

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 3 (48) ' 2020

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

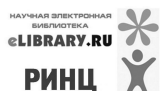
ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2020, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

М. А. МУРАТОВ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
С. В. АБЛАМЕЙКО	академик НАН Беларуси, профессор, доктор технических наук
К. В. ВОРОНЦОВ	профессор, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТАНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
Л. М. МЕСТЕЦКИЙ	профессор, доктор технических наук
А. Б. МУРАВНИК	доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук
В. И. ЧИЛИН	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

к. ф.-м. н., доцент	А. С. АНАФИЕВ — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент	В. И. ВОЙТИЦКИЙ — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент	В. Ф. БЛЫЩИК — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент	М. Г. КОЗЛОВА — ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	mustafa_muratov@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

EDITORIAL BOARD

Mustafa MURATOV	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Sergey ABLAMEYKO	Full member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, Doctor of Engineering Sciences
Konstantin VORONTSOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoly GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Leonid MESTETSKY	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Andrey MURAVNIK	Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valery CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir CHILIN	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the "Computer Science Theory" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the "Mathematics" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office

Email: mustafa_muratov@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Samsonov S. P., Romanova V. E. The stability of coalitional structure in differential linear-quadratic game of four persons	15
Габриелян О. А., Габриелян Т. О., Гаспарян М. В., Гаспарян Л. С. Интернет-мем в виртуальных коммуникациях: методология создания интеллектуализированной системы мониторинга	19
Германчук М. С., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А. Программные инструменты и технологии анализа потока интернет-мемов	37
Гуров С. И. Мажоритарная алгебра для синтеза комбинационно-логических схем. Обзор. Часть II	59
Починка О. В., Зинина С. Х. Динамика регулярных топологических потоков	77
Фордук К. В. Задача о колебании тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил	92
Рефераты	109
Список авторов номера	112

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Samsonov S. P., Romanova V. E. The stability of coalitional structure in differential linear-quadratic game of four persons.....	15
Gabrielyan O. A., Gabrielyan T. O., Gasparyan M. V., Gasparyan L. S. Internet meme in virtual communications: a methodology for creating an intellectual monitoring system.....	19
Germanchuk M. S., Kozlova M. G., Lukianenko V. A. Software tools and technologies for analyzing the flow of Internet memes.....	37
Gurov S. I. Review of works on the use of majority Boolean algebra for the synthesis of combinational logic schemes.....	59
Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Dynamics of regular topological flows.....	77
Forduk K. V. Problem on oscillation of a body partially filled with an ideal fluid under the action of an elastic and damping forces.....	92
Abstracts.....	109
Authors.....	112



Владимир Иосифович ДОНСКОЙ

16 октября 2020 года ушел из жизни Владимир Иосифович Донской, главный редактор журнала «Таврический вестник информатики и математики», математик, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, академик Крымской Академии наук, Заслуженный деятель науки и техники Украины.

В. И. Донской родился 7 мая 1948 года в городе Ровно. В 1966 году окончил среднюю школу №9 в Симферополе. В 1966–1971 годах учился в Севастопольском приборостроительном институте по специальности «радиоэлектроника». Окончив институт, прошел армейскую службу в подразделении Главного управления космической связи, где занимался компьютерной обработкой спутниковой информации. В 1971–1972 годах работал в должности инженера СКБ Симферопольского завода «Фотон».

В 1974 году В. И. Донской поступил на работу в Симферопольский государственный университет имени М. В. Фрунзе на должность программиста в Вычислительном

центре, а с 1974 по 1981 год работал младшим, затем старшим научным сотрудником Научно-исследовательского сектора (НИС) СГУ. В дальнейшем, в 1982 году, перешел на кафедру прикладной математики, где работал в должности ассистента, а после защиты кандидатской диссертации доцентом. Диссертацию «Алгоритмы обучения, основанные на построении решающих деревьев» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «математическая кибернетика» Владимир Иосифович защитил 1983 году в Вычислительном Центре Академии Наук СССР.

В. И. Донской читал лекции по программированию и методам вычислений, а после открытия специальности «прикладная математика» в 1986 году читал курсы дискретной математики, исследования операций и специальные дисциплины.

В эти годы Владимир Иосифович вел активные научные исследования в области математической теории распознавания образов, дискретной математики, а также в вопросах построения программных комплексов обработки информации. Он поддерживал научные связи с ведущими научными заведениями и при поддержке ВЦ АН СССР и Института кибернетики им. В. М. Глушкова профессор В. И. Донской международную конференцию «Интеллектуализация обработки информации», впервые проведенную в 1989 году. С 1996 по 2008 год конференция регулярно проводилась каждые два года в Крыму и получила известность и признание как научный форум в области математической кибернетики и теоретической информатики.

Свою докторскую диссертацию Владимир Иосифович посвятил математическим методам решения дискретных задач при неполной информации с использованием канонического представления псевдобулевых оптимизационных моделей. В 1993 году он защитил диссертацию «Дискретные модели принятия решений на основе синтетического подхода» на соискание ученой степени доктора физико-математических в Вычислительном Центре Российской академии наук.

В 1990-е годы Владимир Иосифович выступил с целым рядом важнейших инициатив, отвечавших требованиям времени и определивших новые направления развития математического факультета. В 1994 году по его инициативе была организована кафедра информатики, а также открыта аспирантура по специальности «теоретические основы информатики и кибернетики». В 1995 году была впервые в Крыму открыта широко востребованная специальность «информатика», открывшая новые перспективы в образовательной сфере.

Под руководством профессора В. И. Донского защитили кандидатские диссертации Л. И. Руденко, М. Г. Козлова, Ю. Ю. Дюличева, А. С. Анафиев и В. Ф. Блыщик,



В. И. Донской на лекции, 2008 год

все они ныне преподаватели факультета. В 1998 году Владимир Иосифович организовал при факультете научно-исследовательскую лабораторию программного обеспечения компьютерных систем, ставшую базой для проведения лабораторных занятий, учебных практик и повышения квалификации. В 1995 году профессор В. И. Донской был избран академиком Крымской Академии наук, а также академиком Академии высшей школы Украины.

С 1999 по 2010 год Владимир Иосифович работал в должности декана факультета математики и информатики. Именно так по его инициативе стал называться математический факультет. В начале 2000-х годов набор студентов на факультет был чрезвычайно большим. Только на специальность «информатика» поступило в 2000 году 145 студентов. И это требовало от декана новых организационных и кадровых решений. В то же время происходила реорганизация всей учебной деятельности в рамках Болонского процесса, вводилась двухступенчатая система образования, принимались образовательные стандарты. Менялись условия и требования к научным исследованиям.

Владимир Иосифович всегда заботился о кадровом составе кафедры информатики. Многие выпускники факультета принимались на работу в должности ассистентов

(Г. Махина, А. Минин, В. Лопата, А. Кудла, А. Мелихов, А. Винц, А. Миланин и другие). У всех в дальнейшем сложилась успешная карьера программистов. Выпускники аспирантуры В. А. Белозуб и М. С. Германчук под научным руководством доцента М. Г. Козловой при поддержке профессора В. И. Донского работают в настоящее время в составе кафедры информатики.

Владимиру Иосифовичу всегда удавалось совмещать управление факультетом и руководство кафедрой, учебную и научную деятельность.

Регулярно проводимая с 1998 года Международная научная конференция «Интеллектуализация обработки информации» привлекала ученых из России, Украины, Белоруссии и других стран. Профессор В. И. Донской принадлежит научной школе проблем распознавания, прогнозирования и методов дискретного анализа академика Ю. И. Журавлева, при поддержке которого в период с 1983 по 2010 год в университете удалось развить научное направление, посвященное интеллектуализации обработки информации и дискретным моделям принятия решений при неполной информации. В рамках этого направления на кафедре информатики ведутся разносторонние исследования в области машинного обучения и алгоритмической сложности классификаторов, создания логических алгоритмов искусственного интеллекта, разработки математические моделей и алгоритмов дискретной оптимизации выбора решений в информационных системах.

Ученики и научные последователи профессора В. И. Донского.

Руденко Людмила Ивановна начала свою работу под его руководством в 1993 году и в 1996 году защитила кандидатскую диссертацию по теме «Синтез линейных моделей принятия решений при неполной информации» в Институте прикладной информатики, г. Киев. Эта работа и дальнейшие публикации по теме посвящены вопросам обоснования и алгоритмизации поиска решений на основе непрерывных линейных моделей при частичных начальных данных. К области приложений полученных результатов можно отнести задачи экономического планирования, инвестирования, рационального выбора с частичными данными прецедентного и порядкового типа. Совместные с В. И. Донским публикации по теме были опубликованы в *Journal of Mathematical Sciences*. (Vol 60. №2. — 1994, Vol. 72. №5. — 1994). Людмила Ивановна стала бессменным помощником своего руководителя в работе по кафедре, на должности заместителя декана.

Козлова Маргарита Геннадьевна стала первым аспирантом В. И. Донского по направлению подготовки 01.05.01 — Теоретические основы информатики и кибернетики. В 2002 году в Киевском институте кибернетики имени В. М. Глушкова защитила

диссертацию на тему «Синтез дискретных моделей выбора решений на основе знаний». Несколько лет Маргарита Геннадьевна была техническим секретарем оргкомитета Международной научной конференции «Интеллектуализация обработки информации», которая под руководством В. И. Донского успешно проводилась в Крыму. Научная работа Козловой М. Г. по задачам псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями, тесно связанная с тематикой В. И. Донского, была продолжена в работе «Знаниеориентированные модели многоагентной маршрутизации» ассистента кафедры информатики М. С. Германчук.

Блыщик Владимир Федорович закончил Симферопольский государственный университет в 1996 году, защитив дипломную работу под руководством Л. И. Руденко. Оставшись на кафедре и работая в должности ассистента, Владимир Федорович увлекся тематикой работ В. И. Донского, начал научную работу под его руководством и в 2007 году защитил кандидатскую диссертацию по теме «Псевдобулевы теоретико-игровые модели с прецедентной начальной информацией и их применение в системах поддержки принятия решений» в Институте кибернетики НАН Украины.

Анафиев Айдер Сератович закончил Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского в 2000 году по специальности информатика. В 2000–2003 обучался в аспирантуре на кафедре информатики под руководством профессора Донского, одновременно работая ассистентом кафедры. В 2007 году защитил кандидатскую диссертацию «Теория шаблонов в задачах обучения по прецедентам и выбора моделей» по специальности 01.05.01 — Теоретические основы информатики и кибернетики в Институте кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины. Вместе с Владимиром Иосифовичем много лет преподавал студентам специальностей прикладная математика и информатика базовую дисциплину «Дискретная математика». При поддержке Владимира Иосифовича начал учебную и научную деятельность в направлении машинного (глубокого) обучения и развивает ее в настоящее время. С 2006 года и по настоящее время — ответственный редактор журнала «Таврический вестник информатики и математики».

Дюлмичева Юлия Юрьевна начала работу над кандидатской диссертацией под руководством Донского В. И. в 2001 году. В 2004 году защитила кандидатскую диссертацию «Модели коррекции редуцированных бинарных решающих деревьев» по специальности 01.05.01 — Теоретические основы информатики и кибернетики в Институте кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины. Была ответственным секретарем оргкомитета Международной научной конференции «Интеллектуализация обработки информации 2002, 2004». С 2002 по 2006 гг. являлась ответственным редактором журнала «Таврический вестник информатики и математики», главным редактором

которого был В. И. Донской. В 2005 году в должности заместителя декана по научной работе помогала своему научному руководителю Донскому В. И. вести активную научную деятельность на факультете математики и информатики.



Научный семинар кафедры информатики, 2016 год

Владимир Иосифович всегда поддерживал деятельность доцента *Александра Ивановича Козлова* по организации олимпиадной работы со студентами. Подготовленные Александром Ивановичем команды постоянно участвуют в чемпионате мира по программированию среди студенческих команд из университетов всего мира — ICPC (International Collegiate Programming Contest). Особую гордость и заслуженное уважение вызывало успешное участие команд в финалах чемпионата мира в Стокгольме (2009), Орландо, США (2011), Варшаве (2012), Екатеринбурге (2014). В настоящее время А. И. Козлов продолжает эту деятельность, тренируя все новые команды для участия в региональном этапе и полуфинале чемпионата мира, ежегодно проходящем в Санкт-Петербурге.

В течение всей преподавательской деятельности Владимир Иосифович подготовил и читал лекции по курсу «Математические основы информатики» для студентов-математиков, а по направлению прикладной математики и информатики — базовые курсы «Дискретная математика», «Теоретические основы информатики», «Теория алгоритмической сложности». В 2019–2020 учебном году в период дистанционного

обучения профессор записал ряд видео-лекций по читаемым курсам. Его лекции для всех поколений студентов запомнятся своей содержательностью и увлеченностью, а главное, достойным подражания лекторским мастерством.

Владимир Иосифович всегда внимательно и критично относился к разработке и реализации образовательных программ бакалавриата и магистратуры, подготовке аспирантов. Состав и содержание дисциплин, рабочие программы, отчетность — все это всегда было в поле его зрения. И особенное его внимание было направлено на требования к выпускным работам бакалавров и магистров, на должную подготовку студентов и организацию защиты. В 2019 году Владимир Иосифович, участвуя в программе разработки СУОС (самостоятельно устанавливаемые образовательные стандарты) КФУ, подготовил стандарты по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» для бакалавриата и магистратуры. Учебная и научная деятельность кафедры информатики всегда была в центре внимания заведующего, и к своим коллегам-преподавателям Владимир Иосифович относился с заботой и пониманием.

В научном направлении в 2011–2015 годы профессор В. И. Донской руководил выполнением научно-исследовательской работы «Разработка математических моделей и методов решения задач принятия решений». В рамках этой тематики сотрудники занимались изучением возможностей локальных элиминационных алгоритмов для решения разреженных дискретных задач информатики; разработкой методов автоматического выбора алгоритма решения задачи эмпирического обобщения и распознавания на основе анализа свойств начальной прецедентной информации; исследованием свойств монотонных распознающих операторов и обучения на основе минимизации частично заданных прецедентами функций. За этот период сотрудниками кафедры было опубликовано 76 научных работ.

В 2016–2020 годах под руководством В. И. Донского сотрудники кафедры работали в рамках научной темы «Математические модели и методы интеллектуализации управления в сложных информационных системах». В процессе работы получены общие принципы математических основ теории интеллектуального управления; построена классификация систем интеллектуального управления с позиции математических особенностей применяемых моделей и сфер применения; разработаны общие принципы интеллектуального управления, моделей и алгоритмов автоматического синтеза элементов процесса управления на основе извлечения эмпирической прецедентной информации; разработана математическая теория логического интеллектуального управления. В результате исследования впервые разработаны методы автоматического построения аналитических описаний объектов по экспериментальной

информации с целью синтеза управляющих воздействий на основе этих описаний. За этот период сотрудниками кафедры было опубликовано 94 научные работы. Активное участие в научно-исследовательской работе приняли студенты и аспиранты, ими было опубликовано 36 статей.

В 2002 году профессор В. И. Донской основал научный «Таврический вестник информатики и математики» (ТВИМ) при поддержке Крымского научного центра НАН Украины и стал его главным редактором. Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики, включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление», индексируется в базе РИНЦ, MathNet.ru, для каждой статьи имеется возможность получения DOI. В редколлегию входят ведущие ученые в области математики и информатики разных стран. На сегодняшний день в свет вышло порядка 50 выпусков. Ведется работа по включению журнала в базу Scopus.

Владимир Иосифович опубликовал свыше 140 научных работ, включая монографии и учебные пособия «Дискретные модели принятия решений при неполной информации», «Дискретная математика», «Алгоритмические модели обучения классификации: обоснование, сравнение, выбор», «Теоретические основы информатики: учебное пособие» и другие. В последние годы он особенно активно работал в области интеллектуализации управления в сложных информационных системах. Только по этому направлению им было опубликовано 16 научных работ в ведущих зарубежных и российских журналах. Научная деятельность профессора В. И. Донского отмечена почетными званиями Заслуженный работник образования Автономной республики Крым в 2001 году, Заслуженный деятель науки и техники Украины в 2004 году, орденом «За заслуги II степени» в 2009 году, званием Почетного работника сферы образования Российской Федерации в 2019 году.

Талантливый ученый, опытный педагог, сильный и волевой человек, Владимир Иосифович Донской всегда имел твердую жизненную позицию и не боялся отстаивать её при любых обстоятельствах. Таким он нам и запомнится.

*Ученики В. И. Донского и сотрудники
факультета математики и информатики Таврической академии
Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского.*

UDC: 519.977

MSC2010: 91A06, 91B50

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-3-15-18>

THE STABILITY OF COALITIONAL STRUCTURE IN DIFFERENTIAL LINEAR-QUADRATIC GAME OF FOUR PERSONS

© V. I. Zhukovskiy, S. P. Samsonov, V. E. Romanova

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru, samsonov@cs.msu.ru, vilca2001@mail.ru

THE STABILITY OF COALITIONAL STRUCTURE IN DIFFERENTIAL LINEAR-
QUADRATIC GAME OF FOUR PERSONS.

Zhukovskiy V. I., Samsonov S. P., Romanova V. E.

Abstract. In article coefficient criteria of the stability of coalitional structure in differential linear-quadratic positional game of 4 persons are established. Following the approach adopted in the article, it is possible to obtain coefficient criteria of the stability of coalitional structures both in games with a large number of players and for other coalitional structures.

Keywords: coalitional games, threats and counterthreats, Pareto maximum, stability of coalitional structure.

INTRODUCTION

In article coefficient criteria of the stability of coalitional structure in differential linear-quadratic positional game of 4 persons are established.

Consider the coalitional differential four-player game:

$$\left\langle \mathcal{P}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3,4}, \{J_i(U, t_*, x_*)\}_{i=1,2,3,4} \right\rangle. \quad (1)$$

Here the controlled system Σ is described by the linear vector equation

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^4 u_i, \quad x(t_*) = x_*,$$

where $x, u_i \in \mathbb{R}^n$, the moment $\vartheta = \text{const } 0$ the game ends; starting position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $n \times n$ -matrix $A(t)$ elements are continuous on $[0, \vartheta]$ define $A(\cdot) \in C_{n \times n} [0, \vartheta]$.

The game has coalitional structure $\mathcal{P} \{K_1, K_2\}$ formed by two coalitions $K_1 = \{1, 2\}$ and $K_2 = \{3, 4\}$. Set of strategies of i player

$$\mathcal{U}_i = \{U_i \div u_i(t, x) | u_i(t, x) = Q_i(t)x, Q_i(\cdot) \in C_{n \times n} [0, \vartheta]\}$$

that is, the player's choice of his strategy $U_i \in \mathcal{U}_i$ is actually comes down to the choice of a specific continuous on $[0, \vartheta]$ of the matrix $Q_i(t)$, then in this case for the game (1) is situation $U = (U_1, \dots, U_4) \in \mathcal{U} = \prod_{i=1}^4 \mathcal{U}_i$, the strategies of the coalition K_1 are $U_{K_1} = (U_1, U_2) \in \mathcal{U}_{K_1} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, and strategies of the coalition K_2 will be $U_{K_2} = (U_3, U_4) \in \mathcal{U}_{K_2} = \mathcal{U}_3 \times \mathcal{U}_4$ (coalition is a subset of players united by the opportunity to have a joint choice of their strategy). The function of the payoff of i -player in the game is defined by the quadratic functional

$$J_i(U, t_*, x_*) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_*}^{\vartheta} \sum_{j=1}^4 u_j'[t] D_{ij} u_j[t] dt \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

where $D_{13} = \varepsilon_1 \overline{D}_{13}$, $D_{24} = \varepsilon_2 \overline{D}_{24}$, $D_{31} = \varepsilon_3 \overline{D}_{31}$, $D_{42} = \varepsilon_4 \overline{D}_{42}$, ($i = 1, 2, 3, 4$), $n \times n$ matrices C_i , D_{ij} are supposed to be symmetric constants, $\varepsilon_i > 0$ is small parameter, the dash above means the transpositional operation.

The situation $U^P \in \mathcal{U}$ is Pareto-maximal in the game (1) if for any choice of the initial position $(t_*, x_*) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ and all $U \in \mathcal{U}$ the system of inequalities is inconsistent

$$J_i(U, t_*, x_*) \geq J_i(U^P, t_*, x_*), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

one of which is at least strict.

Next, $M > 0 (< 0)$ means that quadratic form $z' M z$ is definitely positive (negative).

Lemma. Let there be constant $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), such that

$$C(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_j < 0, \quad D_i(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j D_{ji} < 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

It follows that Pareto-maximal situation exists for the game (1) and when $\varepsilon_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) is sufficiently small it has the form

$$U_i^P \div -D_i^{-1}(\alpha)\theta^*(t)x, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

where

$$\theta^*(t) = Y'(\vartheta, t) \left\{ C^{-1}(\alpha) + \int_t^{\vartheta} [Y(\vartheta, \tau)] D(\alpha) Y'(\vartheta, \tau) d\tau \right\}^{-1} Y(\vartheta, t). \quad (4)$$

We have $D(\alpha) = \sum_{j=1}^4 D_j^{-1}(\alpha)$, $Y(\vartheta, t) = X(\vartheta)X^{-1}(t)$ and $X(t)$ is fundamental matrix of the system $\dot{x} = A(t)x$.

The proof is similar [1, p.244-226].

Let us say that the coalition K_1 threatens the coalition K_2 , tending to include the player 3 in K_1 , if there exists the strategy $U_{K_1}^T \in \mathcal{U}_{K_1}$ and it is such that

$$J_3(U_{K_1}^T, U_3^P, U_4^P, t_*, x_*) > J_3(U^P, t_*, x_*),$$
$$J_j(U_{K_1}^T, U_3^P, U_4^P, t_*, x_*) > J_j(U^P, t_*, x_*) \quad (j = 1, 2).$$

With such a threat the coalition K_1 improves payoff of the player 3 through the use of its strategy $U_{K_1}^T$ instead of $U_{K_1}^P = (U_1^P, U_2^P)$ at the same time the coalition K_1 doesn't «spoil» the gain of the players K_1 compared with starting $J_r(U^P, t_*, x_*)$ ($r = 1, 2, 3$). Thus, the threat of K_1 is as follows: when choosing $U_{K_1}^T$, the coalition K_1 «lures away» the player 3 promising him to improve his payoff without spoiling its initial payoffs.

In response to such a threat the K_2 has counterthreat, if there is such a strategy $U_4^C \in \mathcal{U}_4$, that

$$J_l(U_{K_1}^T, U_3^P, U_4^C, t_*, x_*) > J_l(U_{K_1}^T, U_3^P, U_4^P, t_*, x_*) \quad (l = 3, 4).$$

The counterthreat of the coalition K_2 is as follows: the player 4 (who is not «lured away» by the coalition K_1) due to the choice of his strategy $U_4^C \in \mathcal{U}_4$ will increase the payoff of the player 3 in comparison with the payoff that was formed under the threat. Such an «act» is beneficial to the player 4. Since in this case, his payoff will also increase.

The threat of the coalition K_1 is defined similarly. The coalition K_1 «breaks» the coalition K_2 by luring the player 4 to itself. And in response to this threat there is a counterthreat of K_2 , that is carried out by the player 3 (due to choosing the strategy $U_3^C \in \mathcal{U}_3$). In the same way, appropriate threats of K_2 and counterthreats of K_1 are identified.

Obviously, that if a coalition has counterthreat in response to any threat of any other coalition, so it makes no sense for players to change their strategies from the case U^P .

Definition. The coalitional structure $\mathcal{P} = \{K_1, K_2\}$ of the game (1) is called stable, if in response to any threat of any coalition, in which it tends to include any player of another coalition, this another coalition has a counterthreat.

Statement. *Let us suppose that*

$$a) \left\{ \begin{array}{l} D_{11} > 0, \quad D_{12} < 0, \quad D_{13}\varepsilon_1 > 0, \quad D_{14} < 0 \\ D_{21} < 0, \quad D_{22}\varepsilon_2 > 0, \quad D_{23} < 0, \quad D_{24} > 0 \\ D_{31}\varepsilon_3 > 0, \quad D_{32} < 0, \quad D_{33} > 0, \quad D_{34} < 0 \\ D_{41} < 0, \quad D_{32}\varepsilon_4 > 0, \quad D_{43} < 0, \quad D_{44} > 0 \end{array} \right\},$$

b) *there are such constants $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) that the conditions (2) are fulfilled.*

It follows that coalitional structure \mathcal{P} of the game (1) is stable when ε_i is sufficiently small, and the corresponding situation U^P is determined by the equalities (3), (4).

The proof is based on the statements 4.3 and 4.4 from [2, p.46].

Remark 1. The proposed concept of stability of a coalitional structure is taken from general game theory [3], but for differential games it is used for the first time.

Remark 2. Following the approach adopted in the article, it is possible to obtain coefficient criteria of the stability of coalitional structures both in games with a large number of players and for other coalitional structures.

REFERENCES

1. Жуковский, В. И, Чикрий, А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова Думка, 1994. — 326 с.
ZHUKOVSKIY, V. I & CHIKRIY, A. A. (1994) *Linear-quadratic differential games*. Kiev: Naukova Dumka.
2. ZHUKOVSKIY, V. I & SALUKVADZE, M. E (1994) . *The Vector-Valued Maximum*. N. Y.: Academic Press. p. 404.
3. Оуэн, Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 230 с.
OWEN, G. (1971) *Game theory*. Moscow: Mir.

УДК: 30.51-7+004.8

MSC2010: 91D30

ИНТЕРНЕТ-МЕМ В ВИРТУАЛЬНЫХ КОММУНИКАЦИЯХ: МЕТОДОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА¹

© О. А. Габриелян, Т. О. Габриелян, М. В. Гаспарян

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *gabroleg@mail.ru*, *tigrangabr84@gmail.com*, *mgasp@mail.ru*

© Л. С. Гаспарян

КРЫМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КУЛЬТУРЫ, ИСКУССТВ И ТУРИЗМА

295000, СИМФЕРОПОЛЬ, РЕСПУБЛИКА КРЫМ, РОССИЯ

E-MAIL: *llukashevich@mail.ru*

INTERNET MEME IN VIRTUAL COMMUNICATIONS: A METHODOLOGY FOR
CREATING AN INTELLECTUAL MONITORING SYSTEM.

Gabrielyan O. A., Gabrielyan T. O., Gasparyan M. V., Gasparyan L. S.

Abstract. The current state of IT development allows us to talk about the formation of a new type of society, not only informational, but also digital. Virtual communications plays important role in its development. The network of these communications creates a new space of being — virtual. When we talk about virtual space, we primarily mean Internet. Internet memes are one of the important phenomena that embody the features of information and virtual processes of the XXI century. They are subject to comprehensive research due to the fact that these communications and their content significantly affect social processes and require monitoring and decision-making. The Internet memes considered in this paper represents a completely objective reality. The authors proposes an interdisciplinary approach to research at the intersection of the Humanities and exact Sciences: sociology, semiotics, computer science, management, etc., with access the tools in the form of appropriate software. It is obvious that the developed methodology and methodic open up the prospect of applying them to other similar entities and processes in the virtual space. The article describes in the detail both the methodology (developed during three research stages of studying the Internet meme: in static (synchrony), dynamics (diachrony) and artificially intelligent automated mode.), and the methodology for studying the influence of Internet memes on Internet users. This creates problems-issues that need to be resolved:

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ЭИСИ в рамках научного проекта № 20-011-31460. (Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR and EISR, project number 20-011-31460)

- revealed the essential characteristics of the Internet meme with the possibility of their formalization;
- describes the mechanism and parameters of Internet meme distribution in social networks;
- describes a mechanism for monitoring the impact of an Internet meme on communication in social networks on the Internet, based on formalized criteria and a software product;
- these mechanisms are designed as self-learning neural networks (software product) with minimal participation of experts who calibrate their work mainly at the initial stage.

As an object of research, we consider a large array of weakly structured data — memes identified through search engines.

Keywords: *Internet meme, communication, methodology, virtual social network.*

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня стало трюизмом упоминание о влиянии виртуальной реальности на человека, о том, что коммуникации в социальных сетях имеют серьезные последствия. Но далеко не очевидно, как исследовать это влияние, как определить соответствующие параметры, как их получать и обрабатывать в автоматическом режиме, например, с помощью искусственного интеллекта (ИИ) — Machine Learning (ML), Deep Learning (DL), Data Mining (DM), самообучающейся сверточной нейросети [35]. Такой анализ открывает две перспективы. С одной стороны, достаточно наглядно виден процесс объективного влияния, а с другой — важен механизм такого влияния. Очевидно, что ответы на поставленные вопросы позволят найти способы «влиять на такое влияние».

Актуальность исследования обусловлена тем, что современные коммуникации в значительной степени переместились в виртуальную среду. Эти коммуникации и их контент существенно влияют на социальные процессы и требуют глубокого исследования, мониторинга и принятия соответствующих решений. Предлагается междисциплинарное исследование интернет-мемов на стыке гуманитарных и точных наук: социологии, семиотики, информатики, управления и др., с выходом на инструменты в виде соответствующего программного обеспечения. Разработанная методология применима к иным подобным сущностям и процессам виртуального пространства. В настоящее время существует значительная потребность в мониторинге виртуального влияния на поведение людей, в создании автоматизированных и интеллектуализированных систем такого мониторинга.

Не менее актуальным и важным является то, что результаты исследования могут быть использованы как инструмент противодействия техногенным, биогенным, социокультурным угрозам, терроризму и идеологическому экстремизму, а также киберугрозам и иным формам и источникам опасности для общества.

В центре исследования будет интернет-мем. Для проверки гипотез и разрабатываемых исследовательских инструментов используются политические интернет-мемы. Будем придерживаться следующего определения.

Интернет-мем — это способ когнитивной коммуникации, представленный в форме визуального объекта (картинка + текст), посредством которого осуществляется процесс распространения определенной социокультурной информации. Характерным для интернет-мема является способность к репликации (длительному копированию). Интернет-мем — это визуализированное высказывание.

Исследованию политических интернет-мемов, как феномена современной политической коммуникации посвящено ряд работ как отечественных, так и зарубежных исследователей. В прикладном плане мемами занимаются практики коммуникации, маркетологи и программисты, создающие поисковые системы для распознавания мемов. Однако, в прикладных подходах много от эмпирического обобщения и недостаточно методологии и строгости научного анализа, теоретического осмысления. В частности, нет даже более или менее приемлемого рабочего операционального определения интернет-мема. Значительная часть статей начинают со ссылок на работы Докинза Р. («Эгоистичный ген») [15], Броди Р. [2] и Рашкоффа Д. [23]. Но предложенный подход исчерпал возможности построения моделей передачи культурной информации.

На наш взгляд, нужен переход на уровень конкретно-научных исследований. Здесь стоит отметить отечественных исследователей — Вешнякову А. В. [4], Базенкова Н. И., Губанова Д. А., Новикова Д. А., Чхартишвили А. Г. [1, 14], Зиновьеву Н. А. [16], Канашину С. В. [17], Квята А. Г. [18], Кронгауза М. А. [19], Савицкую Т. Е. [24], Столетова А. [26], Столярова А. А. [27], Шомову С. А. [28] и др. Ряд исследователей анализируют коммуникации в виртуальном пространстве, в том числе социально-политические: Лысенко Е. Н. [20], Поляков Е. М. [22], Шурину Ю. В. [29] и др. Креолизованные тексты в основном активно исследуют филологи: Ворошилова М. Б. [5], Гришаева Л. И. [13], Нежура Е. А. [21], Сорокин Ю. А. [25].

Среди зарубежных исследователей следует отметить Blackmore S. [30, 31], Burgess T. [32], Dennett D. [33], Gonzalez-Bailon S. [34], Lissack M. [36], Pech R. [37].

Свой вклад в исследование заявленной проблемы вносят работы группы исследователей: Габриеляна О. А. [3, 6–8], Габриеляна Т. О. [9], Гаспаряна М. В. [10], Германчук М. С., Козловой М. Г., Лукьяненко В. А. [11, 12], Кравченко И. В. [3]. В совокупности представленные работы задают междисциплинарный каркас для ее решения.

Следует констатировать тот факт, что работ междисциплинарного, комплексного характера, результатом которых были бы автоматизированные и интеллектуализированные (нейросетевые) системы, отслеживающие влияние интернет-мема (в том числе политического интернет-мема) на коммуникацию в виртуальном пространстве, нами не выявлено. Этот пробел на методологическом и методическом уровне попытаемся восполнить, предлагаемым исследованием.

Научная новизна исследования заключается в разработке методологии и подхода к созданию программного обеспечения для автоматизированного и интеллектуализированного выявления влияния (политического) интернет-мема на пользователей Интернета; выявление «паттернов влияния» и обучение нейросетей для интеллектуализации процесса анализа и мониторинга такого влияния.

Целью исследования является разработка методологии эмпирического исследования влияния мемов (например, политических) на пользователей Интернета.

Задачи исследования:

- 1) описать эмпирическую базу предлагаемого исследования, используя поисковую систему Google, так как по ряду объективных характеристик этот поисковик обращается к наиболее полной базе изображений, а логика формирования запросов простая с позиции их формализации;
- 2) описать трансдисциплинарную позицию, основанную на исследовании эмпирических данных и их формализации. Этим она принципиально отличается от основного массива социально-гуманитарных исследований;
- 3) решение задач предваряется методологией исследования.

ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методология любого исследования предполагает формирование принципов и подходов разрабатываемой программы, определение концепта, рабочих понятий, выдвижение гипотез и возможность их проверки, а также включает методы исследования. Методология вырабатывается на протяжении трёх исследовательских этапов изучения интернет-мема: в статике (синхронии), динамике (диахронии) и искусственно-интеллектуальном автоматизированном режиме.

Первый этап исследования — выявление «паттернов влияния» посредством анализа интернет-мемов в синхронии, в «ручном режиме».

1.1. Изначально предполагается, что не навязывается никакого представления о том, что такое мем и для формирования понятия «мем» полностью полагаются на те результаты, которые представляет поисковая машина, как репрезентант «big data».

Предварительный эмпирический анализ результатов поисковых запросов позволяет говорить об изобразительной сущности интернет-мема. В дальнейшем выкладки основаны на том, что интернет-мем — это big data, обладающая изобразительной природой. При этом изобразительность присуща не только статичным изображениям, но и динамичным — анимационным и видео-мемам.

1.2. Для изучения интернет-мемов необходимо программное обеспечение (ПО) с развитым инструментарием. Это обусловлено тем, что слишком большой объем информации и работа с потоком данных интернет-мемов, не может быть осуществлена только исследователем-экспертом.

Анализ существующего ПО показал отсутствие нужного функционала в одном программном продукте. Существуют различные решения, каждое из которых выполняет отдельный набор функций. Например, Microsoft Excel способен хранить данные, формировать сложные запросы, прогнозировать временные ряды (средствами различных алгоритмов), строить по ним инфографику. Программа digiKam (работа с цифровыми фотографиями, каталогизация, редактирование) — позволяет маркировать изображения и отдельные их области, формировать простые запросы по ключевым словам. Но даже в случае успешной реализации первого этапа, средствами Microsoft Excel и digiKam, на втором этапе потребуется дополнительное ПО, позволяющее сравнивать множество новых изображений с существующими в базе, а на третьем этапе — способное распознавать образы. Обновление собранной информации вручную неоправданно при работе с большим объёмом, постоянно обновляющейся информацией. Более того, в результате разработки новых методов потребуется доработка инструментария. А это можно осуществить только при условии наличия модульного ПО, непосредственно разработанного под конкретную методологию.

В первой версии ПО (Мемометрии) реализуются следующие возможности:

- сохранение технических характеристик изображения-файла: ширина, высота, разрешение, пропорции, цветовая модель, источник, дата создания и т.п.;
- «ручное» маркирование изображения или отдельных его частей ключевыми словами (тегами);
- формирование первичной базы интернет-мемов (базы изображений) — сохранение изображений, их технических характеристик и ключевых слов;
- создание простых (применение операций булевой логики к двум множествам) и сложных (с применением сложных выражений булевой алгебры к большому количеству множеств) экспертных запросов к первичной базе интернет-мемов.

1.3. Подготовка исследовательского запроса для поисковой машины. Для первого этапа исследования на запрос достаточно выдать не более 250-500 изображений,

подлежащих анализу. Это связано с тем, что на первом и втором этапах маркирование мемов производится вручную. Поэтому большое количество мемов может привести к смещению исследовательской позиции с выявления «паттернов влияния» на рутинный механический труд.

В целом базовый исследовательский запрос формируется следующим образом.

Запрос состоит из двух частей. Первая часть, отражающая и определяющая предмет суждения (предикат запроса). В работе предикат является постоянным понятием — мем. Вторая часть имеет вариативный характер и отражает изучаемую область в структуре виртуальной коммуникации. Для получения результатов поиска, наиболее приближенных к содержанию запроса, фраза запроса помещается в кавычки («мем...»).

Вторая часть запроса формируется на основании анализа двух баз. Первая представляет собой результат онто-семантического анализа гипертекста, сформированного из заголовков новостных сообщений общественно-политического характера за единицу времени. Он представлен в форме семантической сети (совокупность графов). Осуществляя процедуру обхода графов по нисходящей его степеней, получаем предварительный список запросов. В основной список запросов включаются только те слова (вершины графа), которые смежны вершине с наибольшей степенью.

Вторая база источников представляет данные еженедельного социологического опроса «ФОМнибус» (Фонд Общественное Мнение). В частности, речь идет о массиве данных ответов респондентов на открытый вопрос «Какие события прошедшей недели, о которых сообщалось в средствах массовой информации, больше всего заинтересовали Вас, привлекли Ваше внимание?». Использование этого массива позволило уравновесить язык официальных СМИ, дополнив «язык» запроса неформальным сленгом (повседневный язык). Это имеет существенное значение, так как предмет исследования отчасти является продуктом народного (массового) творчества — интернет-фольклора.

Преимущества предлагаемого алгоритма формирования запроса в том, что он создается объективно и может быть представлен программой без участия исследователя или эксперта.

1.4. Сбор первичной базы интернет-мемов. Предполагает сохранение всех изображений, выданных поисковой машиной в базе изображений разработанного ПО, для дальнейшей работы.

1.5. Маркирование первичной базы интернет-мемов посредством разработанного ПО. Маркирование осуществляется согласно следующим правилам:

- последовательность маркирования интернет-мема осуществляется слева направо, сверху вниз (если нет логического исключения);
- к каждому отдельному текстовому (слово) и изобразительному (лицо, причёска, цвет волос, взгляд, одежда, дополнительные аксессуары и пр.) объекту соответствует одно или несколько ключевых слов (маркеров, тегов);
- каждое ключевое слово, характеризующее текстовый объект, в точности соответствует написанному на изображении слову;
- каждое ключевое слово, характеризующее изображение, должно быть простым существительным. Верно: красный, чёрный. Неверно: красно-черный;
- области изображения для маркирования выделяются по границам подлежащего описанию объекта.

1.6. Создание системы экспертных запросов. Эксперты работают с промаркированной первичной базой интернет-мемов. Выдвигаются различные гипотезы о том, какие данные представляются формализовано:

- сущностные характеристики мема и изучаемых текстовых и изобразительных объектов;
- смысловые изменения объекта в результате его меметизации;
- паттерны влияния» на потребителей интернет-мемов.

1.7. Доработка ПО для графического представления результатов экспертных запросов в виде инфографики: таблиц, диаграмм, графиков и пр.

1.8. В результате формирования экспертных запросов, может возникнуть необходимость в применении существующих или разработанных экспертами-исследователями методов. Описание и применение новых методов в разрабатываемом ПО, потребуют разработки дополнительной надстройки второго уровня, что позволит анализировать полученные данные средствами статистического и вероятностного анализа.

1.9. Построение моделей «паттернов влияния»² интернет-мемов на потребителей путём выявления количественных и качественных закономерностей. Применённые к первичной базе интернет-мемов экспертные запросы и методы, выявляют формализованные закономерности, характеризующие мем и отличие его от обычного изображения. Это отличие, или набор отличий и являются «паттернами влияния».

1.10. Доработка ПО для реализации надстройки третьего уровня, позволяющей описывать и сохранять синхронические модели «паттернов влияния».

²Моделью «паттерна влияния» следует называть наличие определённых характеристик или состояния интернет-мема, при которых он начинает оказывать влияние на потребителей, изменять их ценности

Второй этап исследования — выявление «паттернов влияния» посредством анализа характеристик политических интернет-мемов в диахронии в автоматическом режиме. Для этого реализуется:

2.1. Доработка ПО для автоматизации систематического обновления первичной базы интернет-мемов. Решение этой задачи завязано на работу с поисковой машиной Google. Выбор поисковой системы сделан на основе следующих двух факторов:

- поисковая система Google проиндексировала более 60-65 млрд. веб-страниц (согласно данным www.worldwidewebsize.com), тогда как у других поисковых систем этот показатель в 6 раз меньше;
- поисковая система Google, обрабатывает более 80 % всех поисковых запросов в мире, согласно данным statcounter.com;
- обозначенные факторы, определяют объективный характер исследования, т.к. исследователи и искусственно интеллектуальная автоматизированная система, будут работать с общедоступной big data, которая максимально репрезентует существующий контент глобальной сети интернет.

Работа с поисковой системой Google строится следующим образом:

А. Ежедневно в автоматическом режиме, программа задает базовый запрос, и сохраняет все изображения, полученные от поисковой машины во временную папку. Далее программа поочерёдно сравнивает новые изображения с теми, которые находятся в первичной базе интернет-мемов:

- если новое изображение совпадает с тем, которое уже находится в первичной базе интернет-мемов:
 - а) сохранить информацию позиции интернет-мема в поисковых результатах базового исследовательского запроса;
 - б) удалить новое изображение из временной папки;
- если новое изображение отсутствует в первичной базе интернет-мемов, тогда:
 - а) добавить новое изображение в первичную базу интернет-мемов;
 - б) отправить уведомление исследователю-эксперту о необходимости маркировки новых изображений.

В. Ежедневно осуществляется поочерёдный поиск изображений из первичной базы интернет-мемов средствами поисковой машины Google. Цель этого процесса — изучить степень распространённости интернет-мема. Для этого в первичной базе интернет-мемов сохраняются следующие данные:

- адрес интернет-ресурса, на котором представлен интернет-мем;
- имя домена верхнего уровня (ru, com, org и др.) интернет-ресурса;

- название заголовка интернет-ресурса, для последующего мониторинга потенциально языковой принадлежности интернет-ресурса, на котором представлен интернет-мем;
- дата размещения интернет-мема на конкретном сайте;
- количество результатов поискового запроса по конкретному изображению;
- позиция в результатах поискового запроса.

Данные, полученные в ходе ежедневного мониторинга базового исследовательского запроса и изучения распространённости интернет-мема, можно охарактеризовать как «сырые» данные, потенциально хранящие в себе информацию о диахронии (развитие во времени) интернет-мема. К «сырым» данным необходимо применить ряд традиционных или новых, разработанных методов — позволяющих получить информацию о «паттернах влияния».

2.2. Доработка ПО для создания экспертных запросов к данным диахронии интернет-мемов. Эти данные отличаются от того набора ключевых слов, которые характеризуют синхронии интернет-мемов. У эксперта есть возможность:

- выполнять простые запросы, описываемые по правилам булевой логики, к диахроническим данным об интернет-мемах — доработка надстройки первого уровня. Например, просматривать «жизненный цикл»³ интернет-мема, в том числе с количественными характеристиками позиции интернет-мема в поисковом запросе;
- выполнять сложные запросы, описываемые по правилам булевой логики, к диахроническим данным об интернет-мемах — доработка надстройки первого уровня. Например, сравнивать «жизненные циклы» различных мемов по их соответствующим количественным характеристикам;
- применять статистические и вероятностные методы при анализе диахронических данных об интернет-мемах — доработка надстройки второго уровня;
- описывать и сохранять различные модели «паттернов влияния» представленные в диахронии — доработка надстройки третьего уровня.

2.3. Доработка ПО для графического представления диахронии интернет-мемов, в виде инфографики.

2.4. Доработка ПО для реализации надстройки четвёртого уровня, позволяющей создавать сложноорганизованные модели «паттернов влияния» состоящие из синхронических и диахронических моделей.

³Под «жизненным циклом» следует понимать последовательность временных маркеров, первый из которых определяется датой начала мониторинга, а последний датой, когда конкретный интернет-мем исчезает из результатов поискового запроса

2.5. Доработка ПО для мониторинга интернет-мемов согласно моделям «паттернов влияния». В каждой синхронической и диахронической модели «паттернов влияния», предусмотрена возможность направлять уведомление о возникновении внештатной ситуации (достижения интернет-мемом пороговых значений).

Третий этап исследования. Применение технологии искусственного интеллекта (Machine Learning, Deep Learning, Data Mining, глубинных сверточных нейронных сетей) для автоматизированного и интеллектуализированного выявления «паттернов влияния» политических интернет-мемов.

На данном этапе реализуются следующие задачи:

- расширение одного базового экспертного запроса до множества экспертных запросов. Эксперты определяют набор поисковых запросов, подлежащих анализу средствами разработанных моделей выявления «паттернов влияния»;
- переход от «ручного» маркирования интернет-мемов к частично автоматизировано-интеллектуальному. В ПО реализуются два дополнительных модуля на основе обученных нейронных сетей:
 - модуль распознавания текста;
 - модуль распознавания образов.

Последовательность работы с изображениями:

- входное изображение разбивается на части, выделяющиеся на фоне;
- каждая из частей прогоняется через модули;
- полученные результаты анализируются по принципам первого и второго исследовательского этапа, а полученные данные записываются в базу интернет-мемов.

В реальности, на каждом этапе потребуется вмешательство исследователя-эксперта, хотя его работа здесь будет сводиться скорее к контролю работы модулей, чем к непосредственному «ручному» исследованию интернет-мемов. Контроль необходим в связи с тем, что задача распознавания текста и образов средствами нейронных сетей, пока ещё имеет высокую степень погрешности.

- переход от частной базы интернет-мемов к общей — хранящей результат по всем исследовательским запросам. На этом этапе возникнет необходимость реализовать пятый уровень надстройки в ПО. Этот уровень позволяет описывать, сохранять и применять модели «паттернов влияния» полученных в результате сравнения моделей «паттернов влияния» четвёртого уровня по множеству исследовательских запросов.

- разработка надстройки шестого уровня для нейросетевого, раннего выявления «паттернов влияния». Предполагается, что на полученных моделях «паттернов влияния» (3–5 уровни) можно будет обучить нейронную сеть прогностическому анализу. Например, на самых ранних этапах сбора информации об интернет-меме, исследователь-эксперт будет обладать прогностической моделью о характеристиках, «жизненном цикле», классификации и пр.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ НАДСТРОЙКИ

Описанная методология предполагает многоуровневый подход к изучению интернет-мемов (рис. 1). Первому уровню предшествует набор различных данных. На последнем уровне, появляется интеллектуализированная система, способная к прогнозированию влияния интернет-мемов на конкретную целевую аудиторию.

Первый уровень — выявление, описание, сохранение и применение простых и сложных запросов, задаваемых средствами булевой логики, к синхроническим данным (по ключевым словам), а также к диахроническим данным («жизненном цикле») об интернет-мемах.

Второй уровень — выявление, описание, сохранение и применение статистических методов к синхроническим и диахроническим данным об интернет-мемах, а также к сформированным запросам первого уровня.

Третий уровень — выявление, описание, сохранение и применение моделей «паттернов влияния», представленных результатами запросов первых двух уровней.

Четвертый уровень — выявление, описание, сохранение и применение сложноорганизованных моделей «паттернов влияния» состоящих из моделей «паттернов влияния», сформированных на третьем уровне.

Пятый уровень — выявление, описание, сохранение и применение моделей «паттернов влияния» полученных в результате сравнения множества моделей сложноорганизованных «паттернов влияния» четвёртого уровня.

Шестой уровень — обучение нейронной сети прогнозированию «паттернов влияния» интернет-мема, при отсутствии полной информации о нем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было отмечено выше, конечным результатом исследования является ПО, для интеллектуализированного мониторинга распространения и воздействия (политических) интернет-мемов в русскоязычном сегменте Интернет (MVP — minimum viable

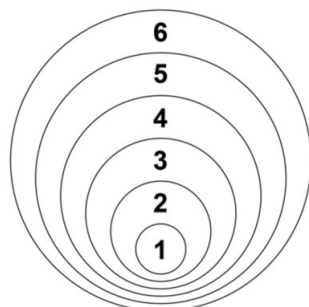


Рис. 1. Методологические исследовательские надстройки: 1) булевы запросы; 2) статистические и вероятностные методы; 3) простые «паттерны влияния»; 4) сложноорганизованные «паттерны влияния»; 5) закономерности в сложноорганизованных «паттернах влияния»; 6) искусственно-интеллектуальное прогнозирование «паттернов влияния»

product — минимально жизнеспособный продукт). В рамках данной работы, подробно описаны различные аспекты проблемы, обозначены пути их решения, приведен тезаурус исследования и операционализированы базовые понятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базенков, Н. И. Обзор информационных систем анализа социальных сетей / Н. И. Базенков, Д. А. Губанов // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 41. — С. 357–394.
BAZENKOV, N. & GUBANOV, D. (2013) Overview of information systems for social network analysis. *Managing large systems*. 41. p. 357–394.
2. Броуди, Р. Психические вирусы. Как программируют ваше сознание / Р. Броуди. — М.: Поколение, 2004. — 304 с.
BROUDY, R. (2007) *Psychic viruses. How to program your mind*. Moscow: Pokolenie.
3. Буряк, В. В. Социальные сети как востребованный ресурс гражданского общества и коммуникативный инструмент в цифровой образовательной среде / В. В. Буряк, О. А. Габриелян, И. В. Кравченко // Вестник Московского Государственного университета культуры и искусств. — 2017. — 5 (79). — С. 95–104.
BURYAK, V., GABRIELIAN, O. & KRAVCHENKO I. (2017) Social networks as a popular resource of civil society and a communicative tool in the digital educational environment. *Bulletin of the Moscow State University of Culture and Arts*. 5 (79). p. 95–104.

4. Вешнякова, А. В. Лингвокреативный аспект интернет-мемов / А. В. Вешнякова // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. — 2016. — 6-4. — С. 34–40.
VESHNYAKOVA, A. (2016) Lingvokreativnyy aspekt internet-memov. *Current problems of the humanities and natural sciences*. 6-4. p. 34–40.
5. Ворошилова, М. Б. Креолизированный текст: аспекты изучения / М. Б. Ворошилова // Политическая лингвистика. Екатеринбург. — 2006. — 20. — С. 180–189.
Voroshilova M. B. (2016) Creoled text: aspects of study. *Political linguistics. Yekaterinburg*. 20. p. 180–189.
6. Габриелян, О. А. Распространение мифов в обществе: аналогии с математическим описанием распространения эпидемии? / О. А. Габриелян, И. Э. Сулейменов, М. Н. Калимолдаев и др. // Проблемы информатики. — 2015. — 4. — С. 35–44.
GABRIELIAN O. A., SULEYMANOV, I. E., KALIMOLDAEV, M. N. and others. (2015) The spread of myths in society: Analogies with a mathematical description of the spread of the epidemic?. *Problems of informatics*. 4. p. 35–44.
7. Габриелян, О. А. Культурный код — концептуализация понятия / О. А. Габриелян // Межкультурные коммуникации: размерность и измерения: монография. Под общей ред. Е. В. Черного. — Симферополь: ООО «Антиква», 2016. — С. 42–52.
GABRIELIAN, O. A. (2016) Cultural code — conceptualization of the concept. *Intercultural communication: dimension and dimensions: monograph*. General red. E. V. Chernogo. p. 42–52.
8. Габриелян, О. А. К методике исследования топологических моделей реального и виртуального социопространств (на примере Крыма) / О. А. Габриелян, М. В. Гаспарян // Проблемы моделирования социальных процессов: Россия и страны АТР: материалы Второй всерос. научно-практич. конф. с междунар. участием. Владивосток. — 2016. — С. 565–567.
GABRIELIAN, O. A. & GASPARYAN, M. V. (2016) Towards a methodology for the study of topological models of real and virtual sociospaces (case of Crimea). *Problems of modelling social processes: Russia and ATP countries*. Materials of the Second All-Russian. Scientific-practical. conf. с international. participation. Vladivostok. p. 565–567.

9. Габриелян, Т. О. Семиотико-интерактивная графика как альтернативный вектор развития графического дизайна в контексте цифрового искусства / Т. О. Габриелян // Сборник трудов Всероссийской науч.-практ. конф. «Компьютер и визуальная культура дизайна в контексте эстетических, онтологических, аксиологических проблем и проектных технологий» (Цифровая революция-2017)». — М.: МГХПА, 2017. — С. 115–119.

GABRIELIAN, T. O. (2017) Semiotic interactive graphics as an alternative vector for the development of graphic design in the context of digital art. *Collection of works of the All-Russian School. prakt. conf. «Computer and visual culture of design in the context of aesthetic, ontological, axiological problems and design technologies»*. (Digital revolution-2017)». p. 115–119.

10. Гаспарян, М. В. Методология анализа деструктивной коммуникации в виртуальном пространстве / М. В. Гаспарян // Межкультурные коммуникации: размерность и измерения: монография. Под общей ред. Е. В. Черного. — Симферополь: ООО «Антиква», 2016. — С. 87–99.

GABRIELIAN, O. A. (2016) Methodology for analysing destructive communication in virtual space. *Intercultural communication: dimension and dimensions: monograph*. General red. E. V. Chernogo. p. 87–99.

11. Германчук, М. С. Разработка инструментария обработки и анализа потока интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, А. Е. Пивовар // Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2019 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2019. — Вып. 1. — С. 121–127.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G., LUKIANENKO, V. A. and PIVOVAR, A. E. (2019) Development of internet meme flow analysis and processing toolkit. *Collection of scientific works of the All-Russian Scientific and Practical Conference MIKMO-2019 and the Tauric Scientific School-Conference of students and young specialists in mathematics and informatics / Ad Red. V. A. Lukyanenko*. 1. p. 121–127.

12. Германчук, М. С. Распознавание, анализ и визуализация интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 19-й Всероссийской конференции с международным участием. — М.: Российская академия наук, 2019. — С. 351–355.

- GERMANCHUK, M. S. & KOZLOVA, M. G. (2019) Recognition, analysis and visualization of Internet memes. *Mathematical methods of pattern recognition*. Talking points of the 19th All-Russian Conference with International Participation. p. 351–355.
13. Гришаева, Л. И. Креолизованные тексты — тексты XXI века / Л. И. Гришаева // Возвращение к истокам французской культуры. Вестник ВГУ, Серия лингвистика и межкультурная коммуникация. — 2003. — 2. — С. 107–112.
- GRISHAEVA, L. I. (2003) Creoled texts — 21st century texts. *A return to the roots of French culture*. Gazette of BGU, Series of Linguistics and Intercultural Communication. p. 107–112.
14. Губанов, Д. А. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Д. А. Губанов, Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2010. — 228 с.
- GUBANOV, D. A., NOVIKOV, D. A. & CHKHARTISHVILI, A. G. (2010) *Social networks: models of information power, governance and conflict*. Moscow: Physics and mathematics literature.
15. Докинз, Р. Эгоистичный ген = The Selfish Gene / Р. Докинз. — М.: Corpus, 2013. — 512 с.
- DOKINZ, R. (2013) *Selfish gene = The Selfish Gene*. Moscow: Corpus.
16. Зиновьева, Н. А. Трансляция социокультурных кодов в создании информационного продукта: анализ интернет-мемов: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. соц. наук (22.00.06) / С.-Петербург. гос. ун-т. — Санкт-Петербург, 2016. — 26 с.
- ZINOV'EVA, N. A. (2016) *Translation of sociocultural codes in the creation of an information product: Analysis of Internet memes: autoref. dis. on co-claim. studied. step. kand. social. science (22.00.06)*. S. Petersburg.
17. Канашина, С. В. Что такое интернет-мем? / С. В. Канашина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Гуманитарные науки. — 28(277), т. 36. — 2017. — С. 1–7.
- KANASHINA, S. V. (2017) What is an Internet meme?. *Belgorod State University Scientific Statements. Series: Humanities*. 28 (277). p. 1–7.
18. Квят, А. Г. Медиаем как инструмент политического PR: когнитивный подход [Электронный ресурс] / А. Г. Квят // Наука и жизнь. — Электрон. журн. № 1. —

2013. — Режим доступа:

<https://www.nkj.ru>

KVYAT, A. G. (2013) Media as a tool of political PR: a cognitive approach. *Science and life*. — URL:

<https://www.nkj.ru>

19. Кронгауз, М. А. Мемы в Интернете: опыт деконструкции [Электронный ресурс] / М. А. Кронгауз // Медиаскоп. — Электрон. журн. № 11. — 2012. — Режим доступа:

<https://www.nkj.ru>

KRONGAUZ, M. A. Memes on the Internet: Decomposition Experience. *Media scope*. — URL:

<https://www.nkj.ru>

20. Лысенко, Е. Н. Интернет-мемы в коммуникации молодежи / Е. Н. Лысенко // Вестник СПбГУ. Социология. — 4, т. 10. — 2017. — С. 410–424.

LYSENKO, E. N. (2017) Internet memes in youth communication. *SpGU Gazette. Sociology*. 4. Vol. 10. p. 410–424.

21. Нежура, Е. А. Новые типы креолизованных текстов в коммуникативном пространстве интернета / Е. А. Нежура // Теория языка и межкультурная коммуникация. — 2. — 2012. — С. 47–52.

NEZURA, E. A. (2012) New Types of Creoled Texts in the Communicative Space of the Internet. *Language theory and intercultural communication*. 2. p. 47–52.

22. Поляков, Е. М. Кибернетика, меметика и теория массовой коммуникации: обзор естественно-научных подходов к проблемам социологии / Е. М. Поляков // Человек. Сообщество. Управление. — 3. — 2009. — С. 32–41.

POLYAKOV, E. M. (2009) Cybernetics, memetics and mass communication theory: a review of science approaches to sociology. *Man. Community. Governance*. 3. p. 32–41.

23. Рашкофф, Д. Медиавирус. Как поп-культура тайно воздействует на наше сознание / Д. Рашкофф. — М.: Ультра. Культура, 2003. — 368 с.

RASHKOFF, D. (2002) *The media virus. How pop culture secretly affects our consciousness*. Moscow: Ultra. Culture.

24. Савицкая, Т. Е. Интернет-мемы как феномен массовой культуры [Электронный ресурс] / Т. Е. Савицкая. — Режим доступа:

- http://infoculture.rsl.ru/donArch/home/KVM_archive/articles/2013/03/2013-03_r_kvms3.pdf.
- SAVITSKAYA, T. E. Internet memes as a phenomenon of mass culture. — URL: http://infoculture.rsl.ru/donArch/home/KVM_archive/articles/2013/03/2013-03_r_kvms3.pdf.
25. Сорокин, Ю. А. Креолизованные тексты и их коммуникативная функция / Ю. А. Сорокин // Оптимизация речевого воздействия. — М. — 1990. — С. 180–186.
- SOROKIN, Yu. A. (1990) Creoled texts and their communicative function. *Optimization of speech exposure*. Moscow. p. 180–186.
26. Столетов, А. Мемы: мифы и реальность. [Электронный ресурс] / А. Столетов. — Режим доступа: <http://www.advertology.ru/article74564.htm>.
- STOLETOV, A. Memes: Myths and Reality. — URL: <http://www.advertology.ru/article74564.htm>.
27. Столяров, А. А. Политические мемы эпохи «Фейсбук-революции» как способ конструирования медиареальности [Электронный ресурс] / А. А. Столяров // Медиаскоп. — Электрон. журн. № 3. — 2014. — Режим доступа: <http://www.mediascope.ru/node/1590#13>
- STOLYAROV, A. A. Political memes of the «Facebook revolution» era as a way to construct media reality. *Media scope*. — URL: <http://www.mediascope.ru/node/1590#13>
28. Шомова, С. А. Мемы как они есть: учебное пособие / С. А. Шомова. — М.: Аспект Пресс, 2019. — 136 с.
- SHOMOVA, S. A. (2019) *Memes as they are: training manual*. Moscow: Press aspect.
29. Щурина, Ю. В. Интернет-мемы как средство межкультурной коммуникации / Ю. В. Щурина // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. — 6(81). — 2013. — С. 34–39.
- SCHURINA, Yu. V. (2013) Internet memes as a means of intercultural communication. *Optimization of speech exposure*. News of the Volgograd State Pedagogical University (81). p. 34–39.
30. BLACKMORE, S. Do memes make sense? Yes. — URL: <http://www.susanblackmore.co.uk/Articles/Free>

31. BLACKMORE, S. (2007) Memes, Creativity and Consciousness. *PROP*. p. 50–51
32. BURGESS, T. Friday Fun: What Different Types of Memes Say about IT Service Management Professionals. — URL: <http://blog.samanage.com/friday-fun/friday-fun-what-different-types-of-memes-say-about-it-service-management-professionals>.
33. DENNETT, D. (1990) Memes and the Exploitation of Imagination. *The Journal of Aesthetics and Art Criticism*. Vol. 48 No. 2. p. 127–135.
34. GONZÁLEZ-BAILÓN, S. (2017) *Decoding the Social World: Data Science and the Unintended Consequences of Communication*. Moscow: MIT Press.
35. GOODFELLOW, I. & BENGIO, A. (2016) *Deep Learning*. MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England.
36. LISSACK, M. R. The Redefinition of Memes: Ascribing Meaning to an Empty Cliché? *Journal of Memetics – Evolutionary Models of Information Transmission*. — № 8. — 2004/ — URL: http://cfpm.org/jom-emit/2004/vol8/lissack_mr.html
37. PECH, R. J. (2003) Memes and cognitive hardwiring: why are some memes more successful than others?. *European Journal of Innovation Management*. Vol. 6 Iss:3. p. 173–181.

УДК: 004.89

MSC2010: 68T27

ПРОГРАММНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И ТЕХНОЛОГИИ АНАЛИЗА ПОТОКА ИНТЕРНЕТ-МЕМОВ¹

© М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *m.germanchuk@yandex.ru*, *art-inf@mail.ru*, *art-inf@yandex.ru*

SOFTWARE TOOLS AND TECHNOLOGIES FOR ANALYZING THE FLOW OF INTERNET MEMES.

Germanchuk M. S., Kozlova M. G., Lukianenko V. A.

Abstract. Memetics of social networks is a popular section of scientific research. The article deals with the problems of meme distribution, mathematical modeling of distribution processes, and tools for socio-political research. It is shown that the life cycle of a stream of Internet memes and a separate meme has its own specifics and ecology. The task of identifying the real stage of the life cycle (LC) is much more difficult than for the economic LC of the enterprise. In General, the problem is incorrect, depending on the availability of data about the selected meme stream in the network. Network monitoring for the identification of the meme LC is associated with the query system, the technology of automatic database formation (knowledge) and its subsequent use in forecasting based on the conclusion by analogy with the use of neural network approaches. The initial stage of the research project on the flow of Internet memes is considered.

Online social network communities act as consumers of information flows that build the “artificial intelligence” of their members. Among different types of information circulating within social networks, of particular interest are Internet Memes (IM). They are presented in a visual, easy to understand image-based form and have a viral spreading pattern. The already developed process of IM flow propagation contributes to the formation of both positive and negative stereotypes. Social and political effects of IM are mild and manageable. The information field is self-organized according to the principle of least resistance in a destructive direction, and a great effort is required to manage such a process. That said, comprehensive interdisciplinary studies aimed at examining the IM flow seem quite relevant and are in high demand. An emerging area of interdisciplinary research called “memetics” makes an impact on algorithms for solving the NP-hard problems of discrete optimization in the form of evolutionary algorithms related to the viral nature of information propagation on the Internet. And vice versa, the methods of studying high-dimensional complex networks together with associated optimization problems are implicated in the analysis of processes occurring in online networks. While it is possible to

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ЭИСИ в рамках научного проекта № 20-011-31460. (Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR and EISR, project number 20-011-31460)

examine the life cycle of a single meme, its circulation often gives rise to a flow of derivative memes. Depending on the introduced concept of a meaning proximity (analogy, precedence), the calculated flow rates and intensity parameters will be different. Taking into account the probabilistic nature of the process, it is still important to be able to work with a single meme or a small number of memes. Typically, the life cycle is qualitatively displayed as a graph of a function that depends on time, with a characteristic increase, maximum value, period of stabilization and degradation (the function value tends to zero). It is difficult to find out a stage related to the IM flow under examination. The needed parameters can be extracted from a close data set relevant to the analyzed memes as a result of regular monitoring of the process. At the same time, quantitative characteristics must be measured in different parts of a circulation network, which is complicated. As a result, to identify the life cycle of the IM flow, it is necessary to involve expert communities, mathematical modeling, as well as the Big Data and Data Mining technologies. Based on the logic of dynamic systems, mathematical models of spread of viral diseases, rumors, diffuse processes, etc., require adaptation to networks that change over time. In the simplest-case scenario, it might be sufficient to obtain statistical data on the quantity, frequency, and so on for the flow of tested memes followed by regression and factor analyses. On the other hand, similar to high-dimension dynamical systems, one can expect the presence of channels and jokers – low-dimension models that can qualitatively reflect the ongoing processes of IM propagation. The identification and prediction of the IM flow life cycle are primarily centered on studying the IM effects on the activist youth audience and effective management needed to eliminate possible destructive influences. For example, the life cycle of the IM “cats” would let us study the audience most sensitive to such an influence, and a corresponding cluster of related communities. Of note is that only indirectly measured data would be available for further analysis. The acts of creating and propagating one’s own IM flow must comply with actual legal prohibitions and regulations. Of most interest is to find a prospective test IM, which appears to be quite doable given the contingent nature of meme emergence. That said, studying the IM life cycles is of great importance and implies the creation of relevant tools for accumulating data, analyzing the processes of IM propagation and making a corresponding software product to help process memes in automatic mode.

The paper provides the results of the initial stage of work on the project designed to study a spread dynamics of Internet memes. The importance of developing specific tools for collecting, processing and studying the IM life cycle is emphasized. Here we have elaborated a general structure, visualization methods and ways of implementing a software product in the life cycle analysis. For its further development, we intend to implement a neural network approach for the tasks of intellectualized processing of the flow of Internet memes in order to give an estimate of their impact on the audience of Internet communities.

Keywords: *Internet memes; analysis, modeling, identification, forecasting and management of the flow of Internet memes; technologies of socio-political use of memes*

ВВЕДЕНИЕ

Сообщества социальных интернет-сетей являются потребителями потока информации, которая формирует «искусственный интеллект» участников. В соцсетях среди распространенной информации выделяются интернет-мемы (ИМ), которые визуальны, образны, просты для восприятия и имеют вирусный характер распространения. Существует развитый процесс распространения потока ИМ, способствующий формированию как положительных, так и отрицательных стереотипов. Социально-политическое воздействие ИМ является мягким и управляемым. Самоорганизация информационного поля идет по принципу наименьшего сопротивления в деструктивном направлении и необходимы большие усилия для управления таким процессом. Поэтому всесторонние междисциплинарные исследования по изучению потока ИМ являются востребованными и актуальными. Формирующееся направление междисциплинарных исследований под названием «меметика» оказывает влияние на алгоритмы решения NP -трудных задач дискретной оптимизации в виде эволюционных алгоритмов, связанных с вирусным характером распространения информации в сети. И наоборот, методы исследования сложных сетей высокой размерности, соответствующие оптимизационные задачи находят отражение в анализе процессов, проходящих в интернет-сетях.

В работе ставится задача анализа жизненного цикла (ЖЦ) потока ИМ или выделенного по запросу мема. Вопросы разнообразных подходов по определению мемов, их классификации, проблематике исследований, а также разработке инструментов извлечения, обработки и анализа ИМ предварительно исследовались в работах [1, 2]. Распознавание изображений мемов, визуализация распространения в сети, аспекты интеллектуализации обработки данных потока мемов рассматривались в работах [3–6], социолого-политические подходы отражены в [7].

Можно рассматривать ЖЦ одного мема, уже существующего, но, как правило, одновременно распространяется поток близких мемов. В зависимости от введенного понятия близости (аналогии, прецедентности) мощность потока и интенсивность будет различной. Отмечая вероятностный характер процесса, необходимо уметь работать с одним мемом или их небольшим количеством. Обычно качественно ЖЦ отображается в виде графика функции, зависящей от времени, с характерным ростом, максимальным значением, периодом стабилизации и деградации (значение функции стремится к нулю). Какому этапу соответствует рассматриваемый поток ИМ, определить трудно. Нужные для этого характеристики могут быть извлечены из близкого набора данных, соответствующих анализируемым мемам в результате регулярного

мониторинга процесса. При этом должны измеряться количественные характеристики в разных частях сети распространения, что затруднительно. Из этого следует, что для идентификации ЖЦ потока ИМ необходимо привлечь экспертное сообщество, математическое моделирование, технологии сбора и обработки больших данных (BigData) и извлечения знаний из таких данных. С точки зрения динамических систем, математические модели распространения вирусных заболеваний, слухов, диффузных процессов и др. требуют адаптации на сети, изменяющийся во времени. В простейшем случае можно ограничиться статистическими данными по количеству, частоте и т. п. потока тестируемых мемов с последующим регрессионным и факторным анализом. С другой стороны, как и для динамических систем большой размерности, можно ожидать наличие русел и джокеров — моделей малой размерности качественно отображающих происходящие процессы распространения ИМ.

Идентификация и прогнозирование ЖЦ потока ИМ прежде всего ориентировано на изучение влияния ИМ на активную молодежную аудиторию и возможность управления для ликвидации деструктивного воздействия. Например, ЖЦ ИМ «котики», позволяет изучать аудиторию, подверженную такому влиянию, а также соответствующий кластер близких сообществ. При этом для изучения, в основном, доступны данные косвенных измерений. Создание и распространение своего потока ИМ сопряжено с юридическими запретами и предписаниями. Наиболее интересно выявление будущего тестового ИМ, что вполне возможно в связи с событийным характером появления мемов. Таким образом, изучение ЖЦ ИМ является актуальной задачей и затрагивает разработку инструментов сбора информации, анализа процесса распространения ИМ и создания соответствующего комплекса программного обеспечения, предназначенного для автоматизированной работы с мемами.

1. ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ ИНТЕРНЕТ-МЕМОВ

Интернет-мем (англ. Internet meme) — информация или фраза, как правило, остроумная или ироническая, часто бессмысленная, спонтанно приобретающая популярность в интернет-среде посредством распространения в Интернете (по электронной почте, в мессенджерах, на форумах, в блогах и др.). Понятие «мем» вошло в употребление в середине первого десятилетия XXI века, применяется в средствах массовой информации, бытовой лексике и общении внутри Интернета. В эпоху Интернета практически все современные мемы становятся автоматически ИМ. Мемами могут считаться как слова и их сочетания, так и изображения. То есть любые аудиальные или визуальные сегменты Интернета, высказывания, картинки или звук, которые имели значение и распространились в сети Интернет.

Новые ИМ появляются постоянно и, спустя некоторое время, исчезают. Основной характеристикой для ИМ является его актуальность: мем появляется в новостных лентах пользователей, его отправляют друг другу в личных сообщениях, его упоминают в неформальной беседе. Жизненный цикл для ИМ составляет: момент его появления, динамика распространения и затем потеря актуальности и завершение использования. Момент появления ИМ тяжело отследить, так как «вирусным» может стать любой контент, даже нескольколетней давности. Показателем актуальности или динамики ИМ могут являться количественные характеристики, часто используемые в социальных сетях или форумах: количество «лайков», «репостов», рейтинг и т. д. Однако, не стоит забывать, что помимо этих характеристик на релевантность ИМ также влияет его употребление пользователями соцсетей, мессенджерами, в блогах и т. д. В этом случае количественные характеристики получить в полной мере не представляется возможным. Затруднительным также является сбор количественных характеристик из соцсетей. Допустим, нужно исследовать определенный ИМ, и для этого будем отслеживать его актуальность, за счет мониторинга количественных характеристик в нескольких соцсетях (ВК, Твиттер, Фейсбук). В этом случае перед нами появляется сразу несколько трудностей.

Во-первых, распознавание ИМ среди остального контента. Классификация изображения на предмет наличия в нем искомого мема является не тривиальной задачей. Распознавание ИМ в аудио и видео материалах соответственно представляется очень трудозатратным, почти невозможным.

Во-вторых, отслеживание ИМ во всех группах, каналах или темах является слишком сложной задачей мониторинга и последующей обработки. Причиной этому служит большое число, перечисленных выше, путей распространения информации в социальных сетях. Количество групп в социальных сетях превышает сотни тысяч. Анализ содержимого всех этих каналов распространения ИМ не представляется возможным. Исследование ЖЦ ИМ существенно упростилось бы в рамках системы тотального сбора, обработки и прогноза всего интернет-контента.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИРУСНОГО ХАРАКТЕРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМ СРЕДИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрим простую математическую информационную модель динамики распространения ИМ среди пользователей сети. Такая модель позволяет оценить уровень необходимой входной информации и дать качественную и грубую количественную оценку прогнозных результатов количества новых потребителей (и распространителей) выбранных ИМ в зависимости от уже активных потребителей ИМ.

Пусть N — потенциальное число потребителей ИМ ($N \gg 1$). Через $x(t)$ обозначим число пораженных ИМ в момент времени t , а через $y(t)$ — число еще не получивших и не среагировавших на распространяемый $x(t)$ сообществом ИМ. То есть $x(t) + y(t) = N$. Число возможных участников за промежуток Δt пропорционально числу контактов между уже активными потребителями $x(t)$ и потенциальными $y(t)$, т. е. приращение $\Delta x = \alpha x(t)y(t)dt$, где α — коэффициент пропорциональности. Переходя к пределу для приращения $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x(N - x), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Решение задачи Коши (1) получим в виде

$$x(t) = \frac{x_0 N e^{\alpha N(t-t_0)}}{N - x_0(1 - e^{\alpha N(t-t_0)})} = \frac{x_0 N}{(N - x_0)e^{-\alpha N(t-t_0)} + x_0}.$$

Заметим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N$. Найдем скорость изменения скорости распространения ИМ:

$$\ddot{x}(t) = \alpha \dot{x}(N - 2x) = \alpha^2 x(N - x)(N - 2x).$$

В ноль может обращаться только третий множитель

$$N - 2x = 0 \Leftrightarrow (N - x_0)e^{-\alpha N(t-t_0)} - x_0 = 0.$$

Откуда следует, что

$$\ddot{x} > 0 \text{ при } t \in \left(0, t_0 + \frac{1}{\alpha N} \ln \frac{N - x_0}{x_0}\right) \text{ и } \ddot{x} < 0 \text{ при } t \in \left(\frac{1}{\alpha N} \ln \frac{N - x_0}{x_0}, +\infty\right).$$

Следовательно, скорость \dot{x} роста интереса к ИМ возрастает до момента $t^* = \frac{1}{\alpha N} \ln \frac{N - x_0}{x_0}$, а затем убывает. Параметр t^* необходим для разработки системы управления динамикой распространения ИМ.

По отношению к различным потокам ИМ сообщество распадается на кластеры по интересам (в том числе деструктивным и конструктивным). Для каждого из сообществ, состоящих из N_i ($i = \overline{1, n}$) участников ($N = \sum_{i=1}^n N_i$) можно выписать свою задачу Коши (1) для $x_i(t)$, t_{0i} , x_{0i} , α_i .

Характеризовать процесс распространения будут интегральные характеристики по всем сообществам. Заметим, что задача восстановления исходных параметров по

известным текущим является некорретной. Деструктивные участники распространения ИМ, как правило, пересекаются с игровыми компьютерно зависимыми участниками сети. Если для игровой зависимости существуют программы, осуществляющие профилактику, диагностику и лечение, то идентификация пользователей, попадающих под вирусное заражение деструктивными ИМ не проводится. Игровая зависимость поддерживается постоянным обновлением игр, а жизненный цикл ИМ — вбросом новых мемов. График кривой ЖЦ ИМ может быть представлен в виде линейной комбинации логистических кривых (решений задачи Коши (1)), если есть исходная информация. Фактический интерес представляют только активные периоды.

Для сбора информации о жизненном цикле мема необходима информация об его актуальности на протяжении некоторого временного интервала. Одним из способов получения этой информации является выдача поискового сервиса, так как поисковые сервисы приоритезируют актуальную информацию. Несмотря на то, что результаты поиска могут не являться самыми новыми, они дают возможность составить реальную картину распространения мемов в сети интернет. Поэтому для получения выборки мемов используются результаты поиска Google search.

Так как Google search является вебсайтом и не имеет открытого API для получения информации, появляется важная задача по извлечению информации из вебстраниц. Можно извлекать информацию вручную, что работает на небольших объёмах данных, либо автоматизировать данный процесс, что позволяет извлекать большие объёмы информации с сайтов.

Процесс извлечения структурированной полезной информации с сайта называется парсингом (parsing), а инструменты для реализации данного процесса — парсерами (parsers). Как правило, сайты разрабатываются с учётом того, что считывать информацию с их страниц будет человек. Но формат представленных данных, понятный человеку, зачастую не столь понятен программным средствам. Кроме того, структура представляемых данных варьируется от сайта к сайту, поэтому не существует универсального средства для извлечения информации.

Парсеры — это программы для автоматизированного сбора и структурирования информации с сайтов. Как правило, разрабатываются для каждого сайта отдельно, с учетом его структурных и технических особенностей.

Также существуют готовые решения, позволяющие извлекать информацию с сайта после предварительной конфигурации, не написав ни единой строчки кода. Эти решения часто стоят дорого и не обладают той гибкостью, которую могут дать решения, разработанные под конкретный сайт.

Процесс извлечения информации может быть простым: загрузить URL, считать информацию и отдать получателю; а может быть и сложным: авторизоваться в системе, сконструировать запрос по информации из заголовков и значений JavaScript-переменных на странице, имя которых может меняться с каждым запросом, а JS-код находится в минифицированном или обфусцированном виде. Если в первом случае всё достаточно просто, то во втором, чтобы за разумное время разработать парсер, стоит прибегнуть к использованию headless-браузеров (без графического интерфейса) с поддержкой сценариев вроде PhantomJS по извлечению данных для оптимизации времени на изучение того, как сайт взаимодействует с бэкендом. Также для этих целей можно прибегнуть к Selenium WebDriver с одним из реальных браузеров.

3. СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ОБРАБОТКИ ИНТЕРНЕТ-МЕМОВ

Основной задачей работы явилась разработка кроссплатформенного комплекса программного обеспечения (ПО), со следующим функционалом:

- 1) автоматическое или ручное добавление изображений (мемов);
- 2) хранение изображений;
- 3) добавление тэгов для изображений;
- 4) агрегация изображений по тэгам;
- 5) добавление изображениям временных отметок.

3.1. Структура серверной части. Серверная часть программного комплекса имеет модульную структуру (каждый из модулей при необходимости может быть заменен, без затрагивания остальных) и состоит из следующих компонентов:

1. Веб сервер – Tagrun Server.
2. База данных.
3. Сервис хранения файлов.
4. Сервис хэширования изображений.
5. Программа автоматического сбора информации – Centaur.

TagRun Server отвечает за обработку веб запросов (REST API) и связь всех остальных компонентов (кроме Centaur) в единый комплекс. Для хранения информации об изображениях, мониторинговых запросах, результатах мониторинга, а также тэгах и временных отметках необходима база данных. Так как между объектами хранения существует значительное количество взаимосвязей, имеет смысл использовать реляционную базу данных. Однако, база данных обеспечивает хранение только

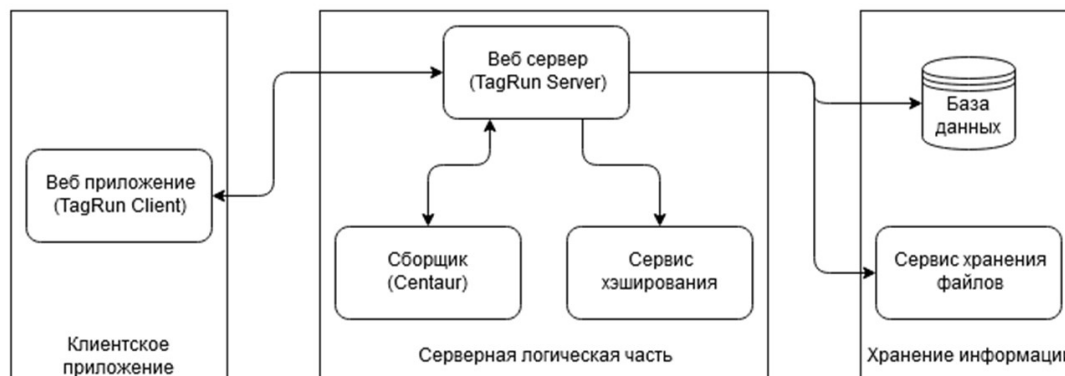


Рис. 1. Структура серверной части

информации об объектах и их связях, но не обеспечивает хранение файлов изображений. Поэтому необходим сервис хранения для загружаемых файлов. Для определения схожести изображений (нахождения дубликатов) необходимо особым образом хэшировать эти изображения. Эту задачу на себя берет сервис хэширования изображений.

Для наполнения базы данных актуальной информацией используется автоматический сборщик Centaur. Решение вынести логику сборки информации по поисковым запросам и обратному поиску изображений в отдельную программу связано с тем, что алгоритм сбора меняется в зависимости от ресурсов, с которых происходит сбор. Так как формат этих ресурсов не постоянный, то и программа будет нуждаться в частых изменениях.

3.2. Структура базы данных. В базе данных определены следующие сущности: ObservedQueries (Мониторинговые запросы), SearchTimeStamps (Даты поиска), Images (Изображения), Tags (Тэги), WebResources (Ссылки на веб ресурсы), QuerySearchResults (Результаты поиска по запросу), ImageSearchResults (Результаты обратного поиска по изображению) и FilterPresets (Шаблоны фильтров).

Таблица ObservedQueries содержит в себе информацию о поисковых запросах, которые используются для мониторинга. В неё входят следующие столбцы:

- Id – уникальный идентификатор мониторингового запроса;
- Text – текст запроса;
- UpdateInterval – интервал выполнения запроса (может принимать следующие значения: 1 – ежедневно, 2 – еженедельно, 3 – ежемесячно);
- Active – означает, происходит ли мониторинг по данному запросу (1 – происходит, 2 – приостановлен);
- Part и Total – обозначают процесс выполнения текущего мониторинга.

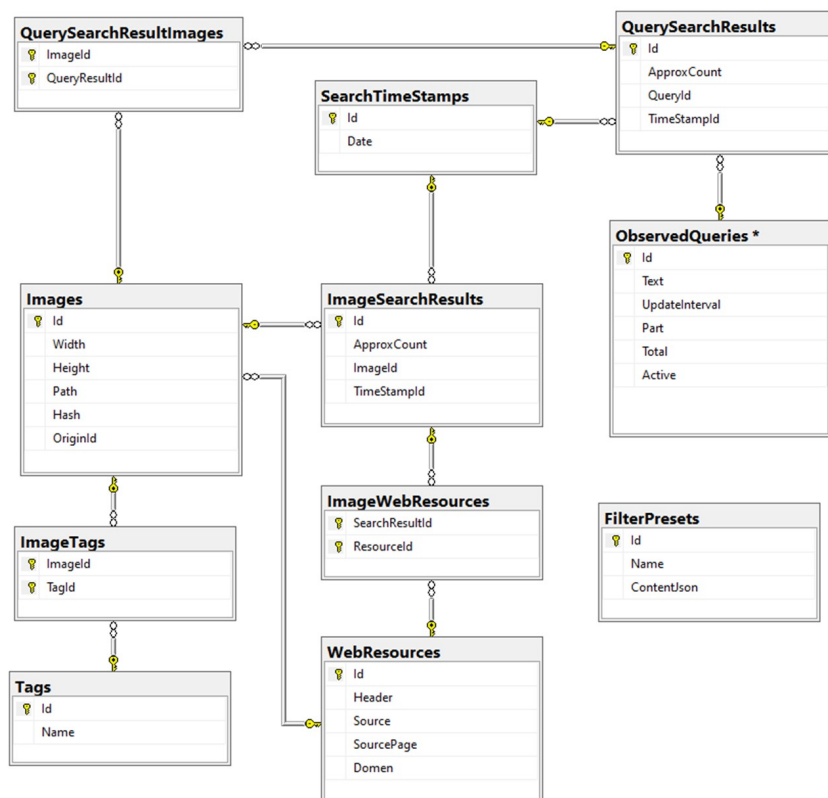


Рис. 2. Структура базы данных

Таблица SearchTimeStamps хранит даты осуществления мониторинга по запросу или обратному поиску по изображению. Содержит идентификатор и дату.

В таблице Images находится информация о собранных в процессе мониторинга изображениях. В таблице представлены следующие столбцы:

- Id – уникальный идентификатор изображения;
- Width – ширина изображения;
- Height – высота изображения;
- Path – идентификатор, для получения файла изображения из файлового сервиса;
- Hash – хэш изображения;
- OriginId – идентификатор из таблицы WebResources, содержит ссылку на оригинал изображения;
- Через таблицу ImageTags осуществляется связь многие-ко-многим с таблицей тэгов.

Таблица Tags хранит информацию о тэгах, которые могут быть присвоены изображениям. Содержит идентификатор тэга и его название.

Таблица `WebResources` хранит информацию об ресурсе в интернете, где размещено изображение. В неё входят следующие столбцы:

- `Id` – идентификатор веб ресурса;
- `Header` – заголовок страницы, на которой размещено изображение;
- `Source` – ссылка на изображение;
- `SourcePage` – ссылка на страницу, содержащую изображение;
- `Domain` – домен веб ресурса, на котором размещено изображение.

В таблице `QuerySearchResults` содержатся результаты мониторинга поискового запроса за определенную дату. В таблице представлены следующие столбцы:

- `Id` – идентификатор результата поиска;
- `ApproxCount` – примерное количество результатов по поисковому запросу (информация, предоставленная поисковиком);
- `QueryId` – идентификатор поискового запроса, по которому происходил мониторинг;
- `TimestampId` – идентификатор даты мониторинга;
- Через таблицу `QuerySearchResultImages` осуществляется связь многие-ко-многим с таблицей `Images`. Эта связь означает, что в результате этого мониторинга были получены связанные изображения;

Таблица `ImageSearchResults` хранит в себе информацию о результатах обратного поиска по изображению. В ней содержатся следующие столбцы:

- `Id` – уникальный идентификатор результатов поиска по изображению;
- `ApproxCount` – примерное количество результатов по поисковому запросу (информация, предоставленная поисковиком);
- `ImageId` – идентификатор изображения, по которому происходил поиск;
- `TimestampId` – идентификатор даты мониторинга;
- Через таблицу `ImageWebResources` осуществляется связь многие-ко-многим с таблицей `WebResources`. Эта связь означает, что в результате этого мониторинга были получены связанные ссылки на веб-ресурсы.

Таблица `FilterPresets` нужна для хранения шаблонов фильтра, которые можно сохранить и загрузить при использовании веб-приложения. Содержит идентификатор, название и содержание шаблона.

3.3. Сервис хеширования изображений. При сборе изображений важным аспектом является нахождение одинаковых или схожих изображений. При этом для сопоставления изображений между собой нужно учитывать именно визуальную составляющую, а не размер или байтовое содержание файла. Поэтому традиционные способы хеширования файлов (такие как `md5`, `sha2` или `сгс`) для этого не подходят.

Для определения схожести изображений используется следующий алгоритм хэширования:

1. Происходит сжатие изображения до определённого размера $N \times N$ пикселей (например, 8×8).
2. В полученном изображении уменьшается глубина цвета до определённого K бит (например, 1 бит – черно-белое изображение).
3. После этого выписываются последовательно строки полученного изображения и получаем хэш длиной $N \times N$, где каждый элемент содержит K бит информации.
4. Теперь можно сравнивать полученные хэши между собой используя определённую метрику, которая гарантирует близость минимально отличных друг от друга хэшей (например, расстояние Хэмминга).

Таким образом получаем инструмент хэширования изображений, который позволяет нам с определённой точностью определять похожие изображения и гарантирует, что можно определить полностью одинаковые изображения.

3.4. Автоматический сбор информации. Для обеспечения мониторинга необходимо с заданным интервалом производить сбор информации и сохранять полученные результаты. Эту функцию обеспечивает Centaur, который запускается отдельно от веб сервера каждый день в определённое время. После получения списка запросов мониторинга от сервера, Centaur определяет, по каким из них нужно производить поиск в данный момент (запрос должен быть активным и с момента последнего мониторинга должно пройти время, соответствующее интервалу мониторинга этого запроса). Далее работа состоит из двух этапов. На первом этапе с каждым из запросов выполняется следующий алгоритм:

1. Создается новый результат мониторинга.
2. Выполняется поиск по тексту запроса в поисковике.
3. Берутся результаты поиска из раздела изображения.
4. По каждому из этих изображений:
 - 4.1. Загрузить изображение на сервер,
 - 4.2. Если изображение новое, получить теги этого изображения используя поисковик и загрузить на сервер,
 - 4.3. Добавить изображение к результату мониторинга,
 - 4.4. Добавить изображение в список для второго этапа,
 - 4.5. Обновить прогресс мониторинга.

После того, как результаты поисковых запросов обработаны, Centaur переходит ко второму этапу работы. На этом этапе с каждым из сохранённых на первом этапе изображений осуществляется следующий алгоритм:

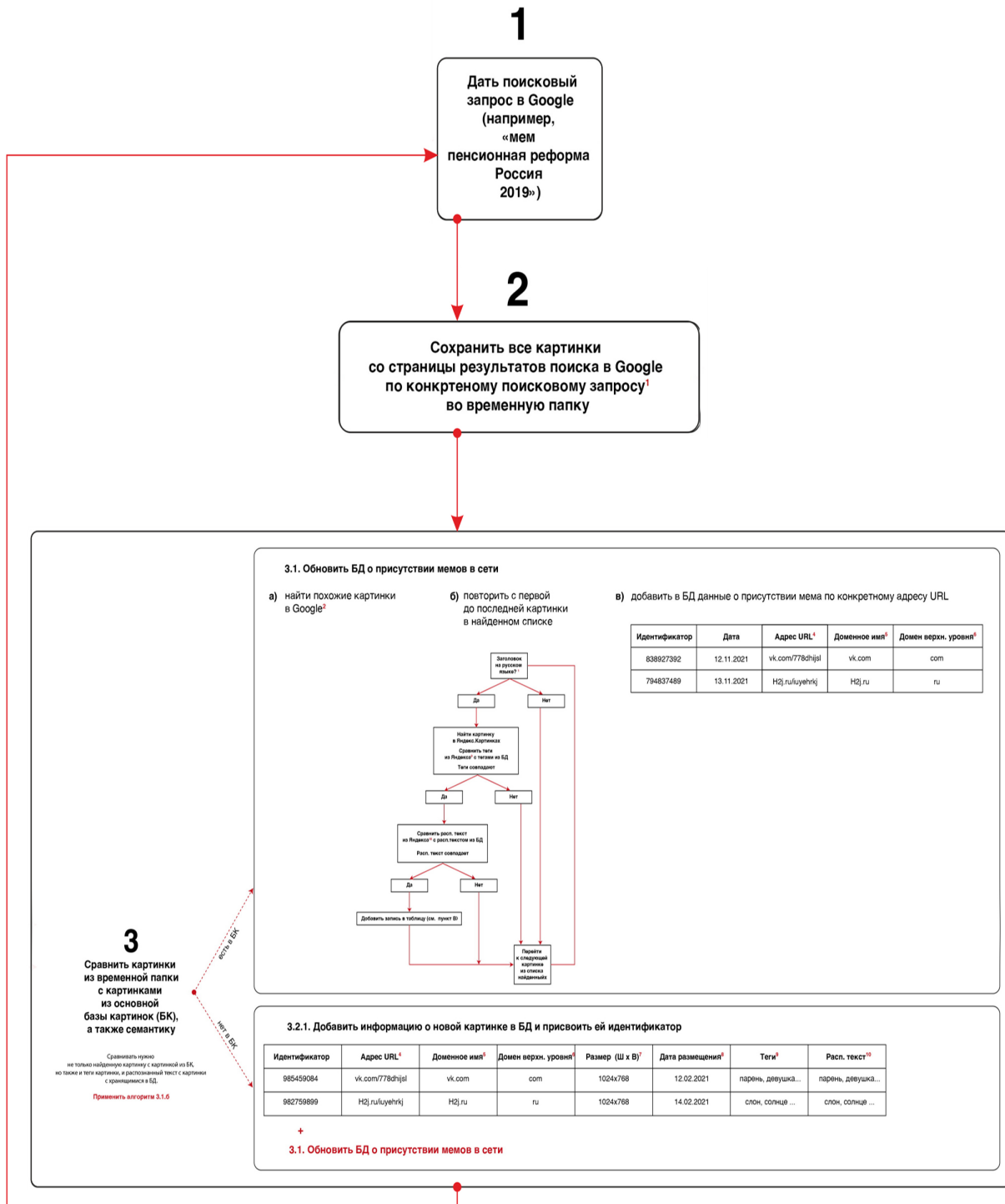


Рис. 3. Схема сбора данных по поисковому запросу

1. Создать новый результат поиска по изображению
2. Выполнить обратный поиск по изображению в поисковике
3. Взять результаты поиска из раздела изображения
4. По каждому из этих результатов:
 - 4.1. К результату поиска по изображению добавить новый веб-ресурс, содержащий информацию об изображении;
 - 4.2. Обновить прогресс мониторинга.

Стоит отметить, что поисковики не приветствуют их использование для автоматического сбора информации и стараются пресечь подобное использование. Чаще всего, если пользователь поисковика замечен в подозрительной активности ему ограничивают доступ к поисковику на определенное время. Для того, чтобы избежать подобного Centaur использует простые, но тем не менее, эффективные способы маскировки под обычного пользователя. В них входят: замена заголовка User-Agent в запросе и ограничение на количество запросов в определенный промежуток времени. Экспериментальным путем установлено, что для того, чтобы не вызвать подозрения у поисковика google нужно совершать не более чем один запрос в 5 секунд. Стоит отметить, что это также снижает скорость работы программы, так как на полную обработку одного поискового запроса уходит 500-600 запросов к поисковику, а значит примерно час реального времени.

4. ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ МЕМА

Рассмотрим задачу исследования жизненного цикла мема. Чтобы автоматизировать получение результатов поисковой выдачи из Google необходимо учитывать основные принципы взаимодействия с интернет сервисами, к которым и относится Google search. При создании интернет сервиса разработчик или компания принимает решение по созданию программного интерфейса (API) для того, чтобы сторонние разработчики своих проектов могли легко и удобно использовать их сервис. К сожалению, Google search не имеет публично доступного API, поэтому результаты поиска будем получать из HTML страниц. Этот подход лежит в части работы программы:



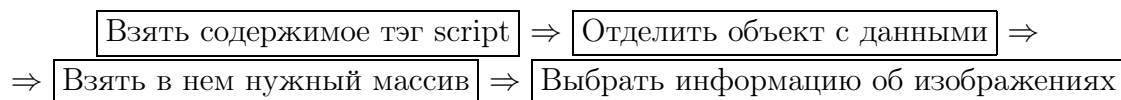
Создание web-запроса и получение результата в виде изображений, используя современные программные средства, не сложно, необходимо использовать следующий url запрос: <https://www.google.com/search?q=Query&tbm=isch>,

где вместо Query нужно подставить искомый запрос, например «мем».

Более сложную задачу представляет непосредственное извлечение информации из изображений. Для этого используются основные способы создания web-страниц, применяемые в современном интернет пространстве. Первый подразумевает генерацию страниц на стороне сервера и последующую отправку их клиенту (web-браузеру). Это более старый способ генерации страниц, предполагающий большой объем данных для передачи, используется, например, в php. Второй, более современный способ, состоит в создании минимальной html-страницы на сервере и загрузки на неё данных от клиента при помощи дополнительных запросов. Этот способ позволяет сэкономить трафик и ускорить время загрузки страниц. Google search использует модифицированную версию первого способа. При запросе клиенту возвращается наполовину заполненный HTML документ, часть информации в котором дополняется при помощи javascript.

После анализа результата запросов было установлено, что основная информации об изображениях (ссылка на само изображение и страницу, откуда оно получено) находится в конце документа в виде javascript-объекта, который используется в дальнейшем для отображения элементов страницы.

Следовательно, для того, чтобы получить информацию об изображениях необходимо проделать следующую цепочку операций:



Таким образом, извлекается информация обо всех изображениях по поисковому запросу. Далее отслеживаются количественные показатели пребывания выделенного мема (потока ИМ) в информационном пространстве сообществ.

Рассмотрим реализацию технологии исследования ЖЦ мемов с помощью разработанного веб-приложения. В рамках совместной с социологами Крымского федерального университета научно-исследовательской работы с целью исследования ЖЦ ИМ и построения системы соцопросов была выбрана контрольная выборка изображений из сети интернет. Предварительная подготовка имеющихся данных с помощью разработанного программного обеспечения для:

- группировка ИМ экспертной группой по определенным признакам;
- выборка ИМ по заданным признакам;
- создание, сохранение и выполнение экспертных запросов в виде выражений математической логики для выборки ИМ;
- выделение областей на изображении ИМ с возможностью задания признаков этой области.

Приложение FrontEnd написано на языке TypeScript, который является расширением языка JavaScript. Использование чистого JavaScript в больших приложениях повышает сложность разработки программного обеспечения, так как этот язык программирования обладает динамической типизацией и из-за этого во время исполнения кода могут возникать непредвиденные ошибки. TypeScript отличается от JavaScript возможностью явного статического назначения типов, поддержкой использования полноценных классов (как в традиционных объектно-ориентированных языках), а также поддержкой подключения модулей, что призвано повысить скорость разработки, облегчить читаемость, рефакторинг и повторное использование кода, помочь осуществлять поиск ошибок на этапе разработки и компиляции. В конечном итоге TypeScript компилируется в JavaScript и может быть выполнен, как в браузере, так и на платформе NodeJS [<https://nodejs.org/en/>].

Для создания UI выбрана библиотека ReactJS [<https://ru.reactjs.org/>], которая позволяет создавать графические пользовательские интерфейсы для веб-приложений. Для работы с Document Object Model (DOM) в React используется Virtual DOM — виртуальное дерево элементов веб-страницы. При изменении в Virtual DOM автоматически изменяется DOM в браузере так, чтобы он соответствовал Virtual DOM. React позволяет разрабатывать интерфейсы, используя компонентно-ориентированное программирование. В основе React лежат компоненты, которые являются самостоятельными, неиспользуемыми блоками, каждый из которых обладает своим собственным состоянием и функциональностью.

Для управления состоянием приложения выбрана библиотека Redux, которая позиционируется как предсказуемый контейнер состояния (state) для JavaScript приложений. React.js в связке с Redux на клиентской стороне позволяет создать MVC архитектуру приложения. MVC (model, view, controller/модель-представление-контроллер) архитектура предполагает, что модель — это единственный источник истины и все состояние хранится там. Представления — это производные модели, которые должны быть синхронизированы, когда модель изменяет свое состояние. Приложение, написанное на связке React + Redux, является недетерминированным конечным автоматом.

Для роутинга приложения (маршрутизация внутри приложения на стороне клиента) используется React.Router. Роутер определяет, какое представление нужно отобразить пользователю. Благодаря роутеру, удалось сделать приложение односторонним (single page application, SPA). Это значит, что веб-приложение использует один HTML-документ и реализует взаимодействие с клиентом при помощи динамической подгрузки стилей и скриптов. Преимуществом SPA является то, что они

похожи на нативные приложения, за исключением того, что исполняются в рамках веб-браузера. Переход между страницами происходит более бесшовно и незаметно для пользователя, что позитивно сказывается на пользовательском опыте (UX) и позволяет увеличить скорость ответа страницы, так как приложению не нужно подгружать весь HTML файл целиком.

Сборка интерфейса осуществляется при помощи системы сборки JavaScript модулей webpack. Задачей webpack является сборка из JavaScript модулей, CSS и HTML файлов единого пакета веб-приложения.

Также используется Babel.js, который преобразует код, написанный на JavaScript последнего стандарта (в проекте используется ECMAScript 6) в JavaScript старого стандарта для поддержки старыми браузерами.

Для задания стилей элементов на странице используется библиотека Bootstrap 4, разработанная компанией Twitter. Она упрощает задание стилей страницы, так как можно не писать кастомный CSS код, а использовать уже заготовленные классы для разметки.

Приложение работает с **сущностями**:

Area — область, выделенная на изображении — класс, содержащий информацию об области. Он хранит id картинки в базе, id области в базе, ее координаты и размер области, а также список тэгов, относящихся к ней.

Tag — сущность тэга, объект с полем id тэга в базе и его именем.

ImageInfo — основная сущность, объединяющая другие атомарные сущности. Является представлением изображения в приложении, агрегирует в себе id, параметры ширины и высоты изображения, дату его загрузки на сервер, массив с областями картинки, массив с тэгами, относящимися к самой картинке и url — ее расположение в файловой системе сервера.

Query — логическое выражение для выборки изображений из базы данных, т. е. представляет структуру в формате JSON, в виде дерева, где у каждого элемента есть тип (логический оператор или операнд), текстовое значение и массив дочерних элементов.

Компоненты приложения:

TagSuggestSelect — предложения по тэгам из базы данных.

TList — список передаваемых в него сущностей, выведенных в столбик.

QueryBlockSuggestSelect — предложения для выбора элементов визуального представления запроса для выборки изображений.

QueryBlock — блок визуального представления экспертного запроса.

Modal — всплывающее окно, которое перекрывает основной контент страницы.

ImageStrip — блок, который отображает картинки в виде «плиточек».

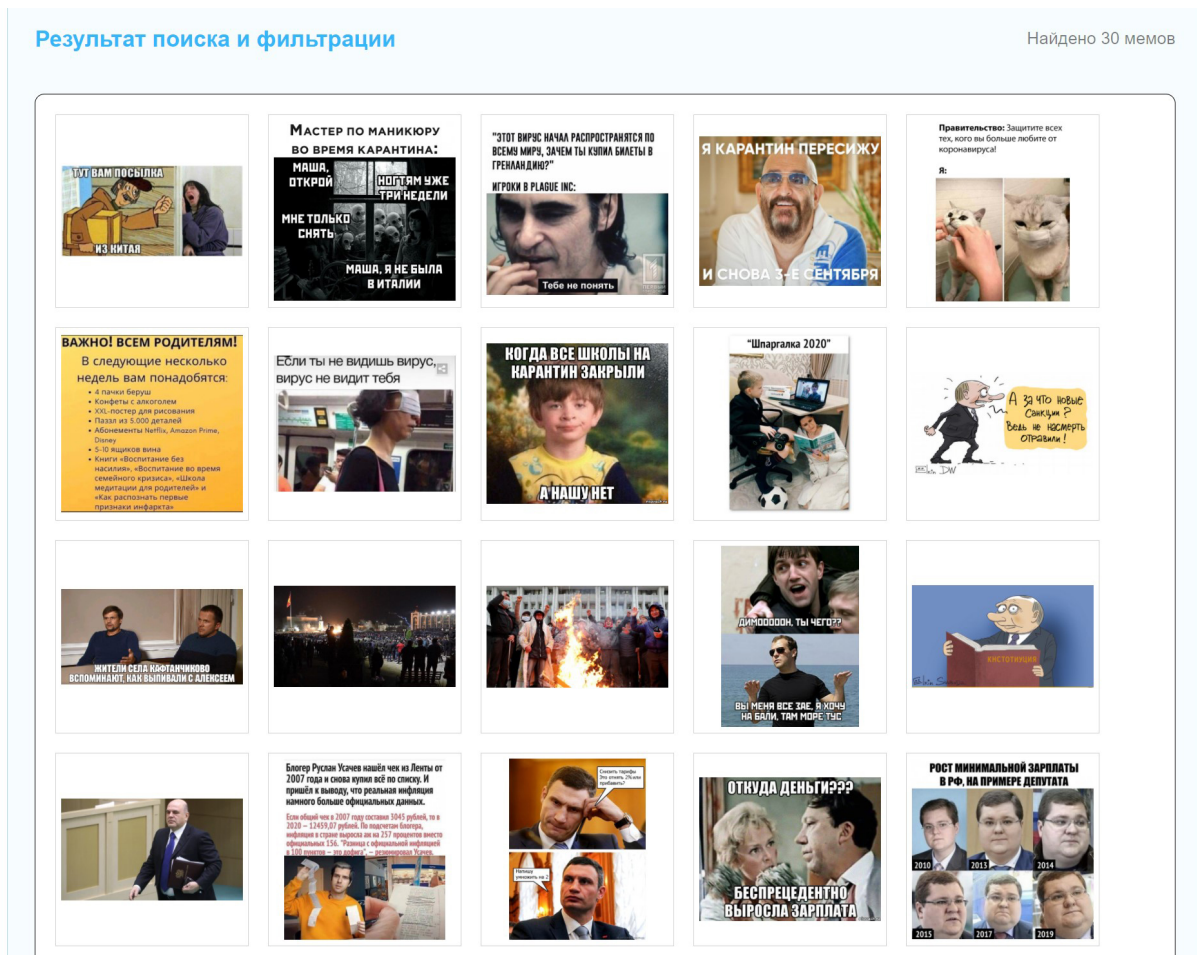


Рис. 4. Отображение картинок в виде «плиточек» (ImageStrip)

ImageDetails — блок, в котором отображается информация об изображении, а также происходит основная работа с изображением.

ColoredRect — блок, в котором происходит работа с областями картинки.

Создание новой области происходит при помощи drag-n-drop. В основе блока лежит компонент React-konva (HTML5 canvas), приспособленный для работы с react и его data-flow.

Представления. Пользовательский интерфейс разделен на три представления, каждый из которых отвечает за свою часть функционала приложения. Первое представление — это форма загрузки изображений на сервер. Позволяет загружать. Пользователь нажимает на кнопку «Выберите файл» и выбирает изображение, расположенное на своем локальном хранилище. Файл записывается в state компонента. После нажатия на кнопку «Загрузить изображение» вызывается action `uploadImage` и изображение отправляется на сервер для хранения. Второй экран — основное окно для работы с загруженными изображениями. Крайняя левая колонка представляет из себя блок `TList`. В этой колонке можно удалять теги и производить фильтрацию изображений по определенному тэгу. Также присутствует кнопка отображения всех изображений, независимо от их тэгов.

Средняя колонка это компонент `ImageStrip`. При нажатии на изображение происходит выбор изображения и отрисовка крайнего правого компонента `ImageDetails` с данными о выбранном изображении.

Третий экран — это страница запросов и состоит из трех блоков: `TList`, `ImageStrip`, и `QueryBlock`. Здесь осуществляются операции с запросами, такие как: создание, сохранение и поиск изображений по заданному запросу. Программно-аппаратная часть сервиса (Back-end) реализована на языке `C#`, в качестве системы управления базой данных используется `MsSQL`.

Ключевой сущностью в приложении является информация об изображении, которая хранится в таблице `Images`, которая связана с таблицей `Areas` связью один-ко-многим и с таблицей `Tags` связью многие-ко-многим. Также таблица `Areas` связана с таблицей `Tags` связью многие-ко-многим.

Контроллеры. API состоит из трех контроллеров, каждый из которых отвечает за работу со своей сущностью. Каждый контроллер разделен на эндпоинты, каждый из которых выполняет свою задачу в зависимости от метода HTTP запроса и URL, на который был сделан запрос. Практически все эндпоинты возвращают данные клиенту в формате `JSON`, но есть эндпоинты, возвращающие пользователю файлы, расположенные на сервере.

5. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ИНТЕРНЕТ-МЕМОВ

Визуализацию модели жизни ИМ наглядно можно произвести, построив график зависимости популярности ИМ от времени. В качестве меры популярности будем использовать количество раз, которое ИМ был в поисковой выдаче за определенный промежуток времени. Например, если используется временной промежуток в течение одной недели и ИМ был в 5 поисковых выдачах, то он получит значение 5.

В рамках этой работы в течение нескольких месяцев были произведены ежедневные поисковые запросы. Результаты поисковых выдач по этим запросам сохранялись в базе данных. При помощи созданного программного комплекса визуализировались данные в виде графиков (рис. 5).

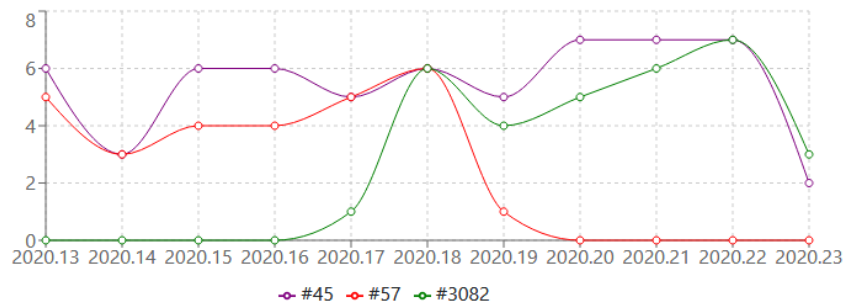


Рис. 5. Визуализация с неделями

На графике рис. 6 видна динамика популярности трех ИМ. По оси обозначены временные отметки. В данном случае используем недели для наглядности. Также есть возможность использовать в качестве временных промежутков месяца, однако, из-за короткого промежутка сбора информации этот график не обладает большой информативностью.

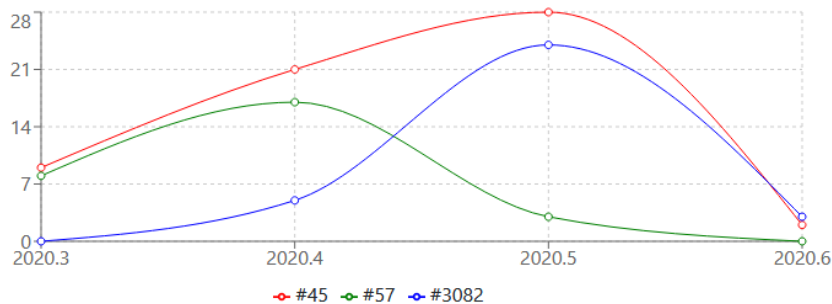


Рис. 6. Визуализация с месяцами

Прогнозирование жизненного цикла ИМ осуществляется на основе накопленных данных, представленных на рис. 5, 6. Для достоверности получаемых прогнозов необходимо накопить достаточную базу данных по ИМ, выявить характерные классы кривых ЖЦ. Прогноз осуществляется по разработанному ранее алгоритму для ЖЦ предприятия (на основе экономических статистических данных) с использованием метода главных компонент и вывода по аналогии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен этап реализации проекта по комплексному изучению процесса распространения интернет-мемов. Показана необходимость разработки инструментов сбора, обработки и изучения жизненного цикла ИМ. Представлена структура программного продукта, его визуализация и применение для анализа ЖЦ. Дальнейшее развитие предполагает применение нейросетевого подхода для задач интеллектуализированной обработки потока интернет-мемов с целью оценки влияния на аудиторию интернет-сообществ.

Авторы выражают благодарность Т. О. Габриеляну за участие в постановке задачи, П. А. Гуржий и О. О. Макарову за активное участие в разработке программного комплекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Германчук, М. С. Проблематика моделирования процессов распространения интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XII Международной школы-симпозиума АМУР-2018, Симферополь-Судак, 14-27 сентября 2018 / Под общей редакцией А. В. Сигала. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2018. — С. 136–139.
GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2018) Modelling of Internet memes. *Analysis, Modeling, Management, Development of Socio-Economic Systems: XII Collection of Scientific Works of the International School-Symposium AMUR-2018, Simferopol-Sudak, 14-27 September 2018.* / Edited by A. V. Segala. p. 136–139.
2. Германчук, М. С. Разработка инструментария обработки и анализа потока интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко, А. Е. Пивовар // Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2019 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2019. — 1. — С. 121–127.
GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G., LUKIANENKO, V. A. & PIVOVAR, A. E. (2019) Development of Internet Meme Flow Analysis and Processing Toolkit. *Collection of scientific works of the All-Russian Scientific and Practical Conference MIKMO-2019 and the Tauri Scientific School-Conference of students and young specialists in mathematics and informatics.* / Ad ed. V. A. Lukyanenko (1). p. 121–127.

3. Германчук, М. С. Распознавание, анализ и визуализация интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 19-й Всероссийской конференции с международным участием, г. Москва 2019 г. — М.: Российская академия наук, 2019. — С. 351–355.

GERMANCHUK, M. S. & KOZLOVA, M. G. (2019) Recognition, analysis and visualization of Internet memes. *Mathematical methods of pattern recognition: Theses of the reports of the 19th All-Russian Conference with international participation*. Moscow. p. 351–355.

4. Германчук, М. С. Особенности разработки интеллектуальной системы обработки потока интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // В сб. «Дистанционные образовательные технологии», Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием) / Ответственный редактор В. Н. Таран. — Симферополь, 2019. — С. 258–265.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2019) Features of Intelligent Internet Meme Flow Processing System Development. *«Distance Educational Technologies», Materials IV of the All-Russian Scientific and Practical Conference (with international participation)*. / Responsible Editor V. N. Taran. p. 258–265.

5. Германчук, М. С. Интеллектуализация обработки данных потока интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Материалы III Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». — Майкоп: изд-во АГУ, 2019. — С. 139–143.

GERMANCHUK, M. S., KOZLOVA, M. G. & LUKIANENKO, V. A. (2019) Intelligent Processing of Internet Meme Stream Data. *Materials of the 3rd International Scientific Conference «Autumn Mathematical Readings in Adygea»*. Mykop: from AGU. p. 139–143.

УДК: 519.714.22, 510.649

MSC2010: 06E25, 93B25

МАЖОРИТАРНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ СИНТЕЗА КОМБИНАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ. ОБЗОР. ЧАСТЬ II¹

© С. И. Гуров

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, Д. 1, СТР. 52, МОСКВА, ГСП-1, 119991, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ;
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ РАН,
УЛ. СОВЕТСКАЯ, Д. 3, МОСКВА, ЗЕЛЕНОГРАД, 124365, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.
E-MAIL: *sgur@cs.msu.su*

**REVIEW OF WORKS ON THE USE OF MAJORITY BOOLEAN ALGEBRA FOR THE
SYNTHESIS OF COMBINATIONAL LOGIC SCHEMES.**

Gurov S. I.

Abstract. The article contains an overview of the results on the application of majority logic to the synthesis of combinational logic schemes.

In the first part, the theoretical foundations of questions of majority algebra and some algorithms of practical problems of the circuit algorithm are considered.

In this second part, the basic terminology of logical networks is given first.

Majority-inverter graphs (MIG) important for further considerations are described. Illustrated are MIGs versus generic AND/OR/Inverter (AOIG) graphs that include the properties of regular AIGs. It is pointed out that the possibilities of algebraic operations over MIG are much wider than those over AOIG. It is proved that an arbitrary MIG can be transformed by any other logically equivalent one using a sequence of transformations from the axiomatic system Ω . Relevant examples are given.

Methods of MIG optimization in terms of size (set of vertices), delay (depth), power (switching frequencies, switching activity) are considered. A transformation-oriented axiomatic system Ψ is introduced. The application of MIG size optimization with Ψ is illustrated with a simple example.

Methods for minimizing MIG depth are discussed and illustrated with examples. The possibility of using the considered methods to optimize the switching frequency in MIG is indicated, at which its size and the probability of switching the state of the vertices $0 \leftrightarrow 1$ decrease.

The results of experiments on optimization of various MIG parameters are presented.

The MPC (Majority Primitives Combination) algorithm of combinational logic circuits based on majority logic is considered. Optimality criteria used by the MPC when calculating the cost

¹Работа финансировалась грантом РНФ 17-19-01645 «Разработка методов и средств проектирования реконфигурируемых систем на кристалле повышенной надежности».

of a circuit in order of importance are the number of levels (depth) of the circuit, the number of gates in it, the number of inverters, the number of element inputs. The results of the MPC algorithm application for the logical synthesis of 4-place functions are presented.

Keywords: *majority logic, boolean algebra, axiomatization, primitive functions, logic synthesis*

Данная вторая часть статьи является продолжением [1]; там же введены все необходимые понятия и обозначения. Термины «*мажоритарная функция* (M_n)» и «*функцией большинства*» означают одно и то же. Также не различаются понятия функции, представленной в базисе $\{M_n, '\}$ и реализующая её схема из мажоритарных элементов.

1. АЛГОРИТМ НА БАЗЕ МАЖОРИРУЮЩИХ-ИНВЕРТИРУЮЩИХ ГРАФОВ

1.1. Логические сети: основная терминология. Как известно, *логическая сеть* представляет собой это направленный ациклический граф с вершинами, соответствующими логическим функциям и направленными дугами, соединяющие вершины. Дуги указывают направление вычислений от входов к выходам. Дуги, входящие в некоторую вершину сети связывают её либо с другими вершинами, либо с входными переменными, либо с логическими константами 0 или 1. Таким образом, логическая сеть представляет собой схему для вычисления некоторой булевой функции. Не будем далее различать термины *логическая сеть* и *логическая схема*.

Две логические сети называют *эквивалентными*, если они вычисляют одну и ту же булеву функцию. Логическая сеть *неприводима (безызбыточна)*, если ни одна вершина не может быть удалена без изменения вычисляемой функции. Логическая сеть называется *однородной*, если каждая вершина, представляющая одну и ту же логическую функцию, имеет одну и ту же полустепень захода.

В логической сети дуги подразделяются на *прямые* (обычные, regular) и *инвертирующие* (дополняющие, complemente), изменяющее значение своего сигнала на противоположное. *Глубина вершины* есть длина самого длинного пути к ней из любой входной переменной. *Глубина логической сети* есть наибольшая глубина её вершин. *Размер логической сети* есть число её вершин.

1.2. Мажорирующие-инвертирующие графы. В статье [2] вводятся мажорирующие-инвертирующие графы, являющиеся новой перспективной структурой для логического представления и эффективной реализации булевых функций.

Определение. *Мажорирующий-инвертирующий граф (Majority-Inverter Graph, MIG)* — это однородная логическая сеть, в которой каждая вершина представляет

функцию большинства M_3 , имеет полустепень захода, равную 3, полустепень исхода, равную 1, а дуги помечены атрибутом «прямое» или «инвертирующее».

Листья MIG обычно помечают отдельными вершинами, а входные сигналы указывают приписыванием соответствующих атрибутов дугам.

Такой ориентированный граф представляет собой ранжированное частично упорядоченное множество. Считаем, что корень дерева имеет наибольший ранг.

Продemonстрируем свойства MIG в сравнении с графами AND/OR/Inverter (AOIG) общего вида, которые также включают в себя обычные AIG. Заметим, что мажоритарная функция $M_3 = M(a, b, c)$ ведет себя как операция конъюнкции $AND(a, b)$, если $c = 0$ и как операция дизъюнкции $OR(a, b)$, если $c = 1$. Таким образом, операцию мажорирования можно рассматривать как обобщение конъюнкции и дизъюнкции. Это свойство приводит к следующей теореме.

Теорема 1. $MIGs \supset AOIGs$.

На рис. 1 показаны два примера получения MIG из оптимальных представлений функций в AOIG.

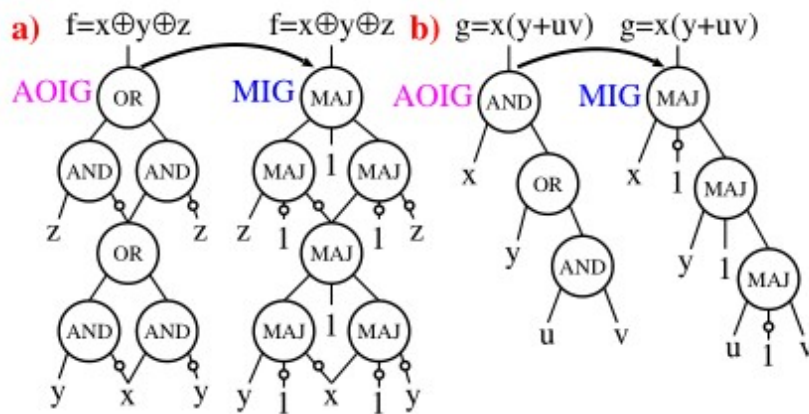


Рис. 1. Примеры [2] представлений MIG (справа) для (a) $f = x \oplus y \oplus z$ и (b) $g = x \cdot (y + uv)$, полученное путем перевода их оптимальных представлений AOIG (слева). Атрибуты инвертирования рёбер отмечаются кружками.

Следствие 1. $MIGs \supset AIGs$.

Следствие 2. Любая булева функция представима с помощью MIG.

Над MIG можно производить те же алгебраические операции, как и над AOIG, однако возможности первых значительно шире. Они раскрываются посредством введения новой алгебры, имеющая в качестве базовых функции мажорирования и инверсии, и аксиоматизированной системой Ω (см. первую часть данной статьи [1]).

Легко показывается, что

Теорема 2. Булева алгебра $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$ аксиоматизированная системой Ω является непротиворечивой и полной.

Каждая формула над $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$ может быть интерпретирована как MIG. Таким образом, булева алгебра, аксиоматизируемая Ω , естественно применима при алгебраических преобразованиях MIG.

Теорема 3. Произвольный мажорирующий-инвертирующий граф α может быть преобразован любой другой ему логически эквивалентный MIG β с помощью последовательности преобразований из Ω .

Доказательство. Пусть A и B суть формулы над $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$, и MIG α является эквивалентом формулы A , а MIG β — эквивалентом формулы B .

Все тавтологии² в $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$ являются теоремами, доказываемыми с помощью Ω (см. теорему 2). Утверждение $A = B$ эквивалентно тавтологии

$$M(1, M(A', B', 0), M(A, B, 0)) = 1,$$

что равносильно справедливости $A \equiv B$. Используя последовательность выражений из Ω , доказывающую эту формулу, можно преобразовать MIG α в MIG β . \square

Как следствие Теоремы 3 получаем, что с помощью Ω можно получить все схемы, представимые мажорирующе-инвертирующими графами. Таким образом, всегда возможно получить нужный граф, начиная с любого ему эквивалентного. Однако длина такой последовательности преобразований может быть слишком длинной. Для решения данной проблемы, вводится допустимые в автоматизации Ω три преобразования, которые облегчают указанную задачу преобразований MIG. Их обозначают обозначаемые через Ψ .

Первое преобразование $\Psi.R$, замещает и упрощает аргументы мажоритарной функции. Второе $\Psi.C$ описывает ассоциативность дополнения и связано с переменными, появляющимися в выражениях в парофазном виде. Третье $\Psi.S$ есть подстановка, расширяющая операцию замены переменных на случай переменных разных

² то есть формулы, оцениваемые как истинные при всех возможных наборах значений своих булевых переменных

мажоритарных функций. Используемая далее операция $f_{x/y}$ есть замена переменной x на y во всех её вхождениях в выражение f .

$$\Psi \left\{ \begin{array}{l} \text{Релевантность } \Psi.R : M(x, y, z) = M(x, y, z_{x/y}), \\ \text{Ассоциативность дополнения } \Psi.C : M(x, u, M(y, u', z)) = M(x, u, M(y, x, z)), \\ \text{Подстановка } \Psi.S : M(x, y, z) = \\ \qquad \qquad \qquad = M(v, M(v', M_{v/u}(x, y, z), u), M(v', M_{v/u'}(x, y, z), u')). \end{array} \right. \quad (1)$$

Теорема 4. Преобразования в Ψ допустимы в мажоритарной алгебре $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$, аксиоматизированной системой Ω .

Доказательство. Релевантность $\Psi.R$. Пусть S — множество всех возможных комбинации входов для $M(x, y, z)$, а $S_{x=y} [S_{x=y'}]$ — подмножество S такое что $x = y [x = y']$. Заметим, что $S_{x=y} \cap S_{x=y'} = \emptyset$ и $S_{x=y} \cup S_{x=y'} = S$ и согласно $\Omega.M$ переменная z в $M(x, y, z)$ относится только к $S_{x=y'}$. Таким образом, можно заменить x на y' (x/y') во всех вхождениях его виде в z с сохранением выходной функции схемы.

Ассоциативность дополнения $\Psi.C$ доказывают равенства

$$\begin{aligned} M(x, u, M(u', v, z)) &= M(M(x, u, u'), M(x, u, v), z) && \text{по } (\Omega.D) \\ M(M(x, u, u'), M(x, u, v), z) &= M(x, z, M(x, u, v)) && \text{по } (\Omega.M) \end{aligned}$$

Подстановка $\Psi.S$: для краткости обозначим $M(x, y, z) = k$. Далее преобразования по $\Omega.M$ и $\Omega.D$:

$$k = M(v, v', k) = M(M(u, u', v), v', k) = M(M(v', k, u), M(v', k, u'), v).$$

Тогда $M(v', k, u) = M(v', k_{v/u}, u)$ — по $\Psi.R$, и $M(v', k, u') = M(v', k_{v/u'}, u)$ — по уже доказанному закону $\Psi.R$.

Имея в виду, что $k = M(x, y, z)$, мы окончательно получаем:

$$M(x, y, z) = M(v, M(v', M_{v/u}(x, y, z), u), M(v', M_{v/u'}(x, y, z), u')).$$

□

1.3. Оптимизация. Оптимизация мажорирующего-инвертирующего графа, реализующего некоторую булеву функцию. состоит из его преобразования в другой такой граф, но с лучшими показателями качества по размеру (числу вершин), задержке (глубине), мощности (частоте переключений, switching activity). Далее рассматриваются эвристические алгоритмы оптимизации по указанным параметрам размера, использующие преобразования из Ω и Ψ .

При **оптимизации размера** MIG сокращение количества вершин графа может быть произведено двумя путями. Во-первых, по применению правила мажорирования. Это соответствует применению основной аксиомы $\Omega.M$ слева направо ($L > R$), т. е. $M(x, x, z) = x$.

Во-вторых, исключение вершин возможно при применении аксиомы дистрибутивности $\Omega.D$ справа налево ($R > L$), т. е.

$$M(x, y, M(u, v, z)) = M(M(x, y, u), M(x, y, v), z).$$

Повторно применяя $\Omega.M_{L>R}$ и $\Omega.D_{R>L}$ ко всему графу, оказывается возможным исключить некоторые вершины, и тем самым уменьшить его размер. Эту операцию называют *eliminate*.

Применимость указанных правил зависит от рассматриваемой схемы: имеются графы, в которых возможность исключения вершин не очевидна. Это имеет место, когда процесс уменьшения размера схемы достиг глобального или локального минимума. В последнем случае делаются попытки преобразования MIG так, чтобы затем обеспечить дальнейшие возможности оптимизации размера. Данную операцию называют *reshape*.

Идея операции *reshape* состоит в локальном увеличении количества входных переменных некоторых вершин MIG. Для это можно воспользоваться аксиомами ассоциативности $\Omega.A$ и $\Psi.C$, которые позволяют перемещать переменные на соседние уровни вверх по графу, и аксиомой релевантности $\Psi.R$ для замены переменных.

В некоторых случаях, однако, необходимо провести более существенное преобразование вида графа. Это осуществляется применением аксиомы подстановки $\Psi.S$, которая заменяет пары независимых переменных, временно увеличивая размер MIG. Как только появляется возможность сокращения числа вершин, снова могут быть применены аксиомы мажорирования $\Omega.M_{L>R}$ и дистрибутивности $\Omega.D_{R>L}$.

Операции «изменение структуры графа — исключение вершин» повторяются в течение заданного пользователем числа циклов, называемых попытками (*efforts*). Приведённый на рис. 2 Алгоритм 1 реализует рассмотренный метод оптимизации размера MIG.

Процедура оптимизации размера MIG иллюстрируется простым примером, представленном на рис. 3 (а). Исходный мажорирующий-инвертирующий граф эквивалентен формуле $M(x, M(x, z', w), M(x, y, z))$, которая не имеет явного упрощения по аксиомам большинства и дистрибутивности. Поэтому для локального увеличения числа общих входных данных необходимо изменить структуру графа. Применение аксиомы ассоциативности $\Omega.A$ поменяет местами w и $M(x, y, z)$ в исходной формуле.

При **минимизации глубины** уменьшение длины максимального (критического) пути в MIG можно достичь, приближая наиболее далёкие от выхода (*критические*) переменные к корню графа. Поясним, как это можно сделать, не изменяя выходную функцию.

Рассмотрим общий случай, когда часть критического пути описывается формулой $M(x, y, M(u, v, z))$. Если критическая переменная есть либо x , либо y , то ни одно простое перемещение переменных вверх на соседний уровень не уменьшает глубину данной формулы.

Если же критическая переменная есть одна из входных в $M(u, v, z)$ и это, скажем, z , то уменьшение глубины возможно.

Рассмотрим последний случай, с порядком $t_z > t_u \geq t_v > t_x \geq t_y$ для времён прибытия переменных ко входу схемы. Порядок соответствует глубине переменных. Такой порядок возникает в случаях либо несбалансированного графа, чьи входы имеют равные времена прихода, либо сбалансированного графа, чьи входы имеют разные времена прихода³. В обоих случаях z — критическая переменная, поступающая позже всех остальных, поэтому локальная глубина рассматриваемой формулы равна $t_z + 2$.

При применении аксиомы дистрибутивности $\Omega.D$ слева направо ($L > R$), получим $M(x, y, M(u, v, z)) = M(M(x, y, u), M(x, y, v), z)$. В результате критическая переменная z перемещена (поднята) на один уровень вверх, уменьшив локальную глубину до $t_z + 1$.

Такой приём применим в большом числе случаев, так как все переменные, встречающиеся в $M(x, y, M(u, v, z))$, различны и независимы. При этом, однако, происходит увеличение размеров схемы на один узел. Тогда функция качества полученной схемы штрафует на определённую величину. В удачных случаях применения аксиомы ассоциативности $\Omega.A$, $\Psi.C$, критические переменные поднимаются на уровень вверх без штрафа. Если же применяется правило $\Omega.M_{L>R}$, то уменьшаются и глубина, и размер.

Как отмечалось ранее, существуют случаи, когда подъём критических переменных не может сократить общую глубину (достигнута минимальная глубина). Тогда также применяются операция *reshape* и подъём критических переменных вверх по графу. Такая процедура повторяется в течение некоторого определённого пользователем числа циклов. Описанную стратегию оптимизации глубины MIG реализует Алгоритм 2, представленный на рис. 4.

³Под сбалансированным здесь имеется в виду MIG, у которого для каждой вершины высота левого и правого поддеревьев равны.

имеющую $p_1 = 0,5$ на переменную y , имеющая $p_1 = 0,1$, Это снизит общую частоту переключения в MIG.

1.4. Результаты экспериментов. Авторы цитируемой работы представляют разработанный пакет *MIGhty* для логических преобразований MIG. Пакет, состоящий из примерно 6 тысяч строк кода на языке *C*, реализует рассмотренные выше методы оптимизации.

Входными данными пакета *MIGhty* является описание комбинационной логической схемы на языке Verilog, а выходными — описание на Verilog оптимизированной MIG. Пакет был протестирован на самых больших (в диапазоне от сотни до 15 тыс. вентилях) схемах из набора MCNC⁴.

Дано сравнение полученных MIG с AIG, оптимизированными с помощью пакета ABC [3] и BDD-декомпозированными с помощью пакета BDS [4].

Средняя глубина MIG оказывается на 18,6% меньше, чем у AIG, и на 23,7% меньше, чем у декомпозированных в BDD-представлении. Средний размер MIG примерно такой же, как у AIG, с разницей в 0,9%, но на 2,1% меньше, чем у разложенных BDD. Средняя частота переключений MIG снова такая же, как у AIG с разницей в 0,3%, но на 3,1% меньше, чем у BDD.

Для переключательной активности MIG даёт результаты на 17,5% лучше, чем AIG, и на 27,7% лучше, чем разложенные в форме BDD. Время выполнения для MIG немного дольше, чем у ABC (+7,1%), но на 68% быстрее, чем у BDS. В тесте на уменьшение размера большой схемы ABC получает оптимизированные AIG с 167 тыс. вершин и 31 уровнем за 11,3 секунды, а то время как MIG-оптимизация привела к 170 тыс. вершинам (+1.7% по отношению к ABC) и 28 уровнями (−9.6% относительно ABC) за 21,5 с.

В исследовательских разработках аналогом является сначала использование ABC (оптимизация AIG) и затем — того же инструмента для технологического отображения проприетарной технологии, что и для MIG.

В среднем MIG показывает результаты по задержке, площади и мощности соответственно на 22%, 14% и 11% превосходящие аналогичные у лучшего научного и коммерческого аналогов.

Экспериментальные результаты подтверждают возможности MIG в оптимизации и синтезе логики. Несмотря на то, что предложенные алгоритмы просты по сравнению с разработанными современными методами, они дают уже конкурентные

⁴Тесты MCNC (Microelectronics Center of North Carolina) представляют собой набор небольших логических схем без сложных блоков (см. <http://www.intusoft.com/benchmarks.htm>).

результаты благодаря выразительной силе MIG и связанной с ними алгебры. Более того, существуют логические схемы, например, схемы на рис. 1 и рис. 3 (b-c), для которых традиционные методы достигают пределов улучшения, а описываемые алгоритмы могут проводить дальнейшую оптимизацию. В частности, MIG открывают возможность для эффективного синтеза схем передачи данных, где преобладает логика большинства.

2. АЛГОРИТМ MPC

Рассмотрим алгоритм MPC (Majority Primitives Combination, комбинирование мажоритарных примитивов) синтеза комбинационно-логических схем на основе мажоритарной логики [6]. Он представляется наиболее эффективным из рассмотренных здесь и в [1], и опишем его подробнее.

В качестве входных данных алгоритм MPC получает таблицу истинности функции f . Выходом является эквивалентная мажоритарная функцию $M(X_1, X_2, X_3)$, в которой каждая переменная X_c , $c = 1, 2, 3$ представляет мажоритарный примитив или двухуровневую мажоритарную функцию. Критерии оптимальности, используемые MPC при расчёте стоимости схемы в порядке важности: число уровней (глубина) схемы, число вентилях в ней, количество инверторов, количество входов элементов.

2.1. Составление таблиц. На первом шаге алгоритма MPC формируются таблицы функций, используемые для построения $M(X_1, X_2, X_3)$. Алгоритм получает входную таблицу истинности f , определяет количество n входных переменных и генерирует таблицу примитивов на основе наборов C , V , G и T [1]. Также запоминается набор минтермов каждой примитивной функции, которые описывают оптимальные схемные решения для своего набора минтермов.

Затем, используя всевозможные (без учета повторных примитивов) комбинации примитивных функций в выражении $M(X_1, X_2, X_3)$, алгоритм строит вторую таблицу M_2 . Для каждой сгенерированной функции сохраняется набор её минтермов. Если какой-либо набор минтермов покрыт двумя или более функциями, то из них сохраняется только имеющая самую низкую стоимость. Поэтому в таблице M_2 оказываются перечисленными все наборы минтермов, которые могут быть покрыты двухуровневой мажоритарной функцией. Для оптимизации производительности вычислений M_2 хранится в виде справочной таблицы LUT (Look-Up Table) в MPC-коде.

Примером функции из M_2 является

$$M(X_1, X_2, X_3) = M(A, M(A, B', 0), M'(A, B, C)),$$

где $X_1 = A$, $X_2 = M(A, B', 0)$ и $X_3 = M'(A, B, C)$.

Примитивы, обеспечивающие минимизацию количества инверторов, имеют один из следующих 4-х видов:

- $M(A, B, C)$ — без инверторов,
- $M(A', B, C)$ — один инверсный вход,
- $M'(A, B, C)$ — одна инверсия, применяемая к выходу,
- $M'(A', B, C)$ — один инверсный вход и инверсия выхода.

В случаях, когда элемент содержит два инверсных входа, используя зависимость $M(X', Y, Z) = M'(X, Y', Z)$, осуществляется переход к элементу с одним инверсным и инверсным выходом, хотя при этом количество инверторов и остается неизменным. Это, однако, позволяет применять $\Omega.I$ при построения функций с глубиной 2 и более, что минимизирует количество инверторов.

В качестве примера этого приложения мы рассмотрим схему, реализующую функцию $M(M'(A, B, C), D', 0)$, которая имеет 2 уровня, 2 вентиля и 3 инвертора. Применяя $\Omega.I$, получим $M(M'(A, B, C), D', 0) = M'(M(A, B, C), D, 1)$, которое при том же количестве уровней и вентилях имеет на один инвертор меньше.

При расчете критерия оптимальности дублирующие элементы не учитываются. Например, общая сложность функции

$$M(M(0, A, C), M(1, A, M(B, C, D)), M(1, C, M(B, C, D)))$$

составляет 5 элементов, хотя $M(B, C, D)$ появляется в записи функции дважды.

Как известно, число S всевозможных функций данного количества переменных n равно 2^{2^n} . Это есть количество минтермов в таблице истинности f .

При $n = 3$ имеем $S = 256$. Таблица примитивов охватывает только 40 из этих функций. Оставшиеся 216 реализуются элементами таблицы M_2 . Следовательно, все S функций могут быть полностью получены максимально двухуровневыми выражениями над мажоритарной функцией, что делает этап построения таблицы достаточной для получения всех оптимальных схем для $n = 3$.

При $n = 4$ имеем $S = 65536$, и 90 из этих функций являются примитивами. Таблица M_2 содержит только 10260 функций. 55184 функций из остальных 55186 могут быть получены выражениями над мажоритарной функцией с 3-я уровнями. Оставшиеся 2 функции реализуются выражениями с 4-я уровнями.

2.2. МРС-синтез функций от 4-х аргументов. Рассмотрим применяемый в МРС алгоритм логического синтеза 4-местных функций f . Он используется, когда минтремы функции не покрываются ни одним каким-либо примитивом, ни какой-либо функцией из таблицы M_2 . Тогда применяется комбинация указанных функций.

Синтез состоит из 2-х этапов-циклов. Если выходная функция не найдена на первом этапе, переходят к второму.

Первый цикл состоит из следующих шагов:

1. Любая примитивная функция или функция из M_2 , которая не покрывает хотя бы один минтерм f , вычёркивается из соответствующей таблицы.
2. Строится новая таблица P на основе каждой пары примитивов $(p_1 + p_2)$, где:
 - каждый минтерм f хотя бы один раз покрывается функцией $p_1 + p_2$,
 - пара $p_1 + p_2$ покрывает исключительно минтермы f .
3. Выбирается пара примитивов из P , например, X_1 и X_2 ;
4. Создаётся числовой вектор v длины 2^n , который будет использоваться для построения таблицы истинности для функции X_3 . Каждый элемент в v соответствует минтерму f .

Значение $v_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, \dots, 2^n$, равно числу функций из $\{X_1, X_2\}$, покрывающих минтерм i . Например, если $f = \{0, 1, 5, 8\}$, $X_1 = \{0, 1, 4, 5\}$ и $X_2 = \{0, 1, 2, 8, 10\}$, то v имеет значения, показанные в таблице 1.

Минтермы	$f = \{0, 1, 5, 8\}$	$X_1 = \{0, 1, 5, 8\}$	$X_2 = \{0, 1, 2, 8, 10\}$	v
0	1	1	1	2
1	1	1	1	2
2	0	0	1	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	1
5	1	1	0	1
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	1	0	1	1
9	0	0	0	0
10	0	0	1	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0

Таблица 1. Генерация вектора v

5. Создаётся таблица истинности для функции X_3 , представленная вектором $X_3 f$. Позиции, в которых $v_i = 2$ или $v_i = 0$, рассматриваются как безразличные состояния (don't care), обозначаемые x . Для позиций, у которых $v_i = 1$ и i

- покрывается f , считаем $X_3 f_i = 1$. Если же $v_i = 1$ и i не покрывается f , полагаем $X_3 f_i = 0$. Поэтому для примера, представленного в таблице 1, имеем $X_3 f = [xx0x01xx1x0xxxxx]$;
6. Создаются все возможные таблицы истинности, в которых безразличные состояния в векторе $X_3 f$ заполняются значениями 0/1. Каждый вариант ищется в таблице M_2 . Из этих функций строится новая таблица P_3 .
 7. Если функция в P_3 , представлена элементом, который также соответствует функциям X_1 или X_2 , стоимость этого элемента уменьшается на 1 (при вычислении размера мажоритарной функции каждый вентиль учитывается только один раз).
 8. В P_3 выбирается ещё не выбранная функция самой низкой стоимости; обозначим её как X_3 . Если такие функции ещё не сформированы, возвращаются к шагу 3 и находят новую пару примитивов.
 9. С выбором функции X_3 определён результат $M(X_1, X_2, X_3)$. Для минимизации количества инверсий на каждом уровне встроеной функции применяется правило $\Omega.I$. Если полученная после этого функция имеет более низкую стоимость, он заменяет исходную.
 10. Цикл завершается, когда в таблице Z оказываются сохранёнными все возможные пары примитивов в P с функцией из M_2 и каждое найденное представление $M(X_1, X_2, X_3)$.
 11. К концу цикла алгоритм возвращает в Z функцию с наименьшей стоимостью. Если такая функция не найдена, переходят ко второму этапу.

Чтобы проиллюстрировать одну итерацию первого цикла, рассмотрим случай с $n = 4$ и $f = \{4, 5, 6, 9, 15\}$. Выходная функция может быть найдена в итерации с $X_1 = M(A, D, 0)$ и $X_2 = M(A', B, C)$, причём функция X_1 покрывает минтермы $\{9, 11, 13, 15\}$, а функция X_2 — минтермы $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 14, 15\}$. Таблица 2 показывает вектор v , обновленный по функциям X_1 и X_2 .

Минтермы i с безразличными состояниями $v_i \in \{0, 2\}$ суть $\{0, 1, 8, 10, 12, 15\}$. Минтермы с $v_i = 1$ и $f_i = 1$ суть $\{4, 5, 6, 9\}$, а минтермы, с $v_i = 1$ и $f_i = 0$ — $\{2, 3, 7, 11, 13, 14\}$. Следовательно, $X_3 f = xx001110x1x0x00x$.

Обозначим X_3 функцию наименьшей стоимости из таблицы M_2 , которая соответствует таблице истинности, образованной $X_3 f$. Эта функция $X_3 = M'(C, M(B', D, 1), M(A, B, 0))$. Она описывается вектором значений

Минтермы	f	X_1	X_2	v
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	0	1	1
4	1	0	1	1
5	1	0	1	1
6	1	0	1	1
7	0	0	1	1
8	0	0	0	0
9	1	1	0	1
10	0	0	0	0
11	0	1	0	1
12	0	0	0	0
13	0	1	0	1
14	0	0	1	1
15	1	1	1	2

Таблица 2. Вектор v первого цикла, обновленный по X_1 и X_2

1100111011001000 и покрывает минтермы $\{0, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$. Соответственно получим

$$M(X_1, X_2, X_3) = M(M(A, D, 0), M(A', B, C), M'(C, M(B', D, 1), M(A, B, 0))).$$

Двойственная форма

$$M(M(A, D, 0), M(A', B, C), M'(C, M(B', D, 1), M(A, B, 0)))$$

эквивалентна

$$M'(M'(A', D', 1), M'(A, B', C'), M(C', M'(B, D', 0), M'(A', B', 1))),$$

которая имеет большее количество инверсий. Следовательно, для $f = \{4, 5, 6, 9, 15\}$ алгоритм МРС добавляет

$$M(M(A, D, 0), M(A', B, C), M'(C, M(B', D, 1), M(A, B, 0)))$$

к своей таблице Z возможных результатов синтеза. Этап заканчивается, когда каждая выбранная пара функций в P объединена с функцией из M_2 , и возвращает функцию самой низкой стоимости в Z в качестве выхода. Из всех 55184 минтермов, которые могут быть покрыты 3-уровневой функцией, всего 50016 могут быть покрыты функциями, где два элемента функции X_c являются примитивами. Эти функции находятся на первом этапе.

Из 5168 оставшихся наборов 5056 могут быть покрыты функциями, в которых только один элемент из функции X_c является примитивом. Оставшиеся 112 наборов могут быть покрыты только функциями, в которых все элементы X с являются двухуровневыми функциями из M_2 . Эти функции находятся во втором цикле.

Второй цикл состоит из следующих шагов:

1. Из таблицы примитивов выбирается X_1 . Если каждая примитивная функция была выбрана в качестве X_1 и допустимая выходная функция найдена, X_1 выбирается из группы функций R . Она формируется каждой функцией M_2 с размером r , где r — число элементов в реализации функции M_2 . Начальное минимальное значение (числа вентилях) r есть 2, и оно может быть увеличено, если будет обнаружена группа R более сложных функций.
2. Создаются два новых вектора v_0 и v_{-1} . Вектор v_0 содержит позиции f , которые ещё не были покрыты, и поэтому $v_0 = f - X_1$. Вектор v_{-1} содержит позиции v , которые не могут быть покрыты вторично, поэтому $v_{-1} = X_1 - f$;
3. Из v_0 и v_{-1} формируются таблицы истинности для функции X_2 . Они имеют тот же размер, что и f , и кроме 0/1, могут содержать безразличные состояния. Для минтермов, находящихся в v_0 , имеем $X_2 f_i = 1$, а для находящихся в v_{-1} — $X_2 f_i = 0$.

Всем другим минтермам соответствуют безразличные состояния функции X_2 .

4. Создаются всевозможные таблицы истинности для безразличных состояний вектора $X_2 f$. Каждый такой вариант ищется в таблице M_2 . Из этих функций создается новая таблица P_2 .
5. Стоимость каждой функции в P_2 уменьшается на 1, если она содержит элемент, уже содержащийся в X_1 .
6. В P_2 выбирается функция наименьшей стоимости из числа ещё не выбранных, и принимается за X_2 . Если это невозможно, происходит возврат к шагу 1 с выбором новой X_1 .
7. Для нахождения функции X_3 , на основе v_{-1} и нового вектора v_1 , вычисляется вектор $X_3 f$. Вектор v_1 хранит минимальные значения f , покрытые только один раз X_c . Поэтому минтермы в v_1 должен быть покрыты X_3 . Для минтермов, находящихся в v_{-1} , имеем $X_3 f = 0$. Для минтермов, находящихся в v_1 , имеем $X_3 f = 1$.
8. Чтобы найти все варианты означивания $X_3 f$, находятся соответствующие функции в таблице M_2 и из них строится P_3 .
9. На основе элементов в X_1 и X_2 обновляется стоимость функций в P_3 .

10. Выбирают функцию самой низкой стоимости в P_3 , которая ещё не была выбрана; её обозначение — X_3 . Если такой функции нет, происходит возврат к шагу 6 и выбор нового X_2 .
11. С выбором X_3 получена выходная функция $M(X_1, X_2, X_3)$. Для минимизации инверторов опробывается применение $\Omega.I$.
12. Каждая найденная функция $M(X_1, X_2, X_3)$ сохраняется в таблице Z . Цикл прерывается, когда в качестве X_1 все примитивные функции оказываются выбранными. Если никакая такая функция не найдена, алгоритм возвращается к шагу 1 и перезапускает выбор X_1 из группы R . Если функция всё ещё не находится, алгоритм увеличивает r и перезапускает цикл с новой группой R . Алгоритм возвращает в качестве выходной функцию наименьшей стоимости из сохраненных в Z .

В [6] рассмотрен также алгоритм МРС-синтеза функций f от 5-х аргументов и общие результаты синтеза.

2.3. Выводы. В настоящее время лучшим из имеющихся алгоритмом синтеза на основе мажоритарной функции считается алгоритм *exact_mig* [7]. Он минимизирует глубину и количество уровней синтезируемой схемы. МРС учитывает 2 дополнительных критерия стоимости: количество инверторов и количество входов элементов.

Результаты МРС, представленные цитируемой работой в большинстве случаев эквивалентны или превосходят результаты *exact_mig*. Для 65536 возможных функций от четырёх аргументов МРС сгенерировал схемы с более низкой стоимостью в 42987 (66%) случаях и получил одинаковые с *exact_mig* результаты 7198 (11%) случаях, а равную или лучшую сложность — в 50 185 (77%) случаях.

Для выборки из 1000 функций от пяти аргументов МРС нашел лучшие или равные результаты в общей сложности для 589 (59%) функций, причём где 477 (48%) имели более низкую стоимость и 112 (11%) — равную с *exact_mig* стоимость. Среднее время вычислений МРС и использование памяти составило 41,63 секунды и 40,32 МБ, в то время как точное среднее время вычислений и использование памяти в *exact_mig* стоимость составили 1,15 минут и 5,05 МБ соответственно.

Код МРС доступен по адресу <https://github.com/EvandroFerraz/mpc>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГУРОВ, С. И. Мажоритарная алгебра для синтеза комбинационно-логических схем I. Обзор / ТВИМ. — 2020, № 2 (47). — С. 40–61.

-
- GUROV, S. I. (2020) Majority algebra for the synthesis of combinational logic schemes I. Review / TVIM. N. 2 (47). p. 40–61.
2. AMARÚ, L., GAILLARDON, P. E., DE MICHELI, G. (2014) Majority-inverter graph: A novel data-structure and algorithms for efficient logic optimization. In: Proceedings of the 51st Annual Design Automation Conference. Pp. 1–6. ACM. DAC'14, June 1-5 2014, San Francisco, CA, USA. <http://dx.doi.org/10.1145/2593069.2593158>.
 3. BRAYTON, R., MISHCHENKO, A. (2010) ABC: An Academic Industrial-Strength Verification Tool, Proc. CAV.
 4. YANG, C. AND CIESIELSKI, M. (2002) BDS: A BDD-Based Logic Optimization System, IEEE Trans. CAD, 21(7): 866-876.
 5. Predictive Technology Models — available online ptm.asu.com, ptm.asu.edu.
 6. FERRAZ, EVANDRO C., DE LIZA MUNIZ, JEFFERSON, DA SILVA, ALEXANDRE C. R. AND DUECK, GERHARD W. (2018) Synthesis of Majority Expressions through Primitive Function Manipulation. In: Advanced Boolean Techniques. Selected Papers from the 13th International Workshop on Boolean Problems. Springer Nature Switzerland AG 2018, pp. 135–158. https://www.researchgate.net/publication/334328012_Synthesis_of_Majority_Expressions_Through_Primitive_Function_Manipulation.
 7. SOEKEN, M., AMARÚ, L. G., GAILLARDON, P. E., DE MICHELI, G. (2017) Exact synthesis of majority-inverter graphs and its applications. IEEE Transactions on ComputerAided Design of Integrated Circuits and Systems. <https://ieeexplore.ieee.org/document/7842552>.

УДК: 517.938.5, 523.947

MSC2010:37D15

ДИНАМИКА РЕГУЛЯРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

© О. В. Починка, С. Х. Зинина

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ЛАБОРАТОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРИЛОЖЕНИЙ НИУ ВШЭ

ул. Большая Печерская, 25/12, Нижний Новгород, 603155, Российская Федерация

е-MAIL: *olga-pochinka@yandex.ru*

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ул. Большевикская, д. 68, Саранск, 430005, Российская Федерация

е-MAIL: *kapkaevasvetlana@yandex.ru*

DYNAMICS OF REGULAR TOPOLOGICAL FLOWS.

Pochinka O. V., Zinina S. Kh.

Abstract. It is well known that for dimensions 4 and greater there are topological manifolds admitting no smooth structure. Therefore, dynamical systems as well as functions on such manifolds may only be considered as topological and continuous, respectively. Nevertheless, these systems and functions have the same properties as the smooth ones and they are closely related to the topology of the ambient manifold.

In this paper, we introduce a class G of continuous flows f^t on closed topological n -manifold M that generalize the concept of Morse-Smale flows. Such flows have a hyperbolic (in the topological sense) chain recurrent set R_{f^t} consisting of a finite number of orbits (*chain components*). Each non-wandering orbit is either a fixed point or a periodic orbit \mathcal{O} for which the concept of stable $W_{\mathcal{O}}^s$ and unstable $W_{\mathcal{O}}^u$ manifolds is correctly defined. It is shown that the chain components of the considered flows do not form cycles and, therefore, can be completely ordered

$$O_1 \prec \dots \prec O_k$$

with the Smale relation preserved:

$$W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset \Rightarrow i < j.$$

We establish the following main dynamic properties of flows from the class G .

Let $f^t \in G$. Then

1. $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^s$;
2. for any fixed point \mathcal{O}_i there is a number $\lambda_i \in \{0, \dots, n\}$ (Morse index of the point \mathcal{O}_i) such that its unstable manifold $W_{\mathcal{O}_i}^u$ is a topological submanifold of M , homeomorphic to \mathbb{R}^{λ_i} , and the stable manifold $W_{\mathcal{O}_i}^s$ is a topological submanifold of M , homeomorphic to $\mathbb{R}^{n-\lambda_i}$;

3. for a periodic orbit \mathcal{O}_i there is a number $\lambda_i \in \{0, \dots, n-1\}$ (Morse index of the orbit \mathcal{O}_i) and a pair of numbers $\mu_i, \nu_i \in \{-1, +1\}$ (orbit type \mathcal{O}_i) such that its unstable manifold $W_{\mathcal{O}_i}^u$ is a topological submanifold of the manifold M , homeomorphic to $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ for $\mu_i = +1$ and $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ for $\mu_i = -1$; the stable manifold $W_{\mathcal{O}_i}^s$ is a topological submanifold of the manifold M , homeomorphic to $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ for $\nu_i = +1$ and $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ for $\nu_i = -1$;
4. $(cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u$, $((cl(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s) \subset \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s$.

Keywords: manifold, topological flow, regular dynamics, hyperbolic set, chain recurrent set

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известно, что для размерностей 4 и более существуют топологические многообразия, не допускающие гладкой структуры. Поэтому динамические системы, а также функции на таких многообразиях могут рассматриваться только как топологические и непрерывные соответственно. Тем не менее, эти системы и функции обладают теми же свойствами, что и гладкие, и они тесно связаны с топологией объемлющего многообразия.

В настоящей работе вводится класс G непрерывных потоков f^t на замкнутом топологическом n -многообразии M , обобщающих понятие потоков Морса-Смейла. Такие потоки имеют гиперболическое (в топологическом смысле) цепно рекуррентное множество R_{f^t} , состоящее из конечного числа орбит (*цепных компонент*). Каждая неблуждающая орбита является либо неподвижной точкой, либо периодической орбитой \mathcal{O} , для которой корректно определено понятие устойчивого $W_{\mathcal{O}}^s$ и неустойчивого $W_{\mathcal{O}}^u$ многообразий. Показывается, что цепные компоненты рассматриваемых потоков не образуют циклов и, следовательно, могут быть полностью упорядочены

$$\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k$$

с сохранением отношения Смейла:

$$W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset \Rightarrow i < j.$$

Основным результатом работы является следующая теорема, устанавливающая основные динамические свойства потоков из класса G .

Теорема 1. Пусть $f^t \in G$. Тогда

$$1. M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^s;$$

2. Для любой неподвижной точки \mathcal{O}_i существует число $\lambda_i \in \{0, \dots, n\}$ (индекс Морса точки \mathcal{O}_i) такое, что ее неустойчивое многообразие $W_{\mathcal{O}_i}^u$ является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным \mathbb{R}^{λ_i} и устойчивое многообразие $W_{\mathcal{O}_i}^s$ является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i}$;
3. Для периодической орбиты \mathcal{O}_i существует число $\lambda_i \in \{0, \dots, n-1\}$ (индекс Морса орбиты \mathcal{O}_i) и пара чисел $\mu_i, \nu_i \in \{-1, +1\}$ (тип орбиты \mathcal{O}_i) такие, что ее неустойчивое многообразие $W_{\mathcal{O}_i}^u$ является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_i = -1$; устойчивое многообразие $W_{\mathcal{O}_i}^s$ является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = +1$ и $\mathbb{R}^{n-\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\nu_i = -1$;
4. $(cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u$ $((cl(W_{\mathcal{O}_i}^s) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^s) \subset \bigcup_{j=i+1}^k W_{\mathcal{O}_j}^s)$.

Полученный результат является обобщением классической теоремы С. Смейла [7, Теорема 2.3]. Аналогичный результат для регулярных гомеоморфизмов получен в работе [1] и для топологических потоков без периодических орбит в работах [5], [4].

1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

1.1. Топологические потоки. Пусть M — замкнутое n -мерное многообразие с метрикой d . Топологическим потоком на M называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство гомеоморфизмов $f^t : M \rightarrow M$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $f^0(x) = x$ для любой точки $x \in M$;
- 2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M$.

Траекторией или орбитой точки $x \in M$ относительно потока f^t называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t . Любые две траектории динамической системы либо совпадают, либо не пересекаются, поэтому фазовое пространство представляется в виде объединения попарно не пересекающихся траекторий. Различают три типа траекторий:

- 1) неподвижная точка $\mathcal{O}_x = \{x\}$;
- 2) периодическая траектория (орбита) \mathcal{O}_x , для которой существует число $per(x) > 0$ такое, что $f^{per(x)}(x) = x$, но $f^t(x) \neq x$ для всех действительных чисел $0 < t < per(x)$. Число $per(x)$ называется периодом периодической орбиты и не зависит от выбора точки на орбите;

3) *регулярная траектория* \mathcal{O}_x — траектория, не являющаяся неподвижной точкой или периодической орбитой.

Для характеристики блуждаемости траекторий динамической системы традиционно используется понятие цепно рекуррентности.

ε -цепью длины T , соединяющей точку x с точкой y для потока f^t называется последовательность точек $x = x_0, \dots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен t_1, \dots, t_n такая, что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geq 1$ для $1 \leq i \leq n$ и $t_1 + \dots + t_n = T$.

Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной* для потока f^t , если для любого $\varepsilon > 0$ существует T , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины T , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек f^t называется *цепно рекуррентным множеством* f^t и обозначается \mathcal{R}_{f^t} , а его компоненты связности называются *цепными компонентами*. Множество \mathcal{R}_{f^t} является f^t -инвариантным, то есть состоит из орбит потока f^t , которые называются *цепно рекуррентными*. Очевидно, что неподвижные точки и периодические орбиты являются цепно рекуррентными.

1.2. Топологическая гиперболичность неподвижных точек. Согласно теореме Гробмана-Хартмана (см., например, [6]), в окрестности гиперболической неподвижной точки гладкий поток топологически сопряжен линейному потоку $a_\lambda^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ следующего вида:

$$a_\lambda^t(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n) = (2^t x_1, \dots, 2^t x_\lambda, 2^{-t} x_{\lambda+1}, \dots, 2^{-t} x_n).$$

Положим

$$E_\lambda^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_\lambda = 0\}, E_\lambda^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Неподвижная точка p потока $f^t : M \rightarrow M$ называется *топологически гиперболической*, если существует ее окрестность $U_p \subset M$, число $\lambda \in \{0, 1, \dots, n\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $h_p f^t|_{U_p} = a_{\lambda_p}^t h_p|_{U_p}$ всякий раз, когда левая и правая части определены.

Для топологически гиперболической неподвижной точки p потока f^t множества $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)$, $h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u)$ будем называть её *локальными инвариантными многообразиями*.

Множества

$$W_p^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^s)), W_p^u = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u))$$

будем называть *устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями точки p* .

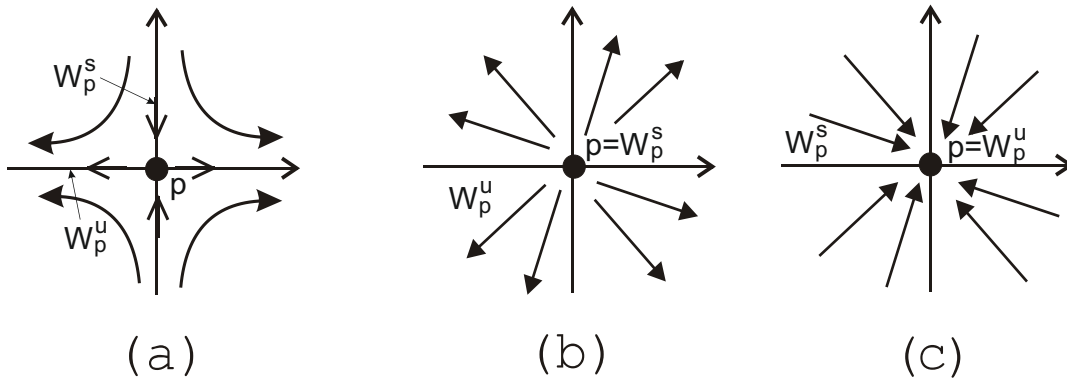


Рис. 1. Динамика в окрестности топологически гиперболической неподвижной точки: а) седло, б) источник, с) сток

Число λ_p будем называть *индексом Морса* гиперболической точки p . Точки индексов n и 0 будем называть *источниковыми* и *стоковыми* соответственно; любую точку p такую, что $\lambda_p \in \{1, \dots, n - 1\}$ будем называть *седловой* (см. Рис. 1).

1.3. Топологическая гиперболичность периодических орбит. В работе [3] М. С. Ирвин доказал аналог теоремы Гробмана-Хартмана для периодических орбит, а именно, он показал, что в окрестности гиперболической периодической орбиты поток топологически сопряжен надстройке над линейным диффеоморфизмом $a_{\lambda, \mu, \nu} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $\mu, \nu \in \{-1, +1\}$ следующего вида:

$$a_{\lambda, \mu, \nu}(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_{n-1}) = (\mu \cdot 2x_1, \dots, 2x_\lambda, \nu \cdot x_{\lambda+1}/2, \dots, x_{n-1}/2).$$

Именно, для $T > 0$ введем минимальное отношение эквивалентности \sim на \mathbb{R}^n , при котором точки (x, kT) и $(a_{\lambda, \mu, \nu}(x), (k - 1)T)$ являются эквивалентными для $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим $\Pi_{\lambda, \mu, \nu, T} = \mathbb{R}^n / \sim$ и обозначим через $q_{\lambda, \mu, \nu, T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi_{\lambda, \mu, \nu, T}$ естественную проекцию. По построению многообразие $\Pi_{\lambda, \mu, \nu, T}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, если $\mu\nu = 1$ и гомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$, если $\mu\nu = -1$. Определим поток \tilde{b}^t на \mathbb{R}^n системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dots, \\ \dot{x}_{n-1} = 0, \\ \dot{x}_n = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Положим $\tilde{E}_\lambda^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_\lambda = 0\}$, $\tilde{E}_\lambda^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda+1} = \dots = x_{n-1} = 0\}$.

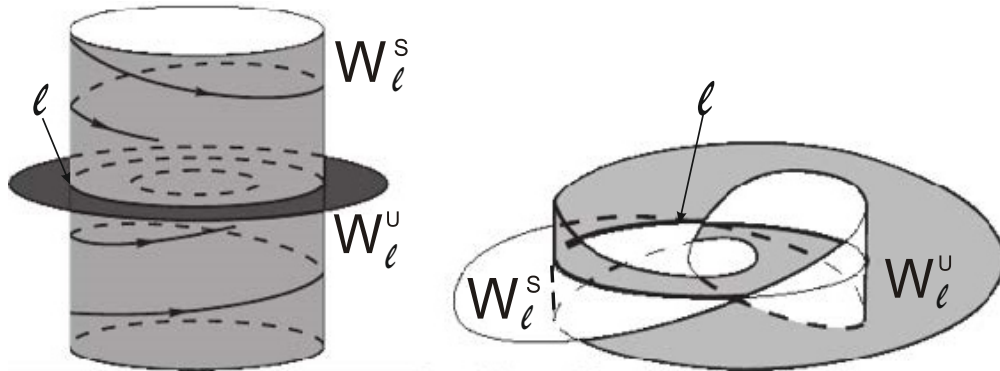


Рис. 2. Динамика в окрестности топологически гиперболической седловой периодической орбиты ℓ потока на трехменном многообразии: (а) $\lambda_\ell = 1, \mu_\ell = \nu_\ell = +1$, (б) $\lambda_\ell = 1, \mu_\ell = \nu_\ell = -1$

Естественная проекция $q_{\lambda,\mu,\nu,T}$ индуцирует поток $b_{\lambda,\mu,\nu,T}^t = q_{\lambda,\mu,\nu,T} \tilde{b}^t q_{\lambda,\mu,\nu,T}^{-1} : \Pi_{\lambda,\mu,\nu,T} \rightarrow \Pi_{\lambda,\mu,\nu,T}$. Положим $E_{\lambda,\mu,\nu,T}^s = q_{\lambda,\mu,\nu,T}(\tilde{E}_\lambda^s)$, $E_{\lambda,\mu,\nu,T}^u = q_{\lambda,\mu,\nu,T}(\tilde{E}_\lambda^u)$.

Периодическая орбита ℓ потока $f^t : M \rightarrow M$ называется *топологически гиперболической периодической*, если существует ее окрестность $U_\ell \subset M$, числа $\lambda_\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mu_\ell, \nu_\ell \in \{-1, +1\}$, $T_\ell > 0$ и гомеоморфизм $h_\ell : U_\ell \rightarrow \Pi_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}$ такие, что $h_\ell f^t|_{U_\ell} = b_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^t h_\ell|_{U_\ell}$ всякий раз, когда левая и правая части определены.

Для топологически гиперболической периодической орбиты ℓ потока f^t множества $h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^s)$, $h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^u)$ будем называть её *локальными инвариантными многообразиями*.

Множества

$$W_\ell^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^s)), \quad W_\ell^u = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^t(h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^u))$$

будем называть *устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями периодической орбиты ℓ* .

Число λ_ℓ будем называть *индексом Морса*, пару μ_ℓ, ν_ℓ будем называть *типом ориентации* и число T_ℓ будем называть *периодом* гиперболической периодической орбиты ℓ . Точки индексов $n-1$ и 0 будем называть *источниковыми* и *стоковыми* соответственно; любую орбиту ℓ такую, что $\lambda_\ell \in \{1, \dots, n-2\}$ будем называть *седловой* (см. Рис. 2).

2. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ЦЕПНЫХ КОМПОНЕНТ

Напомним, что через G мы обозначили класс топологических потоков, заданных на замкнутом топологическом n -многообразии M и таких, что цепно рекуррентное множество любого потока $f^t \in G$ состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических периодических орбит.

В настоящем разделе мы изучаем динамические свойства таких потоков и доказываем теорему 1.

Поскольку M является топологическим многообразием, то оно метризуемо, то есть топология на нем совпадает с метрической топологией, порожденной некоторой метрикой d . Тогда расстояние от точки $x \in M$ до подмножества $Y \subset M$ определяется как

$$d(x, Y) = \inf \{d(x, y), y \in Y\}.$$

Утверждение 1. Пусть $f^t \in G$ и \mathcal{O} – цепная компонента потока f^t . Тогда $W_{\mathcal{O}}^u$ и $W_{\mathcal{O}}^s$ не зависят от выбора локального гомеоморфизма $h_{\mathcal{O}}$ и в топологических терминах определяются следующим образом:

$$W_{\mathcal{O}}^u = \{y \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^{-t}(y), \mathcal{O}) = 0\}, \quad W_{\mathcal{O}}^s = \{y \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(y), \mathcal{O}) = 0\}.$$

Доказательство. 1 случай. Цепная компонента \mathcal{O} является неподвижной точкой. Пусть $h'_{\mathcal{O}} : U'_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм отличный от $h_{\mathcal{O}}$ и такой, что $h'_{\mathcal{O}} f|_{U'_{\mathcal{O}}} = a_{\lambda'} h'_{\mathcal{O}}|_{U'_{\mathcal{O}}}$ всякий раз, когда левая и правая части определены. Тогда в окрестности $U_{\mathcal{O}}$ компоненты \mathcal{O} в \mathbb{R}^n корректно определен гомеоморфизм $h = h_{\mathcal{O}} h'^{-1}_{\mathcal{O}}$, который сопрягает $a_{\lambda_{\mathcal{O}}}$ с $a_{\lambda'}$. Сопрягающий гомеоморфизм сохраняет инвариантные многообразия, тогда $\lambda'_{\mathcal{O}} = \lambda_{\mathcal{O}}$ и $h(E^s_{\lambda_{\mathcal{O}}}) = E^s_{\lambda'}$, $h(E^u_{\lambda_{\mathcal{O}}}) = E^u_{\lambda'}$. Таким образом, $h'^{-1}_{\mathcal{O}}(E^s_{\lambda_{\mathcal{O}}}) = h^{-1}_{\mathcal{O}}(h(E^s_{\lambda_{\mathcal{O}}})) = h^{-1}_{\mathcal{O}}(E^s_{\lambda'})$. Аналогично для $E^u_{\lambda_{\mathcal{O}}}$.

2 случай. Цепная компонента \mathcal{O} является периодической орбитой. Пусть $h'_{\mathcal{O}} : U'_{\mathcal{O}} \rightarrow \Pi_{\lambda', \mu', \nu', T'}$ гомеоморфизм отличный от $h_{\mathcal{O}}$ и такой, что $h'_{\mathcal{O}} f|_{U'_{\mathcal{O}}} = b_{\lambda', \mu', \nu', T'} h'_{\mathcal{O}}|_{U'_{\mathcal{O}}}$ всякий раз, когда левая и правая части определены. Тогда в окрестности $U_{\mathcal{O}}$ орбиты \mathcal{O} в \mathbb{R}^n хорошо определяется гомеоморфизм $h = h_{\mathcal{O}} h'^{-1}_{\mathcal{O}}$, который сопрягает $b_{\lambda', \mu', \nu', T'}$ с $b_{\lambda, \mu, \nu, T}$. Сопрягающий гомеоморфизм сохраняет инвариантные многообразия, тогда $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$, $T' = T$ и $h(E^s_{\lambda, \mu, \nu}) = E^s_{\lambda, \mu, \nu}$, $h(E^u_{\lambda, \mu, \nu}) = E^u_{\lambda, \mu, \nu}$. Таким образом, $h'^{-1}_{\mathcal{O}}(E^s_{\lambda, \mu, \nu}) = h^{-1}_{\mathcal{O}}(h(E^s_{\lambda, \mu, \nu})) = h^{-1}_{\mathcal{O}}(E^s_{\lambda, \mu, \nu})$. Аналогично для $E^u_{\lambda, \mu, \nu}$. \square

Динамика систем класса G близка по своим свойствам к динамике потоков Морса-Смейла. Именно, на множестве цепных компонент потока $f^t \in G$ введем отношение С. Смейла условием

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset,$$

где $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ компоненты связности множества R_{f^t} .

k -циклом ($k \geq 1$) называется набор попарно непересекающихся орбит цепно-рекуррентного множества, удовлетворяющих условию $\mathcal{O}_1 \prec \mathcal{O}_2 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k \prec \mathcal{O}_1$.

Утверждение 2. У динамической системы $f^t \in G$ отсутствуют циклы.

Доказательство. Предположим противное: существует последовательность орбит $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_m \prec \mathcal{O}_1$. По построению любая точка множества $\bigcup_{i=1}^m (W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_{i+1}}^u)$, где $\mathcal{O}_{m+1} = \mathcal{O}_1$ является цепно рекуррентной. Это противоречит конечности цепно рекуррентного множества системы f^t . Получили противоречие. \square

Таким образом, у потока f^t отсутствуют циклы, значит, введенное отношение является отношением частичного порядка и может быть продолжено (не единственным образом) до отношения полного порядка, т.е. для любых $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ либо $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, либо $\mathcal{O}_j \prec \mathcal{O}_i$ на R_{f^t} . В дальнейшем будем считать орбиты потока f^t пронумерованными согласованно с некоторым фиксированным порядком:

$$\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k.$$

Кроме того, не уменьшая общности будем полагать, что любая стоковая орбита расположена в этом порядке ниже любой седловой орбиты, а любая источниковая орбита — выше любой седловой.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе мы доказываем теорему 1 о вложении и асимптотическом поведении инвариантных многообразий цепных компонент. Аналогичное утверждение для диффеоморфизмов Морса-Смейла доказано в книге [2].

Ниже каждый пункт теоремы мы доказываем в отдельном подразделе.

Все утверждения, сформулированные относительно неустойчивых многообразий периодических точек справедливы для устойчивых и формально получаются заменой “u” на “s”, поскольку $R_{f^t} = R_{f^{-t}}$ и устойчивые многообразия цепно рекуррентных точек потока f^t являются неустойчивыми многообразиями цепно рекуррентных точек потока f^{-t} .

3.1. Представление объемлющего многообразия объединением инвариантных многообразий периодических точек. Доказательство пункта (1) теоремы 1.

Докажем, что $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u$.

Пусть $x \in M$. Точка $y \in M$ называется α -предельной точкой для точки x , если существует последовательность $t_n \rightarrow -\infty$, $t_n \in \mathbb{R}$ такая, что $\lim_{t_n \rightarrow -\infty} d(f^{t_n}(x), y) = 0$. Множество $\alpha(x)$ всех α -предельных точек точки x называется α -предельным множеством точки x . В силу компактности многообразия M , предельное множество $\alpha(x)$ не пусто и является подмножеством \mathcal{R}_{ft} . Покажем, что $\alpha(x)$ состоит в точности из одной цепной компоненты, зависящей от x .

Предположим противное: существуют различные цепные компоненты $\mathcal{O}_v, \mathcal{O}_w \in \alpha(x)$. Поскольку \mathcal{R}_{ft} состоит из конечного числа орбит, то существует $\rho > 0$ такое, что $d(\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j) > \rho$ для любых $i \neq j$. Положим $V_i = \{y \in M : d(y, \mathcal{O}_i) < \frac{\rho}{3}\}$. Существует окрестность U_i такая, что $cl(U_i) \subset V_i$ и $f^{-1}(cl(U_i)) \cap V_j = \emptyset$ для любого $j \neq i$. По предположению существует возрастающая последовательность времен t_ℓ такая, что $f^{-t_{2m}}(x) \in U_v, f^{-t_{2m+1}}(x) \in U_w$ и $t_{2m+1} - t_{2m} \geq 2$. Выберем последовательность времен t_m^* так, что t_m^* — наибольшее число из отрезка $[q_{2m}, q_{2m+1}]$ для которого $f^{-(t_m^*-1)}(x) \in cl(U_v)$. Тогда $f^{-t_m^*}(x) \notin cl(U_v)$. С другой стороны $f^{-t_m^*}(x) = f^{-1}(f^{-(t_m^*-1)}(x)) \notin V_j$ для $j \neq v$ и, следовательно, $f^{-t_m^*}(x) \in (M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i)$. Откуда следует, что $\alpha(x)$ не является подмножеством \mathcal{R}_f . Получили противоречие.

Таким образом, для любой точки $x \in M$ существует единственная орбита $\mathcal{O}_v(x) \in \mathcal{R}_{ft}$ такая, что $\alpha(x) = \mathcal{O}_v(x)$. То есть существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что $\lim_{t_n \rightarrow +\infty} d(f^{-t_n}(x), \mathcal{O}_v(x)) = 0$. Из свойств динамики гиперболической периодической орбиты $\mathcal{O}_v(x)$ следует, что $f^{-t_n}(x) \in W_{\mathcal{O}_v(x)}^u$ для всех n больших некоторого n_0 . В силу инвариантности неустойчивого многообразия, $x \in W_{\mathcal{O}_v(x)}^u$.

3.2. Вложение инвариантных многообразий периодических точек в объемлющее многообразие. Для доказательства пункта 2 теоремы 1 нам понадобится следующая лемма и следствия из нее.

Лемма 1. Пусть O — седловая точка диффеоморфизма $a_{\lambda, \mu, \nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < n$, $T_O \subset W_{\mathcal{O}_i}^s$ — компактная окрестность O и $\bar{\xi} \in T_O \setminus O$. Тогда для любой последовательности точек $\bar{\xi}_m \subset (\mathbb{R}^n \setminus T_O)$, сходящейся к точке $\bar{\xi}$, существует подпоследовательность $\bar{\xi}_{m_j}$, последовательность натуральных чисел $\kappa_j \rightarrow +\infty$ и точка $\bar{\eta} \in (W_O^u \setminus O)$ такие, что последовательность точек $a_{\lambda, \mu, \nu}^{\kappa_j}(\bar{\xi}_{m_j})$ сходится к точке $\bar{\eta}$.

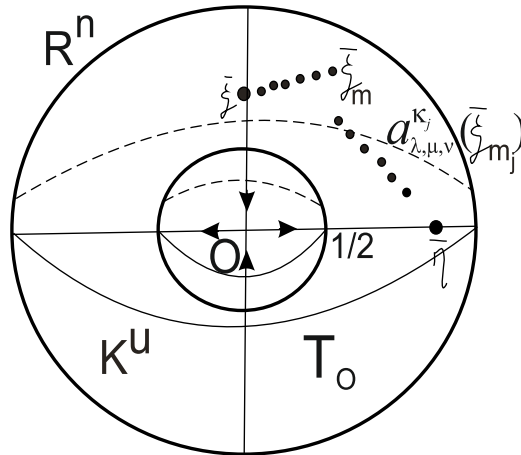


Рис. 3. Динамика в окрестности седловой точки диффеоморфизма $a_{\lambda, \mu, \nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть $\bar{\xi}_m = (\bar{\xi}_{1,m}, \dots, \bar{\xi}_{\lambda,m}, \bar{\xi}_{\lambda+1,m}, \dots, \bar{\xi}_{n,m})$. Положим $K^u = \{(x_1, \dots, x_\lambda, 0, \dots, 0) \in Ox_1 \dots x_\lambda : \frac{1}{4} \leq x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq 1\}$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма $a_{\lambda, \mu, \nu}$ на $Ox_1 \dots, x_\lambda \setminus O$.

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует единственное целое число k_m такое, что $\frac{1}{4} \leq 4^{k_m} ((\bar{\xi}_{1,m})^2 + \dots + (\bar{\xi}_{\lambda,m})^2) < 1$. Положим $\bar{\eta}_m = a_{\lambda, \mu, \nu}^{k_m}(\bar{\xi}_m) = (\bar{\eta}_{1,m}, \dots, \bar{\eta}_{n,m})$. Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_m \in (Ox_{\lambda+1} \dots x_n \setminus O)$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\xi}_{i,m} = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, \lambda\}$ и, следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = +\infty$ (см. Рис. 3). Кроме того, последовательность $\bar{\xi}_{i,m}$ ограничена для любого $i \in \{\lambda + 1, \dots, n\}$ и, следовательно, $\bar{\eta}_{i,m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для $i \in \{\lambda + 1, \dots, n\}$.

Таким образом, координаты точек $\bar{\eta}_m = (\bar{\eta}_{1,m}, \dots, \bar{\eta}_{n,m})$ удовлетворяют следующим условиям: $\frac{1}{4} \leq (\bar{\eta}_{1,m})^2 + \dots + (\bar{\eta}_{q,m})^2 < 1$ для $i \in \{1, \dots, q\}$ и $\bar{\eta}_{i,m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для $i \in \{\lambda + 1, \dots, n\}$, то есть точки $\bar{\eta}_m$ лежат внутри некоторого компактного подмножества \mathbb{R}^n . Так как для любой последовательности, заданной на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность, то существует подпоследовательность $k_{m_j} = \kappa_j$ последовательности k_m и точка $\bar{\eta} \in (W_O^u \setminus O)$ такие, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\eta}_{m_j} = \bar{\eta}$. Тогда $\bar{\xi}_{m_j} = (a_{\lambda, \mu, \nu}^{-\kappa_j}(\bar{\eta}_{m_j}))$ — искомая подпоследовательность. \square

Следствие 1. Пусть p — гиперболическая неподвижная седловая точка потока $f^t : M \rightarrow M$, $T_p \subset W_p^s$ — компактная окрестность p и $\xi \in (T_p \setminus p)$. Тогда для любой последовательности точек $\xi_m \subset (M \setminus T_p)$, сходящейся к точке ξ , существует подпоследовательность ξ_{m_j} , последовательность времен $t_j \rightarrow +\infty$ и точка $\eta \in (W_p^u \setminus p)$ такие, что последовательность точек $f^{t_j}(\xi_{m_j})$ сходится к точке η .

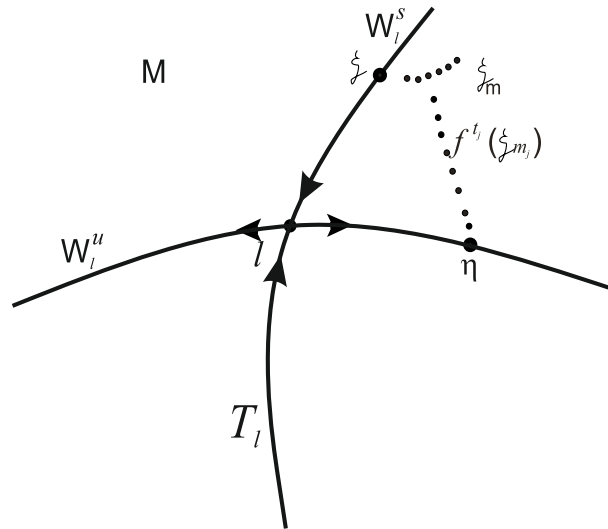


Рис. 4. Динамика в окрестности гиперболической периодической седловой орбиты потока $f^t : M \rightarrow M$

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что точка ξ принадлежит окрестности U_p , в которой поток f^t сопряжен линейному потоку $a_{\lambda_p}^t$ посредством гомеоморфизма h_p (в противном случае можно рассмотреть точку $f^k(\xi)$ для которой это верно при подходящей степени k). Тогда последовательность $\bar{\xi}_m = h_p(\xi_m)$, сходящаяся к точке $\bar{\xi} = h_p(\xi) \in (W_O^s \setminus O)$. В силу леммы 1, существует подпоследовательность $\bar{\xi}_{m_j}$, последовательность натуральных чисел $\kappa_j \rightarrow +\infty$ и точка $\bar{\eta} \in (W_O^u \setminus O)$ такие, что последовательность точек $a_{\lambda}^{\kappa_j}(\bar{\xi}_{m_j})$ сходится к точке $\bar{\eta}$. Положим $t_j = \kappa_j$. Тогда последовательность точек $f^{t_j}(\xi_{m_j}) = h_p^{-1}(a_{\lambda}^{t_j}(\bar{\xi}_{m_j}))$ сходится к точке $\eta = h_p^{-1}(\bar{\eta})$. \square

Следствие 2. Пусть l – гиперболическая периодическая седловая орбита потока $f^t : M \rightarrow M$, $T_\ell \subset W_\ell^s$ – компактная окрестность l и $\xi \in T_\ell \setminus l$. Тогда для любой последовательности точек $\xi_m \subset (M \setminus T_\ell)$, сходящейся к точке ξ , существует подпоследовательность ξ_{m_j} , последовательность времен $t_j \rightarrow +\infty$ и точка $\eta \in (W_\ell^u \setminus l)$ такие, что последовательность точек $f^{t_j}(\xi_{m_j})$ сходится к точке η .

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что точка ξ принадлежит окрестности U_ℓ , в которой поток f^t сопряжен линейному потоку $b_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^t$ посредством гомеоморфизма h_ℓ (в противном случае можно рассмотреть точку $f^k(\xi)$ для которой это верно при подходящей степени k).

Рассмотрим последовательность $\tilde{\xi}_m \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $h_\ell^{-1}(q_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}(\tilde{\xi}_m)) = \xi_m$ и $\tilde{\xi}_m$ сходится к точке $\tilde{\xi} = (0, \dots, 0, \tilde{\xi}_{\lambda_\ell+1}, \dots, \tilde{\xi}_n)$.

Положим $\tilde{\xi}_m = (\tilde{\xi}_{1,m} \dots, \tilde{\xi}_{n,m})$ и $\bar{\xi}_m = (\tilde{\xi}_{1,m} \dots, \tilde{\xi}_{n-1,m})$. В силу леммы 1 существует подпоследовательность $k_{m_j} = \kappa_j$ последовательности k_m и точка $\bar{\eta} \in O_{x_1 \dots x_{\lambda_\ell}}$

такие, что $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell}^{\kappa_j}(\bar{\xi}_{m_j}) = \bar{\eta}$. Положим $t_j = T_\ell \kappa_j$, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_{\lambda_\ell}, 0, \dots, 0)$, $\tilde{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_{\lambda_\ell}, 0, \dots, 0, \tilde{\xi}_n)$ и $\eta = q_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}(\tilde{\eta})$ (см. Рис. 4). Тогда последовательность точек $f^{t_j}(\xi_{m_j})$ сходится к точке η . \square

Доказательство пункта (2) теоремы 1. Докажем, что для неподвижной точки $\mathcal{O}_i = p$ ее неустойчивое многообразие W_p^u является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным \mathbb{R}^{λ_p} .

Пусть $T_p = h_p^{-1}(E_{\lambda_p}^u)$. Тогда для каждой точки $x \in W_p^u$ существует натуральное число n_x такое, что $x \in f^{-n_x}(T_p)$. Пусть $T_p(x) = f^{-n_x}(T_p)$. Тогда существует карта $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ многообразия M такая, что $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = \mathbb{R}^{\lambda_p}$. Если $\lambda_p = n$ или $\lambda_p = 0$, тогда $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = \psi_x(U_x \cap W_p^u)$. Следовательно, неустойчивое многообразие каждой узловой точки является λ_ℓ -подмногообразием.

Покажем, что W_p^u является подмногообразием M гомеоморфным \mathbb{R}^{λ_p} для каждой седловой точки. Предположим обратное: W_p^u не является подмногообразием M . Тогда существует точка $x \in W_p^u$ такая, что $(U_x \setminus T_p(x)) \cap W_p^u \neq \emptyset$ для каждой карты $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ многообразия M , в которой $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = \mathbb{R}^{\lambda_p}$. Следовательно, существует последовательность $\{x_m\} \subset (W_p^u \setminus T_p(x))$, сходящаяся к точке x при $m \rightarrow +\infty$.

Из следствия 1 следует, что существует подпоследовательность $\{x_{m_j}\}$, последовательность времен $t_j \rightarrow +\infty$ и точка $y \in (W_p^s \setminus p)$ такие, что последовательность точек $\{y_j = f^{-t_j}(x_{m_j})\}$ сходится к точке y . Так как $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u$, то $y \in W_{\mathcal{O}_i}^u$ для некоторого $\mathcal{O}_i \in \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k\}$. Рассмотрим три возможных случая: [a] \mathcal{O}_i – источник или точка; [b] \mathcal{O}_i – седловая орбита или точка; [c] \mathcal{O}_i – сток или точка.

В случае [a] $\dim W_{\mathcal{O}_i}^u = n$ и, следовательно, $y_j \in W_{\mathcal{O}_i}^u$ для всех j , начиная с некоторого. Тогда $i = l$. Получили противоречие с тем, что $\dim W_p^u \neq n$, откуда следует, что случай [a] невозможен.

В случае [c] $W_{\mathcal{O}_i}^u = \mathcal{O}_i$ и, следовательно, $\mathcal{O}_i \cap (W_p^s \setminus p) \neq \emptyset$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [c] невозможен.

В случае [b] $l \neq i$, так как f^t не имеет циклов. Следовательно, из лемм 1, 2 следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_r}\}$, последовательность времен $\tau_r \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_{\mathcal{O}_i}^s$ такие, что последовательность точек $\{f^{\tau_r}(y_{j_r})\}$ сходится к точке z (см. Рис. 5).

Так как $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u$, то $z \in W_{\mathcal{O}_q}^u$ для некоторого $q \in \{1, \dots, k\}$. Рассуждая как выше, получаем, что \mathcal{O}_q – седловая орбита или точка, отличная от \mathcal{O}_i и \mathcal{O}_l . Повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая, что множество \mathcal{R}_{f^t} конечно получаем, что случай [b] невозможен.

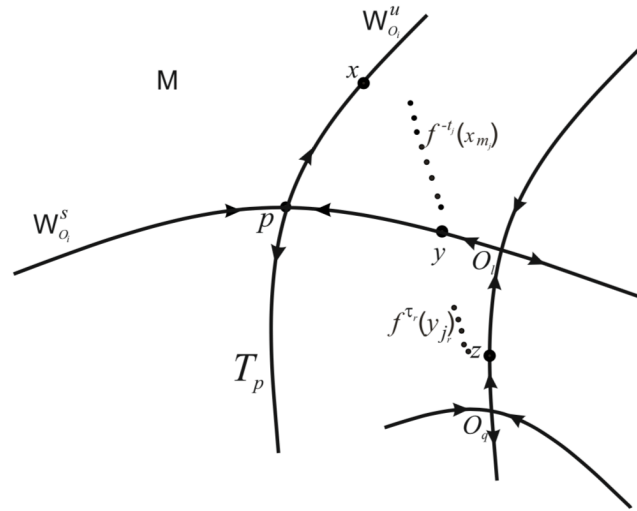


Рис. 5. Иллюстрация к доказательству пункта (2) теоремы 1

Таким образом, W_p^u — топологическое подмногообразие многообразия M . Тогда его гомеоморфность многообразию \mathbb{R}^{λ_p} следует из того, что потоки $f^t|_{W_p^u}$ и $a_{\lambda_p}^t|_{E_{\lambda_p}^u}$ топологически сопряжены.

Доказательство пункта (3) теоремы 1. Докажем, что для периодической орбиты $\mathcal{O}_i = \ell$ ее неустойчивое многообразие W_ℓ^u является топологическим подмногообразием многообразия M , гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = -1$.

Пусть $T_\ell = h_\ell^{-1}(E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^u)$. Тогда для каждой точки $x \in W_\ell^u$ существует натуральное число n_x такое, что $x \in f^{-n_x}(T_\ell)$. Пусть $T_\ell(x) = f^{-n_x}(T_\ell)$. Тогда существует карта $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ многообразия M такая, что $\psi_x(U_x \cap T_\ell(x))$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = +1$ и гомеоморфно $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = -1$. Если $\lambda_\ell = n - 1$ или $\lambda_\ell = 0$, тогда $\psi_x(U_x \cap T_\ell(x)) = \psi_x(U_x \cap W_\ell^u)$. Следовательно, неустойчивое многообразие каждой узловой орбиты является $(\lambda_\ell + 1)$ - подмногообразием.

Покажем, что W_ℓ^u является подмногообразием M для каждой седловой точки. Предположим обратное: W_ℓ^u не является подмногообразием M . Тогда существует точка $x \in W_\ell^u$ такая, что $(U_x \setminus T_\ell(x)) \cap W_\ell^u \neq \emptyset$ для каждой карты $\psi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ многообразия M , в которой $\psi_x(U_x \cap T_\ell(x))$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = +1$ и гомеоморфно $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell = -1$. Следовательно, существует последовательность $\{x_m\} \subset (W_\ell^u \setminus T_\ell(x))$, сходящаяся к точке x при $m \rightarrow +\infty$.

Из следствия 2 следует, что существует подпоследовательность $\{x_{m_j}\}$, последовательность времен $t_j \rightarrow +\infty$ и точка $y \in (W_\ell^s \setminus \ell)$ такие, что последовательность точек

$\{y_j = f^{-t_j}(x_{m_j})\}$ сходится к точке y . Так как $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u$, то $y \in W_{\mathcal{O}_l}^u$ для некоторого $\mathcal{O}_l \in \{\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k\}$. Рассмотрим три возможных случая: [a] \mathcal{O}_l – источниковая орбита или точка; [b] \mathcal{O}_l – седловая орбита или точка; [c] \mathcal{O}_l – стоковая орбита или точка.

В случае [a] $\dim W_{\mathcal{O}_l}^u = n$ и, следовательно, $y_j \in W_{\mathcal{O}_l}^u$ для всех j , начиная с некоторого. Тогда $i = l$. Получили противоречие с тем, что $\dim W_\ell^u \neq n$, откуда следует, что случай [a] невозможен.

В случае [c] $W_{\mathcal{O}_l}^u = \mathcal{O}_l$ и, следовательно, $\mathcal{O}_l \cap (W_\ell^s \setminus \ell) \neq \emptyset$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [c] невозможен.

В случае [b] $l \neq i$, так как f^t не имеет циклов. Следовательно, из следствий 1, 2 следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_r}\}$, последовательность времен $\tau_r \rightarrow +\infty$ и точка $z \in W_{\mathcal{O}_l}^s$ такие, что последовательность точек $\{f^{\tau_r}(y_{j_r})\}$ сходится к точке z .

Так как $M = \bigcup_{i=1}^k W_{\mathcal{O}_i}^u$, то $z \in W_{\mathcal{O}_q}^u$ для некоторого $q \in \{1, \dots, k\}$. Рассуждая как выше, получаем, что \mathcal{O}_q – седловая орбита или точка, отличная от \mathcal{O}_i и \mathcal{O}_l . Повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая, что множество \mathcal{R}_{f^t} конечно получаем, что случай [b] невозможен.

Таким образом, W_ℓ^u – топологическое подмногообразие многообразия M . Тогда его гомеоморфность многообразию $\mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{S}^1$ при $\mu_\ell = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_i} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$ при $\mu_\ell = -1$ следует из того, что потоки $f^t|_{W_\ell^u}$ и $a_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^t|_{E_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}^u}$ топологически сопряжены.

3.3. Асимптотическое поведение инвариантных многообразий периодических точек. Доказательство пункта (4) теоремы 1

Докажем, что $(cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} W_{\mathcal{O}_j}^u$.

Если \mathcal{O}_i стоковая орбита, тогда $cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u$ пусто и предположение верно. Если непусто, рассмотрим точку $x \in (cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u)$. Покажем, что $x \in W_{\mathcal{O}_v}^u$ для $v < i$.

На самом деле, поскольку $x \in (cl(W_{\mathcal{O}_i}^u) \setminus (W_{\mathcal{O}_i}^u \cup \mathcal{O}_i))$ существует последовательность $\{x_m\} \subset W_{\mathcal{O}_i}^u$ такая, что $d(x_m, x) \rightarrow 0$ для $m \rightarrow +\infty$. Из пункта (1) теоремы 1 следует, что $x \in W_{\mathcal{O}_v}^u$ для $v \in \{1, \dots, k\}$. Возможны 3 случая: (a) \mathcal{O}_v притягивающая орбита или точка, (b) \mathcal{O}_v седловая орбита или точка, (c) \mathcal{O}_v отталкивающая орбита или точка.

В случае (c) $x_m \in W_{\mathcal{O}_v}^u$ для всех m , начиная с некоторого. Но тогда $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_i$ и $x \in W_{\mathcal{O}_i}^u$, что противоречит предположению.

В случае (a) $W_{\mathcal{O}_v}^u = \mathcal{O}_v$, $x \in \mathcal{O}_v$ и $x_m \in W_{\mathcal{O}_v}^s$ для всех m , начиная с некоторого. Тогда $W_{\mathcal{O}_i}^u \cap W_{\mathcal{O}_v}^s \neq \emptyset$ и $v < i$, что и требовалось доказать.

В случае (b), согласно следствиям 1 и 2, существует подпоследовательность x_{m_j} и последовательность времен t_j такие, что последовательность $y_j = f^{-t_j}(x_{m_j})$ сходится к точке $y \in (W_{\mathcal{O}_v}^s \setminus \mathcal{O}_v)$. Согласно пункту (1) теоремы 1, существует орбита $\mathcal{O}_w \in \mathcal{R}_{ft}$ такая, что $y \in W_{\mathcal{O}_w}^u$ и $\mathcal{O}_v \prec \mathcal{O}_w$. Если $w = i$, то утверждение верно. Если нет, то рассуждая, как и раньше, мы получаем, что орбита \mathcal{O}_w не может быть источниковой. Орбита \mathcal{O}_w явно не стоковая, потому что \mathcal{O}_v является седловой. Тогда орбита \mathcal{O}_w седловая, отличная от \mathcal{O}_v .

Поскольку \mathcal{R}_{ft} конечно и не содержит циклов, повторяя процесс, мы докажем утверждение за конечное число шагов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-31-90069.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринес В. З. Аналог теоремы Смейла для гомеоморфизмов с регулярной динамикой / Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С., Починка О. В. // Математические заметки. — 2017. — Т. 102. — № 4. — С. 613–618.
GRINES V., GUREVICH E., MEDVEDEV T. & POCHINKA O. (2017) An analogue of Smale's theorem for homeomorphisms with regular dynamics. *Matematicheskie Zametki*. V. 102 (4). p. 613–618.
2. GRINES V., MEDVEDEV T., POCHINKA O. (2016) *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*. Switzerland: Springer.
3. IRWIN M. C. (1970) A classification of elementary cycles. *Topology*. Vol. 9. p. 35–47.
4. MEDVEDEV T., POCHINKA O., ZININA S. (2021) On existence of Morse energy function for topological flows. *Advances in Mathematics*. Vol. 378. p. .
5. POCHINKA O., ZININA S. (2019) Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain recurrent set on n-dimensional manifolds. *Dynamical systems*. Vol. 9(37) (No. 3). p. 289-296.
6. ROBINSON C. (1999) *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. Vol. 28. CRC press Boca Raton.
7. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25. — No. 1. — С. 113–185.
SMAIL, S. (1970) Differentiable dynamic systems. *Uspehi matematicheskikh nauk*. V. 25 (1). p. 113–185.

УДК: 517.958

MSC2010: 35Q35

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ ТЕЛА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГИХ И ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ

© К. В. Фордук

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: forduk_kv@mail.ru

**PROBLEM ON OSCILLATION OF A BODY PARTIALLY FILLED WITH AN IDEAL FLUID
UNDER THE ACTION OF AN ELASTIC AND DAMPING FORCES.**

Forduk K. V.

Abstract. In this paper, we study a problem of small motions of a body partially filled with an ideal homogenous fluid under the action of an elastic damping device. The mathematical statement of the problem consists of the equation of motion of a body with an ideal fluid in a stationary coordinate system

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_1 + \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x\mathbf{e}_1 + \alpha\dot{x}\mathbf{e}_1 = k_0^2x_0\mathbf{e}_1 + k_1^2x_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_T + N(t)\mathbf{e}_2 - gm\mathbf{e}_2,$$

the equations of motion of a fluid in a moving coordinate system rigidly connected with the body

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \ddot{x}\mathbf{e}_1^{(1)} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}_j, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

the boundary conditions

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{on } S), \quad p = \rho g \zeta \quad (\text{on } \Gamma), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} \quad (\text{on } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0,$$

and the initial conditions

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^1, \quad \mathbf{u}(0, x^{(1)}) = \mathbf{u}^0(x^{(1)}), \quad \zeta(0, x_1^{(1)}) = \zeta^0.$$

For given initial-boundary value problem we obtain the law of full energy balance in the differential form.

Theorem. *If the problem has a classical solution, i.e. all functions in the equations, the boundary and initial conditions are continuous. Then the following equation is valid*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ m_m(\dot{x})^2 + \rho \int_{\Omega} |\mathbf{u} + \dot{x}\mathbf{e}_1^{(1)}|^2 d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x^2 + \rho g \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} =$$

$$= -\alpha \dot{x}^2 + (\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{e}_1) \dot{x} + \rho \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{жс}} \cdot \mathbf{u} d\Omega + k_0^2 x_0 \dot{x} + k_1^2 x_1 \dot{x}.$$

It is the law of full energy balance of the considered hydromechanical system.

Using necessary Hilbert spaces and subspaces we apply the method of orthogonal projection to the equation of fluid motion. Then problem can be formulated as a Cauchy problem for a first-order differential-operator equation in the orthogonal sum of Hilbert spaces. We study the properties of operator matrices and prove the theorem on existence of a unique strong solution of the final operator equation and initial boundary value problem. The main result of this work is the following theorem.

Theorem. *Initial boundary value problem has a unique strong solution whenever*

$$P_{h,S} \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(\gamma_m), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_1^{1/2}, \\ \mathbf{f}_m \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2), \quad \mathbf{f}_{\text{жс}} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)).$$

Keywords: *ideal fluid, elastic and damping forces, strong solvability, Cauchy problem*

ВВЕДЕНИЕ

Первой работой, посвященной задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, является работа Н. Е. Жуковского [3]. В этой работе с помощью введения вспомогательных функций, зависящих только от формы полости, исследование задачи динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменяется на исследование конечномерной задачи о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

В пятидесятые-шестидесятые годы прошлого века в связи с развитием космической техники многими авторами активно исследовалась задача динамики тела с полостью, которую жидкость заполняет лишь частично, т. е. имеется ее движущаяся свободная поверхность. Среди первых можно отметить работы Н. Н. Моисеева, затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского. Начиная с работ Н. Н. Моисеева и совместной работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [12], при исследовании этих проблем применяются методы функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Исследование двумерной задачи о колебаниях открытого прямоугольного сосуда с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, под действием упругих сил приводится в работах Л. Н. Сретенского (1951 г.) и Н. Н. Моисеева (1952 г.). Случай, когда полость заполнена вязкой жидкостью, изучен в работе Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева [13] с помощью введения функции тока.

В данной работе исследуется двумерная задача о малых движениях открытого сосуда, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства, которая поставлена профессором Н.Д. Копачевским. К исследованию задачи применяется операторный подход, который изложен в монографиях Н.Д. Копачевского с соавторами [8, 10]. Универсальность схемы исследования состоит в том, что изучение задачи о малых движениях гидромеханической системы можно привести к рассмотрению задачи Коши для системы операторных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим открытый сосуд, частично заполненный однородной идеальной жидкостью плотности $\rho > 0$, которая в состоянии покоя занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ со свободной границей Γ и твердой стенкой S . В состоянии покоя границу Γ считаем горизонтальной прямой. За счет наличия двух пружин, прикрепленных к твердой стенке сосуда, как показано на рис. 1, и трения дна сосуда о неподвижную горизонтальную твердую поверхность на тело действуют упругие и демпфирующие силы.

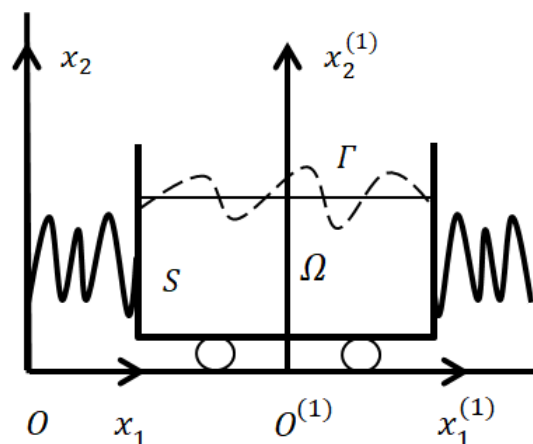


Рис. 1. Схема гидромеханической системы

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат Ox_1x_2 с ортами \mathbf{e}_j , $j = 1, 2$, так, чтобы тело совершало движения вдоль оси Ox_1 . Кроме того, введем подвижную систему координат $O^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}$, жестко связанную с телом. Орты подвижной системы обозначим через $\mathbf{e}_j^{(1)}$, $j = 1, 2$. При этом $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^{(1)}$. Будем исследовать малые колебания указанной гидромеханической системы под действием внешней силы \mathbf{f}_T и гравитационного поля $-g\mathbf{e}_2$, где g — ускорение свободного падения.

В процессе малых движений тела рассмотрим $x(t)\mathbf{e}_1$ — вектор перемещения тела, $\dot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор скорости тела, $\ddot{x}(t)\mathbf{e}_1$ — вектор ускорения тела.

Обозначим через $\mathbf{u}(t, x^{(1)})$ — поле относительных скоростей частиц жидкости. Тогда абсолютная скорость жидкости будет определяться выражением $\mathbf{u}(t, x^{(1)}) + \dot{x}(t)\mathbf{e}_1$.

Пусть $\zeta(t, x_1^{(1)}) (x_1^{(1)} \in \Gamma)$ — функция, описывающая малые отклонения свободной границы $\Gamma(t)$ вдоль $\mathbf{e}_2^{(1)}$ относительно равновесной прямой Γ , описываемой уравнением $x_2^{(1)} = b$, по формуле:

$$b + \zeta(t, x_1^{(1)}) = x_2^{(1)}, \quad |\zeta| \ll 1.$$

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение движения тела с жидкостью:

$$m\ddot{x}\mathbf{e}_1 + \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x\mathbf{e}_1 + \alpha\dot{x}\mathbf{e}_1 = k_0^2x_0\mathbf{e}_1 + k_1^2x_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_T + N(t)\mathbf{e}_2 - g m\mathbf{e}_2, \quad (1)$$

где $m = m_T + m_{ж}$ — масса тела с жидкостью (m_T — масса тела, $m_{ж}$ — масса жидкости), $N(t)\mathbf{e}_2$ — реакция опоры, действующая на систему, k_0^2 — коэффициент жесткости левой пружины, k_1^2 — коэффициент жесткости правой пружины, x_0 — заданный закон движения левой стенки, x_1 — заданный закон движения правой стенки, $\alpha > 0$ — коэффициент трения дна сосуда о горизонтальную опору.

Малые движения идеальной однородной жидкости описываются линеаризованным уравнением Эйлера:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \ddot{x}\mathbf{e}_1^{(1)} \right) + \nabla p = \rho \mathbf{f}_{ж}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (2)$$

где $p = p(t, x^{(1)})$ — отклонение давления в жидкости в процессе движения от равновесного давления, а $\mathbf{f}_{ж} = \mathbf{f}_{ж}(t, x^{(1)})$ — сила, действующая на жидкость.

Граничными условиями в рассматриваемой задаче являются условие непротекания идеальной жидкости на твердой стенке S , а также динамические, кинематические условия на границе Γ и условие сохранения объема жидкости соответственно:

$$\begin{aligned} u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad p = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega := S \cup \Gamma$. На границе Γ , очевидно, будет выполнено соотношение $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2^{(1)}$.

Начальные условия имеют вид

$$x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^1, \quad \mathbf{u}(0, x^{(1)}) = \mathbf{u}^0(x^{(1)}), \quad \zeta(0, x_1^{(1)}) = \zeta^0. \quad (4)$$

Таким образом, полная постановка исследуемой начально-краевой задачи состоит в решении уравнений (1)-(2) с краевыми и начальными условиями (3)-(4).

Теорема 1. Будем считать, что поставленная задача (1)-(4) имеет классическое решение, т.е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Тогда тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ m_m (\dot{x})^2 + \rho \int_{\Omega} |\mathbf{u} + \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}|^2 d\Omega + (k_0^2 + k_1^2) x^2 + \rho g \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} = \\ = -\alpha \dot{x}^2 + (\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{e}_1) \dot{x} + \rho \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\text{вс}} \cdot \mathbf{u} d\Omega + k_0^2 x_0 \dot{x} + k_1^2 x_1 \dot{x} \end{aligned} \quad (5)$$

представляет собой закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме.

Замечание 1. В соотношении (5) слева в фигурных скобках стоят удвоенные кинетическая и потенциальная энергии системы, а справа — мощность силы трения и мощность внешних сил, действующих на систему.

2. ВЫБОР ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОЕКТИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Из закона (5) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные пространства, для которых поле скоростей и давление приведут в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы. Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

Введем гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ векторных полей со скалярным произведением и квадратом нормы

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(x^{(1)}) \cdot \overline{\mathbf{v}(x^{(1)})} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\mathbf{u}(x^{(1)})|^2 d\Omega.$$

Как известно, применительно к данной задаче, пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ имеет ортогональное разложение (см., например, [8, стр. 106])

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{J}_0(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega) \right\}$$

– подпространство соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе $\partial\Omega$,

$$\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} = \nabla\Phi \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \Delta\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma = 0 \right\}$$

– подпространство потенциальных гармонических полей, для которых нормальная производная потенциала обращается в ноль на S ,

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \left\{ \mathbf{w} = \nabla\Psi \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \Psi = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \right\}$$

– подпространство потенциальных полей, у которых потенциалы обращаются в ноль на границе Γ .

Далее, для обеспечения конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы, введем пространство

$$L_{2,\Gamma} := \left\{ \zeta \in L_2(\Gamma) : \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0 \right\},$$

которое является подпространством $L_2(\Gamma)$, ортогональным единичной функции $1_{\Gamma} := 1|_{\Gamma}$.

Таким образом, далее в исследуемой проблеме искомые векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах. Искомыми являются поле скоростей $\mathbf{u}(t)$, поле давлений $p(t)$, а также вертикальное отклонение $\zeta(t)$ свободной поверхности от прямой Γ .

В силу постановки задачи поле скорости $\mathbf{u}(t)$ должно принадлежать при любом $t \geq 0$ подпространству $\mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$.

Введем согласно разложению (6) ортопроекторы $P_0, P_{h,S}, P_{0,\Gamma}$ пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на его подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega), \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$:

$$P_0 : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_0(\Omega), \quad P_{h,S} : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad P_{0,\Gamma} : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Будем разыскивать поле скоростей жидкости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\Phi, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \tag{7}$$

а градиент поля давлений в следующем виде:

$$\nabla p = \nabla\tilde{p} + \nabla\Psi, \quad \nabla\tilde{p} \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega), \quad \nabla\Psi \in \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{8}$$

Потенциал \tilde{p} , в силу (8) и динамического соотношения из (3), является решением задачи Зарембы для уравнения Лапласа:

$$\Delta \tilde{p} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \tilde{p} = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma).$$

Будем считать, что граница области Ω липшицева. Тогда известно (см. [8, стр. 45-46]), что такая задача имеет единственное слабое решение $\nabla \tilde{p} = \rho g Q \zeta \in \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$, если выполнено условие $\zeta \in H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, где $H^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого с дробным индексом (см. [1, стр. 71]).

Применим ортопроекторы $P_0, P_{h,S}, P_{0,\Gamma}$ к левой и правой частям уравнения движения жидкости (2). Получим три соотношения

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \ddot{x} P_0 \mathbf{e}_1^{(1)} \right) = \rho P_0 \mathbf{f}_ж, \quad (9)$$

$$\rho \left(\frac{d\nabla\Phi}{dt} + \ddot{x} P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \right) + \rho g Q \zeta = \rho P_{h,S} \mathbf{f}_ж, \quad (10)$$

$$\rho \ddot{x} P_{0,\Gamma} \mathbf{e}_1^{(1)} + \nabla \Psi = \rho P_{0,\Gamma} \mathbf{f}_ж. \quad (11)$$

Из соотношений (9) и (11) найдем вихревую составляющую поля скорости \mathbf{v} и часть динамического давления Ψ , если будет известно смещение x . Поэтому далее будем рассматривать только соотношение (10).

Спроектируем уравнение движения тела с жидкостью (1) на орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , получим следующие связи

$$m\ddot{x} + \rho \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 \right) d\Omega + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha \dot{x} = k_0^2 x_0 + k_1^2 x_1 + \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{e}_1, \quad (12)$$

$$\rho \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_2 \right) d\Omega = \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{e}_2 + N(t) - gm. \quad (13)$$

Связь (13) дает формулу для нахождения $N(t)$, если будет известно поле скоростей жидкости \mathbf{u} . Преобразуем интегральное слагаемое в (12). С учетом рассуждений, использованных при выводе соотношения (5), найдем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla x_1^{(1)} d\Omega = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\operatorname{div}(x_1^{(1)} \mathbf{v}) - x_1^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{v}) d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) теперь найдем, что

$$m\ddot{x} + \frac{d}{dt}P_\rho \nabla\Phi + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2x_0 + k_1^2x_1 + \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{e}_1.$$

Здесь оператор P_ρ определен по формуле

$$P_\rho \nabla\Phi := \rho \int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega, \quad P_\rho : \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (14)$$

Введем оператор следа γ_n на границе Γ следующим образом:

$$\gamma_n \nabla\Phi := \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_2^{(1)} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad \gamma_n : \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \rightarrow L_{2,\Gamma}.$$

Рассмотрим систему уравнений (10) и (2):

$$\begin{cases} \rho \frac{d}{dt} \nabla\Phi + \rho \ddot{x} P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} + \rho g Q \zeta = \rho P_{h,S} \mathbf{f}_ж, \\ m\ddot{x} + \frac{d}{dt} P_\rho \nabla\Phi + (k_0^2 + k_1^2)x + \alpha\dot{x} = k_0^2x_0 + k_1^2x_1 + \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{e}_1. \end{cases} \quad (15)$$

Систему (15) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \rho P_{h,S} \mathbf{f}_ж \\ \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2x_0 + k_1^2x_1 \end{pmatrix},$$

которое с учетом обозначений:

$$B_{12} := \begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(Q) \oplus \mathbb{C},$$

$$C_1 := \begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix}, \quad P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$f_1 := \begin{pmatrix} \rho P_{h,S} \mathbf{f}_ж \\ \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ k_0^2x_0 + k_1^2x_1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$z_1 := \begin{pmatrix} \nabla\Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad z_2 := \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix},$$

примет вид

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2. \quad (18)$$

Рассмотрим систему из двух очевидных связей

$$\begin{cases} \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \rho g \gamma_n \nabla \Phi, \\ (k_0^2 + k_1^2) \frac{dx}{dt} = (k_0^2 + k_1^2) \dot{x}. \end{cases} \quad (19)$$

Систему (19) запишем в виде дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \Phi \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое с учетом введенных выше обозначений и обозначений

$$C_2 := \begin{pmatrix} \rho g I & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix},$$

$$B_{21} := \begin{pmatrix} -\rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & -(k_0^2 + k_1^2) I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{21}) = \mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C},$$

примет вид

$$C_2 \frac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0. \quad (20)$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача о малых движениях тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил, приводится к дифференциально-операторным уравнениям (18), (20) с соответствующими начальными условиями. Итак, имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dz_1}{dt} + \alpha P_1 z_1 + B_{12} z_2 = f_1 + f_2, \\ C_2 \frac{dz_2}{dt} + B_{21} z_1 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$z_1(0) = (P_{h,S} \mathbf{u}^0; x^1)^\tau, \quad z_2(0) = (\zeta^0; x^0)^\tau, \quad (22)$$

где символом τ обозначена операция транспонирования.

Систему дифференциальных уравнений (21) и начальные условия (22) можно коротко записать в виде задачи Коши для дифференциального-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве \mathcal{H} :

$$\mathcal{C} \frac{dz}{dt} + (\alpha \mathcal{P} + i \mathcal{B}) z = f, \quad z(0) = (z_1(0), z_2(0))^\tau, \quad (23)$$

где

$$z := (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H} := (\mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}) \oplus (L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}), \quad f := (f_1 + f_2; 0)^\tau,$$

$$\mathcal{C} := \text{diag}(C_1, C_2), \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \text{diag}(P_1, 0). \quad (24)$$

Цель дальнейших исследований — теорема о разрешимости задачи Коши (23) на положительной полуоси и, соответственно, теорема о разрешимости для исходной начально-краевой задачи (1)-(4). Для этого изучим свойства матричных операторных коэффициентов в уравнении из (23).

3. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАДАЧИ

Напомним, что $H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, где $H^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого с дробным индексом. Обозначим через $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2} := (H_\Gamma^{1/2})^*$ сопряженное пространство (см. [1, стр. 76, теорема 5.1.12]). Как известно, (см. [1, глава 1, раздел 5.1])

$$H_\Gamma^{1/2} \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}. \quad (25)$$

Лемма 1. *Имеют место формулы*

$$Q \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S}(\Omega)), \quad \gamma_n \in \mathcal{L}(\mathbf{G}_{h,S}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}),$$

причем операторы Q и γ_n взаимно сопряжены и непрерывно обратимы.

Если оператор Q рассматривать как действующий из $L_{2,\Gamma}$ в $\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2}$, то он будет замкнутым неограниченным оператором. Сопряженным к нему оператором будет соответствующее сужение оператора γ_n .

Доказательство. Доказательство этой леммы см. [4, стр. 25, лемма 2]. □

Лемма 2. *Оператор \mathcal{B} является самосопряженным:*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^* := \begin{pmatrix} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}).$$

Доказательство. Покажем, что справедливо равенство $B_{12}^* = -B_{21}$. Для любых $x = (x_1, x_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}$, $y = (y_1, y_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21}) \subset \mathcal{H}_1 := \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} (B_{12}x, y)_{\mathcal{H}_1} &= \left(\begin{pmatrix} \rho g Q & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \rho g Q x_1 \\ (k_0^2 + k_1^2)x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = (\rho g Q x_1, y_1)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + ((k_0^2 + k_1^2)x_2, y_2)_{\mathbb{C}} = \\ &= (\rho g x_1, Q^* y_1)_{L_{2,\Gamma}} + ((k_0^2 + k_1^2)x_2, y_2)_{\mathbb{C}} = (x_1, \rho g \gamma_n y_1)_{L_{2,\Gamma}} + (x_2, (k_0^2 + k_1^2)y_2)_{\mathbb{C}} = \end{aligned}$$

$$= \left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \rho g \gamma_n & 0 \\ 0 & (k_0^2 + k_1^2)I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}_2} = (x, -B_{21}y)_{\mathcal{H}_2}. \quad (26)$$

Используя (26) покажем, что оператор B является самосопряженным. Для любых $u = (u_1, u_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, $v = (v_1, v_2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{H}} &= \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} = \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} -iB_{12}u_2 \\ -iB_{21}u_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} = (-iB_{12}u_2, v_1)_{\mathcal{H}_1} + (-iB_{21}u_1, v_2)_{\mathcal{H}_2} = \\ &= (u_2, (-iB_{12})^*v_1)_{\mathcal{H}_2} + (u_1, (-iB_{21})^*v_2)_{\mathcal{H}_1} = \\ &= (u_2, -iB_{21}v_1)_{\mathcal{H}_2} + (u_1, -iB_{12}v_2)_{\mathcal{H}_1} = \left(\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -iB_{12}v_2 \\ -iB_{21}v_1 \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} = \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & -iB_{12} \\ -iB_{21} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right) \right)_{\mathcal{H}} = (u, \mathcal{B}v)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

□

Лемма 3. Оператор \mathcal{P} ограничен и неотрицателен в \mathcal{H} .

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из определения оператора \mathcal{P} . □

Лемма 4. Операторная матрица \mathcal{C} является ограниченным положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Доказательство. Оператор \mathcal{C} введен в (24). Для доказательства положительной определенности оператора \mathcal{C} достаточно доказать положительную определенность операторов C_1 и C_2 .

Оператор C_2 , очевидно, ограничен и самосопряжен. Для любого $z_2 \in \mathcal{H}_2 := L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} (C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2} &= (\rho g I \zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} + ((k_0^2 + k_1^2)x, x)_{\mathbb{C}} = \\ &= \rho g \|\zeta\|_{L_{2,\Gamma}}^2 + (k_0^2 + k_1^2)\|x\|_{\mathbb{C}}^2 \geq \min\{\rho g, k_0^2 + k_1^2\} \|z_2\|_{\mathcal{H}_2}^2, \end{aligned}$$

откуда следует положительная определенность оператора C_2 .

Докажем свойство положительной определенности оператора C_1 . Предварительно покажем, что оператор C_1 является ограниченным и самосопряженным. Из определения оператора C_1 в (16) видно, что для ограниченности оператора достаточно

доказать, что оператор P_ρ ограничен. Действительно, для любого $\nabla\Phi \in \mathbf{G}_{h,S}$ имеем

$$\begin{aligned} \|P_\rho \nabla\Phi\|_{\mathbf{C}} &= |P_\rho \nabla\Phi| = \left| \rho \int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega \right| = |\rho(\nabla\Phi, \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}| \leq \\ &\leq \rho \|\nabla\Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} \cdot \|\mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = \rho\sqrt{\Omega} \|\nabla\Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор C_1 ограничен и $\mathcal{D}(C_1) = \mathcal{H}_1$. Для доказательства самосопряженности ограниченного оператора C_1 покажем, что он является симметричным. Для любых $z_1 = (z_{11}, z_{12})^\tau, y_1 = (y_{11}, y_{12})^\tau \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned} (C_1 z_1, y_1)_{\mathcal{H}_1} &= \left(\left(\begin{array}{cc} \rho I & \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{array} \right) \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \rho z_{11} + \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} z_{12} \\ P_\rho z_{11} + m z_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = (\rho z_{11} + \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} z_{12}, y_{11})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + \\ &\quad + (P_\rho z_{11} + m z_{12}, y_{12})_{\mathbf{C}} = (\rho z_{11}, y_{11})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (\rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} z_{12}, y_{11})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + \\ &\quad + (P_\rho z_{11}, y_{12})_{\mathbf{C}} + (m z_{12}, y_{12})_{\mathbf{C}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Преобразуем второе слагаемое правой части (27), получим:

$$\begin{aligned} (\rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} z_{12}, y_{11})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} &= (\rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \dot{x}, \nabla\tilde{\Phi})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = (\rho \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}, P_{h,S} \nabla\tilde{\Phi})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = \\ &= \dot{x} \rho (\mathbf{e}_1^{(1)}, \nabla\tilde{\Phi})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = \dot{x} \overline{(\nabla\tilde{\Phi}, \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}} = \overline{\dot{x} P_\rho \nabla\tilde{\Phi}} = (\dot{x}, P_\rho \nabla\tilde{\Phi})_{\mathbf{C}} = (z_{12}, P_\rho y_{11})_{\mathbf{C}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Преобразуем третье слагаемое правой части (27), получим:

$$\begin{aligned} (P_\rho z_{11}, y_{12})_{\mathbf{C}} &= (P_\rho \nabla\Phi, \tilde{x})_{\mathbf{C}} = \left(\rho \int_{\Omega} \nabla\Phi \cdot \mathbf{e}_1^{(1)} d\Omega \right) \cdot \tilde{x} = (\nabla\Phi, \rho \tilde{x} \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = \\ &= (P_{h,S} \nabla\Phi, \rho \tilde{x} \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} = (z_{11}, \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} y_{12})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{29}$$

С учетом (28) и (29) соотношение (27) примет вид:

$$\begin{aligned} (C_1 z_1, y_1)_{\mathcal{H}_1} &= (z_{11}, \rho y_{11})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (z_{11}, \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} y_{12})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (z_{12}, P_\rho y_{11})_{\mathbf{C}} + \\ &\quad + (z_{12}, m y_{12})_{\mathbf{C}} = \left(\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho y_{11} + \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} y_{12} \\ P_\rho y_{11} + m y_{12} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho I & \rho P_{h,S} \mathbf{e}_1^{(1)} \\ P_\rho & mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}_1} = (z_1, C_1 y_1)_{\mathcal{H}_1}, \end{aligned}$$

что доказывает свойство самосопряженности оператора C_1 .

Докажем теперь, что оператор C_1 является положительно определенным. Для любого $z_1 \in \mathcal{H}_1$ вычислим

$$\begin{aligned}
 (C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= (\rho \nabla \Phi, \nabla \Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (\dot{x}, P_\rho \nabla \Phi)_{\mathbb{C}} + (\nabla \Phi, \rho \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (m \dot{x}, \dot{x})_{\mathbb{C}} = \\
 &= (\rho \nabla \Phi, \nabla \Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + \rho (\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}, \nabla \Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (\nabla \Phi, \rho \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (m \dot{x}, \dot{x})_{\mathbb{C}} = \\
 &= \rho \|\nabla \Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 + \rho (\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}, \nabla \Phi)_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + (\nabla \Phi, \rho \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)})_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)} + m \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2 = \\
 &= \rho \|\nabla \Phi + \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 - \rho \|\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 + m \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2 = \\
 &= \rho \|\nabla \Phi + \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 + (m - \rho |\Omega|) \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Оценим правую часть (30), воспользовавшись неравенством Коши, верным для любых x, y из нормированного пространства и $\varepsilon > 0$

$$\|x + y\|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|x\|^2 + (1 + \varepsilon) \|y\|^2. \quad (31)$$

С использованием (31) найдем, что

$$\begin{aligned}
 \|\nabla \Phi\|^2 &\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\nabla \Phi + \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|^2 + (1 + \varepsilon) \|\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|^2, \\
 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\nabla \Phi + \dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|^2 &\geq \|\nabla \Phi\|^2 - (1 + \varepsilon) \|\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|^2. \quad (32)
 \end{aligned}$$

С учетом неравенства (32) оценим полученное в (30) выражение:

$$\begin{aligned}
 (C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &\geq \\
 &\geq \frac{\rho \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left[\|\nabla \Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}}^2 - (1 + \varepsilon) \|\dot{x} \mathbf{e}_1^{(1)}\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 \right] + \left(\frac{m}{|\Omega|} - \rho \right) |\Omega| \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2 = \\
 &= \frac{\rho \varepsilon}{1 + \varepsilon} \|\nabla \Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}(\Omega)}^2 + (m - \rho |\Omega| - \rho |\Omega| \varepsilon) \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2 = \\
 &= \frac{\rho \varepsilon}{1 + \varepsilon} \|\nabla \Phi\|_{\mathbf{G}_{h,S}}^2 + (m_{\text{T}} - m_{\text{ж}} \varepsilon) \|\dot{x}\|_{\mathbb{C}}^2 \geq \\
 &\geq \min \left\{ \frac{\rho \varepsilon}{1 + \varepsilon}, m_{\text{T}} - m_{\text{ж}} \varepsilon \right\} \|z_1\|_{\mathcal{H}_1}^2. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Отсюда, выбрав $\varepsilon < m_{\text{T}}/m_{\text{ж}}$, следует положительная определенность оператора C_1 . Таким образом, оператор \mathcal{C} положительно определен. \square

4. ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Опираясь на установленные факты, докажем теорему о разрешимости задачи Коши (23), к которой была приведена исходная начально-краевая задача (1)-(4).

Определение 1. *Сильным решением* начально-краевой задачи (1)-(4) назовем такое поле $\mathbf{u}(t)$ и функции $p(t)$, $\zeta(t)$, для которых функция $z(t) = (\nabla\Phi; \dot{x}; \zeta; x)^T$ является решением задачи Коши (23).

Будем говорить, что задача Коши (23) имеет решение $z(t)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, если все слагаемые в уравнении из (23) являются непрерывными функциями t со значениями в \mathcal{H} , выполнено уравнение из (23) при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие $z(0) = z^0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad f \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}). \tag{34}$$

Тогда задача (23) имеет единственное решение.

Доказательство. Оператор \mathcal{C} в (23) ограничен и положительно определен, и поэтому имеет ограниченный положительно определенный обратный оператор \mathcal{C}^{-1} . Отсюда следует, что задача (23) равносильна задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{C}^{-1}(\alpha\mathcal{P} + i\mathcal{B})z + \mathcal{C}^{-1}f, \quad z(0) = (z_1(0), z_2(0))^T. \tag{35}$$

Покажем, что оператор уравнения (35) является генератором сильно непрерывной полугруппы (см. [11, стр. 50]). Для этого введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ со скалярным произведением

$$(z, y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} := (\mathcal{C}z, y)_{\mathcal{H}}, \quad z, y \in \mathcal{H},$$

и нормой, эквивалентной норме пространства \mathcal{H} . В новом скалярном произведении оператор $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}$ определен на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{H}$$

и обладает свойством самосопряженности. Действительно, для любых z и y из $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}z, y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}} &= (\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}z, y)_{\mathcal{H}} = (z, \mathcal{B}y)_{\mathcal{H}} = \\ &= (\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}z, \mathcal{B}y)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{C}z, \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}y)_{\mathcal{H}} = (z, \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}y)_{\mathcal{H}_{\mathcal{C}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $-i\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}$ является кососамосопряженным и, в частности, замкнутым максимальным диссипативным оператором (см. [11, стр. 107, определение 4.1]). Оператор $-\mathcal{C}^{-1}\alpha\mathcal{P}$ является ограниченным неотрицательным оператором оператором, действующим в $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$. Отсюда следует, что оператор $-\mathcal{C}^{-1}\alpha\mathcal{P} - \mathcal{C}^{-1}i\mathcal{B}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$.

Если выполнены условия (34), то $z(0) \in \mathcal{D}(-\mathcal{C}^{-1}\alpha\mathcal{P} - \mathcal{C}^{-1}i\mathcal{B})$, $\mathcal{C}^{-1}f \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\mathcal{C}})$. Отсюда и из проведенных рассуждений следует (см., например, [2, стр. 127, теорема 1.3]), что задача (23) имеет единственное решение. \square

Опираясь на теорему 2, получим утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (1)-(4) на полуоси \mathbb{R}_+ .

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$P_{h,s}\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(\gamma_n), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(Q) = H_{\Gamma}^{1/2}, \quad (36)$$

$$\mathbf{f}_m \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)), \quad \mathbf{f}_{жс} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega)). \quad (37)$$

Тогда задача (1)-(4) имеет единственное сильное решение.

Доказательство. Если выполнены условия (36)-(37), то в задаче Коши (23) выполнены условия:

$$\begin{aligned} z(0) &= ((P_{h,s}\mathbf{u}_0; x^1)^{\tau}; (\zeta^0; x^0)^{\tau})^{\tau} \in (\mathcal{D}(\gamma_n) \oplus \mathbb{C}) \oplus (H_{\Gamma}^{1/2} \oplus \mathbb{C}) = \\ &= \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}), \end{aligned}$$

$$f = ((\rho P_{h,s}\mathbf{f}_{жс}; \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{e}_1)^{\tau}; (0; 0)^{\tau})^{\tau} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

По теореме 2 задача Коши (23) имеет единственное решение на полуоси \mathbb{R}_+ . Это означает, согласно определению 1, что исходная задача (1)-(4) имеет единственное сильное решение на положительной полуоси. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача о малых движениях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил. Приведена математическая постановка начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы. Далее сформулирован закон баланса полной энергии гидросистемы для классического решения задачи, что дало возможность осуществить выбор гильбертова пространства и его подпространств, в которых естественно исследовать задачу. Затем к уравнению движения жидкости применен метод ортогонального проектирования на выбранные подпространства. Исходная начально-краевая задача сформулирована в векторно-матричной форме в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Изучены свойства возникших операторных матриц, являющихся коэффициентами уравнения. Доказаны теоремы о существовании единственного решения возникшего операторного уравнения и исследуемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович, М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. — М.: МЦНМО, 2013. — 379 с.
AGRANOVICH, M. S. (2013) *Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*. М: MCCME.
2. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — К.: Выща школа, 1989. — 348 с.
GOLDSTEIN, J. (1989) *Semigroups of linear operators and their applications*. К: Vyshcha shkola.
3. Жуковский, Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной каплеобразной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Избранные сочинения. — 1948. — Т. 1. — С. 31-52.
ZHUKOVSKIY, N. E. (1948) On motion of solid body with cavities filled with homogeneous drip fluid. *Selected Works*. 1. p. 31-52.
4. Копачевский, Н. Д. О малых движениях гидросистемы "вязкоупругая жидкость-баротропный газ" / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2018. — № 4. — С. 7-46.
KOPACHEVSKY, N. D. (2018) On small movements of a system "fluid – gas" in a bounded region. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4. p. 7-46.
5. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина и ее приложения / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016. — 280 с.
KOPACHEVSKY, N. D. (2016) *Abstract Green's formula and its applications*. Simferopol: ООО «FORM».
6. Копачевский, Н. Д., Семкина, Е. В., Фордук, К. В., О колебаниях тела, частично заполненного жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства / Н. Д. Копачевский, Е. В. Семкина, К. В. Фордук // Математика, информатика, компьютерные науки, математическое моделирование, образование (МИКМО). — 2019. — № 1. — С. 35-39.
KOPACHEVSKY, N. D. & SYOMKINA, E. V. & FORDUK K. V. (2019) On oscillations of a body partially filled with fluid under the action of an elastic damping device. *Mathematics Informatics Computer Science Modeling education*. 1. p. 35-39.

7. Копачевский, Н. Д., Плохая, Е. В., Фордук, К. В., Малые движения и нормальные колебания тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства / Н. Д. Копачевский, Е. В. Плохая, К. В. Фордук // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. — 2019. — № 1. — С. 176–178.
KOPACHEVSKY, N. D. & PLOKHAYA, E. V. & FORDUK K. V. (2019) On small movements and normal oscillations of a body partially filled with fluid under the action of an elastic damping device. *Spectral and Evolutional Problems: Proc. of 30th Crimean Autumn Math. School-Symf.* 1. p. 176–178.
8. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
KOPACHEVSKY, N. D. & KREIN, S. G. & KAN NGO ZUI (1989) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*. Moscow: Nauka.
9. Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics: Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid (Operator Theory: Advances and Applications) / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel; Boston; Berlin: Birkhiiuser, 2001. — 406 с.
10. Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids (Operator Theory: Advances and Applications) / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel; Boston; Berlin: Birkhiiuser, 2001. — 444 с.
11. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
KREIN, S. G. (1967) *Linear Differential Equations in Banach Space*. Moscow: Nauka.
12. Крейн, С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью / С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев // Прикл. мат. мех. — 1957. — № 2. — С. 169–174.
KREIN, S. G., MOISEEV, N. N. (1957) On oscillations of solid body containing fluid with free boundary. *Appl. Math. Mech.* № 2. p. 169–174.
13. Моисеев, Н. Н., Румянцев, В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. — М.:Наука, 1965. — 440 с.
MOISEEV, N. N. & RUMYANTSEV, V. V. (1965) *Dynamics of bodies with cavities containing a liquid*. Moscow: Nauka.

Zhukovskiy V. I., Samsonov S. P., Romanova V. E. The stability of coalitional structure in differential linear-quadratic game of four persons / V. I. Zhukovskiy, S. P. Samsonov, V. E. Romanova // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 15–18.

УДК: 519.977

В работе выявлены коэффициентные критерии устойчивости коалиционной структуры в дифференциальной линейно-квадратичной позиционной игре четырех лиц. Следуя принятому в статье подходу, можно получать коэффициентные критерии устойчивости как в играх с большим числом участников, так и для других коалиционных структур.

Ключевые слова: коалиционные игры, угрозы и контругрозы, максимальность по Парето, устойчивость коалиционной структуры.

Габриелян О. А., Габриелян Т. О., Гаспарян М. В., Гаспарян Л. С. Интернет-мем в виртуальных коммуникациях: методология создания интеллектуализированной системы мониторинга / О. А. Габриелян, Т. О. Габриелян, М. В. Гаспарян, Л. С. Гаспарян // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 19–36.

УДК: 30.51-7+004.8

Современное состояние развития ИТ позволяет нам говорить о формировании нового типа общества не только информационного, но и цифрового. Центральную роль в его становлении сыграли виртуальные коммуникации. Сеть этих коммуникаций создает новое пространство бытия – виртуальное. Говоря о виртуальном пространстве, мы, в первую очередь, имеем в виду Интернет. Одним из важных феноменов, воплощающим особенности информационных, виртуальных процессов XXI-го века, являются интернет-мемы. В статье подробно излагается как методология, так и методика исследования влияния интернет-мемов на пользователей Интернета. При этом возникают проблемы-задачи, которые потребовали своего разрешения: выявлены сущностные характеристики интернет-мема с возможностью их формализации; описан механизм и параметры распространения интернет-мема в социальных сетях; описан механизм мониторинга воздействия интернет-мема на коммуникацию в социальных сетях в Интернете, основанный на формализованных критериях и программном продукте; отмеченные механизмы конструируются как самообучающиеся

нейронные сети (программный продукт) с минимальным участием экспертов, калибрующих их работу в основном на начальном этапе. В качестве объекта исследования рассматриваются выявленные посредством поисковых систем большие массивы слабоструктурированных данных — интернет-мемов.

Ключевые слова: интернет-мем, коммуникация, методология, виртуальная социальная сеть.

Германчук М. С., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А. Программные инструменты и технологии анализа потока интернет-мемов / М. С. Германчук, М. Г. Козлова, В. А. Лукьяненко // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 37 – 58.

УДК: 004.89

Меметика социальных сетей является востребованным разделом научных исследований. Рассматривается проблематика распространения мемов, математическое моделирование процессов распространения, инструментарий социально-политических исследований. Показано, что жизненный цикл потока интернет-мемов и отдельного мема имеет свою специфику и экологию. Задача идентификации реального этапа жизненного цикла (ЖЦ) существенно труднее, чем для экономического ЖЦ предприятия. В общем случае задача является некорректной, зависимой от наличия данных о выделенном потоке мемов в сети. Мониторинг сети для идентификации ЖЦ мема связан с системой запросов, технологией автоматического формирования баз данных (знаний) и последующим использованием ее в прогнозировании на основе вывода по аналогии с использованием нейросетевых подходов. Рассмотрен начальный этап проекта исследований ЖЦ потока интернет-мемов.

Ключевые слова: интернет-мем; анализ, моделирование, идентификация, прогнозирование и управление потоком интернет-мемов; технологии социально-политического использования мемов.

Гуров С. И. Мажоритарная алгебра для синтеза комбинационно-логических схем. Обзор. Часть II / С. И. Гуров // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 59 – 76.

УДК: 519.714.22, 510.649

Статья содержит обзор результатов по применению мажоритарной логики комбинационно-логических схем. В первой части рассмотрены теоретические основы вопросы мажоритарной алгебры (большинства) и некоторые алгоритмы решения

практических задач синтеза схем. В данной второй части описываются алгоритмы на базе мажорирующих-инвертирующих графах MIG и примитивных мажорирующих функций MPC.

Ключевые слова: мажоритарная логика, булева алгебра, аксиоматизация, примитивные функции, логический синтез.

Починка О. В., Зинина С. Х. Динамика регулярных топологических потоков / О. В. Починка, С. Х. Зинина // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 77–91.

УДК: 517.938.5, 523.947

В настоящей работе рассматриваются регулярные топологические потоки на замкнутых n -многообразиях. Такие потоки имеют гиперболическое (в топологическом смысле) цепно рекуррентное множество, состоящее из конечного числа орбит. В настоящей работе изучается динамика регулярных топологических потоков, исследуется топология вложения и асимптотическое поведение инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит.

Ключевые слова: многообразие, топологический поток, регулярный топологический поток, гиперболическое множество, цепно-рекуррентное-множество.

Фордук К. В. Задача о колебании тела, частично заполненного идеальной жидкостью, под действием упругих и демпфирующих сил / К. В. Фордук // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 3 (48). — С. 92–108.

УДК: 517.958

В работе исследуется задача о малых движениях тела, частично заполненного идеальной однородной жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства. Начально-краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве. Исследованы свойства полученных операторных матриц, являющихся коэффициентами уравнения. Доказаны теоремы о сильной разрешимости задачи Коши и начально-краевой задачи.

Ключевые слова: идеальная жидкость, упругие и демпфирующие силы, сильное решение, Задача Коши.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Габриелян Олег
Аршавирович*

д. фил. н., профессор, декан философского факультета
Крымского федерального университета им. В. И. Вер-
надского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: gabroleg@mail.ru

*Габриелян Тигран
Олегович*

к. искусств., доцент кафедры книжной графики и ди-
зайна печатной продукции Крымского федерального
университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь,
Российская Федерация
e-mail: tigrangabr84@gmail.com

*Гаспарян Людмила
Сергеевна*

к. полит.н, доцент кафедры философии, культурологии
и гуманитарных дисциплин Крымского университета
культуры, искусств и туризма, г. Симферополь, Россий-
ская Федерация
e-mail: llukashevich@mail.ru

*Гаспарян Михаил
Владимирович*

к. полит. н., доцент кафедры политических наук и меж-
дународных отношений Крымского федерального уни-
верситета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Рос-
сийская Федерация
e-mail: mgasp@mail.ru

*Германчук Мария
Сергеевна*

ассистент кафедры информатики факультета матема-
тики и информатики Таврической академии (структур-
ное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вер-
надского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: m.german4uk@yandex.ru

*Гуров Сергей
Исаевич*

к. ф.-м. н, доцент кафедры Математических методов
прогнозирования факультета Вычислительной матема-
тики и кибернетики Московского государственного уни-
верситета имени М. В. Ломоносова, Российская Федера-
ция
e-mail: sgur@cs.msu.su

-
- Жуковский Владислав
Иосифович** д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru
- Зинина Светлана
Халиловна** аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского университета «Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарёва», г. Саранск, Российская Федерация
e-mail: kapkaevasvetlana@yandex.ru
- Козлова Маргарита
Геннадьевна** к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГА-ОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: art-inf@mail.ru
- Лукьяненко Владимир
Андреевич** к. ф.-м. н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: art-inf@yandex.ru
- Починка Ольга
Витальевна** д. ф.-м. н, доцент кафедры фундаментальной математики факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Российская Федерация
e-mail: olga-pochinka@yandex.ru

**Романова Виолетта
Эдуардовна**

обучающаяся III курса бакалавриата кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: vilca2001@mail.ru

**Самсонов Сергей
Петрович**

к. ф.-м. н, доцент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: samsonov@cs.msu.ru

**Фордук Карина
Викторовна**

аспирантка кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: forduk_kv@mail.ru

Подписано к печати 30.11.2020. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7