

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 2 (47) ' 2020

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2020, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
С. В. АБЛАМЕЙКО	академик НАН Беларуси, профессор, доктор технических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТАНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук
В. И. ЧИЛИН	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

к. ф.-м. н., доцент А. С. АНАФИЕВ	— ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент В. И. ВОЙТИЦКИЙ	— ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент В. Ф. БЛЫЩИК	— редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент М. Г. КОЗЛОВА	— ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Sergey ABLAMEYKO	Full member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, Doctor of Engineering Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoly GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valery CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir CHILIN	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation
Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Kozlova M. G., Germanchuk M. S. Building a transport network model using satellite images	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. To the problem of coalitional equilibrium in mixed strategies	19
Гуров С. И. Мажоритарная алгебра для синтеза комбинационно-логических схем. Обзор	39
Никитин Ю. И., Сахаров А. Н. Специальные тригонометрические ряды в задаче о периодических решениях	61
Третьяков Д. В. Изоморфизм J -самосопряженных дилатаций общего вида линейного оператора с непустым множеством регулярных точек	76
Якубова А. Р. О свойствах решений некоторых смешанных спектральных задач	88
Рефераты	111
Список авторов номера	114

TABLE OF CONTENTS

Kozlova M. G., Germanchuk M. S. Building a transport network model using satellite images	7
Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. To the problem of coalitional equilibrium in mixed strategies	19
Gurov S. I. Majority algebra for the synthesis of combinational logic schemes. Review	39
Nikitin U. I., Sakharov A. N. Special Trigonometric series in the problem of periodic solutions	61
Tretyakov D. V. On isomorphism of common type J-selfadjoint dilations for linear operator with nonempty regular points set	76
Yakubova A. R. About properties of solutions of some mixed spectral problems	88
Abstracts	111
Authors	114

УДК: 519.173+004.942

MSC2010: 68-04

DOI: <https://doi.org/10.37279/1729-3901-2020-19-2-7-18>

BUILDING A TRANSPORT NETWORK MODEL USING SATELLITE IMAGES

© M. G. Kozlova, M. S. Germanchuk

TAURIDA ACADEMY BY THE V.I. VERNADSKY CRIMEA FEDERAL UNIVERSITY
VERNADSKY AV., 4, SIMFEROPOL, 295007, RUSSIA E-MAIL: art-inf@mail.ru

BUILDING A TRANSPORT NETWORK MODEL USING SATELLITE IMAGES.

Kozlova M. G., Germanchuk M. S.

Abstract.

A method of constructing a transport network using a satellite image and a set of paths as input data is considered. Software has been developed for building a transport network model based on the specified input data. Examples of the program's operation on various sections of transport networks are considered. The advantages and disadvantages of the developed method are described.

Keywords: *transport network, image binarization, GPX-track.*

INTRODUCTION

Following the evolution of geographic information systems, building models for street and road networks is presently in high demand. Street and road networks models allow to find the shortest routes between two waypoints (both in time and distance), to estimate traffic congestion for different street and road networks sections, traffic intensity and some other characteristics.

The goal of the present work is to apply existing methods of road network model construction for elaborating an algorithm of automatic construction of a multi-level road network model. The input data will be a high-resolution satellite image representing required street and road networks sections and a set of coordinates provided by Global Positioning System trackers belonging to the vehicles located within a certain street and road networks section.

The model is defined here as an undirected connected graph. Each vertex of the graph is described by a pair of geographical coordinates. The vertices (edges) of the graph may contain some additional information (e.g., the width of the road within the section, the number of lanes, the road surface condition, etc.). To build such a graph, a satellite color image of the street and road networks is reduced to a binary form. In the process of binarization, only the carriageway (topological object) is built, while such road elements

as sidewalks, curbs, fences, etc. (non-topological objects) are ignored. It is to note that the evolution of Global Positioning System technologies made it possible to build street and road networks models based on GPX-tracks. It is possible to build an averaged model representing a real street and road networks quite well based on a large enough number of geographic coordinate ordered sets. This method is implemented when simulating racing tracks in video games or when making a description of a road in a difficult-to-see area with large street and road networks sections hidden by other objects, such as rocks in a mountainous area, trees in a forest or tunnels/overpasses in a city.

Based on the given premises, the authors proposed an approach combining an image recognition method and a GPX path application method to construct SRN models. For the input data a binary image is used with the points corresponding to the SRN highlighted in black and a set of GPX-tracks intersecting the described area.

1. SURVEY OF METHODS FOR STREET AND ROAD NETWORKS BUILDING

Following the development of techniques for obtaining accurate images and precise positioning of objects on the earth's surface, it became possible to recreate an accurate map of the earth's surface, which can nowadays be freely accessed using such service systems as Yandex: Maps and Google: Maps. Due to a large increase in number of vehicles, building correct models of street and road networks (SRN) has become quite an urgent task. These models can be used to help analyzing actual traffic conditions, predicting possible complications or advantages for specific types of SRN structural elements, as well as to help optimizing traffic itself.

Road model building based on satellite images is quite complicated because of various types of noise present in the image. This is primarily due to the fact that different road parts may be not visible, hidden in a tunnel, pass under an overpass, or have several levels. In [1], a specific method for image processing was proposed, which has many heuristic parameters to be configured in accordance with the terrain road characteristics which can be distinguished in satellite images.

In [2], the authors described a model of the SRN section in Naberezhnye Chelny. They set the following tasks to achieve: to assess the adopted planning decisions when constructing the SRN by its loading parameters, the speed of vehicles in the SRN, availability and number of traffic accidents; identify SRN sections and elements that require changes; calculate required carrying capacity for the SRN parts which already exist and are under construction. This work implemented a simulation model to define the SRN model characteristics.

In [3], the case of micro-modeling of SRN nodes was provided (micro-modeling means modeling SRN structural sections, such as road rings, intersections or straight road sections, separately from the entire SRN system), which allows to study and optimize specific road sections for getting them into the SRN system in an optimized form. On the example of an intersection of a three-lane road and a four-lane road, the author proved the importance and necessity for such an approach to the construction.

In [4], it is shown an example of constructing a SRN model for modeling emergency situations on a road section: accident, fog, fallen tree or road repairing work. The effects of various conditions on the SRN and traffic flow are analyzed.

In [5], the authors proposed a neural network approach to constructing a model for identifying roads in satellite images. The model is based on a multilayer perceptron, one of the most preferable architectures for artificial neural networks when applied to classification and prognostication problems. The RGB color model is used to find out whether pixels belong to a certain road or not.

In [6, 7], it is proposed an approach to constructing SRN models of vector maps based on a polygonal figure skeleton. This approach allows finding intersection patterns on a map, classifying intersections by configuration, providing SRNs in a form serving as a basis for simulations in traffic geographic information systems.

Of notice is that to date there can be distinguished three methods (and their combination) of constructing SRN models as applicable to the problems and studies proposed by the authors of the articles mentioned above. Those methods comprise: manual, based on using specialized software; construction based on object recognition in the image; construction based on generalization of a set of GPX tracks. A GPX file comprises a set of GPS data (key positions, paths, etc.) stored in an xml file. A GPX track will be called a GPX file that stores an ordered set of geographic coordinates corresponding to the path of a certain object on the earth surface.

It is important that due to the evolution of GPS technologies it became possible to construct SRN models based on GPX tracks. On the base of a great number of ordered sets of geographic coordinates, the algorithm builds an averaged model describing an actual SRN with good precision. This method is mostly used in modeling racing tracks in video games or when making a road description in a difficult-to-see area with large SRN sections being hidden by other objects, such as rocks in a mountainous area, trees in a forest or tunnels/overpasses in a city. However, building a relevant model in such a manner requires sufficient data encompassing all the variety of possible traffic trajectories for a corresponding SRN section. This means that a person with a receiver is to move in all possible directions within an SRN which is a highly time-consuming process. To

collect tracks, such companies as Google and Yandex use geolocation sensors installed into mobile phones and navigators. This allows to accumulate necessary amount of data which are far less accurate than in professional systems.

Let us consider a construction method which is a combination of methods based on road recognition in a satellite image and construction of a model by a set of tracks. This approach allows to verify and complement models based on image recognition while using a significantly smaller number of tracks.

2. DESIGN OF A SYSTEM FOR BUILDING AN SRN MODEL

To build an SRN model, we designed an algorithm combining the methods based on image recognition and using GPX tracks. The input data is a binary image containing SRN associated waypoints highlighted in black and a set of GPX tracks belonging to a relevant territory. The stage of a traffic network image recognition consisted of preprocessing the input image and a procedure of its skeletonization.

To create a software application, we used Java programming language as its libraries are convenient for data visualization with an image processing system integrated into it. The JavaMonkeyEngine graphics engine was used for interactive visualization. The system input data is organized into a file with a *.dat* extension that has the following structure:

```
test-bit.png //String with a relative address of a binary image file.
44.988401 34.079755 // Geographic coordinates corresponding to the image
upper left pixel
90.0 // Azimuth corresponding to the image horizontal axis.
373 335 // Width and height of the image, in meters.
//There is 0 or more relative links for GPX tracks to the end of the file
test-bit-track1.gpx
test-bit-track2.gpx
...
```

Following the skeletonization of the binary image (based on the Zong-Sun algorithm [8]), a graph that corresponds to the SRN model is built. Its main idea can be represented in the following form:

```
cl = 0
ct = 0
cycle i from 0 to ImageWidth - 1
cycle j from 0 to ImageWidth - 1
  if point belongs to skeleton then
    cl = 0
    ct = 0
```

```

if point has coordinates  $(i-1, j) \in V$  then
  add to E edge  $\{(i, j), (i-1, j)\}$ 
   $cl = ct = 1$ ;
if point has coordinates  $(i, j-1) \in V$  then
  add to E edge  $\{(i, j), (i, j-1)\}$ 
   $ct = 1$ ;
if point has coordinates  $(i, j+1) \in V$  then
  add to E edge  $\{(i, j), (i, j+1)\}$ 
   $cl = 1$ ;
if  $ct = 0$  point has coordinates  $(i-1, j-1) \in V$  then
  add to E edge  $\{(i, j), (i-1, j-1)\}$ 
if  $cl = 0$  point has coordinates  $(i-1, j+1) \in V$  then
  add to E edge  $\{(i, j), (i-1, j+1)\}$ 

```

However, the resulting graph looks cumbersome. To optimize it, it is necessary to select all sequences of edges having the minimal deviations from the correlation line. Besides, it is necessary to combine such adjacent vertices that have more than two edges adjacent to each of them, with the vertices being at distances corresponding to the SRN width from each other. Hence, the following sequence is executed:

- 1) optimization of skeleton's edges;
- 2) primary optimization of connection points for segments;
- 3) secondary optimization of connection points for segments.

Determining a sequence of edges is done by sequentially supplementing the list with edges incident to the extreme edges of the sequence. Optimized edges are marked. It is not possible to optimize a sequence of edges if one of the interior points of the sequence has a degree greater than 2.

After optimizing the edges, the connection points for the edges are also optimized. This process is executed in two passes.

The algorithm for primary optimization of points connecting edges consists of the following steps:

- 1°. As far as there are unmarked vertices with degree 3, perform 2° – 6°.
- 2°. Select the next vertex.
- 3°. Identify a pair of edges $BxCx$, $ByCy$ whose lines have an angle of $180 \pm N$ degrees (N is predefined in advance).
- 4°. If there is no such pair of edges, then move the vertex to the center of the triangle formed by lines $B1C1$, $B2C2$, $B3C3$. Otherwise, optimize the vertex by placing it at the intersection of lines $CxCy$ and $AC2$.

5°. Remove vertices B_1, B_2, B_3 from the graph by connecting vertices C_1, C_2, C_3 with vertex A .

6°. Mark the optimized vertex.

The algorithm for secondary optimization of points connecting edges consists of the following steps:

1°. As far as there are unmarked vertices with degree from 3 to 5, perform 2° – 7°.

2°. Select the next vertex.

3°. For the edges incident to a given vertex A , identify a pair of edges AB, AC so that they had an angle of $180 \pm N$ degrees (N is predefined in advance).

4°. If there is no such pair of edges, then the vertex does not need optimization; mark it and go to 2°.

5°. If the degree of the vertex is 3, then optimize the vertex by placing it at the intersection point of lines BC и AD .

6°. If the degree of the vertex is 4, then place the vertex in the middle of segment FG , where point F is obtained by intersecting lines BC and AD , and point G is got by intersecting lines BC and AE .

7°. Mark the optimized vertex.

As a result, an optimized SRN graph will be obtained. The resulting graph is a single-level road network model. However, this model will be incorrect in the case of a multi-level SRN because the algorithm cannot recognize hidden sections of the road, and the resulting model will have gaps in it.

To extend the model to multi-level cases, the following **algorithm** is proposed:

1°. Delete all vertices that are less than at a certain threshold distance from the dead-end vertex (the distance is defined as the length of the path by the edges of the graph).

2°. In the resulting graph, connect each dead-end vertex with a weighted edge having 0 weight to the remaining dead-end vertices.

The resulting graph is a model for all possible cases of the SRN behavior in a given section. The edge weight represents the numerical value of “confidence” that the edge belongs to the correct model.

To confirm or to deny the presence of additional weighted edges in the correct graph model, the method of drawing GPX tracks on a model overflowed with edges was used. A GPX file is a set of GPS data (key positions, paths, etc.) stored in an xml file.

We call a GPX file a GPX track if it contains the path of an object on the earth’s surface stored in the form of an ordered set of geographical coordinates. In our application, such a structure is implemented by using the class *Track*, which allows not only to store and use tracks

as ordered sets of coordinates, but also to convert them to graph structures or calculate image points corresponding to track points. The precision of converting waypoints into image point depends on the ratio of the image-covered surface area to the image resolution.

To implement geographic coordinates, we created *GeoMath* class that describes the following functions and procedures:

- conversion of geographic coordinates, recorded in different formats, from a string to a vector;
- conversion of geolocation vectors to a pair of geographic coordinates in text format;
- calculation of a distance between two geographical points;
- calculation of the azimuth for the start and end of movement from one point to another, and intermediate points for the shortest path between two points;
- calculation of the arrival point, when departing from a specified geographical point in a specified direction at a specified distance;
- detection of an intersection for two paths defined by two points or by a point, direction, and distance.

To calculate distance between two points on the earth surface, the following algorithms can be implemented [10, 11].

Fast algorithm:

```
given geographic coordinates p1 and p2
df = p2.latitude - p1.latitude
dl = p2.longitude - p1.longitude
a = sin(df/2)2 + cos(p1.latitude) · cos(p2.latitude) · sin(dl/2)2
c = 2 · atan2(sqrt(a), sqrt(1 - a))
return EARTH_RAD_METERS · c
```

Slow but more accurate algorithm:

```
given geographic coordinates p1 and p2
dl = p2.longitude - p1.longitude
c = acos(sin(p1.latitude) · sin(p2.latitude) + cos(p1.latitude) · cos(p2.latitude) · cos(dl))
return EARTH_RAD_METERS · c
```

In the software, we implemented the fast algorithm as its accuracy is sufficient for work based on the available resolution of satellite images, which can presently be downloaded from open sources.

To move between points, it is necessary to calculate the movement direction. Azimuth parameters (measured in degrees) are used to define direction. To calculate it when moving to a specified point on the surface, we used the following algorithm:

```
given geographic coordinates p1 and p2
```

```

dl = p2.longitude - p1.longitude
y = sin(dl) · cos(p2.latitude)
x = cos(p1.latitude) · sin(p2.latitude) - sin(p1.latitude) · cos(p2.latitude) · cos(dl)
return atan2(y, x), converted to a range from 0 to 360

```

To calculate azimuths for intermediate points, we designed the following algorithm:

given geographic coordinates $p1$, $p2$ and f value in the range between $[0,1]$,
 where 0 - movement starting point, a 1 - end point

$angDist$ = distance between points $p1$ and $p2$ divided by
 $EARTH_RAD_METERS$

```

a = (sin((1-f) · angDist))/(sin(angDist))
b = (sin(f · angDist))/(sin(angDist))
x = a · cos(p1.latitude) · cos(p1.longitude) + b · cos(p2.latitude) · cos(p2.longitude)
y = a · cos(p1.latitude) · sin(p1.longitude) + b · cos(p2.latitude) · sin(p2.longitude)
z = a · sin(p1.latitude) + b · sin(p2.latitude)
latitude = atan2(z, sqrt(x2 + y2))
longitude = atan2(y, x)
conversion of latitude and longitude to values ranged between [0,360]
return latitude, longitude

```

The algorithm returns the path's intermediate point between points $p1$, $p2$ and f value within a range of $[0,1]$, where 0 is a departure point, and 1 is an arrival point. $EARTH_RAD_METERS$ value specifies the earth's approximate radius. To correctly compare GPX track coordinates and map points, geographical coordinates corresponding to the image's upper left point and the azimuth for the image's horizontal axis are taken as initial data. This allows to interpolate points and assign geographical coordinates to each point in the image. *GeoQuad* class, representing a square plot of the earth's surface, is responsible for this.

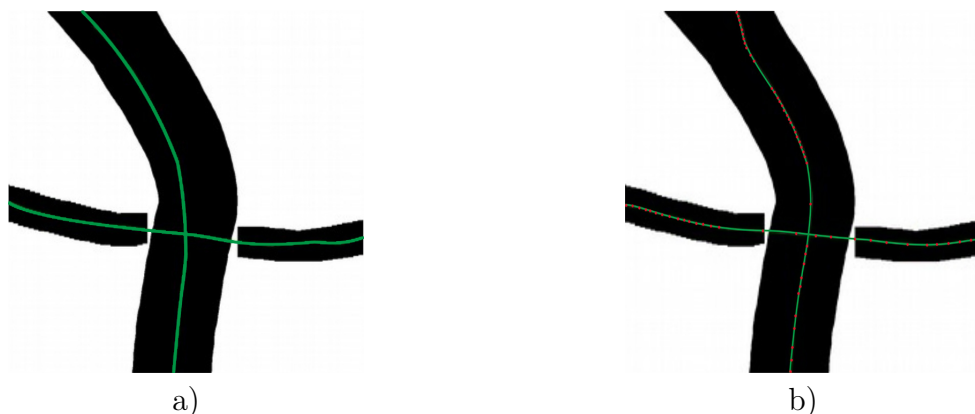


Fig. 1. a) model binary image representing two tracks; b) constructed SRN model placed upon a binary image

To give an example, let us consider an SRN model binary image (fig. 1 a)). It shows two tracks passing through each of the paths. It is assumed that the paths go at different levels. In this case, two tracks are enough to build a complete and correct SRN model.

In fig. 1 b), it is shown the result of implementing the program. Green lines indicate graph's edges, red dots are used to highlight vertices. It can be seen on the visualized model (fig. 2) that there is no vertex at the point of intersecting edges, as ribs belong to different levels. When additional information in the form of GPX tracks is absent, it is not possible to accurately determine the SRN configuration, as the road sections to the left and to the right might be the road's dead ends.

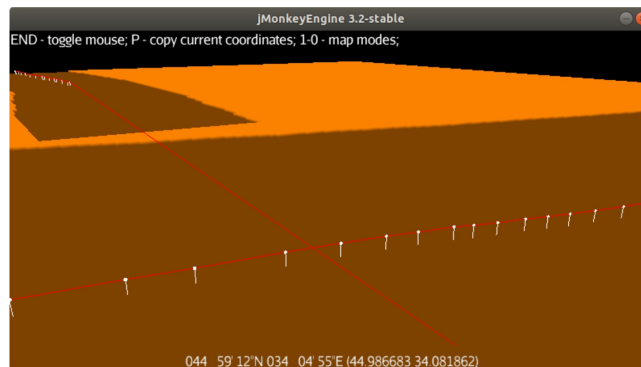
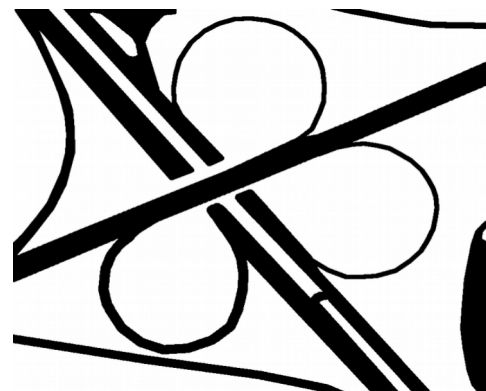


Fig. 2. Visualization of a model fragment

For testing, we selected a few examples. One such example is the multi-level road junction in the city of Simferopol at the intersection of Kievskaya Street and the bypass road (fig. 3 a)). This road junction seems appropriate for initial testing as it is mostly exposed for recognition.



a)



b)

Fig. 3. a) satellite image of the junction; b) binary image of the junction

The SRN fragments blocked or covered with shadows are marked as not belonging to the SRN. The skeleton for this SRN fragment is shown in fig. 4 a). Judging by the skeleton image, its

use will make the model incomplete. It can be easily noticed that only one GPX track is required to confirm the SRN configuration for this section (the track is shown in fig 4 b)).



Fig. 4. a) skeleton based on a binary image; b) SRN binary image with green color indicating path for GPX track

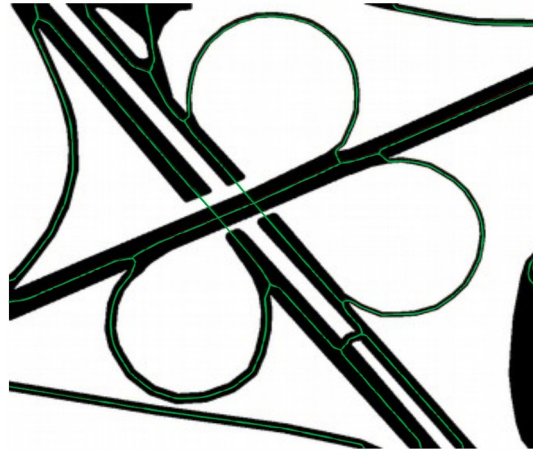


Fig. 5. Image of a model built upon the SRN binary image

To note the shortcomings of the proposed approach, the algorithm is prone to “misunderstand” road exits when analyzing more complex road junctions if they are located at places with a high degree of obstruction (Moscow, Saint Petersburg). However, after stripping unnecessary dead ends and increasing number of tracks, followed by stripping low weight edges, this problem can be effectively solved.

CONCLUSION

In this work, we propose a novel approach to constructing SRN models based on a combination of methods implementing road recognition in satellite images and road construction by GPX tracks. This approach to model building allows to compensate for errors in road recognition and requires the minimum number of tracks, in that reducing the time needed to construct them. The proposed algorithm is automatic and has complexity $O(n^3)$, which allows to minimize the need for human participation in model construction. The algorithm can be effectively implemented when modeling simple road junctions, bridges, overpasses, and any types of SRNs without multiple overlaps of closely located elements, yet it can fail when modeling road sections with a very large number of gaps. The work on updating relevant algorithms is underway to make it possible to split binary images into fragments to then model them independently.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Sergey Gulyaev.

REFERENCES

1. PANKAJ, P. & GARD, R. (2014) Road detection from remote sensing images using impervious surface characteristics: Review and implication. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. Vol. 8. p. 955–959. DOI:10.5194/isprsarchives-XL-8-955-2014
2. GALIAKBAROV, R. N. & MOSOLOVA, T. G. & KHAERTDINOV, A. I. (2013) Modeling a section of the city's road network in order to optimize its parameters. *SWORLD*. 4. p. 40–46. (In Russian)
3. ROTAR, V. G. & STEKLENEV, N. A. (2015) Software micro simulation of nodes of the road network of the city. *Eurasian Scientific AssociationD*. 6. p. 64–67. (In Russian)
4. OSMUSHKIN, A. A. & BOGDANOVA, I. G. & SIDOROV, A. V. (2013) Modeling of emergency situations on the road network. *Modern problems of science and education*. 6. p. 382–385. (In Russian)
5. KAHRAMAN, I. & TURAN, M. & KARAS, I. (2015) Road Detection from Hight Satellite Images Using Neural Networks. *International Journal of Modeling and Optimization*. Vol. 8. No. 4. p. 304–307. DOI: 10.7763/IJMO.2015.V5.479
6. MEKHEDOV, I. S. & KOZLOV, A. V. (2009) Model of a road network based on a skeleton. *Graphicon'2009*. p. 356–359. (In Russian)
7. MEKHEDOV, I. S. (2010) Search for intersection templates on a vector map of the city's road network. *Mathematical methods for pattern recognition*. p. 414–417. (In Russian)

8. GUDKOV, V. YU. & KLYUEV, D. A. (2015) Skeleton of binary images and selection of special points for fingerprint recognition. *Bulletin of the South Ural State University. Series Computer Technologies, Automatic Control, Radioelectronics*. p. 11–17. (In Russian)
9. LISOVSKY, E. (2017) Artificial intelligence and neural networks in cartography-2: when “people’s” maps are cooler than Google. – URL: www.forbes.ru/tehnologii/351121-iskusstvennyy-intellekt-i-neyroseti-v-kartografii-2-kogda-narodnye-karty-kruche
10. Calculate distance, bearing and more between Latitude/Longitude points // Movable Type Scripts. – URL: www.movable-type.co.uk/scripts/latlong.html
11. Vector-based geodesy // Movable Type Scripts. – URL: www.movable-type.co.uk/scripts/latlong-vectors.html#intersection
12. GERMANCHUK, M. S. & KOZLOVA, M. G. (2019) Pseudo-Boolean optimization models and algorithms in routing problems. *Modern problems of dynamic systems analysis. Theory and practice*. Proceedings of the international open conference may 21-23, 2019, Voronezh. p. 109–112. (In Russian)

УДК: 519.834

MSC2010: 91A12

TO THE PROBLEM OF COALITIONAL EQUILIBRIUM IN MIXED STRATEGIES

© V. I. Zhukovskiy

MOSCOW STATE UNIVERSITY NAMED AFTER LOMONOSOV
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY, GSP-1, MOSCOW, 119991, RUSSIA
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© L. V. Zhukovskaya

FEDERAL STATE BUDGETARY INSTITUTION OF SCIENCE CENTRAL ECONOMIC AND MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE
RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES (CEMI RAS)
NAKHIMOVSKII PROSP., 47, MOSCOW, 117418, RUSSIA
E-MAIL: zhukovskaylv@mail.ru

© L. V. Smirnova

STATE UNIVERSITY OF HUMANITIES AND TECHNOLOGY
ZELENAYA, 22, OREKHOVO-ZUEVO, 142611, RUSSIA
E-MAIL: smirnovalidiya@rambler.ru

TO THE PROBLEM OF COALITIONAL EQUILIBRIUM IN MIXED STRATEGIES.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V.

Abstract. The *Strong Coalitional Equilibrium* (SCE), is introduced for normal form games under uncertainty. This concept is based on the synthesis of the notions of individual rationality, collective rationality in normal form games without side payments, and a proposed coalitional rationality. For presentation simplicity, SCE is presented for 4-person games under uncertainty. Sufficient conditions for the existence of SCE in pure strategies are established via the saddle point of the Germeir's convolution function. Finally, following the approach of Borel, von Neumann and Nash, a theorem of existence of SCE in mixed strategies is proved under common minimal mathematical conditions for normal form games (compactness and convexity of players' strategy sets, compactness of uncertainty set and continuity of payoff functions).

Keywords: Normal form game without side payments, uncertainty, guarantee, mixed strategies, Germeier convolution, saddle point, equilibrium.

INTRODUCTION

The theory of cooperative games has been developing in three directions as follows. The first direction involves the introduction of equilibrium solutions for normal-form games and their analysis. It is an extension of Nash's theory [18, 19]. The second direction is based on the characteristic function approach. In a characteristic function game, each coalition (subset of players) is associated with a value it can afford. The third and most recent direction considers the coalition formation as a dynamic process.

As the contribution of the present paper is related to the first direction of research, we briefly discuss the second and the third directions.

In characteristic function games, the most prominent solution concept is the core proposed in [12]. The core rests on the idea of blocking: a coalition can block an imputation if it can improve the payoffs of its members by deviating from the current imputation. An imputation is in the core if it cannot be blocked by any coalition. Many other concepts were also introduced, such as the nucleolus, the kernel, and the Shapley value, to name a few. The main drawback of the characteristic function game and its solution concepts is that they do not incorporate the strategic interaction of players.

The obvious limitations of the characteristic form games and their solution concepts led to the appearance of the third direction of research, which considers coalition formation in cooperative games as a dynamic process. The pioneering works in this direction were the publications [7], where players' farsightedness was incorporated into game-theoretic analysis (i.e., the players were assumed to care about long-term outcomes of the game); [22], where «coalition strategies» were introduced to account for the coalitional behavior of players during the game; and [14], where coalition formation was described by a Markov process. For more details, the interested reader is referred to [23].

Now, let us discuss the first direction. Many coalition-related concepts of equilibrium or solutions were introduced for n -player normal-form games. The main motivation for the inception of such investigations was to overcome a well-known drawback of Nash equilibrium (NE): NE is unstable against the deviations of coalitions. A coalition may improve the payoff of all its members by collectively deviating from NE. R. Aumann [1] introduced the strong equilibrium (SE) that is stable against such deviations. As it however turned out, the set of SE is empty for most of the games. Later, Aumann [2] suggested the α -core and β -core for relaxing the conditions of SE. A strategy profile belongs to the core of a game if no group of players has an incentive to form a coalition and choose a different strategy profile in which each of its members are made better-off, i.e., the strategy profile cannot be blocked by any coalition. The α -core and β -core differ by the definition of blocking: the α -core requires a blocking coalition to choose a specific

strategy independently of the complementary coalition's choice, whereas the β -core allows a blocking coalition to vary its blocking strategy as a function of the complementary coalition's choice. C. Berge [3] introduced a very strong equilibrium, called the strong Berge equilibrium (SBE), in the sense that if one of the players chooses his strategy from an SBE, the other players have no choice but to play their strategies from the SBE. The Berge equilibrium (BE), put forward by V. Zhukovskiy [30], is an equilibrium that reflects altruism and mutual support among the players. A BE is a strategy profile in which the payoff function of each player is maximized by all the other players. Recently, research on BE has gained some momentum [33], as more empirical research showed that (besides noncooperative behavior) cooperation, mutual support, reciprocity, and caring about fairness may take place in interactions between individuals; see [9, 10, 13, 26]. Bernheim noticed that in an SE some deviations might not be self-enforcing [8], and therefore cannot be treated as credible threats. This led to the introduction of coalition-proof Nash equilibrium (CPNE). In a CPNE, only self-enforcing deviations are credible threats. A deviation by a coalition is self-enforcing if no subcoalition has an incentive to initiate a new deviation. Finally, some works combined different solution concepts, e.g., the hybrid solution of [29], which assumed a coalition structure to be formed, and the game itself to be noncooperative among coalitions but cooperative within coalitions. As a result, Nash equilibrium was adopted for the former and the core for the latter as solutions.

A common drawback of the coalition equilibria and solutions mentioned above is that their set is often empty; they do not exist under standard assumptions such as the compactness and convexity of strategy sets and the continuity and quasiconcavity of payoff functions [8, 15, 20, 27, 31], except for the α -core and Zhao's hybrid solution. Using the notion of balancedness, Scarf [26] established the non-emptiness of the α -core in the case of compact and convex strategy sets and continuous and quasiconcave payoff functions. However, Scarf's theorem suggests no method for determining an α -core element. Zhao's hybrid solution was obtained under similar hypotheses.

As most of these equilibrium concepts and solutions do not exist in the class of pure strategies under standard assumptions of continuous games, a natural question arises: Do these concepts and solutions exist in mixed strategies? Unfortunately, there are no works dealing with this question and related topics in the existing literature. Moreover, the existence of the concepts and solutions has not been considered in games under uncertainty.

In this paper, we introduce a rational coalitional equilibrium for a game under nonprobabilistic uncertainty as well as establish its existence in mixed strategies. As a matter of fact, this concept generalizes many of the concepts mentioned above.

The mathematical model of cooperation described below is a four-player normal-form game with indeterminate parameters (interval uncertainty). The analysis has been limited to the class of four-player games for the sake of simplicity. Regarding the indeterminate parameters, it is assumed that the players know their range of admissible values only; no probabilistic characteristics are available (for some reasons). The models of game phenomena with a proper consideration of uncertainties yield more adequate results and decisions, which is supported by the numerous publications related to this field of research. (For example, a Google search on the topic «mathematical modeling under uncertainty» returns more than one million links to related works.) The uncertainty appears because of incomplete information about the players' strategy sets, the strategies being chosen by each player, and the related payoffs: «Although our intellect always longs for clarity and certainty, our nature often finds uncertainty fascinating.» (C. von Clausewitz¹). One more question arises: How a player can simultaneously consider the game's strategic and cooperation aspects, and the presence of uncertainty when choosing his strategy? In this paper, the following approach to formalize the cooperation aspect of the game is adopted. It is assumed that any non-empty subset of players has the possibility to form a coalition through communication and coordination by agreeing to choose a bundle of strategies to achieve the best possible payoff for all its members. This assumption means that the interests of all possible coalitions are considered. Further, it is also assumed that the game is without side payments or non-transferable utility (NTU). The concept of strong coalitional equilibrium (SCE) is introduced for the game described. A sufficient condition for its existence in pure strategies is provided and its existence in mixed strategies is established under standard assumptions (compact and convex strategy sets of all players, a compact set of uncertainties, and continuous payoff functions of all players).

1. THE GAME UNDER UNCERTAINTY

In this section we present the normal-form game under uncertainty. For the sake of simplicity, further presentation will be confined to the class of four-player games only. All the results and definitions below can be easily generalized to n -player games in a straightforward way.

¹Carl von Clausewitz, in full Carl Philipp Gottlieb von Clausewitz, (1780-1831), was a Prussian general and military thinker, whose work *Vom Kriege* (1832; *On War*) has become one of the most respected classics on military strategy.

Consider the four-player normal-form game under uncertainty

$$\Gamma = \langle N = \{1, 2, 3, 4\}, \{X_i\}_{i \in N}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in N} \rangle,$$

where $N = \{1, 2, 3, 4\}$ is the set of players; each player $i \in N$ chooses his strategy x_i from his strategy set $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, thereby forming a strategy profile $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X = \prod_{i=1}^4 X_i \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i \in N} n_i$, an *interval uncertainty* $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ occurs independently of the players' actions; the payoff function of player $i \in N$ is a real-valued function $f_i(x, y)$ that depends on the pair $(x, y) \in X \times Y$. The goal of each player $i \in N$ in the game Γ is to choose a strategy x_i yielding the greatest possible payoff for him. This includes choosing strategies that maximize other players' payoffs if they are beneficial for player i . With this goal in view, the players should consider the possible formation of any coalition and also the possible realization of any uncertainty $y \in Y$. Considering the uncertainty $y \in Y$ leads to a multivalued payoff function of the form $x \rightarrow f_i(x, Y) = \bigcup_{y \in Y} f_i(x, y)$. Such multivalued payoff functions complicate further study of the cooperative games Γ . To consider the effect of uncertainty on their payoffs, the players need to adopt a principle of decision-making under uncertainty [16], such as the maximin principle [28], the principle of minimax regret [24, 25], etc. Moreover, a reasonable solution concept for the game Γ must reflect the uncertainty's effect on the players. As uncertainty is considered in equilibria of cooperative games for the first time, we assume that the players adopt a conservative (maximin or risk-averse) approach [28]. Other principles of decision-making under uncertainty in the game Γ can be studied in future works. Thus, the payoff function of each player $i \in N$ will be estimated not by its value $f_i(x, y)$, but by its guaranteed level $f_i[x]$. A guarantee over the values $f_i(xy)$, $y \in Y$, can be defined as follows:

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y).$$

Really, we have $f_i[x] \leq f_i(x, y)$, $y \in Y$, therefore, a lower bound on the payoff function of the player i can be given by $f_i[x]$. As it will be demonstrated below, under common conditions the function $x \rightarrow f_i[x]$ is well-defined and continuous on X . In this section and also in Sections 2 and 3, the functions $x \rightarrow f_i[x]$, $i \in N$ are assumed to be well-defined and continuous on X . This leads to the (conservative) game of guarantees

$$\Gamma^g = \langle N = \{1, 2, 3, 4\}, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i[x]\}_{i \in N} \rangle.$$

In the next section we will introduce SCE of the game Γ via the game Γ^g .

2. COALITIONAL RATIONALITY AND STRONG COALITIONAL EQUILIBRIUM

First, let us present the main properties of SCE, introducing the concept itself later. To define coalitional rationality, the following notations are convenient. For any non-empty subset K of the set N , denote by $-K$ the complement of K , that is, $N \setminus K$. In particular, for each $i \in N$, denote by $-i$ the set $N \setminus \{i\}$ and for each $i, j \in N$, $i \neq j$, denote by $-(i, j)$ the set $N \setminus \{i, j\}$. The notion of partition of a set will be used as well. A partition of a set A is a family of disjoint subsets of A , the union of which equals A . In game theory, a partition of the set of players is called a coalition structure. For a strategy profile $x \in X$, and $i \in N$ denote by $x = (x_i, x_{-i})$ and $X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$.

In the game Γ , fifteen coalition structures can be formed as follows $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $K_{\{i\}} = \{\{i\}, \{-i\}\}$, $K_{\{i\}, \{j\}} = \{\{i\}, \{j\}, \{-(i, j)\}\}$, $K_{\{i, j\}} = \{\{i, j\}, \{-(i, j)\}\}$, for all $i, j \in N$, $i \neq j$. Recall some results from the theory of cooperative games without side payments [16]. For a strategy profile $x^* \in X$ in the game Γ^g , the following properties are considered:

- (a) x^* satisfies the *individual rationality condition* (IRC), if for all $i \in N$,

$$f_i[x^*] \geq f_i^0 = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i[x_i, x_{-i}] = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i[x_i^0, x_{-i}].$$

The value f_i^0 is the guaranteed payoff of player $i \in N$. If player i chooses his *maximin* strategy x_i^0 , then his payoff satisfies $f_i[x_i^0, x_{-i}] \geq f_i^0$, for all $x_{-i} \in X_{-i}$;

- (b) x^* satisfies the *collective rationality condition* (ColRC) if x^* is a Pareto-maximal alternative in the multicriteria choice problem $\Gamma^P = \langle X, f_i[x]_{i \in N} \rangle$, i.e., for all $x \in X$, the system of inequalities $f_i[x] \geq f_i[x^*]$, $i \in N$, with at least one strict inequality, is inconsistent. Note that if $\sum_{i \in N} f_i[x] \leq \sum_{i \in N} f_i[x^*]$ for all $x \in X$, then x^* is a Pareto-maximal alternative in the choice problem Γ^P .
- (c) x^* satisfies the *coalitional rationality condition* (CoalRC) if

$$\begin{aligned} f_k[x^*] &\geq f_k[x_i^*, x_{-i}], & \text{for all } x_{-i} \in X_{-i}; \\ f_k[x^*] &\geq f_k[x_i^*, x_j^*, x_{-(i, j)}], & \text{for all } x_{-(i, j)} \in X_{-(i, j)}; \\ f_k[x^*] &\geq f_k[x_i, x_{-i}^*], & \text{for all } x_i \in X_i, \end{aligned}$$

all the three inequalities holding for all $i, j, k \in N$, $i \neq j$, where $x = (x_i, x_j, x_{-(i, j)})$ and $X_{-(i, j)} = \prod_{s \in N \setminus \{i, j\}} X_s$. This condition means that when a coalition K chooses its strategy profile from x^* , then no player can improve his payoff if the countercoalition $-K$ deviates from its strategy profile in x^* .

Definition 1. A strategy profile $x^* \in X$ is called *strong coalitional equilibrium* (SCE) for the game Γ if it satisfies IRC, ColRC and CoalRC for the game of guarantees Γ^g .

Remark 1. In accordance with IRC, it makes sense for a player to form coalitions with other players if he gets a payoff not less than what he can guarantee by choosing his maximin strategy. ColRC leads the players to a non-dominated strategy profile in terms of Pareto maximality. Finally, CoalRC means that the payoff of each player is stable against any deviations of individual players or coalitions from a strategy profile satisfying CoalRC. In other words, no player's payoff is increased when any coalition deviates from an SCE. Thus, it is rational for all coalitions not to deviate from x^* , because no player in a deviating coalition or outside it will benefit.

By Definition 1 a SCE must satisfy all the extremal constraints defining IRC, ColRC, and CoalRC. However, all these constraints can be easily derived from the following seventeen of them:

$$\begin{aligned}
 f_i[x_1^*, x_2, x_3, x_4] &\leq f_i[x^*], \text{ for all } x_k \in X_k, k = 2, 3, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\
 f_i[x_1, x_2^*, x_3, x_4] &\leq f_i[x^*], \text{ for all } x_k \in X_k, k = 1, 3, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\
 f_i[x_1, x_2, x_3^*, x_4] &\leq f_i[x^*], \text{ for all } x_k \in X_k, k = 1, 2, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\
 f_i[x_1, x_2, x_3, x_4^*] &\leq f_i[x^*], \text{ for all } x_k \in X_k, k = 1, 2, 3 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\
 \sum_{i \in N} f_i[x] &\leq \sum_{i \in N} f_i[x^*], \text{ for all } x \in X,
 \end{aligned} \tag{1}$$

where $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$.

From this point onwards, we will use the system of inequalities (1) to establish that a strategy profile is an SCE of the game Γ instead of the system of inequalities involved in the definitions of IRC, ColRC, and CoalRC (see items (a)–(c) above). From (1) it can be observed that the SCE has two interesting features. First, once the players are in an SCE, they do not have incentive to deviate from it individually, collectively, or in coalitions. Second, if the players are not in an SCE, as soon as one player (or coalition) declares that he (it) will choose his (its) strategy (profile) from an SCE, the other players have no choice but to choose their strategies from the SCE. In other words, any player or coalition can enforce an SCE.

Although SCE does not exist in pure strategies in most of continuous games, in finite games it is not the case. The following example, adapted from [18], shows that an SCE exists in a class of games.

Example 1. Consider a three-player game in which players 1, 2 and 3 choose rows, columns and boxes, respectively and are named accordingly. Let $\epsilon \in [0, 1]$ and also let $\alpha, \beta,$ and γ be nonnegative numbers such that $\alpha + \beta + \gamma < 9$. Each of the players has

two strategies $\{T, B\}$ for player 1, $\{T, L\}$ for players 2 and 3. The minimum payoffs, i.e., $f_i[x_1, x_2, x_3]$ $i = 1, 2, 3$, where $x_1 = T, B$ and $x_j = T, L$; $j = 2, 3$, are given below.

	L	R	L	R
T	2, 2, 2	0, 0, ϵ	0, 0, 0	4, 4, 1
B	α, β, γ	0, 0, ϵ	0, 0, 0	3, 3, 1
	L		R	

The strategy profile (T, R, R) is an SCE. Really, this strategy profile satisfies the last inequality of system (1): the sum of the payoffs in (T, R, R) is higher than the sum of the payoffs in any other strategy profile, including (B, L, L) due to the inequality $\alpha + \beta + \gamma < 9$ and the fact that α, β, γ are nonnegative numbers. Next, the possible deviations corresponding to the inequalities in (1) are (T, L, R) , (T, R, L) , (T, L, L) when player 1 chooses the SCE strategy T ; (B, R, R) , (T, R, L) and (B, R, L) when player 2 chooses the SCE strategy R ; (B, R, R) , (T, L, R) and (B, L, R) when player 3 chooses the SCE strategy R . In all the strategy profiles mentioned, the payoffs of players 1, 2, and 3 are smaller than or equal to their payoffs in (T, R, R) , which are 4, 4, and 1, respectively.

2.1. Related Concepts. In this section, we recall the most prominent cooperative solutions of NTU games in normal form and compare them with the SCE. Also, we compare the SCE with the solution concepts defined in dynamic context with respect to coalition deviations.

- a) [1] A strategy profile $x^* \in X$ is a strong equilibrium (SNE) of the game Γ^g if, for all $S \subset N$ and for all $y_{-S} \in X_{-S}$, the system of inequalities $f_i[x^*] < f_i[y_S, x_{-S}^*]$ is inconsistent for all $i \in S$.

This definition means that no coalition can improve the payoff of all its members by deviating from an SNE when the other players adhere to the SNE.

- b) [2] A strategy profile $x^* \in X$ is in the α -core of the game Γ^g if, for any coalition $S \subset N$ and for each $y_S \in X_S$, there exists $z_{-S} \in X_{-S}$ such that the system of inequalities $f_i[x^*] < f_i[y_S, z_{-S}]$ is inconsistent for all $i \in S$.

In other words, if a coalition deviates from a strategy profile x^* belonging to the α -core, then the other players have a counterstrategy profile to punish it in such a way that not all members of the coalition are better-off.

- c) [2] A strategy profile $x^* \in X$ is in the β -core of the game Γ^g if, for each coalition $S \subset N$, there exists $z_{-S} \in Z_{-S}$ such that for all $y_S \in X_S$ the system of inequalities $f_i[x^*] < f_i[y_S, z_{-S}]$ is inconsistent for all $i \in S$.

In other words, for each coalition the other players can use a special strategy profile to punish it for any deviation from a strategy profile x^* belonging to the β -core in such a way that not all members of the coalition are better-off.

- d) [3] A strategy profile $x^* \in X$ is a strong Berge equilibrium (SBE) of the game Γ^g if for all $i \in N$, the inequalities $f_j[x_i^*, z_{-i}] \leq f_j[x^*]$ holds for all $z_{-i} \in Z_{-i}$ and $j \in -i$.

In other words, no coalition of the form $-i$ can make any of its members better-off by deviating from an SBE. When a player uses his strategy from an SBE, the other players have no choice but to follow him, simply using their strategies from the SBE.

- e) [30] A strategy profile $x^* \in X$ is a Berge equilibrium (BE) of the game Γ^g if for all $i \in N$, the inequalities $f_i[x_i^*, z_{-i}] \leq f_i[x^*]$ holds for all $z_{-i} \in Z_{-i}$.

In other words, in a BE the players maximize the payoff functions of each other. This equilibrium reflects mutual support and altruism among the players [33].

Using (1), we can easy to verify that SCE is also an SNE, an SBE and a BE. As is well-known, an SNE is a CPNE; then, an SCE is also a CPNE. Next, an SCE is an element of the α -core and the β -core. The SCE has similarities with the SBE. However, there are two important differences between these solution concepts. First, in an SBE for each $i \in N$ the system of inequalities $f_j[x_i^*, z_{-i}] \leq f_j[x^*]$ holding for all $z_{-i} \in Z_{-i}$ and $j \in -i$ does not include the inequality corresponding to player i , $f_i[x_i^*, z_{-i}] \leq f_i[x^*]$: the other players do not care about the payoff of player i when choosing their strategies from x^* , and his payoff is not maximized. In an SCE, the inequality $f_i[x_i^*, z_{-i}] \leq f_i[x^*]$ is included, which means that the payoff function of player i is maximized by the other players. This shows that the SCE involves mutual support, whereas the SBE does not. Second, an SBE is generally not Pareto-optimal. The Pareto-maximal SBE was investigated in [33]. The SCE has also some similarities with the BE. However, there are important differences between the two equilibria. The BE expresses mutual support and altruism and ignores the individual interests of players; it is not a refinement of Nash equilibrium as a BE may not satisfy IRC [33]. The SCE differs from the hybrid solution (HS) of [29]: in the latter, it is assumed that a coalition structure is formed and there is no cooperation among the coalitions of this structure; in the former, such assumptions are not made.

Although the coalitional equilibrium [22], the equilibrium binding agreement [23], the equilibrium process of coalition formation [14] and the consistent set [7] were defined in a dynamic context, they can be compared to the SCE based on when a coalition can deviate. In the concepts mentioned, a coalition deviates to another state or strategy profile if and only if all its members are better-off, whereas in the SCE a coalition can deviate if and only if all players of the game are better-off (not only its members).

Moreover, the concepts listed in this section do not consider uncertainty as an exogenous factor, unlike the SCE.

3. SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF SCE IN PURE STRATEGIES

In the previous section we have seen that an SCE is also an SNE and an SBE. Since these equilibria do not exist in pure strategies in most of the continuous games (see the Introduction), the SCE suffers from this drawback too. Nevertheless, we will formulate sufficient conditions for its existence using the approach developed in [32]. The approach used in this section paves the way to the next section, where the main result of this paper will be presented. First, we introduce the convolution [11] related to the SCE

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, z) &= \max_{i \in N} \{f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] - f_i[z]\}, \\
 \varphi_2(x, z) &= \max_{i \in N} \{f_i[x_1, z_2, x_3, x_4] - f_i[z]\}, \\
 \varphi_3(x, z) &= \max_{i \in N} \{f_i[x_1, x_2, z_3, x_4] - f_i[z]\}, \\
 \varphi_4(x, z) &= \max_{i \in N} \{f_i[x_1, x_2, x_3, z_4] - f_i[z]\}, \\
 \varphi_5(x, z) &= \sum_{i \in N} f_i[x] - \sum_{i \in N} f_i[z], \\
 \varphi(x, z) &= \max_{r=1, \dots, 5} \{\varphi_r(x, z)\},
 \end{aligned} \tag{2}$$

where $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ and $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in X = \prod_{i \in N} X_i$.

A saddle point $(x^0, z^*) \in X \times X$ of the real-valued function $\varphi(x, z)$ in (2) is defined by the chain of inequalities

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z), \quad \text{for all } x, z \in X. \tag{3}$$

Proposition 1. If $(x^0, z^*) \in X \times X$ is a saddle point of the function $\varphi(x, z)$, then the minimax strategy z^* is an SCE of the game Γ .

Proof. Letting $z = x^0$ in (3), from (2) we obtain $\varphi(x^0, x^0) = 0$. Then by transitivity, from (3) it follows that

$$\varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, x^0) = 0 \Rightarrow \varphi(x, z^*) \leq 0, \quad \text{for all } x \in X,$$

which implies (1). □

Remark 2. In according with Proposition 1, the determination of an SCE reduces to the determination of a saddle point (x^0, z^*) of the Germeier convolution $\varphi(x, z)$ from (2). We obtain the following procedure for calculating an SCE in the game Γ .

Step 1. Construct the function $\varphi(x, z)$ by (2).

Step 2. Find a saddle point $(x^0, z^*) \in X \times X$ of the function $\varphi(x, z)$.

Step 3. Compute the four values $f_i[z^*]$, $i \in N$.

Then the pair $(z^*, f[z^*] = (f_1[z^*], f_2[z^*], f_3[z^*], f_4[z^*])) \in X \times \mathbb{R}^4$ consists of the SCE z^* and the corresponding payoffs of the four players. When the players choose their strategies from the SCE z^* , they gain the payoffs $f_i[z^*]$, $i \in N$, respectively.

Thus, if the function of two variables $\varphi(x, z)$ has a saddle point, the well-known numerical methods can be used for computing saddle points.

4. THE EXISTENCE OF SCE IN MIXED STRATEGIES

Like the SNE and SBE, the SCE does not exist in pure strategies in the majority of continuous games. Hence, we can naturally employ the strategy randomization approach, which was used in [4–6, 18, 19, 21] to establish the existence of Nash equilibrium in mixed strategies. Following these great scholars, we will establish the existence of an SCE in mixed strategies. For this purpose, some preliminary results are needed, which will help in proving the main existence theorem.

4.1. Preliminaries. First, we introduce some auxiliary notations. Denote by $\text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$ and $\text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}$ the set of compact subsets of \mathbb{R}^{n_i} and the set of convex and compact subsets of \mathbb{R}^{n_i} , respectively, and also by $C(X \times Y)$ the set of real-valued and continuous functions with a domain of definition $X \times Y$.

Assume that the elements of the game Γ satisfy the following condition.

Condition 1.

$$X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}, \quad Y \in \text{cocomp } \mathbb{R}^m, \quad f_i(\cdot) \in C(X \times Y), \quad \text{for all } i \in N. \quad (4)$$

Then, in accordance with Berge' maximum theorem [17], the function $x \rightarrow f_i[x]$ is well-defined and continuous on X for all $i \in N$.

Next, we construct the mixed extension of the game Γ^g , which includes the sets of mixed strategies and mixed strategy profiles as well as the expected value of the players' payoff functions.

First, we associate with each strategy set $X_i \in \text{cocomp } \mathbb{R}^{n_i}$ the Borel σ -algebra $B(X_i)$, which consists of subsets $Q^{(i)}$ of X_i such that the intersection and union of a countable set of elements of $B(X_i)$ belong to $B(X_i)$; moreover, $B(X_i)$ is the minimal σ -algebra that contains all closed subsets of X_i . In game theory, a mixed strategy $\nu_i(\cdot)$ of player i

can be identified with a *probability measure* on the compact set of pure strategies X_i . A probability measure is a nonnegative function $\nu_i(\cdot)$ defined on the Borel σ -algebra $B(X_i)$ and satisfies the two conditions:

$$(C.1) \quad \nu_i \left(\bigcup_k Q_k^{(i)} \right) = \sum_k \nu_i \left(Q_k^{(i)} \right) \text{ for any sequence of disjoint elements } \{Q_k^{(i)}\} \text{ of } B(X_i) \\ \text{(countable additivity);}$$

$$(C.2) \quad \nu_i(X_i) = 1 \text{ (normality).}$$

Note that (C.2) implies the inequality $\nu_i(Q^{(i)}) \leq 1$ for all $Q^{(i)} \in B(X_i)$.

Denote by $\{\nu_i\}$ the set of mixed strategies of player $i \in N$. Then a mixed strategy profile of the game Γ^g can be formulated as a product-measure

$$\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3)\nu_4(dx_4);$$

the set of such measures will be denoted by $\{\nu\}$. The payoff of player i corresponding to his payoff function in the game Γ^g is defined by $f_i[\nu] = \int_X f_i[x]\nu(dx)$. Then the mixed extension of the game Γ^g has the form

$$\tilde{\Gamma}^g = \langle N = \{1, 2, 3, 4\}, \{\nu_i\}_{i \in N}, \{f_i[\nu]\}_{i \in N} \rangle. \quad (5)$$

Here we have committed an abuse of notations, denoting the expected value of the function $f_i[x]$ by $f_i[\nu]$. The reader can distinguish between the two functions by the variable involved.

Now, we suggest the following definition of equilibrium, using Definition 1 and (1).

Definition 2. A mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a *mixed strategy coalitional equilibrium* (MSCE) of the game Γ if it is an SCE of the mixed-extension game (5), that is,

- (i) $\nu^*(\cdot)$ satisfies individual rationality and coalitional rationality (IRC and CoalRC), which can be derived from the following inequalities

$$\begin{aligned} f_i[\nu_1^*, \nu_2, \nu_3, \nu_4] &\leq f_i[\nu^*], \text{ for all } \nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\}, k = 2, 3, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\ f_i[\nu_1, \nu_2^*, \nu_3, \nu_4] &\leq f_i[\nu^*], \text{ for all } \nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\}, k = 1, 3, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\ f_i[\nu_1, \nu_2, \nu_3^*, \nu_4] &\leq f_i[\nu^*], \text{ for all } \nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\}, k = 1, 2, 4 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \\ f_i[\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4^*] &\leq f_i[\nu^*], \text{ for all } \nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\}, k = 1, 2, 3 \text{ and } i = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \quad (6)$$

where $\nu^* = (\nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*, \nu_4^*)$.

- (ii) $\nu^*(\cdot)$ satisfies the collective rationality (CLRC), or it is Pareto maximal alternative in the quad-criteria choice problem

$$\tilde{\Gamma}_v^g = \langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i \in N} \rangle,$$

that is, for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ the system of inequalities

$$f_i[\nu] \geq f_i[\nu^*], \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

A sufficient condition for Pareto optimality (see item (ii)) is as follows.

Remark 3. A mixed strategy profile (alternative) $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is Pareto-optimal in the multicriteria choice problem $\tilde{\Gamma}_v^g = \langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i \in N} \rangle$ if

$$\max_{\nu(\cdot) \in \{\nu\}} \sum_{i \in N} f_i[\nu] = \sum_{i \in N} f_i[\nu^*].$$

Consider the function $\varphi_i(x, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ and also the function

$$\varphi(x, z) = \max_{r=1, \dots, 5} \{\varphi_r(x, z)\} \tag{7}$$

introduced in (2).

Proposition 2. The inequality

$$\max_{r=1, \dots, 5} \int_{X \times X} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \tag{8}$$

holds for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Proof. From (7), for all $x, z \in X$, we obtain the five inequalities

$$\varphi_r(x, z) \leq \varphi(x, z) = \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z), \quad r = 1, \dots, 5.$$

Integrating both sides of these inequalities with an arbitrary product-measure $\mu(dx)\nu(dz)$ yields

$$\int_{X \times X} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz),$$

for all $\mu(\cdot), \nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $r = 1, \dots, 5$. Therefore,

$$\max_{r=1, \dots, 5} \int_{X \times X} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz) \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu(dz),$$

for all $\mu(\cdot), \nu(\cdot) \in \{\nu\}$. Hence, (8) is satisfied.

□

Remark 4. In fact, Proposition 2 generalizes the well-known property of maximization: the maximum of a sum of some functions does not exceed the sum of their maxima.

Proposition 3. The function $\varphi(x, z)$ defined in (7) is continuous on $X \times Z$, where $Z = X$.

The proof of a more general result (the continuity of the maximum of a finite number of continuous functions on a compact set) can be found in many textbooks, e.g., in [17].

4.2. Existence Theorem. In this subsection, we prove the main result of this paper, that is, the existence of an MSCE in the game Γ .

Theorem 1. *Under the Condition 1, the game Γ has an MSCE.*

Proof. Consider the two-player zero-sum game

$$\Gamma^a = \langle \{1, 2\}, X, Z, \varphi(x, z) \rangle,$$

where $X = Z$. In the game Γ^a , the maximizing and minimizing players choose their strategies from the same set X ; $\varphi(x, z)$ is the payoff function of the maximizing player and $-\varphi(x, z)$ is the payoff function of the minimizing player. Any saddle point (x^0, z^*) of the function $\varphi(x, z)$ is an NE in the game Γ^a . Really, by the saddle point definition

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z), \text{ for all } (x, z) \in X \times Z,$$

the strategy profile (x^0, z^*) is an NE of the game Γ^a . Now, we associate with the game Γ^a its mixed strategy extension

$$\tilde{\Gamma}^a = \langle \{1, 2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \varphi(\mu, \nu) \rangle,$$

where $\{\mu\}$ is the set of all strategies of the maximizing player; $\{\nu\} = \{\mu\}$ is the set of all strategies of the minimizing player; $\varphi(\mu, \nu)$ is the payoff (expected utility) of the maximizing player,

$$\varphi(\mu, \nu) = \int_{X \times X} \varphi(x, z) \mu(dx) \nu(dz). \quad (9)$$

Here, we have committed another abuse of notations, denoting the expected value of the function $\varphi(x, z)$ by $\varphi(\mu, \nu)$. The reader can distinguish between the two by the variables involved. In a similar fashion, any saddle point (μ^0, ν^*) of the function $\varphi(\mu, \nu)$ is an NE in the game $\tilde{\Gamma}^a$. Really, by the saddle point definition

$$\varphi(\mu, \nu^*) \leq \varphi(\mu^0, \nu^*) \leq \varphi(\mu^0, \nu), \text{ for all } (\mu, \nu) \in \{\nu\} \times \{\nu\} \quad (10)$$

the strategy profile (μ^0, ν^*) is an NE in the game $\tilde{\Gamma}^a$.

In 1952 I. Glikhsberg established the existence of an NE in mixed strategies for the N -player games with $N > 1$; see the original paper [12]. Using his result for the two-player zero-sum game Γ^a as a special case, we obtain the following statement. Since the set of all strategy profiles $X \subset \mathbb{R}^n$ is convex and compact and the function $\varphi(x, z)$ is continuous on $X \times X$ (Proposition 3), the game Γ^a has a mixed-strategy NE (μ^0, ν^*) satisfying (10).

In view of (7) and (9), inequalities (10) take the form

$$\begin{aligned} & \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq \\ & \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu^0(dx) \nu^*(dz) \leq \\ & \leq \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu^0(dx) \nu(dz), \end{aligned}$$

for all $(\mu, \nu) \in \{\nu\} \times \{\nu\}$. Letting $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$, $i \in N$, in

$$\varphi(\mu^0, \nu) = \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu^0(dx) \nu(dz),$$

we obtain

$$\varphi(\mu^0, \mu^0) = \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, x) \mu^0(dx) \mu^0(dx).$$

(In this case, $\nu(dz) = \mu^0(dx)$) From (2) it follows that $\varphi_r(x, x)$, $r = 1, \dots, 5$ for all $x \in X$. Then the previous integral yields $\varphi(\mu^0, \mu^0) = 0$. A similar reasoning leads to $\varphi(\nu^*, \nu^*) = 0$. From (10) we obtain

$$\varphi(\mu^0, \nu^*) = 0. \quad (11)$$

Using (11) and inequalities (10), by transitivity we write

$$\varphi(\mu, \nu^*) = \int_{X \times X} \max_{r=1, \dots, 5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0, \text{ for all } \mu \in \{\nu\}.$$

In accordance with Proposition 2,

$$\max_{r=1,\dots,5} \int_{X \times X} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq \int_{X \times X} \max_{r=1,\dots,5} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0,$$

for all $\mu \in \{\nu\}$. Therefore,

$$\int_{X \times X} \varphi_r(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0, \text{ for all } \mu \in \{\nu\} \text{ and for all } r = 1, \dots, 5. \quad (12)$$

We will distinguish two cases as follows.

Case 1. ($r = 1, \dots, 4$) Due to (2), (12) and the fact that $\mu(\cdot)$ is normalized (i.e. $\int_X \mu(dx) = 1$), for example, for $r = 1$ we write

$$\begin{aligned} & f_i[\nu_1^*, \mu_2, \mu_3, \mu_4] - f_i[\nu^*] = \\ &= \int_{X \times X} f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] \mu(dx) \nu^*(dz) - \int_X f_i[z] \nu^*(dz) \int_X \mu(dx) = \\ &= \int_{X \times X} f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] \mu(dx) \nu^*(dz) - \int_{X \times X} f_i[z] \mu(dx) \nu^*(dz) = \\ &= \int_{X \times X} (f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] - f_i[z]) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq \\ &\leq \int_{X \times X} \max_{i \in N} \{f_i[z_1, x_2, x_3, x_4] - f_i[z]\} \mu(dx) \nu^*(dz) = \\ &= \int_{X \times X} \varphi_1(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0, \end{aligned}$$

which holds for all $i \in N$. Thus, $f_i[\nu_1^*, \mu_2, \mu_3, \mu_4] - f_i[\nu^*] \leq 0$, for all $i \in N$ and $\mu_k \in \{\nu_k(\cdot)\}$, $k = 2, 3, 4$.

Similar considerations can be used to establish the following three inequalities for $r = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} & f_i[\mu_1, \nu_2^*, \mu_3, \mu_4] - f_i[\nu^*] \leq 0, \text{ for all } i \in N \text{ and } \mu_k \in \{\nu_k(\cdot)\}, k = 1, 3, 4, \\ & f_i[\mu_1, \mu_2, \nu_3^*, \mu_4] - f_i[\nu^*] \leq 0, \text{ for all } i \in N \text{ and } \mu_k \in \{\nu_k(\cdot)\}, k = 1, 2, 4, \\ & f_i[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_4^*] - f_i[\nu^*] \leq 0, \text{ for all } i \in N \text{ and } \mu_k \in \{\nu_k(\cdot)\}, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Therefore, the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ satisfies the four inequalities (6) from condition (i) of Definition 2. It remains to prove that $\nu^*(\cdot)$ also satisfies condition (ii)

of Definition 2, i.e., that it has the property of Pareto optimality or collective rationality. For this purpose, we will use Remark 3.

Case 2. ($r = 5$) Due to (2), (12) and the fact that $\mu(\cdot)$ and $\nu^*(\cdot)$ are both normalized ($\int_X \mu(dx) = \int_X \nu^*(dx) = 1$), we write

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} f_i[\mu] - \sum_{i \in N} f_i[\nu^*] &= \sum_{i \in N} \int_X f_i[x] \mu(dx) - \sum_{i \in N} \int_X f_i[z] \nu^*(dz) = \\ &= \int_X \sum_{i \in N} f_i[x] \mu(dx) \int_X \nu^*(dz) - \int_X \sum_{i \in N} f_i[z] \nu^*(dz) \int_X \mu(dx) = \\ &= \int_{X \times X} \left[\sum_{i \in N} f_i[x] - \sum_{i \in N} f_i[z] \right] \mu(dx) \nu^*(dz) = \\ &= \int_{X \times X} \varphi_5(x, z) \mu(dx) \nu^*(dz) \leq 0. \end{aligned}$$

Therefore, $\sum_{i \in N} f_i[\mu] - \sum_{i \in N} f_i[\nu^*] \leq 0$ for all $\mu \in \{\nu\}$. Then, in accordance with Remark 3, the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is Pareto-optimal alternative in the multicriteria choice problem

$$\tilde{\Gamma}_v^g = \langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i \in N} \rangle.$$

Thus, we have established that the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is an SCE in the game $\tilde{\Gamma}^g$. By Definition 2, $\nu^*(\cdot)$ is an MSCE in the game Γ and $f[\nu^*]$ is the players' payoff vector. \square

CONCLUSION

This paper has contributed to the theory of cooperative normal-form games in the following way. First, the concept of the strong coalitional equilibrium (SCE) in normal-form games under uncertainty has been formalized. This concept considers the interests of all coalitions. Second, a constructive procedure for determining a pure-strategy SCE has been provided; this procedure reduces to saddle point calculation for a function of two variables. Third, the existence of SCE in mixed strategies has been proved under standard assumptions of cooperative game theory (continuous payoff functions of the players, compact and convex strategy sets of the players, and a compact set of uncertainty).

In our view, the following qualitative results of this paper are important.

1. The approach presented here can be extended to the games with any finite number of players (more than four players).

2. An SCE $x^* \in X$ is stable against any deviation of any coalition of players and is attractive, because when a coalition chooses its strategies from x^* , all other players will have incentive to choose their strategies from x^* as well.
3. The SCE could be applied even if the coalition structure changes over time.
4. The SCE could be used for the formation of stable alliances.
5. Game theory has been focusing on individual rationality and collective rationality so far. On the one hand, the individual interests of players are represented by the prominent Nash equilibrium with its selfish character (each player acts for himself only). On the other, the collective interests of players are represented by the concept of Berge equilibrium with its altruism (each player helps others, neglecting his own interests). Such an omission is not rooted in the human nature of players. The SCE partially addresses the incomplete representation of human behavior in the two concepts mentioned. In the game Γ , when player 1 chooses his SCE strategy, he does not neglect his own interests as an SCE is also a Nash equilibrium; moreover, in accordance with (1), he also helps (maximizes the payoffs of) all other players, which is the inherent property of a Berge equilibrium. The other players act in a similar way. Thus, the SCE fills the gap between the concepts of Nash equilibrium and Berge equilibrium, completing the former by «caring about others» and the latter by «caring about oneself».

Finally, we suggest two possible ways of extending this research. The first is to investigate the SCE in finite games. The second is to consider other approaches to manage uncertainty, such as the maximin regret principle.

REFERENCES

1. AUMANN, R. J. (1959) Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games. *Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematics Study.* 40. p. 287–324.
2. AUMANN, R. J. (1961) The Core of a Cooperative Game without Side Payments. *Transactions of the American Mathematical Society.* 98. p. 539–552.
3. BERGE, C. (1957) *Théorie générale des jeux a n personnes.* Paris: Gauthier-Villar.
4. BOREL, E. (1921) La théorie du jeu et les équations intégrales a noyau symétrique. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* 173. p. 1304–1308.

5. BOREL, E. (1924) Sur les jeux an interviennent l'hasard et l'abilité des joueurs. *Théorie des probabilités, Paris.* p. 204–224.
6. BOREL, E. (1927) Sur les systemes de formes lineares a determinant symetrique gauche et la theorie generale du jeu. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences.* 184. p. 52–53.
7. CHWE, M. S. Y. (1994) Farsighted Coalitional Stability. *Journal of Economic Theory.* 63. p. 299–325.
8. DOUGLAS, B. B., PELEG, B. and WHINSTON, M. D. (1987) Coalition-Proof Nash Equilibria I. Concepts. *Journal of Economic Theory.* 42 (1). p. 1–12.
9. ENGEL, C. (2011) Dictator Games: A Meta Study. *Experimental Economics.* 14. p. 583–610.
10. FEHR, E. and SCHMIDT, K. M. (2006) The Economics of Fairness, Reciprocity and Altruism: Experimental Evidence and New Theories. *Handbook of the Economics of Giving, Altruism and Reciprocity.* 1. p. 615–691.
11. GERMEYER, Yu. B (1986) *Non-Antagonistic Games.* Boston: D. Reidel Pub. Co., Dordrecht.
12. GLICKSBERG, I. L. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 3 (1). p. 170–174.
13. KAHNEMAN, D., KNETSCH, J. L. and THALER, R. H. (1986) Fairness and the Assumptions of Economics. *Journal of Business.* 59. p. 285–300.
14. KORNISHI, H. and RAY, D. (2003) Coalition formation as a Dynamic Process. *Journal of Economic Theory.* 110. p. 1–41.
15. LARBANI, M. and NESSAH, R. (2001) Sur l'quilibre fort selon Berge. *RAIRO Operations Research.* 35. p. 439–451.
16. LUCE, R. D. and RAIFFA, H. (1989) *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey.* Dover Books on Mathematics.
17. MOROZOV, V. V., SUKHAREV, A. G. and FEDOROV, V.V. (1986) *Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh (Operations Research in Problems and Exercises).* Moscow: Vysshaya Shkola.

18. NASH, J. (1950) Equilibrium points in N-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 36 (1). p. 48–49.
19. NASH, J. (1951) Non-cooperative games. *Annales of Mathematics*. 54 (2). p. 286–295.
20. NESSAH, R., LARBANI, M. and TAZDAIT, T. (2007) A Note on Berge Equilibrium. *Applied Mathematics Letters*. 20 (8). p. 926–932.
21. VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Mathematische Annalen*. 100 (1). p. 295–320.
22. RAY, D. and VOHRA, R. (1997) Equilibrium Binding Agreement. *Journal of Economic Theory*. 73. p. 30–78.
23. SALLY, D. (1995) Conversation and Cooperation in Social Dilemmas: A Meta-Analysis of Experiments from 1958 to 1992. *Rationality and Society*. 7. p. 58–92.
24. SAVAGE, L. Y. (1954) *The Foundations of Statistics*. New York: Wiley.
25. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of statistical division. *Journal of the American Statistical Association*. 46. p. 55–67.
26. SCARF, H. E. (1971) On the Existence of a Cooperative Solution for a General n-Person Game. *Journal of Economic Theory*. 32. p. 169–181.
27. TAZDAIT, T., LARBANI, M. and NESSAH, R. (2007) On Berge Equilibrium. *halshs-00271452s*. p. .
28. WALD, A. (1950) *Statistical Decision Functions*. New York: Wiley.
29. ZHAO, J. (1997) A Cooperative Analysis of Covert Collusion in Oligopolistic Industries. *International Journal of Game Theory*. 26. p. 249–266.
30. ZHUKOVSKIY, V. I. (1985) Some Problems of non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Methods in Operations Research*. p. 103–195.
31. ZHUKOVSKIY, V. I. and LARBANI, M. (2017) Alliance in Three Person Games. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 22 (1(29)). p. 105–119.
32. ZHUKOVSKIY, V. I., TOPCHISHVILI, A. and SACHKOV, S. N. (2014) Application of Probability Measures to the Existence of Berg-Vaisman Guaranteed Equilibrium. *Model Assisted Statistics and Applications*. 9 (3). p. 223–239.
33. ZHUKOVSKIY, V. I. and SALUKVADZE, M. E. (2020) *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics*. Springer.

УДК: 519.714.22, 510.649 MSC2010: 06E25, 93B25

МАЖОРИТАРНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ СИНТЕЗА КОМБИНАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ. ОБЗОР¹

© С. И. Гуров

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, Д. 1, СТ. 52, МОСКВА, ГСП-1, 119991, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ;
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПРЕКТИРОВАНИЯ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ РАН,
УЛ. СОВЕТСКАЯ, Д. 3, МОСКВА, ЗЕЛЕНОГРАД, 124365, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.
E-MAIL: sgur@cs.msu.su

MAJORITY ALGEBRA FOR THE SYNTHESIS OF COMBINATIONAL LOGIC SCHEMES.
REVIEW.

Gurov S. I.

Abstract. The article contains an overview of the results on the application of majority logic of combinational logic schemes. In this first part, the theoretical foundations of majority algebra, its axiomatization and primitive functions, and the use of majority logic in solving practical problems of circuit synthesis are considered.

In general, the existing automation tools for the design of electronic systems show satisfactory results of logical synthesis. At the same time, the possibilities of further increasing their efficiency by traditional means have practically been exhausted.

This explains the interest of developers of optimization algorithms and software in new methods of synthesis of combinational-logic circuits. The approach with the use of majority and inversion operations as the basic operations for representing Boolean functions seems to be promising. Quantum-dot cellular automaton, Single Electron Tunnelin, Tunneling Phase Logic, etc. are considered as alternatives to CMOS technology. It is important here that in these technologies the main logical units used to implement the schemes are the majority and/or minority logical elements.

The article contains the definition of majority algebra and its generally recognized axiomatization Ω . The primitive functions of the majority are considered, which are realized on one majority gate. The main applications of majority logic are described: Logic Optimization, Boolean Satisfiability, Decoding of Repetition Codes.

A brief description of the first algorithms for synthesizing majority schemes is given: MALS (Majority Logic Synthesizer, 2007), Kong's Synthesis (2010), MLUT (Majority Expression Lookup Table, 2015). A comparison of the results of these algorithms is presented.

Keywords: *majority logic, boolean algebra, axiomatization, primitive functions, logic synthesis.*

¹Работа финансировалась грантом РНФ 17-19-01645 «Разработка методов и средств проектирования реконфигурируемых систем на кристалле повышенной надежности».

1. ВВЕДЕНИЕ

Характеристики цифровых интегральных микросхем (ИМС) в значительной степени зависят от возможностей средств их логического синтеза.

В целом существующие средства автоматизации проектирования электронных систем показывают удовлетворительные результаты логического синтеза. При этом возможности дальнейшего повышения их эффективности традиционными средствами практически исчерпаны. Это объясняет интерес разработчиков к новым методам синтеза комбинационно-логических схем.

Естественной идеей здесь является разработка и использование нетрадиционных способов представления булевых функций (БФ). Перспективным представляется подход с использованием операций мажорирования (MAJ) и инвертирования (INV) в качестве базовых операций представления БФ [6]. Функция большинства $Maj(x, y, z)$ есть функция от трёх аргументов, которая принимает значение *истина*, если хотя бы два из её входов *истины*. Отметим, что эта функция давно изучалась в приложениях логического синтеза. Д. Кнут в последнем 3-м томе своей фундаментальной монографии «Искусство программирования» пишет, что эта функция большинства «вероятно, самая важная троичная операция во всей Вселенной».

В данной работе дан обзор основных понятий и алгоритмов синтеза ИМС, основанных на функции большинства.

Обычно при логическом синтезе в качестве базовых операций рассматриваются *инвертирование*, *конъюнкция* (AND), *дизъюнкция* (OR) и условный оператор *если-то-иначе* (If-Then-Else). Другие логические операции получают композицией базовых. Простейшие традиционные структуры данных и соответствующие алгоритмы оптимизации основаны на двухуровневом представлении булевых функций в форме «сумма произведений» (Sum Of Products, SOP) или «произведение сумм» (Product of Sums, POS), в которых некоторые вхождения переменных могут браться с отрицанием.

Ещё одной структурой данных для представления и оптимизации логических функций и схем является двоичные решающие диаграммы (Binary Decision Diagram, BDD), основанные на операторах If-Then-Else, реализуемых мультиплексорами (MUX). Применяют также многоуровневые логические сети, использующие в качестве базисных операции AND, OR, INV, MUX с более мощными средствами оптимизации и синтеза [2].

Непрерывное увеличением сложности логических схем привело к появлению одnorodных многоуровневых логических сетей, состоящими только из узлов AND, соединенных обычными и инвертирующими цепями [3]. Отметим, что современным

программным обеспечением для оптимизации и синтеза больших схем при научных исследованиях считается пакет ABC, основанный на графах с вершинами AND/INV (AIG) [4]. Они описывают т. н. дистрибутивные схемы [5]. Схемы, синтезированные новыми алгоритмами обычно сравнивают с результатами работы пакета ABC.

Важным вопросом является физическая реализация мажоритарных элементов. Отметим, что физические ограничения КМОП-технологии (CMOS) побуждают обращаться к альтернативным технологиям реализации логических элементов. Как возможные замены CMOS рассматриваются различные нанотехнологии, и прежде всего — следующие.

1. Клеточные автоматы квантовых точек (Quantum-dot cellular automaton, QCA), которые представляют собой предлагаемую физическую реализацию «классических» клеточных автоматов путем использования квантово-механических явлений.
2. Технологии одноэлектронного туннелирования (Single Electron Tunnelin, SET), использующие возможность получения чувствительных изменений напряжения при манипуляции с отдельными электронами.
3. Фазовая логика туннелирования (Tunneling Phase Logic, TPL).
4. Спинтронные устройства, в которых для физического представления информации кроме заряда электрона используется и его спин.

Важным здесь является то, что в указанных технологиях основными логическими единицами, используемыми для реализации схем, являются именно мажоритарные и/или миноритарные логические элементы. Конкретно вопросы физической реализации таких элементов рассмотрены в работе [7]. Некоторые примеры приведены в разделе 2.7.

2. АЛГЕБРА БОЛЬШИНСТВА

2.1. Определение и основные свойства. Напомним, что *булевой алгеброй* называется множество B , содержащее по крайней мере два элемента — *нуль* o и *единица* ι , с заданными на нём бинарными операциями *объединения* \sqcup , *пересечения* \sqcap и унарной операцией *дополнения* $'$ таких, что для любых элементов $x, y, z \in B$ выполняются пары *аксиом* или *законов алгебры* коммутативности, дистрибутивности, нейтральных свойств особых элементов, а также два основных закона дополнения [8].

Таким образом, булева алгебра есть шестёрка $\langle B, \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$, в которой операции подчиняются указанном аксиомам. Данные аксиомы влекут справедливость законов инволютивности дополнения, взаимной дополнительности o и ι , законы

Де Моргана, поглощающих свойств универсальных граней, ассоциативности, идемпотентности и поглощения [9].

Если множество B двухэлементно, то получаем *тривиальную (двухэлементную) булеву алгебру*. *Алгебра логики* — это тривиальная булева алгебра, в которой символы нуль и единицы будем обозначать обычными 0 и 1. Операцию дополнения в этом случае называют *инвертированием*. Операции объединения и пересечения алгебры логики будем обозначать $+$ и \cdot (иногда опускается) и называть, как принято в схемотехнике, ИЛИ (OR) и И (AND) соответственно.

Определение ([1, 6, 10]). *Мажоритарной булевой алгеброй (логики)* называют пятерку $\langle \{0, 1\}, M, ', 0, 1 \rangle$, где $\{0, 1\}$ — двухэлементный носитель, $'$ — унарная операция инвертирования, а M — тернарная операция *мажорирования*:

$$M(x, y, z) = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) \stackrel{\text{def}}{=} x\#y\#z, \quad (1)$$

причём операции $'$, $+$, \cdot , константы 0 и 1 и их свойства наследуются из алгебры логики.

Таким образом, функция M осуществляет выбор «2 из 3» голосования, реализуемой схемой воутера (см. Табл. 1) [11–13].

x	y	z	$M(x, y, z)$	x	y	z	$M(x, y, z)$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 1. Таблица истинности функции большинства M

В общем случае при нечётных n рассматривают n -местную функцию большинства M_n общего вида [11, 15]:

$$M_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil. \quad (2)$$

Далее считаем $M = M_3$. Фиксируя в M одну из переменных, можно получить функции AND и OR, например:

$$M(x, y, 0) = x \cdot y, \quad M(x, y, 1) = x + y.$$

Это означает, что пара функций M и $'$ образует полный базис во множестве P_2 всех функций алгебры логики.

2.2. **Аксиоматизация функции большинства (Ω).** Следующие пять основных правил преобразований функции M большинства называют *набором её аксиом* и традиционно обозначают Ω [6, 15, 16]. Каждая аксиома из Ω может быть доказана либо полным перебором значений аргументов, либо формульными преобразованиями полиномов Жегалкина, заметив, что соотношение (1) эквивалентно

$$M(x, y, z) = (x \cdot y) \oplus (y \cdot z) \oplus (z \cdot x), \quad (\Omega)$$

где \oplus — операция суммирования по $\text{mod } 2$.

Аксиома коммутативности $\Omega.C$ определяет, что порядок переменных в M не меняет её значения:

$$M(x, y, z) = M(x, z, y) = M(z, y, x). \quad (\Omega.C)$$

Аксиома ассоциативности $\Omega.A$ позволяет проводить обмен аргументов (x и z) между двумя функциями большинства, если они находятся на последующих уровнях вложенности и имеют одну общую переменную (w):

$$M(x, w, M(y, w, z)) = M(z, w, M(y, w, x)). \quad (\Omega.A)$$

Аксиома дистрибутивности $\Omega.D$ определяет, что можно распределить набор переменных ($\{x, y\}$) по вложенным функциям:

$$M(x, y, M(u, v, z)) = M(M(x, y, u), M(x, y, v), M(x, y, z)). \quad (\Omega.D)$$

Аксиома распространения инверсии $\Omega.I$, определяет, что мажоритарная функция является самодвойственной [17]:

$$M'(x, y, z) = M(x', y', z'). \quad (\Omega.I)$$

Аксиома мажорирования $\Omega.M$ представляется двумя равенствами:

$$M(x, x, y) = x, \quad \text{и} \quad M(x, y, x') = y. \quad (\Omega.M)$$

Первое выражает основной смысл понятия большинства, а второе — отношения «*между*».

Алгебра $(B, M', 0, 1)$ аксиоматизированная системой Ω является непротиворечивой и полной [16].

Аксиоматизация функции большинства общего вида (2) дана в [15]. Соответствующие аксиомы обозначаются теми же символами C, M, A, D и I , но с префиксом Ω_n . Для примера приведём некоторые из аксиом для n -арных функций большинства.

Коммутативность для: $n = 5$: $M_5(a, b, c, d, e) = M_5(b, a, c, d, e) = M_5(a, b, c, e, d)$.

Мажоритарность для: $n = 7$: $M_7(a, b, c, d, e, g, g') = M_5(a, b, c, d, e)$.

$$\begin{aligned} \text{Ассоциативность для: } n = 5: M_5(a, b, c, d, M_5(a, b, e, g, h)) = \\ = M_5(a, b, e, d, M_5(a, b, c, g, h)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Дистрибутивность для: } n = 7: M_7(a, b, c, d, e, g, M_7(x, y, z, w, k, t, v)) = \\ = M_7(M_7(a, b, c, d, e, g, x), M_7(a, b, c, d, e, g, y), M_7(a, b, c, d, e, g, z), \\ M_7(a, b, c, d, e, g, w), k, t, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Распространение инверсии для: } n = 9: M'_9(a, b, c, d, e, g, h, x, y) = \\ = M_9(a', b', c', d', e', g', h', x', y'). \end{aligned}$$

Соответствующую логику обозначают МАJ- n , а ранее рассмотренную — МАJ-3.

Заметим, что возможны и другие аксиоматизации для функции большинства. Например, можно показать, что правило в $\Omega.D$ следует из $\Omega.C$, $\Omega.A$ и $\Omega.M$. Избыточность системы аксиом не является недостатком на практике и только облегчает вывод тех или иных закономерностей. Здесь $\Omega.D$ включается в аксиоматическую систему.

2.3. Примитивные функции большинства. *Примитивные функции большинства* (мажорирования, Primitive Majority Functions) получаются из одной функции M при подстановке в качестве аргументов тех или иных конкретных значений. При схемной реализации они могут быть получены на одном мажоритарном вентиле.

В мажоритарной алгебре примитивные функции (или просто *примитивы*) используются как база для построения более сложных функций. Множество всех примитивов подразделяют в семейства C , V , G и T функций, каждое из которых содержит функции от определённого количества переменных [18].

Семейство C состоит только из функций-констант 0 и 1 (с пустым множеством аргументов). Следовательно, $|C| = 2$.

Семейство V включает в себя все функции от одной переменной, в прямой или инверсной форме:

$$V = \{x, x', y, y', z, z'\}, \quad |V| = 6.$$

Понятно, что в логике МАJ- n имеем $|V| = 2 \cdot n$.

Множество $G = \{E, O\}$ образовано функциями от двух переменных И или ИЛИ, образующих подмножества E и O соответственно. Для $n = 3$ имеем $E = \{A \cdot B, A \cdot C, B \cdot C\}$ и $O = \{A + B, A + C, B + C\}$. Каждая комбинация имеет 4 варианта инверсии, например комбинация $A + B$, имеет варианты $\{A + B, A + B, A + B, A + B\}$. Для $n = 3$ все 24 функции из G приведены в Табл. 2. В общем логике МАJ- n имеем $|G| = (4 \cdot |E|) + (4 \cdot |O|)$.

$x \cdot y = M(x, y, 0)$	$x + y = M(x, y, 1)$
$x' \cdot y = M(x', y, 0)$	$x' + y = M(x', y, 1)$
$x \cdot y' = M(x, y', 0)$	$x + y' = M(x, y', 1)$
$x' \cdot y' = M'(x, y, 1)$	$x' + y' = M'(x, y, 0)$
$x \cdot z = M(x, 0, z)$	$x + z = M(x, 1, z)$
$x' \cdot z = M(x', 0, z)$	$x' + z = M(x', 1, z)$
$x \cdot z' = M(x, 0, z')$	$x + z' = M(x, 1, z')$
$x' \cdot z' = M'(x, 1, z)$	$x' + z' = M'(x, 0, z)$
$y \cdot z = M(0, y, z)$	$y + z = M(1, y, z)$
$y' \cdot z = M(0, y', z)$	$y' + z = M(1, y', z)$
$y \cdot z' = M(0, y, z')$	$y + z' = M(1, y, z')$
$y' \cdot z' = M'(1, y, z)$	$y' + z' = M'(0, y, z)$

Таблица 2. Функции семейства G для $n = 3$

Семейство T состоит из всех функций, получаемых из одной функции большинства инвертированием всевозможных подмножеств аргументов. Поскольку каждая комбинация имеет 8 вариантов инвертирования, что в общем случае $|T| = t \cdot 8$, где t есть представляет количество возможных комбинаций аргументов. Ясно, что при $n = 3$ имеется только одна такая комбинация. Список всех функций из T при $n = 3$ приведён в Табл. 3.

$x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = M(x, y, z)$
$x' \cdot y + y \cdot z + z \cdot x' = M(x', y, z)$
$x \cdot y' + y' \cdot z + z \cdot x = M(x, y', z)$
$x \cdot y + y \cdot z' + z' \cdot x = M(x, y, z')$
$x' \cdot y' + y' \cdot z + z \cdot x' = M'(x, y, z')$
$x \cdot y' + y' \cdot z' + z' \cdot x = M'(x', y, z)$
$x' \cdot y + y \cdot z' + z' \cdot x' = M'(x, y', z)$
$x' \cdot y' + y' \cdot z' + z' \cdot x' = M'(x, y, z)$

Таблица 3. Семейство функций T при $n = 3$

Суммарно получим $|C| + |V| + |G| + |T| = 40$ примитивных функций большинства.

2.4. Медианная алгебра. Мажоритарная булева алгебра тесно связана с медианной алгеброй [19].

Определение. Медианная алгебра есть множество с определённой на нём тернарной операцией $\langle x, y, z \rangle$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

- 1) $\langle x, y, y \rangle = y$;
- 2) $\langle x, y, z \rangle = \langle z, x, y \rangle = \langle x, z, y \rangle$;

$$3) \langle \langle x, w, y \rangle, w, z \rangle = \langle x, w, \langle y, w, z \rangle \rangle.$$

Данные аксиомы обобщают понятия «между» и функции мажорирования «2 из 3». Любая дистрибутивная решётка (и, следовательно, любая булева алгебра) есть медианная алгебра с операцией (1).

Мы видим, что аксиома 2) эквивалентна аксиоме коммутативности $\Omega.C$. Это приводит к эквивалентности 1) и первого равенства из аксиомы мажорирования $\Omega.M$ и 3) — аксиоме ассоциативности $\Omega.A$. В то же время медианная алгебра беднее мажоритарной алгебры по выразительной силе: в первой алгебре отсутствует операция дополнения.

Показано, что медианная алгебра с элементами 0 и 1 и операцией $\langle x, y, z \rangle$ со свойством $\langle 0, x, 1 \rangle = x$ есть дистрибутивная решётка.

В свою очередь, медианная алгебра связана с медианными графами. *Медианным* называется неориентированный граф, в котором для каждой тройки вершин x, y и z существует единственная вершина x, y, z называемая *медианой*, и которая находится на некотором (их может быть несколько) кратчайшем пути между любой из пар вершин (x, y) , (x, z) и (y, z) . Пример медианного графа приведён на Рис. 1.

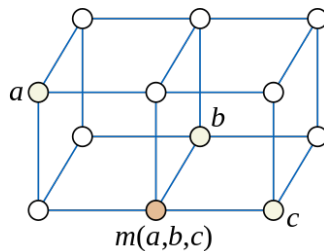


Рис. 1. Пример медианного графа: $m(a, b, c)$ — медиана вершин x, y и z .

Ясно, что операция $\langle x, y, z \rangle$ определяет медианную алгебру на вершинах медианного графа как на своих элементах.

2.5. Функция минорирования. Вместе с функцией мажорирования, рассмотрим функцию минорирования.

Вариант такой функции предложен в [7]. Она обозначена m и определена как дополнительная до функцией большинства

$$m(x, y, z) = M'(x, y, z) = x' \cdot y' + y' \cdot z' + z' \cdot x'. \quad (4)$$

Ясно, что

$$m(x, y, 0) = x' + y' = (xy)', \quad m(x, y, 1) = x'y' = (x + y)'. \quad (5)$$

Такое определение удобно для при схмотехническом проектировании в технологии одноэлектронного туннелирования SET для реализации логических схем используются как мажоритарные, так и неосновные вентили [7].

Для нас более интересной будет функция минорирования μ , определяемая как

$$\mu(x, y, z) = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz = x \oplus y \oplus z. \quad (6)$$

Неформально μ может быть проинтерпретирована как функция голосования «против», за выбывание:

$$\mu(x, x, y) = y.$$

При этом второе равенство в (Ω, M) остаётся справедливым:

$$\mu(x, x', y) = y.$$

Очевидно для μ справедлив аналог аксиомы коммутативности.

Полностью примитивные функции меньшинства мы приводить не будем в связи с элементарности их получения. Приведём только некоторые из них:

$\begin{aligned} \mu(x, y, 0) &= x \cdot y' + x' \cdot y \\ \mu(x, y, 1) &= x' \cdot y' + x \cdot y \\ \mu(x, 0, 0) &= \mu(x, 1, 1) = x \\ \mu(x, 0, 1) &= \mu(x, 1, 0) = x' \\ \mu(x, y, z') &= \mu(x', y', z') = \\ &= (x' + y) \cdot (x + y') \\ \mu(x, y', z') &= \mu(x, y, z) \end{aligned}$

Таблица 4. Некоторые примитивные функции меньшинства μ

Поскольку все примитивные функции меньшинства, очевидно, могут быть представлены в виде

$$a \cdot x \oplus b \cdot y \oplus c \cdot z \oplus d, \quad a, b, c, d \in \{0, 1\},$$

то всего их имеется 15: исключён случай $a = b = c = d = 1$.

Легко также показать справедливость равенств, связывающие M и μ :

$$\mu(x, y, z) = \mu(M(x, y, z), M(x, y, z), \mu(x, y, z)),$$

$$M(x, y, z) = \mu(M(x, y, z), \mu(x, y, z), \mu(x, y, z)),$$

$$M(x', y, z) = \mu(\mu(x, y, z), M(x, y, z), x),$$

$$M(x', y', z) = \mu(M(x, y, z), \mu(x, y, z), 0),$$

и аналогичных с учётом аксиомы коммутативности.

Реализация функций μ вместе с M на одном обратимом элементе может быть использована при синтезе обратимых схем с использованием элемента OTG [14].

2.6. Применения мажоритарной логики. Некоторые возможные применения мажоритарной логики рассмотрены в [15]. Кратко изложим здесь их.

2.6.1. Логическая оптимизация. Так называют процесс трансформации некоторой структуры, представляющей логические данные (например логической схемы) с целью улучшения некоторых её характеристик: размера (количество узлов или элементов), глубины (максимальное количество уровней), взаимосвязей (количество ребер или цепей) и т. д.

Результаты теоретических исследований в данной области показывают, что большинство логических схем в мажоритарной логике представляются в гораздо более компактном виде, чем через операции конъюнкции и дизъюнкции. Например большинство логических схем глубины 2 и 3, реализующие арифметические функции умножения, деления, сложения и т. д., имеют полиномиальный размер, в то время как традиционные И/ИЛИ-аналоги — экспоненциальный.

Естественным набором правил для логической оптимизации мажоритарных схем является аксиоматическая система Ω .

Например, рассмотрим логическую схему, задающую булеву функцию

$$f = M_5 (M_3(a, b, c), M_3(a, b, d), M_3(a, b, e), M_3(a, b, g), h),$$

где M_5 по (2) есть функция большинства от 5 аргументов.

Предположим, желательно минимизировать количество мажоритарных операторов, оставляя путь от h к f максимально коротким (в один оператор). Первоначальная стоимость схемы составляет 5 операторов. Сначала обеспечим одинаковое количество аргументов у всех мажоритарных операторов. Для этого, используя аксиому $\Omega_n.M$, добавим фиктивную переменную x :

$$f = M_5 (M_5(a, b, c, x, x'), M_5(a, b, d, x, x'), M_5(a, b, e, x, x'), M_5(a, b, g, x, x'), h).$$

Теперь применяем $\Omega_n.D$:

$$f = M_5 (M_5(a, b, c, x, x'), M_5(a, b, d, x, x'), M_5(a, b, e, x, x'), g, h).$$

Наконец, посредством $\Omega_n.M$ уменьшаем арность операторов до минимума:

$$f = M_5 (M_3(a, b, c), M_3(a, b, d), M_3(a, b, e), g, h).$$

и итоговая стоимость схемы составляет 4 мажоритарных оператора.

Очевидно все эти правила легко реализуются программно, как и для работы с большими системами — аксиоматика Ω_n .

2.6.2. *Задача выполнимости.* Данная задача выполнимости булевых формул (Boolean Satisfiability problem, SAT) является первой известной NP-полной задачей. Она заключается в следующем: можно ли назначить всем переменным формулы значения 0 и 1 так, чтобы оценка её значения стала равной 1, и тогда формула является выполнимой. Обычно SAT формулируется для формул в КНФ (CNF). Однако в последнее время рассматривается и мажоритарная логика.

В некоторых случаях, например, при отсутствии общих логических констант, проблема SAT с мажоритарной логикой становится тривиальной, оставаясь сложной для других случаев. Тем не менее, подход к решению проблемы SAT с помощью мажоритарной логики представляется перспективным. При этом должны применяться правила преобразований мажоритарных выражений. Для этой цели может быть использована описанная выше аксиоматическая система Ω_n .

В качестве примера приведем решение проблемы SAT по мажоритарным правилам Ω_n . Рассмотрим функцию

$$f = M_5 (M_3(a, b, c), M_5(M_5(a, b, c, 0, 0), b', c, 0, 0), a', b', 0),$$

Для установления выполнимости f , решатель SAT на основе мажоритарных функций пытается определить, имеют ли значение 1 как минимум 3/5 аргументов в функции M_5 на верхнем уровне. В противном случае возникает ситуация, называемая *конфликтом*. Если все возможные входные значения приводят к конфликту, то функция невыполнима.

Сначала рассмотрим элемент, реализующий функцию $M_5(M_5(a, b, c, 0, 0), b', c, 0, 0)$. Прежде чем искать возможные значения аргументов, заметим, что аксиома $\Omega_n.A$ переупорядочивания переменных представляет эту функцию в виде $M_5(M_5(b', b, c, 0, 0), a, c, 0, 0)$. В этой формуле аксиома $\Omega_n.M$ аннулирует b и b' приводя формулу к виду $M_5(M_3(c, 0, 0), a, c, 0, 0)$.

Далее дважды применяя правила $\Omega_n.M$, приходим к виду $M_5(0, a, c, 0, 0)$, а затем и к 0. После этого исходная функция представляется формулой $M_5(M_3(a, b, c), 0, a', b', 0)$. Теперь решение проблемы SAT упрощается: для избежания конфликта необходимо, чтобы $a' = b' = 1$, то есть $a = b = 0$. Эти значения приводят к $M_3(a, b, c) = 0$, что означает наличие конфликта при всех значениях остальных входных переменных. Таким образом, рассматриваемая функция является невыполнимой.

2.6.3. *Декодирование кодов повторения.* Коды повторения являются простейшими кодами, исправляющими ошибки. Они используют многократную передачу сообщений по каналу с шумом, в предположении, что канал изменит меньшую часть битов. Тогда декодирование принятого сообщения естественно проводить с помощью мажоритарной логики.

Обычно для уменьшения вероятности ошибки в критически важных системах связи, и, как следствие, сбоя, используется иерархическое кодирование. Пороговое декодирования применяется на нескольких уровнях, а эффективность определяется количеством мажоритарных операторов. При этом необходимо обеспечить минимальную вероятность ошибки. В этом случае возможно использование аксиоматической системы Ω_n .

Приведем пример оптимизации логического декодирования на основе мажоритарных функций с использованием Ω_n . Для этого рассмотрим систему связи, отправляющую одно и то же двоичное сообщение по пяти различным каналам C_1, \dots, C_5 .

Пусть уровень шума в каждом канале различен, и для C_1, \dots, C_4 повторений данных не требуется, а для C_5 необходимо 5 повторений. Предположим также, что связь по каналу C_5 намного медленнее, чем по другим каналам. Окончательное декодированное сообщение определяется по большинству для каждого сообщения в каждом канале.

Если декодированное сообщение i -го канала обозначить x_i , а y — результат декодирования, то в мажоритарной логике система декодирования выражается формулой $y = M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Очевидно для x_1, x_2, x_3, x_4 декодирование не требуется и единственным сообщением, нуждающимся в пороговом декодировании является x_5 . Для него имеем $x_5 = M_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, где z_i — принятые сообщения по каналу C_5 . В результате декодирующая система представляется в виде

$$y = M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, M_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)).$$

При декодирования y критическим по производительности элементом является $M_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. При этом последним поступающим сообщением, которое должно быть обработано, является z_5 . Для улучшения эффективности декодирования можно использовать аксиому $\Omega_n.D$. Однако её применение не очевидно. Покажем, как это можно сделать.

Идея здесь состоит в том, чтобы переменные z_i поднять к верхним уровням до максимально возможных. Правило $\Omega_n.D$ приведёт к преобразованию

$$y = M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, M_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5))$$

В

$$y = M_5 (M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1), M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, z_2), M_5(x_1, x_2, x_3, x_4, z_3), z_4, z_5).$$

В результате большая часть вычислений будет выполняться до того, как поступят последние сообщения z_4 и z_5 . Это означает, что когда поступит самое позднее значение z_5 , потребуется только один уровень вычисления большинства, а не два, как в исходном представлении.

2.7. Физическая реализация мажоритарной/миноритарной логики. В инновационных нанотехнологиях основными логическими единицами, используемыми для реализации схем, являются элементы (гейты) мажоритарных или миноритарных функций. На их основе было предложено несколько методов синтеза логических схем.

За последние четыре десятилетия КМОП-технология была основной в создании ИМС. Эта технология позволила создать схемы высокой степени интеграции, быстродействия и низкого энергопотребления. Однако к настоящему времени фундаментальные физические пределы этой технологии уже достигнуты [20]. В качестве замены КМОП-технологии рассматриваются указанные выше QCA, SET, TPL, спинтронные устройства и др. Ожидается что они обеспечат дальнейшее уменьшение размеров элементов и других функций интегрированных систем.

Для примера рассмотрим физическую реализацию мажоритарной логики в технологии SET одноэлектронного туннелирования [7]. В этой технологии для реализации логических схем используются как мажоритарные, так и миноритарные элементы. Миноритарный вентиль SET реализует логическую функцию (4) минорирования с тремя входами. Поскольку эта функция является просто инверсией функцией большинства, она выдает выходной сигнал 0, если один или несколько её входов равны 1, и в противном случае — сигнал 1.

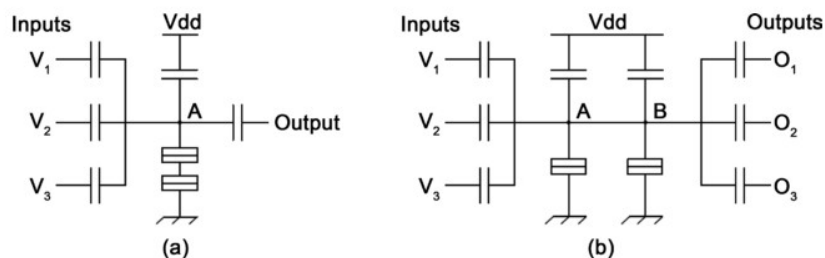


Рис. 2. Элементы в технологии SET: (а) миноритарный, (б) мажоритарный

На рис. 2 (а) показан базовый миноритарный элемент SET. Он состоит из трех входных конденсаторов, одноэлектронных блоков (single-electron box, SEB) и выходного конденсатора. Входы V_1 , V_2 и V_3 проходят через входные конденсаторы, образуя сеть суммирования напряжения. Эти конденсаторы вырабатывают среднее напряжение на своих входах в узле A . Основываясь на значении среднего напряжения, электрон будет туннелировать через SEB, что приведёт к отрицательному потенциалу узла A . В противном случае потенциал на A останется положительным. Отрицательные и положительные потенциалы представляются логическими значениями 0 и 1.

При установке одного из трех входов в 0 или 1, вентиль реализует по (5) соответственно логический NAND с двумя входами или логический вентиль NOR с двумя входами.

Мажоритарный вентиль SET состоит из трех входных конденсаторов, сбалансированной пары SEB и трех выходных конденсаторов, как показано на рис. 2 (b). Когда напряжение смещения (V_{dd}) увеличивается, происходит туннелирование электронов, что приводит к (0,1) или (1,0) состояниям. Если большинство входов равно 1, возникает состояние (0,1), означающее положительный потенциал в узле B . В противном случае возникает состояние (1,0), означающее отрицательное значение потенциала в узле B .

Отметим, что по мнению высказанному журнале в *Electronic Design* (Mar 06, 2013) исследователем Р. Зарром из Texas Instruments, КМОП технология ещё будет востребована какое-то время, и в ближайшем будущем останется основой производства высокопроизводительных логических устройств. Однако проблемы масштабирования, плотности мощности и её рассеяния заставят перейти на альтернативные технологии. Наибольшие шансы вытеснить КМОП в области создания логических элементов для цифровых ИС схем имеет технология клеточных квантовых автоматов ККА, которая, возможно, уже к 2025 г. станет основной при производстве компонент электронных устройств.

Для создания логических вентилях клеточные квантовые автоматы упорядочиваются путем их размещения друг рядом с другом в определенной последовательности. В технологии ККА имеются две фундаментальные вентиляльные структуры. Одна представляет собой инвертор, а другая — мажоритарный вентиль, представленные на рис. 3. Все остальные логические функции являются производными от этих двух структур.

Первоначально логика на основе ККА будет, видимо, создаваться с использованием традиционных методов изготовления кремниевых пластин, с помощью



Рис. 3. Два основных логических элемента в технологии квантовых клеточных автоматов: инвертор, или вентиль НЕ (вверху), и мажоритарный вентиль (внизу).
 (<https://www.electronicdesign.com/technologies/analog/article/21796222/the-quest-for-zero-power-logic>)

электронно-лучевой литографии. Однако она малопригодна для массового производства. Перспективными для крупносерийного изготовления структур с размерами менее 10 нм являются, например, фотолитография в дальней области ультрафиолетового спектра.

3. ПЕРВЫЕ АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА МАЖОРИТАРНОЙ ЛОГИКИ

Простейшие методы синтеза мажоритарной логики, такие как карты Карно, таблица сокращений-унификации, разложение Шеннона и др., подходят только для синтеза несложных сетей, и они используются только для ручного синтеза. Также известны методы, ориентированные на синтез булевых функций от трёх переменных. Некоторые алгоритмы, разработанные в 2004–2008 гг. приведены в работах [21–25].

Затем были предложены и более мощные методы: на основе интерактивного синтеза (пакет SIS), разложения булевых функций на три-выполнимые или четыре-выполнимые сети, на базе генетического алгоритма и дизъюнктивных методов [7].

Опишем некоторые методы логического синтеза мажоритарной/миноритарной логики.

3.1. Алгоритм MALS. MALS (Majority Logic Synthesizer) является первым (2007) предложенным комплексным методом синтеза, который способен синтезировать многоуровневые логические сети большинства/меньшинства с несколькими выходами [26]. Идея алгоритма — на основе уже оптимизированной схемы в традиционном базисе получить схему на функциях большинства.

На вход алгоритма MALS подаётся представление минимизированной многовыходной комбинационно-логической схемы, а выход представляет собой эквивалентный мажоритарный граф. Обработка начинается с такой декомпозиции входной схемы, чтобы каждый элемент имел бы три входа. Этот процесс выполняется с использованием методов предварительной обработки и декомпозиции в пакете SIS [27].

Следующим шагом является проверка каждого декомпозированного элемента, реализует ли он мажоритарную функцию. Если это не так, элемент проверяется на наличие дублирующих входов. При их наличии будет проведена факторизация функции узла и затем — представление её в базисе И/ИЛИ.

Если дублирующих входов не имеется, но функция узла может быть реализована менее, чем четырьмя логическими элементами И/ИЛИ, будет проведена соответствующая реализация. Когда такая реализация невозможна, данный узел схемы будет преобразован в эквивалентное двухуровневое мажоритарное выражение с максимум четырьмя основными элементами. Данная процедура выполняется следующим образом.

Сначала строится карта Карно логической функции узла. Затем на этой карте находится конфигурация, которую можно описать функцией большинства; её обозначают f_1 . Далее ищется вторая такая допустимая конфигурация, дающая функцию большинства f_2 ; аналогично находится функция f_3 . В результате исходный узел оканчивается возможно заменить на функцией этих трех функций в виде $M(f_1, f_2, f_3)$.

3.2. Алгоритм Конга. Другой общий метод синтеза мажоритарной/миноритарной сети (2010) был предложен в работе К. Конга с соавторами [28].

Входом алгоритма является произвольная логическая многовыходная функция, а выходом является эквивалентная мажоритарная сеть. Алгоритм начинает с предварительной обработки входной сети и проверки её правильности с помощью пакета SIS. Если ошибок нет, для упрощения и декомпозиции применяются несколько методов предварительной обработки.

После предварительной обработки с помощью SIS функции, чтобы каждый узел имеет не более трех входных переменных. Для получения минимального количества

трёхвходовых узлов используют четыре различных метода. Затем сеть проверяется на наличие узлов, которые могут быть представлены разветвлениями цепей, сохраняя при этом правильное функционирование. Этот процесс может ещё больше сократить количество узлов.

На следующем шаге проверяется каждый узел в декомпозированной сети, реализует ли он мажоритарную функцию. Если это так, функция преобразуется в соответствующее выражение с использованием вышеописанных сорока примитивных мажоритарных булевых функций от 3 аргументов. В противном случае все допустимые группы выражений находятся из сорока мажоритарных выражений. Каждая группа состоит из трех мажоритарных выражений (f_1, f_2, f_3) , где узел является мажоритарной функцией этих выражений, т. е. $M(f_1, f_2, f_3)$.

Затем выбираются все функции большинства, которые состоят из групп выражений с минимальным числом узлов. После этого выбранные функции проверяются для выбора функций с минимальным количеством аргументов. Наконец, выбранные функции снова проверяются для выбора функций с минимальным количеством инверторов. Те же шаги повторяются для инвертированной функции узла.

Следующим шагом является выбор из найденных функций большинства, функций с минимальным числом узлов, входов и инверторов. Последний шаг состоит в проверке полученных мажоритарных выражений и проверки на наличие дублирующих узлов. Если таковые найдутся, они удаляются, а вся сеть соответствующим образом будет перестраиваться. Этот процесс продолжается до тех пор, пока найдутся дублирующие узлы. На этом алгоритм заканчивает работу.

3.3. Алгоритм MLUT. Одним из методов синтеза мажоритарной/миноритарной логики является метод, использующий таблицу подстановки мажоритарных выражений (Majority Expression Lookup Table, MLUT, 2015) [29].

Входными данными алгоритма является произвольная логическая сеть, а выходными — эквивалентная ей сеть мажоритарной логики. Алгоритм также начинается с предварительной обработки и декомпозиции входной сети с использованием SIS, как и в методе Конга. Однако здесь эти процедуры могут работать с логическими функциями от четырёх аргументов.

В результате предварительной обработки входные булевы функции упрощаются. При декомпозиции сети используются четыре метода из алгоритма Конга. Эти методы разлагают сеть на 2-, 3- и 4-входовые подсети.

В ходе своей работы алгоритм MLUT использует таблицу поиска мажоритарных выражений. Она строится путем генерации эквивалентных мажоритарных выражений для всех возможных булевых функций от четырёх аргументов. Таблица

содержит девяносто четыре булевых функции и их эквивалентные мажоритарные выражения. На основе этой таблицы каждый узел, имеющий до четырех переменных, преобразуется в соответствующее мажоритарное выражение.

Далее проводится удаление избыточности. Этот процесс, состоящий из нескольких шагов может обеспечить дальнейшее упрощение сети. Начинается он с удалением дублируемых узлов. Затем удаляются дублирующие входы узлов. Наконец последний шаг устранения избыточности состоит в минимизации числа инверторов (если в сети имеются два последовательных инвертора).

Также возможен случай, когда мажоритарный элемент в сети имеет два или три инвертора на входе. Тогда он заменяется имеющим единственный инвертор на выходе. Такое удаление избыточности проводится неоднократно, пока дальнейшее упрощение станет невозможным.

3.4. Сравнение и обсуждение. Три вышеизложенных метода синтеза отличаются друг от друга методами предварительной обработки, декомпозиции, преобразования и критериями оптимизации — число элементов, глубина схемы, число инверторов и возможное число входов элементов.

В статье [7] обсуждаются и сравниваются этапы данных алгоритмов: предобработка, декомпозиция, преобразование булевых функций в выражения над мажоритарными, оптимизация по выбранным критериям.

Далее представлена следующая информация.

1. Результаты синтеза схем вычислений восьми стандартных булевых функций от 3-х переменных различными методами. Приведены число элементов, глубина схемы, число инверторов и входных переменных. Из полученных результатов следует, что MALS дает оптимальное решение для некоторых функций, в то время как алгоритмы Конга и MLUT получают оптимальные выражения по числу элементов, уровней и инверторов для всех булевых функций. Однако ни один из этих методов не приводит к минимальному количеству входов у элемента для всех функций.
2. Сравнение результатов синтеза 40 тестовых функций с использованием вышеописанных методов синтеза.
3. Анализ возможностей оптимизации для вышеописанных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. AMARÙ, L., TESTA, E., COUCEIRO, M., ZOGRAFOS, O., DE MICHELI, G., & SOEKEN, M. (2018). Majority logic synthesis. Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Design. doi:10.1145/3240765.3267501.

2. YANG, C., CIESIELSKI, M., (2002) BDS: A BDD-Based Logic Optimization System, IEEE Trans. CAD, 21(7): 866-876.
3. BRAYTON, R., MISHCHENKO, A., (2010) ABC: An Academic Industrial-Strength Verification Tool, Proc. CAV.
4. ABC synthesis tool — available online.
5. МАРАХОВСКИЙ, В. Б., РОЗЕНБЛИУМ, Л. Я., ЯКОВЛЕВ, А. В. Моделирование параллельных процессов. Сети Петри. — СПб.: Профессиональная литература, 2014.
MARAKHOVSKY, V. B., ROSENBLUM, L. Ya., YAKOVLEV, A.V. (2014) Modeling of parallel processes. Petri nets. — Saint Petersburg: Professional literature.
6. AMARÚ, L. G., GAILLARDON, P.-E., MICHELI, G. DE. (2014) Majority-inverter graph: A novel data-structure and algorithms for efficient logic optimization. In: Design Automation Conference, pp. 194:1–194:6.
7. AMJAD ALMATROOD, HARPREET SINGH. (2017) A Comparative Study of Majority/Minority Logic Circuit Synthesis Methods for Post-CMOS Nanotechnologies Engineering, 9, 890–915. <http://www.scirp.org/journal/eng>.
8. ГУРОВ, С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решётки: определения, свойства, примеры. — М.: КРАСАНД, 2012.
GUROV, S. I. (2012) Boolean algebras, ordered sets, lattices: definitions, properties, examples. — М: KRASANG.
9. ЯГЛОМ, И. М. Булева структура и её модели. — М.: Сов. радио, 1980.
YAGLOM, I. M. (1980) Boolean structure and its models. — М.: Sov. radio.
10. EVANDRO, C. FERRAZ, JEFERSON, DE LIMA MUNIZ, ALEXANDRE, SILVA, C. R. DA, DUECK, GERHARD W. (2020) Synthesis of Majority Expressions through Primitive Function Manipulation. In: Advanced Boolean Techniques. Selected Papers from the 13th International Workshop on Boolean Problems. Springer Nature Switzerland AG, pp. 135–158.
11. CHATTOPADHYAY, A., AMARU, L., SOEKEN, M., GAILLARDON, P., MICHELI, G. D. (2016) Notes on Majority Boolean Algebra, 2016 IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL), Sapporo, pp. 50–55.

12. СТЕМПКОВСКИЙ, А. Л., ТЕЛЬПУХОВ, Д. В., ЖУКОВА, Т. Д., ДЕМЕНЕВА, А. И., НАДОЛЕНКО, В. В., ГУРОВ, С. И. Синтез схемы функционального контроля на основе спектрального R-кода с разбиением выходов на группы // Микроэлектроника. 2019. Т. 48. № 4. С. 284–294.
STEMPKOVSKY, A. L., TERPUGOV, D. V., ZHUKOVA, T. D., DEMENEVA, A. I., NADOLENKO, V. V., GUROV, S. I. (2019) The synthesis scheme of functional control based on spectral R-code partitioning the outputs into groups // Microelectronics. Vol. 48. No. 4., P. 284–294.
13. ГУРОВ, С. И., КОРМАКОВ, Г. В. Сбоеустойчивые обратимые схемы и метод их синтеза в пространстве Хемминга / Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. М.: МАКС Пресс, 2018, № 57. — С. 21–35. ISBN 978-5-317-05872-2. http://en.cs.msu.ru/sites/cmc/files/docs/g.v._kormakov_s.i._gurov.pdf
GUROV, S. I., KORMAKOV, G. V. (2018) Fault-Tolerant reversible schemes and a method for their synthesis in the Hamming space / Applied mathematics and computer science: Proceedings of the faculty of Computational mathematics and Cybernetics, Moscow: MAX Press, № 57, Pp. 21–35.
14. THAPLIYAL, H. AND RANGANATHAN, N. (2010) Reversible logic based concurrent error detection methodology for emerging nanocircuits, 10th IEEE International Conference on Nanotechnology, Seoul, pp. 217–222, doi: 10.1109/NANO.2010.5697743.
15. AMARU, L., GAILLARDON, P. E., CHATTOPADHYAY, A., DE MICHELI, G. A sound and complete axiomatization of majority- n logic. IEEE Transactions on Computers 65(9), 2889–2895 (2016)
16. AMARU, L., GAILLARDON, P. E., DE MICHELI, G. (2014) Majority-inverter graph: A novel data-structure and algorithms for efficient logic optimization. In: Proceedings of the 51st Annual Design Automation Conference. Pp. 1–6. ACM(2014). DAC '14, June 1-5 2014, San Francisco, CA, USA. <http://dx.doi.org/10.1145/2593069.2593158>.
17. AKERS, S. B. (1962) Synthesis of combinational logic using three-input majority gates. In: Switching Circuit Theory and Logical Design, 1962. SWCT 1962. Proceedings of the Third Annual Symposium on. pp. 149–158.

18. ZHANG, R., WALUS, K., WANG, W., JULLIEN, G. A. (2004) A method of majority logic reduction for quantum cellular automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology* 3(4), 443–450.
19. ISBELL, JOHN R., Median algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319–362, 1980.
20. International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS). (2013) <http://www.semiconductors.org>.
21. RUMI, Z., WALUS, K., WANG, W., JULLIEN, G. A. (2004) A Method of Majority Logic Reduction for Quantum Cellular Automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 3 3, 443–450. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2004.834177>.
22. WALUS, K., SCHULHOF, G., JULLIEN, G. A., ZHANG, R., WANG, W. (2004) Circuit Design Based on Majority Gates for Applications with Quantum-Dot Cellular Automata. Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, 7–10 November 2004, 1354–1357.
23. BONYADI, M. R., AZGHADI, S. M. R., RAD, N .M., NAVI, K., AFJEI, E. (2007) Logic Optimization for Majority Gate-Based Nanoelectronic Circuits Based on Genetic Algorithm. International Conference on Electrical Engineering, ICEE '07, Lahore, 11-12 April 2007, 1–5.
24. RAI, S. (2008) Majority Gate Based Design for Combinational Quantum Cellular Automata (QCA) Circuits. 40th Southeastern Symposium on System Theory, New Orleans, LA, 16-18 March 2008, 222–224. <https://doi.org/10.1109/SSST.2008.4480225>.
25. HUO, Z., ZHANG, Q., HARUEHANROENGRAS, S., WANG, W. (2006) Logic Optimization for Majority Gate-Based Nanoelectronic Circuits. 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Island of Kos, 21–24 May 2006, 1307–1310.
26. ZHANG, R., GUPTA, P., JHA, N. K. (2007) Majority and Minority Network Synthesis. DOI: 10.4236/eng.2017.910054 913 Engineering with Application to QCA-, SET-, and TPL-Based Nanotechnologies. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 26, 1233-1245. <https://doi.org/10.1109/TCAD.2006.888267>

27. SENTOVICH, E. M., SINGH, K. J., LAVAGNO, L., MOON, C., MURGAI, R., SALDANHA, A., SAVOJ, H., STEPHAN, P. R., BRAYTON, R. K., SANGIOVANNI-VINCENTELLI, A. (1992) SIS: a system for sequential circuit synthesis. Tech. rep., EECS Department, University of California. <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1992/2010.html>.
28. KONG, K., SHANG, Y., LU, R. (2010) An Optimized Majority Logic Synthesis Methodology for Quantum-Dot Cellular Automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 9, 170–183. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2009.2028609>.
29. WANG, P., NIAMAT, M. Y., VEMURU, S. R., ALAM, M., KILLIAN, T. (2015) Synthesis of Majority/Minority Logic Networks. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 14, 473–483. <https://doi.org/10.1109/TNANO.2015.2408330>.
30. Predictive Technology Models — available online ptm.asu.com, ptm.asu.edu.
31. SOEKEN, M., AMARÙ, L. G., GAILLARDON, P. E., DE MICHELI, G. (2017) Exact synthesis of majority-inverter graphs and its applications. *IEEE Transactions on ComputerAided Design of Integrated Circuits and Systems* .

УДК: 517.45

MSC2010: 35B10

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ В ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ

© Ю. И. Никитин

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия
инженерный факультет
просп. Гагарина, 97, Нижний Новгород, 603107, Российская Федерация
e-mail: *ura-nik@yandex.ru*

© А. Н. Сахаров

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия
инженерный факультет
просп. Гагарина, 97, Нижний Новгород, 603107, Российская Федерация
e-mail: *ansakharov2008@yandex.ru*

SPECIAL TRIGONOMETRIC SERIES IN THE PROBLEM OF PERIODIC SOLUTIONS.

Nikitin U. I., Sakharov A. N.

Abstract. This paper describes a method for constructing periodic solutions for special-type nonlinear equations with periodic coefficients. The basis of this method is to represent the desired solution in a nonstandard trigonometric series as a power series in $\sin t$. The coefficients of such a series are calculated in a recursive way. Such a representation is permissible not only for continuous periodic solutions, but also for solutions with singularities. In addition, the representation of a singular solution in the form of a non-standard trigonometric series allows localizing its singularities. The equations in question may also have singularities. When finding singular solutions, we use the assumption that in the case of the existence of two such solutions, they are connected by a certain equality. Using this relationship, you can get the equation for these periodic solutions, either as a linear equation of the second order or as an equation of the first order. This allows, for example, to find the boundary curves for the stability zones of the Hill equation with a parameter. The results obtained on the existence of singular periodic solutions supplement the general theorems of [7] obtained by other methods.

Keywords: *nonstandard trigonometric series, periodic solutions, singular periodic solutions*

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о существовании периодических решений у дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{x} + a(t)x = b(t)x^m + c(t), \quad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — T -периодические функции, а $m \in \mathbb{Z}$, актуальна для ряда практических приложений (в основном, в небесной и квантовой механике, биологии). Уравнение (1) можно рассматривать как нелинейное возмущение уравнения Хилла: регулярное, если $m \geq 0$, либо сингулярное, если $m < 0$. Конструктивное построение периодических решений таких уравнений, как правило, использует аппарат рядов Фурье, либо представление с помощью функции Грина. Однако, в ряде случаев целесообразнее искать периодические решения в виде рядов по степеням специально выбираемых функций, коэффициенты которых получаются рекуррентным способом (см., например, [1]). Такие ряды принято называть *специальными рядами*.

Будем считать, что период T коэффициентов в уравнении (1) равен 2π . Рассмотрим возможность построения 2π -периодических решений этого уравнения по степеням $\sin t$. Как будет показано ниже, такое представление позволяет находить наряду с обычными и *особые* периодические решения. Напомним, что 2π -периодическое решение $x(t)$ уравнения вида (1) называется особым, если при некотором $t^* \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{t \rightarrow t^*} |x(t)| = \infty.$$

Техника работы с особыми решениями достаточно полно отражена в книге [2].

В данной работе для уравнений вида (1) при нахождении особых решений мы будем использовать следующий прием, предложенный Е.А. Сидоровым в [6]. Допустим, что уравнение (1) имеет два периодических решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, связанных соотношением

$$x_2(t) = x_1(t) \operatorname{tg} t. \quad (2)$$

Тогда, если известно одно из них, другое является периодическим решением вполне определенного дифференциального уравнения (возможно, с сингулярными коэффициентами), что существенно облегчает построение таких решений.

Заметим, что если в уравнении (1) $c(t) \equiv 0$, но $a(t) \not\equiv 0$, то задача существования периодических решений, удовлетворяющих соотношению (2), сводится к отысканию периодических решений уравнения 1-го порядка, интегрируемого в квадратурах.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 предложенная методика используется для построения периодических решений нелинейного уравнения с кубической нелинейностью. Показывается, что задача сводится к интегрированию линейного уравнения Гойна с сингулярностями [3], [4]. Эти результаты дополняют ряд теорем из сравнительно новой работы [7], полученных другими методами.

Те же самая задача, применительно к уравнению с квадратичной нелинейностью, рассматриваются в разделе 3.

Раздел 4 посвящен построению примеров периодических решений, удовлетворяющих соотношению (2), для дифференциальных уравнений Дуффинга-Матъе и Ермакова.

В последнее время привлекает особое внимание ([8], [9], [10]) задача о существовании знакопостоянных периодических решений для уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Эта задача рассматривается для уравнения $\ddot{x} = |x|^3 + f(t)$ в разделе 5.

Во всех случаях для представления периодических решений используются разложения в ряды по степеням $\sin t$.

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} = b(t)x^3. \tag{3}$$

Предположим, что уравнение (3) имеет пару нетривиальных периодических решений, удовлетворяющих (2). Подставим это соотношение в уравнение (3). При этом для $x_1(t)$ получается линейное уравнение

$$(\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t)\ddot{x} + 2\frac{\dot{x}}{\cos^2 t} + 2\frac{x \sin t}{\cos^3 t} = 0, \tag{4}$$

коэффициенты которого имеют особенности в точках $n\pi$ и $\pm\frac{\pi}{4} + n\pi$. Действительно, при замене $x_2 = x_1 \operatorname{tg} t$ получаем уравнение

$$\ddot{x}_1 \operatorname{tg} t + \dot{x}_1 \frac{2}{\cos^2 t} + x_1 \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} - b(t)x_1^3 \operatorname{tg}^3 t = 0.$$

Так как $b(t)x_1^3 = \ddot{x}_1$, то получаем уравнение (4). Его общее решение выражается через функции Гойна¹

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{C_1 \sqrt{2 \cos^2 t - 1}}{\sqrt{1 - 3 \cos^2 t + 2 \cos^4 t}} w_{[1/2, 1/8, -1/2, -1/2, 1/2, 1/2]}(\cos^2 t) + \\ & + \frac{C_2 \sqrt{2 \cos^2 t - 1} \cos t}{\sqrt{1 - 3 \cos^2 t + 2 \cos^4 t}} w_{[1/2, -1/4, 0, 0, 3/2, 1/2]}(\cos^2 t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $w_{[a, q, \alpha, \beta, \gamma, \delta]}(z)$ — решение общего уравнения Гойна:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 1}{z-a} \right) \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} w = 0. \tag{6}$$

¹Эти функции были впервые исследованы К. Гойном более ста лет назад [3]. Сейчас они активно используются для представления решений уравнений квантовой физики (см., например, [4], гл. 3, [5]).

Теорема 1. Если дифференциальное уравнение (3) имеет пару нетривиальных периодических решения, удовлетворяющих соотношению (2), то они являются особыми. Более того, все решения, кроме тривиального, являются особыми периодическими решениями.

Доказательство. Утверждение теоремы можно доказать, используя представление (5) и свойства функций Гойна. Мы дадим прямое доказательство с помощью аппарата специальных тригонометрических рядов.

Периодическое решение уравнения (4) будем искать в виде специального ряда

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin^k t. \quad (7)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (4), получим рекуррентное уравнение для определения коэффициентов a_k :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{3}, \quad a_3 = 0, \\ a_{k+1} &= \frac{(3(k-1)^2 - 2)a_{k-1} - 2(k-3)^2 a_{k-3}}{(k+1)(k+2)}, \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Решения этого уравнения зависят от одного произвольного параметра: коэффициента a_0 . Все нечетные коэффициенты равны нулю. Если $a_0 < 0$, то все четные коэффициенты $a_{2k} > 0$ при $k \geq 1$.

Сходимость ряда обеспечивается выполнением условий следующей леммы.

Лемма 1. Если при некотором $k_0 \geq 5$ выполняется неравенство $0 < a_{k_0-3} < a_{k_0-1}$, то для всех $k > k_0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{a}: \quad & a_{k+1} > a_{k-1}; \\ \mathbf{b}: \quad & 0 < a_{k+1} < 3a_{k-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (7) сходится при $|\sin t| < R$, где $R \leq \sqrt{3}$.

Доказательство. Неравенство **a** следует из (8). Заменим a_{k-3} на a_{k-1} , тогда

$$a_{k+1} > a_{k-1} \frac{k^2 + 6k - 17}{k^2 + 3k + 2} = a_{k-1} \left(1 + \frac{3k - 19}{k^2 + 3k + 2} \right).$$

Аналогично выводится неравенство **b**:

$$a_{k+1} < a_{k-1} \frac{3k^2 - 6k + 3}{k^2 + 3k + 2} < a_{k-1} \left(3 - \frac{15k + 3}{k^2 + 3k + 2} \right) < 3a_{k-1}$$

при $k > k_0$. Лемма доказана.

Ряд (7) можно записать в виде

$$a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \sin^{2k} t,$$

где $\bar{a}_k = a_{2k}$. Из неравенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{a}_k}{\bar{a}_{k+1}} \right| < \frac{1}{3}$$

следует, что ряд по степеням $\sin^2 t$ сходится при $|\sin t| < R$, где $R < \sqrt{3}$. При $t \rightarrow t^* = \arcsin R$ ряд (7) расходится, то есть уравнение (3) имеет особое периодическое решение.

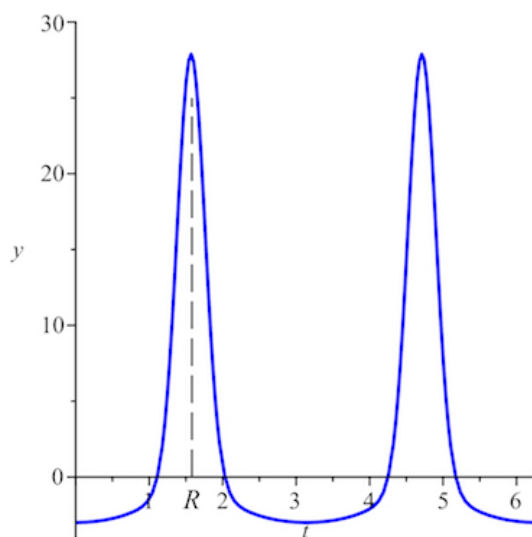


Рис. 1. График отрезка специального ряда (7) для решения уравнения (4).

Чтобы доказать теорему необходимо показать, что уравнение (3) имеет линейно независимое решение $x = \Phi(t)$, неограниченное при $t \rightarrow 0$. Представим $\Phi(t)$ в виде ряда

$$\sum_{k=-1}^{\infty} b_k \sin^k t,$$

получим рекуррентные соотношения, которые определяют коэффициенты ряда с точностью до постоянного множителя b_{-1} . Рекуррентные формулы получаются отдельными для четных и нечетных коэффициентов, причем для четных коэффициентов рекуррентное соотношение совпадает с (8). Поэтому ряд для $\Phi(t)$ будет суммой двух рядов $\phi(t)$ для четных коэффициентов и $\theta(t)$ для нечетных. Проверка условий

леммы 2.1 дает ту же самую область сходимости (кроме значений $t = k\pi$). Следовательно, существует линейно независимое особое периодическое решение $\Phi(t)$ и теорема доказана.

Замечание 1. После подстановки соотношения (2) в уравнение

$$\ddot{x} = b(t)x^{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

получаем линейное уравнение, решения которого при $m = 1, 2$ выражаются через периодические функции и функции Гойна.

3. УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{x} = x^2 + c \sin t. \quad (9)$$

Это уравнение не может иметь ограниченных периодических решений. Действительно, если бы такое решение существовало, то среднее значение на периоде левой части равно нулю, а правой не равно нулю.

Подстановка соотношения (2) в уравнение (9) дает для $x_1(t)$ уравнение Риккати с сингулярными периодическими коэффициентами

$$\dot{x} + x \operatorname{tg} t = x^2 \frac{\sin^2 t - \cos t \sin t}{2} + c \sin t \frac{\cos^2 t - \sin t \cos t}{2}. \quad (10)$$

Поэтому проще искать периодические решения² непосредственно для уравнения (9).

Теорема 2. Уравнение (9) может иметь особые решения, представимые в виде ряда (7).

Доказательство. Подставим ряд (7) в уравнение (9):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) \sin^{k-2} t - k^2 \sin^k t) a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j} \sin^k t + b \sin t.$$

Считая a_0 и a_1 произвольными, получаем

$$a_2 = \frac{a_0^2}{2}, \quad a_3 = \frac{b + 2a_0 a_1 + a_1^2}{6}, \quad a_4 = \frac{a_1^2 + 2a_0 a_2 + 4a_2^2}{12},$$

$$a_{k+2} = \frac{k^2 a_k}{(k+2)(k+1)} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} \sum_{j=0}^k a_j a_{k-j}, \quad k > 2. \quad (11)$$

²Можно искать периодические решения уравнения (10), рассматривая его как возмущение интегрируемого с параметром возмущения c .

Покажем, что при некотором наборе a_0, a_1, b ряд будет иметь ненулевой радиус сходимости. Пусть коэффициенты a_k ($k \leq m$) удовлетворяют условиям $0 < a_k < M < 1$. Используя равенство (11), получим по индукции для $k > m$

$$a_{k+2} < \frac{k^2 M + 2(k+1)M^2}{(k+2)(k+1)} < \frac{M(k^2 + 2k + 2)}{(k+2)(k+1)} < M < 1.$$

Таким образом, при некоторых положительных a_0, a_1, b полученный ряд сходится при $|t| < \frac{\pi}{2}$.

Построенное решение стремится к бесконечности при $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Последнее следует из того, что при достаточно больших k справедливо неравенство $a_k > M^2$. Действительно, индукцией по k можно показать, что

$$a_{k+2} > \frac{1}{(k+2)(k+1)} (M^2 k^2 + (M - M^2)k^2) = \frac{k^2 M^2}{(k+1)(k+2)} (1 + \alpha),$$

где $\alpha = 1/M - 1 > 0$. Поэтому при достаточно больших k

$$\frac{k^2(1 + \alpha)}{(k+1)(k+2)} > 1,$$

то есть справедливо неравенство $a_k > M^2$. Отсюда следует, что если $t \rightarrow \pi/2$, то ряд расходится, и уравнение не может иметь ограниченных периодических решений.

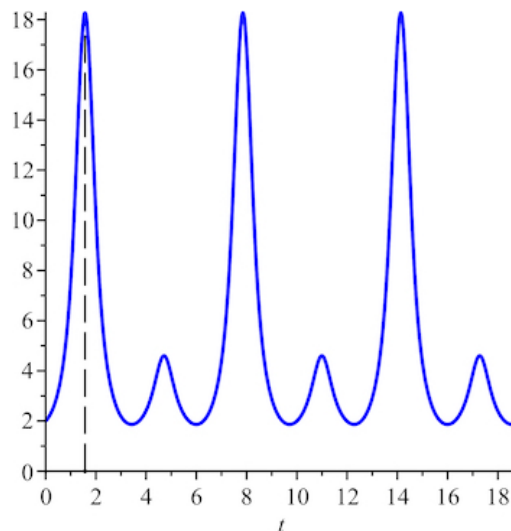


Рис. 2. График отрезка специального ряда (7) для периодического решения уравнения (9).

Более интересным является случай уравнения

$$\ddot{x} \sin t = x^2, \tag{12}$$

у которого существуют два периодических решения: $x = 0$ и $x = -\sin t$.

Теорема 3. Уравнение (12) не может иметь периодических решений, удовлетворяющих соотношению (2).

Доказательство. Действительно, подстановка соотношения (2) в уравнение (12) дает уравнение Бернулли

$$\dot{x} = -x \operatorname{tg} t + \frac{\cos t(\operatorname{tg} t - 1)}{2} x^2,$$

все решения которого

$$x(t) = \frac{4 \cos t}{\cos t \sin t + \cos^2 t + t + C}$$

непериодичны.

Кроме того, это уравнение не имеет других периодических решений, кроме указанных выше. Это следует из того, что никакой тригонометрический ряд (даже формальный) не удовлетворяет уравнению (12).

Еще один пример уравнения с квадратичной нелинейностью, имеющего семейство особых решений:

$$\ddot{x} + a(t)x = x^2. \quad (13)$$

Соответствующее уравнение для $x_1(t)$

$$\dot{x} + x \operatorname{tg} t = x^2(\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t) \cos^2 t$$

имеет семейство периодических решений

$$x(t, C) = \frac{3 \cos t}{C - \cos^3 t - \sin^3 t}$$

(неособых при $|C| > 1$.) Отсюда получаем коэффициент $a(t) = x(t, C) - \frac{\ddot{x}(t, C)}{x(t, C)}$.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА-МАТЬЕ

Имеются разнообразные результаты о существовании периодических решений для уравнений вида

$$\ddot{x} + a(t)x = c(t)x^m, \quad (14)$$

в том числе и сингулярных [7], [8] и др. В некоторых работах устанавливается существование двух положительных решений или решений противоположных знаков [9], а также бесконечного числа периодических решений [10].

Уравнения типа (14) допускают применение приема нахождения периодических решений, связанных соотношением (2). Рассмотрим с этой точки зрения регулярный случай этого уравнения, когда $|m| = 3$. В работе [8] доказано существование двух периодических решений уравнения ДUFFинга–Матье, но не указан алгоритм

их численно-аналитического нахождения. Ниже указаны семейства уравнений вида (14), допускающие существование такого алгоритма.

Упомянутый выше результат об уравнении Дуффинга–Матъе

$$\ddot{x} + (a + b \cos t)x + cx^3 = 0 \tag{15}$$

из работы [8] заключается в следующем. Пусть

$$\Lambda^+ = \{a + b \cos t \in L^1(0, 2\pi) : a + b \cos t > 0, \|a + b \cos t\|_p \leq K(2p^*)\}^3.$$

Тогда при выполнении условия $a < b \leq 0 < c$ или $a + b \cos t \in \Lambda^+$ уравнение (15) имеет, по крайней мере, два нетривиальных периодических решения.

Дополним этот результат задачей о существовании пары периодических решений, удовлетворяющих соотношению (2) для уравнения вида

$$\ddot{x} + a(t)x = x^3. \tag{16}$$

Решение поставленной задачи сводится к построению соответствующего коэффициента $a(t)$.

Если $x_2(t)$ — решение (16), то при замене $x_2(t) = x_1(t) \operatorname{tg} t$ получаем равенство

$$\ddot{x}_1 \operatorname{tg} t + 2\dot{x}_1 \frac{1}{\cos^2 t} + 2x_1 \frac{\sin t}{\cos^3 t} + a(t)x_1 \operatorname{tg} t = x_1^3 \operatorname{tg}^3 t.$$

Вычитая из него уравнение $\ddot{x}_1 + a(t)x_1 = x_1^3$, умноженное на $\operatorname{tg} t$, получаем уравнение Бернулли

$$\dot{x} \frac{2}{\cos^2 t} + 2x \frac{\sin t}{\cos^3 t} = x^3(\operatorname{tg}^3 t - \operatorname{tg} t),$$

которое имеет два семейства 2π -периодических решений

$$\pm \frac{4 \cos t}{\sqrt{C - \cos 4t}}$$

(неособых при $|C| > 1$). Подставляя периодическое решение в уравнение (16) получаем

$$a(t) = 1 + \frac{8 + 8 \cos 2t + 8 \cos 4t}{C - \cos 4t} - \frac{2 \cos 3t - 2 \cos 5t}{(C - \cos 4t) \cos t} - \frac{6 - 6 \cos 8t}{(C - \cos 4t)^2}. \tag{17}$$

Теорема 4. Уравнение (16) с коэффициентом (17) имеет два 2π -периодических решения

$$x_1(t) = \frac{4 \cos t}{\sqrt{C - \cos 4t}}, \quad x_2(t) = \frac{4 \sin t}{\sqrt{C - \cos 4t}}, \quad C > 1,$$

удовлетворяющих условию (2).

³Здесь $\|\cdot\|_p$ обозначают обычную L^p -норму на $[0, 2\pi]$, p^* определяется как $p^* = p/(p-1)$, если $1 \leq p < \infty$, и $p^* = 1$, если $p = \infty$.

Рассмотрим теперь уравнение Ермакова⁴

$$\ddot{x} + a(t)x = \frac{b}{x^3}. \quad (18)$$

Допустим, что это уравнение имеет два периодических решения, связанных соотношением (2). Тогда для x_1 получаем уравнение

$$\dot{x} \frac{2x^3}{\cos^2 t} + 2x^4 \frac{\sin t}{\cos^3 t} = b \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} - \operatorname{tg} t \right).$$

Оно имеет два семейства особых 2π -периодических решений

$$\pm \frac{\sqrt[4]{(C \sin^6 t - 2C \sin^4 t + (C + b) \sin^2 t - b) \sin^2 t}}{\sin t}.$$

Теперь найдем коэффициент $a(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) = & -(4C^2 \cos^{12} t - 12C^2 \cos^{10} t + (12C^2 + 20C) \cos^8 t - (4C^2 + 40C) \cos^6 t + \\ & + (26Cb + 4b^2) \cos^4 t - (6Cb + 4b^2) \cos^2 t + 3b^2) / (4(C^2 \cos^8 t - 2C^2 \cos^6 t + \\ & + (2Cb + C^2) \cos^4 t - 2Cb \cos^2 t + b^2) \sin^2 t \cos^2 t). \end{aligned}$$

Для уравнения (18) с таким коэффициентом $a(t)$ имеет место аналог теоремы 4.1.

Замечание 2. Уравнение (1) при $a(t) = \text{const}$ и $m = 3$ после подстановки соотношения (2) преобразуется в уравнение

$$\ddot{x}(\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t) + \frac{2\dot{x}}{\cos^2 t} + \frac{2x \sin t}{\cos^3 t} + a(\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t)x - c(t)(1 - \operatorname{tg}^3 t) = 0.$$

Это уравнение имеет общее решение, выражающееся через функции Гойна и их производные. Например, если $c(t) = 0$, то решение имеет вид

$$x(t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{C_1(2 \cos^2 t - 1)^2}{\sin t} w_{[1/2, (-2a - a^{3/2} + 9\sqrt{a} + 18)/(16 + 8\sqrt{a}), 3/2 + \sqrt{a}/2, (\sqrt{a} + 6 - a)/(4 + 2\sqrt{a}), 1/2, 1/2]}(\cos^2 t) + \\ & + \frac{C_2 \cos t (2 \cos^2 t - 1)^2}{\sin t} w_{[1/2, (-a^{3/2} - 2a + 22\sqrt{a} + 44)/(16 + 8\sqrt{a}), 2 + \sqrt{a}, (2\sqrt{a} + 8 - a)/(4 + 2\sqrt{a}), 3/2, 1/2]}(\cos^2 t). \end{aligned}$$

⁴В англоязычной математической литературе это уравнение известно как уравнение Пинни.

5. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

Здесь метод специальных тригонометрических рядов применяется для построения положительных (отрицательных) периодических решений уравнения

$$\ddot{x} = |x|^3 + a + b \sin(t). \tag{19}$$

Теорема 5. Уравнение (19) может иметь периодические решения, представимые в виде ряда (7).

Доказательство. Допустим, что (19) имеет положительное периодическое решение, представимое в виде ряда (7). Подставим этот ряд в уравнение (19):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) \sin^{k-2} t - k^2 \sin^k t) a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,j=0}^k a_i a_j a_{k-i-j} \sin^k t + a + b \sin t.$$

Считая a_0 и a_1 произвольными, получаем

$$a_2 = \frac{a_0^2 + a}{2}, \quad a_3 = \frac{b + 3a_0^2 a_1 + a_1}{6}, \quad a_4 = \frac{3a_1^2 a_0 + 3a_0^2 a_2 + 4a_2}{12}.$$

$$a_{k+2} = \frac{k^2 a_k}{(k+2)(k+1)} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} \sum_{i,j=0}^k a_i a_j a_{k-i-j}, \quad k > 2. \tag{20}$$

При некотором наборе a_0, a_1, a, b ряд будет иметь ненулевой радиус сходимости, что можно доказать по индукции, используя равенство (20). Пусть коэффициенты a_k ($k \leq m$) удовлетворяют условиям $0 < a_k < M < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Тогда для $k > m$ имеем

$$a_{k+2} < \frac{k^2 M + 3(k+1)M^3}{(k+2)(k+1)} < \frac{M(k^2 + 3k + 1)}{(k+2)(k+1)} < M < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Таким образом, при некоторых положительных a_0, a_1, a, b полученный ряд имеет ненулевой промежуток сходимости.

На рис. 3 представлено положительное решение уравнения

$$\ddot{x} = |x(t)|^3 - 1 + \frac{3 \sin t}{2}, \tag{21}$$

полученное с помощью ряда по синусам.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полная картина поведения сингулярных периодических решений невозможна без описания механизма их появления в уравнениях вида (1). Приведенные выше примеры показывают, что предлагаемый метод нахождения сингулярных периодических решений сводится к нахождению таких решений либо для линейных уравнений 2-го

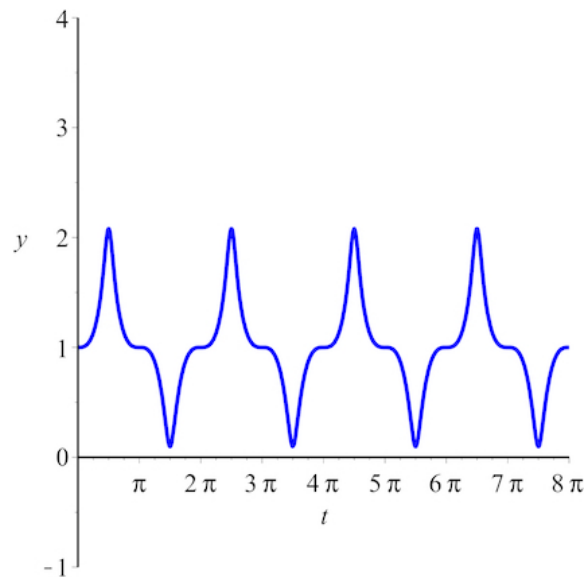


Рис. 3. Положительное периодическое решение уравнения (21).

порядка, либо нелинейных уравнений 1-го порядка с сингулярными коэффициентами. В простейшем случае — это уравнение на торе вида

$$\dot{\theta} + \operatorname{tg} t \sin \theta = \lambda + a(t) + b(t) \cos \theta, \quad (22)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные периодические функции, λ — параметр. Используя аппроксимации $p(t)$ для функции $\operatorname{tg} t$ (например, аппроксимацию Паде), возможно свести задачу о рождении особых решений к случаю, описанном в [11], так как в этом случае существует инвариант потока — число вращения. Это предположение подтверждается численными экспериментами: ниже приведен график (рис. 4) зависимости числа вращения ρ от параметра λ уравнения (22).

Ступеньки графика (*интервалы запираания фазы*) соответствуют областям существования предельных циклов на торе. При $p(t) \rightarrow \operatorname{tg} t$ возможно появление особых периодических решений.

Соотношение (2) может быть использовано и для решения бифуркационных задач. Простейший пример такого типа приведен в заметке [6], в которой рассматривается задача о ветвлении собственных значений для уравнения Хилла-Маттье (о пограничных кривых зон устойчивости). Наиболее просто рассматривается случай 1-ой зоны устойчивости для уравнения

$$\ddot{x} + (\lambda + \varepsilon f(t, \varepsilon))x = 0, \quad (23)$$

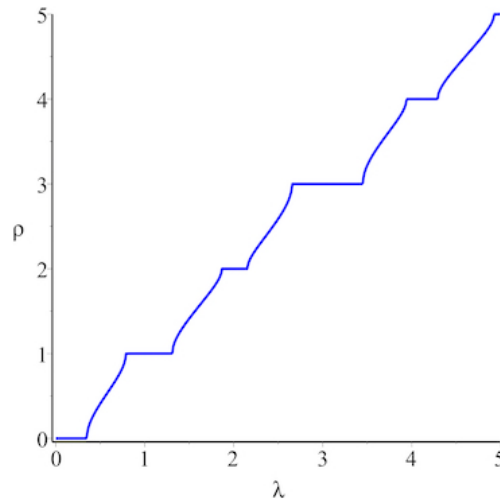


Рис. 4. Число вращения потока, порождаемого уравнением $\dot{\theta} + p(t) \sin \theta = \lambda + a(t) + b(t) \cos \theta$ ($p(t)$ — аппроксимация Паде $\operatorname{tg} t$).

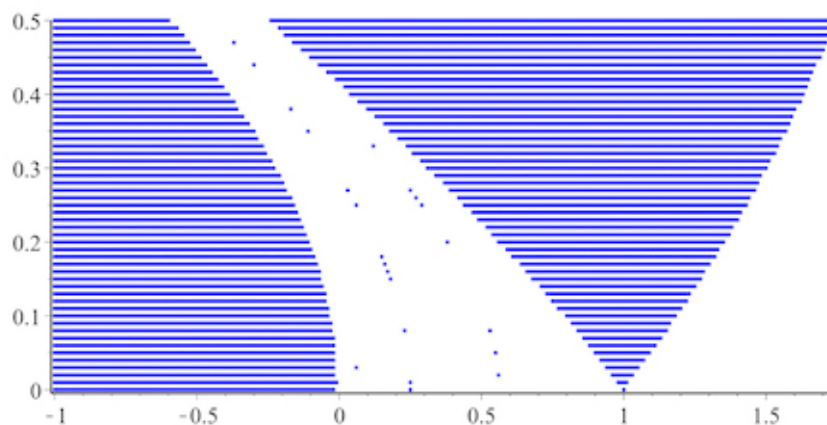


Рис. 5. Границы закрашенных областей являются пограничными кривыми зон устойчивости.

где $f(t, \varepsilon)$ имеет период π по t . При $\lambda = 1, \varepsilon = 0$ существуют два решения $x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$, так что $x_2(t) = x_1(t) \operatorname{tg} t$.

При $\varepsilon > 0$ рождаются два собственных значения $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$, разность которых пропорциональна ε . Предполагая, что $\lambda_2 - \lambda_1 = -4\varepsilon$, получаем $x_2(t, \varepsilon) = e^{\varepsilon \sin^2 t} \cos t, \lambda_{1,2} = 2 - (1 \mp \varepsilon)^2, f(t, \varepsilon) = \varepsilon \cos^2 2t - 4 \cos 2t$. Общее решение уравнения (23) для такой функции $f(t, \varepsilon)$ выражается через решения конфлюэнтного уравнения Гойна. Картина поведения граничных кривых зон устойчивости показана на рис. 5, где изображены области захвата фазы на плоскости параметров λ, ε .

В процессе написания этой статьи авторы ознакомились с работой [12], где предложен общий метод построения уравнений Гойна из систем дифференциальных уравнений 1-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филимонов М. Ю. Применение метода специальных рядов для представления решений уравнения Линя-Рейснера-Цяня // Труды института математики и механики. 2008. Том 14, № 1. – С. 181–201.
 FILIMONOV, M. Yu. (2008) Application of the method of special series to the representation of solutions of the Lin–Reissner–Tsien equation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*. 14 (1). p. 181–201.
2. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
 SIDOROV, A. (2001) *Selected Works: Mathematics. Mechanics.*. Moscow, Fizmatlit.
3. HEUN, K. (1889) Theorie der Riemann’schen Functionen zweiter Ordnung mit Vier Verzweigungspunkten. *Math. Ann.* 1889. 31. p. 161–179.
4. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. — СПб: Невский диалект. 2002. — 312 с.
 SLAVYANOV, S. and LAY, W (2002) *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*. St. Petersburg, Nevskiy Dialekt.
5. Бухштабер В. М., Тертыхный С. И. Голоморфные решения дважды конфлюентного уравнения Гойна, ассоциированного с RSJ-моделью перехода Джозефсона // Теоретическая и математическая физика. 2015. Т. 182, № 3. — с. 373–404.
 BUCHSTABER, V. M. and TERTYCHNYI, S. I. (2015) Holomorphic solutions of the double confluent Heun equation associated with the RSJ model of the Josephson junction. *Theoret. and Math. Phys.*. 182 (3). p. 373–404.
6. Сидоров Е. А. О некоторых задачах бифуркационного типа. — Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. 2001. — С. 242–244.
 SIDOROV, E. A (2001) On some problems of bifurcation type. *Abstracts of the Voronezh Winter Mathematical School*. p. 242–244.
7. P. HABETS, L. (1990) Sanchez Periodic solution of some Lienard equations with singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*. 109. p. 1135–1144.

8. PEDRO, J. (2003) Torres Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem. *J. Diff. Equations*. 190. p. 643–662.
9. RACHUNKOVA, I. (2000) Existence of two positive solution of a singular nonlinear periodic boundary value problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 113 (1-2). p. 24–34.
10. GRAEF, J. R., KONG, L. and WONG, H. (2008) Existence, multiplicity, and dependence on a parameter for a periodic boundary value problem. *J. Diff. Equations*. 245 (5). p. 1185–1197.
11. Сахаров А. Н, Сидоров Е. А. О бифуркациях периодических решений комплексных полиномиальных дифференциальных уравнений // Вестник ННГУ. сер. математика. — 2004. — Том 1, №. 2. — с. 159–169.
SAKHAROV, A. N and SIDOROV, E. A. (2004) On bifurcations of periodic solutions of complex polynomial differential equations. *Vestnik of NNSU. Series of Math*. 1 (2). p. 159–169.
12. Салатич А. А., Славянов С. Ю., Стесик О. Л. Системы ОДУ первого порядка, порождающие конфлюентные уравнения Гойна // Заметки научных семинаров ПОМИ. 2019. Том 485. С. 187–194.
SALATICH, A. A., SLAVYANOV S. Yu. and STESIK, O. L. (2019) Systems of first order ODE generating confluent Heun equations. *Representation theory, dynamical systems, combinatorial methods*. Part XXXI, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 485, POMI, St. Petersburg. p. 187–194.

УДК: 517.432

MSC2010: 46C20;47B50

ИЗОМОРФИЗМ J-САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИЛАТАЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА С НЕПУСТЫМ МНОЖЕСТВОМ РЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

© Д. В. Третьяков

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: dttvd@mail.ru

ON ISOMORPHISM OF COMMON TYPE J-SELFADJOINT DILATIONS FOR LINEAR OPERATOR WITH NONEMPTY REGULAR POINTS SET.

Tretyakov D. V.

Abstract.

The common approach to construction of J-selfadjoint dilation for linear operator with nonempty regular point set is considered in this article.

Let A — linear operator with nonempty regular point set ($-i \in \rho(A)$) and $\text{Clos dom}(A) = \mathfrak{H}$, where \mathfrak{H} — Hilbert space,

$$B_+ := iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}, \quad B_- := iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*,$$

$Q_\pm := \sqrt{|B_\pm|}$, $B_\pm = \mathcal{J}_\pm Q_\pm$ — polar decompositions of B_\pm , $\mathfrak{Q}_\pm = \text{Clos}(Q_\pm \mathfrak{H})$.

Let $\mathfrak{D}_\pm^{(r)}$, $r = 1, 2$ — arbitrary Hilbert spaces and $F_\pm : \text{dom}(F_\pm) \rightarrow \mathfrak{D}_\pm^{(1)}$ ($\text{dom}(F_\pm) \subset \mathfrak{D}_\pm^{(1)}$), $G_\pm : \text{dom}(G_\pm) \rightarrow \mathfrak{D}_\pm^{(2)}$ ($\text{dom}(G_\pm) \subset \mathfrak{D}_\pm^{(2)}$), — simple maximal symmetric operators with defect numbers $(\mathfrak{q}_-, 0)$ and $(0, \mathfrak{q}_+)$ respectively, moreover $\dim \mathfrak{Q}_\pm = \dim \mathfrak{N}_\pm^{(r)} = \mathfrak{q}_\pm$, $r = 1, 2$, $\Phi_\pm : \mathfrak{N}_\pm^{(1)} \rightarrow \mathfrak{Q}_\pm$, $\Psi_\pm : \mathfrak{N}_\pm^{(2)} \rightarrow \mathfrak{Q}_\pm$ are isometries, V_\pm, W_\pm — Cayley transforms of F_\pm and G_\pm respectively.

Let $\langle \mathcal{H}_\pm^{(r)}, \Gamma_\pm^{(r)} \rangle$ are the spaces of boundary values of operators F_\pm^* and G_\pm^* i.e.:

$$a_{F_\pm} \forall f_1, g_1 \in \text{dom}(F_\pm^*) \quad (F_\pm^* f_1, g_1)_{\mathfrak{D}_\pm^{(1)}} - (f_1, F_\pm^* g_1)_{\mathfrak{D}_\pm^{(1)}} = \mp i (\Gamma_\pm^{(1)} f_1, \Gamma_\pm^{(1)} g_1)_{\mathcal{H}_\pm^{(1)}};$$

b_{F_\pm} the transformations $\text{dom}(F_\pm^*) \ni f_1 \mapsto \Gamma_\pm^{(1)} f_1 \in \mathcal{H}_\pm^{(1)}$ are surjective.

$$a_{G_\pm} \forall f_2, g_2 \in \text{dom}(G_\pm^*) \quad (G_\pm^* f_2, g_2)_{\mathfrak{D}_\pm^{(2)}} - (f_2, G_\pm^* g_2)_{\mathfrak{D}_\pm^{(2)}} = \mp i (\Gamma_\pm^{(2)} f_2, \Gamma_\pm^{(2)} g_2)_{\mathcal{H}_\pm^{(2)}};$$

b_{G_\pm} the transformations $\text{dom}(G_\pm^*) \ni f_2 \mapsto \Gamma_\pm^{(2)} f_2 \in \mathcal{H}_\pm^{(2)}$ are surjective.

Consider the Hilbert spaces $\mathbb{H}^{(r)} = \mathfrak{D}_-^{(r)} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+^{(r)}$. Define in this spaces indefinite metrics $J^{(r)} = J_-^{(r)} \oplus I \oplus J_+^{(r)}$ and selfadjoint dilations of operator A S :

$$\forall h_{\pm}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}, \quad n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)}, \quad J_{\pm}^{(1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm}^{(1)} \Phi_{\pm} n_k^{\pm}.$$

Analogously defined operator $J^{(2)}$.

The vector $\mathbf{h}_1 = (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T \in \text{dom}(S_1)$ iff

1. $h_{\pm}^{(1)} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$;
2. $\varphi^{(1)} = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} \in \text{dom}(A)$;
3. $\Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)} = T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi^{(1)}$, where $T^* = I + 2iR_{-i}$.

If this conditions are fulfil, that for all $\mathbf{h}_1 = (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T \in \text{dom}(S_1)$

$$S_1 \mathbf{h}_1 = S_1 (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T := (F_-^* h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i) \varphi^{(1)}, F_+^* h_+^{(1)})^T.$$

Analogously defined operator S_2 .

Definition. Let L_1 and L_2 are J_1 -selfadjoint and J_2 -selfadjoint dilations of operator A . L_1 and L_2 acting in Hilbert spaces \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 respectively and operator A is density defined in Hilbert space $\mathfrak{H} \subset \mathcal{H}_r$, $r = 1, 2$. Operators L_1 and L_2 are called isomorphic if exist unitary operator $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ that:

1. $Uh = h \forall h \in \mathfrak{H}$;
2. $UL_1 \subseteq L_2U$;
3. $\forall \mathbf{h}_1 \in \mathcal{H}_1 : UJ_1\mathbf{h}_1 = J_2U\mathbf{h}_1$.

Theorem. Operators S_1 and S_2 are isomorphic.

Some theorem's corollaries are proved.

Keywords: J -selfadjoint dilation, isomorphism of J -selfadjoint dilation, maximal closed symmetric operator, defect subspaces.

ВВЕДЕНИЕ

Фактически понятие дилатации линейного оператора впервые появляется у М. А. Наймарка [1] в 1940 году.

Унитарную дилатацию сжатия впервые построил Б. Сёкефальви–Надь [2]. Идея дилатации оказалась очень плодотворной, она принесла многочисленные приложения в различные математические дисциплины (см., напр., [3]). Отметим, что в [4] была построена унитарная дилатация общего вида для оператора сжатия.

Далее, Л. А. Сахнович [5], А. В. Кужель [6] и Ch. Davis [7] независимо друг от друга построили J -унитарные дилатации произвольного ограниченного оператора.

В 1977 году в [8] вышла в свет пионерская работа Б.С. Павлова, в которой была построена самосопряженная дилатация оператора Шредингера. При этом область определения исходного оператора совпадала с областью определения сопряженного оператора.

Полученные результаты были обобщены в работах А.В. Кужеля [9] и Ю.Л. Кудряшова [10], в которых были построены трансляционная и спектральная формы самосопряженной дилатации произвольного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Этими же авторами были построены трансляционная [9] и спектральная [11] формы J -самосопряженной дилатации произвольного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. Позже вторым автором был доказан изоморфизм трансляционных и спектральных форм в случае самосопряженной дилатации [12].

В работе [18] была построена J -самосопряженная дилатация общего вида для произвольного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. В связи с этим возникает вопрос *об изоморфизме двух дилатаций общего вида*. Решению этого вопроса посвящена данная работа.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть \mathfrak{H} — гильбертово пространство (ГП), A — плотно заданный линейный оператор, причем $-i \in \rho(A)$, $R_{-i} = (A + i)^{-1}$. Рассмотрим самосопряженные операторы [6]

$$B_+ = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}, \quad B_- = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*$$

и их полярные разложения $B_{\pm} = \mathcal{J}_{\pm}|B_{\pm}|$. Пусть $Q_{\pm} = \sqrt{|B_{\pm}|}$. Определим дефектные подпространства оператора A : $\mathfrak{Q}_{\pm} = \text{Clos}(Q_{\pm}\mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}$ — ГП, в которых действуют произвольные замкнутые простые максимальные симметрические операторы F_{\pm} с индексами дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно [14], где $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)}$, а $\mathfrak{N}_{\pm}^{(1)}$ — дефектные подпространства операторов F_{\pm} . Отсюда следует существование изометрий $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$.

Обозначим через V_{\pm} простые изометрические операторы — преобразования Кэли операторов F_{\pm} [14]:

$$V_- = (F_- + i)(F_- - i)^{-1}, \quad V_+ = (F_+ - i)(F_+ + i)^{-1}.$$

Имеют место следующие формулы обращения:

$$F_- = i(V_- + 1)(V_- - 1)^{-1}, \quad F_+ = -i(V_+ + 1)(V_+ - 1)^{-1}.$$

Аналогично определяются подпространства $\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}$, замкнутые, простые максимальные симметрические операторы G_{\pm} с индексами дефекта $(0, \mathfrak{q}_+)$ и $(\mathfrak{q}_-, 0)$ соответственно, $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)}$, а $\mathfrak{N}_{\pm}^{(2)}$ — дефектные подпространства операторов G_{\pm} , а $\Psi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm}^{(2)} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$ — изометрии. Справедливы формулы:

$$W_- = (G_- + i)(G_- - i)^{-1}, \quad W_+ = (G_+ - i)(G_+ + i)^{-1}.$$

$$G_- = i(W_- + 1)(W_- - 1)^{-1}, \quad G_+ = -i(W_+ + 1)(W_+ - 1)^{-1}.$$

Определение 1. Пары $\langle \mathcal{H}_{\pm}^{(r)}, \Gamma_{\pm}^{(r)} \rangle$, где $\mathcal{H}_{\pm}^{(r)}$ -ГП со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{\pm}^{(r)}}$, $r = 1, 2$, $\Gamma_{\pm}^{(1)} : \text{dom}(F_{\pm}^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}^{(1)}$, $\Gamma_{\pm}^{(2)} : \text{dom}(G_{\pm}^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}^{(2)}$ — операторы, называются *пространствами граничных значений (ПГЗ) операторов F_{\pm}^* и G_{\pm}^** , если:

$$a_{F_{\pm}}) \forall f, g \in \text{dom}(F_{\pm}^*), \quad (F_{\pm}^* f, g)_{\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}} - (f, F_{\pm}^* g)_{\mathfrak{D}_{\pm}^{(1)}} = \mp i(\Gamma_{\pm}^{(1)} f, \Gamma_{\pm}^{(1)} g)_{\mathcal{H}_{\pm}^{(1)}};$$

$$б_{F_{\pm}}) \text{ отображения } \text{dom}(F_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}^{(1)} f \in \mathcal{H}_{\pm}^{(1)} \text{ сюръективны.}$$

$$a_{G_{\pm}}) \forall f, g \in \text{dom}(G_{\pm}^*), \quad (G_{\pm}^* f, g)_{\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}} - (f, G_{\pm}^* g)_{\mathfrak{D}_{\pm}^{(2)}} = \mp i(\Gamma_{\pm}^{(2)} f, \Gamma_{\pm}^{(2)} g)_{\mathcal{H}_{\pm}^{(2)}};$$

$$б_{G_{\pm}}) \text{ отображения } \text{dom}(G_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}^{(2)} f \in \mathcal{H}_{\pm}^{(2)} \text{ сюръективны.}$$

Из определения и формул фон Неймана вытекает, что в нашем случае в качестве $\mathcal{H}_{\pm}^{(r)}$ можно взять подпространства $\mathfrak{N}_{\pm}^{(r)}$, $r = 1, 2$.

ПГЗ для исследования различных свойств симметрических операторов с равными дефектными числами впервые были введены в работах Горбачука В. И., Брука В. М., Маламуда М. М. и Деркача В. А. в 80-х годах прошлого столетия и оказали, в дальнейшем, большое влияние на решение различных сложных задач в разных разделах математики (см., напр., [15], [16], [17]).

Имеют место равенства [18] $\text{dom}(F_{\pm}) = \ker \Gamma_{\pm}^{(1)}$, $\text{dom}(G_{\pm}) = \ker \Gamma_{\pm}^{(2)}$.

Определение 2. Пусть L_1 и L_2 — J_1 -самосопряженная и J_2 -самосопряженная дилатации оператора A , L_1 и L_2 действуют в гильбертовых пространствах \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 соответственно, оператор A плотно задан в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \subset \mathcal{H}_r$, $r = 1, 2$. Операторы L_1 и L_2 называются *изоморфными*, если существует унитарный оператор $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ такой, что:

1. $Uh = h \forall h \in \mathfrak{H}$;
2. $UL_1 \subseteq L_2U$;
3. $\forall \mathbf{h}_1 \in \mathcal{H}_1 : UJ_1\mathbf{h}_1 = J_2U\mathbf{h}_1$.

2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ДИЛАТАЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Построим теперь ГП $\mathbb{H}_r = \mathfrak{D}_-^{(r)} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+^{(r)}$ и определим в \mathbb{H}_r операторы $J_r = J_-^{(r)} \oplus I \oplus J_+^{(r)}$, где $J_\pm^{(r)}, r = 1, 2$, задаются равенствами:

$$\forall h_\pm^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} V_\pm^k n_k^\pm \in \mathfrak{D}_\pm^{(1)}, \quad n_k^\pm \in \mathfrak{N}_\pm^{(1)}, \quad J_\pm^{(1)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_\pm^k n_k^\pm \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_\pm^k \Phi_\pm^{-1} \mathcal{J}_\pm \Phi_\pm n_k^\pm,$$

$$\forall h_\pm^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} W_\pm^k m_k^\pm \in \mathfrak{D}_\pm^{(2)}, \quad m_k^\pm \in \mathfrak{N}_\pm^{(2)}, \quad J_\pm^{(2)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_\pm^k m_k^\pm \right) := \sum_{k=0}^{\infty} W_\pm^k \Psi_\pm^{-1} \mathcal{J}_\pm \Psi_\pm m_k^\pm.$$

В ГП \mathbb{H}_r определим операторы $S_r, r = 1, 2$ следующим образом. Векторы $\mathbf{h}_r = \left(h_-^{(r)}, h_0, h_+^{(r)} \right)^T$, где $h_\pm^{(r)} \in \mathfrak{D}_\pm^{(r)}, h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежат областям определения операторов S_r , соответственно, тогда и только тогда, когда

- 1) $h_\pm^{(1)} \in \text{dom}(F_\pm^*); h_\pm^{(2)} \in \text{dom}(G_\pm^*);$
- 2) $\varphi = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} \in \text{dom}(A); \psi = h_0 + Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} \in \text{dom}(A);$
- 3) $\Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)} = T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi;$
 $\Psi_+ \Gamma_+^{(2)} h_+^{(2)} = T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} h_-^{(2)} + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \psi,$ где $T^* = I + 2iR_{-i}^*, I$ -единичный оператор в \mathfrak{H} .

Для любых векторов $\mathbf{h}_r = \left(h_-^{(r)}, h_0, h_+^{(r)} \right)^T \in \text{dom}(S_r)$ положим

$$S_1 \mathbf{h}_1 = S_1 \left(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)} \right)^T := \left(F_-^* h_-^{(1)}, -ih_0 + (A + i) \varphi, F_+^* h_+^{(1)} \right)^T;$$

$$S_2 \mathbf{h}_2 = S_2 \left(h_-^{(2)}, h_0, h_+^{(2)} \right)^T := \left(G_-^* h_-^{(2)}, -ih_0 + (A + i) \psi, G_+^* h_+^{(2)} \right)^T.$$

По теореме из [18] операторы $S_r, r = 1, 2$ являются J_r -самосопряженными дилатациями оператора A .

Лемма 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место следующие соотношения:

$$F_\pm^* V_\pm^n \supseteq V_\pm^n F_\pm^* \mp 2i V_\pm^{n-1} \Gamma_\pm^{(1)}, \quad (1)$$

$$G_\pm^* W_\pm^n \supseteq W_\pm^n G_\pm^* \mp 2i W_\pm^{n-1} \Gamma_\pm^{(2)}. \quad (2)$$

Доказательство. Докажем одно из включений (1). Остальные включения доказываются аналогично. Пусть $n = 1$. Для любого $h_+^{(1)} \in \text{dom}(F_+^*)$ по формулам фон Неймана $h_+^{(1)} = h_+^{(0)} + n_+$, где $h_+^{(0)} \in \text{dom}(F_+), n_+ \in \mathfrak{N}_+^{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} V_+ F_+^* h_+^{(1)} &= (I - 2iR_{-i}(F_+)) F_+^* h_+^{(1)} = F_+^* h_+^{(1)} - 2iR_{-i}(F_+) F_+^* h_+^{(1)} = \\ &= F_+^* h_+^{(1)} - 2iR_{-i}(F_+)(F_+ h_+^{(0)} - in_+) = F_+^* h_+^{(1)} - 2iR_{-i}(F_+)(F_+ + i - i)h_+^{(0)} - \\ &\quad - 2R_{-i}(F_+)n_+ = F_+^* h_+^{(1)} - 2i(I - iR_{-i}(F_+))h_+^{(0)} - 2R_{-i}(F_+)n_+ = \end{aligned}$$

$$= F_+^* h_+^{(1)} - 2R_{-i}(F_+)(h_+^{(0)} + n_+) - 2ih_+^{(0)} = F_+^* h_+^{(1)} - 2R_{-i}(F_+)h_+^{(1)} - 2ih_+^{(0)}. \quad (3)$$

Аналогично проверяется формула

$$F_+^* V_+ h_+^{(1)} = F_+^* h_+^{(1)} - 2R_{-i}(F_+)h_+^{(1)} - 2ih_+^{(1)}. \quad (4)$$

Отсюда, из (3) и (4) $(F_+^* V_+ - V_+ F_+^*)h_+^{(1)} = -2in_+ = -2i\Gamma_+^{(1)}h_+^{(1)}$. Таким образом, доказано включение $F_+^* V_+ \supseteq V_+ F_+^* - 2i\Gamma_+^{(1)}$. Далее, для любого $h_+^{(1)} \in \text{dom}(F_+^*)$

$$\begin{aligned} F_+^* V_+^2 h_+^{(1)} &= (F_+^* V_+)V_+ h_+^{(1)} = (V_+ F_+^*)V_+ h_+^{(1)} - 2i\Gamma_+^{(1)}V_+ h_+^{(1)} = \\ &= V_+(V_+ F_+^* h_+^{(1)} - 2i\Gamma_{\pm}^{(1)}h_+^{(1)}) = V_+^2 F_+^* h_+^{(1)} - 2iV_+ \Gamma_{\pm}^{(1)}h_+^{(1)}. \end{aligned}$$

По принципу математической индукции получаем первое из включений (1). Лемма доказана. \square

Теорема. Операторы S_1 и S_2 изоморфны.

Доказательство. Определим оператор $\mathcal{U} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \left(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)} \right)^T &= \\ &= \mathcal{U} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ \right)^T := \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+ \right)^T, \quad (5) \end{aligned}$$

где $\Delta_{\pm} = \Psi_{\pm}^{-1} \Phi_{\pm}$. Очевидно, оператор \mathcal{U} унитарный.

Воспользуемся определением 2. По определению оператора \mathcal{U} справедливо равенство $\mathcal{U} h_0 = h_0$ для любого $h_0 \in \mathfrak{H}$.

Пусть $h_1 = (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T \in \text{dom}(S_1)$. Найдем $\mathcal{U} S_1 h_1$ с помощью равенств (1) и (5):

$$\begin{aligned} \mathcal{U} S_1 (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T &= \mathcal{U} (F_-^* h_-^{(1)}, -ih_0 + (A+i)\varphi, F_+^* h_+^{(1)})^T = \\ &= \mathcal{U} \left(F_-^* \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^-, -ih_0 + (A+i)\varphi, F_+^* \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ \right)^T = \\ &= \mathcal{U} \left(\sum_{k=0}^{\infty} V_-^k F_-^* n_k^- + 2i \sum_{k=1}^{\infty} V_-^{k-1} n_k^-, -ih_0 + (A+i)\varphi, \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k F_+^* n_k^+ - 2i \sum_{k=1}^{\infty} V_+^{k-1} n_k^+ \right)^T = \\ &= \mathcal{U} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^- + 2i \sum_{k=1}^{\infty} V_-^{k-1} n_k^-, -ih_0 + (A+i)\varphi, -i \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ - 2i \sum_{k=1}^{\infty} V_+^{k-1} n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(i \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- (n_k^- + 2n_{k+1}^-), -ih_0 + (A+i)\varphi, -i \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ (n_k^+ + 2n_{k+1}^+) \right)^T. \quad (6) \end{aligned}$$

Вычислим теперь $S_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1$, для чего, вначале, требуется проверить, что вектор $\mathcal{U} \mathbf{h}_1$ принадлежит $dom(S_2)$. В самом деле, векторы $\sum_{k=0}^{\infty} W_{\pm}^k \Delta_{\pm} n_k^{\pm}$ принадлежат $dom(G_{\pm}^*)$, также,

$$\begin{aligned} \psi &= h_0 + Q_- \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^- = h_0 + Q_- \Psi_- \Delta_- n_0^- = h_0 + Q_- \Phi_- n_0^- = \\ &= h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k n_k^- = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} = \varphi \in dom(A). \end{aligned}$$

Осталось проверить условие 3) на область определения. Для левой части этого условия:

$$\Psi_+ \Gamma_+^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+ = \Psi_+ \Delta_+ n_0^+ = \Phi_+ n_0^+ = \Phi_+ \Gamma_+^{(1)} \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k n_k^+ = \Phi_+ \Gamma_+^{(1)} h_+^{(1)}.$$

Для правой части:

$$\begin{aligned} T^* \Psi_- \Gamma_-^{(2)} \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^- + i \mathcal{J}_+ Q_+(A+i)\psi &= T^* \Psi_- \Delta_- n_0^- + i \mathcal{J}_+ Q_+(A+i)\psi = \\ &= T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+(A+i)\psi = T^* \Phi_- \Gamma_-^{(1)} h_-^{(1)} + i \mathcal{J}_+ Q_+(A+i)\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что $\mathcal{U} \mathbf{h}_1 \in dom(S_2)$. Отсюда, в силу (2)

$$\begin{aligned} S_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1 &= S_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(G_-^* \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, -ih_0 + (A+I)\psi, G_+^* \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(i \sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- (n_k^- + 2n_{k+1}^-), -ih_0 + (A+i)\varphi, -i \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ (n_k^+ + 2n_{k+1}^+) \right)^T. \quad (7) \end{aligned}$$

Сравнивая (6) и (7), получаем, что $\forall \mathbf{h}_1 \in \mathbb{H}_1$ имеет место равенство $\mathcal{U} S_1 \mathbf{h}_1 = S_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1$.

Проверим соотношения для метрик J_1 и J_2 . Для любого вектора $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{H}_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} J_1 \mathbf{h}_1 &= \mathcal{U} J_1 (h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- \Phi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+ \right)^T. \quad (8) \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством (8):

$$\begin{aligned} J_2 \mathcal{U}(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T &= J_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Delta_+ n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Psi_- \Delta_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Psi_+ \Delta_+ n_k^+ \right)^T = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} W_-^k \Psi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^-, h_0, \sum_{k=0}^{\infty} W_+^k \Psi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+ \right)^T = \mathcal{U} J_1(h_-^{(1)}, h_0, h_+^{(1)})^T. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема доказана. \square

Рассмотрим следующие частные случаи J-самосопряженных дилатаций: так называемые спектральную — S_{sp} и трансляционную — S_{tr} плотно заданного диссипативного оператора A с непустым множеством регулярных точек ($-i \in \rho(A)$), построенных в [9] и [10] соответственно в пространствах $\mathbb{H}_{sp} = L_2(\mathbb{R}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus L_2(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Q}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ и $\mathbb{H}_{tr} = l_2(\mathbb{Z}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus l_2(\mathbb{Z}_+; \mathfrak{Q}_+)$, $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

(Дилатация S_{sp}) Вектор $\mathbf{h}_{sp} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T$ принадлежит $\text{dom}(S_{sp})$ тогда и только тогда, когда:

1. $h_{\pm}(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$, где $W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$ — классы Соболева;
2. $\varphi = h_0 + Q_- h_-(0) \in \text{dom}(A)$;
3. $h_+(0) = T^* h_-(0) + i \mathcal{J}_+ Q_+(A + i)\varphi$, где $T^* = I + 2iR_{-i}^*$.

Для любого вектора $\mathbf{h}_{sp} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T \in \text{dom}(S_{sp})$

$$S_{sp} \mathbf{h}_{sp} = S_{sp}(h_-(t), h_0, h_+(t))^T := (ih'_-(t), -ih_0 + (A + i)\varphi, ih'_+(t))^T,$$

$$\Gamma_{\pm}^{(1)} h_{\pm} = h_{\pm}(0) \forall h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*), \quad J_{sp} \mathbf{h}_{sp} = ((J_- h_-)(t), h_0, (J_+ h_+)(t))^T, \quad \forall \mathbf{h}_{sp} \in \mathbb{H}_{sp}.$$

где операторы J_{\pm} действуют на функции $h_{\pm}(t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}_{\pm}$ следующим образом: $(J_{\pm} h_{\pm})(t) = \mathcal{J}_{\pm} h_{\pm}(t)$.

(Дилатация S_{tr}) Вектор $\mathbf{h}_{tr} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \mathbb{H}_{tr}$ принадлежит $\text{dom}(S_{tr})$ тогда и только тогда, когда:

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$;
2. $\varphi' = h_0 + \sqrt{2}Q_- S_- h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $\sqrt{2}S_+ h_+ = \sqrt{2}T^* S_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+(A + i)\varphi'$, где $T^* = I + 2iR_{-i}^*$.

Для любого $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S_{tr})$

$$S_{tr}(h_-, h_0, h_+)^T = (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi', F_+^* h_+)^T,$$

где

$$\begin{aligned} \text{dom}(F_{\pm}) &= \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \|S_{\pm n} h_{\pm}\|^2 < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} h_{\pm n}^{\pm} = 0 \right\}, \\ F_+ h_+ &= F_+(h_1^+, h_2^+, \dots) := -2i(S_1 h_+, S_2 h_+, \dots), \\ F_- h_- &= F_-(\dots, h_{-2}, h_{-1}) := 2i(\dots, S_{-2} h_-, S_{-1} h_-), \\ S_n h_+ &= \frac{1}{2} h_n^+ + \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k^+, \quad S_{-n} h_- = \frac{1}{2} h_{-n}^- + \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_{-k}^-, \\ \text{dom}(S_{\pm n}) &= \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|h_{\pm k}^{\pm}\|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Операторы S_{\pm} задаются равенствами:

$$S_{\pm} h_{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} h_{\pm k}, \quad \text{dom}(S_{\pm}) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} \|h_{\pm k}^{\pm}\|^2 < \infty \right\}.$$

Индефинитная метрика определяется так:

$$J(h_-, h_0, h_+)^T = (J_- h_-, h_0, J_+ h_+)^T,$$

где $J_- h_- = (\dots, \mathcal{J}_- h_{-2}, \mathcal{J}_- h_{-1})$, $J_+ h_+ = (\mathcal{J}_+ h_1, \mathcal{J}_+ h_2, \dots)$. Граничные операторы — $\Gamma_{\pm} f_{\pm} = \sqrt{2} S_{\pm} f_{\pm}$.

Теперь условия принадлежности вектора $\mathbf{h}_{tr} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \mathbb{H}_{tr}$ множеству $\text{dom}(S_{tr})$ можно записать следующим образом:

1. $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$;
2. $\varphi' = h_0 + Q_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$;
3. $\Gamma_+ h_+ = T^* \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi'$.

Из доказанной теоремы и приведенных построений вытекает

Следствие 1. Произвольная J -самосопряжённая дилатация общего вида изоморфна каждой из дилатаций S_{sp} и S_{tr} , дилатации S_{sp} и S_{tr} изоморфны между собой.

Следствие 2. Оператор \mathcal{U} является (J_1, J_2) — унитарным.

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{H}_1$ используем равенство (9):

$$[\mathcal{U} \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1]_{\mathbb{H}_2} = (J_2 \mathcal{U} \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1)_{\mathbb{H}_2} = (\mathcal{U} J_1 \mathbf{h}_1, \mathcal{U} \mathbf{h}_1)_{\mathbb{H}_2} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1]_{\mathbb{H}_1}.$$

Следствие доказано. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказана теорема об изоморфизме двух J – самосопряженных дилатаций общего вида произвольного линейного, плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. Для построения каждой из дилатаций используются пары максимальных симметрических операторов $F_{\pm}(G_{\pm})$ и пространства граничных значений операторов $F_{\pm}^*(G_{\pm}^*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. — 1940, Т. 4. — № 3. — С. 277–318.
NAYMARK M. A. (1940) Spectral functions of symmetric operator. *Izvestiya AN SSSR*. V. 4, N. 3. p. 277–318.
2. SG.-NAGY B. (1953) Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math.* V. 15. p. 87–92.
3. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
NIKOLSKY N. K. (1980) *Lectures on shift operator*. Moscow: Nauka.
4. Никольский Н. К., Хрущёв С. В. Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций // Труды Математ. института АН СССР. — 1974, Т. 176. — С. 97–210.
NIKOLSKY N. K., KHRUSCHOV S. V. (1987) Functional model and some problems of spectral function theory. *Works of Mathematical institute. Academy of Science USSR*. V. 176. p. 97–210.
5. Сахнович Л. А. О J –унитарной дилатации ограниченного оператора // Функциональный анализ и его приложения. — 1974, Т. 8, Вып. 3. — С. 83–84.
SAKHNOVICH L. A. (1974) On J –unitary dilation of bounded operator. *Func. analiz i ego prilozheniya*. V. 8, Issue 3. p. 83–84.
6. Кузель А. В. J –самосопряженные и J –унитарные дилатации линейных операторов // Функциональный анализ и его приложения. — 1983, Т. 17, Вып. 1. — С. 75–76.
KUZHEL A. V. (1983) J –selfadjoint and J –unitary dilations of linear operators. *Func. analiz i ego prilozheniya*. V. 17, Issue 1. p. 75–76.

7. DAVIS CH. (1970) J -unitary dilation of a general operators. *Acta Sci.Math.* V. 31, N. 1-2. p. 75–86.
8. Павлов Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // *Мат. сб.* — 1977, Вып. 102(144), № 4. — С. 511–536.
PAVLOV B. S. (1977) Selfadjoint dilations of dissipative Shredinger operator and its eigenfunctions decomposition. *Mat. sb.* V. 102(144), N. 4. p. 511–536.
9. Кужель А. В. Самосопряженные и J -самосопряженные дилатации линейных операторов // *Теория функций, функц. анализ и их прил.* — 1982, Вып. 37. — С. 54–62.
KUZHEL A. V. (1982) Selfadjoint and J -selfadjoint dilations of linear operators. *Teoriya functsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. V. 37. p. 54–62.
10. Кудряшов Ю. Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // *Теория функций, функц. анализ и их прил.* — 1982, Вып. 37. — С. 51–54.
KUDRYASHOV Yu. L. (1982) Symmetric and selfadjoint dilations of dissipative operators. *Teoriya functsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. V. 37. p. 51–54.
11. Кудряшов Ю. Л. J -эрмитовы и J -самосопряженные дилатации линейных операторов // *Динам. системы.* — 1984, № 3. — С. 94–98.
KUDRYASHOV Yu. L. (1984) J -Hermite and J -selfadjoint dilations of linear operators. *Dynam.sistemy*. N. 3. p. 94–98.
12. Кудряшов Ю. Л. Изоморфизм спектрального и трансляционного представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора // *ТВИМ.* — 2018, № 1. — С. 40–47.
KUDRYASHOV Yu. L. (2018) Isomorphism of spectral and translation representations for selfadjoint dilations of dissipative operator. *TVIM*. N. 1. p. 40–47.
13. BOGNAR J. (1974) *INDEFINITE INNER PRODUCT SPACES*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 224 p..
14. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных оперторов в гильбертовом пространстве. Т.1 / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — Харьков.: Выща школа, 1977. — 315 с.

- AKHIEZER N. I., GLAZMAN I. M. (1980) *Theory of linear operators in Hilbert space. V. 1.* Kharkov: Vyscha shkola.
15. Горбачук В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук. — К.: Наукова думка, 1984. — 284 с.
GORBACHUK V. I. (1984) *Boundary value problems for differential-operator equations.* Kiev: Naukova dumka.
16. DERKACH V. A., MALAMUD M. M. (1999) Non-self-adjoint extensions of a Hermitian operator and their characteristic functions. *Journal of Mathematical Sciences.* V. 97, N.5. p. 4461–4499.
17. BRUK V. M. (2014) On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the indefinite-dimensional case. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* V. 10, N.2. p. 163–188.
18. Третьяков Д. В. Об общем подходе к построению J -самосопряженной дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек // ТВИМ. — 2019, № 4. — С. 92–106.
TRET'YAKOV D. V. (2019) On common approach to construction of J -selfadjoint dilations for linear operator with nonempty regular point set. *TVIM.* No. 4 (46). p. 92–106.

УДК: 517.95

MSC2010: 47A10

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

© А. Р. Якубова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *alika.yakubova.1993@mail.ru*

ABOUT PROPERTIES OF SOLUTIONS OF SOME MIXED SPECTRAL PROBLEMS.

Yakubova A. R.

Abstract. Previously, boundary value problems, spectral and initial boundary value problems were investigated based on the symmetric sesquilinear form $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$. For example, M. S. Agranovich, N. D. Kopachevsky, V. I. Voititsky, P. A. Starkov, K. A. Radomirskaya and others were engaged in such research. Kopachevsky N. D. proposed to investigate problems for one and two domains in the case, where the scalar product $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ is replaced with a sesquilinear nonsymmetric form $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$. The form $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$ is defined on the space $H^1(\Omega)$, bounded and uniformly accretive. Thus, the main goal of this work is to study problems in the nonsymmetric case. The parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ was introduced for convenience of consideration, and all the problems turn into the corresponding unperturbed problems as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Based on the already considered problems in the case of one domain (see [1]), we study mixed spectral conjugation problems generated by the sesquilinear form. In this case, the principle of superposition is used. The principle makes it possible to represent the solution of the original problem as a sum of solutions to auxiliary problems. These auxiliary problems contain inhomogeneity in only one place, that is, either in the equation or in one of the boundary conditions. Studying of the spectral problems leads to the same operator pencil $L(\lambda, \mu)$, which is investigated with the methods of the spectral theory of operator pencils (see [2]). The properties of solutions of the spectral problems in the case λ is fixed and μ is spectral parameter or μ is fixed and λ is spectral parameter are investigated. The theorems on the spectrum structure, on the basis property of root elements, on the spectrum localization under the first and second conjugation conditions are proved.

Keywords: *Green's formula, sesquilinear form, transmission problem, spectrum, completeness, Hilbert space.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследование задач, порожденных абстрактной формулой Грина, является достаточно новым. Первые результаты, связанные с получением абстрактной формулы Грина, принадлежат французскому математику Ж.-П. Обэну (1970 г., см. главу 6 из [3]). Позже эта формула была предложена в монографии С. Г. Крейна (см. [4]). Далее, Р. Е. Шоуволтер (см. [5]) применял абстрактную формулу Грина в виде, предложенном Ж.-П. Обэном. Отметим, что абстрактная формула Грина для равномерно аккретивных форм, а также для смешанных краевых задач впервые выводится Копачевским Н. Д. (см. [6]). Дальнейшее продвижение и применение этой теории в приложениях отражено, в частности, в работах [6–11].

Ранее краевые, спектральные и начально-краевые задачи рассматривались на основе симметрической полуторалинейной формы $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$. Подобными исследованиями занимались, например, М. С. Агранович, Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий, П. А. Старков, К. А. Радомирская и другие. Копачевский Н. Д. предложил исследовать задачи для одной и двух областей в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Таким образом, главной целью данной работы является исследование задач в несимметрическом случае. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ введен для удобства рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ переходят в проблемы, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

1. НЕВОЗМУЩЕННЫЕ СМЕШАННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЕРВОМ УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

В области Ω , разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 (см. рис. 1) рассмотрим сначала невозмущенную ($\varepsilon = 0$) спектральную задачу сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях Ω_k , $k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. В областях Ω_1, Ω_2 и на внешних границах имеем:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \quad (1)$$

на границах стыка задается два условия сопряжения:

либо

$$\gamma_{11} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \mu \gamma_{21} u_1 =: \psi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad (2)$$

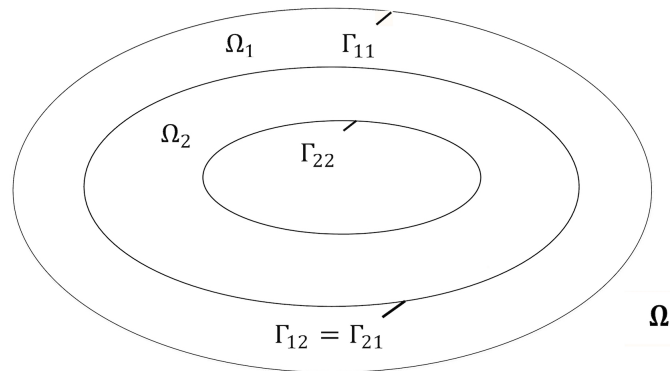


Рис. 1

либо

$$\partial_{21}u_1 = -\partial_{12}u_2 = \psi_{21} := \mu(\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12}). \quad (3)$$

Через Γ_{jj} , $j = 1, 2$, обозначены внешние свободные границы, а через $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ — границы стыка областей. Полагаем, что области $\Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{ij} . Через φ_1, φ_2 обозначены следы функций u_j , а через $\partial_{ij}u_j$ — соответствующие производные по внешней нормали; f_j — заданные функции в Ω_j , $j = 1, 2$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj} , $j = 1, 2$. Функция φ_{21} задает разрыв следов, а ψ_{21} — разрыв производных по внешней нормали на границе стыка областей.

Здесь λ и μ — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным параметром является параметр $\mu \in \mathbb{C}$. Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [12]).

Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H_\Gamma^1(\Omega) \subset H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$,

$$H_\Gamma^1(\Omega) := \left\{ (u_1; u_2) \in H_{\Gamma_{11}}^1(\Omega_1) \oplus H_{\Gamma_{22}}^1(\Omega_2) : \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}) \right\}.$$

Пространство $H_\Gamma^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H_0^1(\Omega_1) \oplus H_0^1(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Задачу будем исследовать на основе принципа суперпозиции. С этой целью представим решение задачи в виде суммы решений пяти вспомогательных задач, содержащих “неоднородности” (т.е. f_k и ψ_k) лишь в одном месте, то есть, либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Имеем

$$u = \sum_{k=1}^5 u_{(k)} = \sum_{k=1}^5 (u_{k1}; u_{k2}).$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad & u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{11} = \psi_1 := \lambda \gamma_{11} u_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\
 & u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \\
 & \gamma_{21} u_{11} - \gamma_{12} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
 & \partial_{21} u_{11} + \partial_{12} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\
 & u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{22} = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 := \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \\
 & \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
 & \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & u_{31} - \Delta u_{31} = f_1 := \lambda u_1 \text{ (в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{31} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\
 & u_{32} - \Delta u_{32} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \\
 & \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
 & \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{41} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\
 & u_{42} - \Delta u_{42} = f_2 = \lambda u_2 \text{ (в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \\
 & \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
 & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & u_{51} - \Delta u_{51} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{51} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\
 & u_{52} - \Delta u_{52} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{52} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \\
 & \gamma_{21} u_{51} - \gamma_{12} u_{52} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
 & \partial_{21} u_{51} + \partial_{12} u_{52} = \mu \gamma_{21} u_{51} =: \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Задачи (4)–(12) исследуются с помощью следующей обобщенной формулы Грина:

$$\begin{aligned}
 (\eta, u)_{H^1(\Omega)} &:= \sum_{k=1}^2 (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^2 \langle \eta_k, u_k - \Delta u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 \langle \gamma_{kk} \eta_k, \partial_{kk} u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} + \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \\
 &+ \langle \gamma_{21} \eta_1 - \gamma_{12} \eta_2, \partial_{21} u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} \quad \forall \eta, u \in H_{\Gamma}^1(\Omega),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где следы $\gamma_{kl} \eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl})$, а производные по нормали $\partial_{kl} u_l \in H^{-1/2}(\Gamma_{kl})$.

Для задачи (4) формула Грина (13) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\eta, u)_{H^1(\Omega)} &= \sum_{k=1}^2 (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^2 \langle \eta_k, u_k - \Delta u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 \langle \gamma_{kk} \eta_k, \partial_{kk} u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} + \langle \gamma_{11} \eta_1, \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} \quad \forall \eta, u \in H_{\Gamma}^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Следовательно, слабое решение задачи (4) определяется тождеством

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} = \langle \gamma_{11} \eta_1, \lambda \gamma_{11} u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} \quad \forall \eta \in H_{\Gamma}^1(\Omega),$$

и решение задается формулой

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}) = V_{11} \psi_1 = V_{11} (\lambda \gamma_{11} u_1) = \lambda V_{11} \gamma_{11} u_1 = \lambda V_{11} \gamma_{11} p_1 u,$$

где

$$p_k u = p_k(u_1; u_2) := u_k, \quad k = 1, 2.$$

Аналогичным образом определяются слабые решения вспомогательных задач (6)–(12). Имеем

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) = V_{22} \psi_2 = V_{22} (\lambda^{-1} \gamma_{22} u_2) = \lambda^{-1} V_{22} \gamma_{22} p_2 u.$$

Отметим, что имеет место свойство

$$V_{kk} = (\gamma_{kk} p_k)^*, \quad k = 1, 2.$$

Применяя формулу Грина (13), получаем следующее решение третьей вспомогательной задачи

$$u_{(3)} = A^{-1}(f_1; 0) = \lambda A^{-1}(u_1; 0) = \lambda A^{-1}(\tilde{p}_1 u), \quad \tilde{p}_1 u = (u_1; 0),$$

здесь A — оператор гильбертовой пары $(H_{\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.

Решения четвертой и пятой вспомогательных задач имеют вид

$$\begin{aligned} u_{(4)} &= A^{-1}(0; f_2) = A^{-1}(\lambda(0; u_2)) = \lambda A^{-1}(\tilde{p}_2 u), \\ u_{(5)} &= V_{21}\psi_{21} = V_{21}(\mu\gamma_{21}u_1) = \mu V_{21}\gamma_{21}p_1 u. \end{aligned}$$

Итогом проведенных построений является следующий вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (1)–(2), (4)–(12) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{k=1}^5 u_{(k)} = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1 u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2 u + \lambda A^{-1}\tilde{p}_1 u + \lambda A^{-1}\tilde{p}_2 u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1 u.$$

Используя теперь свойство

$$u = (u_1; u_2) = \tilde{p}_1 u + \tilde{p}_2 u = (\tilde{p}_1 u_1; 0) + (0; \tilde{p}_2 u_2),$$

получаем

$$u = \lambda(A^{-1} + V_{11}\gamma_{11}p_1)u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2 u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1 u, \quad (14)$$

где $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$, A — оператор гильбертовой пары $(H_{\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.

Приведем уравнение (14) к более симметрической форме. С этой целью воспользуемся свойством

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k); L_2(\Omega)), \quad k = 1, 2.$$

Представим элемент $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в виде

$$u = A^{-1/2}v, \quad v \in L_2(\Omega) = \mathcal{R}(A^{1/2}), \quad (15)$$

и подставим его в (14). Далее, в силу свойства $H_{\Gamma}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$. Тогда взамен (14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \quad (16)$$

где $0 < A^{-1} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_2(\Omega))$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_{11} := A^{1/2}V_{11}(V_{11})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_2(\Omega)), \\ 0 &\leq B_{22} := A^{1/2}V_{22}(V_{22})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_2(\Omega)), \\ 0 &\leq K_{22} := A^{1/2}V_{21}(V_{21})^* A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_2(\Omega)), \end{aligned} \quad (17)$$

для операторного пучка $L(\lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ , один из которых можем считать фиксированным, другой — спектральным.

2. ВОЗМУЩЕННЫЕ СМЕШАННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЕРВОМ УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь возмущенную $\varepsilon \neq 0$ спектральную задачу. Тогда в областях Ω_1, Ω_2 для искомым функций $u_k(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 &=: f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \tilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 &=: f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \tilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \end{aligned} \quad (18)$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned} \partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 &=: \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 =: \tilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 &=: \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 =: \tilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \quad (19)$$

на границах стыка два условия сопряжения:

либо

$$\begin{aligned} \gamma_{11} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 &= \varphi_{21} + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) = \\ &= \mu \gamma_{12} u_1 + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) =: \tilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \end{aligned} \quad (20)$$

либо

$$\begin{aligned} \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) &= \mu (\gamma_{12} u_1 - \gamma_{12} u_2) + \\ + \varepsilon (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{12} \gamma_{12} u_2) &=: \tilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение задачи (18)–(20) ищем в виде суммы решений пяти вспомогательных задач

$$\begin{aligned} 1) \quad u_{11} - \Delta u_{11} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \partial_{11} u_{11} &= \tilde{\psi}_1 := \psi_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 + \varepsilon \sigma_1 \gamma_{11} u_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{12} - \Delta u_{12} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ \gamma_{21} u_{11} - \gamma_{12} u_{12} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \quad \partial_{21} u_{11} + \partial_{12} u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}). \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad u_{21} - \Delta u_{21} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{22} - \Delta u_{22} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{22} = \tilde{\psi}_2 := \psi_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 = \\ &= \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 + \varepsilon \sigma_2 \gamma_{22} u_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \quad \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}). \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad u_{31} - \Delta u_{31} &= \tilde{f}_1 := f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \lambda u_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \quad (\text{в } \Omega_1), \\
 \partial_{11} u_{31} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
 u_{32} - \Delta u_{32} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\
 \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \quad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}).
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad u_{41} - \Delta u_{41} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{41} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
 u_{42} - \Delta u_{42} &= \tilde{f}_2 := f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \lambda u_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \quad (\text{в } \Omega_2), \\
 \partial_{22} u_{42} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\
 \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \quad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}).
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad u_{51} - \Delta u_{51} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \partial_{11} u_{51} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\
 u_{52} - \Delta u_{52} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \partial_{22} u_{52} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\
 \gamma_{21} u_{51} - \gamma_{12} u_{52} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \\
 \partial_{21} u_{51} + \partial_{12} u_{52} &= \tilde{\psi}_{21} := \psi_{21} + \varepsilon(\partial_{12} \gamma_{21} u_1 - \partial_{21} \gamma_{12} u_2) = \\
 &= \mu \gamma_{21} u_1 + \varepsilon(\partial_{12} \gamma_{21} u_1 - \partial_{21} \gamma_{12} u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12}).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Аналогично (4)–(12) задачи (22)–(26) исследуем с помощью формулы Грина (13). Тогда слабое решение задачи (18)–(20) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
 u_\varepsilon - \varepsilon V_{11} \sigma_1 \gamma_{11} p_1 u_\varepsilon - \varepsilon V_{22} \sigma_2 \gamma_{22} p_2 u_\varepsilon + \varepsilon A^{-1} \left(\sum_{k=1}^m c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) - \\
 - \varepsilon V_{21} (\sigma_{12} \gamma_{21} u_1 - \sigma_{21} \gamma_{12} u_2) = \lambda (A^{-1} + V_{11} V_{11}^*) u_\varepsilon + \\
 + \lambda^{-1} (V_{22} (V_{22})^*) u_\varepsilon + \mu V_{21} (V_{21})^* u_\varepsilon,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где $V_{kk} = (\gamma_{kk} p_k)^*$.

Осуществим в (27) замену, аналогично (15)

$$u_\varepsilon = A^{-1/2} v_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_\Gamma^1(\Omega).$$

Действуя на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$, получаем следующую спектральную задачу

$$L(\lambda, \mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega),$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H_\Gamma^1(\Omega); L_2(\Omega))$, операторы B_{11} , B_{22} , K_{22} описаны в (17), а $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, где

$$S := A^{1/2}V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1A^{-1/2} + A^{1/2}V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2A^{-1/2} + \\ + A^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)A^{-1/2} - A^{1/2}V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2).$$

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ПРИ ПЕРВОМ УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА μ

Изучим свойства решений спектральной задачи (1) при первых граничных условиях на стыке (2). Операторный пучок (16) содержит два параметра λ и μ . Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Сначала рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ фиксированным параметром является λ , а μ — спектральным.

Отрицательные значения параметра λ .

Пусть в задаче (16) параметр $\lambda < 0$. Через $T(\lambda)$ обозначим оператор вида

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}. \quad (28)$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geq I$ равномерно по λ . Следовательно существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$ и $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$.

Заметим, что оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})((V_{21})^*A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в пространство

$$L_{2,h}(\Omega) := \left\{ v \in L_2(\Omega) : v = A^{1/2}u, u \in H_\Gamma^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \right\},$$

поэтому

$$\text{Ker } K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega).$$

Кроме того, оператор K_{22} неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также неотрицателен и компактен. Это позволяет преобразовать задачу (16) к спектральной проблеме на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта–Шмидта.

Пусть P_0, P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы отвечающие разложению:

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 = \text{Ker } K_{22} = L_{2,0}(\Omega), \quad H_1 = \overline{\mathcal{R}(K_{22})} = L_{2,h}(\Omega),$$

где I_0, I_1 — единичные операторы в H_0, H_1 соответственно.

Тогда $v = v_0 + v_1$

$$(I - T(\lambda))(v_0 + v_1) = \mu K_{22}(v_0 + v_1) = \mu K_{22}v_0 + \mu \tilde{K}_{22}v_1 = \mu \tilde{K}_{22}v_1, \quad (29)$$

где

$$\tilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1, \quad K_{22}v_0 = 0, \quad v_0 = P_0v_0, \quad v_1 = P_1v_1.$$

Применим к обеим частям уравнения (29) ортопроекторы P_0, P_1 , получим

$$P_0(I - T(\lambda))P_0v_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1v_1 = \mu P_0\tilde{K}_{22}v_1 = 0, \quad (30)$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0v_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1v_1 = \mu P_1\tilde{K}_{22}v_1 = \mu \tilde{K}_{22}v_1. \quad (31)$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0T(\lambda)P_0 \geq I_0$ в H_0 , и потому существует его обратный, причем $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leq 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (30) имеем при $\lambda < 0$

$$v_0 = (P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0T(\lambda)P_1v_1). \quad (32)$$

Подставим (32) в (31), получим уравнение для v_1 :

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu \tilde{K}_{22}v_1, \quad v_1 \in H_1, \quad (33)$$

$$T_1(\lambda) := P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1. \quad (34)$$

Лемма 1. При $\lambda < 0$ имеет место свойство $\text{Ker } (I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}$.

Доказательство. Соотношения (30), (31) при $\mu = 0$ могут быть выполнены только если $v_1 = 0, v_2 = 0$, так как оператор $I - T(\lambda)$ положительно определен при $\lambda < 0$. Выразив из (30) при $\mu = 0$ элемент v_0 и подставив его в (31) найдем с учетом (34), что уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = 0 \quad (35)$$

может быть выполнено только при $v_1 = 0$. □

Отметим, что при $\lambda < 0$ оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ самосопряжен и положительно определен. В самом деле, если имеется связь (32), то

$$\begin{aligned} ((I - T(\lambda))(v_0 + v_1), v_0 + v_1)_{L_2(\Omega)} &= ((I_1 - T_1(\lambda))v_0, v_1)_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq (\|v_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2) \geq \|v_1\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Основываясь на оценке (36), сделаем в (33) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}v_1 = \psi_1. \quad (37)$$

Далее, действуя слева ограниченным оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$ на (36), получаем следующую задачу

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \mu \widehat{K}_{22} \psi_1, \quad \psi_1 \in L_{2,h}(\Omega), \\ \widehat{K}_{22} &:= (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} P_1 K_{22} P_1 (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{K}_{22}^* > 0, \quad \widehat{K}_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \end{aligned} \quad (38)$$

Теорема 1. При фиксированном $\lambda < 0$ спектр задачи (16) состоит из изолированных конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{v_k := (v_{1k}, v_{2k})\}_{k=1}^\infty$ образуют базис Рисса в H_1 , причем $v_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \psi_{1k}$, где $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис, отвечающий оператору \widehat{K}_{22} из (38). Более того, элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$ для $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ образуют p -базис в H_1 при

$$p > p_0 = m - 1. \quad (39)$$

Доказательство. Утверждение о дискретности и положительности спектра, базисности Рисса следует из теоремы Гильберта-Шмидта, примененной к проблеме (38), и свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_1)$.

Докажем теперь свойство (39). Из формулы (28) вытекает принадлежность $T(\lambda)$ классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max\{p_{A^{-1}}, p_{B_{11}}, p_{B_{22}}\}. \quad (40)$$

Однако можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряженного компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}v\|_{L_2(\Omega)}^2 / \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 / \|u\|_{H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)}^2, \quad u = A^{-1/2}v \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega),$$

поэтому их асимптотика при $k \rightarrow \infty$ дается классической формулой Вейля (см., например, [13])

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m} k^{-2/m} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \quad a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \quad (41)$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Аналогично для оператора B_{11} получаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_{11} A^{-1/2}v\|_{L_2(\Gamma)} / \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Gamma_{11}} |u|^2 d\Gamma_{11} / \int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega, \quad u \in H_{0,\Gamma_{11}}^1(\Omega).$$

Отсюда и из [14] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_{11})$ таково:

$$\begin{aligned} \lambda_k(B_{11}) &= (d_{m,11}(\Gamma_{11}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \\ d_{m,11}(\Gamma_{11}) &> 0, \quad d_{3,1}(\Gamma_{11}) = \frac{|\Gamma_{11}|}{4\pi}. \end{aligned} \quad (42)$$

Следовательно, $p_{B_{11}} > m - 1$.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем следующую формулу для оператора B_{22}

$$\begin{aligned} \lambda_k(B_{22}) &= (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \\ d_{m,22}(\Gamma_{22}) &> 0, \quad d_{3,22}(\Gamma_{22}) = \frac{|\Gamma_{22}|}{4\pi}, \end{aligned} \quad (43)$$

и потому $p_{B_{22}} > m - 1$. Из формул (40)–(43) приходим к выводу, что $T(\lambda)$ из (28) принадлежит классу \mathfrak{S}_p при $p > p_0 = m - 1$.

Отметим, наконец, что

$$(I - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \tilde{T}_1(\lambda); \quad \tilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p, \quad p > p_0 = m - 1.$$

Отсюда и из (37) вытекает свойство p -базисности элементов $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $p > m - 1$. \square

Положительные значения параметра λ .

Рассмотрим теперь положительные значения параметра, но

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \quad (44)$$

Тогда так же, как и в предыдущем случае можно перейти от проблемы (16), путем проектирования на подпространство $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения v_0 (см. (30), (32)), к уравнению (33) с $T_1(\lambda)$ из (34).

Утверждения леммы 1 справедливы и в этом случае, причем $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряженный оператор, действующий в H_1 . Следовательно, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ может иметь не более конечного числа (с учетом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $+1$. Обозначая количество отрицательных собственных значений через κ_1 , приходим к заключению, что квадратичная форма оператора $(I_1 - T_1(\lambda))$ индефинитна, а пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму κ_1 -мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+ . Тогда возникает индефинитная метрика Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\kappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \quad \Pi_- = H_-, \quad \Pi_+ = H_+, \quad \dim \Pi_- = \kappa_1, \quad \dim \Pi_+ = \infty. \quad (45)$$

Теорема 2. Пусть $\lambda > 0$ фиксирован и выполнено условие (44), а также имеет место разложение (45). Тогда спектр задачи (16) вещественный, дискретный и состоит из κ_1 штук отрицательных собственных значений, остальные положительные и имеют предельную точку $\mu = +\infty$:

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{\kappa_1} < 0 < \mu_{\kappa_1+1} \leq \dots < \mu_{\kappa} \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty. \quad (46)$$

Собственные элементы (присоединенных нет) задачи (33) образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ базис и базис Рисса в $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям:

$$(I_1 - T_1(\lambda)v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leq k, j \leq \kappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, j \geq \kappa_1 + 1, \\ 0, & k \leq \kappa_1, j \geq \kappa_1 + 1, \end{cases} \quad (47)$$

$$(\tilde{K}_{22}v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj}.$$

Доказательство. Учитывая (44) и (45), представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$(I_1 - T_1(\lambda)) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\kappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \quad (48)$$

где J_{κ_1} — каноническая симметрия: $J_{\kappa_1} = J_{\kappa_1}^* = J_{\kappa_1}^{-1}$. Тогда с учетом (48) преобразуем задачу (33) к виду

$$\varphi_1 = \mu J_{\kappa_1} \tilde{K}_{22}(\lambda) \varphi_1, \quad (49)$$

где

$$\varphi_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} v_1, \quad \tilde{K}_{22}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \tilde{K}_{22} |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \quad (50)$$

Из компактности и положительности оператора $\tilde{K}_{22}(\lambda)$ следует компактность $J_{\kappa_1} \tilde{K}_{22}(\lambda)$ и его J_{κ_1} -положительность, то есть

$$[J_{\kappa_1} \tilde{K}_{22}(\lambda) \varphi_1, \varphi_1] := (J_{\kappa_1} (J_{\kappa_1} \tilde{K}_{22}(\lambda) \varphi_1, \varphi_1)) = (\tilde{K}_{22}(\lambda) \varphi_1, \varphi_1) > 0, \quad \varphi_1 \neq 0.$$

Тогда по теореме Л. С. Понтрягина (см. [15]) получаем, что задача (49), (50) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойствами (46), а собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, образуют базис Рисса в H_1 . Отсюда и из замены (50) следует, что собственные элементы $\{v_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис Рисса в H_1 . Далее, из условий ортонормировки

$$[\varphi_{1k}, \varphi_{1j}] = (J_{\kappa_1} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = \pm \delta_{kj}, \quad (\tilde{K}_{22} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj},$$

приходим к выводу, что имеют место формулы (47). \square

Случай общего положения.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \quad (51)$$

Как известно (см. [2]), операторный пучок типа С. Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22}, \quad A^{-1}, B_{11}, B_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)) \quad (52)$$

с самосопряженными операторными коэффициентами может иметь не более конечного числа не вещественных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

В частности, если $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))v\|_H \cdot \|v\|_H \geq |(I - T(\lambda)v, v)|_H \geq \operatorname{Re}(I - T(\lambda)v, v)|_H \geq \|v\|_H^2$$

при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ получаем оценку

$$\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$$

равномерно по λ . Также получаем,

$$\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leq 1,$$

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)v_0, v_0)_H = ((I - T(\lambda))v_0, v_0)_H \geq \|v_0\|_H^2, \quad v_0 \in H_0.$$

Отсюда следует, что от исходной проблемы (16) можно перейти к уравнению (33) с $T_1(\lambda)$ из (34), при этом для связи (32) оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ снова ограниченно обратим. Тогда задачу (33) можно переписать в виде

$$v_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} \tilde{K}_{22} v_1, \quad v_1 \in H_1 = L_{2,h}, \quad \tilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1. \quad (53)$$

Сформулируем итоговый результат для данного случая.

Теорема 3. Пусть в задаче (16) выполнены условия (51). Тогда спектр этой задачи состоит из изолированных конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\mu = \infty$. Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле

$$\Lambda_\varepsilon := \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon, \operatorname{sign} \operatorname{Im} \mu = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda \right\}.$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{1k} = P_1 v_k\}_{k=1}^\infty$, то есть система собственных и присоединенных элементов задачи (16), после их проектирования на $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, является полной в H_1 , более того, она образует базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > t-1$ в $L_{2,h}(\Omega)$. Далее, собственные значения $\mu_k = \mu_k(\lambda)$

имеют асимптотическое поведение

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \quad (54)$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Доказательство. Заметим, что асимптотическая формула (55), так же, как и асимптотические формулы (41), (42) вытекает из работы [14]. Далее, из условий (44) получаем, что от задачи (16) можно перейти к задаче (33) и затем к (53).

Следовательно, к проблеме (53) можно применить теоремы М. В. Келдыша (см. [16]), так как в силу (55) оператор $\tilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор K_{22} , и потому \tilde{K}_{22} — полный положительный компактный оператор класса \mathfrak{S}_p при $p > m - 1$. Более того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda)$, $T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$, очевидно, обратим. Отсюда вытекают первые утверждения исходной теоремы.

Свойство, определяющее связь знаков $\text{Im } \mu$ и $\text{Im } \lambda$, вытекает из соотношения

$$(I - T(\lambda)v, v)_H = \mu(K_{22}v, v)_H,$$

учитывая формулы (52) для $T(\lambda)$ и свойства операторов A^{-1} , B_{11} , B_{22} , K_{22} .

Свойство базисности по Абелю–Лидскому порядка $\alpha > m - 1$ вытекает также из (55) и утверждения из ([17, с. 292]). Наконец, асимптотическая формула (54) следует из результатов А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [18]), примененных к уравнению

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu \tilde{K}_{22}v_1,$$

в силу компактности и вида оператора $T_1(\lambda)$, а числа $\lambda_k(\tilde{K}_{22}) = \lambda_k(K_{22})$ и имеют асимптотику (55). \square

В случае спектрального параметра λ при первом условии сопряжения также исследуются свойства решений невозмущенных спектральных проблем. Для них доказываются теоремы о полноте, базисности корневых элементов и структуре спектра.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ПРИ ПЕРВОМ УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА μ

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda, \mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad (56)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H_1^1(\Omega); L_2(\Omega))$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, операторы B_{11} , B_{22} , K_{22} описаны в (17). Изучим свойства решений спектральной проблемы (1)

при первых граничных условиях на стыке (2). В этом случае снова, задача (56) содержит два параметра λ и μ . Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

Предположим, что в задаче (56) параметр

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - \varepsilon S - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0), \quad (57)$$

где через $T(\lambda)$ обозначен оператор

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}.$$

Отметим, что оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})(V_{21}^*)A^{-1/2}$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в $L_{2,h}(\Omega)$, значит $\text{Ker } K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$. Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также является компактным. Это позволяет преобразовать проблему (56) к спектральной задаче на собственные значения для слабо возмущенного оператора и воспользоваться теоремой М. В. Келдыша.

Аналогично предыдущему параграфу спроектируем обе части полученного уравнения на H_0 и H_1 соответственно с помощью ортопроекторов P_0, P_1 . Для этого представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon = v_{\varepsilon,0} + v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0} \in H_0$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = H \ominus H_0$. При этом $v_{\varepsilon,0} = P_0 v_\varepsilon, v_{\varepsilon,1} = P_1 v_\varepsilon, K_{22} = P_1 K_{22} P_1, K_{22} v_{\varepsilon,0} = 0$. Подставим сначала $v_{\varepsilon,0}, v_{\varepsilon,1}$ в уравнение. Имеем

$$(I - \varepsilon S - T(\lambda))(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22}(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}. \quad (58)$$

Применим теперь к обеим частям последнего уравнения ортопроектор P_0 , получим

$$(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} = (P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}. \quad (59)$$

Если $\lambda \notin \sigma(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)$, то существует ограниченный обратный оператор $(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}$.

Далее, применим ортопроектор P_1 к (58), имеем

$$(I_1 P_1 v_{\varepsilon,1} - \varepsilon P_1 S P_0 v_{\varepsilon,0} - \varepsilon P_1 S P_1 v_{\varepsilon,1} - P_1 T(\lambda) P_0 v_{\varepsilon,0} - P_1 T(\lambda) P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}. \quad (60)$$

Тогда из (59) вытекает, что

$$v_{\varepsilon,0} = (I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1} (P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}.$$

Запишем (60) в виде

$$(I_1 - \varepsilon P_1 S P_1 - P_1 T(\lambda) P_1) v_{\varepsilon,1} = (\varepsilon P_1 S P_0 + P_1 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} + \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}$$

и подставим в последнее выражение $v_{\varepsilon,0}$, получим уравнение для $v_{\varepsilon,1}$:

$$(I_1 + S_1(\varepsilon, \lambda)) v_{\varepsilon,1} = \mu \tilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}, \quad (61)$$

где $\tilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $S_1(\varepsilon, \lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,h}(\Omega))$. В силу условия (57) оператор, стоящий слева в выражении (61), обратим. Поэтому

$$v_{\varepsilon,1} = \mu (I_1 + S_1(\varepsilon, \lambda))^{-1} \tilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1} := \mu (I_1 + S_2(\varepsilon, \lambda)) \tilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1},$$

где $S_2(\varepsilon, \lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Таким образом, получено уравнение для слабого возмущения оператора \tilde{K}_{22} , который является положительным компактным в $L_{2,h}(\Omega)$ класса \mathfrak{S}_p при $p > t - 1$.

Теорема 4. Пусть в задаче (56) выполнены условия (57). Тогда спектр этой задачи состоит из изолированных конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $\mu = \infty$. Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле $\Lambda_\varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$.

Далее, система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,1k} = P_1 v_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^\infty$, то есть система собственных и присоединенных элементов задачи (56), после их проектирования на $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, является полной в H_1 , более того, она образует базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > t - 1$ в $L_{2,h}(\Omega)$. Собственные значения $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ имеют асимптотическое поведение

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 3. Отличие заключается лишь в том, что это уже возмущенный случай ($\varepsilon \neq 0$), и здесь возникает несамосопряженный компактный оператор $S_2(\varepsilon, \lambda)$. \square

5. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ ПРИ ПЕРВОМ УСЛОВИИ СОПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА λ

Рассмотрим операторный пучок (см. (56))

$$L(\lambda, \mu) v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S + \mu K_{22}) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22}) v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in H = L_2(\Omega). \quad (62)$$

Если выполнено условие

$$\mu \notin \sigma(I - \varepsilon S + \mu K_{22}), \quad (63)$$

то существует ограниченный обратный оператор $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$.

В этом случае возникает спектральную задачу для пучка С. Г. Крейна, но этот пучок не является самосопряженным. Применяя слева в (62) оператор $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$, получаем следующую задачу

$$v_\varepsilon = \lambda(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})v_\varepsilon + \lambda^{-1}(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon. \quad (64)$$

Теорема 5. Пусть в задаче (64) выполнено условие (63), а также условие

$$4\|(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}\|^2\|A^{-1} + B_{11}\|\|B_{22}\| < 1.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1) Ненулевой спектр задачи состоит из двух ветвей изолированных конечно-кратных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

2) Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ собственных значений, расположенных в области

$$|\lambda| \leq r_-, \quad r_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\|(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}\|^2\|A^{-1} + B_{11}\|\|B_{22}\|}}{2\|(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}\|^2\|B_{22}\|},$$

при этом для любого $\varepsilon > 0$ все эти собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе $\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varepsilon\}$.

Далее, система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^0\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, после ее проектирования на подпространство $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \text{Ker } B_{22}$, является полной в H_1 и образует в H_1 базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > m - 1$.

3) Предельной точке $\lambda = \infty$ отвечает ветвь собственных значений $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, расположенных в области $|\lambda| \geq r_+$, при этом для любого $\varepsilon > 0$ все эти собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе Λ_ε .

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^\infty\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, является полной в $H = L_2(\Omega)$ и образует в H базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > m - 1$.

Доказательство. Оно проводится аналогично схеме, изложенной в [2, с. 82-86]. Утверждение 1) будет доказано в процессе доказательства утверждений 2) и 3).

Докажем утверждение 2). Введем пучок

$$M(\lambda) := Y^{-1}(I - \lambda Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}))(\lambda I - Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}),$$

где оператор - функция $(I - \lambda Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}))$ при $|\lambda| \leq t \in (r_-, r_+)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y = I + (I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}Y.$$

Кроме того,

$$\sigma(Z) := \sigma(Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq r_-\}.$$

Основываясь на этих фактах, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} Zv_\varepsilon &= Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon = \\ &= (I + (I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11})Y(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}Y)(I - \\ & - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon =: (I + \Phi)B_{22}v_\varepsilon = \lambda v_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega) = H, \quad |\lambda| \leq r_-, \end{aligned} \quad (65)$$

где $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $I + \Phi$ обратим, а $B_{22} = B_{22}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \text{Ker } B_{22}$.

Спроектируем обе части (65) на H_0 и H_1 соответственно. С этой целью представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon = v_{\varepsilon,0} + v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0} \in H_0$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = H \ominus H_0$, и введем ортопроекторы P_0 и P_1 . С учетом соотношений $P_0B_{22} = 0$, $P_1B_{22}P_1 =: \tilde{B}_{22} > 0$ в H_1 имеем

$$P_0(I + \Phi)P_1\tilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1} = \lambda v_{\varepsilon,0}, \quad (I_1 + P_1\Phi P_1)\tilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1} = \lambda v_{\varepsilon,1}. \quad (66)$$

Так как по условию задачи $\lambda \neq 0$, то из первого соотношения (66) можно выразить $v_{\varepsilon,0}$ через $v_{\varepsilon,1}$, а второе уравнение не содержит $v_{\varepsilon,0}$.

Здесь уже $B_{22}P_1 = P_1B_{22}P_1 =: \tilde{B}_{22} = \tilde{B}_{22}^*$ — полный оператор в H_1 , являющийся также самосопряженным и положительным.

Второе соотношение из (66) перепишем в виде

$$P_1(I + \Phi)B_{22}P_1v_{\varepsilon,1} = \lambda v_{\varepsilon,1},$$

а затем в виде

$$Z_1v_{\varepsilon,1} := P_1(I + \Phi)P_1\tilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1} = \lambda v_{\varepsilon,1}, \quad v_{\varepsilon,1} \in H_1.$$

Далее, рассуждая так же как и в теореме 3.1.2 (см., например, [2, с. 85]), доказывается утверждение о полноте системы корневых элементов в пространстве $L_{2,h}(\Omega)$. Учитывая еще, что собственные значения оператора K_{22} имеют степенную асимптотику, приходим также к выводу, что эта совокупность корневых элементов образует базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > m - 1$. Аналогичным образом, только проще, без проектирования на подпространство H_1 , так как $H_0 = \text{Ker } \tilde{B}_{22} = \{0\}$, доказывается утверждение 3). \square

Аналогично исследуются возмущенные и невозмущенные смешанные спектральные задачи при втором условии сопряжения. Для них доказаны теоремы о полноте, базисности корневых элементов и структуре спектра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базе уже рассмотренных задач в случае одной области (см. [1]) исследованы смешанные спектральные проблемы, порожденные несимметрической полуторалинейной формой (для оператора Лапласа) для двух областей. При этом использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи в виде суммы решений вспомогательных краевых задач (невозмущенных), содержащих неоднородность лишь в одном месте. Установлено, что исходные проблемы приводятся к исследованию операторного пучка, который зависит от двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным. Выведены свойства решений возмущенных и невозмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения. Доказаны теоремы о полноте, базисности корневых элементов и структуре спектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копачевский, Н. Д., Якубова, А. Р. О спектральных и эволюционных задачах, порожденных полуторалинейной формой // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2017. — Т. 63, вып. 2. — С. 278–315.
КОРАСНЕВСКИЙ, Н. & ЯКУБОВА, А. (2017) Spectral and evolutionary problems generated by a sesquilinear form. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 63. p. 278–315.
2. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков / Н. Д. Копачевский. — Симферополь, 2009. — 128 с.
КОРАСНЕВСКИЙ, Н. (2009) *Spectral theory of operator pencils*. Simferopol.
3. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — Москва, 1977. — 384 с.
OBEN, G.-P. (1977) *Approximate solution of elliptic boundary value problems*. Moscow.
4. Крейн, С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ДАН СССР. — 1964, Т. 159, № 2. — С. 262–265.

- KREIN, S. (1964) On oscillations of a viscous fluid in a vessel. *DAN USSR*. 159. p. 262–265.
5. SHOWALTER, R. (1974) *Hilbert space methods for partial differential equations*. Election. J. Differ. Equ.
6. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях // Spectral and Evolutional Problems: Proc. of 21th Crimean Autumn Math. School-Symf. — 2011, Т. 21, № 1. — С. 2–39.
- KOPACHEVSKY, N. (2011) Abstract Green's formula for mixed boundary value problems and its applications. *Spectral and Evolutional Problems: Proc. of 21th Crimean Autumn Math. School-Symf.* 21. p. 2–39.
7. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник. — 2004, Т. 1, № 1. — С. 69–97.
- KOPACHEVSKY, N. & KREIN, S. (2004) Abstract Green's formula for a triple of Hilbert spaces, abstract boundary value and spectral problems. *Ukrainian math. messenger*. 1. p. 69–97.
8. Агранович, М. С. Спектральные задачи в липшицевых областях // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2011. — Т. 39. — С. 11–35.
- AGRANOVICH, M. (2011) Spectral problems in Lipschitz domains. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 39. p. 11–35.
9. Андропова, О. А., Копачевский, Н. Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2008. — Т. 29. — С. 11–28.
- ANDRONOVA, O. & KOPACHEVSKY, N. (2008) On linear problems with surface energy dissipation. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 29. p. 11–28.
10. Войтицкий, В. И., Копачевский, Н. Д., Старков, П. А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2009. — Т. 34. — С. 5–44.
- VOYTITSKIY, V., KOPACHEVSKY, N. & STARKOV, P. (2009) Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary value problems. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 34. p. 5–44.

11. Радомирская, К. А. Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения // Современная математика. Фундаментальные направления. — М., РУДН, 2017. — Т. 63. — С. 316–339.
RADOMIRSKAYA, K. (2017) Spectral and initial-boundary conjugation problems. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 63. p. 316–339.
12. Горбачук, В. И. Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
GORBACHUK, V. (1998) Dissipative boundary value problems for elliptic differential equations. *Functional and numerical methods of mathematical physics*. Scientific thought. p. 60–63.
13. Бирман, М. Ш., Соломяк, М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. — Ленинград: ЛГУ, 1980. — 264 с.
BIRMAN, M. (1980) *Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space*. Leningrad: LSU.
14. Вулис, И. Л., Соломяк, М. З. Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова // Вестник ЛГУ. — 1973, Т. 19. — С. 148–150.
VULIS, I. & SOLOMYAK, M. (1973) Spectral asymptotics of the degenerate Steklov problem. *LSU Bulletin*. 19. p. 148–150.
15. Понтрягин, Л.-С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944, Т. 8, № 6. — С. 243–280.
PONTRYAGIN, L. (1944) Hermitian operators in a space with indefinite metric. *Academy of Sciences of the USSR*. 8, № 6. p. 243–280.
16. Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг. — Москва: Наука, 1965. — 448 с.
GOHBERG, I. & KREIN, M. (1965) *Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in a Hilbert space*. Moscow: Science.
17. AGRANOVICH, M., KATSENELENBAUM, B., SIVOV, A. & Voitovich, N. (1999) *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*. Berlin: Wiley-VCH.

18. Маркус, А. С. О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка // Матем. сборник. — 1987, Т. 133(175), № 3(7). — С. 293–313.

MARCUS, A. (1987) On the basis property of some part of the eigenvectors and associated vectors of a self-adjoint operator pencil. *Mat. collection.* 133(175), № 3(7). p. 293–313.

19. Михлин, С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала / С. Г. Михлин. — М.–Л. Гостехиздат, 1952. — 280 с.

MIHLIN, S. (1952) *The problem of the minimum of a quadratic functional.* Gostekhizdat.

Kozlova M. G., Germanchuk M. S. Building a transport network model using satellite images / M. G. Kozlova, M. S. Germanchuk // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 7–18.

УДК: 519.173+004.942

Рассмотрен метод построения транспортной сети с использованием спутникового изображения и набора путей в качестве входных данных. Разработано программное обеспечение для построения модели транспортной сети по указанным входным данным. Рассмотрены примеры работы программы на различных участках транспортных сетей. Описаны преимущества и недостатки разработанного метода.

Ключевые слова: транспортная сеть, бинаризация изображения, GPX трек.

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Smirnova L. V. To the problem of coalitional equilibrium in mixed strategies / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, L. V. Smirnova // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 19–38.

УДК: 519.834

В настоящей статье вводится понятие строгого коалиционного равновесия для игры в нормальной форме при неопределенности. Предложенное понятие основано на синтезе понятий индивидуальной, а также коллективной рациональности (из теории кооперативных игр без побочных платежей) и предложенного в настоящей статье определения коалиционной рациональности. Для простоты представления понятие строгого коалиционного равновесия формализуется для игры четырех лиц при неопределенности. Используя понятие седловой точки гермейеровской свертки гарантий функций выигрыша, устанавливаются достаточные условия существования предложенного равновесия в чистых стратегиях. Наконец, согласно подходу Эмиля Бореля, Джона фон Неймана и Джона Нэша, доказывается существование указанного равновесия в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр ограничениях (компактность и выпуклость множеств неопределенностей и стратегий игроков и непрерывность функций выигрыша).

Ключевые слова: Игра в нормальной форме без побочных платежей, неопределенность, гарантия, смешанные стратегии, гермейеровская свертка, седловая точка, равновесие.

Гуров С. И. Мажоритарная алгебра для синтеза комбинационно-логических схем. Обзор / С. И. Гуров // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 39–60.

УДК: 519.714.22, 510.649

Статья содержит обзор результатов по применению мажоритарной логики комбинационно-логических схем. В данной первой части рассмотрены теоретические основы вопросы алгебры большинства (или мажоритарной алгебры), её аксиоматизация и примитивные функции; применение мажоритарной логики при решении практических задач синтеза схем. Указаны некоторые физические реализации мажоритарных элементов. Рассмотрены первые (2007–2015) алгоритмы иммунизации мажоритарной логики со сравнением результатов их работы.

Ключевые слова: логика большинства, булева алгебра, аксиоматизация, примитивные функции, логический синтез.

Никитин Ю. И., Сахаров А. Н. Специальные тригонометрические ряды в задаче о периодических решениях / Ю. И. Никитин, А. Н. Сахаров // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 61–75.

УДК: 517.45

В настоящей работе описываются метод построения периодических решений для нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами специального вида. Основа этого метода заключается в представлении искомого решения в нестандартного тригонометрического ряда в виде степенного ряда по $\sin t$. Коэффициенты такого ряда вычисляются рекуррентным способом. Подобное представление допустимо не только для непрерывных периодических решений, но и для решений с особенностями. Кроме того, представление особого решения в виде нестандартного тригонометрического ряда позволяет локализовать его особенности. Расстриваемые уравнения также могут иметь особенности. При нахождении особых решений используется предположение о том, что в случае существования двух таких решений они связаны определенным равенством. Это позволяет, например, найти граничные кривые для зон устойчивости уравнения Хилла с параметром. Полученные результаты о существовании особых периодических решений дополняют общие теоремы из [7], полученные другими способами.

Ключевые слова: нестандартные тригонометрические ряды, периодические решения, особые периодические решения.

Третьяков Д. В. Изоморфизм J -самосопряженных дилатаций общего вида линейного оператора с непустым множеством регулярных точек / Д. В. Третьяков // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 76 – 87.

УДК: 517.432

В статье доказана теорема об изоморфизме двух J -самосопряженных дилатаций общего вида, построенных для плотно заданного линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. Из доказанной теоремы вытекает изоморфизм J -самосопряженных дилатаций специального вида, известных ранее.

Ключевые слова: J -самосопряженные дилатации, изоморфизм J -самосопряженных дилатаций.

Якубова А. Р. О свойствах решений некоторых смешанных спектральных задач / А. Р. Якубова // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 2 (47). — С. 88 – 110.

УДК: 517.95

На базе уже рассмотренных задач в случае одной области в работе изучены смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой. При этом используется принцип суперпозиции, позволяющий представить решение исходной задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте, то есть либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. В результате исследования спектральных проблем получается один и тот же операторный пучок, который исследуется методами спектральной теории операторных пучков. Доказаны теоремы о свойствах решений смешанных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения в случае, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ один параметр является спектральным, другой — фиксированным, и наоборот.

Ключевые слова: формула Грина, полуторалинейная форма, задача сопряжения, спектр, полнота, гильбертово пространство.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

***Германчук Мария
Сергеевна***

ассистент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета, г. Симферополь, Российская Федерация

e-mail: m.germanchuk@yandex.ru

***Гуров Сергей
Исаевич***

к. ф.-м. н, доцент кафедры Математических методов прогнозирования факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская Федерация

e-mail: sgur@cs.msu.su

***Жуковская Лидия
Владиславовна***

к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Центрального экономико-математического института Российской академии наук (ЦЭМИ РАН), г. Москва, Российская Федерация

e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

***Жуковский Владислав
Иосифович***

д.ф.-м.н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

e-mail: zhkvlad@yandex.ru

***Козлова Маргарита
Геннадьевна***

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета, г. Симферополь, Российская Федерация

e-mail: art-inf@mail.ru

**Никитин Юрий
Иванович**

к. т. н, доцент кафедры механизации и электрофикации сельского хозяйства инженерного факультета Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии, г. Нижний Новгород, Российская Федерация
e-mail: ura-nik@yandex.ru

**Сахаров Александр
Николаевич**

доцент кафедры высшей математики и теоретической механики инженерного факультета Нижегородской государственной сельскохозяйственной академии, г. Нижний Новгород, Российская Федерация
e-mail: ansakharov2008@yandex.ru

**Смирнова Лидия
Викторовна**

к.ф.-м.н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

**Третьяков Дмитрий
Вадимович**

к. ф.-м. н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им.В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: dvttvd@mail.ru

**Якубова Алие
Рустемовна**

аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, Таврической академии, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru

Подписано к печати 3.6.2020. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7