four directions: noncooperative, hierarchical, cooperative and coalition games. The two last in its turn are divided in the games with side and nonside payments and respectively in the games with transferable and nontransferable payoffs. If the first ones are being actively investigated (St. Petersburg State Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg Economics and Mathematics Institute, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre RAS), then the games with nontransferable payoffs are not covered. Here we suggest to base on conception of objections and counterobjections. The initial investigations were published in two monographies of E. I. Vilkas, the Lithuanian mathematician (the pupil of N. N. Vorobjev, the professor of St. Petersburg University). For the differential games this conception was first applied by E. M. Waisbord in 1974, then it was continued by the first author of the present article combined with E. M. Waisbord in the book «Introduction in the theory of differential games of n-persons and

its application» M.: Sovetskoye Radio, 1980, and in monography of Zhukovskiy «Equilibrium of objections and counterobjections», M.: KRASAND, 2010. However before formulating tasks of coalition games, to which this article is devoted, we return to noncoalition variant of many persons game. Namely we consider noncooperation game in normal form, defined by ordered triple:

$$G_N = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle.$$

Here $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N \geq 2\}$ — set of ordinal numbers of players, each of them (see later) chooses its strategy $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (where by the symbol $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, as usual, is denoted $k$-dimensional real Euclidean space, its elements are ordered sets of $k$-dimensional numbers, as well Euclidean norm $\|\cdot\|$ is used); as a result situation $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i\in\mathbb{N}} n_i}$ form in the game. Payoff functions $f_i(x)$ are defined on set $X$ of situations $x$ for each players:

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j' D_{1j} x_j + 2d_{11}' x_1,$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j' D_{2j} x_j + 2d_{22}' x_2,$$

.................................

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j' D_{Nj} x_j + 2d_{NN}' x_N.$$

In the opinion of luminaries of game theory to equilibrium as acceptable solution of differential game has to be inherent the property of stability: the deviation from it of individual player cannot increase the payoff of deviated player. The solution suggested in 1949 (at that time by the 21 years old postgraduate student of Prinston University John Forbs Nash (jun.) and later named Nash equilibrium — NE) meets entirely this requirement. The NE gained certainly «the reigning position» in economics, sociology, military sciences. In 1994 J. F. Nash was awarded Nobel Prize in economics (in a common effort with John Harsanyi and R. Selten) «for fundamental analysis of equilibria in noncooperative game theory». Actually Nash developed the foundation of scientific method that played the great role in the development of world economy. If we open any scientific journal in economics, operation research, system analysis or game theory we certainly find publications concerned NE. However «And in the sun there are the spots», situations sets of Nash equilibrium must be internally and externally unstable. Thus, in the simplest noncoalition game of 2 persons in the normal form

$$\langle \{1, 2\},\ \{X_i = [-1, 1]\}_{i=1,2},\ \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

set os Nash equilibrium situations will be

$$X^e = \{x^e = (x_1^e,\ x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\},\ f_i(x^e) = \alpha^2\ (i \in 1, 2).$$

For elements of this set (the segment of bisectrix of the first and the third quarter of coordinate angle), firstly, for $x^{(1)} = (0,0) \in X^{(e)}$ and $x^{(2)} = (1,1) \in X^e$ we have $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1,2)$ and therefore the set $X^e$ is internally unstable, secondly, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ $(i = 1,2)$ and therefore the set $X^e$ is externally unstable. The external just as the internal instability of set of Nash equilibrium is negative for its practical use. In the first case there exists situation which dominates NE (for all players), in the second case this situation is Nash equilibrium. Pareto maximality of Nash equilibrium situation would allow to avoid consequences of external and internal instability. However such coincidence is an exotic phenomenon. Thus to avoid trouble connected with external and internal instability then we add the requirement of Pareto maximality to the notion of equilibrium of objections and counterobjections offered below. However we first of all reduce generally accepted solution concepts — NE and BE for the game $G_N$. It is proved in the article that in mathematical model both NE and BE are absent but there exist equilibria of objections and conterobjections as well as sanctions and countersanctions and simultaneously Pareto maximality.

***Keywords***: *noncooperative games, Nash and Berge equilibrium, sanctions and countersanctions, games and countergames, Pareto maximum.*

## Введение

Публикации по математической теории игр со многими (не менее двух) игроками можно условно распределить по четырем направлениям: бескоалиционные, иерархические, кооперативные и коалиционные игры. Новому подходу в первом из них посвящена настоящая статья. Последние два направления, в свою очередь, разделяются на игры с побочными и без побочных платежей (соответственно на игры с трансферабельными и нетрансферабельными выигрышами). Если первые из них активно исследуются в Санкт-Петербургской научной школе по математической теории игр (Санкт-Петербургский госуниверситет факультет прикладной математики и процессов управления, Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН), то игры с нетрансферабельными выигрышами не охвачены. Мы предлагаем в перечисленных трех направлениях базироваться на концепции угроз и контругроз. Начало ее положено в публикациях литовского математика Э. Й. Вилкаса в его двух монографиях [1,2] восьмидесятых годов прошлого века (ученика петербургского профессора Н. Н. Воробьева). Для дифференциальных игр впервые, повидимому, применил Э. М. Вайсборд в 1974 г., затем подхватил первый автор настоящей статьи в [4] совместной с Э. М. Вайсбордом книге «Введение в теорию дифференциальных игр нескольких лиц и её приложение», М.: Советское радио, 1980 г. и затем продолжено В. И. Жуковским [5] в монографии «Равновесие угроз и контругроз», М.: КРАСАНД 2010. Однако, прежде чем формулировать задачи бескоалиционных игр, которым посвящена данная статья, вернемся к бескоалиционному варианту игры многих лиц. Именно, рассмотрим бескоалиционную игру в нормальной форме, определенную упорядоченной тройкой

$$G_N = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N \geq 2\}$ — множество порядковых номеров игроков, каждый из которых выбирает свою *стратегию* $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (где символом $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, как обычно, обозначается $k$-мерное действительное евклидово пространство, элементами которого являются наборы из $k$ действительных чисел, используется также евклидова норма $\|\cdot\|$ и скалярное произведение); в результате в игре $G_N$ образуется ситуация $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^{\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i}$. На множестве $X$ ситуаций $x$ определена функция выигрыша $f_i(x)$ каждого $i$-го игрока:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j' D_{ij} x_j + 2d_{ii}' x_i \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

значения которых называются *выигрышем* $i$-го игрока (который $i$-й игрок стремится увеличить). Не ограничивая общности, далее предполагаем, что $n_j \times n_j$ — матрицы $D_{ij}$ постоянны и симметричны, штрих сверху означает операцию транспонирования, например: $x_j'$ — $n_j$-вектор-строка, $d_{ii}$ — постоянный $n_i$-вектор.

В экономических моделях квадратичная форма из (2) иногда описывает инвестиции, внесённые $j$-ым игроком в $i$-е производство. Тогда $i$-й игрок стремится увеличить (2), при $D_{ii} > 0$ (квадратичная форма $x_i' D_{ii} x_i$ определенно положительна), все же ограничивая ее беспредельный рост (с помощью линейного слагаемого — скалярного произведения $2d_{ii}' x_i$ из (2)), при этом ориентируясь на противодействие остальных игроков, конечно, для $D_{ij} < 0$ $(j \neq i)$. Как раз это обстоятельство и объясняет название настоящей статьи. Далее построение равновесия санкций и контрсанкций осуществлено как раз при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j \in \mathbb{N}; j \neq i)$.

По мнению корифеев математической теории игр равновесию, как приемлемому решению игры, и должно быть присуще свойство *устойчивости*: отклонение от него отдельного игрока не должно увеличить выигрыш отклонившегося. Решение, предложенной [6,7] в 1949 г. (тогда двадцатиоднолетним аспирантом Принстонского университета Джоном Форбсом Нэшем (мл) и названное впоследствии равновесием по Нэшу (РН)) полностью отвечает этому требованию; РН уверенно завоевало «царствующее положение» в экономике, социологии, военных науках. Джону Нэшу в 1994 г., ровно через 45 лет, была присуждена Нобелевская премия по экономике (совместно с Джоном Харшаньи и Рейхардом Зельтеном) «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр». Фактически Нэш создал основы научного метода, сыгравшего огромную и неоценимую роль в развитии мировой экономики. Открывая теперь почти любой научный журнал по экономике, исследованию операций, системному анализу или теории игр, мы наверняка столкнемся с публикациями, касающимися равновесия по Нэшу. Однако «And in the sun there are the spots»: множество ситуаций равновесия по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым. Так в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1, 2\},\ \{X_i = [-1, 1]\}_{i=1,2},\ \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество равновесных ситуаций по Нэшу будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e,\ x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\},\ f_i(x^e) = \alpha^2\ (i \in 1, 2).$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-ой и 3-ей четверти координатного угла), во-первых, для $x^{(1)} = (0, 0) \in X^e$ и $x^{(2)} = (1, 1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1, 2)$, и поэтому множество $X^e$ *внутренне неустойчиво*, во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ $(i = 1, 2)$ и поэтому множество $X^e$ *внешне неустойчиво.* Внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу — негатив при его практическом использовании. В первом случае существует ситуация, которая доминирует РН (по всем игрокам), а во втором такая ситуация даже не является равновесной по Нэшу. Избежать последствия внешней и внутренней неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Однако, такое совпадение явление скорее экзотическое (нам известны лишь три случая [8; 9, с. 92-93; 10], где имеется такое совпадение). Итак, чтобы избежать неприятностей, связанных с внешней и внутренней неустойчивостью, далее добавляем требование максимальности по Парето к определению равновесия санкций и контрсанкций, формализованному ниже. Однако, прежде всего, приведем общепринятые в бескоалиционных играх понятия решений — равновесие по Нэшу (РН) и равновесие по Бержу (РБ) для игры $G_N$.

**Определение 1.** [6, 7]. Пару $(x^e, f^e = f_1(x^e), \ldots, f_N(x^e)) = X \times \mathbb{R}^N$ называют равновесием по Нэшу (РН) в игре $G_N$, если

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x^e \| x_i) = f_i(x^e)\ (i \in \mathbb{N}).$$

**Определение 2.** [11, p. 27]. Пару $(x^B, f^B = f_1(x^B), \ldots, f_N(x^B)) \in X \times \mathbb{R}^N$ называют равновесием по Бержу (РБ) в $G_N$, если

$$\max_{x_i \in X_{-i}} f_i(x \| x_i^B) = f_i(x^B) \ (i \in \mathbb{N}).$$

Далее

$$-i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\},$$

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in X_{-i} = \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq i}} X_k.$$

Если определение 1 отвечает «эгоистическим стремлениям каждого игрока» «обогатиться» только самому, то определение 2 соответствует Золотому правилу нравственности: поступай с другими так, как бы хотел, чтобы поступали с тобой. Этот чисто альтруистический подход получил широкое распространение в христианстве, исламе, иудаизме, магометанстве и буддизме.

Перейдем к равновесию санкций и контрсанкций. Впервые в русскоязычной литературе похожее появилось в учебнике [17] (см. также [18]). Дело в том, что, как уже упоминалось выше, исследование позитивных и негативных свойств господствующих в экономике концепции равновесия по Нэшу (как решения бескоалиционной игры) посвящен непрекращающийся поток публикаций. В основном они связаны с описанной выше неединственностью и, как следствие, отсутствием эквивалентности, взаимозаменяемости, внешней неустойчивости, а также неустойчивостью к одновременному отклонению от таких решений двух и более игроков. Игра «дилемма заключенных» выявила также свойство «улучшаемости» — внешней неустойчивости. Подробному анализу таких «отрицательных» свойств для дифференциальных игр посвящена книга В. И. Жуковского и Т. Н. Тынянского [12]. Вывод, к которому приводят авторы книги: либо использовать те ситуации равновесия по Нэшу, которые одновременно свободны от некоторых из указанных недостатков, либо следует вводить новые понятия решения бескоалиционной игры, которые, обладая достоинствами ситуации равновесия по Нэшу, позволяли бы избавиться от отдельных ее недостатков. Одной из таких возможностей и является концепция санкций и контрсанкций, которой и посвящена настоящая статья. Используемые в ней понятия основываются на известной в классической теории игр концепции угроз и контругроз. Теоретическим основанием этой концепции стали работы Э. Й. Вилкаса [1, 2], упоминалась в [13, 14]. Термин «активное равновесие» предложил Э. Р. Смольяков [15] в 1983 г., понятие равновесия угроз и контругроз в дифференциальных играх было использовано, повидимому, впервые в 1974 г. Э. М. Вайсбордом в [3], а затем подхвачено первым автором настоящей статьи и упомянутой выше книге 1980 г., но применялась и применяется эта концепция в дифференциальных играх, по нашему мнению, недостаточно активно.

В заключение несколько слов об используемой терминологии. «Угроза — обещание привнести какое-либо зло, неприятности» [16, с. 317]. Угрозы — необязательно реальные действия, они могут заключатся в сообщении о такого рода действиях (запугивание!). Иногда для смягчения «агрессивного характера» слова «угроза» используют в некоторых публикациях (как синоним) «возражения», «санкция». Сообщение о действии игрока «обнуляющего» угрозу называют «контругрозой» (контрвозражением, контрсанкцией). Концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, появляется уже в начальных публикациях по матричной теории игр [14], но ограничиваются они, как правило, либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми, но только двух лиц [19, 20, 21, 22, 23, 24]. Игры с $N > 2$ участников почти не затрагивались, что и явилось (не в последнюю очередь!) толчком к написанию этой работы.

Перейдем к некоторым новым понятиям, нечасто встречающимся в математической теории игр.

«Санкция (от лат. sanctionis): мера, применяемая государством к правонарушителям и мера, принимаемая против стороны, нарушившей соглашение, договор» [16, с. 1148]. Экономические санкции включают экономические и торговые санкции по отношению к другому участнику с целью принудить последнего к изменению политического курса. Санкции обычно представляют собой ограничение или полное прекращение торговых и финансовых операций.

Угроза — запугивание, обещание причинить кому-либо вред, зло, неприятности (Википедия). «Коалиция (от лат. coalitus) — объединение, соглашение, союз (государств, индивидуумов, партий) для достижения общих целей» [16, с. 435]. Члены коалиции могут на «коалиционных совещаниях» координировать свои действия, стратегии, но не могут, в силу нетрансферабельности выигрышей, перераспределять выигрыши между собой. Сами коалиции (с географической точки зрения!) могут быть местными, региональными, могут создаваться для решения одной или нескольких масштабных долгосрочных проблем. Примерами служат коалиции за спасение лесов, озера Байкал, национальные координационные советы НКО. Коалиции обычно обладают наибольшей силой, если они органично вырастают из общих интересов (например, Национальная коалиция российских организаций инвалидов «За образование для всех» или коалиция «Регионы»). Опыт показывает, что навязанные извне коалиции редко выживают. Примером могут служить коалиция по противодействию коррупции, создававшихся в рамках проекта «Партнерство в противодействии коррупции» в Самарской, Томской, Иркутской областях. Формируют коалиции по разным причинам. Некоторые из причин являются по сути общими, а некоторые конкретно связаны с защитой общественных интересов.

Общие причины предоставляют возможность:

– делится информацией и ресурсами;
– предоставлять обучение и техническое содействие;
– реагировать на местный кризис;
– координировать планы и их реализацию;
– избегать дублирования или заполнять пробелы в предоставляемых услугах.

Причины, связанные с защитой общественных интересов, позволяют:

– привлекать внимание общества к определенным вопросам и просвещать целевые группы;
– усиливать политическое влияние;
– обеспечивать последовательность коммуникаций и расширять освещение прессой гражданских, избирательных, юридических и просветительских инициатив в местном сообществе;
– поддерживать определенные политические решения и кандидатуры;
– достигать политической победы, которые иначе были бы невозможны.

## 1. Вспомагательные сведения

Напомним, что для симметричной постоянной $n \times n$-матрицы $D > 0$ $(<)$ означает, что квадратичная форма $x^{'}Dx$ определена положительно (отрицательно): при $\forall x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ квадратичная форма $x_i^{'}Dx_i$ принимает только положительные значения и обращается в ноль тогда и только тогда, когда все $x_i = 0_{n_i}$ (нулевому $n_i$-вектору), поэтому справедлива эквиваленция $D > 0 \Leftrightarrow -D < 0$ ($-D$ означает, что все элементы матрицы $D$ умножаются на $-1$).

Рассмотрим некоторые свойства корней характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$$

и их оценки из [25, 26, 27]. В следующих свойствах 1-5, не оговаривая особо, считаем $n \times n$-матрицу $D$ вещественной и симметричной (т.е $D = D^{'}$), $E_n$ — единичная $n \times n$-матрица.

Далее используем $n \times n$-матрицу $D = (d_{ij})$

**Свойство 1.** Если вещественная, симметричная $n \times n$-матрица $D > 0$, то
a) все корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ положительны;
b) для $\Lambda$-наибольшего и $\lambda$-наименьшего из них $(\Lambda \geq \lambda > 0)$ имеет место цепочка неравенств

$$0 < \lambda x^{'} x \leq x^{'} D x \leq \Lambda x^{'} x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ и } x \neq 0_n \tag{3}$$

($0_n$— нулевой $n$-вектор).

**Свойство 2.** При $D < 0$ все корни $\Delta(\lambda) = 0$ отрицательны и для наибольшего $-\lambda$ и наименьшего $-\Lambda$ из них $(-\Lambda \leq -\lambda < 0)$ выполняется цепочка неравенств

$$-\Lambda x^{'} x \leq x^{'} D x \leq -\lambda x^{'} x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0_n. \tag{4}$$

Свойство 2 сразу следует из свойства 1, ибо для положительно определенной $D > 0 \ \Leftrightarrow \ -D < 0$, где $-D$ означает умножение всех элементов $n \times n$-матрицы $D$ на $-1$. Из (3) и (4) сразу получаем, что наибольший корень $\Lambda > 0$ уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ (при $D > 0$) сразу дает наименьший $-\Lambda$, а наименьший $\lambda$ становится наибольшим $-\lambda$ для уравнения $\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$ и обратно.

**Свойство 3.** (теорема А. Гирша и И. Бендиксона [28]). Если $D = D^{'} > 0$, то для наибольшего корня $\Delta(\lambda) = 0$ будет

$$\Lambda \leq nM, \tag{5}$$

гду $M$ максимум модулей элементов симметричной вещественной $n \times n$-матрицы $D$.

**Свойство 4.** (теорема Г. Фробениуса [29]). Если для постоянной симметричной $n \times n$-матрицы $D = (d_{ij})$ и $D > 0$, то наибольший корень $\Lambda$ уравнения $\Lambda(\lambda) = 0$ удовлетворяет условию

$$\Lambda \leq R, \tag{6}$$

где $R = \max\limits_{i=1,\ldots,n} R_i$, $R_i = \sum\limits_{j=1}^{n} |d_{ij}|$.

**Свойство 5.** (теорема В. Паркера [30]). В условиях свойства 4

$$\Lambda \leq \frac{1}{2} S, \tag{7}$$

где $S$ есть сумма элементов $i$-ой строки и $j$-го столбца $D$, а $S$ является наибольшей из этих сумм.

**Замечание 1.** В книге [27] приведены и ряд других оценок величины характеристических корней уравнения $\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$.

Перейдем к двум мажорантным утверждениям, играющим главенствующую роль далее при построении явного вида равновесия санкций и контрсанкций игры $G_N$. Они будут связаны с знакоопределенностью квадратных форм в функциях выигрыша (2). Демонстрацию этих свойств для наглядности проведем для функции выигрыша $f_1(x)$ первого игрока.

$$f_1(x) = x_1' D_{11} x_1 + 2d_{11}' x_1 + x_2' D_{12} x_2 + \ldots + x_N' D_{1N} x_N. \tag{8}$$

Напомним обозначение $-1 = 2, 3, \ldots, N = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Так как все $n_j \times n_j$-матрицы симметричны и вещественны, то (8) можно представить в виде

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_{-1}) = x_1' D_{11} x_1 + 2d_{11}' x_1 + \varphi_1(x_{-1}), \tag{9}$$

причём $\varphi_1(x_{-1}) = \sum\limits_{j=2}^{N} x_j' D_{1j} x_j$.

**Утверждение 1.** *Каковы бы ни были стратегии* $\overline{x_1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ *первого и стратегии остальных* $x_{-1}^* = (x_2^*, \ldots, x_N^*) \in X_{-1} = \prod\limits_{j=2}^{N} X_j \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{j=2}^{N} n_j}$, *если* $D_{11} > 0$, *то существует постоянная* $\alpha_{11}^*(\overline{x_1}, x_{-1}^*) > 0$ *такая, что при* $\forall \alpha > \alpha_{11}^*(\overline{x_1}, x_{-1}^*)$ *для стратегии* $x_1^T = \alpha e_{n_1}$ *будет*

$$f_1(x_1^T, x_{-1}^*) > f_1(\overline{x_1}, x_2^*, \ldots, x_N^*), \tag{10}$$

*здесь* $e_{n_1}$ — $n_1$*-вектор-столбец, все компоненты которого равны единице.*

*Доказательство.* Положив в (8) и (9) вектора $x_1^T = \alpha e_{n_1}$, $x_{-1}^* = (x_2^*, \ldots, x_N^*)$ и, в связи с тем, что все $n_1$-компоненты вектора $e_{n_1}$ равны единице, получаем

$$\varphi(x_{-1}) = \sum_{j=2}^{N} x_j' D_{1j} x_j,$$

$$f_1(x_1^T, x_{-1}^*) = \alpha^2 e_{n1}' D_{11} e_{n1} + 2\alpha(d_{11}' e_{n1}) + \varphi(x_{-1}^*).$$

Далее, во-первых, согласно (3),

$$\lambda_{11} x_1' x_1 \le x_1' D_{11} x_1 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_1},$$

где $\lambda_{11} > 0$ — наименьший из корней уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$; во-вторых, для постоянного $n_1$-вектора-строки $d_{11}' = (d_{11}^{(1)}, \ldots, d_{11}^{(n_1)})$ будет $d_{11}' e_{n_1} = \sum\limits_{j=1}^{n_1} d_{11}^{(j)}$ и $e_{n_1}' e_{n_1} = n_1$, поэтому, с учетом вида $f_1(x)$ из (3) будет

$$f_1(x_1^T, x_{-1}^*) - f_1(\overline{x_1}, x_{-1}^*) \ge \alpha^2 \lambda_{11} n_1 + 2\alpha \sum_{j=1}^{n_1} d_{11}^{(j)} - \overline{x_1}' D_{11} \overline{x_1} - 2d_{11}' \overline{x_1} =$$

$$= \lambda_{11}n_1[\alpha^2 + 2\alpha\frac{1}{\lambda_{11}n_1}\sum_{j=1}^{n_1} d_{11}^{(j)} - \frac{\overline{x_1}' D_{11}\overline{x_1}}{\lambda_{11}n_1} - \frac{2d_{11}'\overline{x_1}}{\lambda_{11}n_1}] = \tag{11}$$

$$= \lambda_{11}n_1(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2),$$

Здесь уже $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — вещественные корни уравнения

$$\alpha^2 + 2\alpha b + c = 0, \quad b = \frac{1}{\lambda_{11}n_1}\sum_{j=1}^{n_i} d_{11}^{(j)}, \quad c = -\frac{\overline{x_1}' D_{11}\overline{x_1}}{\lambda_{11}n_1} - \frac{2d_{11}'\overline{x_1}}{\lambda_{11}n_1}.$$

Поэтому при наличии 2-х вещественных корней $\alpha_1$ и $\alpha_2$ выбираем в качестве $\alpha_1^*(\overline{x_1}, x_{-1}^*)$ наибольший из $\alpha_1$ и $\alpha_2$, если корни комплексные, то за $\alpha^*(\overline{x_1}, x_1^*)$ можно брать любое $\alpha > 0$.

Окончательно, согласно (11), приходим к справедливости утверждения 1 при

$$\forall\alpha > \alpha^*(\overline{x_1}, x_i^*) = \begin{cases} \max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \text{ при } b^2 - 4ac \geq 0, \\ \forall\alpha > 0, \text{ при } b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

$\square$

Аналогично для случая $D_{12} < 0$ получаем

**Утверждение 2.** *Какими бы ни были стратегия $\overline{x_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ второго и стратегии остальных $x_{-2}^* = (x_1^*, x_3^*, \ldots, x_N^*) \in X_{-2} = \prod_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ j\neq 2}} X_j \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{\sum_{j=3}^{N} n_j}$, если $D_{12} < 0$, то существует постоянная $\alpha_{12}^*(\overline{x_2}, x_{-2}^*) > 0$ такая, что при $\forall\alpha > \alpha_{12}^*(\overline{x_2}, x_{-2}^*)$ для стратегии $x_2^C = \alpha e_{n_2}$ будет*

$$f_2(x_1^*, x_2^C, x_3^*, \ldots, x_N^*) < f_2(x_1^*, \overline{x_2}, x_3^*, \ldots, x_N^*), \tag{12}$$

*где, аналогично $e_{n_1}$, $e_{n_2}$ — $n_2$-вектор-столбец, все компоненты которого равны единице.*

Заметим, наконец, что, во-первых, именно санкции и соответствующие контрсанкции будут реализованны в $G_N$ с помощью строгих неравенств аналогичных (11) и (12), во-вторых с помощью утверждений 1 и 2 далее будет доказано, что в игре $G_N$ из (1) и (2) отсутствует равновесие по Нэшу (при $D_{11} > 0$), а условие $D_{12} < 0$ приводит к тому, что для $f_1(x)$ не выполнено условие индивидуальной рациональности, а именно, не существует $f_1^g$, для которого при $\forall x \in X$ будет

$$f_1(x) \geq \max_{x_1\in X_1}\min_{x_{-1}\in X_{-1}} f_1(x_1, x_{-1}) = \min_{x_{-1}\in X_{-1}} f_1(x_1^g, x_{-1}) = f_1^g.$$

## 2. Максимальность по Парето в игре $G_N$

Поставим игре $G_N$ в соответствие $N$-критериальную задачу

$$G_v = \left\langle X,\ \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle,$$

в которой множество $X$ альтернатив $x = (x_1, \ldots, x_N)$ совпадает с множеством $X$ ситуации $x$ игры $G_N$, а $N$ критериев $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ определены в (2). *На содержательном уровне* цель ЛПР (лица, принимающего решение) в задаче $G_v$ — выбор такой альтернативы $x^P \in X$, при которой все $N$ критериев принимали бы одновременно возможно *большие* значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето, предложенного в 1909 г. итальянским экономистом, социологом и, кстати, богатым наследником Вильфредо Парето.

**Определение 3.** Альтернатива $x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P) \in X$ называется *максимальной по Парето в задаче* $G_v$, если для $\forall x \in X$ несовместна система из $N$ неравенств

$$f_i(x) \geq f_i(x^P) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых хотя бы одно строгое; при этом вектор $f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P) = (f_1(x^P), \ldots, f_N(x^P))$ называется *максимумом по Парето в задаче* $G_v$.

Отметим здесь два обстоятельства, сразу следующих из определения 3.

**Свойство 6.** Справедлива импликация: если при $\widetilde{x} \in X$ будет $f_i(\tilde{x}) > f_i(x^P)$, то $\exists j \in \mathbb{N}$ $(j \neq i):$ $f_j(\tilde{x}) < f_j(x^P)$.

**Свойство 7.** Если при каких-либо положительных постоянных $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ имеет место

$$\max_{x\in X} \{f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_N f_N(x)\} = Idem\left\{x \to x^P\right\}, \tag{13}$$

то альтернатива $x^P$ максимальна по Парето в задаче $G_v$. Напомним, что $Idem\left\{x \to x^P\right\}$ означает, что в выражении в фигурных скобках $x$ заменено на $x^P$.

Перейдем к другому понятию решения бескоалиционной игры $G_N$ — равновесию угроз и контругроз, где, напомним, используем $N$-вектор $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^N$. Оно (понятие) выглядит более громоздко, чем определение равновесного решения по Нэшу и по Бержу из определений 1 и 2.

Именно, пусть $x^P \in X$ максимальная по Парето ситуация в задаче $G_v$. Будем считать, что у первого игрока имеется угроза на ситуацию $x^P$, если у него существует такая стратегия $x_1^T \in X_1$, что

$$f_1(x_1^T, x_2^P, \ldots, x_N^P) > f_1(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{14}$$

Наличие угроз не означает ее обязательное применение, а лишь «animus denuntiandi»[1]. Применение санкций выгодно первому игроку, ибо при этом, согласно (14), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации $x^P$. В ответ на угрозу первого игрока $x_1^T$, у второго имеется «неполная» контругроза, если у него существует стратегия $x_2^C \in X_2$, при которой

$$f_1(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P) < f_1(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{15}$$

И у второго имеется «полная» контругроза (или просто контругроза), если существует у него такая стратегия $x_2^C \in X_2$, что одновременно с неравенством (15) выполняется

$$f_2(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P) > f_2(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{16}$$

Аналогично определяем контругрозу всех остальных игроков от 3-го до $N$-го в ответ на угрозу первого.

При наличии указанной неполной контругрозы второй игрок за счет выбора своей стратегии $x_2^C$ приводит, согласно (15), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации $x^P$ (но может и уменьшится!). Все происходит как по девизу Наполеона I «Order, contre-order, disorder»[2]. Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы первым игроком. В дополнение к этому, «полная» контругроза побуждает второго к применению $x_2^C$ , ибо в полученной в результате угроз и контругроз ситуации $(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P)$ выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации $(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P)$, сложившейся при реализации максимальной по Парето ситуации.

В результате становится ясным следующий факт: если в ответ на любую угрозу какого-либо игрока хотя бы у одного из оставшихся имеется контругроза, то угрозу применять не имеет смысла!

**Определение 4.** Пару $(x^P, f^P = f^P(x^P)) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем равновесием угроз и контругроз в игре $G_N$, если

a) ситуация $x^P \in X$ максимальна по Парето в $N$-критериальной задаче $G_\upsilon$,

b) в игре $G_N$ в ответ на любую угрозу любого игрока, по крайней мере, у одного из оставшихся имеется контругроза.

Здесь, снова напомним, что $N$-вектор $f = (f_1, \ldots, f_N)$, и поэтому определение 4 рекомендует всем $N$ игрокам следовать своим стратегиям из ситуации

[1]Намерение пригрозить (лат.)

[2]Распоряжение – контрраспоряжение – беспорядок (фр.)

$x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P)$, ибо, во-первых, максимальная по Парето ситуация $x^P$ внешне и внутренне устойчива.

Выполнение *условий индивидуальной рациональности (УИР)* для концепции угроз и контругроз проведем на примере игры 2-х лиц $\Gamma_2 = \left\langle \{1,2\}\,,\ \{X_i\}_{i=1,2}\,,\ \{f_i(x_1,x_2)\}_{i=1,2} \right\rangle$.

Пусть для первого игрока существуют максимин $f_1^g$ и максиминная стратегия $x_1^g$, т.е. $f_1^g = \max\limits_{x_1}\min\limits_{x_2} f_1(x_1,x_2) = \min\limits_{x_2} f_1(x_1^g,x_2)$. Возможны два случая: $f_1(x^P) \geq f_1^g$ и $f_1(x^P) < f_1^g$. В первом случае УИР выполнено, во втором $f_1(x^P) < f_1^g = \min\limits_{x_2} f_1(x_1^g,x_2) \leq f_1(x_1^g,x_2^P)$ и поэтому, если $x_1^g$ является угрозой, тогда, согласно определению 4, существует неполная контругроза второго игрока $x_2^C \in X_2$ такая, что

$$f_1(x_1^g,x_2^C) < f_1(x^P) \Rightarrow f_1(x^P) > \min_{x_2} f_1(x_1^g,x_2) = f_1^g$$

(противоречие с $f_1(x^P) < f_1^g$).

Наконец, седловая точка $(x_1^0,x_2^0) \in X_1 \times X_2$ является равновесием угроз и контругроз в игре $\Gamma_2 = \langle \{1,2\}\,,\ \{X_1,X_2\}\,,\ \{f_1(x) = -f_2(x) = f(x)\}\rangle$. Заметим, что седловая точка $(x_1^0,x_2^0) \in X_1 \times X_2$ игры $\Gamma_2$ определяется цепочкой соотношений

$$\max_{x_1} f(x_1,x_2^0) = f(x_1^0,x_2^0) = \min_{x_2} f(x_1,x_2^0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_1,x_2^0) \leq f(x_1^0,x_2^0) \leq f(x_1,x_2^0) \quad \forall x_i \in X_i\ (i=1,2).$$

Отсюда получаем 2 следствия: во-первых, любая ситуация $(x_1,x_2) \in X$ является максимальной по Парето в игре $\Gamma_2$ (ибо $f_1(x) = -f_2(x) = f(x)$), во-вторых, отсутствуют угрозы на $(x_1^0,x_2^0)$ у каждого из двух игроков.

Отметим также, что максимальность по Парето ситуации $x^P$ в $N$-критериальной задаче $G_v$ «обеспечивает» каждому $i$-му игроку $i \in \mathbb{N}$ наибольший (в «векторном смысле») выигрыш $f_i(x^P)$ $(i \in \mathbb{N})$.

## 3. Сведения из математического программирования

Для скалярной функции

$$F(x,\alpha) = f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_N f_N(x) \tag{17}$$

векторных аргументов $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^{\sum_{i\in\mathbb{N}} n_i}$, $\alpha = (\alpha_2,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ вводится [25, с. 109] предел

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t} = (y,z); \tag{18}$$

если предел (18) существует и равен скалярному произведению $y^{'}z$, то вектор $z$ называют градиентом $F(x,\alpha)$. Сводка явных видов градиентов в [25, с. 109]: в частности,

$$\mathrm{grad}_x x^{'}d = d,\ \mathrm{grad}_x x^{'}Dx = (D + D^{'})x,\ \mathrm{grad}_x d = 0_n,$$

кроме того гессиан

$$\frac{\partial^2 x^{'}Dx}{\partial x^2} = D + D^{'},$$

где использованы постоянные $n$-вектор $d$, $n \times n$-матрицы $D$; причем, если $D = D^{'}$, то $\mathrm{grad}_x x^{'}Dx = 2Dx$.

Наконец, с учетом явного вида $f_i(x)$ из (2), получаем (с учетом (17))

$$F(x,\alpha) = x_1^{'}D_1(\alpha)x_1 + 2d_{11}^{'}x_1 + x_2^{'}D_2(\alpha)x_2 + 2\alpha_2 d_{22}^{'}x_2 + \ldots$$

$$\ldots + x_N^{'}D_N(\alpha)x_N + 2\alpha_N d_{NN}^{'}x_N. \tag{19}$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x_i}\right|_{x=x^P} = 2D_i(\alpha)x_i + 2d_{ii} \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial x_i^2}\right|_{x=x^P} = 2D_i(\alpha) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{21}$$

Достаточным условием существования максимальной по Парето ситуации $x^P$ задачи $G_v$, в силу свойства 7, сводится к выполнению 2-х групп требований

a) градиенты

$$\left.\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x_i}\right|_{x=x^P} = 0_n \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{22}$$

b) гессианы

$$\left.\frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial x_i^2}\right|_{x=x^P} < 0 \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Перейдем к нахождению явного вида максимума по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ (определение 4). Здесь прежде всего отметим, что фигурирующие в (19)-(21) матрицы

$$D_i(\alpha) = D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \ldots + \alpha_N D_{Ni} \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{24}$$

Объединение (20) с (22) и (21) с (24) приводит к справедливости следующего утверждения.

**Лемма 1.** *Если существуют $N-1$ положительных чисел $\alpha_2, \ldots, \alpha_N$ таких, что квадратичные формы $x_i^{'}D_i(\alpha)x_i$ $(i \in \mathbb{N})$ определенно отрицательны, то максимум* *по Парето* $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ *будет*

$$x^P = (x_1^P, \dots, x_N^P),\ x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha)d_{ii} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$f^P = (f_1^P, \dots, f_N^P) = f(x^P),$$

$$f_1^P = -d_{11}^{'}D_1^{-1}(\alpha)D_{11}D_1^{-1}(\alpha)d_{11} + d_{22}^{'}D_2^{-1}(\alpha)D_{12}D_2^{-1}(\alpha)d_{22} + \dots \tag{25}$$

$$\dots + d_{NN}^{'}D_N^{-1}(\alpha)D_{1N}D_2^{-1}(\alpha)d_{NN},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_N^P = d_{11}^{'}D_1^{-1}(\alpha)D_{N1}D_1^{-1}(\alpha)d_{11} + \dots - d_{NN}^{'}D_N^{-1}(\alpha)D_{NN}D_N^{-1}(\alpha)d_{NN}.$$

*Доказательство.* Действительно, из (20) и (22) получаем

$$2D_i(\alpha)x_i^P + 2d_{ii} = 0_{n_i} \Rightarrow (D_i(\alpha) < 0 \Rightarrow \exists D_i^{-1}(\alpha)) \Rightarrow x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha)d_{ii},$$

т.е. $x^P = (x_1^P, \dots, x_N^P)$. Наконец, подставляя $x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha)d_{ii}$ и $x^P = (x_1^P, \dots, x_N^P)$ в (2), получаем явный вид $f^P = (f_1(x^P), \dots, f_N(x^P))$ из (25). □

Завершает нахождение максимума по Парето в $G_N$ *рекуррентный алгоритм построения вектора* $\alpha^* = (\alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)$ с положительными компонентами $\alpha_j^*$ $(j = 2, \dots, N)$, «обеспечившего» выполнение соотношения $D_i(\alpha^*) < 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Это имеет место, если компоненты $\alpha^* \in \mathbb{R}^N$ являются положительным решением системы

$$\begin{cases} D_1(\alpha^*) = D_{11} + \alpha_2^* D_{12} + \dots + \alpha_N^* D_{N1} < 0, \\ D_2(\alpha^*) = D_{12} + \alpha_2^* D_{22} + \dots + \alpha_N^* D_{N2} < 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_N(\alpha^*) = D_{1N} + \alpha_2^* D_{2N} + \dots + \alpha_N^* D_{NN} < 0. \end{cases} \tag{26}$$

С учетом (3) и (4), где при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $i, j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$ и числа $\Lambda_{ij} > 0$, $(i, j \in \mathbb{N})$, будет

$$x_i^{'}D_{ii}x_i \le \Lambda_{ii}x_i^{'}x_i \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$x_j^{'}D_{ij}x_j \le -\Lambda_{ij}x_j^{'}x_j \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{27}$$

Здесь $\Lambda_{ii} > 0$ наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$, а $-\Lambda_{ij} < 0$ наименьший корень $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Принимая во внимание $D_{ij} < 0 \Leftrightarrow (-1)D_{ij} > 0$, согласно (27), условия (26) выполняются, если

$$\begin{cases} \Lambda_{11} - \alpha_2^*\Lambda_{21} - \alpha_3^*\Lambda_{31} - \ldots - \alpha_N^*\Lambda_{N1} < 0, \\ -\Lambda_{12} + \alpha_2^*\Lambda_{22} - \alpha_3^*\Lambda_{32} - \ldots - \alpha_N^*\Lambda_{N2} < 0, \\ -\Lambda_{13} - \alpha_2^*\Lambda_{23} + \alpha_3^*\Lambda_{33} - \ldots - \alpha_N^*\Lambda_{N3} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\Lambda_{1N-1} - \alpha_2^*\Lambda_{2N-1} - \ldots + \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1N-1} - \alpha_N^*\Lambda_{NN-1} < 0, \\ -\Lambda_{1N} - \alpha_2^*\Lambda_{2N} - \ldots - \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1N} + \alpha_N^*\Lambda_{NN} < 0. \end{cases} \tag{28}$$

Далее будем предполагать, что $D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0$ $(i,j) \in \mathbb{N},\ j \neq i$ и среди игроков в игре $G_N$ существуют, по крайней мере, два: $i$-ый и $j$-ый из $\mathbb{N}$, таких, что $j \neq i$ и

$$\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} < \Lambda_{ij}\Lambda_{ji} \quad (i,j \in \mathbb{N},\ j \neq i), \tag{29}$$

где $\Lambda_{ii} > 0$ — *наибольший* из корней характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$ и $-\Lambda_{ij} < 0$ — *наименьший* из корней $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Перестановкой порядковых номеров в $\mathbb{N}$ можно добиться, чтобы соотношение (29) выполнялось для $i = 1$ и $j = 2$. Здесь следует иметь в виду, что порядковый номер игрока выполняет в математической модели роль имени (фамилии) участника конфликта. Более того, часто задается ЛПР (лицом, принимающим решение) произвольно.

Итак далее, фактически не уменьшая общности, будем полагать, дополнительно к $D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0$ $(i,j \in \mathbb{N}$ и $j \neq i)$, выполнение

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}, \tag{30}$$

где, напомним, $\Lambda_{11} > 0$ — наибольший корень $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$, и $-\Lambda_{12} < 0$ — наименьший корень $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Итак, перейдем к рекуррентному способу нахождения положительных $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$, являющимися решением $N$ строгих неравенств (28) при $D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0$ $(i,j \in \mathbb{N}$ и $j \neq i)$ и (30).

**Утверждение 3.** *Предположим, что для игры $G_N$ (см. (1) и (2))*

1) *постоянные, вещественные, симметричные матрицы*

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0 \quad (i,j \in \mathbb{N}\ j \neq i); \tag{31}$$

2) *имеет место строгие неравенства*

$$\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} < \Lambda_{ij}\Lambda_{ji}. \tag{32}$$

*Тогда система уравнений (28) имеет положительные решения* $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$*, определяемые рекуррентными соотношениями*

$$\forall \alpha_2^* \in \left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}, \frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{22}}\right),$$

$$\forall \alpha_3^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{13} + \alpha_2^* \Lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right),$$

$$\forall \alpha_4^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{14} + \alpha_2^* \Lambda_{24} + \alpha_3^* \Lambda_{34}}{\Lambda_{44}}\right), \tag{33}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall \alpha_{N-1}^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{1N-1} + \alpha_2^* \Lambda_{2N-1} + \alpha_3^* \Lambda_{3N-1} + \ldots + \alpha_{N-1}^* \Lambda_{N-2N-1}}{\Lambda_{N-1N-1}}\right),$$

$$\forall \alpha_N^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^* \Lambda_{2N} + \alpha_3^* \Lambda_{3N} + \ldots + \alpha_N^* \Lambda_{N-1N}}{\Lambda_{NN}}\right).$$

*Доказательство.* Рассмотрим первые два неравенства из (30). Так как $\alpha_3 > 0, \ldots, \alpha_N > 0$ и $\Lambda_{31} > 0, \ldots, \Lambda_{N1} > 0$, то оба эти неравенства имеют место, если $\alpha_2 = \alpha_2^*$ удовлетворяет эквиваленции

$$\begin{cases} \Lambda_{11} - \alpha_2^* \Lambda_{21} < 0, \\ -\Lambda_{12} + \alpha_2^* \Lambda_{22} < 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} < \alpha_2^* < \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}.$$

Согласно (32) будет $\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} < \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}$ и тогда (конечно, при $\alpha_j > 0,\ \Lambda_{j2} > 0\ (j = 3, \ldots, N)$) первым двум неравенствам из (28) удовлетворяет любое

$$\alpha_2 = \alpha_2^* \in \left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}, \frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{22}}\right).$$

Переходим к рекуррентному третьему неравенству из (28). При $\alpha_j > 0,\ \Lambda_{j3} > 0\ (j = 4, \ldots, N)$ этому третьему неравенству удовлетворяет любое

$$\alpha_3 = \alpha_3^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{13} + \alpha_2^* \Lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right)$$

…Методом математической индукции аналогично можно показать, что при $\alpha_j > 0,\ \Lambda_{ji} > 0\ (j = i+1, \ldots, N)$ $i$-е неравенство из (28) реализуется для любых

$$\alpha_i = \alpha_i^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{1i} + \alpha_2^* \Lambda_{2i} + \alpha_3^* \Lambda_{3i} + \ldots + \alpha_i^* \Lambda_{i-1i}}{\Lambda_{ii}}\right)$$

и, следовательно, последнее неравенство выполняется при любых

$$\alpha_N = \alpha_N^* \in \left(0, \frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^*\Lambda_{2N} + \alpha_3^*\Lambda_{3N} + \ldots + \alpha_N^*\Lambda_{N-1N}}{\Lambda_{NN}}\right).$$

Итак, получили $N$ строгих неравенств

$$\begin{cases} \Lambda_{11} - \alpha_2^*\Lambda_{21} < 0, \\ -\Lambda_{12} + \alpha_2^*\Lambda_{22} < 0, \\ -\Lambda_{13} - \alpha_2^*\Lambda_{23} + \alpha_3^*\Lambda_{33} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\Lambda_{1N} - \alpha_2^*\Lambda_{2N} - \ldots - \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-1N} + \alpha_N^*\Lambda_{NN} < 0. \end{cases}$$

Добавление отрицательных слагаемых, расположенных выше главной диагонали в (28), «не испортит» знаки неравенств в последних строгих $N$ неравенствах. Однако этот шаг сразу приводит к выполнению (28). □

## 4. Отсутствие равновесия по Нэшу и существование равновесия угроз и контругроз

Объединение леммы 1 и утверждения 3 приводит к справедливости следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Предположим, что для игры $G_N$ (см. (1) и (2)) выполняется (31) и (32). Тогда максимальное по Парето решение $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ имеет вид*

$$x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P),\ x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha^*)d_{ii} \quad (i \in \mathbb{N})$$
$$f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P),\ \text{причем}$$

$$f_1^P = -d'_{11}D_1^{-1}(\alpha^*)D_{11}D_1^{-1}(\alpha^*)d_{11} + d'_{22}D_2^{-1}(\alpha^*)D_{12}D_2^{-1}(\alpha^*)d_{22} + \ldots \tag{34}$$
$$\ldots + d'_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)D_{1N}D_N^{-1}(\alpha^*)d_{NN}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_N^P = d'_{N1}D_1^{-1}(\alpha^*)D_{N1}D_1^{-1}(\alpha^*)d_{N1} + \ldots - d'_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)D_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)d_{NN}.$$

Для игры $G_N$ (см. (1) и (2)) рассмотрим оптимизационную задачу: найти $\max\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N})$ при ограниченных $X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и фиксированных стратегиях $\overline{x_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ второго, ..., $N$-го $\overline{x_N} \in \mathbb{R}^{n_N}$ игроков.

Покажем, что эта задача не имеет решения (при выполнении $D_{11} > 0$). В самом деле, какую бы стратегию $\widetilde{x_1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ первый игрок не выбрал, в силу $D_{11} > 0$ и утверждения 1, существует стратегия $x_1^T = \alpha e_{n_1}$ такая, что для $\forall \alpha > \alpha^* = const > 0$ будет

$$f_1(x_1^T, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}) > f_1(x_1, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}).$$

Этот факт одновременно означает (согласно определению 1), что в игре $G_N$ при $D_{ii} > 0$ $(i \in \mathbb{N})$ не выполняется ни одного из $N$ равенств из определения 1. Данное обстоятельство мы бы назвали *сильным отсутствием равновесия по Нэшу.* Таким образом, получим

**Утверждение 4.** *Если в игре $G_N$ (см. (1) и (2)) матрица $D_{11} > 0$, то в $G_N$ не существует равновесия по Нэшу.*

Однако «экономический смысл» математической модели требует все же принятия какого-либо равновесного устойчивого решения, т.е. необходимо рекомендовать игрокам использовать свои стратегии из некоторой устойчивой ситуации и в результате получить определенные выигрыши (доходы). Как следует из утверждения 4, «общепризнанная» ситуация равновесия по Нэшу здесь не существует (и поэтому не подходит). Поэтому и предлагаем использовать Паретовское равновесие угроз и контругроз (определение 4).

Во-первых, оно максимально по Парето (тем самым «снимает» внешнюю и внутреннюю неустойчивость, присущую, как правило, равновесию по Нэшу).

Во-вторых, оно устойчиво к отклонениям отдельного игрока (за счет контругроз).

В-третьих, существует (при выполнении (31) и (32)), даже когда не существует равновесия по Нэшу.

В-четвертых, обладает тремя неоспоримыми достоинствами равновесия по Нэшу: устойчивостью к отклонению от $x^P$ отдельного игрока, выполнено условие индивидуальной рациональности и совпадает с седловой точкой — общепризнанного решения антагонистического варианта игры $G_N$ (поэтому применение равновесия угроз и контругроз имеет как раз те же «неоспоримые достоинства», что и равновесие по Нэшу).

В-пятых, для дифференциальных линейно-квадратичных игр *трех лиц* уже ранее доказано существование равновесия угроз и контругроз и найден его явный вид в [32].

Приведем аналогичный результат, касающегося статического варианта игры $N > 2$ лиц. Заметим, что использование концепции угроз и контругроз в качестве решения бескоалиционной игры $N \geq 2$ лиц, повидимому, впервые.

**Теорема 2.** *Пусть для игры $N$ лиц $G_N$ из (1) и (2)*
*1) вещественные постоянные симметричные матрицы $D_{ii} > 0,\ D_{ij}\ (i, j \in \mathbb{N},\ j \neq i)$,*
*2) выполняются неравенства*

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21},$$

*где $\Lambda_{ii} > 0$ и $\Lambda_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2,\ j \neq i)$ наибольшие, а $-\Lambda_{ij}$ — наименьшие корни характеристических уравнений $\det[D_{ii} - \Lambda E_{n_i}] = 0$ и $\det[D_{ij} - \Lambda E_{n_j}] = 0$ соответственно.*

*Тогда в игре $G_N$ пара $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ является равновесием угроз и контругроз, где*

$$x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P) \in X,\ \ f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P),$$

*здесь стратегии $x_i^P = -D_i^{-1} d_{ii}$ $(i \in \mathbb{N})$, постоянные $(\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*) = \alpha^*$ определяются последовательными рекуррентными соотношениями (33), а числа $f_i^P$ заданы в (34).*

*Доказательство.* Здесь прежде всего отметим, что из условий 1) и 2) теоремы 2 сразу следует существование максимума по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ в игре $G_N$ (согласно лемме 1 и утверждению 3). Заметим, что нам «годится» не все множество максимумов по Парето $\big\{(x^P, f^P)\big\}$, а только его подмножество, элементы которого обладают дополнительным свойством: на каждую угрозу в $G_N$ имеется контругроза. Покажем, что такое подмножество в $G_N$ не пусто.

Здесь, в первую очередь, заметим, что справедлива импликация: $D_{ii} > 0 \ \Rightarrow$ у игрока $i$ существует угроза $x_i^T \in \mathbb{R}^{n_i}$ на $x^P$, т.е. $\exists x_i^T \in \mathbb{R}^{n_i}$, при котором $f_i(x_i^T, x_{-i}^P) > f_i(x^P)$. Такое неравенство следует из $D_{ii} > 0$ и утверждения 1 (где $\overline{x_1} \to x_1^P,\ x_i^* = x_i^P$). Теперь уже, по свойству 6, для $x^T$ существует $j \in \mathbb{N},\ j \neq i$, при котором

$$f_j(x_i^T, x_{-i}^P) < f_j(x^P). \tag{35}$$

В «обиде на такую несправедливость», $j$-ый игрок, *во-первых*, может использовать (благодаря $D_{ij} < 0$ и утверждению 2) свою стратегию $x_j^C = \alpha e_{n_j}$ такую, что при $\forall \alpha > \alpha^{(1)}(x_i^T, x_{-i}^P) > 0$ имеет место

$$f_i(x_i^T, x_j^C, x_{\mathbb{N}\setminus\{i,j\}}^P) < f_i(x^P), \tag{36}$$

*во-вторых*, применять стратегию $x_j^C = \alpha e_{n_j}$ для $\forall \alpha > \alpha^{(2)}(x_i^T, x_{-1}^P) > 0$ справедливо

$$f_j(x_i^T, x_j^C, x_{\mathbb{N}\setminus\{i,j\}}^P) > f_j(x^P) \tag{37}$$

(опять таки благодаря $D_{jj} > 0$ и утверждению 1); заметим, что в (36) и (37) множество $\mathbb{N}\setminus\{i, j\} = \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N\}$ (например, при i<j).

Таким образом, в ответ на угрозу $x_i^T$ у $i$-го игрока, у игрока $j$ имеется контругроза $x_j^C = \alpha e_{n_j}$, где $\forall \alpha = const > 0$ и $\alpha > \max \left\{ \alpha^{(1)}(x_i^T, x_{-1}^P), \alpha^{(2)}(x_i^T, x_{-1}^P) \right\}$.

Таким образом, игрок $j$ имеет возможность реализовать контругрозу (согласно (36) и (37)). Тогда (по определению 4) пара $\left\{ x^P, f^P \right\}$, при выполнении условий теоремы 2, является равновесием угроз и контругроз. $\square$

**Замечание 2.** В этом параграфе настоящей статьи найдена бескоалиционная игра $N > 2$ лиц $G_N$ в нормальной форме, в которой не существует равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт заставляет исследователей обратить внимание на зарождающееся новое направление математической теории бескоалиционных игр, связанных с новыми понятиями равновесия. Одному из них, равновесию санкций и контрсанкций, и посвящен этот и следующий раздел настоящей статьи.

## 5. Равновесие санкций и контрсанкций

Как и в предыдущем разделе статьи, рассматриваем бескоалиционную игру $N \geq 2$ лиц в нормальной форме

$$G_N = \langle \mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

Напомним, что $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ — множество порядковых номеров игроков, стратегия $i$-го игрока $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, каждый $i$-ый игрок выбирает и использует свою стратегию $x$ и в результате образуется ситуация $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \mathbb{R}^{\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} n_i}$. На множестве ситуаций $X$ определена функция выигрыша $i$-го игрока с помощью линейно-квадратичной формы

$$f_i(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j' D_{ij} x_j + 2 d_{ii}' x_i \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{38}$$

где постоянные, вещественные, симметричные матрицы $D_{ij}$ и постоянный $n_i$-вектор-столбец $d_{ii}$ заданы априори, напомним, что штрих сверху означает операцию транспонирования ($x_i'$ — $n_i$-вектор-строка).

Различие между концепцией угроз и контругроз и предполагаемой здесь концепцией санкций и контрсанкций заключается как раз в различии понятий «угроза» и «санкция» (приведенных в начале этой статьи). Если «угроза» (в большинстве случаев) подразумевает запугивание, обещание причинить вред, неприятность, то «санкция» связана с практической реализацией угрозы и встает вопрос: как действовать (какую стратегию выбрать игроку) при реализации угрозы, как учитывать эту угрозу, при условии ее осуществления? Это обстоятельство потребовало изменения понятия «угрозы» и «контругрозы» на «санкцию» и «контрсанкцию», но сама концепция — как возможный подход к принятию равновесного решения бескоалиционной игры базируется здесь снова на определении 4 равновесия угроз и контругроз и теореме 2 (о существовании равновесия угроз и контругроз).

Перейдем к формальным понятиям. Будем говорить, что в игре $G_N$ имеется санкция на игрока $i \in \mathbb{N}$, если у контркоалиции $-i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\}$ имеется стратегия $x^S_{-i} \in \mathbb{R}^{-i}$, а в ответ на $x^S_{-i}$ стратегия $i$-го игрока $x^C_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ такая, что функция выигрыша $i$-го игрока реализует выигрыш $f^C_i = f_i(x^C_i, x^S_{-i})$. Такая ситуация $(x^C_i, x^S_{-i})$ может, например, образоваться, если в ответ на применение контркоалицией $-i$ ее стратегии $x^S_{-i}$ игрок $i$ вынужден отреагировать стратегией $x^C_i$. Отметим, что в этом случае может произойти одна из двух возможностей (если, конечно, существует в игре $G_N$ максимум по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$):

$$f^C_i \leq f^P_i = f_i(x^P) \text{ и } f^C_i > f^P_i. \tag{39}$$

Основные изменения с определением угроз и контругроз связано с понятием контрсанкция (по сравнению с «контругрозой»). Именно, в ответ на санкцию $x^S = (x^P_i, x^S_{-i})$, у игрока $i$ имеется контрсанкция, если у него существует стратегия $x^C_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, при которой выполняются два строгих неравенства

$$f_j(x^C_i, x^S_j, x^S_{\mathbb{N}\setminus\{i,j\}}) < f_j = f_j(x^P), \tag{40}$$

$$f_i(x^C_i, x^S_{-i}) > \max\{f_i = f_i(x^P),\ n_i M_i\}. \tag{41}$$

Здесь уже $M_i$ есть максимум абсолютных величин элементов матрицы $D_{ii} = (d^{(j,i)}_{lk})$, т.е. $M_i = \max\limits_{l,k=1,\ldots,n_i} |d^{(j,i)}_{lk}|$ (постоянная $M_i$ фигурирует в теореме Гирша и Бендиксона из [28], см. свойство 3).

**Определение 5.** Пару $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем равновесием санкций и контрсанкций игры $G_N$, если, во-первых, пара $(x^P, f^P = f(x^P))$ максимальна по Парето в $N$-критериальной задаче

$$G_v = \langle X,\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \rangle\,,$$

во-вторых, в ответ на любую санкцию $x^S = (x^P_i, x^S_{-i}) \in X$ у игрока $i$ имеется контрсанкция $x^C_i \in X_i$, которая реализует (40) и (41).

Неравенство (40) говорит о том, что в $G_N$ имеется $j \in -i$, который уменьшает выигрыш $i$-го игрока по сравнению с его паретовским $f^P_i$, тем самым добавляет свою «лепту» в санкцию. Согласно утверждению 2 и $D_{ij} < 0$, тогда существует постоянная $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(x^P_i, x^S_{-i}) > 0$ такая, что для стратегии $i$-го игрока $x^C_i = \alpha e_{n_i}$ при $\forall \alpha > \alpha^{(1)}$ выполнено (40), $e_{n_i}$ — $n_i$-вектор-столбец с единичными координатами. Наконец, из утверждения 1 и $D_{ii} > 0$ можно аналогично заключить, что имеется постоянная

$\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(x_i^P, x_{-i}^S) > 0$ такая, что для $\alpha > \alpha^{(2)}$ и стратегии $i$-го игрока $x_i^C = \alpha e_{n_i}$ имеет место (41). Тогда оба неравенства (40) и (41) одновременно выполнимы для стратегии $i$-го игрока $x_i^C = \alpha e_{n_i}$ при $\forall \alpha > \max\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\}$.

Остановимся на «экономическом смысле» (40) и (41). Первое из них, как уже упоминалось, говорит, что в санкции на $i$-го игрока могут учавствовать все остальные, второе, т.е. выполнение (41), означает, что $i$-му игроку «выгодно» участвовать в контрсанкции, ибо тогда он может достичь (по теореме Гирша и Бендиксона) самого большого (для себя) выигрыша.

## Заключение

В настоящей статье рассматривается (в (1) и (2)) бескоалиционная игра $N$ лиц ($N > 2$) в нормальной форме. Такая математическая модель может возникнуть, например, при распределении одной инвестиции в несколько, объединенных тем или иным образом предприятий. Показано, что в такой игре (1) и (2) не существует как равновесия по Нэшу, так и по Бержу, но существуют равновесие угроз и контругроз, а также, введенное в статье, равновесие санкций и контрсанкций. Оба этих равновесия максимальны по Парето, обладают достоинствами общепризнанного равновесия по Нэшу (устойчивостью к отклонению отдельных игроков и совпадает с седловой точкой в антагонистическом случае). Но, в отличие от равновесия по Нэшу, множество их внешне и внутренне устойчиво. Мы надеемся, что эта статья привлечет внимание и побудит далее исследовать равновесия как угроз и контругроз, так и санкций и контрсанкций.

## Список литературы

1. Вилкас, Э. И. Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. — Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР, 1972. — Вып. 2. — С. 9–55.

   VILKAS, E. I. (1972) Formalization of the problem of choosing a game-theoretic criterion of optimality. *Mathematical Methods in Social Sciences: a collection of articles.* 2. p. 9–55.

2. Вилкас, Э. И., Майминас, Е. З. Решения: теория, информация, моделирование. — М.: Радио и связь, 1981. — 328 с.

   VILKAS, E. I. & MAYMINAS, E. Z. (1981) *Solutions: theory, information, modeling.* Moscow: Radio i svyaz'.

3. Вайсборд, Э. М. О коалиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т 10, № 4. — С. 613–623.

   VAISBORD, E. M. (1974) Coalition differential games. *Differ. Uravn.* 10 (4). p. 613–623.

4. Вайсборд, Э. М., Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Советское радио, 1980. — 304 с.

   VAISBORD, E. M. & ZHUKOVSKIY, V. I. (1980) *Introduction to Multi Player Differential Games and Their Application.* Moscow: Sovetskoe radio.

5. Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз. — М.: КРАСАНД, 2010. — 192 с.

   ZHUKOVSKIY, V. I. (2010) *Introduction to differential games under uncertainty. The equilibrium of objections and counterobjections.* Moscow: KRASAND.

6. NASH, J. (1950) Equilibrium points in N-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 36 (1). p. 48–49.

7. NASH, J. (1951) Non-cooperative games. *Analysis of Mathematics.* 52 (2). p. 286–295.

8. Мамедов, М. Б. О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук. — 1983. — Т 4, № 2. — С. 11–17.

   MAMEDOV, M. B. (1983) About the Nash equilibrium of the Pareto optimal situation. *Izv. AN Azerbaydjana. Series Phys.-technic. sciences.* 4 (2). p. 11–17.

9. Подиновский, В. В., Ногин, В. Д. Парето–оптимальное решение многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.

   PODINOVSKIY, V. V. & NOGIN, V. D. (2007) *Pareto optimal solution of multicriteria problems.* Moscow: Fizmatlit.

10. CASE, J. H (1974) A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium. *J. Optimiz. Theory Appl.* 13 (3). p. 378–385.

11. SALUKVADZE, M. E. & ZHUKOVSKIY, V. I. (2020) *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics.* Switzerland: AG Birkhäuser Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25546-6.

12. Жуковский, В. И., Тынянский, Н. Е. Равновесные управления многокритериальных динамических задач. — М.: МГУ, 1984. — 224 с.

ZHUKOVSKIY, V. I. & TYNYANSKIY, N. T. (1984) *Equilibrium control of multicriteria dynamic problems.* Moscow: MSU.

13. Льюс, Р. Д., Райфа, Х. Игры и решения. — М.: Иностранная литература, 1961. — 642 с.

    LUCE, R. D. & RAIFFA, H. (1957) *Games and decisions.* New York: John Wiley and Sons, Inc.

14. Оуэн, Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 230 с.

    OWEN, G. (1971) *Game theory.* Moscow: Mir.

15. Смольяков, Э. Р Теория конфликтных равновесий. — М.: УРСС, 2005. — 301 с.

    SMOL'YAKOV, E. R (2005) *Theory of Conflict Equilibria.* Moscow: URSS.

16. Большой толковый словарь русского языка / Сост. и гл. ред. С. А. Кузнецов. — Санкт-Петербург: Норинт, 2003. — 1536 с.

    Large explanatory dictionary of the Russian language (2003) . Compiler and editor in chief S. A. Kuznetsov. St. Petersburg: Norint.

17. Жуковский, В. И, Чикрий, А. А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — М.: Юрайт, 2017. — 332 с.

    ZHUKOVSKIY, V. I & CHIKRIY, A. A. (2017) *Differential equation. Linear-quadratic differential games.* Moscow: Yurayt.

18. Красовский, Н. Н, Субботин, А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: наука, 1984. — 456 с.

    KRASOVSKIY, N. N & SUBBOTIN, A. I. (1984) *Positional–differential games.* Moscow: Nauka.

19. RASHKOV, P. I. (1984) Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Space. *Many Players Differential Game.* Bulgaria, Rousse: Technical Univ. p. 91–99.

20. TERSIAN, St. A. (1984) On the Z-Equilibrium Points in a Differential Game. *Many Players Differential Game.* Bulgaria, Rosse: Technical Univ. p. 106–111.

21. TERSIAN, St. A. (1985) Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Method in Operation Research.* Bulgaria, Rosse: Technical Univ. p. 103–195.

22. DOCHEV, D. T. & STOJANOV, N. V (1984) Existence of Z-Equilibrium in a Differential Game with Delay. *Many Players Differential Game.* Bulgaria, Rosse: Technical Univ. p. 64–72.

23. GAIDOV, S. D. (1984) Z-Equilibrium in Stochastic Differential Game. *Many Players Differential Game.* Bulgaria, Rosse: Technical Univ. p. 53–63.

24. BILTCHEV, S. V. (1984) $\epsilon$-Z-Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System. *Many Players Differential Game.* Bulgaria, Rosse: Technical Univ. p. 47–52.

25. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю, А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

    VOEVODIN, V. V & KUZNETSOV, Yu. A. (1984) *Matrices and calculations.* Moscow: Nauka.

26. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.

    GANTMAKHER, F. R. (2004) *Theory of matrices.* Moscow: Fizmatlit.

27. Пароди, М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. — М.: Иностранная литература, 1960. — 170 с.

    PARODI, M. (1960) *Localization of characteristic numbers of matrices and its application.* Moscow: Inostrannaya literatura.

28. HURSCH, A. & BENDIKSON, I. (1902) *Sup les racines d'une equation fondamentale.* Acta Math.

29. FROBENIUS, G. (1909) *Uber Matrizen aus positiven Elementen.* Preuss. Acad. Wissenschaften.

30. PARKER, W. V. (1937) The characteristic roots of a matrix. . Duke Math J (3). p. 484.

31. ZHUKOVSKIY, V. I. (2003) *Lyapunov Functions in Differential Games.* London and New York: Taylor and Francis Inc.

32. Жуковский, В. И., Смирнова, Л. В., Высокос, М. И. Дифференциальная игра трех лиц, в которой не существует равновесия по Нэшу, но имеется равновесие угроз и контругроз // ТВИМ. — 2019. — Т. 43, № 2. — С. 1–26.

    ZHUKOVSKIY, V. I., SMIRNOVA, L, V & VYSOKOS, M I. (2019) Differential game of three persons in which Nash equilibrium doesn't exist but equilibrium of objections and counterobjection is present. *TWIM.* 43 (2). p. 1–26.

**УДК: 517.98**

**MSC2010: 35D35**

# МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ

**© $\boxed{\text{Н. Д. Копачевский}}$, У. Б. Брыксина, Д. О. Цветков**

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

**Model problem on normal oscillations of partially dissipative hydrosystem.**

**Kopachevsky N. D., Bryksina U. B., Tsvetkov D. O.**

**Abstract.** Let us consider the plain (two-dimensional) problem for two fluids situated in the rectangular container of a width $l$. We suppose that the lower viscous fluid takes the region $\Omega_1 := \{ (x_1; x_2) : 0 < x_1 < l, -h_1 < x_2 < 0 \}$ and the upper ideal fluid takes the region $\Omega_2 := \{ (x_1; x_2) : 0 < x_1 < l, 0 < x_2 < h_2 \}$. The boundary $\Gamma_1$ has the equation $x_2 = 0$, and the free surface $\Gamma_2$ of the ideal fluid has the equation $x_2 = h_2$.

Suppose that the homogeneous gravitational field with the acceleration $\vec{g} = -g\vec{e}_2$ acts on the fluid system opposite to the direction of the axis $Ox_2$ and capillary forces. Further, two cases will be considered: 1) fluids are considered to be heavy and capillary forces are not taken into account; 2) fluids are considered to be capillary, that is, being in a state close to weightlessness. In the second case the coefficients of surface tension $\sigma_i > 0$ on the fluid boundaries $\Gamma_i$ are know physical constants, and the wetting angles (contact angles) between surfaces $\Gamma_i$ and the rigid wall $S$ of the vessel are right angles.

In this paper, we consider a model spectral problem that preserves all the features of the original problem of normal oscillations of the hydrodynamic system described above.

A qualitative and asymptotic investigation of the spectrum of the problem is carried out the base of a study of the transcendent characteristic equation for the complex fading decrement of normal oscillations.

***Keywords***: *model problem, viscous fluid, ideal fluid, characteristic equation, spectrum of hydrodynamic problem.*

## Введение

Весной 2020 года ушел из жизни Копачевский Николай Дмитриевич, известный математик, доктор физико-математических наук, профессор. Он был бессменным руководителем еженедельного научного семинара кафедры математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Одним из его многочисленных направлений научной деятельности было изучение задач о колебаниях частично диссипативных гидросистем, то есть систем, в составе которых имеются как вязкие, так и идеальные жидкости. Наличие вязких и идеальных жидкостей в системе выводит ее из класса консервативных, а также диссипативных систем. Как правило, соответствующие спектральные задачи оказываются достаточно сложными для изучения, поэтому для определения спектра исходной задачи целесообразно предварительно рассматривать модельные задачи, допускающие разделение переменных.

В данной работе изучается модельная задача, предложенная Н.Д. Копачевским, в которой возможно выяснить структуру спектра реальной гидродинамической задачи о нормальных колебаниях двух слоев жидкостей, расположенных в произвольном сосуде, из которых нижний слой состоит из вязкой, а верхний — из идеальной жидкости. При этом жидкости считаются либо «тяжелыми» и капиллярные силы не учитываются, либо «капиллярными», то есть находятся в условиях, близких к невесомости (см. [1]).

Отметим, что полученные в работе выводы для случая «тяжелых» жидкостей согласуются с ранее полученными в работе [2] результатами, где рассматривалась система тяжелых жидкостей, а именно система «вязкая жидкость + система идеальных жидкостей» для произвольного сосуда. В работе [2] используя спектральную теорию самосопряженных операторов, удалось, в частности, установить ряд важных утверждений о локализации и асимптотике трех ветвей собственных значений.

## 1. Постановка задачи

1.1. **Физическая постановка задачи.** Пусть система из двух несмешивающихся жидкостей находится в прямоугольном канале шириной $l$ (см. рис 1). При этом вязкая жидкость имеет плотность $\rho_1 > 0$, коэффициент динамической вязкости $\mu > 0$ и в состоянии покоя расположена в области

$$\Omega_1 := \{\, (x_1; x_2) \,:\, 0 < x_1 < l,\ -h_1 < x_2 < 0 \,\}.$$

Идеальная жидкость плотности $\rho_2 < \rho_1$ находится выше вязкой и занимает (в состоянии покоя) область

$$\Omega_2 := \{\, (x_1; x_2) \,:\, 0 < x_1 < l,\ 0 < x_2 < h_2 \,\}.$$

Тогда граница $\Gamma_1$ раздела жидкостей имеет уравнение $x_2 = 0$, а свободная поверхность $\Gamma_2$ идеальной жидкости – уравнение $x_2 = h_2$.

Предполагаем, что на систему жидкостей действует против направления оси $Ox_2$ однородное гравитационное поле с ускорением $\vec{g}$, а также капиллярные силы. Будем рассматривать два случая: 1) жидкости считаются «тяжелыми» и капиллярные силы не учитываются; 2) жидкости считаются «капиллярными», то есть находятся в условиях, близких к невесомости (см. [1]). Во втором случае коэффициенты поверхностного натяжения $\sigma_i$ на границах раздела жидкостей $\Gamma_i$ — заданные физические положительные постоянные, а углы смачивания (краевые углы) между поверхностями $\Gamma_i$ и твердой стенкой $S$ сосуда — прямые.

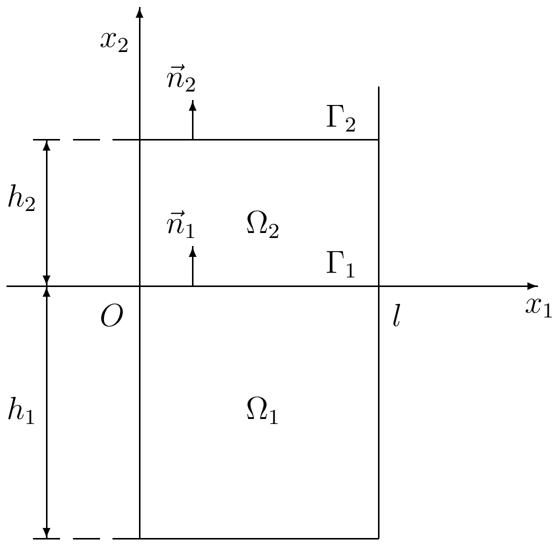


*Рис.* 1

1.2. **Математическая постановка задачи.** Обозначим через $\vec{n}_i$ $(i = 1, 2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ и направленный вне $\Omega_i$ $(i = 1, 2)$. Через $S_i$ — часть стенки сосуда, отвечающей области $\Omega_i$ $(i = 1, 2)$. Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t, x)$, $(x \in \Omega_i)$ — поле скорости в жидкости, а $\zeta_i = \zeta(t, \widehat{x})$ $(\widehat{x} \in \Gamma_i)$ представляет собой отклонение свободно движущейся поверхности $\Gamma_i(t)$ от $\Gamma_i$ по нормали $\vec{n}_i$; $p_i = p_i(t, x)$ — отклонение поля давления от равновесного $(i = 1, 2)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой системы выглядит следующим образом (см. подробнее, например, [3]):

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu \Delta \vec{u}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{1}$$

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 =: u_{2,n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \quad \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} = u_{2,n_2} \quad (\text{ на } \Gamma_2\,), \tag{3}$$

$$p_2 = \left(\rho_2 g - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\zeta_2 \quad (\text{ на } \Gamma_2\,), \quad \mu\left(\frac{\partial(u_1)_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1)_2}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \tag{4}$$

$$p_1 - 2\mu\frac{\partial(u_1)_2}{\partial x_2} = p_2 + \left(\Delta\rho_1 g - \sigma_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\zeta_1, \quad \Delta\rho_1 := \rho_1 - \rho_2 > 0, \quad (\text{ на } \Gamma_1\,). \tag{5}$$

В случае, когда жидкости тяжелые $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2)$, где $\sigma_i$ — коэффициенты поверхностного натяжения.

Рассмотрим решения задачи (1)–(5) зависящие от $t$ по закону $\exp(-\lambda t)$, где $\lambda$ — комплексная частота колебаний:

$$\vec{u}_i(t, x) = \vec{u}_i(x)\cdot\exp(-\lambda t), \quad p_i(t, x) = p_i(x)\cdot\exp(-\lambda t),$$
$$\zeta_i(t, \widehat{x}) = \zeta_i(\widehat{x})\cdot\exp(-\lambda t), \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Подставляя полученные представления в уравнения и граничные условия (1)–(5), приходим к следующей задаче на собственные значения относительно искомых амплитудных функций $\vec{u}_i(x)$, $p_i(x)$, $\zeta_i(\widehat{x})$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{gathered}
-\lambda\rho_1\vec{u}_1 = -\nabla p_1 + \mu\Delta\vec{u}_1, \quad \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_1\,), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{ на } \ S_1\,),\\
-\lambda\rho_2\vec{u}_2 = -\nabla p_2, \quad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_2\,), \quad u_{2,n_2} = 0 \quad (\text{ на } \ S_2\,),\\
-\lambda\zeta_1 = u_{1,n_1} = u_{2,n_1} \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \quad -\lambda\zeta_2 = u_{2,n_2} \quad (\text{ на } \Gamma_2\,),\\
p_2 = \left(\rho_2 g - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\zeta_2 \quad (\text{ на } \Gamma_2\,), \quad \mu\left(\frac{\partial(u_1)_1}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1)_2}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (\text{ на } \Gamma_1\,),\\
p_1 - 2\mu\frac{\partial(u_1)_2}{\partial x_2} = p_2 + \left(\Delta\rho_1 g - \sigma_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\zeta_1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для изучения характера спектра задачи (6) рассмотрим скалярную модельную задачу, отражающую (как будет показано ниже) все особенности векторной задачи. А именно, изучим спектральную задачу вида:

$$-\mu\Delta u = \lambda\rho_1 u \quad (\text{ в } \Omega_1\,), \quad \Delta\Phi = 0 \quad (\text{ в } \Omega_2\,), \quad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \tag{7}$$

$$\lambda\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda\rho_2\Phi\right) = \left(\Delta\rho_1 g - \sigma_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u \quad (\text{ на } \Gamma_1\,), \tag{8}$$

$$\left(\rho_2 g - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \lambda^2\rho_2\Phi = 0 \quad (\text{ на } \Gamma_2\,), \tag{9}$$

$$u(0, x_2) = u(l, x_2) = u(x_1, -h_1) = 0, \quad \Phi(0, x_2) = \Phi(l, x_2) = 0. \tag{10}$$

Эта задача получается из задачи (6), если для вязкой жидкости поле $\vec{u}_1(x)$ заменить на скалярную функцию $u(x)$, давление $p_1(x)$ положить равным нулю, убрать условие соленоидальности, убрать условия для касательных напряжений, величину $2\partial(u_1)_2/\partial x_2$ заменить на $\partial u/\partial x_2$ и исключить $\zeta_1(\widehat{x})$ путем замены $\zeta_1 = -\lambda^{-1}u$ (на $\Gamma_1$). Движение жидкости в области $\Omega_2$ будем характеризовать потенциалом скорости $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$: $\vec{u}_2 = \nabla\Phi$ ($\Delta\Phi = 0$ в $\Omega_2$), тогда $p_2 = \lambda\rho_2\Phi$. Условия (10) — аналоги условий на твердой стенке сосуда, которые позволяют разделить переменные в данной задаче.

Таким образом, решениями поставленной задачи (7)–(10) являются собственные функции $u(x_1, x_2)$ и $\Phi(x_1, x_2)$, а также спектральный параметр $\lambda$, который входит на только в уравнение (7), но и в краевые условия (8), (9).

**Лемма 1.** *Все собственные значения $\lambda$ задачи* (7)–(10) *расположены в правой полуплоскости: $Re\,\lambda > 0$.*

*Доказательство. I шаг.* Из первого уравнения (7) и граничных условий на $\Gamma_1$ с помощью формулы Грина для оператора Лапласа получаем:

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda\rho_1 u\, u\, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} (-\mu\Delta u)u\, d\Omega_1 = \mu\int\limits_{\Omega_1} |\nabla u|^2 d\Omega_1 - \mu\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} u\, d\Gamma_1 = \mu\int\limits_{\Omega_1} |\nabla u|^2 d\Omega_1 +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}\left(\lambda\rho_2\Phi - \frac{1}{\lambda}\,B_1 u\right)u\, d\Gamma_1 = \mu\int\limits_{\Omega_1} |\nabla u|^2 d\Omega_1 + \lambda\rho_2\int\limits_{\Gamma_1} \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\, d\Gamma_1 - \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Gamma_1} B_1 u\, u\, d\Gamma_1,$$

где $B_1 u := (\lambda\rho_2\Phi - \lambda^{-1}\,B_1 u)\,u$. Перепишем последнее равенство в виде

$$\lambda\rho_1\cdot\|u\|^2_{\Omega_1} = \mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1} + \lambda\rho_2\int\limits_{\Gamma_1}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\, d\Gamma_1 - \frac{1}{\lambda}\cdot\|u\|^2_{B_1}. \tag{11}$$

*II шаг.* Аналогично, из второго уравнения (7) и граничных условий на (7) и (9), получаем

$$0 = -\int\limits_{\Omega_2}\Delta\Phi\,\Phi\, d\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2}|\nabla\Phi|^2 d\Omega_1 - \int\limits_{\partial\Omega_2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Phi\, dS = \int\limits_{\Omega_2}|\nabla\Phi|^2 d\Omega_1 - \int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Phi\, d\Gamma_2 +$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Phi\, d\Gamma_1 = \|\Phi\|^2_{1,\Omega_2} - \int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{\lambda^2\rho_2}\,B_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)d\Gamma_2 + \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Phi\, d\Gamma_1 =$$

$$= \|\Phi\|^2_{1,\Omega_2} + \frac{1}{\lambda^2\rho_2}\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right\|^2_{B_2} + \int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Phi\, d\Gamma_1, \qquad B_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} := \left(\rho_2 g - \sigma_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}.$$

*III шаг.* Подставляем $\int_{\Gamma_1}(\partial\Phi/\partial x_2)\,\Phi\,d\Gamma_1$ из последнего равенства в (11):

$$\lambda\rho_1\cdot\|u\|^2_{\Omega_1}=\mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1}+\lambda\rho_2\cdot\left(-\|\Phi\|^2_{1,\Omega_2}-\frac{1}{\lambda^2\rho_2}\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right\|^2_{B_2}\right)-\frac{1}{\lambda}\cdot\|u\|^2_{B_1}$$

или

$$\lambda\cdot\|v\|^2_{\Omega}+\lambda^{-1}\cdot\|v\|^2_B=\mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1},$$

где $\|v\|^2_\Omega:=\rho_1\cdot\|u\|^2_{\Omega_1}+\rho_2\cdot\|\Phi\|^2_{1,\Omega_2}$, $\|v\|^2_B:=\|\partial\Phi/\partial x_2\|^2_{B_2}+\|u\|^2_{B_1}$. Отсюда следует, что

$$\lambda\cdot\|v\|^2_\Omega-\mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1}+\frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|^2}\cdot\|v\|^2_B=0.$$

Выделяем действительную часть из последнего уравнения, в результате имеем

$$Re\,\lambda=\frac{\mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1}}{\|v\|^2_\Omega+|\lambda|^{-2}\cdot\|v\|^2_B}\geq 0.$$

*IV шаг.* Докажем, что $Re\,\lambda>0$. В самом деле, если при $\lambda\neq 0$ будет $Re\,\lambda=0$, то $\mu\cdot\|u\|^2_{1,\Omega_1}=0$, значит $u=0$. Тогда имеем в задаче (7)–(10):

$$\Delta\Phi=0\quad(\text{в }\Omega_2),\quad \Phi(0,x_2)=\Phi(l,x_2)=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=0\quad(\text{при }x_2=0),$$
$$\lambda\rho_2\Phi=0\quad(\text{при }x_2=0),\quad B_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\lambda^2\rho_2\Phi=0\quad(\text{при }x_2=h_2).$$

Данная задача переопределена, она имеет лишь тривиальные решения $\Phi=0$, таким образом, такое $\lambda$ не может решением задачи (7)–(10). $\square$

1.3. **Переход к безразмерным переменным.** Будем считать, что $h=h_1=h_2$. Выберем в качестве характерного размера задачи величину $l_0=l/\pi$ (как и прежде $l$ — ширина сосуда). Тогда безразмерная ширина сосуда будет $\pi$. Для простоты выбираем $h=l_0$, тогда безразмерная высота жидкости будет равна 1.

Перейдем к безразмерным переменным в уравнениях и граничных условиях (7)–(10), выбрав в качестве характерной плотности величину $\rho_1$, а для остальных величин — соответствующие размерные комбинации из указанных выше характерных. Таким образом, задача (7)–(10) в безразмерных переменных примет вид:

$$-\Delta u=\lambda u\quad(0<x_1<\pi,\ -1<x_2<0),\quad \Delta\Phi=0\quad(0<x_1<\pi,\ 0<x_2<1),\tag{12}$$

$$u(0,x_2)=u(\pi,x_2)=u(x_1,-1)=0,\quad \Phi(0,x_2)=\Phi(\pi,x_2)=0,\tag{13}$$

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\quad(\text{при }x_2=0),\tag{14}$$

$$\lambda\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x_2}+\lambda\rho_2\Phi\right)=\left(\Delta\rho_1 g-\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u\quad(\text{при }x_2=0),\tag{15}$$

$$\left(\rho_2 g - \sigma_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \lambda^2 \rho_2 \Phi = 0 \quad (\text{при } x_2 = 1\,). \tag{16}$$

Здесь $\lambda = \lambda_{\text{безр}} = \lambda_{\text{разм}}\rho_1 l_0^2/\mu,\ g = g_{\text{безр}} = g_{\text{разм}}\rho_1^2 l_0^3/\mu^2,\ \sigma_i = \sigma_{i,\text{безр}} = \sigma_{i,\text{разм}}\rho_1 l_0/\mu^2$, $\rho_2 = \rho_{2,\text{безр}} = \rho_{2,\text{разм}}/\rho_{1,\text{разм}}$. Формально уравнения и граничные условия задачи (12)–(16) получаются из (7)–(10), если положить $\mu = 1,\ \rho_1 = 1$.

## 2. Характеристическое уравнение

2.1. **Переход к системе линейных алгебраических уравнений.** Будем разыскивать решения задачи (12)–(16) в виде рядов по ортогональной на отрезке $[0,\pi]$ системе функций $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. Другими словами, ищем частные решения $u = u(x_1,x_2)$ и $\Phi = \Phi(x_1,x_2)$ в виде

$$u_n(x_1,x_2) = u_n(x_2)\cdot \sin nx_1, \quad \Phi_n(x_1,x_2) = \Phi_n(x_2)\cdot \sin nx_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Тогда уравнение $\Delta\Phi = 0$ (см. второе уравнение (12)) дает

$$\Phi_n(x_2) = c_{1n}\cdot \operatorname{sh} nx_2 + c_{2n}\cdot \operatorname{ch} nx_2, \tag{18}$$

с произвольными постоянными $c_{1n}$ и $c_{2n}$.

Для функции $u_n(x_2)$ из (17) имеем $u_n''(x_2) + (\lambda - n^2)\cdot u_n(x_2) = 0$, с учетом граничного условия (13) (при $x_2 = -1$) получаем

$$u_n(x_2) = c_{3n}\cdot \sin\left(\sqrt{\lambda - n^2}\,(x_2+1)\right). \tag{19}$$

Кинематическое условие (14) дает соотношение

$$c_{3n}\cdot \sin(\sqrt{\lambda - n^2}) = n\cdot c_{1n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Подставляя (17) с учетом (18), (19) в динамические условия (15), (16) приходим к уравнениям

$$n\cdot\left(\rho_2 g + \sigma_2 n^2\right)\cdot(c_{1n}\cdot \operatorname{ch} n + c_{2n}\cdot \operatorname{sh} n) + \rho_2\lambda^2\cdot(c_{1n}\cdot \operatorname{sh} n + c_{2n}\cdot \operatorname{ch} n) = 0, \tag{21}$$

$$\lambda\cdot\left(\sqrt{\lambda-n^2}\cdot c_{3n}\cdot \cos(\sqrt{\lambda - n^2}) + \lambda\rho_2\cdot c_{2n}\right) = \left(g\Delta\rho_1 + \sigma_1 n^2\right)\cdot c_{3n}\cdot \sin(\sqrt{\lambda-n^2}).$$

2.2. **Вывод характеристического уравнения.** Система уравнений (20), (21) есть система линейных алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных $c_{in},\ i = 1,2,3$. Для нетривиальных решений этой системы, дающие собственные функции задачи (12)–(16), необходимо, чтобы соответствующий ей определитель равнялся нулю. Это соотношение приводит к характеристическому уравнению задачи:

$$n \cdot \big(n(\rho_2 g + \sigma_2 n^2) \cdot \mathrm{sh}\, n + \lambda^2 \rho_2 \cdot \mathrm{ch}\, n\big) \cdot$$
$$\cdot \Big(\lambda \cdot \sqrt{\lambda - n^2} \cdot \cos \sqrt{\lambda - n^2} - (g\Delta\rho_1 + \sigma_1 n^2) \cdot \sin \sqrt{\lambda - n^2}\Big) -$$
$$- \sin \sqrt{\lambda - n^2} \cdot \lambda^2 \rho_2 \cdot \big(n(\rho_2 g + \sigma_2 n^2) \cdot \mathrm{ch}\, n + \lambda^2 \rho_2 \cdot \mathrm{sh}\, n\big) = 0. \quad (22)$$

**Замечание 1.** Уравнение (22) имеет очевидное решение $\lambda = n^2$, для которого $c_{1n} = c_{2n} = 0$, $c_{3n} \neq 0$. Однако для таких решений получаем в силу (18) и (19) тривиальное решение исходной задачи. В связи с этим, далее считаем, что $\lambda \neq n^2$.

**Замечание 2.** Отметим, что для решений исходной задачи $\cos \sqrt{\lambda - n^2} \neq 0$. Действительно, если $\cos \sqrt{\lambda - n^2} = 0$, то из (22) получаем

$$Q_n(\lambda) := \rho_2^2 \cdot \mathrm{th}\, n \cdot \lambda^4 + \rho_2 \cdot (A_n \cdot \mathrm{cth}\, n + B_n) \cdot \lambda^2 + A_n \cdot B_n = 0, \quad (23)$$
$$A_n := n \cdot \big(\rho_2 g + \sigma_2 n^2\big) \cdot \mathrm{th}\, n, \quad B_n := n \cdot \big(g\Delta\rho_1 + \sigma_1 n^2\big),$$

которое имеет чисто мнимые решения $\lambda$, а это противоречит лемме 1.

Разделим обе части уравнения (22) на $\sqrt{\lambda - n^2} \cdot \cos \sqrt{\lambda - n^2}$, получим после преобразований следующее характеристическое уравнение

$$\frac{tg \sqrt{\lambda - n^2}}{\sqrt{\lambda - n^2}} = \frac{n \cdot \lambda \cdot (\rho_2 \lambda^2 + A_n)}{Q_n(\lambda)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

где $Q_n(\lambda)$ определено в (23).

Таким образом, исследование спектра задачи (12)–(16) сведено к нахождению решений трансцендентного уравнения (24).

## 3. Исследование характеристического уравнения

3.1. **Графическое исследование.** Запишем уравнение (24) в виде

$$F_n(\lambda) = P_n(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_n(\lambda) := \frac{n \cdot \lambda \cdot (\rho_2 \lambda^2 + A_n)}{Q_n(\lambda)}, \quad (25)$$

$$F_n(\lambda) := \frac{tg \sqrt{\lambda - n^2}}{\sqrt{\lambda - n^2}} = \frac{\mathrm{th}\, \sqrt{n^2 - \lambda}}{\sqrt{n^2 - \lambda}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\big((k - 1/2)\pi\big)^2 + n^2 - \lambda}. \quad (26)$$

В представлении (26) для $F_n(\lambda)$ использовано разложение функции $th\, z$ на простейшие дроби.

Отметим ряд свойств функций $F_n(\lambda)$ и $P_n(\lambda)$ (см. рис. 2 и 3).

1. График функции $F_n(\lambda)$ имеет вертикальные асимптоты в точках

$$\lambda^0_{n,k} := \big((k - 1/2)\pi\big)^2 + n^2, \quad k,\, n \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

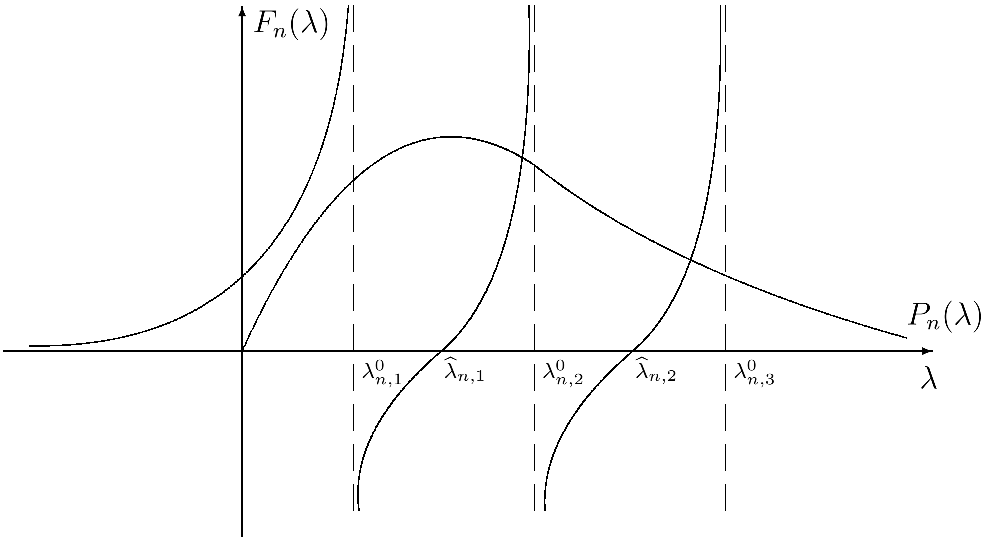


*Рис.* 2

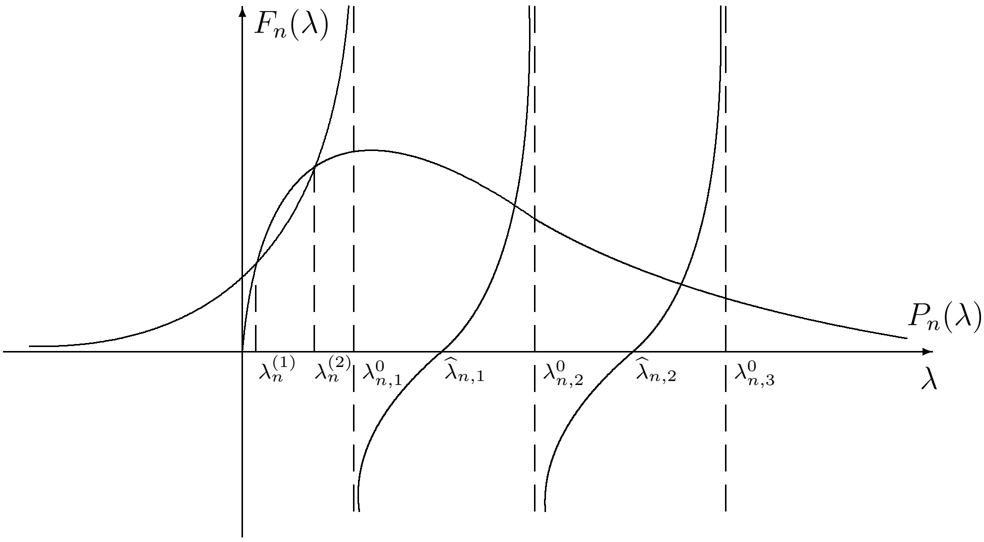


*Рис.* 3

2. $F_n(\lambda^0_{n,k} \pm 0) = \mp\infty,\ F_n(-\infty) = 0,\ F_n(0) = n^{-1} \cdot \operatorname{th} n.$

3. Функция $F_n(\lambda)$ монотонно возрастает в любой точке на вещественной оси, не являющейся точкой разрыва, поскольку

$$F_n^{'}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\left(((k-1/2)\pi)^2 + n^2 - \lambda\right)^2} > 0.$$

4. Функция $P_n(\lambda)$ нечетная, положительная при $\lambda \in (0; +\infty)$ и $P_n(+\infty) = 0$, кроме того она не имеет точек разрыва на вещественной оси.

Как следствие имеет место следующая лемма.

**Лемма 2.** *Уравнение* (25) *имеет при любом $n \in \mathbb{N}$ последовательностей корней $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_{n,k} \to +\infty$ при $k \to \infty$, каждый корень $\lambda_{n,k}$ расположен на промежутке $(\widehat{\lambda}_{n,k}; \lambda_{n,k+1}^0)$, где $\lambda_{n,k+1}^0$ определены в* (27)*, а $\widehat{\lambda}_{n,k} := \pi^2 k^2 + n^2$ — нули функции $F_n(\lambda)$, т.е. те значения в которых $\sin\sqrt{\lambda - n^2} = 0$. При $k \to \infty$ справедлива асимптотическая формула $\lambda_{n,k} = \widehat{\lambda}_{n,k} + o(1)$.*

**Замечание 3.** Как следует из двух вариантов графического решения уравнения (25), на промежутке $(0; \lambda_{n,1}^0)$ могут находится еще два вещественных корня $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$, если графики функций $F_n(\lambda)$ и $P_n(\lambda)$ пересекаются, и отсутствуют в противном случае.

### 3.2. **Качественное исследование.**

**Лемма 3.** *При любом $n \in \mathbb{N}$ уравнение* (25) *имеет не менее одной и не более двух пар невещественных комплексно сопряженных корней.*

*Доказательство.* Согласно уравнению (25) и обозначениям (23) и (26), имеем

$$F_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\left((k-1/2)\pi\right)^2 + n^2 - \lambda} = P_n(\lambda) = \frac{n \cdot \lambda \cdot (\rho_2 \lambda^2 + A_n)}{Q_n(\lambda)} =$$

$$= \frac{n \cdot \lambda \cdot (\rho_2 \lambda^2 + A_n)}{\rho_2^2 \cdot \operatorname{th} n \cdot \lambda^4 + \rho_2 \cdot (A_n \cdot \operatorname{cth} n + B_n) \cdot \lambda^2 + A_n \cdot B_n}.$$

Введем функцию

$$F_n^{(N)}(\lambda) := \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{\left((k-1/2)\pi\right)^2 + n^2 - \lambda},$$

Рассмотрим аппроксимирующее уравнение

$$F_n^{(N)}(\lambda) = P_n(\lambda) \qquad (28)$$

в прямоугольнике $\prod_n = [0; a_n] \times [0; b_n]$ с достаточно большими $a_n$ и $b_n$. При $N \to \infty$ имеем $F_n^{(N)}(\lambda) \rightrightarrows F_n(\lambda)$, $\lambda \in \prod_n \subset \mathbb{C}$. По основной теореме алгебры аппроксимирующее уравнение (28) имеет ровно $N + 3$ корня, при этом вещественных корней, как показывает рис. 2 и 3 может быть $N - 1$ (график функции $F_n^{(N)}(\lambda)$ имеет $N$ асимптот). Замечание 3 добавляет к ним еще две пары вещественных или комплексных корня. Далее устремляя $N \to \infty$ в уравнении (28) и используя теорему Руше, получаем утверждение леммы. $\square$

**Лемма 4.** *При достаточно больших $n$ уравнение* (25) *имеет ровно одну пару невещественных комплексно сопряженных корней.*

*Доказательство.* В силу леммы 3 достаточно установить, что на $(0;\lambda^0_{n,1})$, $\lambda^0_{n,1} = (\pi/2)^2 + n^2$, при больших $n$ графики функций $F_n(\lambda)$ и $P_n(\lambda)$ пересекаются.

Покажем, что при больших $n$

$$F_n(n^{3/2}) < P_n(n^{3/2}), \tag{29}$$

а так как $F_n(0) = n^{-1}\,\mathrm{th}\; n$ и $P_n(0) = 0$, то устанавливаемый факт имеет место.

Действительно,

$$F_n(n^{3/2}) = \frac{\mathrm{th}\,\sqrt{n^2 - n^{3/2}}}{\sqrt{n^2 - n^{3/2}}} = \frac{\mathrm{th}\,\left(n \cdot \sqrt{1 - n^{-1/2}}\right)}{n \cdot \sqrt{1 - n^{-1/2}}} = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$P_n(n^{3/2}) = \frac{n \cdot n^{3/2} \cdot (\rho_2 n^3 + A_n)}{\rho_2^2 \cdot \mathrm{th}\; n \cdot n^6 + \rho_2 \cdot (A_n \cdot \mathrm{cth}\; n + B_n) \cdot n^3 + A_n \cdot B_n},$$

где если $\sigma_i > 0$ $(i = 1, 2)$, то в силу (23) $A_n = O(n^3)$, $B_n = O(n^3)$, если $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2)$ имеем $A_n = O(n)$, $B_n = O(n)$. Отсюда получаем, что в обоих случаях $P_n(n^{3/2}) \backsim C \cdot n^{-1/2}$ $(C > 0,\ n \to \infty)$, т.е. неравенство (29) имеет место при достаточно больших $n$. □

### 3.3. Асимптотическое исследование.

**Лемма 5.** *Для корней $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$ расположенных на $(0, \lambda^0_{n,1})$ имеет место асимптотические формулы:*

$$\lambda_n^{(1)} = \sigma_1 \cdot n + \sigma_1^2 \cdot \left(\rho_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} \cdot \left(g\Delta\rho_1 + 2 \cdot \sigma_1^3 \cdot \left(\rho_2 + \frac{1}{2}\right)^2\right) + O(n^{-2}),$$

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\sqrt{1 + 4\rho_2^2} - 1}{2\rho_2^2}\; n^2\; (1 + o(1)), \quad n \to \infty. \tag{30}$$

*Доказательство. I шаг.* Так как корень $\lambda_n^{(1)}$ лежит левее точки $n^{3/2}$, то естественно его искать в виде

$$\lambda_n^{(1)} = c_1 \cdot n + c_0 + c_{-1} \cdot n^{-1} + O(n^{-2}) \quad (n \to \infty).$$

Заметим теперь, что при $n \to \infty$ $th\, n \sim 1$ и $\mathrm{cth}\; n \backsim 1$, а потому, с учетом разложения для $\lambda_n^{(1)}$, правая часть (25) эквивалентна функции

$$\frac{n \cdot \lambda_n^{(1)}}{\rho_2 \cdot (\lambda_n^{(1)})^2 + B_n}.$$

Далее, аналогично получаем, что $th\sqrt{n^2-\lambda_n^{(1)}} \backsim 1 \;\; (n \to \infty)$. Отсюда следует, что искомый корень с точностью до отброшенных экспоненциальных членов можно найти из уравнения

$$n \cdot \lambda_n^{(1)} \cdot \sqrt{n^2-\lambda_n^{(1)}} = \rho_2 \cdot (\lambda_n^{(1)})^2 + B_n, \quad B_n = n \cdot \left(g\Delta\rho_1 + \sigma_1 n^2\right).$$

Применение метода неопределенных коэффициентов дает

$$c_1 = \sigma_1, \quad c_0 = \sigma_1^2 \cdot \left(\rho_2 + \frac{1}{2}\right), \quad c_{-1} = g\Delta\rho + 2\cdot\sigma_1^3 \cdot \left(\rho_2 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

*II шаг.* Второй корень $\lambda_n^{(2)}$ естественно искать в виде $\lambda_n^{(2)} = \varepsilon\, n^2 \; (1+o(1)),\; n \to \infty$, $\varepsilon > 0$. Сравнение главных членов в левой и правой части уравнения (25) показывает, что $\varepsilon$ следует выбирать равным

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+4\rho_2^2}-1}{2\rho_2^2} < 1,$$

отсюда следует формула (30). □

Рассмотрим теперь свойства невещественных корней уравнения (25).

**Лемма 6.** *Невещественный корень* $\lambda_n^+$ *уравнения* (25) *(существование и единственность которого при больших доказано в лемм 4) локализуется в области*

$$\left|\lambda - i\cdot\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\right| < R_n, \quad R_n = O\left(\frac{A_n(1-\operatorname{th}\, n)}{n^{2-\varepsilon}}\right), \; \forall\, \varepsilon > 0. \tag{31}$$

*Доказательство.* Представим уравнение (25) в виде

$$n\,\lambda\,(\rho_2\lambda^2 + A_n) = \frac{\operatorname{th}\sqrt{n^2-\lambda}}{\sqrt{n^2-\lambda}} \cdot Q_n(\lambda) = \frac{\operatorname{th}\sqrt{n^2-\lambda}}{\sqrt{n^2-\lambda}} \cdot$$
$$\cdot \left(\lambda^4\,\rho_2^2\,(\operatorname{th}\, n - 1) + \lambda^2\,\rho_2\,A_n\,(\operatorname{cth}\, n - 1) + (\rho_2\lambda^2 + A_n)\cdot(\rho_2\lambda^2 + B_n)\right). \tag{32}$$

Пусть $\lambda = i\sqrt{A_n/\rho_2} + z,\; |z| = R_n$, тогда левая часть (32) оценивается следующим образом:

$$|n\,\lambda\,(\rho_2\lambda^2 + A_n)| = n\cdot\left|i\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}} + z\right| \cdot \rho_2 \cdot \left|\lambda - i\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\right| \cdot \left|\lambda + i\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\right| \geq$$
$$\geq K_1 \cdot n \cdot \sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}} \cdot \rho_2 \cdot |z| \cdot \sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}} = K_1 \cdot A_n \cdot R_n \cdot n, \quad K_1 = \text{const}. \tag{33}$$

Далее, оценим сверху на этой же окружности $|z| = R_n$ слагаемые в правой части (32):

$$\left|\frac{\text{th}\,\sqrt{n^2-\lambda}}{\sqrt{n^2-\lambda}}\right| \le K_2 \cdot n^{-1}, \quad \left|\lambda^4\,\rho_2^2\,(\text{th}\;n-1)\right| \le K_3 \cdot A_n^2 \cdot (1-\text{th}\;n), \tag{34}$$

$$\left|\lambda^2\,\rho_2\,A_n\,(\text{cth}\;n-1)\right| \le K_4 \cdot A_n^2 \cdot (1-\text{th}\;n), \tag{35}$$

$$\left|(\rho_2\lambda^2+A_n)\cdot(\rho_2\lambda^2+B_n)\right| = \rho_2^2 \cdot \left|\left(\lambda - i\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\right)\cdot\left(\lambda + i\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\right)\right| \cdot$$
$$\cdot\left|\lambda^2+\frac{B_n}{\rho_2}\right| \le K_5 \cdot R_n \cdot A_n^{3/2}. \tag{36}$$

Из (34)–(36) следует, что каждое слагаемое в правой части (32) есть величины порядков соответственно $A_n n^{-1}(1-\text{th}\;n)$, $A_n n^{-1}(1-\text{th}\;n)$, $A_n^{3/2}n^{-1}R_n$. Отсюда и из (33) следует, что при $n \to \infty$ третье слагаемое справа в (32) есть бесконечно малая по сравнению с левой частью (32) на любой окружности $|z| = \left|\lambda - i\,\sqrt{A_n/\rho_2}\right| = R_n$. Если теперь выбрать $R_n$ из требования

$$\frac{A_n^2\cdot n^{-1}\cdot(1-th\,n)}{n\cdot A_n\cdot R_n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

взять, например, величину $R_n$ в виде второго равенства (31), то по теореме Руше получаем, что внутри круга (31) уравнение (32) имеет столько же нулей, сколько и укороченное уравнение $n\lambda(\rho_2\lambda^2+A_n)=0$, то есть один корень. □

Получим теперь первый член асимптотического разложения для корня $\lambda_n^+$ из верхней полуплоскости.

**Лемма 7.** *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_n^+ = i\,\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}} + \gamma_n\,[1+o(1)] \quad (n\to\infty), \tag{37}$$

$$\gamma_n = 2A_n n^{-2}e^{-2n}\cdot G(n), \quad G(n) := \begin{cases}\sigma_1 n^3, & \sigma_i>0,\, i=1,2;\\ \rho_2 g n, & \sigma_i = 0,\, i=1,2.\end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть $\lambda = i\,\sqrt{A_n/\rho_2}+z_n$, тогда в силу (31) имеем

$$|z_n| < C\cdot\left(A_n(1-\text{th}\;n)\cdot n^{-(2-\varepsilon)}\right), \quad \varepsilon>0, \quad C=\text{const}. \tag{38}$$

Подставим представление для $\lambda$ в левую и правую части (32), предварительно перенеся третье слагаемое справа налево, получим

$$\begin{aligned}
&n \cdot \left( i \sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}} + z_n \right) \cdot \left( 2\sqrt{\rho_2 A_n}\, z_n\, i + \rho_2\, z_n^2 \right) - \\
&- n^{-1}[1+o(1)] \cdot \left( 2\sqrt{\rho_2 A_n}\, i + \rho_2\, z_n^2 \right) \cdot z_n \cdot \left( B_n - A_n + 2\sqrt{\rho_2 A_n}\, z_n\, i + \rho_2\, z_n^2 \right) = \\
&= n^{-1}[1+o(1)] \cdot \left( -A_n^2[1+o(1)]\,(1-\operatorname{th} n) - A_n[1+o(1)]\,A_n\,(1-\operatorname{th} n) \right) = \\
&= -2n^{-1}A_n^2(1-\operatorname{th} n)\,[1+o(1)].
\end{aligned}$$

Из представления $A_n$ (см. подробнее (23)) и (38) следует, что в левой части полученного равенства при $n \to \infty$ второе слагаемое имеет более высокий порядок малости, поэтому, выделяя главные члены, приходим

$$z_n = \frac{-2n^{-1}A_n^2(1-\operatorname{th} n)}{n\sqrt{\frac{A_n}{\rho_2}}\, i \cdot 2\sqrt{\rho_2 A_n}\, i}\,[1+o(1)] = 2A_n^2 n^{-2} e^{-2n}\,[1+o(1)],$$

при этом учтено, что $1 - \operatorname{th} n \sim 2e^{-2n}$ при $n \to \infty$. □

## 4. Заключение

**4.1. Структура модельной задачи.**

1. Задача (12)–(16) имеет дискретный спектр, расположенный в правой полуплоскости.

2. Все собственные значения можно разбить на несколько счетных множеств (ветвей), отвечающим различным с физической точке зрения видам нормальных колебаний.

3. Ветви $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $\lambda_{nk} > 0$, отвечают апериодически затухающие режимы, для которых декременты затухания могут быть как угодно велики ($\lambda_{nk} \to \infty$ при $n, k \to \infty$) и слабо зависят от $\rho_2$, то есть от наличия либо отсутствия слоя идеальной жидкости.

4. Имеются также две ветви собственных значений $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$, которым, по-видимому, отвечают пограничные волны на границе раздела двух сред. При этом ветви $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ отвечают апериодические решения, декремент затухания которых существенно зависит от наличия верхнего слоя с плотностью $\rho_2$ (см. подробнее (30)).

5. Ветви $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ отвечают решения, апериодически затухающие со временем, причем для этих решений декремент затухания существенно зависит от того, принимаются во внимание либо нет капиллярные силы. В первом случае ($\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$)

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{(1)} = +\infty$ (см. (30)), то есть таким решениям отвечают как угодно быстро затухающие колебания. Во втором случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{(1)} = 0$ при $\sigma_i = 0$, $i = 1, 2$, то есть соответственные решения могут затухать как угодно медленно.

6. Двум ветвям $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ невещественных собственных значений отвечают колебательные режимы с частой $\sqrt{A_n/\rho_2}$ и декрементом затухания $\gamma_n > 0$ (см. (37)). По-видимому, этим собственным значениям отвечают поверхностные колебания верхнего слоя системы. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} Re\,\lambda_n^{\pm} = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, то влияние нижнего слоя на декремент затухания этих решений с большими номерами пренебрежимо мало.

4.2. **Гипотезы о структуре спектра гидродинамической задачи.** Из рассмотрения модельной скалярной задачи естественно вытекают следующие гипотезы о структуре спектра реальной гидродинамической задачи о нормальных колебаниях двух слоев жидкостей, расположенных в произвольном сосуде, из которых нижний слой состоит из вязкой, а верхний — из идеальной жидкости.

1. Спектр гидродинамической задачи дискретен (с возможными предельными точками 0 и $\infty$) и расположен в правой полуплоскости. Если жидкости капиллярные, то существует лишь одна предельная точка на бесконечности. Если жидкости тяжелые, то есть капиллярные силы не учитываются, то появляется еще одна точка — нуль.

2. Для капиллярных жидкостей имеется три ветви собственных значений, отвечающих соответственно диссипативным волнам в нижней жидкости, пограничным волнам на границе раздела жидкостей и поверхностным волнам на свободной поверхности верхней жидкости. Первая и вторая ветви расположены на положительной полуоси, а третья локализована в окружности мнимой оси.

3. Для тяжелых жидкостей ветвь, отвечающая пограничным волнам на границе раздела сред, имеет своей предельной точкой нуль.

## Список литературы

1. Бабский, В. Г. Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А . Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

   BABSKII, V. G., KOPACHEVSKY, N. D., MYSHKIS, A. D., SLOBOZHANIN, L. A., TYUPTSOV, A. D. (1976) *Weightlessness hydromechanics.* Moscow: Nauka.

2. Закора, Д. А., Копачевский, Н. Д. О малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы «вязкая жидкость + система идеальных жидкостей». — Матем. физ., анал., геом, . — 2002 с.Т. 9420–426

ZAKORA, D. A., KOPACHEVSKII, N. D. (2002) On small motions and normal oscillations of a "viscous fluid + system of ideal fluids" hydrosystem. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 9. p. 420–426.

3. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

KOPACHEVSKY, N.D., KREIN, S. G., and NGO ZUY CAN (1989) *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

**УДК: 534.113:62-52**

**MSC2010: 93B52**

# АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРУПНОГАБАРИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**© С. А. Кумакшев**

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
просп. Вернадского, 101, корпус 1, Москва, 119526, Российская Федерация
e-mail: *kumak@ipmnet.ru*

**Active damping of vibrations of large-size structures.**

**Kumakshev S. A.**

**Abstract.** Large-sized systems that carry a payload, usually concentrated at its end, are subject to undesirable vibrations. The task of damping such vibrations is very relevant. The article examines a similar mechanical system equipped with a special unit designed for active vibration damping. As a carrying mechanical system, a long beam is assumed, at the end of which the payload is placed. Structures of this type are used, for example, in the composition of spacecraft. In such devices, as a rule, the payload, in the form of equipment for remote sensing of the Earth or telescopes for observing the stars, is carried out on a long rod. The mass of the equipment exceeds the mass of the rod and such a design oscillate due to vibrations associated with the activity of the spacecraft itself or due to the operation of the engines for orbit correction. This leads to blurring of the images obtained from the equipment. To improve the image quality, it is necessary to extinguish these unwanted oscillations of the equipment. It is proposed to do this with a special device for active vibration damping. It consists of a guide placed perpendicular to the load-bearing beam at its end. Along this guide, under the action of an electric motor, a damper of a certain mass moves. By moving the damper, it is possible to achieve damping of vibrations of the beam with the equipment. To do this, you need to control the movement of this vibration damper. The control is based on linear feedback. Four parameters are taken into account: the speed of the equipment and the damper, and the position of the equipment and the dampener. Depending on these parameters, the linear feedback coefficients are formed in the law of motion control of the damper. With some reasonable assumptions, the equations of motion of such a mechanical system, including the control force, are written out. This control force is to be determined depending on the requirements for the transition process. One can suggest such a requirement as maximizing the stability of the entire system during the transition process. Then, analyzing the roots of the characteristic polynomial, we can establish a relationship between the feedback coefficients, and then express the three coefficients through the fourth. The choice of this fourth coefficient can be made for geometric reasons. Namely, assuming the symmetry of the guide and, accordingly, the equality of the displacements of the dampener relative to the beam. It turns out that with this control mode, the displacement of the dampener will be significant.

In order to reduce the geometric dimensions of the vibration damping unit, a different control law can be proposed. This law will provide a zero solution to the equations of motion (the equilibrium position) so that it is asymptotically stable. Of course, the transition process is assumed to be stable, and the displacements of the damper are symmetric. It is found that in this mode, the displacement of the dampener is less, and the transition time is longer than in the previously proposed control mode. To achieve such a transition process, in which the displacement of the dampener and the time will be less than in the first and second control modes, respectively, a combined control law can be proposed. It will consist in the fact that during the transition process, the feedback coefficients will switch from the set for the first control mode to the set for the second mode. It is possible to propose a control law that contains only one switching moment. The proposed combined control can be characterized as a piecewise linear control with a step-by-step switching of the feedback coefficients. This study can be used to determine the limiting possibilities of damping unwanted vibrations of large-sized beam-type structures by moving the internal mass (dampener).

***Keywords***: *active damping of oscillations, linear feedback control*

## 1. Введение

Крупногабаритные нагруженные конструкции, несущие полезную нагрузку, широко применяются на практике. В качестве примера можно привести размещение оптических приборов на длинной штанге для наблюдения за поверхностью Земли с борта космического аппарата или станции. Из-за вибраций, идущих от работающего оборудования, размещенного на таком аппарате, или в результате работы двигателей при изменении орбиты, такая конструкция подвержена нежелательным колебаниям, размывающим изображения, полученные оптическими приборами. Это одна из важных проблем, решаемая при проектировании космических аппаратов с такими приборами. Для гашения таких колебаний предлагается использовать управляемое перемещение внутренней массы. Устройство для гашения колебаний состоит в управляемом перемещении внутренней массы (гасителя) по направляющей, перпендикулярной несущей штанге. Управление происходит посредством силы взаимодействия гасителя с грузом по определенному закону. Предложен линейный закон управления по обратной связи по отклонению и скорости как гасителя относительно конца балки, так и груза относительно станции. В рамках исследования предложены несколько способов управления: максимизирующий степень устойчивости такой колебательной системы, «мягкое» гашение колебаний и комбинированное управление с переключением коэффициентов обратной связи. Эти разные подходы к формированию коэффициентов обратной связи обладают разными преимуществами и недостатками. При максимизации степени устойчивости время переходного процесса относительно мало, но довольно большое отклонение гасителя. При «мягком» гашении амплитуда отклонения гасителя относительно мала, но увеличивается время переходного процесса. Комбинированное управление, состоящее в переключении коэффиицентов обратной связи, предложено как компромисс и приводит к небольшой амплитуде отклонения гасителя при небольшом времени переходного процесса. Результаты исследования могут быть использованы при выяснении предельных характеристик процесса активного гашения колебаний крупногабаритных несущих конструкций.

## 2. Механическая модель

Предполагается, что все тела системы совершают плоско-параллельные движения. Мы будем рассматривать поперечные колебания штанги и их гашение при помощи предложенного устройства. Исследование проведено в рамках упрощенной математической модели, не учитывающая эффекты второго порядка: влияние движения штанги и платформы на движение космического аппарата. Штанга подверженна слабому изгибу в плоскости движения и моделируется нерастяжимым тонким упругим стержнем. На основе такой упрощенной модели предлагаются различные законы управлением электроприводом гасителя, что обеспечивает гашение колебаний штанги.

Будем рассматривать плоское движение механической системы [1, 2], изображенной на рис. 1. Эта система состоит из абсолютно твердого тела 1, точечной массы 2 $M$, соединенной с телом 1 упругим стержнем 3 (балкой длинной $l$). Точечная масса 4 $m$ может перемещаться вдоль направляющей 5 ($\eta$ — смещение). Направляющая перпендикулярна оси стержня и жестко закрепленна на его конце. Смещение конца стержня $u(l,t) = \xi$.

Тело 1 моделирует космический аппарат, точечная масса 2 — платформу с измерительной аппаратурой, стержень 3 — соединительную штангу, а точечная масса 4 — тело гасителя. Предполагается, что тело гасителя приводится в движение посредством электромотора.

Такая система представляет модель колебательной системы с гасителем, управляя которым, можно погасить нежелательные колебания системы. Масса $M$ моделирует полезную нагрузку, чьи колебания должны быть подавлены. Тело $m$ моделирует тело гасителя, связанного с телом $M$ посредством направляющей, вдоль которой действует управляющая сила $F$.

Ранее, вопросы влияния движения внутренней массы на движение всей системы рассматривались для других систем [3]. Вопросы гашения колебаний рассматривались, преимущественно, для манипуляторов [4].

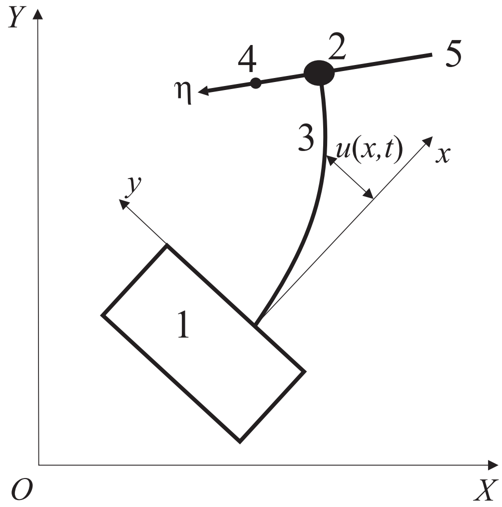


*Рис.* 1. Механическая модель.

## 3. Уравнения движения

Рассматрим плоское движение механической системы, изображенной на рис. 1 и выпишем уравнения движения.

Предположим, что балка с полезной нагрузкой не испытывает растяжения и при колебаниях испытывает только деформацию изгиба. Также предположим, что эти деформации малы. Тогда мы можем использовать линейную теорию слабого изгиба тонких прямолинейных стержней при выводе уравнений [5].

Сделаем дополнительные предположения относительно масс в этой системе. Будем предполагать, что общая масса полезной нагрузки и тела гасителя значительно больше массы балки (квазистатическое приближение [6]).

Также предположим, что расстояние между нагрузкой и телом гасителя того же порядка, что и смещение нагрузки при деформации балки.

Процесс гашения колебаний начнется в тот момент, когда процесс переориентиации космического аппарата будет завершен [7]. Это означает, что линейные и угловые скорости и ускорения космического аппарата равны нулю. Также на систему не действуют внешние силы и моменты.

При сделанных предположениях движение рассматриваемой механической системы можно описать так:

$$(M+m)\ddot{\xi}+m\ddot{\eta}+k\xi=0, \qquad m(\ddot{\xi}+\ddot{\eta})=F \tag{1}$$

где $\xi = u(l,t)$ — смещение массы $M$ на конце балки по отношению к положению равновесия, $k$ — коэффициент жесткости, а $\eta$ — смещение массы $m$ по отношению к массе $M$.

## 4. Управляющая сила

Выберем управляющую силу $F$ таким образом, чтобы гашение колебаний происходило с определенными характеристиками переходного процесса. Зададим их позже, а пока будем искать управление в виде линейной обратной связи

$$F = a\xi + b\dot{\xi} - c\dot{\eta} - d\eta \tag{2}$$

где $a$, $b$, $c$ и $d$ неизвестные коэффициенты, которые будут определены таким образом, чтобы обеспечить стабилизацию нулевого положения равновесия всей системы. Их физический смысл таков: $a$ определяет зависимость от смещения полезной нагрузки, $b$ — зависимость от скорости полезной нагрузки, $c$ и $d$ определяют зависимость от смещения и скорости гасителя соответственно. Знак минус перед коэффициентами $c$ и $d$ поставлен исходя из физики процесса: когда полезная нагрузка смещается в одну сторону, для гашения колебаний гаситель должен идти в другую сторону. Здесь сделано допущение: $M = 1$ и $k = 1$. Оно не означает ограничение общности и соответствует выбору массы $M$ как единичной массы и выбору отношения $\sqrt{M/k}$ как единицы измерения времени. Теперь приступим в определению неизвестных коэффициентов обратной связи.

## 5. Максимизация степени устойчивости

Выпишем характеристический полином рассматриваемой системы (1)

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda) = \lambda^4 + [(1+m)c + mb]\lambda^3 + \\ +[(1+m)d + ma + 1]\lambda^2 + cd + d.\end{aligned} \tag{3}$$

Величина $S$, определяемая следующим образом

$$S = -\max_{j=1,2,3,4} Re\lambda_j \tag{4}$$

где $\lambda_j$, $j = 1,2,3,4$ — корни характеристического полинома, называется степенью устойчивости и характеризует быстроту затухания свободных колебаний системы.

Чтобы достичь асимптотической устойчивой системы, величина $S$ должна быть положительна, так как $Re\lambda_j < 0, j = 1,2,3,4$. Можно показать, что $S \leq d^{1/4}$ используя теорему Виета $d = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$. Когда все корни одинаковы достигается равенство. В этом случае корни полинома определяются выражением $\lambda_j = -d^{1/4}$ [8].

Получаем связь между коэффициентами $a, b, c, d$, определяющими обратную связь

$$(1+m)c + mb = 4d^{1/4},$$

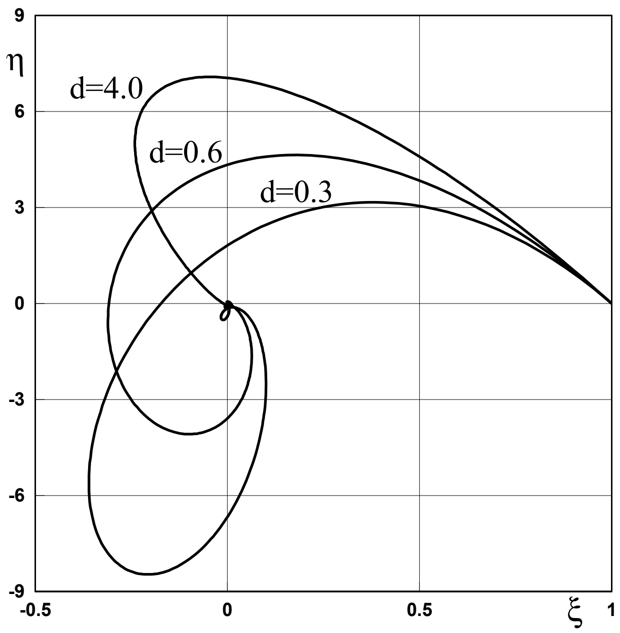


*Рис.* 2. Проекции фазовых траекторий с различными параметрами управления.

$$(1+m)d + ma + 1 = 6d^{1/2}, \qquad c = 4d^{3/4}. \tag{5}$$

Теперь можно выразить через какой-либо один параметр, например $d$, остальные параметры $a, b, c$

$$a = (6d^{1/2} - d(1+m) - 1)/m,$$
$$b = (4d^{1/4} - 4(1+m)d^{3/4})/m, \qquad c = 4d^{3/4}. \tag{6}$$

Таким образом, задача выбора закона управления сведена к выбору одного параметра $d$. Выберем его таким образом, чтобы переходный процесс обладал нужными качествами. В первую очередь, нас интересует время затухания колебаний $\tau \approx d^{-1/4}$ и максимальная амплитуда колебаний массы гасителя.

Зададим некоторые начальные условия

$$\xi(0) = 1, \quad \dot{\xi}(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 0 \tag{7}$$

и построим соответствующие траектории системы для некотрых значений коэффициента $d$. Полученные фазовые траекторий системы (1) с управлением вида (2) спроецируем на плоскость $\xi\eta$ (рис. 2).

При задании начальных условий (7) параметр $\xi$ (смещение полезной нагрузки), был принят равным единице. Это может быть интерпретировано как нормирование на этот параметр. При этом величина $\eta$ приобретает смысл отношения смещения тела гасителя к амплитуде колебания балки.

Для всех кривых на рис. 2 $m = 0.1$. Видно, что траектории имеют два экстремума по переменной $\eta$. При конструировании контроллера выгодно выбрать параметр $d$ таким образом, чтобы величина смещения тела гасителя была одинаковой у этих экстремальных значений. Для данного значения $m$ это примерно достигается для $d \approx 0.6$. При меньших значениях $m$ смещение $\eta$ увеличивается.

## 6. «Мягкое» гашение колебаний

Существенное смещение тела гасителя при выбранном ранее способе управления объясняется слишком сильной обратной связью для скорости и смещения полезной нагрузки. При выборе малых значений массы гасителя $m$ коэффициенты $a$ и $b$ в (6) имеют порядок $1/m$. Полагая $a = b = 1/\sqrt{m}$ мы можем ослабить эту связь. При этом назначим параметры $c$ и $d$ таким образом, чтобы обеспечить нулевое решение системы (1) с управлением (2) асимптотически стабильным. Такое управление назовем «мягкое» гашение колебаний.

Можно показать, что для малых $m$, асимптотическая стабильность при таком подходе достигается для $d < 1$. В этом случае выражение для определения степени устойчивости имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\frac{1-d}{c^2+(1-d)^2}\sqrt{m} + O(m). \tag{8}$$

Для предыдущего способа управления время переходного процесса имело порядок $\tau \sim d^{-1/4}$ для любого $m$. Теперь, предполагая коэффициенты $c$ и $d$ одного порядка малости, время переходного процесса можно оценить как $1/\sqrt{m}$. Таким образом, при мягком гашении, время переходного процесса увеличивается, но появляется возможность уменьшить максимальное отклонение тела гасителя.

На рис. 3 изображены фазовые траектории при $m = 0.1$, $a = b \approx 3.16$, $c = 1.5$ и $d = 0.75$. В этом случае $\max_t |\eta| \approx 2.8$.

Для предыдущего способа управления $\min_d \max_t |\eta| \approx 4.6$ (при $d = 0.6$).

Сравним характерные времена переходных процессов в обоих случаях: при максимизации степени устойчивости $\tau_1 = d^{1/4}$ и для мягкого гашения колебаний $\tau_2 = 2[c^2+(1-d)^2]/[\sqrt{m}(1-d)]$. При выбранных ранее параметрах получим $\tau_2/\tau_1 \approx 51$ для $m = 0.1$ и $\tau_2/\tau_1 \approx 163$ для $m = 0.01$. Таким образом уменьшение отклонения тела гасителя при мягком гашении сопровождается существенным увеличением времени переходного процесса.

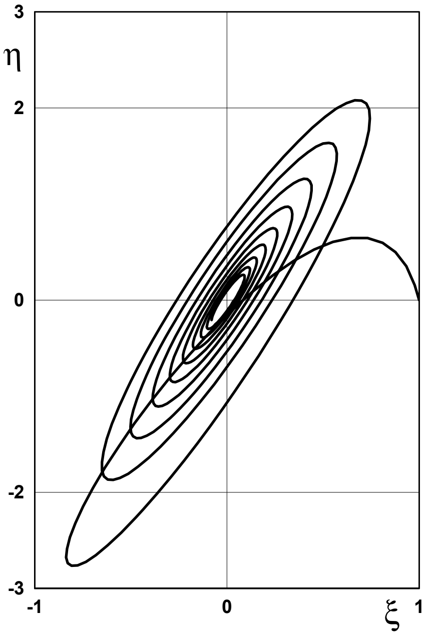


*Рис.* 3. Проекции фазовых траекторий при мягком гашении.

Оптимизируя сразу два требования — отклонение тела гасителя и время гашения колебаний — можно применить комбинированное управление.

## 7. Комбинированное управление

Чтобы добиться уменьшения как времени переходного процесса, так и максимального отклонения тела гасителя одновременно, можно предложить комбинацию из предложенных режимов управления. Новое, комбинированное управление, будет иметь по-прежнему форму (2), но коэффициенты $a$, $b$, $c$ и $d$ не будут постоянными в течении всего процесса гашения колебаний. Они будут по-прежнему выбираться в соответствии с одним из ранее предложенных режимов управления, но в некоторый момент времени будет происходить переключение этих параметров со значений, отвечающих одному режиму, на другой. Таким образом, комбинированное управление будет состоять из кусков ранее предложенных управлений.

В отличии от [1, 2], предлагаемый комбинированный режим имеет одно переключение с одного управления на другое. Предлагается начать с режима мягкого гашения и затем переключиться на режим максимизации степени устойчивости. Время переключения не вычисляется, а подбирается таким образом, чтобы максимальное отклонение тела гасителя после переключения не увеличилось. Такой подход обеспечивает гашение колебаний за приемлемое время при умеренных отклонениях массы гасителя.

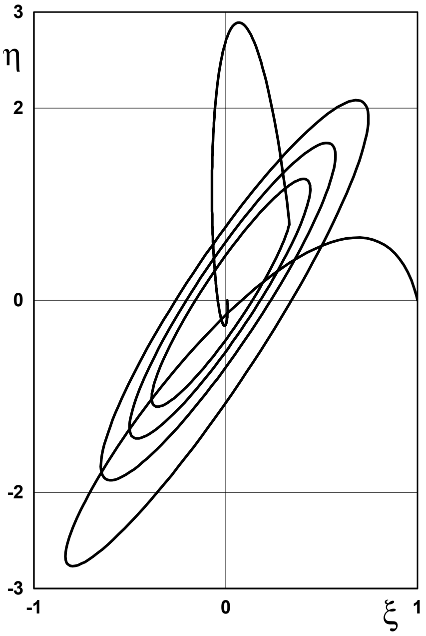


*Рис.* 4. Проекции фазовых траекторий при комбинированном управлении.

Излом на фазовой траектории означает точку переключения с одного набора коэффициентов $a$, $b$, $c$ и $d$ на другой.

В этом случае, как показано на рис. 4, максимальное отклонение тела гасителя $|\eta|$ после переключения примерно равно максимальному отклонению до переключения.

Предложенное комбинированное управление можно охарактеризовать как кусочно-линейное управление со скачкообразным переключением коэффициентов обратной связи. В качестве недостатка такого комбинированного управления можно отметить, что для выбора точек переключения необходимо оперативно получить точные значения фазовых переменных системы.

## Заключение

Данное исследование может быть использовано для для оценки возможности гашения колебаний упругих крупногабаритных конструкций балочного типа при помощи перемещения внутренней массы. Предложенные линейные и кусочно-линейный законы управления таким гасителем по обратной связи позволяют привести систему в состояние покоя. Эти законы управления обладают разными достоинствами и недостатками. Управление, максимизирующее степень устойчивости системы, позволяет достичь наименьшего времени переходного процесса, но за счет большой амплитуды гасителя. Режим мягкого гашения колебаний приводит к наименьшей амплитуде тела гасителя, что уменьшает габариты системы гашения колебаний, но за счет увеличения времени переходного процесса. Комбинированное (кусочно-линейное) управление приводит к сравнительно небольшим времени процесса и амплитуде гасителя, но требует оперативно получать точные значения фазовых переменных системы для выбора точки переключения.

Работа выполнена по теме государственного задания АААА-А20-120011690138-6.

## Список литературы

1. AKULENKO, L. D., BOLOTNIK, N. N., KUMAKSHEV, S. A., and CHERNOV, A. A. (2000) Active damping of vibrations of large-sized load-carrying structures by moving internal masses. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 39 (1). p. 128–138.

2. AKULENKO, L. D., BOLOTNIK, N. N., and KUMAKSHEV, S. A. (2000) Controlled damping of elastic vibration by means of motion of internal masses. *2nd International Conference. Control of Oscillations and Chaos. Proceedings. St. Petersbug, Russia.* 2. p. 331–334.

3. AKULENKO, L. D., BOLOTNIK, N. N., KUMAKSHEV, S. A., and NESTEROV, S. V. (2006) Control of motion of an inhomogeneous cylinder with internal movable masses along a horizontal plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 70 (6). p. 843–858.

4. AKULENKO, L. D. (1994) *Problems and Methods of Optimal Control.* KLUWER, Dordrecht.

5. TIMOSHENKO, S. P. (1955) *Vibration Problems in Engineering (Third Edition).* D. Van Nostrand, New York.

6. TIKHONOV, A. N., and SAMARSKII, A. A. (2013) *Equations of Mathematical Physics.* Courier Corporation.

7. JUNKINS, J. L., and TURNER, J. D. (1986) *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers.* Elsevier, Amsterdam.

8. ZAJAC, E. (1963) Bounds of the decay rate of damped linear systems. *Quart. Appl. Math.* 20 (4).

**УДК: 517.95**
**MSC2010: 47A10**

# ВОЗМУЩЕННЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

**© А. Р. Якубова**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *alika.yakubova.1993@mail.ru*

## Perturbed initial boundary value conjugation problems.

**Yakubova A. R.**

**Abstract.** The non-self-adjoint boundary value, spectral and initial boundary value problems generated by the sesquilinear form were considered in the author's previous works. Such problems were studied in the case of one domain. The existence of weak solutions of the boundary value problems were obtained. Based on these boundary value problems, non-self-adjoint spectral problems were investigated. The theorems on the discreteness of the spectrum were proved. Also the theorems on localization and the asymptotic behavior of the eigenvalues were obtained. The properties of completeness and basicity of the system of eigenfunctions and associated (root) functions were studied. For the initial boundary value problems which generate the considered spectral problems, the theorems about existence of strong solutions were proved.

Based on the already considered problems the mixed spectral conjugation problems in the case of two domains were considered. In this paper we study the perturbed initial boundary value problems generated by the sesquilinear form. In this case, the principle of superposition is used. The principle makes it possible to represent the solution of the original problem as a sum of solutions to auxiliary problems. These auxiliary problems contain inhomogeneity in only one place, that is, either in the equation or in one of the boundary conditions. The operator methods of mathematical physics in areas with Lipschitz boundaries during research are used. The original initial-boundary value problem is reduced to the Cauchy problems for a first-order integro-differential and differential-operator equations. The theorems on the existence and uniqueness of a strong solutions to the Cauchy problems in the case of two domains were proved.

***Keywords***: *initial boundary problem, strong solution, Green's formula, sesquilinear form, transmission problem, Hilbert space*

## Введение

В предыдущих работах автора (см., например, [1, 2]) рассматривались несамосопряженные краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные обобщенной формулой Грина для оператора Лапласа в случае одной области. Доказано существование слабых решений краевых задач Дирихле и Неймана-Ньютона. На основе этих краевых задач исследованы несамосопряженные спектральные проблемы Дирихле, Неймана-Ньютона, Стеклова, Стефана, а также для других классов возмущенных спектральных задач, встречающихся в приложениях. Таких как: задача С. Г. Крейна (колебания вязкой жидкости в частично заполненном контейнере), И. Д. Чуешова (поверхностная диссипация энергии), М. С. Аграновича (теория дифракции). Для них доказаны теоремы о дискретности спектра, его локализации, об асимптотическом поведении собственных значений, о полноте и базисности системы собственных и присоединенных (корневых) функций. Для начально-краевых задач, порождающих изученные спектральные задачи, доказаны теоремы существования сильных по времени решений, указаны классы функций, в которых выполняются уравнения и граничные условия задачи.

На основе указанных задач исследованы возмущенные краевые, спектральные и начально-краевые задачи сопряжения для двух областей. При этом использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи в виде суммы решений четырех вспомогательных краевых задач (невозмущенных), содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. Для краевых задач доказаны теоремы о существовании и единственности слабого решения.

На основе изложенного выше подхода для краевых задач исследованы спектральные задачи сопряжения при первом и втором условиях сопряжения. Установлено, что исходные проблемы приводятся к исследованию операторного пучка, который зависит от двух комплексных параметров, один из которых считается фиксированным, а другой — спектральным. Выведены свойства решений возмущенных и невозмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения.

В данной работе рассмотрены возмущенные начально-краевые задачи при первом условии сопряжения. Доказаны теоремы о сильной разрешимости каждой из них на положительной полуоси.

## 1. Возмущенная смешанная спектральная задача сопряжения

Для рассмотрения возмущенных начально-краевых задач, приведем сначала формулировку и вид слабого решения соответствующей смешанной спектральной задачи сопряжения, исследованной в работе [2].

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (см. рис. 1), разбитой на две подобласти $\Omega_1$ и $\Omega_2$, с липшицевыми границами $\Gamma_{11}$, $\Gamma_{22}$ и границами стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ рассмотрим спектральную задачу. Имеем в областях $\Omega_1$, $\Omega_2$ (см. рис. 1) для искомых функций $u_k(x)$:

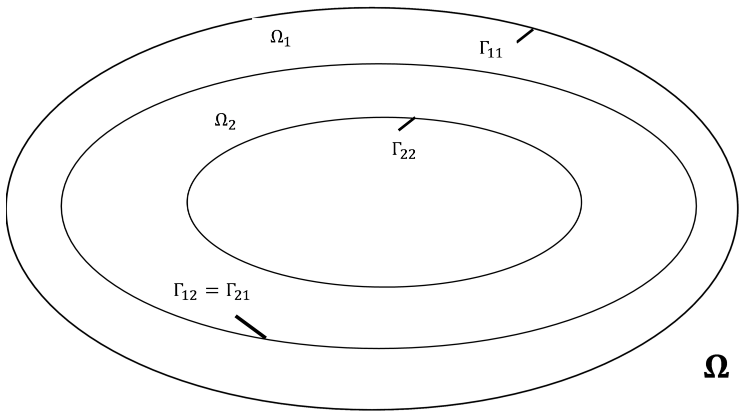


*Рис.* 1

$$
\begin{aligned}
u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\
u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2),
\end{aligned} \tag{1}
$$

на внешних границах:

$$
\begin{aligned}
\partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \widetilde{\psi_1} \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
\partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \widetilde{\psi_2} \quad (\text{на } \Gamma_{22}),
\end{aligned} \tag{2}
$$

на границах стыка два условия сопряжения:
либо

$$
\begin{aligned}
\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \varphi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12} u_2) =\\
= \mu \gamma_{12} u_1 + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),
\end{aligned} \tag{3}
$$

либо

$$
\begin{aligned}
\partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12} u_2) = \mu(\gamma_{12} u_1 - \gamma_{12} u_2) +\\
+ \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12} u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}).
\end{aligned} \tag{4}
$$

В [2] установлено, что слабое решение спектральной задачи при первом условии сопряжения, то есть задачи (1)–(3), удовлетворяет уравнению

$$
\begin{gathered}
u_\varepsilon - \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1u_\varepsilon - \varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2u_\varepsilon + 2\varepsilon A^{-1}\left(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right) - \\
- \varepsilon V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) = \lambda(A^{-1} + V_{11}V_{11}^*)u_\varepsilon + \\
+ \lambda^{-1}(V_{22}(V_{22})^*)u_\varepsilon + \mu V_{21}(V_{21})^*u_\varepsilon,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $V_{kk} = (\gamma_{kk}p_k)^*$.

Осуществляя в (5) замену

$$
u_\varepsilon = A^{-1/2}v_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad \mathscr{D}(A^{1/2}) = H_\Gamma^1(\Omega)
$$

и действуя на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$, получаем задачу

$$
L(\lambda,\mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega),
$$

где $A$ — оператор гильбертовой пары $(H_\Gamma^1(\Omega); L_2(\Omega))$, $0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant B_{11} &:= A^{1/2}V_{11}(V_{11})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\\
0 \leqslant B_{22} &:= A^{1/2}V_{22}(V_{22})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\\
0 \leqslant K_{22} &:= A^{1/2}V_{21}(V_{21})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),
\end{aligned}
$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами $\lambda$ и $\mu$. Один из параметров можем считать фиксированным, другой — спектральным. Здесь оператор $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$,

$$
\begin{aligned}
S := {} & A^{1/2}V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1A^{-1/2} + A^{1/2}V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2A^{-1/2} + \\
& + 2A^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)A^{-1/2} - A^{1/2}V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2).
\end{aligned}
$$

## 2. Возмущенная начально-краевая задача при первом условии сопряжения в случае спектрального параметра $\lambda$

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу, которая порождает соответствующую спектральную задачу (см. [2, с. 95]) со спектральным параметром $\lambda$ и фиксированным $\mu$. Вместо поля скоростей $u(t,x)$ введем поле перемещений сплошной среды $w_\varepsilon(t,x)$, $u_\varepsilon(t,x) = \partial w_\varepsilon/\partial t$. Тогда начально-краевая задача, отвечающая спектральной (5) в случае спектрального параметра $\lambda$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,1}-\Delta w_{\varepsilon,1}+2\varepsilon\sum_{k=1}^{m}c_{1k}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\right)=\widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\
&\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,2}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,2}-\Delta w_{\varepsilon,2}+2\varepsilon\sum_{k=1}^{m}c_{2k}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\right)=\widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);
\end{aligned}\tag{6}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned}
&\partial_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\gamma_{11}\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2}+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}=:\psi_1+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}:=\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}+\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=:\psi_2+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}:=\widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22});
\end{aligned}\tag{7}$$

на границах стыка:

либо

$$\begin{aligned}
&\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=0,\\
&\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=\psi_{21}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})=\\
&=\mu\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21});
\end{aligned}\tag{8}$$

либо

$$\begin{aligned}
&\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=\psi_{21}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})=\\
&=\mu(\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12}),
\end{aligned}\tag{9}$$

$$w_{\varepsilon,k}(0)=w^0_{\varepsilon,k}, \quad \frac{\partial w_{\varepsilon,k}}{\partial t}(0)=w^1_{\varepsilon,k}=u^0_{\varepsilon,k}.\tag{10}$$

Рассмотрим задачу (6), (7) при первом условии сопряжения (8). Используя принцип суперпозиции, можно исследовать задачу (6)-(8), (10) и доказать теорему о ее сильной разрешимости на произвольном промежутке времени. Представим решение $w_\varepsilon(t,x)$ задачи (6)-(8), (10) в виде суммы решений пяти вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в одно из краевых условий лишь в одном месте.

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dw_\varepsilon}{dt}=&A^{-1}(\widetilde{f}-\frac{d^2 w_\varepsilon}{dt^2})+V_{21}(\widetilde{\psi}_{21}-\mu\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\\
&-\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt}))+V_{11}(\widetilde{\psi}_1-\gamma_{11}p_1\frac{d^2 w_\varepsilon}{dt}-\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt})+\\
&+V_{22}(\widetilde{\psi}_2-\gamma_{22}p_2 w_\varepsilon-\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt})+(I+\varepsilon S)\frac{dw_\varepsilon}{dt},
\end{aligned}\tag{11}$$

где $w_\varepsilon = (w_{\varepsilon,1}; w_{\varepsilon,2})$, $\widetilde{f} = (\widetilde{f_1}; \widetilde{f_2})$, $p_1(u_1; 0) := u_1$, $p_2(0; u_2) := u_2$ — ортопроекторы,

$A$ — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2); L_2(\Omega))$, $A = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2)$,

$A_1$ — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1); L_2(\Omega_1))$,

$A_2$ — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2); L_2(\Omega_2))$,

$$H^1(\Omega) = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2).$$

Отсюда возникает задача Коши

$$\begin{aligned}&(A^{-1} + V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2 w_\varepsilon}{dt^2} + \Big[(I + \varepsilon S) - \mu V_{21}(\gamma_{21}p_1 + \\ &+ \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2)) - \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1 + \varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt} + V_{22}\gamma_{22}p_2 w_\varepsilon = \\ &= A^{-1}f + V_{21}\psi_{21} + V_{11}\psi_1 + V_{22}\psi_2,\ w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon^0,\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0) = w_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^0.\end{aligned} \tag{12}$$

Запишем (12) в виде

$$\begin{aligned}&(A^{-1} + V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2 w_\varepsilon}{dt^2} + \Big[(I + \varepsilon \widehat{S}) - \mu V_{21}\gamma_{21}p_1\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt} + V_{22}\gamma_{22}p_2 w_\varepsilon = \\ &= A^{-1}f + V_{21}\psi_{21} + V_{11}\psi_1 + V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon^0, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0) = w_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^0.\end{aligned}$$

В силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega) = L_2(\Omega)$, в последнем уравнении осуществим замену

$$w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon.$$

Имеем

$$\begin{aligned}&(A^{-1} + B_1 p_1)\frac{d^2\eta_\varepsilon}{dt^2} + \Big[(I + \varepsilon\widetilde{S}) - \mu B_{21}p_1\Big]\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + B_2 p_2 \eta_\varepsilon = \\ &\qquad = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21} + A^{1/2}V_{11}\psi_1 + A^{1/2}V_{22}\psi_2 := f_1(t), \\ &\eta_\varepsilon(0) = A^{1/2}w_\varepsilon^0, \quad \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial t}(0) = A^{1/2}w_\varepsilon^1 = A^{1/2}u_\varepsilon^0,\end{aligned}$$

где $B_1 := V_{11}\gamma_{11}$, $B_{21} := V_{21}\gamma_{21}$, $B_2 := V_{22}\gamma_{22}$.

Оператор $A^{-1} + B_1 p_1$ является полным, то есть имеет тривиальное ядро $\mathrm{Ker}(A^{-1} + B_1 p_1) = \{0\}$, следовательно он обратим. Тогда можно сделать еще одну замену

$$\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} = (A^{-1} + B_1 p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon \tag{13}$$

и получить задачу Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\varphi_\varepsilon}{dt} + ((I + \varepsilon\widetilde{S}_1) - \mu B_{21}p_1)(A^{-1} + B_1 p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon +$$

$$+\int\limits_0^t B_2p_2(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon(s)ds = -B_2p_2A^{1/2}w_\varepsilon^0 + A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+$$
$$+A^{1/2}V_{22}\psi_2 + A^{1/2}V_{11}\psi_1, \quad \varphi_\varepsilon(0) = (A^{-1}+B_1p_1)A^{1/2}w_\varepsilon^1. \tag{14}$$

Для исследования проблемы разрешимости задачи (14) воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в [3, с. 21-25], теоремы 1.3.2, 1.3.4.

**Лемма 1.** *Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ задачу Коши*

$$\frac{du}{dt} = A_0u + \int\limits_0^t G(t,s)A_1u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^0.$$

*Предположим, что оператор $A_0$ генерирует голоморфную полугруппу, $\mathscr{D}(A_0) \supset \mathscr{D}(A_1)$, оператор–функции $G(t,s)$ и $\partial G(t,s)/\partial t$ непрерывны на $\triangle_t := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ со значениями в $H$.*

*Пусть $u^0 \in \mathscr{D}(A_0)$, $f \in C^\beta(\mathbb{R}_+;H)$, $\quad 0<\beta\leqslant 1$. Тогда задача (14) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{D}(A_0)) \cap C^1(\mathbb{R}_+;H)$.*

В задаче (14) оператор $-((I+\varepsilon\widehat{S})-\mu B_{21}p_1)(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}$ генерирует голоморфную полугруппу, при этом области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (14) $G(t,s)\equiv I$. Отсюда и из леммы 1 следует утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть*

$$w_\varepsilon^0,\ w_\varepsilon^1 \in H^1_\Gamma(\Omega), \tag{15}$$

$$f\in C^\beta(\mathbb{R}_+;(H^1_\Gamma(\Omega))^*),\ \psi_k \in C^\beta(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma_{jk})),\ j,k=1,2,\ 0<\beta\leqslant 1, \tag{16}$$

*Тогда задача (14) имеет единственное решение $\varphi_\varepsilon(t)$ на $\mathbb{R}_+$, и для этого решения все слагаемые в уравнении (14) являются непрерывными функциями $t\in\mathbb{R}_+$ со значениями в $L_2(\Omega)$.*

Из этой леммы вытекает утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть в задаче (6)-(8), (10) выполнены условия (15), (16),*

$$\mu \notin \sigma((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\mu B_{21}p_1). \tag{17}$$

*Тогда существует единственное сильное решение задачи*

$$w \in C^2(\mathbb{R}_+;(H^1_\Gamma(\Omega))^*) \cap C^1(\mathbb{R}_+;H^1_\Gamma(\Omega)). \tag{18}$$

*Доказательство.* Из условий условий (15), (16) следует, что задача (14), следовательно, и исходная задача имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$. В силу (16) имеем $d\eta_\varepsilon/dt \in C(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$. Далее, в задаче (12), а потому и в (11) $dw_\varepsilon/dt \in C(\mathbb{R}_+; H^1_\Gamma(\Omega))$. Отсюда получаем, что $L_\varepsilon(dw_\varepsilon/dt) \in C(\mathbb{R}_+; (H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, $\partial_{\varepsilon,k}(dw_\varepsilon/dt) \in C(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$.

С учетом (11), аналогично рассуждениям, проведенным выше, устанавливаем, что для функции $w_\varepsilon(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (6)-(8), (10); поэтому, в силу доказанных свойств для уравнения (6), все слагаемые в уравнении (6) — элементы из $C(\mathbb{R}_+; (H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k = 1,2$.

Отсюда получаем, что имеет место свойство (18), включение $\gamma_{11}p_1w_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma_{11}))$, а также выполнены начальные условия (15). □

## 3. Возмущенная начально-краевая задача при первом условии сопряжения в случае спектрального параметра $\mu$

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу при фиксированном параметре $\lambda$, $\mu$ — спектральном. Имеем следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{aligned}
&\Big(w_{\varepsilon,1} - \Delta w_{\varepsilon,1} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,1} = \lambda w_{\varepsilon,1} + \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\
&\Big(w_{\varepsilon,2} - \Delta w_{\varepsilon,2} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,2} = \lambda w_{\varepsilon,2} + \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);
\end{aligned} \tag{19}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned}
&\partial_{11}w_{\varepsilon,1} = \lambda\gamma_{11}w_{\varepsilon,1} + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}w_{\varepsilon,1} =: \widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&\partial_{12}w_{\varepsilon,2} = \lambda^{-1}\gamma_{22}w_{\varepsilon,2} + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}w_{\varepsilon,2} =: \widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22});
\end{aligned} \tag{20}$$

на границах стыка:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{21}w_{\varepsilon,1} - \gamma_{12}w_{\varepsilon,2} = 0,\\
&\partial_{21}w_{\varepsilon,1} + \partial_{12}w_{\varepsilon,2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon) + \varepsilon(\sigma_{21}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon) := \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21});\\
&w_\varepsilon(0,x) = w^0_{\varepsilon,i}(x), \quad x \in \Omega_i,\ i = 1,2.
\end{aligned} \tag{21}$$

Снова, используя принцип суперпозиции и представляя решение $w_\varepsilon \in H^1_\Gamma(\Omega)$ в виде суммы решений пяти вспомогательных задач, для искомой функции $w_\varepsilon = w_\varepsilon(t,x)$ приходим к уравнению

$$
\begin{aligned}
w_\varepsilon =&A^{-1}(\lambda w_\varepsilon + f) + V_{21}(\psi_{21} + \frac{d}{dt}(\gamma_{21}p_1 w_\varepsilon) - \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 w_\varepsilon - \\
&-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2 w_\varepsilon)) + V_{11}(\psi_1 + \lambda\gamma_{11}p_1 w_\varepsilon + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1 w_\varepsilon) + \\
&+V_{22}(\psi_2 + \lambda^{-1}\gamma_{22}p_2 w_\varepsilon + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2 w_\varepsilon) + (I + \varepsilon S)w_\varepsilon
\end{aligned}
\tag{22}
$$

и соответствующей задаче Коши

$$
\begin{aligned}
V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt} +& \Big[(I+\varepsilon S) - \lambda A^{-1} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2) - \\
&-\lambda V_{11}\gamma_{11}p_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1 + V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2)\Big] w_\varepsilon = \\
&=A^{-1}f + V_{21}\psi_{21} + V_{11}\psi_1 + V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon^0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Задачу (23) можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt} + \Big[(I+\varepsilon\widehat{S}) - \lambda(A^{-1} + V_{11}\gamma_{11}p_1) - \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2\Big] w_\varepsilon = \\
= A^{-1}f + V_{21}\psi_{21} + V_{11}\psi_1 + V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon^0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

В силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega) = L_2(\Omega)$, в (24) можно сделать замену

$$
w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \in L_2(\Omega).
$$

Тогда получаем следующую задачу Коши

$$
\begin{aligned}
B_{21}p_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + \Big[(I+\varepsilon\widetilde{S}) - \lambda(A^{-1} + B_1 p_1) - \lambda^{-1}B_2 p_2\Big]\eta_\varepsilon = \\
= A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21} + A^{1/2}V_{11}\psi_1 + A^{1/2}V_{22}\psi_2 =: f_1(t), \\
\eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^0 = A^{1/2}w_\varepsilon^0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
B_{21} := (A^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}p_1 A^{-1/2}) = (\gamma_{21}p_1 A^{-1/2})^*(\gamma_{21}p_1 A^{-1/2}).
$$

Особенностью этой задачи является тот факт, что $B_{21} \geqslant 0$, $\mathrm{Ker}\ \mathrm{B}_{21}$ бесконечномерно. С учетом этого рассмотрим задачу (25) в абстрактной форме. Полагаем, что исследуется задача Коши в произвольном гильбертовом пространстве $H$

$$
B\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I+\varepsilon\widetilde{S}) - \Phi)\eta_\varepsilon = f_1(t), \quad \eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^0,
\tag{26}
$$

где $B$ является неотрицательным компактным оператором,

$$
\mathrm{Ker}\ B \neq \{0\}, \quad \mathrm{Ker}\ B =: H_0, \quad \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H).
\tag{27}
$$

Отметим, что имеет место разложение $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{\mathscr{R}(B)}$ преобразуем задачу (26) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве

$H_1$. Для этого представим элемент $\eta_\varepsilon = \eta_{\varepsilon,0} + \eta_{\varepsilon,1}$, $\eta_{\varepsilon,0} = P_0\eta_\varepsilon = P_0\eta_{\varepsilon,0} \in H_0$, $\eta_{\varepsilon,1} = P_1\eta_\varepsilon = P_1\eta_{\varepsilon,1} \in H_1$, где $P_0$, $P_1$ — ортопроекторы на $H_0$ и $H_1$ соответственно.

Полагаем, что

$$\mathrm{Ker}\,((I + \varepsilon\widetilde{S}) - \Phi) = \{0\}, \quad \mathrm{Ker}\,((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{28}$$

Тогда в силу второго условия оператор $((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)$ обратим. Отсюда получаем задачу Коши

$$\widehat{B}_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I_1 + \varepsilon P_1\widetilde{S}P_1) - \Phi_1)\eta_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \eta_{\varepsilon,1}(0) = \eta^0_{\varepsilon,1} = P_1\eta^0_\varepsilon, \tag{29}$$

$$\widehat{B}_1 := P_1BP_1, \quad \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1),$$
$$f_2 := P_1f + (P_1\Phi P_0)((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f,$$
$$\eta_{\varepsilon,0} = ((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}((P_0\Phi P_1)\eta_{\varepsilon,1} + P_0f),$$

где $\widehat{B}_1 > 0$, $\widehat{B}_1, \Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Осуществим замену в (29)

$$\widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1} = \xi_{\varepsilon,1}, \tag{30}$$

тогда приходим к задаче

$$\frac{d\xi_{\varepsilon,1}}{dt} + ((I_1 + \varepsilon\widetilde{S}_1) - \Phi_1)\widehat{B}_1^{-1}\xi_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \xi_{\varepsilon,1}(0) = \widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1}(0) = B_1P_1\eta^0_\varepsilon. \tag{31}$$

**Лемма 3.** *Пусть в задаче* (26), (27) *выполнены условия* (28),

$$\eta^0_\varepsilon \in H, \quad f_1 \in C^\beta(\mathbb{R}_+; H), \quad 0 < \beta \leqslant 1. \tag{32}$$

*Тогда эта задача имеет единственное решение* $\eta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$.

**Доказательство.** Из условий (32) следует, что

$$\xi_{\varepsilon,1}(0) \in \mathscr{D}((\widehat{B}_1)^{-1}), \quad \widetilde{f_2} \in C^\beta(\mathbb{R}_+; H_1).$$

Уравнение (31) является абстрактным параболическим, так как $\widehat{B}_1^{-1}$ — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Следовательно, существует единственное сильное решение задачи (30) на $\mathbb{R}_+$, то есть $\xi_{\varepsilon,1} \in C^1(\mathbb{R}_+; H_1) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathscr{D}((\widehat{B}_1)^{-1}))$. Тогда задача (29) имеет единственное сильное решение $\eta_\varepsilon(t)$, для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C(\mathbb{R}_+; H_1)$. Так как $(I_1 + \varepsilon\widetilde{S}_1) - \Phi_1$ обратим в силу условий (28), отсюда получаем, что $\eta_{\varepsilon,1} \in C(\mathbb{R}_+; H_1)$.

Возвращаясь от (29) к исходной задаче (26), получаем утверждение леммы.

**Теорема 2.** *Пусть в задаче* (19)-(21) *выполнены условия*

$$f_1 \in C^\beta(\mathbb{R}_+; (H^1_\Gamma(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma_{jk})), \quad 0 < \beta \leqslant 1, \quad j, k = 1, 2,$$

$$w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon^0 \in H^1_\Gamma(\Omega), \tag{33}$$

$$\lambda \notin \sigma((I + \varepsilon\widetilde{S}_1) - \lambda(A^{-1} + B_1p_1) - \lambda^{-1}B_2p_2) \cap \sigma((I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0) - \\ - \lambda P_0(A^{-1} + B_1p_1)P_0 - \lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0), \quad P_0H := \mathrm{Ker}\, B_2. \tag{34}$$

*Тогда существует единственное решение $w_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+; H^1_\Gamma(\Omega))$ задачи, для которого каждое слагаемое является элементом из $C(\mathbb{R}_+; (H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементами из $C(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k = 1,2$.*

**Доказательство.** Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1, с учетом утверждения леммы 1.

Из условий (33), (34) из леммы 1 следует, что существует единственное решение $\eta_{\varepsilon,1}(t) \in C(\mathbb{R}_+; H_1)$, $H_1 := L_2(\Omega) \ominus \mathrm{Ker}\, B_{21}$ задачи. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1 и возвращаясь от (29) к (22), (23), получаем утверждения исходной теоремы.

Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия (34). Очевидно, это те собственные значения, для которых два приведенных в (34) пучка Крейна имеют нетривиальные решения. Значит, нужно рассматривать две спектральные задачи

$$\begin{gathered} ((I + \varepsilon\widetilde{S}_1) - \lambda(A^{-1} + B_1p_1) - \lambda^{-1}B_2p_2)\xi_\varepsilon = 0, \\ (I_0 + \varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0) - \lambda P_0(A^{-1} + B_1p_1)P_0 - \lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0)\xi_{\varepsilon,0} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Обычным образом можно показать (см. [4]), что первый из этих пучков имеет дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, причем ветви имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k^{(\infty)} = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_1p_1)[1 + o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_1p_1)[1 + o(1)], \quad k \to \infty,$$
$$\lambda_k^{(0)} = \lambda_k(B_2p_2)[1 + o(1)], \quad k \to \infty.$$

Аналогичным образом рассматривая второе из уравнений (35) в пространстве $H_0$, приходим к выводу, что это уравнение также имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений с предельными точками $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$.

## Заключение

В данной работе на основе рассмотренных смешанных спектральных задач (см. [2]) исследованы порождающие их начально-краевые задачи математической физики. При этом использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте. При исследовании используются операторные методы математической физики в областях с липшицевыми границами (см. [3, 5]). Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного по времени решения исследуемых начально-краевых задач сопряжения в случае, когда $\lambda$ – спектральный параметр, $\mu$ – фиксированный и наоборот.

## Список литературы

1. Копачевский, Н. Д., Якубова, А. Р. О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2017. — Т. 63, вып. 2. — С. 278–315.

   KOPACHEVSKY, N. & YAKUBOVA, A. (2017) About some problems, generated by a sesquilinear form. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* 63. p. 278–315.

2. Якубова, А. Р. О свойствах решений некоторых смешанных спектральных задач // Таврический Вестник Информатики и Математики (ТВИМ). — 2020, № 2(47). — С. 88–110.

   YAKUBOVA, A. (2020) About properties of sollutions of some mixed spectral problems. *Taurida Bulletin of Informatics and Mathematics (TBIM).* № 2(47). p. 88–110.

3. Копачевский, Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве / Н. Д. Копачевский. — Симферополь, 2012. — 152 с.

   KOPACHEVSKY, N. (2012) *Integrated differential Volter's equations in Hilbert Space.* Simferopol.

4. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков / Н. Д. Копачевский. — Симферополь, 2009. — 128 с.

   KOPACHEVSKY, N. (2009) *Spectral theory of operator pencils.* Simferopol.

5. Копачевский, Н. Д. Операторные методы математической физики / Н. Д. Копачевский. — Симферополь, 2008. — 140 с.

   KOPACHEVSKY, N. (2008) *Operator methods of mathematical physics.* Simferopol.

6. Якубова, А. Р. О спектральных и эволюционных задачах, порожденных полуторалинейной формой // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2020. — Т. 66, вып. 2. — С. 335–371.

   YAKUBOVA, A. (2020) Spectral and evolutionary problems generated by a sesquilinear form. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* 66. p. 335–371.

**Azizov A. N., Chilin V. I. Ergodic theorems for flows in the ideals of compact operators / A. N. Azizov, V. I. Chilin // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 7 – 17.**

**УДК: 517.98**

Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечномерное комплексное гильбертово пространство, $(\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|\cdot\|_\infty)$ — $C^\star$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathscr{H}$, и пусть $\mathscr{C}_E$ симметричный идеал компактных операторов в $\mathscr{H}$, порожденный вполне симметричном пространством последовательностей $E \subset c_0$. Если $T_t : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H}),\ t \geq 0$, сильно непрерывная в $C_1$ полугруппа положительных операторов Данфорда-Шварца, то верны следующие варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем: Для каждого $x \in \mathscr{C}_E$ сеть $A_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(x)ds$ сходится к некоторому $\widehat{x} \in \mathscr{C}_E$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$ при $t \to \infty$; при этом, если $E$ сепарабельно и $E \neq l_1$ (как множество), то $\lim\limits_{t\to\infty} \|A_t(x) - \widehat{x}\|_{\mathscr{C}_E} = 0$.

***Ключевые слова:*** *Симметричное пространство последовательностей, банахов идеал компактных операторов, оператор Данфорда–Шварца, индивидуальная эргодическая теорема, статистическая эргодическая теорема..*

---

**Бардин А. Е., Житенева Ю. Н. Иерархическая модель конкуренции при неопределенности / А. Е. Бардин, Ю. Н. Житенева // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 18 – 29.**

**УДК: 519.83**

Исследуется двухуровневая иерархическая структура принятия решений в задаче конкуренции фирм. Рассматривается линейно-квадратичная модель с двумя уровнями иерархии, в которой используются концепции Курно и Штакельберга в условиях неопределенности. Неконтролируемые факторы (неопределенности) отождествляются с действиями компании-импортера. Для формализации решения используются принципы Вальда и Сэвиджа.

***Ключевые слова:*** *двухуровневая иерархическая структура, олигополия Курно, модель Штакельберга, задача при неопределенности, принцип Вальда, принцип Сэвиджа.*

**Германчук М. С. Разрешимость задач псевдобулевой условной оптимизации типа многих коммивояжеров / М. С. Германчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 30 – 55.**

**УДК: 519.16**

Формализация задач маршрутизации многих коммивояжеров ($mTSP$) в сложных сетях приводит к $NP$-полным псевдобулевым задачам условной оптимизации. Выделены подклассы полиномиально разрешимых задач, для которых элементы матрицы расстояний удовлетворяют неравенству треугольника и другим специальным представлениям исходных данных.

Полиномиально разрешимая задача назначения может быть использована для определения необходимого количества агентов и построения их маршрутов. Рассматривается подкласс задач псевдобулевой оптимизации с ограничениями в виде дизъюнктивной нормальной формы (*ДНФ*), к которым сводится задача $mTSP$. Задачи в этой форме полиномиально разрешимы и позволяют объединить знания о структуре сети, требования к прохождению маршрутов агентами (процедуры поиска) и эффективные алгоритмы логического вывода на ограничениях в виде *ДНФ*. Этот подход является теоретическим обоснованием для разработки многоагентной системы управления, ведущей к решению $mTSP$.

В рамках интеллектуального планирования, с использованием ресурсов и возможностей, с учетом ограничений для каждого агента на выбранных кластерах сети достигается построение общего решения для всей сложной сети.

***Ключевые слова:*** *псевдобулевая оптимизация с ДНФ ограничениями, полиномиальное решение задачи многих коммивояжеров, алгоритмы.*

---

**Жуковский В. И., Самсонов С. П., Романова В. Э., Жуковская Л. В., Мухина Ю. С. Линейно-квадратичная игра $n$ лиц как аналог антагонистической игры / В. И. Жуковский, С. П. Самсонов, В. Э. Романова, Л. В. Жуковская, Ю. С. Мухина // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 56 – 82.**

**УДК: 519.833**

Как правило, для нахождения решения игры чаще всего используется понятие равновесие по Нэшу, которое обладает важным свойством устойчивости. Именно: отклонение от решения отдельного игрока не должно увеличить выигрыш отклонившегося. Однако равновесие по Нэшу не обладает внешней и внутренней устойчивостью.

Внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу — негатив при его практическом использовании. В связи с этим предлагается *новое определение*, а именно *равновесие санкций и контрсанкций*, которое основывается на концепции угроз и контругроз. Чтобы избежать внешней и внутренней неустойчивости, к определению было добавлено требование максимума по Парето.

В подтверждение вышесказанного приводится доказательство отсутствия в рассматриваемой игре равновесия по Нэшу и устанавливается существование равновесия угроз и контругроз, а также существование равновесия санкций и контрсанкций.

При нахождении решения данной линейно-квадратичной игры $N \geq 2$ лиц задача рассматривается с точки зрения двух разных концепций. Различие этих концепций заключается как раз в различии самих понятий «угроза» и «санкция», «контругроза» и «контрсанкция». В первом случае игроку не имеет смысла применять угрозу, т.к. он не сможет увеличить свою функцию выигрыша из-за применения к нему возможной контругрозы другим игроком. Во втором случае демонстрируется, как должен вести себя игрок, когда на него уже «обрушивается» санкция.

В результате был получен явный вид нового решения линейно-квадратичной игры $N \geq 2$ лиц — равновесие санкций и контрсанкций, которое максимально по Парето (и поэтому внутренне и внешне устойчиво), обладает свойством индивидуальной рациональности. При этом в игре отсутствует равновесие по Нэшу.

***Ключевые слова:*** *некооперативные игры, равновесие по Нэшу, равновесие по Бержу, санкции и контрсанкции, угрозы и контругрозы, максимум по Парето.*

---

**Копачевский Н. Д., Брыксина У. Б., Цветков Д. О. Модельная задача о нормальных колебаниях частично диссипативной гидросистемы / Н. Д. Копачевский, У. Б. Брыксина, Д. О. Цветков // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 83 – 98.**

**УДК: 517.98**

В данной работе рассматривается модельная спектральная задача, сохраняющая все особенности реальной задачи о нормальных колебаниях гидродинамической системы, состоящей из двух несжимаемых однородных жидкостей помещенных в произвольный сосуд. При этом жидкость большей плотности является вязкой, а меньшей —

идеальной. Исследование спектра задачи проведено на основе изучения трансцендентного характеристического уравнения относительно комплексного декремента затухания нормальных колебаний.

***Ключевые слова:*** *модельная задача, вязкая жидкость, идеальная жидкость, характеристическое уравнение, спектр гидродинамической задачи.*

---

**Кумакшев С. А. Активное гашение колебаний крупногабаритных конструкций / С. А. Кумакшев // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 99 – 108.**

**УДК: 534.113:62-52**

Для крупногабаритных систем, подверженных колебаниям, таким как, например, длинной балки с полезной нагрузкой на конце, предложены режимы управления активным гашением колебаний. Само гашение колебаний предполагается перемещением внутренней массы (гасителя) по направляющей, перпендикулярной балке. Управление состоит в выборе коэффициентов линейной обратной связи, которая следит за отклонением и скоростью гасителя и полезного груза.

***Ключевые слова:*** *активное гашение колебаний, линейная обратная связь.*

---

**Якубова А. Р. Возмущенные начально-краевые задачи сопряжения / А. Р. Якубова // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 4 (49). — С. 109 – 120.**

**УДК: 517.95**

В работе исследуются возмущенные начально-краевые задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой. Принцип суперпозиции позволяет представить решение исходной задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. Исходные начально-краевые задачи сводятся к задачам Коши для интегродифференциального и дифференциального операторного уравнениям первого порядка в гильбертовом пространстве. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильных по времени решений задач Коши для двух областей.

***Ключевые слова:*** *начально-краевая задача, сильное решение, формула Грина, полуторалинейная форма, задача сопряжения, гильбертово пространство.*

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА


***Азизов Азизхон Нодирхонович***

аспирант кафедры алгебры и функционального анализа математического факультета Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан
*e-mail: azizov.07@mail.ru*

***Бардин Александр Евгеньевич***

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики и физики факультета математки, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
*e-mail: bardin.ae@yandex.ru*

***Брыксина Ульяна Борисовна***

магистр кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
*e-mail: ulyana.bryksina@mail.ru*

***Германчук Мария Сергеевна***

ассистент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
*e-mail: m.german4uk@yandex.ru*

***Житенева Юлия Николаевна***

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики и физики факультета математки, физики и экономики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
*e-mail: ulya_zhiteneva@mail.ru*

***Жуковская Лидия Владиславовна***

к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН, г. Москва, Российская Федерация
*e-mail: zhukovskaylv@mail.ru*

**Жуковский Владислав Иосифович** — д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
*e-mail: zhkvlad@yandex.ru*

**Копачевский Николай Дмитриевич** — д. ф.-м. н, профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
*e-mail: kopachevsky@list.ru*

**Кумакшев Сергей Анатольевич** — к. ф.-м. н, с. н. с. Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Российская Федерация
*e-mail: kumak@ipmnet.ru*

**Мухина Юлия Сергеевна** — обучающаяся IV курса бакалавриата кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
*e-mail: js.mukhina@mail.ru*

**Романова Виолетта Эдуардовна** — обучающаяся III курса бакалавриата кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
*e-mail: vilca2001@mail.ru*

**Самсонов Сергей Петрович** — к. ф.-м. н, доцент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
*e-mail: samconov@cs.msu.ru*

**Цветков Денис Олегович** — к.ф-м.н, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
*e-mail: tsvetdo@gmail.com*

***Чилин Владимир Иванович***

д. ф.-м. н, профессор кафедры алгебры и функционального анализа математического факультета Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан
*e-mail: vladimirchil@gmail.com*

***Якубова Алие Рустемовна***

аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Таврической академии, г. Симферополь, Российская Федерация
*e-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru*

Подписано к печати 30.11.2020. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13,5 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7