

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (46) ' 2020

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

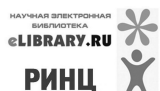
ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



Math-Net.Ru



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2020, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
С. В. АБЛАМЕЙКО	академик НАН Беларуси, профессор, доктор технических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук
В. И. ЧИЛИН	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор): vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Sergey ABLAMEYKO	Full member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, Doctor of Engineering Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoly GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valery CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir CHILIN	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the "Computer Science Theory" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the "Mathematics" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office

Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Shchukin M. V. On 3-homogeneous C^* -algebras over two-dimensional oriented manifolds	11
Voytitsky V. I. On hyper-sums and hyper-products of progressions	19
Донской В. И. Интеллектуальная оптимизация на основе машинного обучения: современное состояние и перспективы (обзор)	32
Марянин Б. Д., Смолич В. П. Гладкие меры на многообразиях с римановой структурой	64
Рейимбергманов А. А., Рахимов И. Д. Численно-аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера	80
Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В. Об использовании преобразования Ханкеля при математическом моделировании катодolumинесценции в однородном полупроводниковом материале	92
Рефераты	108
Список авторов номера	113

TABLE OF CONTENTS

Shchukin M. V. On 3-homogeneous C^* -algebras over two-dimensional oriented manifolds.....	11
Voytitsky V. I. On hyper-sums and hyper-products of progressions	19
Donskoy V. I. Intelligent Optimization based on Machine Learning: State of Art and Perspectives (A Survey).....	32
Maryanin B. D, Smolich V. P. Smooth measures on manifolds with a Riemannian structure	64
Reyimberganov A. A., Rakhimov I. D. Numerical-analytical solutions of the nonlinear Schrödinger equation	80
Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. On the use of Hankel transformation in mathematical modeling of catodoluminescence in a homogeneous semiconductor material.....	92
Abstracts	108
Authors	113



Николай Дмитриевич КОПАЧЕВСКИЙ

18 мая 2020 г. ушел из жизни Николай Дмитриевич Копачевский, зам. главного редактора журнала «Таврический вестник информатики и математики», известный отечественный математик, доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник сферы образования Российской Федерации, заведующий кафедрой математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, организатор и бессменный руководитель Крымской осенней математической школы — симпозиума (КРОМШ).

Николай Дмитриевич родился 25 марта 1940 года в городе Симферополе. Его мать в период оккупации Симферополя была расстреляна и маленький Коля остался на руках его тети, Дины Лазаревны, которая воспитала его несмотря на трудный военный и послевоенный период. По окончании школы Николай Дмитриевич поступил в Харьковский авиационный институт, который окончил с отличием в 1963 году, получив одним из первых в СССР новую специальность инженера-конструктора ядерных авиадвигателей. В том же году был принят инженером в Физико-технический институт низких температур имени Б. И. Веркина (ФТИНТ) в отдел прикладной математики, возглавляемый Анатолием Дмитриевичем Мышкисом.

В годы начала космической эры возникла потребность в исследовании поведения жидкости в условиях невесомости. К изучению данной проблематики (задачи определения форм равновесия, условий устойчивости, описания тепловой конвекции,

проблемы малых движений) был привлечен отдел прикладной математики. Подобными задачами чуть позже стали заниматься в Вычислительном центре АН СССР (г. Москва) и в Институте математики НАН Украины (г. Киев). В 1976 году по материалам работы сотрудников ФТИИТ вышла первая в мире монография по гидромеханике невесомости (см. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976), которая была переиздана во многих странах мира. Исследования Николая Дмитриевича, посвященные проблемам малых движений и собственных колебаний капиллярной жидкости, стали основой кандидатской диссертации «О малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости», защищенной в Харькове в 1966 году под руководством А. Д. Мышкиса. Николай Дмитриевич одним из первых начал применять методы теории операторов к исследованию гидродинамических задач. На выбор данной методики существенное влияние оказал Селим Григорьевич Крейн, который на долгие годы стал старшим товарищем и соавтором Николая Дмитриевича. Под влиянием работ С. Г. Крейна Николай Дмитриевич начал изучение поведения вязкой жидкости, а также систем жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения. Материалы его работ, написанных в 70-е годы, стали основой докторской диссертации «Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения», защищенной в Москве в 1980 году в Вычислительном центре АН СССР. Официальными оппонентами были академики О. А. Ладыженская и Ф. Л. Черноусько, высоко оценившие заслуги Николая Дмитриевича.

В 1981 году Николай Дмитриевич вернулся в Крым. С момента переезда Николай Дмитриевич являлся заведующим кафедрой математического анализа Симферопольского государственного университета, Таврического национального университета, а ныне — Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Работая в Симферополе, Николай Дмитриевич продолжил сотрудничать с С. Г. Крейном и другими ведущими специалистами в области функционального анализа, среди которых были А. С. Маркус и М. С. Агранович. Результатом работ этого периода стала монография «Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи» (1989), расширенный вариант которой “Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics” вышел в двух томах в 2001 и 2003 годах в серии “Operator Theory: Advances and Applications”.

Любимым детищем Николая Дмитриевича Копачевского стала организованная в 1990 году «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ). Конференция получила международную известность. Ее постоянными участниками стали многие известные математики из

России, Украины, Беларуси, Узбекистана, Казахстана, Израиля, Германии, Польши, Англии, Франции, Японии, США и других стран.

За годы работы Николай Дмитриевич разработал и прочел более 10 спецкурсов для студентов и аспирантов математических специальностей. Он был бессменным руководителем еженедельного научного семинара кафедры математического анализа, из которого вышли многие кандидаты наук, ставшие преподавателями Крымских вузов. Под руководством Николая Дмитриевича было защищены 22 кандидатские и две докторские диссертации, сформировалась научная школа «Операторные методы в механике сплошных сред». Основные направления научных исследований школы Николая Дмитриевича Копачевского связаны с проблемами малых движений идеальной, вязкой, вязкоупругой жидкостей, баротропным газом, системами жидкостей с условиями капиллярности, релаксации, стратификации в неподвижном, вращающемся или колеблющемся сосуде. В работах Николая Дмитриевича и его учеников отражена главная методика научной школы — сведение задачи в частных производных к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Использование современных достижений функционального анализа и математической физики позволили получить важные для приложений результаты о полноте и базисности собственных функций, о локализации и асимптотике собственных значений, о существовании сильных или слабых решений краевых задач. Николай Дмитриевич одним из первых стал использовать методы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой для решения проблем гидродинамики. В результате более чем 35 летнего сотрудничества с профессором Т. Я. Азизовым, в 2014 году вышла их совместная монография «Приложения индефинитной метрики».

Кроме прикладных задач Николай Дмитриевич активно исследовал многие фундаментальные проблемы теории нелинейных оператор-функций, теории интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, общей теории граничных задач и задач сопряжения. В последние годы Николай Дмитриевич с учениками активно занимался исследованием малых движений сочлененных маятников с жидким наполнением, вязкоупругих жидкостей и систем несмешивающихся жидкостей, многокомпонентными задачами сопряжения в Липшицевых областях, обобщениями абстрактной формулы Грина для задач сопряжения и полуторалинейных форм.

За период почти 60-летней научной деятельности Николай Дмитриевич с соавторами написал более 250 научных работ, более 15 учебных пособий, издал 8 монографий (полный список трудов доступен на сайте <http://nikolay-d-kopachevsky.com>). Он является заслуженным деятелем науки и техники Украины и России, лауреатом государственной премии Украины 2013 года (в составе авторского коллектива) за

цикл научных работ по гидромеханике «Закономерности волно-вихревых процессов в сплошной среде», лауреатом премий имени В. И. Вернадского и кавалером Ордена «За заслуги» 3-й степени.

Неоценимую поддержку в жизни и работе Николаю Дмитриевичу оказывала его жена, с которой он прожил много лет в любви и согласии. Валентина Георгиевна прекрасно понимала Николая Дмитриевича и делала все для его плодотворной научной деятельности.

Интересы и увлечения Николая Дмитриевича были чрезвычайно разнообразными: волейбол, плавание, включая прыжки в воду с Крымских скал, туризм. Но главной всегда оставалась математика, увлечение очередными математическими проблемами.

Таким увлеченным и преданным главному делу своей жизни — математике, талантливым, работоспособным, благожелательным к окружающим мы и будем всегда его помнить.

А. С. Анафиев, О. В. Анашкин, В. Ф. Блыщик, В. И. Войтицкий, В. И. Донской, Д. А. Загора, М. Г. Козлова, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Е. В. Плохая, А. Л. Скубачевский, П. А. Старков, Т. А. Суслина, Д. О. Цветков, В. Н. Челов, А. А. Шкаликов, А. И. Яковлев.

УДК: 517.9

MSC2010: Primary 46L05, Secondary 16U99

ON 3-HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS OVER TWO-DIMENSIONAL ORIENTED MANIFOLDS

© M. V. Shchukin

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ул. Хмельницкого д. 9, Минск, 220013, БЕЛАРУСЬ
E-MAIL: *mvs777777@gmail.com*

ON 3-HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS OVER TWO-DIMENSIONAL ORIENTED MANIFOLDS.

Shchukin M. V.

Abstract. We consider algebraic bundles over a two-dimensional compact oriented connected manifold. In 1961 J. Fell, J. Tomiyama, M. Takesaki showed that every n -homogeneous C^* -algebra is isomorphic to the algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle. By using this realization we prove in the work that every 3-homogeneous C^* -algebra over two-dimensional compact oriented connected manifold can be generated by three idempotents. Such algebra can not be generated by two idempotents.

Keywords: n -homogeneous C^* -algebras idempotent two-dimensional manifold number of generators operator algebras

INTRODUCTION

A C^* -algebra A is called n -homogeneous if the dimension of $\pi(A)$ is equal n for any irreducible representation π . Denote by A a n -homogeneous C^* -algebra. Let $Prim(A)$ be the space of primitive ideals for the algebra A . J. Fell [1], J. Tomiyama and M. Takesaki [2] proved in 1961 that every n -homogeneous C^* -algebra can be realized as the algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle (E, M, p) . Generally, the base space M of the bundle is homeomorphic to the space $Prim(A)$ in the hull-kernel topology.

On the other hand, we studied the class of C^* -algebras that can be generated by a finite set of idempotent generators. Suppose a is an element of an algebra A . If $a^2 = a$ then the element a is called idempotent. The theory of C^* -algebras generated by idempotents has applications to the theory of singular integral operators [3].

Also, several authors studied the structure of C^* -algebras that can be generated by a finite set of idempotents [4, 5]. Let A be an algebra. The symbols $M_n(A)$ denotes

the matrix-algebra whose elements belong to the algebra A . In the work [6] the exact estimation of minimal number of idempotent generators for the algebra $M_n(A)$ was given.

Denote by A a 3-homogeneous C^* -algebra. Suppose the space of primitive ideals for the algebra A is homeomorphic to a compact connected two-dimensional oriented manifold. In the work we consider such algebra. We prove that the algebra A can be generated by three idempotents. On the other hand, such algebra cannot be generated by two idempotents.

Proposition 1. ([7]) Every compact connected two-dimensional oriented manifold is homeomorphic to the sphere P_k with k handles for some $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

In the book [8] the general theory of vector bundles is considered. Suppose A is a 3-homogeneous C^* -algebra with space of primitive ideals homeomorphic to the set P_k . Let P_k be realised as the sphere S^2 with k handles attached to the upper half of the sphere. Suppose the k handles are so small, that they are all belong to the cylinder $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq h \leq 1$. Here the symbol h denotes the applicate of the point. Denote by D the lower half of the sphere P_k . Cut out the set D from the set P_k . Suppose ζ_A is the algebraic bundle corresponded to the algebra A . In this case the algebra A is homeomorphic to the algebra of all continuous sections $\Gamma(\zeta_A)$ for the algebraic bundle ζ_A .

Proposition 2. ([9]) The restriction of the bundle ζ_A to the set $P_k \setminus D$ is trivial.

Suppose B_V is the algebra of continuous matrix-functions from $P_k \setminus D$ to $C^{3 \times 3}$ with an additional condition on the border: $a(z) = V^{-1}(z) \cdot a(1) \cdot V(z), a(z) \in B_V$,

$$V(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
. The integer m can be equal to 0, 1, 2. The variable $z = x + iy$ is the complex variable on the complex plane.

Proposition 3. ([9]) The algebra A is isomorphic to the appropriate algebra B_V for some matrix-function $V(z)$.

1. SOME RESULTS ON THE STRUCTURE OF THE C^* -ALGEBRAS B_V

Suppose B_V is the 3-homogeneous C^* -algebra defined in the previous section.

Lemma 1. Consider B_V as the module over its center. In this case the next equality has a place: $B_V = E_{11}C(P_k) \oplus E_{12}B_m \oplus E_{13}B_m \oplus E_{21}B_{-m} \oplus E_{31}B_{-m} \oplus_{2 \leq s, t \leq 3} E_{st}C(P_k)$.

Proof. Suppose g is an element of the algebra B_V . Note that $g(x, y, h) \in C(P_k \setminus D, C^{3 \times 3})$, where $(x, y, h) \in R^3$. Let $z = x + iy$. For $h = 0$ we obtain

$$g(z) = \begin{pmatrix} z^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11}(1) & g_{12}(1) & g_{13}(1) \\ g_{21}(1) & g_{22}(1) & g_{23}(1) \\ g_{31}(1) & g_{32}(1) & g_{33}(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Here m can be equal 0,1,2. Thus we have

$$g(z) = \begin{pmatrix} g_{11}(1) \cdot |z|^{2m} & g_{12}(1) \cdot z^m & g_{13}(1) \cdot z^m \\ g_{21}(1) \cdot \bar{z}^m & g_{22}(1) & g_{23}(1) \\ g_{31}(1) \cdot \bar{z}^m & g_{32}(1) & g_{33}(1) \end{pmatrix}.$$

Denote by $C(P_k)$ the algebra of all continuous functions on the set P_k . Since $z \in S^1$ it follows that $|z| = 1$. Thus we have $g_{11}(z) = g_{11}(1)$. Therefore the function g_{11} can be considered as the function on the set P_k . Similarly, the functions $g_{ij}(2 \leq i, j \leq 3)$ can be considered as the functions from $C(P_k)$. The functions $g_{1j}(x, y, h)(2 \leq j \leq 3)$ generate the module B_m . In the same way, the functions $g_{i1}(x, y, h)(2 \leq i \leq 3)$ generate the module B_{-m} . This concludes the proof. \square

The next lemma describes the elements from B_m such that the elements generate the module B_m over the algebra $C(P_k)$.

Lemma 2. *Let f_1, \dots, f_t be functions from $B_m(-2 \leq m \leq 2)$. Suppose for any point $x_0 \in P_k \setminus D$ there is a number $i \in \overline{1, t}$ such that $f_i(x_0) \neq 0$. In this case, $B_m = f_1 \cdot C(P_k) + \dots + f_t \cdot C(P_k)$.*

Proof. Select a point x_0 from $P_k \setminus D$. Let U_{x_0} be an open ball with center x_0 and radius $r(x_0)$. Denote by $2U_{x_0}$ the open ball with center x_0 and radius $2r(x_0)$. Suppose $r(x_0)$ is so small that $f_i(x) \neq 0, x \in 2U_{x_0} \cap (P_k \setminus D)$ for some function f_i . Suppose x_0 is a point from $\delta D = S^1$. In this case, $f_i(z) = z^m \cdot f_i(1) \neq 0$. For any point $x_0 \in S^1$ let U_{x_0} be an open set containing the set S^1 . In this case, $U_{x_0} = \bigcup_{z \in S^1} U_z$. Since $P_k \setminus D$ is compact, we have a finite subcover U_1, \dots, U_s for the set $P_k \setminus D$. Let h_1, \dots, h_s be a partition of unity for the cover U_1, \dots, U_s . In this case, any function $f \in B_m$ has the next form: $f = fh_1 + \dots + fh_s$. Further, for any positive integer $i \in \overline{1, t}, \exists n(i)$ such that $f_{n(i)}(x) \neq 0, x \in (2U_i \cap (P_k \setminus D))$, by construction of the set U_i . Since the set $\overline{U_i}$ is closed, then the function $\frac{1}{f_{n(i)}}$ is bounded. In addition, there is a continuous function $\frac{1}{f_{n(i)}^*}$ on the set P_k , by the Titze-Brower-Uryson lemma. Here the function $\frac{1}{f_{n(i)}^*}$ is the continuous extension for the function $\frac{1}{f_{n(i)}}$ to the set P_k . This implies that

$$f = f \cdot h_1 \cdot f_{n(1)} \cdot \frac{1}{f_{n(1)}^*} + \dots + f \cdot h_s \cdot f_{n(s)} \cdot \frac{1}{f_{n(s)}^*}.$$

The functions $f \cdot h_i \cdot \frac{1}{f_{n(i)}^*}$ belong to the algebra $C(P_k)$. This completes the first part of the proof.

On the other hand, the module $f_i \cdot C(P_k)$ is a subset of B_m , by definition of the module B_m . Thus $f_1 \cdot C(P_k) + \dots + f_t \cdot C(P_k) \subset B_m$. This completes the proof. \square

Lemma 3. *Suppose f is a function from $C(P_k \setminus D)$ that satisfy an additional condition $f(z) = f(1)$ for any $z \in \delta D$. In this case, there are $f_i \in B_m, g_i \in B_{-m} (i = 1, 2)$ such that $f = f_1 g_1 + f_2 g_2$.*

Proof. The algebra of continuous functions $C(P_k \setminus D)$ such that $f(z) = f(1)$ for any $z \in \delta D$ is isomorphic to the algebra $C(P_k)$. Suppose x_1 is a point of intersection $P_k \setminus D$ and the axe Oh . Let U_1, U_2 be an open covering for the set P_k such that $x_1 \in U_1$ and $\delta D \cap U_1 = \emptyset$. Suppose $\overline{U_2}$ does not contain the point x_1 . Let h_1, h_2 be the partition of unity for the open covering by U_1 and U_2 . Denote by f_2 and g_2 the functions $f_2 = \sqrt{f h_2} \cdot \frac{z}{|z|}, g_2 = \sqrt{f h_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|}$. In this case, $\sqrt{f h_2}$ denotes the same value for the two-valued function \sqrt{w} in both cases. Since the function $\frac{1}{|z|} > 0$ on the closed set $\overline{U_2}$, then the functions f_2 and g_2 are well defined. The function $\frac{1}{|z|}$ is bounded on the top and bottom on the set $\overline{U_2}$. Denote by f_1 the function $\sqrt{f h_1}$, let $g_1 = \sqrt{f h_1}$. Here $\sqrt{f h_1}$ denotes the same value for the two-valued function for both cases. Since $\sqrt{f h_1}(z) = 0$ for all $z \in S^1 = \delta D$, we have $f_1 \in B_m$ and $g_1 \in B_{-m}$.

Thus $f = f h_1 + f h_2 = \sqrt{f h_1} \cdot \sqrt{f h_1} + \sqrt{f h_2} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{f h_2} \cdot \frac{\bar{z}}{|z|} = f_1 g_1 + f_2 g_2$. This concludes the proof. \square

2. 3-HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS OVER TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

Denote by q_m the function $q_m = 1$, for $|x + iy| < \frac{1}{6}$ and $q_m = (x + iy)^m$, for $|x + iy| \geq \frac{1}{6}$. Let the function μ_3 be defined by the next formula: $\mu_3(x, y, h) = \frac{1}{6} - |x + iy|$. The function q_m is discontinuous on P_k . On the other hand, the function $\mu_3 \cdot q_m$ is continuous. Denote by z the complex variable $z = x + iy$. Let us realize the manifold P_k in the next way: all handles are located on the sphere for $|z| > \frac{1}{3}$. Denote by ε a small real positive number. Suppose the handles are so small that $(1 - \varepsilon) \cdot (1 - |z|^2) \leq h(z) \leq (1 + \varepsilon) \cdot (1 - |z|^2)$.

Lemma 4. *The functions $h^2 z, h^2 \bar{z}, \mu_3^2$ and the constant function equals 1 are well defined on the space $P_k \setminus D$. These functions can be considered as the functions on the factor-space $(P_k \setminus D)/S^1$. The space $(P_k \setminus D)/S^1$ is homeomorphic to the manifold P_k . In this case, the functions $h^2 z, h^2 \bar{z}, \mu_3^2$ and the constant function equals 1 are generate the algebra of all continuous functions over $(P_k \setminus D)/S^1 \cong P_k$.*

Proof. Consider the points (z_1, h_1) and (z_2, h_2) such that $h_1 = h_2, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. In this case, the functions $h^2 z$ and $h^2 \bar{z}$ are distinguish the points. Suppose the next equality has a place: $\mu_3^2(z_1) = \mu_3^2(z_2)$. It means that $(\frac{1}{6} - |z_1|)^2 = (\frac{1}{6} - |z_2|)^2$. If $(\frac{1}{6} - |z_1|) = \frac{1}{6} - |z_2|$ then $|z_1| = |z_2|$. On the other hand, if

$(\frac{1}{6} - |z_1|) = -(\frac{1}{6} - |z_2|)$ then $|z_2| = \frac{1}{3} - |z_1|$. Suppose the next equalities has a place: $|z_1| = |z_2|$ and $h(z_1) = h(z_2)$. In this case, $h^2(z_1)z_1 \neq h^2(z_2)z_2$. The points z_1 and z_2 are belong to the unit circle. Therefore, the next inequality has a place: $z_2 \neq \lambda \cdot z_1$ for any positive real number $\lambda, \lambda \in R^+$. In this case, if $h(z_1) \neq h(z_2)$ then $h^2(z_1)z_1 \neq h^2(z_2)z_2$. On the other hand, consider the case $|z_2| = \frac{1}{3} - |z_1|$. The points (z_1, h) and (z_2, h) are belong to the inner part of the cylinder $|z| \leq \frac{1}{3}$. The intersection of the set P_k and the cylinder is the part of the unit sphere S^2 . In this case, the equality $h^2(z_1) \cdot z_1 = h^2(z_2) \cdot z_2$ is equivalent to the next equality: $(1 - |z_1|^2) \cdot z_1 = (1 - |z_2|^2) \cdot z_2$. It is follows from here that $(1 - |z_1|^2) \cdot |z_1| = (1 - |z_2|^2) \cdot |z_2|$. From here we have the next equality: $|z_1| - |z_2| - (|z_1|^3 - |z_2|^3) = 0$. It follows that $(|z_1| - |z_2|) \cdot (1 - |z_1|^2 - |z_1| \cdot |z_2| - |z_2|^2) = 0$. Therefore, $|z_1|^2 + |z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 - 1 = 0$, because $|z_1| \neq |z_2|$. However, we have the next equality: $|z_2| = \frac{1}{3} - |z_1|$. Therefore, $|z_1|^2 + |z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 - 1 = 0$, because $|z_1| \neq |z_2|$. On the other hand, we have the next equality: $|z_2| = \frac{1}{3} - |z_1|$. Therefore, $|z_1|^2 + |z_1| \cdot (\frac{1}{3} - |z_1|) + (\frac{1}{3} - |z_1|)^2 - 1 = 0$. This equality is equivalent to the next one: $|z_1|^2 - \frac{1}{3} \cdot |z_1| - \frac{8}{9} = 0$. This equation has the roots: $|z_1|_1 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{33}}{6}$ and $|z_1|_2 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{33}}{6}$. These points are not belong to the set $P_k \setminus D$, because the roots are not belong to the set $0 \leq |z| \leq 1$.

Taking into account these results, we obtain that the functions $h^2z, h^2\bar{z}, \mu_3^2, 1$ distinguish the points of the set $P_k \setminus D$. Furthermore, the functions contains the constant function. Also, for any function f the set of functions contains the function \bar{f} . Therefore, the functions generate the algebra $C(P_k \setminus D)$. The proof of the lemma is finished. \square

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *Let A denotes a 3-homogeneous C^* -algebra. Suppose the space of primitive ideals for the algebra A is homeomorphic to the compact two-dimensional connected manifold P_k . In this case, the algebra A can be generated by three idempotents*

Proof. Denote by P_1, P_2, P_3 the next idempotents:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \\ \mu_3 \cdot q_{-m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & h \cdot z & \mu_3 \cdot q_{+m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 + h^2 \cdot z + \mu_3^2}.$$

We obtain that $P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_3^2 = P_3$, by direct calculation. First note that the matrix-functions P_1, P_2 belong to any algebra B_V . On the other hand, the matrix-function $P_3 \in B_V$, where $V = \text{diag}(z^m, 1, 1)$ and $1 \leq m \leq 2$.

Denote by A_1 the minimal Banach algebra containing the idempotents P_1, P_2, P_3 . Now note that the element $P_2 \cdot P_1 = E_{22} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})$ belongs to the algebra A_1 . Further, consider the sequence $h_n(x) = I - (I - x)^n$. Thus $h_n(E_{22} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})) \rightarrow E_{22} \in A_1$, because $\|\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z}\| < 1$. On the other hand, consider the element $(P_1 - E_{22}) \cdot (P_2 - E_{22}) = E_{33} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z}) \in A_1$. In this case, $h_n(E_{33} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})) \rightarrow E_{33} \in A_1$, because $\|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z}\| < 1$. This implies that $E_{32} \in A_1$, because $E_{32} = P_1 - E_{22}$. We obtain that $E_{33} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} h^2 \bar{z})$ belongs to the algebra A_1 , because $E_{33} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z}) = E_{33} - E_{33} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})$. The sum $E_{33} \cdot (1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})^2 + \dots)$ has the next limit: $E_{33} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})} \in A_1$. Therefore, the constant matrix-function E_{23} belongs to the algebra A_1 , because the next equality has a place: $E_{23} = (P_2 - E_{22}) \cdot E_{33} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \bar{z})}$. Further, the matrix-function $E_{33} \cdot \frac{1}{1+h^2z+\mu_3^2}$ belongs to the algebra A_1 . It is follows from the next equality: $E_{33} \cdot \frac{1}{1+h^2z+\mu_3^2} = E_{33} - E_{33} \cdot P_3 \cdot E_{33} - E_{32} \cdot P_3 \cdot E_{23}$.

The functions $h^2z, h^2\bar{z}, \mu_3^2, 1$ generate the algebra $C(P_k \setminus D)/S^1$ by lemma 4. Therefore the functions $\frac{h^2z}{1+h^2z+\mu_3^2}, \frac{h^2\bar{z}}{1+h^2z+\mu_3^2}, \frac{\mu_3^2}{1+h^2z+\mu_3^2}, \frac{1}{1+h^2z+\mu_3^2}$ generate the algebra $\frac{C(P_k \setminus D)/S^1}{1+h^2z+\mu_3^2}$. The algebra is isomorphic to the algebra $C(P_k \setminus D)/S^1$, because the function $1 + h^2z + \mu_3^2 \in C(P_k \setminus D)/S^1$ and it is not equal zero on the set $P_k \setminus D$.

The matrix-functions $E_{32} \cdot P_3 \cdot E_{23} = E_{33} \frac{h^2z}{1+h^2z+\mu_3^2}$, $E_{33} \cdot P_3 \cdot E_{33} = E_{33} \cdot \frac{\mu_3^2}{1+h^2z+\mu_3^2}$, $(2P_2 - E_{23}) \cdot E_{33} \cdot \frac{1}{1+h^2z+\mu_3^2} = E_{33} \cdot \frac{h^2\bar{z}}{1+h^2z+\mu_3^2}$ belong to the algebra A_1 . Hence the set $E_{33} \cdot C(P_k \setminus D)/S^1$ is the subset of the algebra A_1 . By multiplying the element $E_{33} \cdot f (f \in C(P_k \setminus D)/S^1)$ on E_{32} and E_{23} , we have $E_{22} \cdot f \in A_1$. Therefore, $E_{32} \cdot C(P_k \setminus D)/S^1 \subset A_1, E_{23} \cdot C(P_k \setminus D)/S^1 \subset A_1$ and $E_{33} \subset C(P_k \setminus D)/S^1 \subset A_1$. Taking into account that $E_{11} \cdot P_3 \cdot E_{23} \cdot (1+h^2z+\mu_3^2) = E_{13} \cdot h \cdot z \in A_1, E_{11} \cdot P_3 \cdot E_{33} \cdot (1+h^2z+\mu_3^2) = \mu_3 \cdot q_m \cdot E_{13} \in A_1$ and the functions $hz, \mu_3 \cdot q_m$ are not equal zero together on the set $P_k \setminus D$, we obtain that these elements generate the module $B_m \cdot E_{13} \subset A_1$, by lemma 2. In the same way, the module $B_m \cdot E_{12}$ is the subset of the algebra A_1 , because $B_m \cdot E_{12} = B_m \cdot E_{13} \cdot E_{32} \subset A_1$.

Arguing as above, we see that $B_{-m} \cdot E_{21} \subset A_1, B_{-m} \cdot E_{31} \subset A_1$. Further, the multiplication of elements from the modules $B_m \cdot E_{13}$ and $B_{-m} \cdot E_{31}$ generate the algebra $E_{11} \cdot C(P_k \setminus D)/S^1 \subset A_1$.

It follows that the algebra A_1 is equal to the algebra B_V , because all components of the algebra B_V are the subsets of the algebra A_1 , by lemma 1. This concludes the proof of the theorem. \square

Theorem 2. *Suppose A is a 3-homogeneous C^* -algebra over the compact two-dimensional oriented connected manifold P_k . In this case, the algebra A can not be generated by two idempotents.*

Proof. Assume the converse, then the algebra A is generated by two idempotents $a_1, a_2 \in A$. Let $M(A)$ be the set of maximal ideals of the algebra A . In this case, the set $M(A)$ is homeomorphic to a subset of the plane C ([4]). But it is well known that the two-dimensional manifold P_k is not homeomorphic to a subset of the plane C . This contradiction proves the theorem. \square

CONCLUSION

In the work we considered 3-homogeneous C^* -algebra A whose space $Prim(A)$ of primitive ideals is isomorphic to the two-dimensional compact connected oriented manifold. We used the realization for such algebra A as algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle. By using this geometric realization, we constructed 3 idempotents from the algebra A such that these elements generate the algebra A . It means that the minimal Banach algebra B containing the elements is equal to the algebra A . Also we proved that the algebra A can not be generated by two idempotents. This generalizes results by A. Antonevich and N. Krupnik [4] and previous results by the author [10–12].

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank professor Anatolii Antonevich for useful discussions.

REFERENCES

1. FELL J.M.G. (1961) The structure of fields of operator fields. *Acta Mathematica*. Vol. 106. No. 3–4, P. 233–280.
2. TOMIYAMA J. & TAKESAKI M. (1961) Application of fiber bundle to certain class of C^* -algebras. *Tohoku Math. J.* Vol. 13. No 2, P. 498–522.
3. BOTTCHEA A., GOHBERG I., KARLOVICH YU., KRUPNIK N., ROCH S., SILBERMANN B. & SPITKOVSKY I. Banach algebras generated by n idempotents and applications. *Operator Theory. Advances and Applications*, 1996, Vol. 90, P.19–54.
4. ANTONEVICH A. & KRUPNIK N. (2000) On trivial and non-trivial n -homogeneous C^* -algebras. *Integral Equations and Operator Theory*. Vol. 38. P. 172–189.

5. KRUPNIK N., ROCH S. & SILBERMANN B. (1996) On C^* -algebras generated by idempotents. *J. Funct. Anal.* Vol. 137, N. 2, P. 303–319.
6. RABANOVICH V. I. (2000) *The matrix algebras and the theory of representations*. PhD thesis.-Kiev 112 p.
7. MASSEY W. (1977) *Algebraic topology: An introduction*. Springer, 292 p.
8. MISCHENKO A. (1984) *Vector bundles and applications*. M., Nauka 208 p.
9. SHCHUKIN M. (2018) On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented manifold. *Taurida journal of computer science theory and mathematics* N. 2, P. 90–97.
10. SHCHUKIN M. (2018) 2-homogeneous C^* -algebras with the space of primitive ideals homeomorphic to a two-dimensional oriented compact connected manifold generated by idempotents. *Journal of the Belarusian state university. Mathematics and informatics*. P. 5–9.
11. SHCHUKIN M. (2001) Non-trivial C^* -algebra generated by four idempotents. *Proceedings of the Institute of mathematics of NAS of Belarus*, Vol. 9, P. 161–163.
12. SHCHUKIN M. (2002) Non-trivial C^* -algebras generated by idempotents. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, Cluj-Napoca, Romania*, Vol. 3, P. 353–359.

ON HYPER-SUMS AND HYPER-PRODUCTS OF PROGRESSIONS¹

© V. I. Voytitsky

TAURIDA ACADEMY OF CRIMEA FEDERAL V.I. VERNADSKY UNIVERSITY
 VERNADSKY AV., 4, SIMFEROPOL, 295013, RUSSIA
 E-MAIL: VICTOR.VOYTITSKY@GMAIL.COM

ON HYPER-SUMS AND HYPER-PRODUCTS OF PROGRESSIONS.

Voytitsky V. I.

Abstract. In the article we study properties of some sequences of numbers (so-called “hyper-sums” and “hyper-products”) which one can construct on the basis of given numerical sequence. We consider such sequences for arithmetic, geometric progressions and Fibonacci numbers. We obtain explicit formulas for its calculation and study problems of asymptotic behavior. As a main result, we prove new asymptotic formula for hyper-products of arithmetic progression that generalized Stirling’s formula and asymptotic of super-factorial.

Keywords: *sequence of numbers, hyper-sums, hyper-products, asymptotic, generalized Stirling’s formula, super-factorial .*

1. INTRODUCTION

The arithmetic and geometric progressions are well known objects of elementary mathematics. They are most simple recurrent sequences determined correspondingly by formulas $a_n = a_{n-1} + d$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Here given real numbers d or q are called difference of progression or denominator of progression. Using the definition we immediately obtain explicit formulas for the n -th member of progression:

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad (1.1)$$

For the arithmetic progression given formula is linear function of a natural number n , the sum of first n members of arithmetic progression is given by formula

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n - 1))n}{2} = P_2(n), \quad (1.2)$$

where $P_2(n)$ — is second degree polynomial. In the literature we can find notion of arithmetic progression of order p (see for example, [3], [11]). It is such a sequence $a_n^{(p)}$

¹The reported research is partially supported by the V. I. Vernadsky Crimean Federal University Development Program for 2015–2024 (VG21/2019).

that $a_n^{(p)} - a_{n-1}^{(p)}$ is an arithmetic progression of order $p - 1$ (we suppose that zero order progression is constant).

From the definition we obtain that every polynomial $P_p(n)$ is arithmetic progression of order p , and each arithmetic progression of order p is some polynomial of order not greater than p . For example, sequence $a_n = n^2$ is arithmetic progression of order 2, and standard arithmetic progression has order 1.

The hyper-sum of the arithmetic progression is a special case of arithmetic progression of higher order. This term appears in the literature at the beginning of the two thousandth years. See, for example, the articles [1], [4], [10]. For any sequence of real numbers a_n we determine hyper-sum of order p by the recurrent formula

$$s_n^{(p)} = \sum_{k=1}^n s_k^{(p-1)}, \quad (1.3)$$

where $s_n^{(1)} = s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Similarly, one can provide hyper-product of order p by the recurrent formula

$$\Pi_n^{(p)} = \prod_{k=1}^n \Pi_k^{(p-1)}, \quad (1.4)$$

where $\Pi_n^{(1)} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. Hyper-products of arithmetic progressions are most difficult objects which are generalized factorials. Really for simplest progression $a_n = n$ we have ordinary factorial $\Pi_n^{(1)} = n!$. For the hyper-products of order 2 and 3 we have $\Pi_n^{(2)} = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n! =: sf(n)$, it is so called “super-factorial” of the integer n , and $\Pi_n^{(3)} = sf(1) \cdot sf(2) \cdot \dots \cdot sf(n) =: sdf(n)$ is so called “super-duper-factorial” of the integer n .

It should be mentioned that notation $n!$ for the factorial was introduced by Christian Kramp in 1808. Asymptotic behavior for the factorial was obtained by James Stirling and Abraham de Moivre in the middle of XVIII century. First generalizations of factorials appears at the beginning of XIX century (see [8], [9]). The super-factorial is defined in the “Encyclopedia of Integer Sequences” (Academic Press, 1995) by Neil Sloane and Simon Plouffe. Its generalization super-duper-factorial was provided in 2000 by Henry Bottomley.

The aim of the present article is to find explicit formulas for hyper-sums and hyper-products of order p for arithmetic, geometric progressions and Fibonacci numbers, and study its asymptotic behavior (some of these results were obtained in collaboration with the student M. Dzhealedinova). The main new result of the article is general asymptotic formula for hyper-products of arithmetic progressions obtained on the base of Euler-Maclaurin formula.

2. HYPER-SUMS OF SEQUENCES

From combinatorics (see for example [6], p. 199) we know formula for summing the number of combinations from k to p ($p \leq n$) :

$$\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}. \tag{2.1}$$

Here $C_k^p = \binom{k}{p} = \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!}$.

Using this identity we immediately come to the next result (it is also a corollary of the theory of finite differences, see, for example, [5], section 5.3.6).

Theorem 1. For any sequence of real numbers a_n the hyper-sum of order $p + 1$ ($p \geq 0$) can be calculated by the formula

$$s_n^{(p+1)} = C_{n+p-1}^p a_1 + C_{n+p-2}^p a_2 + \dots + C_{n+p-k}^p a_k + \dots + C_p^p a_n. \tag{2.2}$$

Proof. Prove formula (2.2) using the method of math induction.

For $p = 1$ we have right identity

$$\begin{aligned} s_n^{(2)} &= C_n^1 a_1 + C_{n-1}^1 a_2 + \dots + C_{n-k+1}^1 a_k + \dots + C_1^1 a_n = \\ &= n a_1 + (n-1) a_2 + \dots + (n-k+1) a_k + \dots + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Let formula (2.2) be right for given $p \geq 1$, prove it for $p + 1$. Indeed, using (2.1) we have

$$\begin{aligned} s_n^{(p+2)} &= s_1^{(p+1)} + s_2^{(p+1)} + \dots + s_n^{(p+1)} = C_p^p a_1 + (C_{p+1}^p a_1 + C_p^p a_2) + \dots + \\ &+ (C_{n+p-1}^p a_1 + C_{n+p-2}^p a_2 + \dots + C_{n+p-k}^p a_k + \dots + C_p^p a_n) = \\ &= (C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n-1}^p) a_1 + (C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n-2}^p) a_2 + \\ &+ \dots + C_p^p a_n = C_{n+p}^{p+1} a_1 + C_{n+p-1}^{p+1} a_2 + \dots + C_{p+1}^{p+1} a_n. \end{aligned}$$

□

2.1. Hyper-sums of arithmetic progressions. If $a_n = a_1 + (n - 1)d$ is arithmetic progression then, for $n \geq 2$, formulas (2.1), (2.2) imply

$$\begin{aligned} s_n^{(p+1)} &= C_{n+p-1}^p a_1 + C_{n+p-2}^p (a_1 + d) + \dots + C_p^p (a_1 + (n - 1)d) = \\ &= a_1 (C_{n+p-1}^p + C_{n+p-2}^p + \dots + C_p^p) + d (C_{n+p-2}^p + 2C_{n+p-3}^p + \dots + (n - 1)C_p^p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{n+p}^{p+1}a_1 + d\left((C_{n+p-2}^p + C_{n+p-3}^p + \dots + C_p^p) + \right. \\
&\quad \left. + (C_{n+p-3}^p + C_{n+p-4}^p + \dots + C_p^p) + \dots + C_p^p\right) = \\
&= C_{n+p}^{p+1}a_1 + d\left(C_{n+p-1}^{p+1} + C_{n+p-2}^{p+1} + \dots + C_{p+1}^{p+1}\right) = C_{n+p}^{p+1}a_1 + C_{n+p}^{p+2}d. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Hyper-sums of arithmetic progression have different applications, part of them one can find in [10]. These objects are natural generalization of figurate numbers.

For most simple case $a_1 = d = 1$ formula (2.3) implies

$$s_n^{(p+1)} = C_{n+p}^{p+1} + C_{n+p}^{p+2} = C_{n+p+1}^{p+2}.$$

For given $p \geq 0$ such sequence correspond to number of balls in space of $p + 2$ dimensions from which it is possible to make a simplex. For example, $p = 0$ corresponds to triangle (2-dimensional) numbers $s_n = C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2} = 1, 3, 6, 10, \dots$; $p = 1$ corresponds to triangular pyramidal numbers $s_n^2 = C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} = 1, 4, 10, 20, \dots$, and so on.

Identity (2.3) shows that hyper-sum $s_n^{(p+1)}$ of order $p + 1$ is polynomial of degree $p + 2$, so it is arithmetic progression of order $p + 2$. For any $p \geq 0$ such sequence is infinitely large, now we find its asymptotic behavior:

$$\begin{aligned}
s_n^{(p+1)} &= \frac{(n+p)(n+p-1)\dots n}{(p+1)!}a_1 + \frac{(n+p)(n+p-1)\dots(n-1)}{(p+2)!}d = \\
&= \frac{dn^{p+2}}{(p+2)!} + \frac{dn^{p+1}}{(p+2)!}(p+(p-1)+\dots+1+0+(-1)) + \frac{a_1n^{p+1}}{(p+1)!} + O(n^p) = \\
&= \frac{dn^{p+2}}{(p+2)!} + \frac{dn^{p+1}(p-1)(p+2)}{2(p+2)!} + \frac{a_1n^{p+1}}{(p+1)!} + O(n^p) = \\
&= \frac{d}{(p+2)!}n^{p+2} + \frac{d(p-1)+2a_1}{2(p+1)!}n^{p+1} + O(n^p).
\end{aligned}$$

Notice that according to (1.2) for $p = 0$ we have precise formula $s_n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$.

2.2. Hyper-sums of geometric progressions. Using (2.2) the hyper-sums of geometric progression of order p can be calculated by the formula

$$\begin{aligned}
s_n^{(p)} &= b_1 (C_{n+p-2}^{p-1} + C_{n+p-3}^{p-1}q + \dots + C_p^{p-1}q^{n-2} + C_{p-1}^{p-1}q^{n-1}) = \\
&= b_1q^{n-1} (1 + q^{-1}C_p^1 + q^{-2}C_{p+1}^2 + \dots + q^{1-n}C_{p+n-2}^{n-1}) = b_1q^{n-1}F_n(p, 1, 1, 1/q), \quad (2.4)
\end{aligned}$$

where $F_n(a, b, c, z)$ is sum of first n summands of Gauss hypergeometric function.

To obtain asymptotic of such hyper-sum let us prove another explicit formula for $s_n^{(p)}$.

Theorem 2. For any geometric progression $b_n = b_1q^{n-1}$ ($q \neq 1$) and given integer $p \geq 2$ the following formula is valid

$$s_n^{(p)} = \frac{b_1}{q-1} \left(\frac{q^{p-1}(q^n - 1)}{(q-1)^{p-1}} - \frac{q^{p-2}C_n^1}{(q-1)^{p-2}} - \frac{q^{p-3}C_{n+1}^2}{(q-1)^{p-3}} - \dots - \frac{qC_{n+p-3}^{p-2}}{q-1} - C_{n+p-2}^{p-1} \right). \quad (2.5)$$

Proof. For $p = 2$ formula (2.5) is valid:

$$\begin{aligned} s_n^{(2)} &= b_1 + b_1(1+q) + \dots + b_1(1+q+\dots+q^{n-1}) = \\ &= b_1(q^{n-1} + 2q^{n-2} + 3q^{n-3} + \dots + (n-1)q + n) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b_1(q^k - 1)}{q-1} = \frac{b_1}{q-1} \left(\sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{b_1}{q-1} \left(\frac{q(q^n - 1)}{q-1} - n \right). \end{aligned}$$

The transition of induction is based on formula (2.1):

$$\begin{aligned} s_n^{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n s_k^{(p)} = \frac{b_1}{q-1} \left(\frac{q^{p-1}}{(q-1)^{p-1}} \sum_{k=1}^n (q^k - 1) - \right. \\ &- \frac{q^{p-2}}{(q-1)^{p-2}} \sum_{k=1}^n C_k^1 - \dots - \frac{q}{q-1} \sum_{k=1}^n C_{k+p-3}^{p-2} - \left. \sum_{k=1}^n C_{k+p-2}^{p-1} \right) = \\ &= \frac{b_1}{q-1} \left(\frac{q^{p-1}}{(q-1)^{p-1}} \cdot \left(\frac{q(q^n - 1)}{q-1} - n \right) - \right. \\ &- \frac{q^{p-2}}{(q-1)^{p-2}} C_{n+1}^2 - \dots - \frac{q}{q-1} C_{n+p-2}^{p-1} - \left. C_{n+p-1}^p \right) = \\ &= \frac{b_1}{q-1} \left(\frac{q^p(q^n - 1)}{(q-1)^p} - \frac{q^{p-1}}{(q-1)^{p-1}} C_n^1 - \right. \\ &- \left. \frac{q^{p-2}}{(q-1)^{p-2}} C_{n+1}^2 - \dots - \frac{q}{q-1} C_{n+p-2}^{p-1} - C_{n+p-1}^p \right). \end{aligned}$$

□

Formula (2.5) implies that each hyper-sum of geometric progression (with $q \neq 1$) of order $p \geq 2$ tends to infinity (that is not true for $p = 1$). We have different asymptotic behavior for $|q| > 1$ or $|q| \leq 1$.

In the first situation ($|q| > 1$) we obtain

$$s_n^{(p)} = \frac{b_1q^{p-1}q^n}{(q-1)^p} - \frac{b_1}{(q-1)(p-1)!}n^{p-1} + O(n^{p-2}), \quad (n \rightarrow \infty).$$

This formula is valid for $p \geq 1$.

For the second situation ($|q| < 1$ or $q = -1$) first summand in (2.5) tends to zero or is bounded, so for $p \geq 2$ we have

$$s_n^{(p)} = \frac{b_1}{(1-q)(p-1)!} n^{p-1} + O(n^{p-2}), \quad (n \rightarrow \infty)$$

(well known that $s_n^{(1)} \rightarrow \frac{b_1}{1-q}$ for $|q| < 1$, $n \rightarrow \infty$).

2.3. Hyper-sums of Fibonacci numbers. We can find also explicit formula for hyper-sums of Fibonacci numbers using identity (2.1).

Fibonacci numbers is recurrent sequence satisfied relation $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $u_1 = 1, u_2 = 1$. Therefore $u_1 = u_3 - u_2$, $u_2 = u_4 - u_3$ and so on. Hence $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \dots + (u_{n+2} - u_{n-1}) = u_{n+2} - u_2$. Let us prove generalization of this formula.

Theorem 3. For given integer $p \geq 1$ the following formula for hyper-sums of Fibonacci numbers is valid

$$s_n^{(p)} = u_{n+2p} - \sum_{l=0}^{p-1} C_{n+l-1}^l u_{2(p-l)}. \quad (2.6)$$

Proof. For $p = 1$ we have truth formula $s_n^{(1)} = u_{n+2} - u_2$. The transition of induction is the following:

$$\begin{aligned} s_n^{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n s_k^{(p)} = \sum_{k=1}^n u_{k+2p} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{p-1} C_{k+l-1}^l u_{2(p-l)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+2p} u_k - \sum_{k=1}^{2p} u_k - \sum_{l=0}^{p-1} u_{2(p-l)} \sum_{k=1}^n C_{k+l-1}^l = \\ &= u_{n+2p+2} - u_2 - (u_{2p+2} - u_2) - \sum_{l=0}^{p-1} C_{n+l}^{l+1} u_{2(p-l)} = \\ &= u_{n+2(p+1)} - u_{2p+2} - \sum_{l=1}^p C_{n+l-1}^l u_{2(p-l+1)} = u_{n+2(p+1)} - \sum_{l=0}^p C_{n+l-1}^l u_{2(p+1-l)}. \end{aligned}$$

□

3. HYPER-PRODUCTS OF PROGRESSIONS

Using definition (1.4) and identity (2.1) analogously with theorem 1 one can prove the following statement.

Theorem 4. For any sequence of real numbers a_n the hyper-products of order $p+1$ ($p \geq 0$) can be calculated by the formula

$$\Pi_n^{(p+1)} = a_1^{C_{n+p-1}^p} \cdot a_2^{C_{n+p-2}^p} \cdot \dots \cdot a_k^{C_{n+p-k}^p} \cdot \dots \cdot a_n^{C_n^p}. \tag{3.1}$$

3.1. Hyper-products of geometric progression. The hyper-products of geometric progression are close to the hyper-sums of arithmetic progression. Really, analogously with identity (2.3) for $n \geq 2$ we obtain the formula

$$\Pi_n^{(p+1)} = b_1^{C_{n+p}^{p+1}} \cdot q^{C_{n+p}^{p+2}}. \tag{3.2}$$

Since $C_{n+p}^{p+2} = C_{n+p}^{p+1} \cdot \frac{n-1}{p+2}$ we have another identity

$$\Pi_n^{(p+1)} = \left(b_1 \cdot q^{\frac{n-1}{p+2}} \right)^{C_{n+p}^{p+1}}. \tag{3.3}$$

So, for $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ the following equality is valid:

$$\ln |\Pi_n^{(p+1)}| = C_{n+p}^{p+1} \left(\ln |b_1| + \frac{n-1}{p+2} \ln |q| \right). \tag{3.4}$$

If $|q| \neq 1$ then we have the asymptotic formula

$$\ln |\Pi_n^{(p+1)}| = \frac{\ln |q|}{(p+2)!} n^{p+2} + \frac{\ln |b_1|(p+2) - \ln |q|}{(p+2)!} n^{p+1} + O(n^p), \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.5}$$

Notice that $\ln |\Pi_n^{(p+1)}| \rightarrow \pm\infty$ whenever $|q| > 1$ or $|q| < 1$, so $|\Pi_n^{(p+1)}| \rightarrow +\infty$ for $|q| > 1$ or $|\Pi_n^{(p+1)}| \rightarrow 0$ for $|q| < 1$.

3.2. Hyper-products of arithmetic progression. Now we study asymptotic behavior of hyper-products of arithmetic progressions.

For the first order hyper-product in the simplest situation $a_n = n$ we know Stirling's formula (see for e.g. [2], p. 111)

$$\Pi_n^{(1)} = n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \tag{3.6}$$

For arbitrary arithmetic progression $a_n = a_1 + (n-1)d$ we have

$$\Pi_n^{(1)} = a_1 \cdot (a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d) \cdot \dots \cdot (a_1 + (n-1)d). \tag{3.7}$$

To find asymptotic of (3.7) it is convenient to use Euler-Gauss formula (see, for example, [2], p. 47, and [7], p. 203) for Gamma function of Euler:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Using this identity we have

$$\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^{\frac{a_1}{d}}}{\frac{a_1}{d} \left(\frac{a_1}{d} + 1\right) \dots \left(\frac{a_1}{d} + n - 1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! \cdot n^{\frac{a_1}{d}} \cdot d^n}{a_1(a_1 + d) \dots (a_1 + (n-1)d)}.$$

Therefore using Stirling's formula we obtain the following asymptotic formula:

$$\Pi_n^{(1)} = n! \frac{n^{\frac{a_1}{d}-1} d^n}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)} (1 + o(1)) = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{dn}{e}\right)^n \cdot \frac{n^{\frac{a_1}{d}-1}}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

For $a_1 = d = 1$ it is Stirling's formula, for $a_1 = 1, d = 2$ or $a_1 = 2, d = 2$ we follow to asymptotic of double factorials (for $n \rightarrow \infty$):

$$\Pi_n^{(1)} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) = (2n-1)!! = 2^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)),$$

$$\Pi_n^{(1)} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = (2n)!! = n! \cdot 2^n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^n (1 + o(1)).$$

For the hyper-products of arithmetic progression of high order formula (3.1) implies

$$\Pi_n^{(p+1)} = a_1^{C_{n+p-1}^p} (a_1 + d)^{C_{n+p-2}^p} \dots (a_1 + (k-1)d)^{C_{n+p-k}^p} \dots (a_1 + (n-1)d)^{C_p^p}.$$

For simplicity we will assume further that $a_1 > 0, d > 0$, then we can find logarithm from both sides of previous formula:

$$\ln \Pi_n^{(p+1)} = \sum_{k=1}^n C_{n+p-k}^p \ln(a_1 + (k-1)d) = \sum_{k=1}^n f(k), \quad (3.9)$$

where

$$f(x) := \frac{(n-x+1)(n-x+2) \dots (n-x+p)}{p!} \ln(a_1 + (x-1)d) \quad (3.10)$$

is a smooth function of $x \in [1; n]$ depending on natural n .

The asymptotic of such sum is determined by Euler-Maclaurin formula (see [6], p. 509)

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{(k)!} (f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(1)) + (-1)^{m+1} \int_1^n \frac{B_m(\{x\})}{(m)!} f^{(m)}(x) dx, \quad (3.11)$$

where B_k are so called Bernoulli numbers forming sequence

$$-1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, 0, \dots,$$

and $B_k(\{x\})$ are polynomials of Bernoulli depend on fractional part of a variable x . Each odd Bernoulli number from third is equal to zero, so addition of $f(n)$ to both sides of (3.11) leads to more convenient formula:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(n) + f(1)}{2} + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} (f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(1)) - \int_1^n \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!} f^{(2m)}(x) dx. \quad (3.12)$$

In [6], p. 515, we can find the following useful estimation of the residual term of (3.12):

$$\begin{aligned} R_{2m} &:= - \int_1^n \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!} f^{(2m)}(x) dx = \\ &= \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(1)), \quad \text{for some } \theta_m \in (0; 1), \end{aligned} \quad (3.13)$$

whenever $f^{(2m+2)}(x)$ and $f^{(2m+4)}(x)$ have the same sign for all $x \in [1; n]$.

To prove this property for the function (3.10) let us transform it:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n-x+1)(n-x+2)\dots(n-x+p)}{p!} \ln(a_1 + (x-1)d) = \\ &= \frac{\ln(a_1 + (x-1)d)}{p!} \left((n-x)^p + (1+2+\dots+p)(n-x)^{p-1} + \right. \\ &\quad \left. + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (p-1) \cdot p)(n-x)^{p-2} + \dots + p! \right) =: \sum_{l=0}^p \alpha_l f_l(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Here

$$f_l(x) := \ln(a_1 + (x-1)d)(n-x)^l,$$

and positive coefficients α_l are equal to sum of various products of $p-l$ different numbers from the set $\{1, 2, \dots, p\}$ divided by $p!$

Lemma 1. *The function $f(x)$ given by (3.10) with $a_1 > 0$, $d > 0$ is satisfied condition $f^{(2m+2)}(x) < 0$ for all $x \in [1; n]$ and arbitrary natural m such that $2m+2 > p$.*

Proof. According to (3.14) it is sufficient to prove the lemma for each $f_l(x) := \ln(a_1 + (x-1)d)(n-x)^l$, $l = 0, 1, \dots, p$. Really, as an exercise we can verify that all even derivatives of $f_0(x)$ and $f_1(x)$ are negative for $x \in [1; n]$; all even derivatives of $f_2(x)$ and $f_3(x)$ of order 4 and higher are negative for $x \in [1; n]$. The number of even negative derivative increase with growth of l .

Let us find minimal negative derivative for $f_p(x)$. Using Leibnitz' formula we have

$$\begin{aligned} (\ln(a_1 + (x-1)d)(n-x)^p)^{(p+1)} &= \frac{(-1)^p p! d^{p+1}}{(a_1 + (x-1)d)^{p+1}} (n-x)^p + \dots + \\ &+ \frac{C_{p+1}^l (-1)^{p-l} (p-l)! d^{p+1-l}}{(a_1 + (x-1)d)^{p+1-l}} (-1)^l p(p-1) \dots (p-l+1) (n-x)^{p-l} + \dots + \\ &+ \frac{(p+1)d}{a_1 + (x-1)d} (-1)^p p! + 0. \end{aligned}$$

Here for odd p all summands without two last are nonpositive for $x \in [1; n]$, but $(p+1)d(a_1 + (x-1)d)^{-1}(-1)^p p! < 0$. Hence we have negative derivative. It is not hard to see that the next derivative (of order $p+2$) will be positive, the next one (of order $p+3$) will be negative and so on. Therefore lemma is proved for odd p .

If number p is even then all summands of $f_p^{(p+1)}(x)$ are nonnegative, but the next derivative (of even order $p+2$) will be negative. So, all derivatives of even order $2m+2 > p$ are negative. \square

Since $2p+2 > p$ for all nonnegative integers p , lemma 1 for $m = p$ implies the next useful formula

$$\begin{aligned} \ln \Pi_n^{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{f(n) + f(1)}{2} + \\ &+ \sum_{s=1}^p \frac{B_{2s}(f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(1))}{(2s)!} + \theta_p \frac{B_{2p+2}(f^{(2p+1)}(n) - f^{(2p+1)}(1))}{(2p+2)!}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

We will use this formula for each function $f_l(x) = \ln(a_1 + (x-1)d)(n-x)^l$ ($l = 0, 1, \dots, p$), and then add up obtained results.

Primarily let us estimate integral $\int_1^n f_l(x) dx$. Using replacement $t = a_1 + (x-1)d$, the integration by parts, and the binomial theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \int_1^n f_l(x) dx &= \int_1^n \ln(a_1 + (x-1)d)(n-x)^l dx = \frac{1}{d^{l+1}} \int_{a_1}^{a_1+(n-1)d} \ln t [a_1 + (n-1)d - t]^l dt = \\ &= -\frac{1}{d^{l+1}(l+1)} \int_{a_1}^{a_1+(n-1)d} \ln t d([a_1 + (n-1)d - t]^{l+1}) = \\ &= \frac{(n-1)^{l+1} \ln a_1}{l+1} + \frac{1}{d^{l+1}(l+1)} \int_{a_1}^{a_1+(n-1)d} \frac{[a_1 + (n-1)d - t]^{l+1}}{t} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n-1)^{l+1} \ln a_1}{l+1} + \frac{[a_1 + (n-1)d]^{l+1}}{d^{l+1}(l+1)} [\ln(a_1 + (n-1)d) - \ln a_1] + \\
 &+ \frac{1}{d^{l+1}(l+1)} \sum_{m=1}^{l+1} \frac{[a_1 + (n-1)d]^{l+1-m} (-1)^m C_{l+1}^m}{m} [(a_1 + (n-1)d)^m - a_1^m].
 \end{aligned}$$

Using asymptotic $\ln(a_1 + (n-1)d) = \ln n + \ln d + O(1/n)$ ($n \rightarrow \infty$) we have

$$\begin{aligned}
 \int_1^n f_l(x) dx &= \frac{n^{l+1}(\ln n + \ln d)}{l+1} + \frac{n^{l+1}}{l+1} \sum_{m=1}^{l+1} \frac{(-1)^m C_{l+1}^m}{m} + \frac{n^l(a_1 - d)}{d} (\ln n + \ln d) + O(n^l) = \\
 &= \frac{n^{l+1} \ln n}{l+1} + \frac{n^{l+1}}{l+1} \left(\ln d - C_{l+1}^1 + \frac{C_{l+1}^2}{2} - \dots + (-1)^{l+1} \frac{1}{l+1} \right) + \\
 &\quad + \frac{n^l \ln n(a_1 - d)}{d} + O(n^l), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

For other summands in (3.15) we have

$$\begin{aligned}
 \frac{f_0(n) + f_0(1)}{2} &= \frac{\ln(a_1 + (n-1)d) + \ln a_1}{2} = \frac{\ln n}{2} + O(1), \quad n \rightarrow \infty, \\
 \frac{f_l(n) + f_l(1)}{2} &= \frac{\ln a_1(n-1)^l}{2} = O(n^l), \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

One can prove that $f_l^{(2s-1)}(n) = O(n^l)$, $f_l^{(2s-1)}(1) = O(n^l)$ for each $l \geq 0$, $s \geq 1$. Therefore we obtain

$$\begin{aligned}
 \ln \Pi_n^{(p+1)} &= \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^p \alpha_l f_l(k) = \sum_{l=0}^p \alpha_l \int_1^n f_l(x) dx + \frac{\ln n}{2} + O(1) + \sum_{l=0}^p O(n^l) = \\
 &= \alpha_p \left(\frac{n^{p+1} \ln n}{p+1} + \frac{n^{p+1}}{p+1} \left(\ln d - C_{p+1}^1 + \frac{C_{p+1}^2}{2} - \dots + (-1)^{p+1} \frac{1}{p+1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n^p \ln n(a_1 - d)}{d} + O(n^p) \right) + \alpha_{p-1} \frac{n^p \ln n}{p} + O(n^p) + \frac{\ln n}{2} + O(n^p), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Since $\alpha_p = \frac{1}{p!}$, $\alpha_{p-1} = \frac{1+2+\dots+p}{p!} = \frac{p(p+1)}{2p!}$, we finally get the following formula:

$$\begin{aligned}
 \ln \Pi_n^{(p+1)} &= \frac{n^{p+1} \ln n}{(p+1)!} + \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} \left(\ln d - C_{p+1}^1 + \frac{C_{p+1}^2}{2} - \dots + (-1)^{p+1} \frac{1}{p+1} \right) + \\
 &\quad + \frac{n^p \ln n}{p!} \left(\frac{a_1 - d}{d} + \frac{p+1}{2} \right) + O(n^p), \quad n \rightarrow \infty \quad (p \geq 0). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

This formula is generalized Stirling's formula for hyper-products of arithmetic progression. To verify it we consider some special cases.

For $p = 0$ we obtain

$$\ln \Pi_n^{(1)} = n \ln n + n(\ln d - 1) + \ln n \left(\frac{a_1}{d} - \frac{1}{2} \right) + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

This formula corresponds to (3.8).

In the case $p = a_1 = d = 1$ we take the asymptotic of super-factorial

$$\begin{aligned} \ln \Pi_n^{(2)} &= \frac{n^2 \ln n}{2} + \frac{n^2}{2} \left(-2 + \frac{1}{2} \right) + n \ln n + O(n) = \\ &= 0,5n^2 \ln n - 0,75n^2 + n \ln n + O(n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.20)$$

For $p = 2$, $a_1 = d = 1$ we obtain asymptotic of super-duper-factorial

$$\begin{aligned} \ln \Pi_n^{(3)} = \ln sdf(n) &= \frac{n^3 \ln n}{3!} + \frac{n^3}{3!} \left(-3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{n^2 \ln n}{2} \frac{3}{2} + O(n^2) = \\ &= \frac{1}{6}n^3 \ln n - \frac{11}{36}n^3 + \frac{3}{4}n^2 \ln n + O(n^2), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

It should be mention that first and seconds summands of (3.20) and (3.21) was proved by Charles Greathouse IV in 2012. One can find these formulas in “Online Encyclopedia of Integer Sequences” (see oeis.org, see oeis.org/A000178 and oeis.org/A055462). Formula (3.15) allows to obtain more precise asymptotic than (3.18), but it is not included in the topic of this article.

REFERENCES

1. BOUNEBIRAT F., LAISSAOUI D., RAHMANI M. (2017) Several Explicit Formulae of Sums and Hyper-sums of Powers of Integers. *arXiv:1712.07208v1*. 19 Dec 2017. p. electronic.
2. N.G. de BRUIJN (1958) *Asymptotic Methods in Analysis*. 1958. 200 p.
3. DLAB V. (2011) Arithmetic Progressions of Higher Order. *Teaching Mathematics and Computer Science*. vol. 9 (no. 2). p. 225-239. DOI:10.5485/TMCS.2011.0281
4. INABA Y. (2005) Hyper-Sums of Powers of Integers and the Akiyama-Tanigawa Matrix. *Journal of Integer Sequences*. vol. 8 (Article 05.2.7). p. (electronic).
5. GELFOND A. (1959) *Calculus of finite differences*. (In Russian). 451 p.
6. GRAHAM R., KNUTH D., PATASHNIK O. (1994) *Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science*. 2nd ed. 657 p.

7. POST E. (1919) The Generalized Gamma Functions. *Annals of Mathematics, Second Series*. vol. 20 (no. 3). p. 202-217.
8. TATE T. (1845) *A Treatise on Factorial Analysis, With the Summation of Series*. 62 p.
9. TILLOCH A. (1819) On a New Method of Treating Factorials and Figurate Numbers. *Philosophical Magazine*. no. 53. p. 412-418.
10. VOYTITSKY V. (2017) Summation and Hyper-summation of Progressions. *Math. Education*. no. 1 (81). p. 15-26. (In Russian)
11. B. L. VAN DER WAERDEN (2003) *Algebra. Part 1*. 280 p.

УДК: 004.855.5+519.852

MSC2010: 68T05

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ (ОБЗОР)

© В. И. Донской

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: vidonskoy@mail.ru

INTELLIGENT OPTIMIZATION BASED ON MACHINE LEARNING: STATE OF ART
AND PERSPECTIVES (A SURVEY).

Donskoy V. I.

Abstract. This survey focuses on the following problem: it is necessary, observing the behaviour of the object, automatically figure out how to improve (optimize) the quality of his functioning and to identify constraints to the improvement of this quality. In other words, build the objective function (or set of objective functions in multiobjective case) and constraints — i.e. the mathematical model of optimization — by mean machine learning. We present the main developed to date methods and algorithms that enable the automatic construction of mathematical models of planning and management objects by the use of arrays of precedents. The construction of empirical optimization models by reliable case information allows us to obtain an objective control model that reflects real-world processes. This is their main advantage compared to the traditional, subjective approach to the construction of control models. Relevant to the task a set of mathematical methods and information technologies called “*Extraction optimization models from data*”, “*BOMD: Building Optimization Models from Data*”, “*Building Models from Data*”, “*The LION Way: Learning plus Intelligent Optimization*”, “*Data-Driven Optimization*”. The incompleteness of information and uncertainty are understood in different ways. Significantly different are the problem settings — deterministic, stochastic, parametric, mixed. Therefore, the consideration of a wider range of tasks leads to a variety of (primarily statistical) and other formulations of the problem and interpretations of uncertainty and incompleteness of initial information. The survey contains the following sections:

1. Empirical synthetic of pseudoBoolean models;
2. Empirical linear models with real variables;
3. Empirical neural network optimization models;
4. Iterative models;
5. Models, including statistical statements;
6. Problems, associated with the lack of the training set of points not belonging to the region of feasible solutions.

Keywords: *machine learning, optimization models, incomplete data, artificial intelligence, neural networks*

ВВЕДЕНИЕ

*"Torturing the data until it confesses...
and if you torture it long enough,
you can get it to confess to anything"*
Roberto Battiti "The LION Way" [22]

Математические методы и технологии искусственного интеллекта, основанные на машинном обучении, в настоящее время находят повсеместное применение и входят в число главных проблем теоретической и прикладной информатики. Чаще всего методы машинного обучения используются при решении задач регрессионного анализа и классификации и базируются на принципе эмпирической индукции Ф. Бэкона [4], предполагающем сбор данных (наблюдений) и формирование из полученных данных обучающих таблиц. Эмпирическая индукция позволяет на основе имеющихся наблюдений сделать необходимые обобщения и выводы о свойствах наблюдаемого объекта, и ее применение оправдано, когда об изучаемом или управляемом объекте нет исчерпывающей информации для принятия решений.

Задачей наблюдения за объектом является получение как можно более точно описывающей его поведение модели. Для этой цели обычно применяют восстановление функций, оценивающих те или иные показатели, и прогнозирование на их основе, а также обучение классификации состояний объекта с целью принятия управленческих решений. Естественно поставить задачу машинного обучения шире: *наблюдая за поведением объекта, понять, как улучшить (оптимизировать) качество его функционирования и выяснить, какие ограничения, препятствующие улучшению качества, имеют место.* Иначе говоря, построить целевую функцию (или набор целевых функций в многокритериальном случае) и ограничения – математическую модель оптимизации – путем машинного обучения.

Цель данного обзора – краткое изложение основных разработанных к настоящему времени методов и алгоритмов, обеспечивающих автоматическое построение математических моделей планирования и управления объектами на основе использования массивов прецедентов (наблюдений).

Построение эмпирических оптимизационных моделей *по достоверной прецедентной информации* [1, 8, 9, 20, 32–34] позволяет получать объективные модели управления, отражающие реальные экономические процессы. Это является главным преимуществом по сравнению с традиционным, субъективным подходом к построению моделей управления. Соответствующую поставленной задаче совокупность математических методов и новую информационную технологию называют по-разному: "Извлечение оптимизационных моделей из данных (ИОМД)" [7], "BOMD: Building

Optimization Models from Data” [31], “Building Models from Data” [42], “The LION Way: Learning plus Intelligent Optimization” [22], “Data-Driven Optimization” [23]. При этом неполнота информации и неопределенность понимаются авторами по-разному. Существенно отличаются и постановки задач — детерминированные, стохастические, параметрические, смешанные. Поэтому рассмотрение более широкого круга задач приводит к разнообразным (прежде всего — статистическим) и другим постановкам и трактовкам неопределенности и неполноты исходной информации [10, 18, 21–23, 25–30, 39]. Первые работы и основные идеи в области применения распознавания образов и машинного обучения для построения оптимизационных моделей планирования и управления принадлежат советскому математику Вл. Д. Мазурову [14]. Позднее эти идеи и многие доведенные до работоспособных алгоритмов результаты были опубликованы в книге И. И. Ерёмкина и Вл. Д. Мазурова “Нестационарные процессы математического программирования” [11].

Стремление охватить различные постановки задач, методы и алгоритмы в настоящем обзоре сделало его несколько эклектичным, но хочется думать, что это не мешает читателю получить достаточное представление о современном состоянии проблемы построения оптимизационных моделей по эмпирической информации.

1. ЭМПИРИЧЕСКИЕ СИНТЕТИЧЕСКИЕ ПСЕВДОБУЛЕВЫЕ МОДЕЛИ

Дискретные псевдобулевы модели условной скалярной оптимизации в общем случае имеют вид

$$\max (\min) f(\tilde{x}) \text{ при условии } \tilde{x} \in \Omega \subset B^n, \quad (1)$$

где $B^n = \{0, 1\}^n$, Ω — множество допустимых решений, определяемых ограничениями различного вида, $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}$ — псевдобулевая функция, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in B^n$ — набор булевых переменных. В наиболее распространенном случае модель (1) содержит ограничения в виде линейных неравенств и линейную целевую функцию:

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i; & a_{j1}x_1 + \dots + a_{ji}x_i + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j; \\ x_i \in \{0, 1\}; & c_i, a_{ji} \in \mathbb{R}; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2)$$

Модель (2) полагается существующей, но неизвестной; о ней имеется только частичная информация — обучающая выборка $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j), \gamma_j)\}_{j=1}^l$, являющаяся набором троек: точек с известным значением функции f и предиката $\gamma_j = [\tilde{x} \in \Omega]$ в этих точках. Полагается, что эта исходная информация является безошибочной (точной).

В работе [34] описан подход к решению задачи синтеза эмпирической псевдобулевой модели по прецедентной начальной информации на основе логических форм

представления исходной модели. Например, любая псевдоболевая функция может быть представлена в виде полинома. Разнообразие возможных представлений модели (1) делает целесообразным введение понятия *формы представления модели*. Так (2) — модель с ограничениями в форме нестрогих неравенств с линейной целевой функцией.

Определение 1. [34] Модель скалярной псевдоболевой оптимизации в виде

$$\max/\min f(x_1, \dots, x_n) \text{ при условии } \bigvee_{j=1}^m x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \wedge \dots \wedge x_{j_{k_j}}^{\sigma_{j_{k_j}}} = 1 \left(\bigvee_{q=1}^{\mu} x_{q_1}^{\sigma_{q_1}} \wedge \dots \wedge x_{q_{k_q}}^{\sigma_{q_{k_q}}} = 0 \right) \quad (3)$$

называется первой (второй) формой с дизъюнктивным (ДНФ) ограничением.

Теорема 1. [34] Любая модель псевдоболевой условной оптимизации может быть представлена и в первой, и во второй форме с ДНФ ограничением.

Лемма 1. Если в линейной модели псевдоболевой оптимизации (2) все коэффициенты ограничений положительны и

$$a_{j_1}x_1 + \dots + a_{j_i}x_i + \dots + a_{j_n}x_n \leq b_j \Leftrightarrow \psi_j(\tilde{x}) = 0,$$

то ψ_j — монотонная булева функция и $\Psi_{\Omega} = \bigvee_{j=1}^m \psi_j$ — монотонная булева функция.

Теорема 2. [34] Если задача условной линейной псевдоболевой оптимизации (2) с положительными коэффициентами в ограничениях-неравенствах представлена во второй форме с ДНФ ограничением

$$\Psi_{\Omega}(\tilde{x}) = \bigvee_{q=1}^{\mu} x_{q_1}^{\sigma_{q_1}} \wedge \dots \wedge x_{q_{k_q}}^{\sigma_{q_{k_q}}} = 0,$$

то Ψ_{Ω} — монотонная функция.

Для построения аппроксимации $\hat{\Omega}$ используются методы машинного обучения, позволяющие получить булеву аппроксимирующую функцию $\hat{\varphi}_{\Omega}(\tilde{x})$ или $\hat{\Psi}_{\Omega}(\tilde{x})$ в виде ДНФ. Наиболее подходящими для этой цели являются алгоритмы обучения, основанные на построении бинарных решающих деревьев (БРД), которые представляют собой алгоритмические операторы, отображающие обучающие последовательности в семейство булевых функций, имеющих древообразное структурное представление [6].

Пусть функция f является монотонной, требуется найти ее максимум, получена монотонная аппроксимация \hat{f} и построено эмпирическое ДНФ ограничение

$\bigvee_{j=1}^m K_j = 1$. Тогда в каждом интервале множества B^n , соответствующем конъюнкции $K_j = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \wedge \dots \wedge x_{j_i}^{\sigma_{j_i}} \wedge \dots \wedge x_{j_{k_j}}^{\sigma_{j_{k_j}}}$, немедленно находится экстремальное значение $\hat{f}(\tilde{x}_{K_j}^*)$ в точке $\tilde{x}_{K_j}^*$, которая определяется следующим образом. Переменные с номерами j_i такими, что $\sigma_{j_i} = 1$ получают единичные значения, $\sigma_{j_i} = 0$ — нулевые значения, а остальные, свободные от вхождения в конъюнкцию K_j переменные, согласно монотонности целевой функции доопределяются единицами. Далее находится $\hat{x}^* = \operatorname{argmax}_j \hat{f}(\tilde{x}_{K_j}^*) = \operatorname{argmax}_j \hat{f}(\tilde{x}) / x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \wedge \dots \wedge x_{j_i}^{\sigma_{j_i}} \wedge \dots \wedge x_{j_{k_j}}^{\sigma_{j_{k_j}}} = 1$. Временная сложность описанного алгоритма нахождения экстремума монотонной псевдобулевой функции с ДНФ ограничением оценивается как $O(mn)$. Для проверки допустимости монотонного доопределения может быть использован

Алгоритм 1. Проверка непротиворечивости свойству монотонности функции по выборке.

Вход: корректная обучающая выборка $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$.

Выход: $M = 1$, если выборка не противоречит условию монотонности, иначе $M = 0$.

```

1:  $M := 1$ ;
2: for  $j := 1$  to  $l - 1$  do
3:   for  $s := j + 1$  to  $l$  do
4:     if  $(\tilde{x}_j < \tilde{x}_s) \wedge (f(\tilde{x}_j) > f(\tilde{x}_s)) \vee (\tilde{x}_s < \tilde{x}_j) \wedge (f(\tilde{x}_s) > f(\tilde{x}_j))$ 
           then  $M := 0$ ; stop end then.

```

Определение 2. Функция f , частично заданная при помощи обучающей выборки $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$, допускает линейную аппроксимацию, если найдется такой вектор $C \in \mathbb{R}^n$, что для любой пары точек \tilde{x}_p, \tilde{x}_q из этой выборки таких, что $f(\tilde{x}_p) < f(\tilde{x}_q)$ выполняется неравенство $(C, \tilde{x}_p) < (C, \tilde{x}_q)$.

Теорема 3. [34, 44] Функция f , частично заданная при помощи обучающей выборки $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$, в которой $f(\tilde{x}_j) \neq f(\tilde{x}_m)$, $1 \leq j < m \leq l$, допускает линейную аппроксимацию тогда и только тогда, когда в отсортированной по значениям целевой функции $f(\tilde{x}_j)$ последовательности ее точек $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$ такой, что $f(\tilde{x}_{j_1}) < \dots < f(\tilde{x}_{j_p}) < \dots < f(\tilde{x}_{j_l})$, для любого $p = 1, 2, \dots, (l - 1)$ существует гиперплоскость $(C^*, \tilde{x}) = \lambda_p$, отделяющая точки $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}$ от точек $\tilde{x}_{j_{p+1}}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$, причем $(C^*, \tilde{x}_{j_p}) < (C^*, \tilde{x}_{j_{p+1}})$

Теорема 4. Если в отсортированной по значениям целевой функции $f(\tilde{x}_j)$ последовательности ее точек $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$ такой, что

$f(\tilde{x}_{j_1}) < \dots < f(\tilde{x}_{j_p}) < \dots < f(\tilde{x}_{j_l})$, для любого $p = 1, 2, \dots, (l - 1)$ существует гиперплоскость $(C_p, \tilde{x}) = \lambda_p$, отделяющая точки $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}$ от точек $\tilde{x}_{j_{p+1}}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$, причем $(C_p, \tilde{x}_{j_p}) < (C_p, \tilde{x}_{j_{p+1}})$, то существует вектор $C^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что найдутся гиперплоскости $(C^*, \tilde{x}) = \beta_p$, отделяющие точки $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}$ от точек $\tilde{x}_{j_{p+1}}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$, причем $(C^*, \tilde{x}_{j_p}) < (C^*, \tilde{x}_{j_{p+1}})$.

Чтобы убедиться в возможности линейной аппроксимации целевой функции, согласно теоремам 3 и 4 требуется проверить линейную разделимость групп точек обучающей выборки, упорядоченных по возрастанию значения целевой функции: $\tilde{x}_{j_1}, \dots, \tilde{x}_{j_p}, \dots, \tilde{x}_{j_l}$. А именно: j_1 -ю точку от всех остальных, j_1 -ю и j_2 -ю от всех остальных и далее — до отделимости всех точек с номерами $j_1, \dots, j_{(l-1)}$ от точки с номером j_l . Всего понадобится выполнить такую проверку $l - 1$ раз. Если в обучающей выборке $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$ найдется подмножество точек с одинаковым значением целевой функции f , то такое подмножество всегда должно включаться в одну из разделяемых групп.

Для последовательной проверки отделимости двух групп точек с одновременным построением разделяющих гиперплоскостей (в направлении возрастания целевой функции, как в теореме 4), можно использовать итерационную процедуру линейной коррекции. Если два конечных множества точек $G1$ и $G2$ линейно разделимы, то эта процедура обеспечивает построение разделяющей гиперплоскости за конечное число шагов коррекции $k \leq \lceil D^2/\rho^2 \rceil$, где $D = \sup_{\tilde{x} \in G1 \cup G2} \|\tilde{x}\|$, а ρ — половина расстояния между выпуклыми оболочками множеств $G1$ и $G2$ [43]. Обозначим $X_j = (x_1^j, \dots, x_n^j, 1) \in \mathbb{B}^{n+1}$ — расширенный вектор, представляющий собой описание точки \tilde{x}_j с добавленной $(n + 1)$ -й координатой, равной единице; $C = (c_1, \dots, c_n, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — расширенный вектор, определяющий разделяющую гиперплоскость $c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_0 = 0$. Процедура линейной коррекции, начиная с произвольно заданного начального вектора C , «настраивает» его коэффициенты по формулам, реализованным в строках 13 и 14 алгоритма 2. Параметр этого алгоритма — наибольшее число просмотров выборки при обучении, превышение которого означает, что алгоритму не удалось установить разделимость множеств $G1$ и $G2$.

Алгоритм 2. Проверка допустимости линейной аппроксимации функции f .

Вход: отсортированная по неубыванию значений $f(\tilde{x}_j)$ выборка $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$;

Max — наибольшее число циклических просмотров выборки при обучении.

Выход: $L = 1$, если выборка не противоречит условию монотонности, иначе $L = 0$.

1: $L := 1$; // Флажок результата.

2: $C = (0, \dots, 0, 0)$; $\alpha := 1$; // Инициализация.

```

3:  $q := 1$ ; // Позиция разделения выборки.
4: while  $f(\tilde{x}_q) = f(\tilde{x}_{q+1})$  do  $q := q + 1$ ; // Если значения функции равны.
5: if  $q = l$  then stop;
6:  $G1 := \{X_1, \dots, X_p, \dots, X_q\}$ ; // Первая отделяемая группа.
7:  $G2 := \{X_{q+1}, \dots, X_p, \dots, X_l\}$ ; // Вторая отделяемая группа.
8:  $Count := 0$ ; // Счетчик числа циклов просмотра выборки при обучении.
9:  $t := 1$ ; // Счетчик числа коррекций.
10: if  $Count > Max$  then  $L := 0$ ; stop end then; // Число коррекций  $> Max$ .
11:  $LS := 1$ ; // Предположим, коррекций не было; очередной делитель построен.
12: for  $p := 1$  to  $l$  do // Цикл по всем точкам выборки.
13:   if  $(C, X_p) \geq 0 \wedge X_p \in G1$  then  $C := C - \frac{\alpha}{t} \cdot X_p$ ;  $t := t + 1$ ;  $LS := 0$  end then;
14:   if  $(C, X_p) \leq 0 \wedge X_p \in G2$  then  $C := C + \frac{\alpha}{t} \cdot X_p$ ;  $t := t + 1$ ;  $LS := 0$  end then;
   end for  $p$ ;
15: if  $LS = 0$  then  $Count := Count + 1$ ; goto 10 end then; // Увеличение числа циклов.
16: if  $q < (l - 1)$  then  $q := q + 1$ ; goto 4 end then. // На следующее разделение.

```

Если при помощи алгоритма 2 установлено, что выборка не противоречит условию линейности, то можно аппроксимировать линейную целевой функцию по этой выборке $S_l = \{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$. Более предпочтительными для этой цели являются итерационные методы построения регрессии, в частности, градиентный алгоритм 3 оптимизации выпуклого по \hat{C} функционала $Q(\hat{C}, S_l) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l ((\hat{C}, \tilde{x}_j) - f(\tilde{x}_j))^2$.

Алгоритм 3. Нахождение линейной регрессии — аппроксимации целевой функции.

Вход: обучающая выборка $\{(\tilde{x}_j, f(\tilde{x}_j))\}_{j=1}^l$.

Выход: $\hat{C} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$ — вектор коэффициентов найденной аппроксимации.

```

1:  $\hat{C}^0 = \tilde{0}$ ; // Начальное приближение может быть произвольным.
2: for  $t := 1, 2, 3, \dots$  do
3:    $\hat{C}^t := \hat{C}^{t-1} - \eta_t \nabla Q(\hat{C}^{t-1}, S_l)$ ; //  $\eta_t$  задает уменьшающийся с ростом  $t$  шаг.
4:   if  $\|\hat{C}^t - \hat{C}^{t-1}\| < \varepsilon$  then stop; //  $\varepsilon > 0$  определяет условие остановки.
5: end for.

```

Если оказывается, что данные не допускают линейную аппроксимацию, то можно проверить возможность квадратичной аппроксимации. Предположив, что $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n c_{0j} x_j + c_{00}$ и осуществив замену переменных $x_1 x_2 = y_1, x_1 x_3 = y_2, \dots, x_1 = y_{n(n-1)/2+1}, x_2 = y_{n(n-1)/2+2}, \dots, x_n = y_{n(n+1)/2}$ легко перейти к проверке возможности и затем — собственно к аппроксимации линейной целевой функции $n(n+1)/2$ переменных [24]. Количество переменных при этом становится очень большим, однако итерационные алгоритмы позволяют справиться и с такой задачей.

Для нелинейной аппроксимации в общем случае применимы деревья регрессии [41] и обучающиеся нейронные сети.

2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Может оказаться, что знания о проблемной области заведомо определяют целесообразность извлечения линейной модели с вещественными переменными. Тогда можно сразу переходить к решению задачи, применяя методы, изложенные в данном разделе. Если же исходной информации о линейности нет, то сначала следует проверить: *не противоречат ли данные выборки \mathfrak{X}_{Opt} гипотезе о линейности неизвестных объектов F и Ω , породивших эту выборку*. Гипотезу о линейности целевой функции можно проверить при помощи алгоритма 2. Гипотеза о линейности ограничений проверяется в процессе построения отделяющих гиперплоскостей алгоритмом 4. Если данные противоречат гипотезе линейности, то следует применять методы извлечения нелинейных моделей, в частности, основанные на обучении нейронных сетей.

В случае извлечения линейной оптимизационной модели с вещественными переменными из данных обучающей выборки $\mathfrak{X}_{Opt} = \{(X_k, \gamma_k, y_k)\}_{k=1}^l$ полагаются неизвестными и линейная целевая функция $f(X) = \langle \Lambda, X \rangle = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_0$, и линейные ограничения $AX \leq B$; $A = [a_{ji}]_{m \times n}$, $X = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$, $B = [b_1, \dots, b_j, \dots, b_m]^T$. В результате синтеза модели путем машинного обучения предполагается получить аппроксимации \hat{A} и \hat{B} матрицы A и вектора B . Значения γ_k выделяют точки обучающей выборки, соответствующие допустимым решениям, т.е. заведомо удовлетворяющие неравенствам $AX \leq B$, от остальных точек выборки, не являющихся допустимыми. Иначе говоря, исходная информация представлена в форме $f(X_k) = y_k$; $(\gamma_k = 0) \Leftrightarrow AX_k \leq B$; $(\gamma_k = 1) \Leftrightarrow AX_k > B$; $k \in \{1, \dots, l\}$.

Обозначим $W_0 = \{X_k : \gamma_k = 0\}$ и $W_1 = \{X_k : \gamma_k = 1\}$.

Построение линейных отделяющих гиперплоскостей производится при помощи обучающей процедуры линейной коррекции Розенблатта-Новикова (ПЛКР)[11]:

$$\Lambda_{t+1} = \begin{cases} \Lambda_t, & \text{если } (\langle \Lambda_t, X_t \rangle > 0) \wedge (X_t \in W_1) \vee (\langle \Lambda_t, X_t \rangle \leq 0) \wedge (X_t \in W_0); \\ \Lambda_t + cX_t, & \text{если } (\langle \Lambda_t, X_t \rangle \leq 0) \wedge (X_t \in W_1); \\ \Lambda_t - cX_t, & \text{если } (\langle \Lambda_t, X_t \rangle > 0) \wedge (X_t \in W_0), \end{cases}$$

где $0 < c \leq 1$. К точкам обучающей выборки, предъявляемым на шагах $t = 0, 1, 2, \dots$, добавляется дополнительная координата с единичным значением: $X_t = (x_1^t, \dots, x_n^t, 1)$; $\Lambda_t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t, \lambda_{n+1}^t)$; $\Lambda_0 = (0, \dots, 0, 0)$. Если выпуклые оболочки конечных множеств W_0 и W_1 не пересекаются, то найдется такой единичный вектор Λ^* и такое положительное вещественное число ρ , что $\langle \Lambda^*, X \rangle < -\rho$ для $X \in W_0$ и $\langle \Lambda^*, X \rangle > \rho$ для $X \in W_1$ [11].

При заведомой линейности модели каждая точка множества W_1 может быть отделена некоторой гиперплоскостью от всех точек множества W_0 . Идея синтеза аппроксимации области допустимых решений состоит в нахождении исходного набора гиперплоскостей, в

совокупности отделяющих все точки множества W_1 от множества W_0 , с последующим выделением из этого набора минимального числа гиперплоскостей, обеспечивающих такое же совокупное отделение.

Алгоритм 4. Поиск исходного набора отделяющих гиперплоскостей.

- 1: Положить пустым множество отобранных гиперплоскостей: $\mathcal{L} := \emptyset$.
Очистить пометки всех точек множества W_1 . $i := 1$.
 - 2: Выбрать из множества W_1 непомиченную точку X , ближайшую ко множеству W_0 , и пометить ее.
 - 3: Используя ПЛКР, построить гиперплоскость \mathcal{L}_i , отделяющую эту точку X от всех точек множества W_0 . $i := i + 1$.
 - 4: Пометить все такие непомиченные точки множества W_1 , которые (как и точка X) оказались отделенными гиперплоскостью \mathcal{L}_i от множества W_0 .
 - 5: Запомнить построенную гиперплоскость: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_i$.
 - 6: Если во множестве W_1 остались непомиченные точки, перейти на 2.
 - 7: Конец алгоритма. Построен набор гиперплоскостей $\mathcal{L} := \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s\}$, где $s = i - 1$.
-

После выполнения алгоритма осуществляется выбор минимального подмножества гиперплоскостей из построенного множества \mathcal{L} , которого достаточно для линейного разделения множеств W_0 и W_1 .

Пусть логические значения $\beta_{p,j} = 1$, если гиперплоскость \mathcal{L}_j отделяет точку $X_p \in W_1$ от всех точек множества W_0 ; $p = \overline{1, |W_1|}$, $j = \overline{1, s}$. Условие отделимости точки X_p хотя бы одной гиперплоскостью имеет вид

$$\beta_{p,1}\mathcal{L}_1 \vee \dots \vee \beta_{p,j}\mathcal{L}_j \vee \dots \vee \beta_{l,s}\mathcal{L}_s. \quad (4)$$

Символы \mathcal{L}_j , $j = \overline{1, s}$, в выражении 4 понимаются как *формальные логические переменные*, обозначающие соответствующие гиперплоскости. Если $\beta_{p,j} = 1$, то гиперплоскость \mathcal{L}_j включается в набор гиперплоскостей, отделяющих точку X_p , а если $\beta_{p,j} = 0$, то не включается. Формула

$$\bigwedge_{p=\overline{1, |W_1|}} \left(\beta_{p,1}\mathcal{L}_1 \vee \dots \vee \beta_{p,j}\mathcal{L}_j \vee \dots \vee \beta_{l,s}\mathcal{L}_s \right). \quad (5)$$

выражает требование отделимости каждой точки множества W_1 ото всех точек множества W_0 . Выполняя логическое перемножение в формуле 5, а затем — все возможные поглощения, можно получить все варианты наборов отделяющих гиперплоскостей и выбрать из них кратчайший набор.

Построение линейной целевой функции $\hat{f}(X) = \langle \hat{\Lambda}, X \rangle = \hat{\lambda}_1 x_1 + \dots + \hat{\lambda}_i x_i + \dots + \hat{\lambda}_n x_n + \hat{\lambda}_0$ по обучающей выборке $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(X_k, \gamma_k, y_k)\}_{k=1}^l$ несложно осуществить по методу наименьших квадратов. Но более предпочтительной для этой цели является линейная SVM

регрессия [12], применение которой сводится к оптимизационной задаче

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \langle \hat{\Lambda}, \hat{\Lambda} \rangle + C \sum_{k=1}^l (\xi_k^+ + \xi_k^-) \rightarrow \min_{\hat{\Lambda}, \hat{\lambda}_0, \xi_k^+, \xi_k^-}; \\ y_k - \varepsilon - \xi_k^- \leq \langle \hat{\Lambda}, X_k \rangle + \hat{\lambda}_0 \leq y_k + \varepsilon + \xi_k^+; \\ \xi_k^+ \geq 0; \xi_k^- \geq 0; k = 1, \dots, l, \end{cases}$$

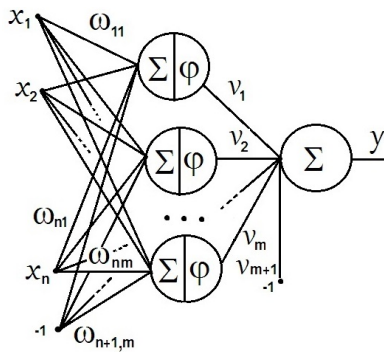


Рис. 1. Сеть с одним скрытым слоем.

где C — параметр регуляризации, ξ_k^+, ξ_k^- — дополнительные переменные, характеризующие величину ошибки в точках X_k , ε — параметр задачи. SVM регрессия обеспечивает минимизацию нормы вектора $\hat{\Lambda}$, что приводит к уменьшению верхней оценки колмогоровской сложности [6] синтезируемой модели и увеличению оценки неслучайности ее извлечения из данных.

3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Синтез оптимизационных моделей в случае, когда по обучающей выборке удается установить, что ограничения и целевая функция не являются линейными и для них не представляется возможным синтезировать полиномиальные аппроксимации невысокой степени, оправдывает применение обучаемых нейросетевых аппроксиматоров. Первые работы, посвященные нейросетевым эмпирическим оптимизационным информационным моделям и их программной реализации принадлежат Г. А. Махиной [3, 16, 17].

Известно, что нейронная сеть даже с одним скрытым слоем позволяет аппроксимировать с необходимой точностью широчайший класс функций, включая нелинейности, вообще говоря, любого вида [37]. Будем полагать, что по прецедентам, описывающим неизвестную целевую функцию F , строится аппроксимирующая ее нейронная сеть $NN1$ с одним скрытым слоем и функцией активации $\varphi(z) = (1 + e^{-z})^{-1}$ (рис. 1), реализующая функцию $\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. А по прецедентам, описывающим ограничения, обучается другая классифицирующая нейронная сеть $NN2$, аппроксимирующая характеристическую функцию ограничений $\Omega(\tilde{x})$: $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$. Если сети $NN1$ и $NN2$ обучены, то получена нейросетевая эмпирическая модель $\langle \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}), \hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}) \rangle$, и можно перейти к нахождению определяемого ею экстремального решения [8].

$$\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) = v_{m+1} + \sum_{j=1}^m v_j \varphi \left(\omega_{n+1,j} + \sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i \right).$$

Обозначим $A(\tilde{\omega}, \tilde{x}) = \omega_{n+1,j} + \sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i$.

$$\partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_i = \sum_{j=1}^m v_j \omega_{ij} \varphi(A(\tilde{\omega}, \tilde{x})) (1 - \varphi(A(\tilde{\omega}, \tilde{x}))), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\text{grad } \hat{F}_{NN1} = \left(\partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_1, \partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_2, \dots, \partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_n \right);$$

Нахождение экстремума эмпирической информационной модели $\langle \hat{F}_{NN1}, \hat{\Omega}_{NN2} \rangle$ можно осуществить градиентным алгоритмом 5 [8]. В общем случае функция \hat{F}_{NN1} может оказаться многоэкстремальной, и тогда этот алгоритм будет отыскивать локальный экстремум.

Алгоритм 5. Поиск условного (локального) минимума по \hat{F}_{NN1} и $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$.

Вход: обучающая выборка $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$ и нейронные аппроксимации \hat{F}_{NN1} и $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$.

Выход: $\tilde{x}^* : \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}^*) \approx \min \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}) = 0$ — точка экстремума эмпирической информационной модели и значение y^* функции \hat{F}_{NN1} в этой точке.

- 1: Взять из обучающей выборки точку $\tilde{x}_0 = \tilde{a}_{j^*} : y_{j^*} = \min_j y_j$ в качестве начального приближения и вычислить $\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_0)$.
- 2: Выбрать начальное значение η_0 и значение ε .
- 3: Выбрать скорость уменьшения шага $\delta : 0,8 < \delta < 1$.
- 4: **for** $t := 1, 2, 3, \dots$ **do**
- 5: $\tilde{x}_t := \tilde{x}_{t-1} - \eta_{t-1} \text{grad } \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})$;
- 6: $\eta_t := \eta_{t-1} \cdot \delta$;
- 7: **if** $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}_t) = 1$ **then goto** 10;
- 8: **if** $\|\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_t) - \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})\| < \varepsilon$ **then goto** 11;
- 9: **end for**;
- 10: $\tilde{x}^* := \tilde{x}_{t-1}$; $y^* := \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})$; **stop**.
- 11: $\tilde{x}^* := \tilde{x}_t$; $y^* := \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_t)$; **stop**.

При использовании полносвязных многослойных нейронных сетей изложенный метод принципиально не изменяется: требуется только умение вычислять градиент аппроксимирующей нейронной функции. В работе [8] показано, как вычислять этот градиент, полагая функции активации логистическими: $\varphi(z) = (1 + e^{-z})^{-1}$; $\varphi'(z) = \varphi(z)(1 - \varphi(z))$.

Будем использовать следующие обозначения:

v_j^l — взвешенная сумма всех входов нейрона j слоя l , называемая его индуцированным локальным полем [36];

l — номер слоя, $0 \leq l \leq L$; слой с номером 0 добавлен для облегчения понимания хода вычислений градиента; выходной слой имеет номер L ;

m_1, m_2, \dots, m_{L-1} — число нейронов в скрытых слоях $1, 2, \dots, L-1$;

v_L — суммарный вход выходного нейрона;

$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ — вход нейронной сети;

$y_j^l = \varphi(v_j^l)$ — выход нейрона j слоя l ; $Y = Y(\tilde{x})$ — выход сети.

Для нахождения градиента функции, реализованной обученной нейронной сетью, будем использовать рекуррентную схему, которая лежит в основе алгоритма обучения нейронной сети методом обратного распространения ошибки [36].

Локальный градиент выходного нейрона определяется выражением

$$\delta_L^{(L)} = \frac{\partial Y}{\partial v_L} = \varphi'(v_L) = \varphi(v_L)(1 - \varphi(v_L)) = Y(1 - Y), \quad (6)$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер слоя сети. Локальный градиент нейрона j скрытого слоя с номером l :

$$\delta_j^{(l)} = \varphi'(v_j^l) \sum_k \delta_k^{(l+1)} \omega_{jk} = y_j^{(l)} (1 - y_j^{(l)}) \sum_k \delta_k^{(l+1)} \omega_{jk}, \quad (7)$$

где сумма берется по всем номерам нейронов слоя, непосредственно следующего за слоем, в котором содержится нейрон j . Здесь и далее в формулах величины ω_{jk} понимаются как веса от j -го нейрона слоя l к нейрону с порядковым номером k слоя $l + 1$.

$$\delta_j^{(1)} = \varphi'(v_j^1) \sum_k \delta_k^{(2)} \omega_{jk} = y_j^{(1)} (1 - y_j^{(1)}) \sum_k \delta_k^{(2)} \omega_{jk}. \quad (8)$$

$$\delta_i^{(0)} = \varphi'_0(x_i) \sum_k \delta_k^{(1)} \omega_{ik} = \sum_k \delta_k^{(1)} \omega_{ik}. \quad \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \delta_i^{(0)}; \quad \text{grad } Y = (\delta_1^{(0)}, \dots, \delta_n^{(0)}). \quad (9)$$

Как и при вычислениях по методу обратного распространения ошибки, для заданного входа \tilde{x} сначала в прямом направлении от входа к выходу сети вычисляются локальные поля и выходы всех нейронов. Затем, в обратном направлении, начиная с уравнения 6, рекуррентно выполняются вычисления локальных градиентов по формуле 7 и завершаются вычислением градиента по формулам 9.

В работе [16] рассматривается задача нахождения максимума вещественной функции, заданной выборкой $\{(x_j, y_j = f(x_j), j = \overline{1, q})\}$ с заданными линейными ограничениями $Ax \leq b$, где A и b — вещественные матрица $m \times n$ и m -мерный вектор. Предложен двухэтапный подход к решению: на первом этапе происходит нейросетевое восстановление целевой функции f , в результате выполнения которого определяется нейронная аппроксимация f_{NN} функции f , а на втором — осуществляется оптимизация с учётом линейных ограничений. Для учёта ограничений используется штрафная функция, которая добавляется к f_{NN} , и таким образом определяется расширенная целевая функция, которая имеет вид

$$F_g(x) = f_{NN}(x) + R(x), \quad \text{где } R(x) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^m \ln(w_i(x)) \quad \text{— штрафная функция}; \quad (10)$$

w_i — i -я координата вектора $w = b - Ax$; $g > 0$ — регулируемый параметр. С ростом g функция F_g становится близкой к f . Вычисления функции (10) происходят по итерациям, начиная обязательно с допустимой точки $x_0 : b - Ax_0 > \tilde{0}$, и в процессе выполнения итераций

точка x_k , $k = 1, 2, \dots$, остаётся внутри допустимой области, поэтому $\forall i \quad w_i(x) > 0$ и $\log(w_i(x))$ определены.

Поскольку x принимает только допустимые значения, то $F_g(x)$ принимает значения, которые могут быть больше соответствующих значений $f_{NN}(x)$, но эту “добавку” можно уменьшить за счет того, что величина $1/q$ может быть очень малой. Но если x принимает значения, которые близки к границе области ограничений, и хотя бы одна из функций $w_i(x)$, оставаясь положительной, близка к нулю, то значения штрафной функции $R(x)$, и, следовательно, значения функции $F_g(x)$ станут большими по модулю отрицательными. Образно говоря, влияние функции $R(x)$ состоит в создании “гребня с крутыми краями” вдоль каждой границы области ограничений. Устанавливая q регулируемой и достаточно большой величиной, чтобы влияние $R(x)$ было малым в точке максимума, можно получить точку максимума функции $F_g(x)$ без ограничений, совпадающей с точкой максимума задачи с ограничениями [2].

Для оптимизации функции $F_g(x)$ используется градиентный метод, поэтому в общем случае не исключается нахождение не глобального, а локального экстремума.

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Синтез итерационных методов оптимизации, порождаемых итерационными операторами с нестационарной системой параметров, и алгоритмов доопределения плохо формализованных элементов модели (или соответствующего ей оператора) порождает процессы, названные в книге И.И. Ерёмкина и Вл.Д. Мазурова [11] нестационарными процессами математического программирования. Структура итерационного оператора полагается зависящей от структуры моделируемого объекта и изменяется в соответствии с извлечением новой информации о нём. Рассматриваемые процессы обычно соответствуют ситуациям, когда точного аналитического выражения всех или части ограничений и/или целевых функций получить не удастся, однако имеется некоторая характеризующая их (частичная, прецедентная) информация, например, наборы значений функции в конечном числе точек, значений характеристической функции ограничений в некоторых точках или результаты сравнения значений функции на некотором наборе точек.

В книге широко используется класс фейеровских операторов (отображений), которые служат для построения итерационных методов недифференцируемой выпуклой оптимизации. Основная схема итерационного процесса с фейеровским оператором φ имеет вид

$$\{x_{t+1} = \varphi[\Omega_t](x_t)\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где $[\Omega_t]$ — набор параметров итерационного процесса на шаге t . Порождаемая этим процессом последовательность $\{x_{t+1}\}$ называется фейеровской. Пусть $\varphi \in \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ и $M(\varphi) = x : x = \varphi(x)$ — множество неподвижных точек оператора φ .

Определение 3. Отображение φ называется M -фейеровским, если

$$\forall z \in \varphi(x), \forall y \in M(\varphi), \forall x \notin M(\varphi) \quad |z - y| \leq |x - y|.$$

Класс M -фейеровских отображений обозначается F_M .

Определение 4. Последовательность $\{x_t\}$, $x_t \in \mathbb{R}^n$, называется Q -фейеровской при $Q \neq \emptyset$, если

$$\forall y \in Q, \forall t \in \mathbb{N} \quad |x_{t+1} - y| < |x_t - y|.$$

Далее выражение $\{x_t\} \rightarrow x' \in \mathbb{R}^n$ обозначает сходимость последовательности к некоторой точке x' .

Свойство 1. [11] Если $\{x_t\}$ — Q -фейеровская последовательность и Q — выпуклое телесное множество (т.е. существует шар $S = \{x : |x - \bar{x}| \leq \varepsilon\}$ с центром в точке \bar{x} и радиусом $\varepsilon > 0$ такой, что $S \subset Q$), то $\{x_t\} \rightarrow x' \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2. [11] Пусть

$$P = \{x : l(x) = (h, x) - b \leq 0\}, \quad |h| \neq 0, \\ L_\lambda(x) = x - \lambda \frac{l^+(x)}{|h|^2} h, \quad 0 < \lambda < 2. \quad (11)$$

Отображение (11) является P -фейеровским.

Лемма 3. [11] Пусть

$$M_f = \{x : f(x) \leq 0\} \neq \emptyset, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mu_f(x, h) = \begin{cases} \frac{f^+(x)}{|h|^2} h, & \text{если } h \neq 0; \\ 0, & \text{если } h = 0. \end{cases}$$

Если f — выпуклая функция, то

$$\varphi_f(x) = \{x - \lambda \mu_f(x, h) : h \in \partial f(x)\}, \quad 0 < \lambda < 2, \quad (12)$$

является M_f -фейеровским.¹

В общем случае решается задача нахождения элемента множества M или все множество

$$M = \arg \sup \{f(x) : x \in D\}, \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

при условии что ее элементы f и D неизвестны точно; о них представлена лишь неполная информация I_0 , чаще всего — конечные множества прецедентов $D_0 \subset D$, и $\mathcal{F}_0 = \{f(x) : x \in D_0\}$. Вообще говоря, неполная начальная информация может содержать результаты сравнений функции в конечном числе точек, интервальные оценки. Можно считать, что допустим "предельный" случай, когда задача задана точно, и вместо D_0 и \mathcal{F}_0 даны f и D .

¹В правой части выражения (12) $\partial f(x)$ обозначает множество опорных к $f(x)$ в точке x линейных функционалов, т.е. $\partial f(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : (h, y - x) \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}$. Множество $\partial f(x)$ называют субдифференциалом.

Если имеются некоторые начальные приближения P_0 , $x_0 \in D$ и значение $f(x_0) = y_0$, то можно создать итерационный, в частности, фейеровский процесс

$$x_{t+1} = \varphi[P_t, D_0, \mathcal{F}_0](x_t),$$

где P_t — параметры итерационного процесса.

Для многих частных постановок задачи (13) с полной и неполной информацией в работах В.Д. Мазурова и его последователей получены итерационные процедуры решения и доказаны теоремы об их сходимости. Такой итерационный подход к решению оптимизационных задач при неполной информации для ряда случаев является математически хорошо обоснованным, однако по сравнению с подходом, основанном на синтезе моделей целевой функции и ограничений, в общем случае не позволяет получать эмпирическую оптимизационную модель в явном виде. Исключением является итерационный процесс построения линейных ограничений и аффинных комитетов.

Определение 5. Комитетом большинства системы линейных неравенств

$$(c, x^j) < 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (14)$$

где $c, x^j \in \mathbb{R}^n$, называется такое множество $\{c^1, \dots, c^i, \dots, c^q\}$, $c^i \in \mathbb{R}^n$, что каждому неравенству системы удовлетворяет более половины элементов этого множества (членов комитета).

В задаче построения комитетного классификатора граница между двумя классами — Ω и его дополнением $\bar{\Omega}$ — определяется по знаку суммы

$$S(x) = \sum_{i=1}^q \text{sign}((c^i, x) - b^i), \quad (15)$$

где $\text{sign}(z) = +1$, если $z \geq 0$, и $\text{sign}(z) = -1$, если $z < 0$, поэтому при нечетном q знак суммы определяется одинаковыми знаками (решениями) более половины членов комитета.

Заметим, что в определении комитета можно использовать *расширенный вектор коэффициентов*

$$c \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ и расширенный вектор } x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ при } c_{n+1} = -b \text{ и } x_{n+1} = 1. \quad (16)$$

При построении комитета по заданной обучающей выборке $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,

$$M_1 = \{(x_1^1, y_1^1), \dots, (x_{m_1}^1, y_{m_1}^1)\}, \quad M_2 = \{(x_1^2, y_1^2), \dots, (x_{m_2}^2, y_{m_2}^2)\},$$

где $y_s^1 = -1$, — метки первого класса, $y_p^2 = +1$, — метки второго класса, $x_s^1, x_p^2 \in \mathbb{R}^n$, $s = \overline{1, m_1}$, $p = \overline{1, m_2}$, требуется найти комитет $\{c^1, \dots, c^i, \dots, c^q\}$, вообще говоря, с неизвестным изначально значением числа его членов q .

Особый интерес применительно к синтезу ограничений в задаче линейного программирования с неполной (прецедентной) обучающей информацией имеет постановка проблемы

MASC (Minimum Affine Separating Committee) нахождения минимального (по числу членов) комитета [15] — когда значение q является наименьшим, при котором можно построить комитет так, что

$$S(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \text{ входит в пару } (x, y) \in M_1; \\ +1, & \text{если } x \text{ входит в пару } (x, y) \in M_2. \end{cases}$$

Несмотря на вычислительную сложность проблемы MASK ($MASK \in \mathbf{NPH}$) [15]², ее применение приводит к комитетному решающему правилу наименьшей структурно-логической сложности (и колмогоровской сложности — при компьютерной реализации). Это соответствует известной гипотезе простой структурной закономерности, концепции ”Бритвы Оккама”, что влечёт минимизацию ошибок и в обычном вероятностном смысле, и в смысле алгоритмической колмогоровской случайности. Чтобы это проиллюстрировать, приведен рис. 2, заимствованный из работы [13]. На рис. 2 для двумерного случая показана одна и та

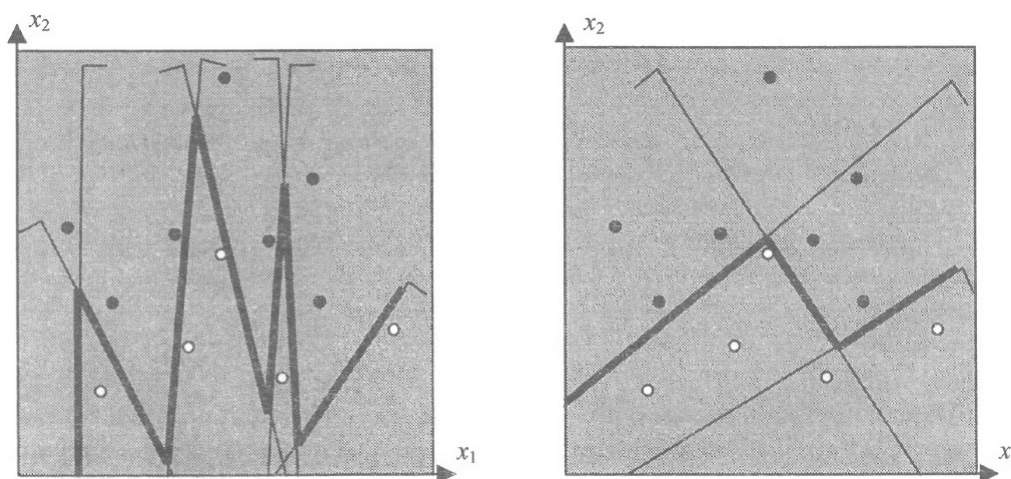


Рис. 2. Результаты разделения 7-комитетом (слева) и 3-комитетом [13].

же выборка из 12 точек первого (светлые кружки) и второго (темные кружки) классов. Слева показана граница построенного комитета из 7 членов, а справа — из 3-х членов комитета. Левая картинка выглядит бессмысленно, а правая представляет вполне разумный разделитель. Это обосновывает важность решения проблемы MASC даже приближенными алгоритмами. Полиномиальный приближенный алгоритм для нахождения комитета, близкого к минимальному, разработан и представлен в статье Вл. Д. Мазурова и М. Ю. Хачая [15].

²В предположении, что разделяемые множества не пересекаются и состоят из точек с рациональными координатами.

В качестве итерационной процедуры обучения комитета в более простом случае — при заранее заданном числе его членов q — может быть использован метод линейной коррекции [13]. Для этого вводятся расширенные векторы (см. (16)) $c = (c_1, \dots, c_n, b)$ и

$$\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n, -1), & \text{если } x \text{ принадлежит 1-му классу (входит в пары } M_1); \\ x = (-x_1, \dots, -x_n, +1), & \text{если } x \text{ принадлежит 2-му классу (входит в пары } M_2). \end{cases}$$

Пусть $c^i(0)$ — некоторый начальный набор коэффициентов i -го члена комитета. Итерации осуществляются по формуле

$$c^i(t+1) = c^i(t) - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^l x^j \Delta_j Sg(\Delta_j), \quad t = 1, T; \quad i = \overline{1, q}, \quad (17)$$

где x^j — расширенный (см. выше) вектор обучающей выборки; $l = m_1 + m_2$ — длина выборки; $\Delta_j = (c^i(t), x^j)$ — расстояние от точки x^j до гиперплоскости $c^i(t)$; λ — коэффициент, регулирующий скорость сходимости, которым можно управлять в процессе выполнения итераций, полагая $\lambda = \lambda_t$; $\sigma = \sum_{i=1}^l (x^i, x^i)$ нормирующий коэффициент;

$$Sg(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0; \end{cases}$$

T — максимально допустимое число итераций, при достижении которого процедура завершается неудачей, т.е. комитет, правильно разделяющий выборку, построить не удалось. Процедура (17) завершается на некотором шаге $t < T$, если выполняется условие правильной классификации всех пар (x, y) обучающей выборки $M_1 \cup M_2$ — $S(x) = y$ (см. (15)).

5. МОДЕЛИ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ

В работе [40] рассматриваются классическая проблема управления инвестициями, проблема управления запасами с цензурированными данными о спросе и проблема выбора портфеля в качестве примеров, на которых иллюстрируются два альтернативных метода обучения — целевое байесовское обучение и операционное обучение.

В работе [35] рассматривается проблема оптимизации при неизвестных ограничениях и разрабатывается статистический подход, основанный на гауссовых процессах и байесовском обучении для аппроксимации неизвестной целевой функции и оценки вероятности выполнения ограничений. Предлагается новый комплексный критерий, позволяющий оценить реакцию на входные данные, нарушающие ограничения, — насколько они могут быть информативными и потенциально полезными для оптимизации. Этот критерий проиллюстрирован на модельных синтетических данных и на прикладной оптимизационной задаче из области здравоохранения.

Классическая задача оптимизации — найти $x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ при условии $x \in C$, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, — дополняется условием воздействия гауссовых помех, что можно представить

как введение целевой функции и ограничений вида

$$Z(x) = f(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \eta_f^2); \quad (18)$$

$$x + \varepsilon_c \in C, \quad \varepsilon_c \sim \mathcal{N}(0, \eta_c^2), \quad (19)$$

где η_f^2 , η_c^2 — дисперсии нормальных распределений $\mathcal{N}(0, \eta_f^2)$, $\mathcal{N}(0, \eta_c^2)$. По смыслу рассматриваемой работы уравнения (18,19) должны определять помехи именно в выборочных данных.

Исходное число прецедентов, представляющих начальную информацию в виде троек чисел

$$(x_1, z_1, c_1), \dots, (x_N, z_N, c_N), \quad (20)$$

предполагается небольшим (ниже будет показано, как число таких троек будет увеличиваться). Здесь

$$c_j = c(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in C; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$z_1 = Z(x_1)$; x_j — очередное наблюдение независимой переменной с аддитивной гауссовой помехой, $j = \overline{1, N}$. Используя выборку $Z(20)$, предполагается построить регрессионную и классификационную модели $f_N(x)$ и $c_N(x)$ соответственно для целевой функции $f(x)$ и характеристической функции ограничений $c(x)$. Эти модели называются авторами работы [35] *суррогатными* и служат для нахождения инициального решения x' поставленной задачи, с высокой вероятностью удовлетворяющего ограничениям. Затем процесс повторяется с выборкой их $N + 1$ точек, включающей тройку $(x', Z(x'), c(x'))$, и останавливается, когда устанавливается сходимость к точке x^* или когда вычислительные ресурсы оказываются исчерпанными.

Для пополнения выборки выбираются реализации $z(x)$ только для точек x , дающих наибольшее *ожидаемое улучшение* (*Expected Improvement*) EI [38] математического ожидания $\mathbb{E}\{I(x)\}$ величины (эта величина и определяет улучшение) $I(x) = \min\{f_{min} - Z(x), 0\}$, где $f_{min} = \min\{z_1, \dots, z_N\}$, а инициальное решение x' определяется как

$$x' = \arg \max_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}\{I(x)\}.$$

Математическое ожидание берется по некоторому распределению, порожденному оценками величин f_N . Аналитическое выражение для EI , полученное в [38] для случая $\eta_f = 0$, имеет вид

$$\mathbb{E}\{I(x)\} = (f_{min} - \hat{z}_N(x))\Phi\left(\frac{f_{min} - \hat{z}_N(x)}{\hat{\sigma}_N(x)}\right) + \hat{\sigma}_N(x)\phi\left(\frac{f_{min} - \hat{z}_N(x)}{\hat{\sigma}_N(x)}\right), \quad (21)$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt, \quad \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

В правой части выражения (21) $\hat{z}_N(x)$ — значение регрессии, построенной по N наблюдениям целевой функции с гауссовой помехой в точке x , а $\hat{\sigma}_N(x)$ — среднеквадратичное отклонение в точке x .

При $\eta_f \neq 0$ вместо EI используется *интегрированное условное ожидаемое улучшение* (Integrated Expected Conditional Improvement, IEI)

$$\mathbb{E}_g\{I(x)\} = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}\{I(y|x)\}g(y)dy,$$

$$I(y|x) = \max\{f_{min} - Z(y|x), 0\},$$

где $Z(y|x)$ — случайная величина, извлекаемая согласно условному распределению $F_N(y|x)$ над суррогатной моделью f_N , а $g(y)$ — плотность распределения величины y . Эта плотность в ограниченной области может быть взята равномерной. Представлен подход к вычислению IEI по методу Монте-Карло. Приведены результаты численных экспериментов согласно изложенному подходу.

В работе [39] рассматриваются оптимизационные задачи с неопределенными ограничениями, которые должны быть выполнены вероятностно. Например, предполагается, что исходная задача в вероятностной постановке имеет вид

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d} c^T x, \\ \text{subject to } \mathbb{P}(x \in \mathcal{X}_\xi) \geq 1 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (22)$$

где c — известный точно вектор коэффициентов линейной целевой функции, ξ — измеримая случайная переменная с вероятностной мерой \mathbb{P} , $\mathcal{X}_\xi \subset \mathcal{X}$. Вероятностное ограничение в задаче (22) требует, чтобы решение x с высокой вероятностью $1 - \varepsilon$ находилось в области \mathcal{X}_ξ . Постановку (22) называют моделью случайной или вероятностно ограниченной оптимизации. Рассматривается случай, когда вероятностная мера \mathbb{P} неизвестна, но даны выборочные значения ξ_1, \dots, ξ_l случайной величины ξ .

Используется подход к решению, называемый генерацией сценариев [30], который сводит задачу (22) к задаче

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d} c^T x, \\ \text{subject to } \mathbb{P}(x \in \mathcal{X}_{\xi_i}) \geq 1 - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (23)$$

Постановка задачи (22, 23) может быть расширена до случая, когда вектор c целевой функции задан набором прецедентных данных $y_j = c^T x_j$, $j = 1, \dots, m$.

Метод SVM-CBO байесовской оптимизации с применением SVM (машины опорных векторов) для нахождения ограничений предложен в работе [27]. Предполагается, что в задаче условной оптимизации

$$\min_{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d} f(x)$$

и целевая функция $f(x)$, и ограничения являются частично заданными прецедентной информацией

$$D_l^f = \{(x_i, f(x_i))\}_{i=\overline{1, l}};$$

$$D_n^\Omega = \{(x_i, y_i)\}_{i=\overline{1, n}},$$

где $y_i = \{+1, -1\}$ определяет: является x_i допустимым решением или нет. Согласно приведенным обозначениям

$$l = |(x, y) \in D_n^\Omega : y = 1|.$$

Множество D_n^Ω используется в качестве обучающей информации для модели SVM классификатора, позволяющего получить оценку $\tilde{\Omega}_n$ области допустимых решений Ω . SVM использует RBF ядро (Radial Basis Function kernel) и вычисляет классифицирующую функцию

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n_{SV}} \alpha_i y_i k(x_i, x) + b,$$

где α_i — коэффициент Лагранжа, $k(\cdot, \cdot)$ — функция ядра, n_{SV} — число опорных векторов, b — смещение. В итоге принадлежность точки допустимой области определяется по формуле

$$\tilde{y}(x) = \text{sign}(h_n(x)) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \in \tilde{\Omega}_n; \\ -1, & \text{если } x \notin \tilde{\Omega}_n. \end{cases}$$

Первый этап метода SVM-СВО имеет две цели: улучшение оценки области допустимых решений и обнаружение возможных ее подобластей, не являющихся связанными. Для первой цели вводится расстояние от текущей границы $\tilde{\Omega}_n$

$$d_n(h_n(x), x) = |h_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n_{SV}} \alpha_i y_i k(x_i, x) + b \right|,$$

а для второй цели — мера покрытия области поиска

$$c_n(x) = \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\|x_i - x\|^2}{2\sigma_c^2}}.$$

Значение $c_n(x)$ — это определяемая точкой x сумма n RBF функций с центрами в точках, оцененных к текущему шагу, а σ_c — параметр для установки ширины соответствующей колоколообразной кривой. Следующая точка выбирается путем решения следующей оптимизационной задачи:

$$x_{n+1} = \arg \min_{x \in X} \{d_n(h_n(x), x) + c_n(x)\}. \quad (24)$$

Таким образом, требуется выбрать точку, соответствующую минимальному покрытию (минимальной неопределенности) и минимальному расстоянию от границ текущей области, полученной в результате оценивания. Это позволяет балансировать между улучшением оценки $\tilde{\Omega}$ области Ω и обнаружением возможных несвязных выполнимых подобластей в менее исследованных областях пространства поиска. Важно подчеркнуть, что на первом этапе точка решения оптимизационной задачи (24) ищется в общем ограниченном пространстве

поиска X . На каждой итерации функция f оценивается в новой точке x_{n+1} (оценивается y_{n+1} и $f(x_{n+1})$), и полученная информация используется для обновления наборов данных и построения новой SVM модели классификации. Процесс повторяется, пока оценка функции f не произойдет M раз.

Точное определение первого этапа представляет следующий

Алгоритм 6 [27].

ВХОД:

N — общее число шагов оценивания функции.

M — число шагов оценивания функции на первом этапе.

p — случайно выбранный номер точки.

ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ:

$$D_p^\Omega = \{(x_i, y_i)\}_{i=\overline{1,p}} .$$

$$D_l^f = \{(x_i, f(x_i))\}_{i=\overline{1,l}} .$$

ОСНОВНОЙ ЦИКЛ:

$n \leftarrow p$;

while $n < M$ **do**

$h_n(x) \leftarrow$ результат обучения SVM классификатора на D_n^Ω ;

$x_{n+1} \leftarrow \arg \min_{x \in X} \{d_n(h_n(x), x) + c_n(x)\}$;

оценить $y_{n+1}, f(x_{n+1})$;

$D_{n+1}^\Omega \leftarrow D_n^\Omega \cup \{(x_{n+1}, y_{n+1})\}$;

if $y_{n+1} = +1$ **then**

$D_{l+1}^f \leftarrow D_l^f \cup \{(x_{n+1}, f(x_{n+1}))\}$;

$l \leftarrow l + 1$;

endif

$n \leftarrow n + 1$;

endwhile

ВЫХОД:

$$D_M^\Omega, D_M^f, h_M(x) \text{ и } \tilde{\Omega}_M = \{x \in X : h_M(x) > 0\}.$$

Второй этап метода SVM-CBO характеризуется тем, что пространство поиска уже не является областью X , а ограничивается полученной допустимой областью $\tilde{\Omega}_n$, найденной на первом этапе. Гауссовский процесс приспособлен для построения вероятностной суррогатной модели целевой функции с использованием только тех наблюдений, которые хранятся во множестве D_l^f . В качестве функции, определяющей извлечение очередной точки, но теперь уже определенной только на $\tilde{\Omega}_n$, используется нижняя доверительная граница — *LCB* (Lower Confidence Bound):

$$x_{n+1} = \arg \min_{x \in \tilde{\Omega}_n} \{LCB_n(x) = \mu_n(x) - \beta_n \sigma_n(x)\}$$

где $\mu(x)$ и $\sigma_n(x)$ — среднее значение и стандартное отклонение текущего гауссовского процесса, а β_n — регулируемый параметр. Теоретически рекомендации по настройке β_n можно найти в [45]. Предполагается, что точка x_{n+1} должна быть допустимой, но информация о ее допустимости в действительности становится известной после оценки фактической осуществимости известна только после оценки $f(x_{n+1})$. Собранный информация используется для того, чтобы обновить наборы данных, параметры гауссовского процесса и — при необходимости — модель классификации SVM. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто общее число N оценок функции, включая M уже выполненных на первом этапе.

Точное определение второго этапа представляет следующий

Алгоритм 7 [27].

ВХОД:

N , M и p — те же параметры, что и в алгоритме 6;

D_M^Ω , D_M^f , $h_M(x)$ и $\tilde{\Omega}_M$ — результаты выполнения алгоритма 6;.

ОСНОВНОЙ ЦИКЛ:

$n \leftarrow M$;

while $n < N$ **do**

$(\mu_n(x), \sigma_n(x)) \leftarrow$ *параметры гауссового процесса, определенные по D_l^f ,*
 l — *число точек в D_n^Ω ;*

$x_{n+1} \leftarrow \arg \min_{x \in \tilde{\Omega}_n} \{\mu_n(x) - \beta_n \sigma_n(x)\}$;

оценить y_{n+1} , $f(x_{n+1})$;

$D_{n+1}^\Omega \leftarrow D_n^\Omega \cup \{(x_{n+1}, y_{n+1})\}$;

if $y_{n+1} = +1$ **then**

$D_{l+1}^f \leftarrow D_l^f \cup \{(x_{n+1}, f(x_{n+1}))\}$;

$h_{n+1}(x) \leftarrow h_n(x)$; // *переобучать SVM классификатор не нужно;*

$l \leftarrow l + 1$;

else

$h_{n+1}(x) \leftarrow$ *результат обучения SVM классификатора на D_{n+1}^Ω ;*

endifelse

$n \leftarrow n + 1$;

endwhile

ВЫХОД:

D_M^Ω , D_M^f , $h_M(x)$ и $\tilde{\Omega}_M = \{x \in X : h_M(x) > 0\}$.

В работе представлены результаты тестирования алгоритмов 6 и 7, которые показывают практическую применимость изложенного подхода. Теоретические статистические оценки получаемых решений не приведены.

Метод опорных векторов (SVM), который был использован в описанных выше алгоритмах из работы [27], назывался первоначально алгоритмом *обобщенного портрета* и был разработан советскими математиками В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом [5]. Основная

идея классификатора на опорных векторах заключается в том, чтобы строить разделяющую поверхность с использованием только небольшого подмножества точек, лежащих в области, определяющей разделение, в то время как остальные верно классифицируемые наблюдения обучающей выборки вне этой области игнорируются, хотя используются оптимизационным алгоритмом метода.



Рис. 3. Схема решения задачи из работы [19].

В связи с этим важно отметить работу [19], посвященную линейной оптимизации по прецедентной начальной информации. Схематически решение этой задачи в работе [19] представлено на рис. 3.

Автором работы [19] было проведено очень важное сравнение двух методов построения отделяющих гиперплоскостей с целью синтеза линейных ограничений, а именно: перцептронной процедуры линейной коррекции Розенблатта-Новикова (ЛК) и метода обобщенного портрета (ОП). Эксперименты (генерация линейной модели и случайный выбор точек из допустимой области и ее дополнения) проводились 30 раз. Линейная целевая функция была задана точно, а синтез линейных ограничений проводился отдельно двумя методами. Находилось точное решение задачи z_0 в точке x_0 и решения z_1 (ЛК) и z_2 (ОП). Средняя ошибка метода линейной коррекции $|z_0 - z_1|$ оказалась равной 46.7 и примерно в 6 раз большей средней ошибки $|z_0 - z_2|$ метода обобщенного портрета, равной 7.9. Установленное различие при использовании критерия Фишера на уровне $\alpha = 0.05$ является значимым. Заметим, что получить такой результат сравнения методов ЛК и ОП в задаче линейной оптимизации с частично заданной информацией аналитическим способом не представляется возможным.

Специфические интервальные или агрегированные интервальные ограничения рассмотрены в работе [46].

6. О ПРОБЛЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ОТСУТСТВИЕМ В ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКЕ ТОЧЕК, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

В процессе разработки методов извлечения оптимизационных моделей из данных выявилась основная проблема: отсутствие полной и правильно сформированной начальной информации для машинного обучения. Особенно сложно получить данные о тех состояниях оптимизируемых объектов, которые не являются допустимыми – не удовлетворяют реально существующим ограничениям. В этом случае отсутствует часть стандартной обучающей информации. Указанная проблема имеет место вследствие того, что при накоплении

данных об оптимизируемом объекте, как правило, запоминаются только допустимые состояния его работы; прочие состояния, понимаемые как «срыв» функционирования объекта, не фиксируются. Поэтому важно рассмотреть такую постановку задачи, когда обучающая информация имеет вид $\mathfrak{T}_{Opt}^- = \{(\tilde{a}_j, y_j)\}_{j=1}^l$, и в ней содержатся только допустимые точки, для которых $\gamma_j = \Omega(\tilde{a}_j) = 1$.

Идея подхода к построению ограничений для такого случая, выдвинутая в работе [8], связана с выделением в области поиска глобального экстремума так называемых *пустых сегментов*, в которые не попали точки выборки \mathfrak{T}_{Opt}^- , принадлежащие области допустимых решений. На рис. 4 для пояснения излагаемого подхода условно показана некоторая область поиска, в которой звездочками отмечены допустимые точки, а пустые сегменты обозначены как E_1, \dots, E_6 . Важно подчеркнуть, что рассматриваются регулярные процессы и объекты.

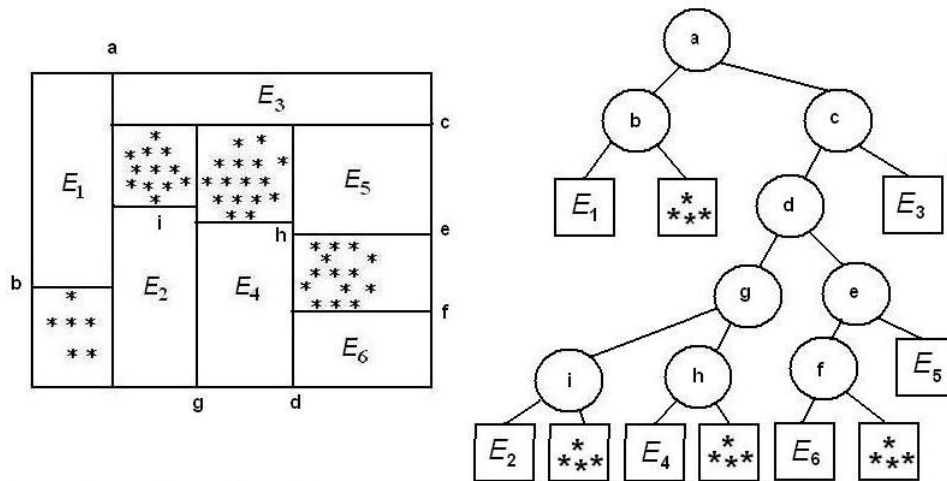


Рис. 4. [8] Разбиение области поиска с найденными пустыми сегментами E_1, \dots, E_6 и классифицирующее дерево, реализующее это разбиение.

В этом случае ни о каких вероятностных распределениях речь не идет, но все же возможно оценивание выделенных пустых сегментов на основе колмогоровского подхода к оцениванию закономерности как неслучайности.

А. Н. Колмогоров указывал на необходимость различать собственно случайность как отсутствие регулярности и стохастическую случайность как объект теории вероятностей [12, с. 42]. При эмпирическом извлечении закономерностей (регулярностей) колмогоровский подход позволяет получить оценку неслучайности наличия пустого сегмента. Отсутствие закономерности (регулярности) в расположении точек в области возможных значений переменных — гиперпараллелепипеда объема

$$\mathfrak{D}_0 = \prod_{i=1}^n [m_i, M_i], \quad m_i \leq x_i \leq M_i,$$

имеет место, когда точки распределены равномерно, случайно и независимо. Если же, например, проекция точек a_j , $j = \overline{1, l}$, обучающей выборки на некоторую координату-переменную x_i представляется гистограммой, приведенной на рис. 5, то очевидна закономерность в данных, имеющая описание в виде предиката $[x_i \geq b]$.

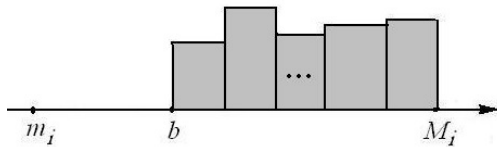


Рис. 5. Гистограмма проекции выборки на ось x_i с выраженной закономерностью $b \leq x_i \leq d$.

Если бы рассматривалась одномерная равномерно распределенная на отрезке $[m_i, M_i]$ случайная величина с независимыми реализациями — попаданиями в этот отрезок, то вероятность попасть в $[m_i, b]$ геометрически оценивалась бы как $p = \frac{b-m_i}{M_i-m_i}$, а вероятность не попасть l раз при l независимых испытаниях — как $(1-p)^l$. Эта величина есть вероятность события, состоящего в том, что в результате l испытаний указанный промежуток окажется *случайно пуст*. А с вероятностью $1 - (1-p)^l$ этот промежуток будет *пуст неслучайно*, т.е. в рассматриваемом случае можно говорить, что вероятность наличия закономерности $[x_i \geq b]$ в результате l выборочных испытаний есть $1 - (1-p)^l$.

Для аппроксимации области допустимых решений Ω используется классифицирующее дерево с пороговыми предикатами вида $[x_i \geq b]$ в вершинах, построенное по прецедентам, представляющим собой только точки-представители этой области Ω . Классифицирующее дерево, выделяющего пустые сегменты, с целью иллюстрации идеи приведено на рис. 4. Основным элементом синтеза такого дерева является выбор пороговых значений b при каждом ветвлении (разбиении текущей области G_ν) и построение очередной внутренней или терминальной вершины дерева. Следующий алгоритм 8 является основной процедурой, обеспечивающей процесс синтеза дерева аппроксимации области Ω .

Алгоритм 8. Выяснение возможности выделения пустого сегмента и выбор предиката вида $[x_i \geq b]$ ($[x_i \leq b]$) для разбиения текущей области G_ν и построения очередной вершины ν дерева классификации.

Вход: исследуемая область-гиперпараллелепипед G_ν ;

Δ_1 — минимальная допуская ширина проекции пустой области.

Выход: значение флага указателя *Flag*; если *Flag* = 1, то возможно

выделение пустого сегмента, и выдается предикат для условной вершины;

если *Flag* = 0 — область G_ν разбиению не подлежит, и выдается

указание о построении концевой вершины с пометкой допустимого сегмента.

1. Выделить все точки выборки, попавшие в область G_ν .
2. *Flag* := 0;
3. **Цикл** по всем координатам точек, попавших в область G_ν ;
4. **if** *Flag* := 1 **then goto** 14;
5. Найти среднее расстояние Δ_2 между проекциями точек;

-
6. Найти минимальное m и максимальное M значения текущей координаты;
 7. **if** $r_1 = m - m_i > \Delta_1 \vee r_2 = M_i - M > \Delta_1$ **then**
 - 8: { $Flag := 1$;
 - 9: **if** $r_1 \geq r_2$ **then**
 - 10: { $b := m - \Delta_2$; добавить вершину с предикатом $[x_i \leq b]$ }
 - 11: **else**
 - 12: { $b := M + \Delta_2$; добавить вершину с предикатом $[x_i \geq b]$ };
 - }
 13. *конец цикла*;
 14. **if** $Flag := 0$ **then** добавить лист с пометкой области допустимых решений.
-

Каждой терминальной вершине τ , имеющей пометку E_τ "пустой" области G_τ , соответствует вероятность $P(E_\tau)$, оценивающая неслучайность ее обнаружения, или, иначе говоря, вероятность того, что обнаруженная пустая область G_τ является закономерностью:

$$P(E_\tau) = 1 - (1 - p_\tau)^l, \quad \text{где } p_\tau = \frac{\mathfrak{V}(G_\tau)}{\mathfrak{V}_0},$$

а $\mathfrak{V}(G_\tau)$ — объем пустой области G_τ . Этот объем легко вычислить, осуществляя обратный проход по ветви дерева от концевой вершины τ к корню дерева, "прочитывая" все пороговые предикаты в просматриваемых вершинах проходимой ветви и формируя описание гиперпараллелепипеда G_τ .

7. ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В обзоре изложены математические модели и алгоритмы, составляющие основной аппарат *информационной технологии извлечения оптимизационных моделей из эмпирических данных* (обучающих выборок) в рамках парадигмы *неклассического информационного моделирования*. Работы в указанном направлении базируются на методах машинного обучения для построения целевых функций и ограничений в основном по достоверным обучающим выборкам — эмпирической информации, отражающей регулярные явления, объекты и процессы. При таком подходе *построенные оптимизационные модели оказываются согласованными с реальной информацией о моделируемых объектах* в отличие от субъективных математических моделей, которые обычно предлагаются экспертами-математиками. Точные решения задач, соответствующих субъективным моделям, вследствие субъективности экспертов на практике могут давать ошибки, значительно превышающие ошибки принятия решений на основе согласованных моделей, извлеченных из объективных эмпирических данных.

Развитие данного научного направления и его приложений началось в начале 70-х годов XX века и уже насчитывает 50 лет, однако внимание к нему в полной мере проявилось в последние годы. Это объясняется повышенным интересом к методам искусственного интеллекта и доступностью многофункциональных библиотек программ. Однако остаётся одно

серьезное препятствие на пути внедрения методов построения оптимизационных моделей из данных — необходимость наличия данных. Их сбор необходимо организовать. Поэтому **перечень нерешенных задач** начнем именно с проблемы сбора данных.

1. Разработка универсальной программной системы сбора данных для машинного обучения эмпирических оптимизационных моделей, согласованной с основными библиотеками современных программных платформ.

2. Изучение и разработка методов оценивания эмпирических оптимизационных моделей в соответствии с исходной постановкой — для регулярных детерминированных задач, задач с аддитивными помехами, стохастических задач.

3. Изучение возможностей метода комитетов как инструмента синтеза ограничений для линейных задач.

4. Изучение возможностей нелинейных SVM для синтеза ограничений при построении нелинейных эмпирических моделей.

5. Разработка методов оценивания соответствия обучающей информации полиномиальной аппроксимации невысокой степени.

6. Разработка принципов автоматического выбора модели и алгоритмов ее синтеза по обучающей информации.

7. Разработка методов и алгоритмов дообучения и переобучения эмпирических оптимизационных моделей с целью решения квазистационарных и динамических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анафиев, А. С., Блыщик, В. Ф. Оптимизационные модели с прецедентной начальной информацией // Таврический вестник информатики и математики. — 2. — 2011. — С. 51–57.
ANAFIEV, A. S. & BLYSCHIK, V. F. (2011) Optimization models with case-based initial information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (2). p. 51–57.
2. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Банди, Б. — М.: Радио и связь, 1978. — 128 с.
BANDAY, B. (1988) *Optimization method. Introductory course*. Moscow: Radio and communications.
3. Блыщик, В. Ф. и др. Интеллектуализированная программная система Intman поддержки принятия решений в задачах планирования и управления // Искусственный интеллект. — 2. — 2002. — С. 406–415.
BLYSCHIK, V. F. et al. (2002) Intellectualized Software System INTMAN for Support Decision Making in Problems of Planning and Management. *Artificial Intelligence*. (2). p. 406–415.

4. Бэкон, Ф. Сочинения в двух томах. Том 2 / Ф. Бэкон. — М.: Мысль, 1978. — 575 с.
BACON, F. (1978) *Works in two volumes*. Moscow: Mysl.
5. Вапник, В. Н. Теория распознавания образов / В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
VAPNIK, V. and CHERVONENKIS, A. (1974) *Pattern recognition theory*. Moscow: Nauka.
6. Донской, В. И. Алгоритмы обучения, основанные на построении решающих деревьев / В. И. Донской // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 22, 4. — 1982. — С. 963–974.
DONSKOY, V. I. (1982) Learning algorithms based on the construction of decision trees. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 22 (4). p. 197–209.
7. Донской, В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: подход на основе решающих деревьев и лесов / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 4, 2017. — С. 59–86.
DONSKOY, V. I. (2017) Extracting Optimization Models from Data: a Decision Tree and Forest-based Approach. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (4). p. 59–86.
8. Донской, В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: применение нейронных сетей / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2, 2018. — С. 71–89.
DONSKOY, V. I. (2018) Extracting optimization models from data: using neural networks. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (2). p. 71–89.
9. Донской, В. И. Синтез согласованных линейных оптимизационных моделей по прецедентной информации / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 1. — 2012. — С. 13–25.
DONSKOY, V. I. (2012) Synthesis of coordinated linear optimization models according to precedential information: an approach based on Kolmogorov complexity. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (1). p. 13–25.
10. Донской, В. И. Синтетический подход к решению дискретных задач оптимизации при неполных данных / В. И. Донской // Ученые записки Симферопольского государственного университета. Математика. Физика. Химия. Биология. — 4, 2. — 1995. — С. 80–82.
DONSKOY, V. I. (2012) Synthetic approach to solving discrete optimization problems with incomplete data. *Scientific notes of Simferopol state University. Mathematics. Physics. Chemistry. Biology*. 41 (2). p. 80–82.
11. Ерёмин, И. И., Мазуров Вл. Д. Нестационарные процессы математического программирования / И. И. Ерёмин, Вл. Д. Мазуров. — М.: Наука, 1979. — 291 с.

- ERJOMIN, I. I & MAZUROV, VI. D (1974) *Non-stationary processes of mathematical programming*. Moscow: Nauka.
12. Колмогоров, А. Н. Алгоритм, информация, сложность / А. Н. Колмогоров. — М.: Знание, 1991. — 44 с.
KOLMOGOROV, A. N. (1974) *Algorithm, information, complexity*. Moscow: Znanie.
13. Кувшинов, Б. М., Ширяев, О. В. Метод комитетов в задачах распознавания образов в условиях неопределенности априорной информации / Б. М. Кувшинов, О. В. Ширяев // Вестник ЮУрГУ. — Вып. 2. — 2002. — С. 34–43.
KUVSHINOV, B. M. & SHIRYAEV O. V. (2002) The Committees method in image recognition problems in conditions of uncertainty of a priori information. *Vestnik YuUrGU*. (Issue 2). p. 34–43.
14. Мазуров, Вл. Д. Применение методов распознавания образов в планировании и управлении / Труды 1-й Всесоюзной конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. — М: ЦЭМИ, 1971. — 49 с.
MAZUROV, V. D. (1971) *Application of Pattern Recognition Methods in Planning and Management*. Proceedings of the 1st all-Union conference on optimal planning and management of the national economy. Moscow: ZEMİ.
15. Мазуров, Вл. Д., Хачай М. Ю. Бустинг и полиномиальная аппроксимируемость задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете / Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай // Тр. ИММ УрО РАН. — 19, 2. — 2013. — С. 231–236.
MAZUROV, VI. D. & KHACHAI, M. Yu. (2013) Boosting and the polynomial approximability of the problem of the minimal affine separating Committee. *Proc. IMM UrO RAS*. 19 (2). p. 231–236.
16. Махина, Г. А. Архитектура нейронной сети для решения задачи слабоопределенной оптимизации с линейными ограничениями / Г. А. Махина // Ученые записки Симферопольского университета им. В.И. Вернадского. Серия: Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2. — 2002. — С. 133–136.
MAKHINA, G. A. (2002) Neural Network Architecture for Solving the Weakly Defined Optimization Problem with Linear Constraints. *Reports of V.I. Vernadsky Simferopol State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science and Cybernetics*. (2). p. 133–136.
17. Махина, Г. А. Нейросетевой подход к задачам слабоопределенной оптимизации / Г. А. Махина // Искусственный интеллект. — 2. — 2000. — С. 145–148.
MAKHINA, G. A. (2000) Neural Network Approach to Weakly Defined Optimization Problems. *Artificial intelligence*. (2). p. 145–148.

18. Руденко, Л. И. О развитии подходов к принятию решений при неполной информации / Л. И. Руденко // Ученые записки ТНУ. Серия Математика, механика, информатика. — 3. — 2001. — С. 93–95.
RUDENKO, L. I. (2001) On the Evolution of Approaches to Decision-Making with Incomplete Information. *Scientific notes of TNU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics*. (3). p. 93–95.
19. Таратынова, Н. Ю. Задача линейной оптимизации с частично заданной информацией / Н. Ю. Таратынова // Таврический вестник информатики и математики. — 1. — 2005. — С. 82–93.
TARATYNOVA, N. Y. (2005) Linear Programming Problem with a Partial given Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (1). p. 82–93.
20. ANAFIEV, A. S. & ABDULKARIMOV, A. (2013) An Approach to Reconstruct Target Function of the Optimization Problem with Precedent Initial Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (2). p. 4–9.
21. ANTONOVA, G. M. (2012) Pattern recognition methods as applied to optimize systems represented by simulation models. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 22 (1). p. 68–81.
22. BATTITI, R. & BRUNATO, M. (2017) *The LION Way. Machine Learning plus Intelligent Optimization*. Trento: LIONlab.
23. BERTSIMAS, D. & THIELE, A. (2006) Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision-Making Under Uncertainty. *Semantic Scholar*. [Online] DOI:10.1287/educ.1063.0022. p. 1–39. Available from:
<https://www.semanticscholar.org/paper/Robust-and-Data-Driven-Optimization%3A-Modern-Under-Bertsimas-Thiele/0644a2c3ef2f6a0225c616ae9f707e5b203d4702>. [Accessed: 30th January 2020].
24. BONATES, T. O. & HAMMER, P. L. (2007) *Pseudo-Boolean Regression*. New Jersey: Rutgers Center for Operations Research of Rutgers University.
25. BRUNATO, G. M. (2011) Application of Pattern Recognition Methods to Solve Optimization Problems Using Imitation Models. *Pattern Recognit Image Anal*. 21. p. 113–116.
26. BRUNATO, M. & BATTITI, R. (2013) Learning and intelligent optimization: one ring to rule them all. *Proc. VLDB Endow*. (6). p. 1176–1177.
27. CANDELIERI, A. (2019) Sequential model based optimization of partially defined functions under unknown constraints. *Journal of Global Optimization*. (12). p. 1–23.
28. CANDELIERI, A. & ARCHETTI, F. (2019) Global optimization in machine learning: the design of a predictive analytics application. *Soft Computing*. 23 (9). p. 2969–2977.

29. CANDELIERI, A. et al. (2019) Optimizing Partially Defined Black-Box Functions Under Unknown Constraints via Sequential Model Based Optimization: An Application to Pump Scheduling Optimization in Water Distribution Networks. *Learning and Intelligent Optimization. LION 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11968. p. 77–93.
30. DI DOMENICA, N. et al. (2009) Scenario generation for stochastic programming and simulation: a modelling perspective. *Journal of Management Mathematics*. 20 (1). p. 1–38.
31. DONSKOY, V. I. (2019) BOMD: Building Optimization Models from Data (Neural Networks based Approach). *Quantitative Finance and Economics. Special Issues: Artificial Intelligence and its applications in the Fintech era*. 3 (4). p. 608–623.
32. DONSKOY, V. I. (1992) Logical control of poorly formalized systems. *Journal of Soviet Mathematics*. 60 (2). p. 1402–1406.
33. DONSKOY, V. I. (1993) Partially Defined Optimization Problems: An Approach to a Solution that is based on Pattern Recognition Theory. *J Sov Math*. 65. p. 1664–1668.
34. DONSKOY, V. I. (2018) A synthesis of pseudo-Boolean empirical models by precedential information. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* 11 (2). p. 96–107.
35. GRAMACY, R. B. & LEE, H. K. H. (2017) *Optimization Under Unknown Constraints*. Oxford: University Press.
36. HAYKIN, S. (2008) *Neural Networks and Learning Machines*. New York: Prentice Hall.
37. HORNIK, K., STINCHCOMBE M., & WHITE, H. (1990) Universal Approximation of an Unknown Mapping and Derivatives Using Multilayer Feedforward Networks. *Neural Networks*. 3 (1). p. 551–560.
38. JONES, D., SCHONLAU, M., & WELCH, W. J. (1998) Efficient Global Optimization of Expensive Black Box Functions. *Journal of Global Optimization*. (13). p. 455–492.
39. LAM, H. & LI, F. (2018) Sampling uncertain constraints under parametric distributions. *Proceedings of the 2018 Winter Simulation Conference*. December 2018. p. 2072–2083.
40. LIM, A. E. B., SHANTHIKUMAR, J. G., & MAX SHEN, Z. J. (2006) *Model Uncertainty, Robust Optimization and Learning*. Pittsburgh: INFORMS.
41. LOH, W.-Y. (2011) Classification and Regression Trees. *Data Mining and Knowledge Discovery*. 1 (14). p. 14–23.
42. MathWorks.com. (2017) *Building Models from Data and Scientific Principles*. [Online] Available from:
<https://www.mathworks.com/solutions/mathematical-modeling/building-models-data-scientificprinciples.html>.
43. NILSSON N. J. (1965) *Learning Machines*. McGraw-Hill.

-
44. RUDENKO, L. I. (1994) Objective functional approximation in a partially defined optimization problem. *J. Math. Sci.* 72 (5). p. 3359–3363.
 45. SRINIVAS, N. et al. (2010) Gaussian process optimization in the bandit setting: no regret and experimental design. *In: ICML'10: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning.* June 2010. p. 1015–1022.
 46. YANG, M. et al. (2011) Querying uncertain data with aggregate constraints. *Proceedings of the 2011 ACM SIGMOD International Conference on Management of data.* June 2011. p. 817–828.

УДК: 519.58+517.22+517.91

MSC2010: 28C20+46G12

ГЛАДКИЕ МЕРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ С РИМАНОВОЙ СТРУКТУРОЙ

© Б. Д. Марянин, В. П. Смолич

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: svp54@mail.ru

SMOOTH MEASURES ON MANIFOLDS WITH A RIEMANNIAN STRUCTURE.

Maryanin B. D., Smolich V. P.

Abstract. The article is devoted to the current and actively developing direction of development of the analysis of smooth measures on smooth infinite-dimensional manifolds. The importance of this direction is dictated by the vast area of its applications, which include infinite-dimensional analysis and a number of sections of mathematical physics of systems with an infinite number of degrees of freedom.

In infinite-dimensional analysis, due to the absence of a standard measure such as Lebesgue measure, the spaces of measures play the same role as the spaces of functions. Therefore, in each of these spaces, a differential calculus must be constructed independently. Moreover, the dual object to smooth measures is generalized functions, and to smooth functions - generalized measures.

The differential calculus of measures in linear spaces was developed in the works of S.V. Fomin, A.V. Averbukh, O.G. Smolyanov, as well as in the works of A.V. Skorokhod. But in all these works, differentiation of measures in constant directions was considered. Therefore, it is necessary to consider the concept of a derivative measure along a vector field, which makes sense both in linear space and on a smooth manifold.

We establish the invariance of the derivative measure along the vector field with respect to smooth transformations and the stability of the logarithmic derivative of the measure with respect to smooth invertible mappings. Moreover, the derivative of the measure along the finite set of vector fields turns out to be symmetric with respect to the vector fields. The corresponding constructions lead to a generalization to non-Gaussian cases of integration formulas by parts, which underlie the construction of extended stochastic integrals.

Covariant differential operations on manifolds with a Hilbert-Schmidt structure are considered. The model of such a manifold is the Banach rigging of a real separable Hilbert space. Partial integration formulas for such varieties are closely related to the differential-geometric characteristics of the manifold; they contain the Ricci tensor of the manifold.

Keywords: *smooth measure, distribution, differentiation of a measure, derivative of a measure along vector field, logarithmic derivative of a measure*

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа на бесконечномерных многообразиях меры принадлежат к числу основных объектов, наряду с функциями. Естественная тема для исследований — построение и изучение мер, в том или ином смысле согласованных с дополнительными структурами многообразия (гладкими или алгебраическими). Гауссовы меры в линейных пространствах являются в этом смысле образцом. Однако, они образуют слишком узкий класс как с точки зрения анализа, так и с точки зрения математической физики систем с бесконечным числом степеней свободы. Расширение этого класса может быть достигнуто прежде всего за счет различных нелинейных преобразований.

Основные понятия дифференциального исчисления для мер в линейных пространствах были введены в различных вариантах в работах С. В. Фомина и А. В. Скорохода [2, 4], и развиты в ряде последующих работ (исторический комментарий и список литературы см. [3]). Для перехода к анализу на нелинейных многообразиях понадобились новые инвариантные понятия, связанные с дифференцированием мер вдоль векторных полей (см. [5, 7]). Одним из стимулов этой деятельности явилась попытка переноса стохастического исчисления П. Малявена ([15, 16]) на бесконечномерный случай, предпринятая в [11].

1. ПРОИЗВОДНАЯ МЕРЫ ВДОЛЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА ГЛАДКОМ БАНАХОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Пусть X — гладкое многообразие, моделью которого служит вещественное сепарабельное банахово пространство B (слово “гладкое” здесь и ниже означает класса C_k , $k \geq 3$). Предполагается также, что пространство B имеет гладкую норму. Это означает, что функция $f(x) = \|x\|^2$ имеет ограниченную вторую производную.

Символом W_X обозначим совокупность гладких векторных полей h на X , обладающих интегральным потоком

$$g_h^t : X \times \mathbb{R} \rightarrow X; \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_h^t(x) = h(x); \quad x \in X$$

Рассмотрим множество M_X конечных вещественных мер на борелевской σ -алгебре \mathfrak{B} многообразия X . Следующее определение обобщает понятия, ранее изученные для линейных пространств и постоянных направлений [1, 2].

Положим при $\mu \in M_X$

$$(g_h^t \mu)(A) = \mu(g_h^t A)$$

Определение 1. Мера $\mu \in M_X$ назовём дифференцируемой вдоль векторного поля $h \in W_X$ ($\mu \in M_X^1(h)$), если при каждом $A \in \mathfrak{B}$ существует

$$\mu'_h(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_h^t \mu(A)$$

Меру μ'_h назовем производной меры μ вдоль векторного поля h .

То, что μ'_h действительно является мерой, следует из теоремы Никодима ([13]).

Пусть Φ_X — совокупность гладких ограниченных функций на X . Положим

$$(\varphi\mu)(A) = \int_A \varphi(x)\mu(dx)$$

Тогда для $\varphi \in \Phi_X$, $\mu \in M_X^1(h)$ выполняется соотношение $\varphi\mu \in M_X^1(h)$ и справедлива формула

$$(\varphi\mu)'_h = \varphi'_h \mu + \varphi\mu'_h \quad (1)$$

$$(\varphi'_h(x) = \langle \varphi'(x), h(x) \rangle; \quad \varphi'(x) \in T_x^* X)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\varphi\mu)'_h(A) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_h^t(\varphi\mu)(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi\mu)(g_h^t A) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{g_h^t(A)} \varphi(x)\mu(dx) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_A \varphi(g_h^t y)\mu(g_h^t(dy)) = \\ &= \int_A \varphi'_h(y)\mu(dy) + \int_A \varphi(y)\mu'_h(dy) = (\varphi'_h \mu + \varphi\mu'_h)(A) \end{aligned}$$

Из (1) следует, что

$$\int_X (\varphi\mu)'_h(dx) = \int_X \varphi'_h(x)\mu(dx) + \int_X \varphi(x)\mu'_h(dx) \quad (2)$$

Пусть $\nu \in M_X^1(h)$, тогда $\int_X \nu'_h(dx) = 0$. Действительно,

$$\int_X \nu'_h(dx) = \nu'_h(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(g_h^t X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(X) = 0$$

Следовательно, левая часть (2) равна нулю. В результате получаем формулу интегрирования по частям

$$\int_X \varphi(x)\mu'_h(dx) = - \int_X \varphi'_h(x)\mu(dx) \quad (3)$$

Предложение 1. При $\mu \in M_X^1(h)$ существует логарифмическая производная μ вдоль векторного поля h , μ — интегрируемая функция $\rho_\mu(h; x)$ такая, что

$$\mu'_h(A) = \int_A \rho_\mu(h; x)\mu(dx); \quad A \in \mathfrak{B} \quad (4)$$

Доказательство (см. [3]). Предположим, что μ — это положительная мера. Функция $\beta(t) = \mu(g_h^t A)$ неотрицательна и всюду дифференцируема. Если $\mu(A) = 0$, то $\beta(0) = 0$ и точка $t = 0$ есть точка минимума функции $\beta(t)$. Поэтому $\mu'_h(A) = \beta'(0) = 0$. Следовательно мера μ'_h абсолютно непрерывна относительно μ ($\mu'_h \prec \mu$) и существование логарифмической производной следует из теоремы Радона-Никодима. Пусть μ — произвольная мера и $\mu = \mu^+ - \mu^-$ — её разложение Жордана-Хана. Легко проверить, что μ^+ и μ^- также принадлежат пространству $M_X^1(h)$. Из этого следует справедливость утверждения и в случае вещественной борелевской меры.

Известно (см. [3]), что если существует мера μ'_h , определенная соотношением (3) (слабая производная) и выполняется (4), то из слабой дифференцируемости следует сильная, т.е. $\mu \in M_X^1(h)$.

Следствие 1. При $\varphi, \psi \in \Phi_X$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_X \varphi'_h(x)\psi(x)\mu(dx) = - \int_X \varphi(x)[\psi'_h(x) + \psi(x)\rho_\mu(h; x)]\mu(dx) \quad (5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi'_h(x)\psi(x)\mu(dx) &= - \int_X \varphi(x)(\psi\mu)'_h(dx) = - \int_X \varphi(x)[\psi'_h\mu(dx) + \psi\mu'_h(dx)] = \\ &= - \int_X \varphi(x)[\psi'_h\mu(dx) + \psi\rho_\mu(h; x)\mu(dx)] = - \int_X \varphi(x)[\psi'_h(x) + \psi(x)\rho_\mu(h; x)]\mu(dx) \end{aligned}$$

2. МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТРУКТУРОЙ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Пусть H — плотно вложенное в B гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$ и топологией, более сильной, чем индуцированная из B . При этом двойственное пространство B' естественным образом вкладывается в H так что соотношение двойственности $\langle x, y \rangle$ ($x \in B, y \in B'$) обладает свойством $\langle x, y \rangle = (x, y)_H$ при $x \in H$.

Определение 2. Пространство H вносит в B структуру Гильберта-Шмидта (Г.-Ш.-структуру), если каждое ограниченное линейное отображение $A : B \rightarrow H$ порождает в H сужение, являющееся в H оператором Гильберта-Шмидта ($A|_H \in \sigma_2(H)$).

Отметим, что в этом случае из $A \in \mathfrak{L}(B, B')$ следует ядерность сужения $A|_H : A|_H \in \sigma_1(H)$.

Пусть (B, H) — пространство с Г.-Ш.-структурой. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_1(B) \subset M_B$ мер, обладающих логарифмической производной вдоль постоянных векторных полей $h(x) \equiv k \in B' \subset H$, представимой в виде

$$\rho_\mu(k; x) = \langle \lambda(x), k \rangle \quad (\mu - \text{почти всюду})$$

где $\lambda = \lambda_\mu : B \rightarrow B$ — слабо измеримое отображение, которое мы будем называть векторной логарифмической производной меры μ .

Предложение 2. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}_1(B)$ и $h : B \rightarrow B'$. Тогда $\mu \in M_B^1(h)$ и

$$\rho_\mu(h; x) = \langle \lambda(x), h(x) \rangle + \text{tr } h'(x), \quad (6)$$

$$\text{где } h'(x) : y \rightarrow \left. \frac{d}{dt} h(x + ty) \right|_{t=0}; \quad h'(x) \in \mathfrak{L}(B, B')$$

Доказательство. Используя разложение по ортобазису $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ пространства H , $h(x) = \sum_{k=1}^\infty h^k(x)e_k$, полагаем вначале, что это разложение содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. При этом

$$\begin{aligned} \int_B \varphi(x) \mu'_h(dx) &= - \int_B \varphi'_h(x) \mu(dx) = - \int_B \sum_k \varphi'_{e_k}(x) h^k(x) \mu(dx) = \\ &= \sum_k \left\{ \int_B \varphi(x) (h^k)'_{e_k}(x) \mu(dx) + \int_B \varphi(x) h^k(x) \mu'_{e_k}(dx) \right\} = \\ &= \int_B \varphi(x) \text{tr } h'(x) \mu(dx) + \int_B \varphi(x) \sum_k h^k(x) \langle \lambda(x), e_k \rangle \mu(dx) = \\ &= \int_B \varphi(x) [\text{tr } h'(x) + \langle \lambda(x), h(x) \rangle] \mu(dx). \end{aligned}$$

Поскольку для векторного поля $h : B \rightarrow B'$ оператор $h'(x)$ является ядерным, то с помощью предельного перехода можно освободиться от конечности разложения.

Пример. Если μ — гауссова мера в B имеющая тождественный в H корреляционный оператор (см. [1–3]), то $\lambda(x) = -x$ и формула (6) принимает вид

$$\rho_\mu(h; x) = \text{tr } h'(x) - \langle x, h(x) \rangle \quad (7)$$

Замечание. Известно истолкование выражения (7) как расширенного стохастического интеграла, отвечающего случайной величине с гауссовским распределением

(см. [8, 9]). В [10] определение расширенного стохастического интеграла было перенесено на другие меры в гильбертовом пространстве при помощи формулы типа (5) с $\psi \equiv 1$. На описываемом здесь языке можно сказать, что расширенный стохастический интеграл векторного поля h на многообразии X по случайной величине в X с распределением μ — это логарифмическая производная μ вдоль h .

3. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ СО СТРУКТУРОЙ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Пусть модель B многообразия X обладает Г.-Ш.-структурой (B, H) . Введем Г.-Ш.-структуру с помощью гильбертова подрасслоения $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow X$ касательного расслоения $\tau : TX \rightarrow X$, обладающего изометричными H слоями \mathcal{H}_x . При этом кокасательное расслоение $\tau^* : T^*X \rightarrow X$ вкладывается в $\gamma : T_x^*X \subset \mathcal{H}_x \subset T_xX$ и при каждом $x \in X$ появляется Г.-Ш.-структура (T_xX, \mathcal{H}_x) .

Пусть многообразие X снабжено связностью, которая порождается на картах морфизмом $\Gamma_x : B \rightarrow \mathcal{L}(B, B)$ ($x \in X$) — коэффициентом связности, называемом иногда символом Кристоффеля, так что

$$\nabla_\eta \xi(x) = \xi'(x)\eta(x) + \Gamma_x(\eta(x), \xi(x)); \quad \xi, \eta \in W_X \quad (8)$$

Выражение $\nabla_\eta \xi$ называется ковариантной производной векторного поля ξ вдоль векторного поля η . Для сокращения обозначений мы везде отождествляем карту и касательное пространство с моделью B , не различаем в обозначениях векторное поле и его главную часть и т.д. При морфизме $\{\varphi \times F\}$ локальных векторных расслоений коэффициент связности преобразуется по правилу

$$\Gamma_{\varphi(x)}(\varphi'(x)h, F(x)y) = F(x)\Gamma_x(h, y) - F'(x)(h, y) \quad (9)$$

Рассмотрим теперь так называемый “оператор кривизны” \mathcal{R} сопоставляющий тройке $\xi, \eta, \zeta \in W_X$ новое векторное поле так что

$$\mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta \quad (10)$$

Вычислим в некоторой тривиализации выражение для главной части \mathcal{R} через символы Кристоффеля

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\xi, \eta)\zeta &= \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta = \nabla_\xi \{\zeta'(x)\eta(x) + \Gamma_x(\eta, \zeta)\} - \\ &\quad - \nabla_\eta \{\zeta'(x)\xi(x) + \Gamma_x(\xi, \zeta)\} - \zeta'(x)[\xi, \eta](x) - \Gamma_x([\xi, \eta], \zeta) = \\ &= \zeta''(x)(\xi(x), \eta(x)) + \zeta'(x)\eta'(x)\xi(x) + (\Gamma_x)'(\xi)(\eta, \zeta) + \Gamma_x(\eta'_\xi, \zeta) + \Gamma_x(\eta, \zeta'_\xi) - \\ &\quad - \zeta''(x)(\eta(x), \xi(x)) - \zeta'(x)\xi'(x)\eta(x) - (\Gamma_x)'(\eta)(\xi, \zeta) - \Gamma_x(\xi'_\eta, \zeta) - \Gamma_x(\xi, \zeta'_\eta) - \\ &\quad - \zeta'(x)\eta'(x)\xi(x) + \zeta'(x)\xi'(x)\eta(x) - \Gamma_x(\eta'_\xi, \zeta) + \Gamma_x(\eta'_\eta, \zeta) = \end{aligned}$$

$$= \Gamma_x(\xi, \Gamma_x(\eta, \zeta)) - \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(\xi, \zeta)) + (\Gamma_x)'(\xi)(\eta, \zeta) - (\Gamma_x)'(\eta)(\xi, \zeta) \quad (11)$$

Формула преобразования

$$\mathcal{R}_{\varphi(x)}(\varphi'(x)\xi, \varphi'(x)\eta)(F(x)\zeta) = F(x)\mathcal{R}_x(\xi, \eta)\zeta \quad (12)$$

показывает, что \mathcal{R}_x представляет собой главную часть тензорного поля на X . Этот тензор \mathcal{R} , называемый тензором кривизны связности ∇ , мы в дальнейшем будем неоднократно использовать.

Скажем, что связность на X согласована с Γ -Ш.-структурой, если для каждой тривиализации коэффициент связности обладает свойством $\Gamma : B \times H \rightarrow H$. Из формулы (9) следует, что это свойство не нарушается при морфизмах Γ -Ш.-структур.

Обозначим $W_X(\tau^*)$ и $W_X(\gamma)$ соответственно пространства гладких сечений расслоений τ^* и γ . Из формулы (8) сразу следует, что при $\xi \in W_X(\gamma)$ оператор ковариантного дифференцирования $\nabla\xi$ ($\nabla\xi : \eta \rightarrow \nabla_\eta\xi$) оставляет инвариантным пространство $W_X(\gamma)$.

При $\xi \in W_X(\tau^*)$ существует ковариантная дивергенция векторного поля ξ

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{tr} \nabla \xi \quad (13)$$

Поскольку каждый слой \mathcal{H}_x расслоения γ изометричен гильбертову пространству H , в нем существует скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_x$. Набор гладких (класса C_{k-1}) функций $\{(\cdot, \cdot)_x : x \in X\}$ назовем римановой метрикой на X .

Связность ∇ , согласованную с Γ -Ш.-структурой, назовем римановой, если $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in W_X(\gamma)$ и $\forall \eta \in W_X$

$$\nabla_\eta(\zeta_1, \zeta_2) = (\nabla_\eta \zeta_1, \zeta_2) + (\zeta_1, \nabla_\eta \zeta_2) \quad (14)$$

4. РИМАНОВЫ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ СО СТРУКТУРОЙ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Среди всех римановых связностей на X выделяется единственная, не имеющая кручения, т.е. обладающая свойством

$$\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta - [\eta, \xi] = 0 \quad \forall \xi, \eta \in W_X$$

Такую связность будем называть связностью Леви-Чивита.

Пусть \mathcal{R} — тензор кривизны связности Леви-Чивита на X , тогда для векторных полей ξ, η, ζ, u на X справедливы соотношения

$$\mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta = -\mathcal{R}(\eta, \xi)\zeta \quad (15)$$

$$\mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta + \mathcal{R}(\eta, \zeta)\xi + \mathcal{R}(\zeta, \xi)\eta = 0 \quad (16)$$

$$(\mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta, u) = -(\mathcal{R}(\xi, \eta)u, \zeta) \tag{17}$$

$$(\mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta, u) = (\mathcal{R}(\zeta, u)\xi, \eta) \tag{18}$$

Определение 3. Тензором Риччи на X называется след линейного оператора $\xi \rightarrow \mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta$:

$$\tilde{\mathcal{R}}(\eta, \zeta) = \text{tr}(\xi \rightarrow \mathcal{R}(\xi, \eta)\zeta)$$

Мы будем предполагать, что в дальнейших построениях тензор Риччи существует и порождается ограниченным оператором $\tilde{\mathcal{R}}_x$ в H :

$$\tilde{\mathcal{R}}_x(g, y) = (\tilde{\mathcal{R}}_x g, y); \quad \sup_x \|\tilde{\mathcal{R}}_x\| < \infty$$

Как известно, для ядерного оператора A действующего в пространстве H след определяется формулой

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^{\infty} (Ae_i, e_i) \tag{19}$$

Ряд, стоящий в правой части (19) абсолютно сходится и не зависит от выбора ортобазиса.

С учетом формул (11) и (19) формула для тензора Риччи может быть записана в виде

$$\tilde{\mathcal{R}}_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\mathcal{R}}_x(e_i, \eta)\xi, e_i)$$

или, более подробно

$$\tilde{\mathcal{R}}_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(e_i, \Gamma_x(\eta, \xi)) - \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)) + (\Gamma_x)'(e_i)(\eta, \xi) - (\Gamma_x)'(\eta)(e_i, \xi), e_i) \tag{20}$$

Пусть ξ, η — векторные поля на X , ζ — сечение γ ; $\nabla\xi$ и $\nabla\eta$ — соответствующие ковариантные производные, тогда $\nabla\xi \circ \nabla\eta$ — это линейный оператор, действующий в пространстве $W_X(\gamma)$ так что $\nabla\xi \circ \nabla\eta : \zeta \rightarrow \nabla_{\nabla\zeta}\xi$; тогда

$$\text{tr } \nabla\xi \circ \nabla\eta = \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla\xi \circ \nabla\eta(e_i), e_i)$$

$$\begin{aligned} \nabla\xi \circ \nabla\eta(e_i) &= \nabla\xi(\nabla_{e_i}\eta) = \nabla\xi(\eta'(x)e_i + \Gamma_x(e_i, \eta)) = \nabla_{\eta'(x)e_i + \Gamma_x(e_i, \eta)}\xi = \\ &= \xi'(x)\eta'(x)e_i + \xi'(x)\Gamma_x(e_i, \eta) + \Gamma_x(\eta'(x)e_i, \xi) + \Gamma_x(\Gamma_x(e_i, \eta), \xi) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{tr} \nabla \xi \circ \nabla \eta = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x)\eta'(x)e_i + \xi'(x)\Gamma_x(e_i, \eta) + \Gamma_x(\eta'(x)e_i, \xi) + \Gamma_x(\Gamma_x(e_i, \eta), \xi), e_i). \quad (21)$$

5. ГЛАДКИЕ МЕРЫ НА МНОГООБРАЗИИ СО СТРУКТУРОЙ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Назовем меру μ H -дифференцируемой в точке $x \in X$, если существует карта (U, φ) в x , такая, что образ $\mu|_U^\varphi$ сужения μ на борелевские множества из U дифференцируем по постоянным направлениям из H . Это свойство не зависит от выбора отображения φ . Доказательство этого факта сразу следует из формулы преобразования производной меры вдоль векторного поля при нелинейном отображении (см. [7]).

Обозначим $M_X^1(H)$ класс мер из M_X , H — дифференцируемых в каждой точке многообразия X .

Теорема 1. Пусть многообразие X обладает связностью Леви-Чивита, согласованной с G -Ш.-структурой. Тогда каждая мера $\mu \in M_X^1(H)$ дифференцируема вдоль векторных полей $\xi \in W_X(\tau)$. При этом существует измеримое сечение $\tilde{\lambda}$ (ковариантная логарифмическая производная) касательного расслоения τ такое, что

$$\rho_\mu(\xi; x) = \langle \tilde{\lambda}(x), \xi(x) \rangle + \operatorname{div} \xi(x), \quad (22)$$

где $\operatorname{div} \xi(x) = \operatorname{tr} \nabla \xi(x)$; $\nabla \xi : \eta \rightarrow \nabla_\eta \xi$

Доказательство. Пусть носитель меры μ содержится в некоторой карте (U, φ) . Тогда мера μ^φ — образ меры μ при отображении φ — принадлежит классу $M_B^1(H)$. Пусть $h : B \rightarrow B'$ — векторное поле на B со значениями в B' . В силу предложения 2, $\mu^\varphi \in M_B^1(h)$ и справедлива формула

$$\rho_{\mu^\varphi}(h; x) = \langle \lambda(x), h(x) \rangle + \operatorname{tr} h'(x), \quad (23)$$

$$\text{где } h'(x) : e \rightarrow \left. \frac{d}{dt} h(x + te) \right|_{t=0}; \quad h'(x) \in \mathfrak{L}(B, B')$$

Известно (см. теорему 3 работы [7]), что логарифмическая производная меры вдоль векторного поля инвариантна относительно замен координат. Выражения, входящие в правую часть (23) инвариантными относительно замен координат не являются, но, тем не менее, имеют инвариантную сумму.

Пусть $\operatorname{tr} \Gamma_x$ — элемент из B , определяемый формулой

$$\langle \operatorname{tr} \Gamma_x, \eta \rangle = \operatorname{tr} \Gamma_x(\eta); \quad \eta \in B'$$

Выражение $\text{tr } h'(x) + \text{tr } \Gamma_x(h)$ называется ковариантной дивергенцией векторного поля h и инвариантно относительно замен координат. Введем ковариантную логарифмическую производную меры μ^φ вдоль постоянных направлений

$$\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) - \text{tr } \Gamma_x = \frac{d(\nabla \mu^\varphi)}{d\mu^\varphi} \quad (24)$$

Инвариантность $\tilde{\lambda}(x)$ следует из инвариантности ковариантной дивергенции. Терма доказана.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ НА МНОГООБРАЗИИ СО СТРУКТУРОЙ ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА

Пусть логарифмическая производная $\rho_\mu(\xi; x)$ дифференцируема вдоль $\eta \in W_X$.

Определение. Первой производной меры $\mu \in M_X$ называется линейное отображение $D\mu : W_X \rightarrow M_X$ такое, что $D\mu(h) = \mu'_h = \nabla_h \mu$.

Определение. Второй производной меры $\mu \in M_X$ называется билинейное отображение $D^2\mu : W_X \times W_X \rightarrow M_X$ такое, что

$$D^2\mu(\xi, \eta) = \nabla_\eta \nabla_\xi \mu - \nabla_{\nabla_\eta \xi} \mu \quad (25)$$

Поскольку ∇ — связность без кручения, отображение $D^2\mu$ является симметричным.

Аналогично можно определить понятие производной меры порядка m (см. [7]).

$D^2\mu$ существует для каждой меры $\mu \in M_X$ по крайней мере в слабом смысле; в дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\mu \in M_X^1(\xi)$ и логарифмическая производная $\rho_\mu(\xi; x)$ дифференцируема вдоль векторного поля $\eta \in W_X$. В этом случае

$$\begin{aligned} D^2\mu(\xi, \eta) &= \nabla_\eta \nabla_\xi \mu - \nabla_{\nabla_\eta \xi} \mu = \nabla_\eta [\rho(\xi; x)\mu] - \rho(\nabla_\eta \xi; x)\mu = \\ &= \{\rho(\xi)\rho(\eta) + \nabla_\eta \rho(\xi) - \rho(\nabla_\eta \xi)\}\mu \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $M_X^2(H) \subset M_X^1(H)$ — класс мер, обладающих дифференцируемой ковариантной логарифмической производной $\tilde{\lambda}(x), x \in X$ удовлетворяющих условию $\sup_X \|\nabla \tilde{\lambda}(x)\| < \infty$. Вычислим, используя формулы (22) и (26) $D^2\mu(\xi, \eta)$ для $\mu \in M_X^2(H)$

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \rho(\xi; x) &= \nabla_\eta \{ \langle \tilde{\lambda}(x), \xi(x) \rangle + \text{div } \xi(x) \} = \\ &= \langle \nabla \tilde{\lambda}(x) \eta(x), \xi(x) \rangle + \langle \tilde{\lambda}(x), \nabla_\eta \xi(x) \rangle + \nabla_\eta \text{div } \xi(x); \\ \rho(\nabla_\eta \xi; x) &= \langle \tilde{\lambda}(x), \nabla_\eta \xi(x) \rangle + \text{div}(\nabla_\eta \xi(x)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_\eta \rho(\xi; x) - \rho(\nabla_\eta \xi; x) = \langle \nabla \tilde{\lambda}(x) \eta(x), \xi(x) \rangle + \nabla_\eta \operatorname{div} \xi(x) - \operatorname{div}(\nabla_\eta \xi(x)); \\
& \operatorname{div} \xi = \operatorname{tr} \nabla \xi = \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla \xi(e_i), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla_{e_i} \xi, e_i); \quad \nabla_{e_i} \xi(x) = \xi'(x) e_i + \Gamma_x(e_i, \xi(x)); \\
& \nabla_\eta(\operatorname{div} \xi) = \nabla_\eta \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) e_i + \Gamma_x(e_i, \xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi''(x)(e_i, \eta) + (\Gamma_x)'(\eta)(e_i, \xi) + \Gamma_x(e_i, \xi'_\eta), e_i); \\
& \operatorname{div}(\nabla_\eta \xi(x)) = \operatorname{tr} \nabla \nabla_\eta \xi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla_{e_i} \nabla_\eta \xi(x), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\nabla_{e_i} \{ \xi'(x) \eta(x) + \Gamma_x(\eta, \xi) \}, e_i) = \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi''(x)(\eta(x), e_i) + \xi'(x) \eta'(x) e_i + (\Gamma_x)'(e_i)(\eta, \xi) + \Gamma_x(\eta'(x) e_i, \xi(x)) + \\
& \quad + \Gamma_x(\eta, \xi'(x) e_i) + \Gamma_x(e_i, \xi'_\eta) + \Gamma_x(e_i, \Gamma_x(\eta, \xi)), e_i); \\
& \operatorname{div}(\nabla_\eta \xi) - \nabla_\eta \operatorname{div} \xi = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \eta'(x) e_i + (\Gamma_x)'(e_i)(\eta, \xi) + \Gamma_x(\eta'(x) e_i, \xi) + \Gamma_x(\eta, \xi'(x) e_i) + \\
& \quad + \Gamma_x(e_i, \Gamma_x(\eta, \xi)) + (\Gamma_x)'(\eta)(e_i, \xi) - \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)) + \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) = \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma'_x(e_i)(\eta, \xi) - \Gamma'_x(\eta)(e_i, \xi) + \Gamma_x(e_i, \Gamma_x(\eta, \xi)) - \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \eta'(x) e_i + \Gamma_x(\eta'(x) e_i, \xi) + \Gamma_x(\eta, \xi'(x) e_i) \Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) = \sum_1 + \sum_2 \quad (27)
\end{aligned}$$

\sum_1 — это в точности координатная запись тензора Риччи рассматриваемой связности (см. (20)). Сравнивая \sum_2 с выражением для $\operatorname{tr} \nabla \xi \circ \nabla \eta$ получаем, что с учетом равенств

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\eta, \xi'(x) e_i), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \Gamma_x(e_i, \eta), e_i) \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\Gamma_x(e_i, \eta), \xi), e_i) \quad (29)$$

эти выражения совпадают. Докажем равенства (28) и (29), при этом мы будем пользоваться тензорными обозначениями.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\eta, \xi'(x) e_i), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\eta^k e_k, c_i^\beta e_\beta), e_i) = \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \eta^k c_i^\beta (\Gamma_x(e_k, e_\beta), e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta^k c_i^\beta (\Gamma_{k\beta}^\gamma e_\gamma, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta^k c_i^\beta \Gamma_{k\beta}^i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \Gamma_x(e_i, \eta), e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \Gamma_x(e_i, \eta^k e_k), e_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi'(x) \eta^k \Gamma_{ik}^{\gamma} e_{\gamma}, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta^k \Gamma_{ik}^{\gamma} c_{\gamma}^{\beta} e_{\beta}, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta^k c_{\gamma}^i \Gamma_{ik}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Равенство (28) доказано. Аналогично доказывается (29).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_x(e_k, \Gamma_x(e_i, e_{\alpha})), e_i) = \\ \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_x(e_k, \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta}), e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_{i\alpha}^{\beta} \Gamma_{k\beta}^{\gamma} e_{\gamma}, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_{k\beta}^i \Gamma_{i\alpha}^{\beta}; \\ \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_x(\Gamma_x(e_i, \eta), \xi), e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_x(e_{\alpha}, \Gamma_x(e_i, e_k)), e_i) = \\ \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_x(e_{\alpha}, \Gamma_{ik}^{\beta} e_{\beta}), e_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_{ik}^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma}, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{\alpha} \eta^k \Gamma_{ki}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^i. \end{aligned}$$

Равенство (29) доказано.

Замечание. Более простое доказательство равенства (29) можно получить из формул

$$\begin{aligned} (\Gamma_x(\xi, \Gamma_x(e_i, \eta)), e_i) &= -(\Gamma_x(e_i, \eta), \Gamma_x(\xi, e_i)) \\ (\Gamma_x(\eta, \Gamma_x(e_i, \xi)), e_i) &= -(\Gamma_x(e_i, \xi), \Gamma_x(e_i, \eta)) \end{aligned}$$

которые получаются в результате отождествления коэффициентов связности касательного и кокасательного расслоения с помощью римановой метрики на многообразии с Г.-Ш.-структурой.

Таким образом, справедливо соотношение

$$D^2\mu(\xi, \eta) = \{\rho(\xi)\rho(\eta) + ([\nabla\tilde{\lambda} - \tilde{\mathcal{R}}]\xi, \eta) - \text{tr} \nabla\xi \circ \nabla\eta\} \mu \tag{30}$$

Теорема 2. Пусть при условии теоремы 1 тензор Риччи $\tilde{\mathcal{R}}_x$ равномерно по $x \in X$ ограничен в метрике, порожденной гильбертовой структурой расслоения γ . Если $\mu \in M_X^2(H)$ и $\xi \in W_X(\gamma)$, то существует интегрируемая в квадрате по μ логарифмическая производная $\rho_{\mu}(\xi; x)$ и

$$\int_X |\rho_{\mu}(\xi; x)|^2 \mu(dx) = \int_X \{([\tilde{\mathcal{R}} - \nabla\tilde{\lambda}]\xi, \xi) + \text{tr} \nabla\xi^2\} \mu(dx) \leq C\sigma_2^2(\xi), \tag{31}$$

где $\sigma_2(\xi) = \sqrt{\int_X \{\text{tr } \nabla \xi \circ \nabla \xi^* + \|\xi\|^2\} \mu(dx)}$ — соболевская норма на сечениях γ .

Доказательство. Очевидно, что если для $\xi, \eta \in W_X$ существует $D^2\mu(\xi, \eta)$, то $\int_X D^2\mu(\xi, \eta)(dx) = 0$. Из этого следует, что для $\mu \in M_X^2(H)$

$$\int_X \rho(\xi)\rho(\eta)\mu(dx) = \int_X \{([\tilde{\mathcal{R}} - \nabla\tilde{\lambda}]\xi, \eta) + \text{tr } \nabla\xi \circ \nabla\eta\} \mu(dx) \quad (32)$$

Полагая $\xi = \eta$, мы получаем с учетом условий ограниченности $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$ необходимую оценку.

Отметим, что не смотря на то, что выражение $\text{tr } \xi'(x)$ имеет смысл лишь в том случае, когда $\xi \in W_X(\tau^*)$, из приведенного неравенства (31) следует, что сумма $\langle \tilde{\lambda}(x), \xi(x) \rangle + \text{div } \xi(x)$ является элементом пространства $L_2(X, \mu)$ и при $\xi \in W_X(\gamma)$. Теорема доказана.

Замечание. Из формул (30) и (31) следует, что мера $D^2\mu(\xi, \eta)$ имеет интегрируемую по μ плотность — логарифмическую производную второго порядка вдоль пары векторных полей ξ, η .

Отметим, что на таком пути можно ввести и оценить логарифмические производные более высоких порядков.

7. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ГЛАДКОГО ОБРАЗА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ МЕРЫ

Пусть X_1 и X_2 — банаховы многообразия, $f : X_1 \rightarrow X_2$ — гладкое отображение, μ_1 — борелевская мера на X_1 , $\mu_2 = \mu_1^f = \mu \circ f^{-1}$ — порождаемая рассматриваемым отображением мера на X_2 . Пусть ξ_2 — векторное поле на X_2 , f - согласованное с векторным полем на X_1 :

$$\xi_2(f(x)) = f'(x)\xi_1(x) \quad (33)$$

Простые вычисления (см. [5]) показывают, что если мера μ_1 дифференцируема вдоль ξ_1 , то μ_2 дифференцируема вдоль ξ_2 по крайней мере в слабом смысле и

$$\nabla_{\xi_2}\mu_2 = (\nabla_{\xi_1}\mu_1)^f \quad (34)$$

Действительно, пусть φ — гладкая функция на X_2 . Функция φ^f на X_1 определяется соотношением $\varphi^f(x) = \varphi(f(x))$, $\forall x \in X$. Тогда имеет место формула

$$(\nabla_{\xi_2}\varphi)^f = \nabla_{\xi_1}\varphi^f \quad (35)$$

из которой и следует (34).

Теорема 3. Пусть многообразие X_1 и мера μ_1 удовлетворяют условиям теоремы 2, $f : X_1 \rightarrow X_2$ — гладкое отображение, $\mu_2 = \mu_1^f$ — борелевская мера на X_2 — гладкий образ меры μ_1 , $\xi_1 \in W_{X_1}(\gamma_1)$. Тогда мера μ_2 имеет логарифмическую производную $\rho(\xi_2; y) \in L_2(X_2, \mu_2)$ ($\xi_2(f(x)) = f'(x)\xi_1(x)$).

Доказательство с учетом формул (34) и (35) получается из следующей оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{X_2} \varphi(y) (\nabla_{\xi_2} \mu_2)(dy) \right| &= \left| \int_{X_2} (\nabla_{\xi_2} \varphi)(y) \mu_2(dy) \right| = \left| \int_{X_1} (\nabla_{\xi_2} \varphi)^f(x) \mu_1(dx) \right| = \\ &= \left| \int_{X_1} \nabla_{\xi_1} \varphi^f(x) \mu_1(dx) \right| = \left| \int_{X_1} \varphi^f(x) \nabla_{\xi_1} \mu_1(dx) \right| = \left| \int_{X_1} \varphi^f(x) \rho(\xi_1; x) \mu_1(dx) \right| \leq \\ &\leq C \cdot \|\varphi\|_{L_2(X_2, \mu_2)} \cdot \sigma_{2, \mu_1}(\xi_1), \end{aligned}$$

показывающей, в силу теоремы Рисса, существование функции $\beta(y)$, удовлетворяющей соотношению

$$\int_{X_2} \nabla_{\xi_2} \varphi(y) \mu_2(dy) = - \int_{X_2} \varphi(y) \beta(y) \mu_2(dy).$$

Замечание. В условиях, приведенных выше, формула (31) превращается в известную формулу теории гауссовых мер ([3, 8]). На этом пути аналогичное утверждение о гладком образе гауссовой меры указано в [11].

Для мер с логарифмической производной в линейном пространстве ($\tilde{\mathcal{R}} = 0$) вариант формулы (31) для градиентных полей $\xi = \nabla\psi$ был получен в [12], где он в дальнейшем использовался для получения неравенств коэрцитивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авербух, В. И., Смолянов, О. Г., Фомин, С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. ММО. — 1971. — 24. — С. 133–174.
AVERBUKH, V. I., SMOLYANOV, O. G. & FOMIN, S. V. (1971) Generalized functions and differential equations in linear spaces. 1. Differentiable measures. *Trans. Moscow Math. Soc.* 24. p. 133–174.
2. Скороход, А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1975. — 232 с.
SKOROKHOD, A. V. (1975) *Integration in Hilbert space*. Moscow: Nauka.
3. Далецкий, Ю. Л., Фомин, С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1978. — 383 с.

- DALETSKIY, Yu. L. & FOMIN, S. V. (1978) *Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces*. Moscow: Nauka.
4. Фомин, С. В. Дифференцируемые меры в линейных пространствах // УМН. — М., 1968. — 23:1(139). — С. 221–222.
FOMIN, S. V. (1968) Differentiable measures in linear spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 23 (1(139)). p. 221–222.
5. Марянин, Б. Д., Смолич, В. П. Гладкие меры в бесконечномерных линейных пространствах // ТВИМ. — КФУ, Симферополь, 2017. — №1. — С. 51–67.
6. Смолянов, О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. — Изд. МГУ, 1979. — 86 с.
7. Далецкий, Ю. Л., Марянин, Б. Д. Гладкие меры на бесконечномерных многообразиях // ДАН СССР. — 1985. — Т. 285, № 6. — С. 1297–1300.
8. Далецкий, Ю. Л., Парамонова, С. Н. Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов // Теория вероятностей и приложения. — 1974. — № 4. — С. 845–849.
9. Далецкий, Ю. Л., Кадобянский, Р. Н. Интегрирование по частям в банаховом пространстве с гауссовой мерой // Киев. — 1981. — Препринт ИТФ. — С. 81–113.
10. Баклан, В. В. О расширенных стохастических интегралах // Киев: Наукова думка. — 1977. — Теория случайных процессов. — С. 3–9.
11. Далецкий, Ю. Л. Стохастическая дифференциальная геометрия // УМН. — 1983. — 38:3. — С. 87–111.
DALETSKIY, YU. L. (1983) Stochastic differential geometry. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 38 (3). p. 87–111.
12. Кондратьев, Ю. Г. Операторы Дирихле и гладкость решений бесконечномерных эллиптических уравнений // ДАН СССР. — 1985. — Т. 282, № 2. — С. 269–273.
KONDRATYEV, YU. G. (1985) Dirichlet operators and smooth solutions of infinite-dimensional elliptic equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR.* 282 (2). p. 269–273.
13. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.
DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J. T. (1962) *Linear operators. General theory*. Moscow: IL.

14. Белопольская, Я. И., Далецкий, Ю. Л. Уравнения Ито и дифференциальная геометрия // УМН. — 1982. — 37:3. — С. 95–142.
BELOPOLSKAYA, JA. I. & DALETSKIY, YU. L. (1982) Ito equations and differential geometry. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 37 (3). p. 95–142.
15. MALLIAVIN, P. (1978) *Geometrie differentielle stochastique*. Univers. de Montreal.
16. MALLIAVIN, P. (1976) Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. *Proc. of Int. Symp. on Stoch. Diff. Eq.* p. 195–263.

УДК: 517.946

MSC2010: 81U40, 35P25, 31C20, 45F15

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© А. А. Рейимбергганов, И. Д. Рахимов

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

14, Х.АЛИМДЖАНА, 220100, ХОРЕЗМ, УЗБЕКИСТАН

E-MAIL: *anvar@urdu.uz, ilxom@urdu.uz*

NUMERICAL-ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER
EQUATION.

Reyimberganov A. A., Rakhimov I. D.

Abstract. The main aim of the work is to study the numerical solutions of the focusing nonlinear Schrodinger (NLS) equation. The initial-value problem for the NLS equation

$$iu_t + 2|u|^2u + u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

is solved numerically using the method inverse scattering transform. Here the function $u_0(x)$ possesses the required smoothness and tends to its limits sufficiently rapidly as $x \rightarrow \pm\infty$.

Soliton theory provides effective methods to solve nonlinear evolution partial differential equations. The inverse scattering transform method is particularly powerful in constructing soliton solutions.

The inverse scattering transform method to solve the initial-value problem for the NLS equation is based on the spectral analysis of the Zakharov-Shabat system and is described in terms of the following three steps: first, solve the direct scattering problem for a Zakharov-Shabat system with initial potential $u_0(x)$; second, finding evolution of scattering data; third, solve the inverse scattering problem for the time evolved scattering data to arrive at the solution $u(x, t)$.

The inverse scattering problem for Zakharov-Shabat system is reduced to a system of two integral equations the so-called system of Gelfand-Levitan-Marchenko (Marchenko) integral equations. This means solving the coupled system of Marchenko integral equations, associated to the scattering data.

In some cases, analytical solution cannot be found for this system of integral equations. For example, in a non-reflective case. Therefore, we must apply the numerical methods for obtaining at least the approximate solutions of the system of Marchenko integral equations.

By M.C.De Bonis and G.Mastroianni [17] applied Nyström method for solving systems of Fredholm integral equations on the real semiaxis. They proved that this method is stable and convergent, and applied a specific application to an inverse scattering problem for the Schrödinger equation.

In the work A. Aricò, G.Rodriguez, S.Seatzu [18] is shown system of Marchenko integral equations can be reduced to a linear system of algebraic equations. Using structured-matrix techniques the time evolved system of Marchenko integral equations is solved to arrive at the solution to the NLS equation.

In this work, we have used a numerical method to obtain approximate solutions to the system of Marchenko integral equations, in the cases when the corresponding system has simple and multiple eigenvalues. It is clear that to get the best approximating solutions of the given systems, the truncation degree N_x must be chosen large enough. The results are compared with the exact solution by using computer simulations.

Keywords: *Nonlinear Schrödinger equation (NLS), inverse scattering problems, numerical methods, integral equations.*

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические задачи о нелинейных волнах описываются математическими моделями, представляющими нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, имеющие специальные частные решения — солитоны. Значительное место в теории солитонов отводится комплексным нелинейным уравнениям, например, нелинейному уравнению Шредингера (НУШ):

$$iu_t + 2\lambda|u|^2u + u_{xx} = 0, \quad \lambda = \text{const.} \quad (1)$$

Уравнения (1) называются самофокусированными при $\lambda > 0$ и дефокусированными при $\lambda < 0$. Аргументы x и t обозначают, соответственно, пространственную и временную переменную. Здесь $i = \sqrt{-1}$, $u(x, t)$ является комплексной функцией и определяется по всей вещественной прямой.

Численное моделирование и аналитические модели НУШ играют важную роль в оптимизации конструкции оптических систем связи. Они помогают понять основные физические явления ультракоротких импульсов в нелинейной и дисперсионной средах. Поэтому, исследование такого рода уравнений и поиски методов поиска их частных решений представляют большую практическую ценность и значимость.

Методом обратной задачи рассеяния [1], вариации и возмущения [2] можно получить аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера при некоторых особых начальных и граничных условиях.

Труднее найти аналитическое решение НУШ, поэтому важно изучить теорию численного решения этого уравнения. Методы нахождения численного решения НУШ были исследованы многими авторами. Например, изучены методы конечных

разностей [3, 4], метод квазиинтерполяционной схемы [5], метод квадратичной В-сплайн схемы с конечным элементов [5], метод конечных разностей с расщепленным шагом и метод псевдоспектральной коллокации [7, 8], метод экспоненциального сплайна [9], методы сплайна [10, 11].

Нелинейные уравнения Шредингера принадлежат к классу дифференциальных уравнений интегрируемых методом обратной задачи рассеяния для оператора типа Дирака. Это было показано в работах В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [12], Л. А. Тахтаджяна и Л. Д. Фадеева [13], М. Абловица, Д. Каупа, А. Ньюлла и Х. Сегура [14].

Метод обратной задачи рассеяния состоит из следующих трех этапов: 1) решить прямую задачу рассеяния для связанной системы Захарова-Шабата при заданных начальных данных для получения данных рассеяния; 2) нахождения эволюции данных рассеяния; 3) решить соответствующую обратную задачу рассеяния, чтобы прийти к решению.

Обратная задача рассеяния сводится к системе двух интегральных уравнений — системе интегральных уравнений Марченко. В не безотражательном случае аналитическое решение не может быть найдено для этой системы интегральных уравнений. Для получения хотя бы приближенных решений системы интегральных уравнений Марченко, необходимо применять численные методы.

Цель данной статьи — предложить метод нахождения численных решений нелинейного уравнения Шредингера с помощью обратной задачи рассеяния.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = u(x)v_2, \\ v_{2x} - i\xi v_2 = -u^*(x)v_1 \end{cases} \quad (2)$$

на всей оси ($-\infty < x < \infty$) с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty. \quad (3)$$

С помощью оператора

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u^*(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

систему уравнений (2) можно переписать в виде $Lv = \xi v$, где $v = (v_1, v_2)^T$.

При условии (3) система уравнений (2) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\} \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением к φ .

При выполнении условий (3) такие решения существуют и определяются асимптотиками (4) и (5) однозначно. При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi(x, \xi), \bar{\varphi}(x, \xi)\}$ и $\{\psi(x, \xi), \bar{\psi}(x, \xi)\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (2), поэтому

$$\begin{cases} \varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \\ \bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}. \end{cases} \quad (6)$$

Легко заметить, что справедливо следующее равенство

$$a(\xi) = W\{\varphi, \psi\} \equiv \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \quad (7)$$

кроме того, при действительных ξ выполняется равенства

$$a(\xi)\bar{a}(\xi) + b(\xi)\bar{b}(\xi) = 1. \quad (8)$$

Функция $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) допускает аналитическое продолжение в верхнюю (нижнюю) полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ ($\text{Im } \xi < 0$). При $|\xi| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \xi \geq 0$ функция $a(\xi)$ обладает асимптотикой $a(\xi) = 1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$. Функция $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) может иметь в полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$ ($\text{Im } \xi < 0$) только конечное число нулей ξ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ ($\bar{\xi}_k$, $k = 1, 2, \dots, \bar{N}$). Нули ξ_k ($\bar{\xi}_k$) функций $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) соответствуют собственным значениям оператора L в верхней (нижней) полуплоскости. Кроме того, оператор L может иметь кратные собственные значения. Как показано в работе [15] оператор L может иметь спектральные особенности, которые лежат на непрерывном спектре. Непрерывный спектр оператора L заполняет вещественную ось, т.е. $\sigma_{ess}(L(t)) = (-\infty, \infty)$. Предполагаем, что оператор L не имеет спектральных особенностей.

Функции

$$\psi^s(x, \xi_k) \equiv \frac{\partial^s}{\partial \xi^s} \psi(x, \xi) \Big|_{\xi=\xi_k}, \quad s = 1, 2, \dots, m_k - 1$$

называются присоединенными функциями к собственной функции $\psi(x, \xi_k)$. Аналогично определяются присоединенные функции к собственной функции $\phi(x, \xi_k)$. Собственные и присоединенные функции удовлетворяют уравнениям

$$(L - \xi_k I) \psi^s(x, \xi_k) = s \psi^{s-1}(x, \xi_k),$$

$$\psi^0(x, \xi_k) \equiv \psi(x, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Согласно определению собственных и присоединенных функций существует так называемая цепочка нормировочных чисел $\{\chi_0^k, \chi_1^k, \dots, \chi_{m_k-1}^k\}$ и имеют место соотношения

$$\phi^l(x, \xi_k) = \sum_{\nu=0}^l \chi_{l-\nu}^k \frac{l!}{\nu!} \psi^\nu(x, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Определение 1. Набор величин

$$S(0) = \left\{ r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \xi_k, \chi_j^k, \xi \in R^1, \operatorname{Im} \xi_k > 0, k = \overline{1, N}; j = \overline{0, m_k - 1} \right\}$$

называется данными рассеяния для системы уравнений (2).

Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u(x)$, а обратная — в восстановлении по данным рассеяния потенциала $u(x)$ уравнения (2).

Для функции ψ справедливы следующие интегральные представления

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, s) e^{i\xi s} ds, \quad (9)$$

где $\mathbf{K}(x, s)$ являются двухкомпонентными векторами, т. е.

$$\mathbf{K}(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}.$$

В представлениях (12) ядра $\mathbf{K}(x, s)$ не зависят от ξ и связаны с $u(x)$ с помощью равенств

$$u(x) = -2K_1(x, x). \quad (10)$$

Ядра $\mathbf{K}(x, s)$ при $y > x$ являются решением интегральных уравнений Марченко (Гельфанда–Левитана–Марченко)

$$\begin{cases} K_2^*(x, y) + \int_0^\infty K_1(x, s+x)F(s+x+y)ds = 0, \\ -K_1(x, y) + F^*(x+y) + \int_0^\infty K_2^*(x, s+x)F^*(s+x+y)ds = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(\xi)e^{i\xi x}d\xi - i \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \chi_{m_k-\nu-1}^k \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} \left[\frac{(z-\xi_k)^{m_k}}{a(z)} e^{izx} \right] \Big|_{z=\xi_k}.$$

2. МЕТОДОЛОГИЯ

Рассмотрим уравнения (1) при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (12)$$

Здесь начальная функция $u_0(x)$ является достаточно гладкой и удовлетворяет условию (3).

Как показано в работе [16] при $\lambda > 0$ существует аналитическое односолитонное решение уравнения НУШ в виде

$$u(x, t) = 2\beta \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-i(2\alpha(x-\xi)+\delta)} \operatorname{sech}(2\beta(x-\xi)),$$

где $\xi = -4\alpha\beta t + \xi_0$, $\delta = 2\alpha\xi + 4(\alpha^2 - \beta^2)t + \delta_0$ и $\alpha, \beta, \xi_0, \delta_0$ — действительные числа.

Если функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (15), то данные рассеяния несамосопряженного оператора L с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом:

$$a(\xi, t) = a(\xi, 0), \quad r(\xi, t) = r(\xi, 0)e^{4i\xi^2 t}, \quad (Im\xi = 0), \quad (13)$$

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\chi_0^k(t) &= \chi_0^k(0)e^{4i\xi_k^2 t}, \\
\chi_1^k(t) &= \chi_1^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\xi_k\chi_0^k(0)e^{4i\xi_k^2 t}, \\
\chi_2^k(t) &= \chi_2^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\xi_k\chi_1^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\chi_0^k(0)e^{4i\xi_k^2 t^2}, \\
\chi_3^k(t) &= \chi_3^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\xi_k\chi_2^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\chi_1^k(0)e^{4i\xi_k^2 t^2}, \\
&\dots \\
\chi_l^k(t) &= \chi_l^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\xi_k\chi_{l-1}^k(0)e^{4i\xi_k^2 t} + 8i\chi_{l-2}^k(0)e^{4i\xi_k^2 t^2}, \\
&k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 3, 4, \dots, m_k - 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

Во первых, применяя алгоритм метода прямой задачи рассеяния для системы уравнений (1), находим данные рассеяния при заданной начальной функции $u_0(x)$. Далее, на основании уравнений (16)–(18), находим данные рассеяния при $t > 0$.

Прежде всего, вычислим функцию $F(x, t)$ через данными рассеяния:

$$F(x, t) = R(x, t) - i \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \chi_{m_k-\nu-1}^k(t) \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} \left[\frac{(z - \xi_k)^{m_k}}{a(z)} e^{izx} \right] \Big|_{z=\xi_k},$$

где

$$R(x, t) = \mathfrak{F} \left(r(\xi) e^{-4i\xi^2 t} \right).$$

Система интегральных уравнений Марченко решается с помощью численного метода, учитывающего специальную структуру ядра. В этой работе используется метод Нистрома [17, 18], а интегралы вычисляются с помощью квадратурной формулы Симпсона на основании сетки $X = \left\{ x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{N_x}, k = 0, 1, \dots, N_x \right\}$. Ядра интегральных уравнений зависят от $s+x$ и $s+x+y$. Поэтому мы получаем точки сетки в виде

$$\begin{aligned}
s_j &= (j-1)\tau, \quad \beta_{k+j} = x_k + s_j, \quad \alpha_{k+j+p} = \beta_{k+j} + \beta_{p+k}, \\
\alpha_{k+p} &= x_k + \beta_{p+k}, \quad k = 1, 2, \dots, N_x, \quad j = 1, 2, \dots, N_y.
\end{aligned} \tag{16}$$

Мы используем квадратурную формулу Симпсона на точках сетки для аппроксимации интегралов. В точках сетки (19) ядра интегральных уравнений удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} K_2^*(x_k, \beta_{k+p}) + \sum_{j=1}^{N_y} d_j K_1(x_k, \beta_{k+j}) F(\alpha_{k+j+p}) = 0, \\ \sum_{j=1}^{N_y} d_j K_2^*(x_k, \beta_{k+j}) F^*(\alpha_{k+j+p}) - K_1(x_k, \beta_{k+p}) = -F^*(\alpha_{k+p}), \end{cases} \tag{17}$$

где $\{d_i\}_{i=0}^{N_y} = \frac{\tau}{3} \{1, 4, 2, 4, \dots, 1\}$, τ — шаг сетки.

Перепишем системы линейных алгебраических уравнений (17) в виде

$$\begin{bmatrix} I_{N_y} & HD \\ H^*D & -I_{N_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_{N_y} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

с помощью матрицы $D = \text{diag}\{d_j\}_{j=1}^{N_y}$, $I_{N_y} = \text{diag}\{1\}_{j=1}^{N_y}$,

$$H = (F(\alpha_{k+j+p}))_{p,j=1}^{N_y}, f_{N_y} = (F(\alpha_{k+p}))_{p=1}^{N_y}, \quad (19)$$

и неизвестные вектор-столбцы

$$k_2 = (K_2(x_k, \beta_{k+p}))_{p=1}^{N_y}, k_1 = (K_1(x_k, \beta_{k+p}))_{p=1}^{N_y}. \quad (20)$$

Система (18) может быть представлена следующим образом

$$\begin{cases} (DH^*DHD + D)k_1 = Df_{N_y}, \\ k_2 = -HDk_1. \end{cases}$$

Здесь матрица $DH^*DHD + D$ является симметричной и положительно определенной, так что систему можно легко решить методом сопряженного градиента. Квадратная матрица H порядка $N_y \times N_y$ называется матрица Ганкела, так как $(H)_{ij} = F(\alpha_{k+i+j})$.

Заметим, что как приведены равенства (13) и (20) решение $u(x, t)$, которое мы хотим получить, связано с компонентом k_1 .

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

3.1. В безотражательном случае. Выбираем значения параметров $N_x = 100$, $\tau = 0.1$ для отрезка $[-5, 5]$. Пусть данные рассеяния $\{r(\xi, 0) = 0, \xi_1(0) = i, \chi_0(0) = 1\}$ при $t = 0$. Используя формулы (16)–(18), получим данные рассеяния $\{r(\xi, t) = 0, \xi_1(t) = i, \chi_0(t) = e^{-4it}\}$ при $t > 0$. В этом случае функция

$$u(x, t) = -2e^{4it} \text{sech}2x$$

является точное односолитонное решение уравнение (1).

График, соответствующий численному решению для исходных данных рассеяния в разных значениях времени ($t = 0.5, t = 0.6, t = 0.7, t = 1$) на отрезке $[-5, 5]$, показан на рисунке 1.

Пусть данные рассеяния $\{r(\xi, t) = 0, \xi_1(t) = i, \chi_0(t) = e^{-4it}, \chi_1(t) = (i + 2it)e^{-4it}\}$, то, решая обратную задачу рассеяния,ый получаем точное решение в виде

$$u(x, t) = -16 \frac{(x+t+1)e^{-6x+4it} - (x+t)e^{-2x+4it}}{1 + (16x^2 + x(16 + 32t) + (16t^2 + 16t + 6))e^{-4x} + e^{-8x}}.$$

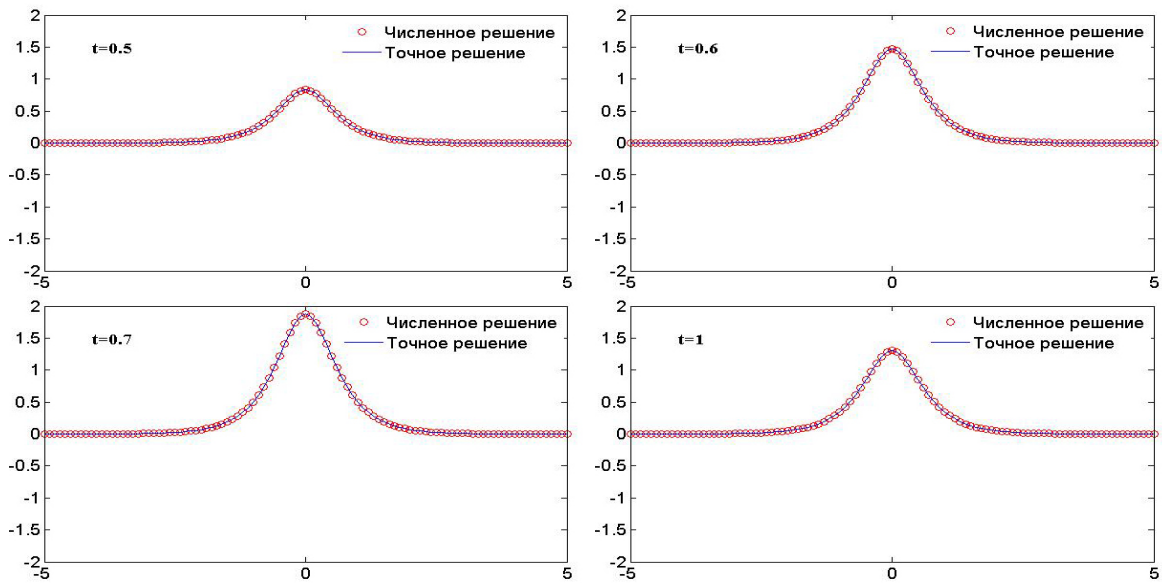


Рис. 1. Вещественная часть численного и аналитического решения нелинейного уравнения Шредингера

На рисунке 2. приведен график, соответствующий численному и аналитическому решениям для исходных данных рассеяния в разных значениях времени ($t = 0.5, t = 0.6, t = 0.7, t = 1$) на отрезке $[-5, 5]$.

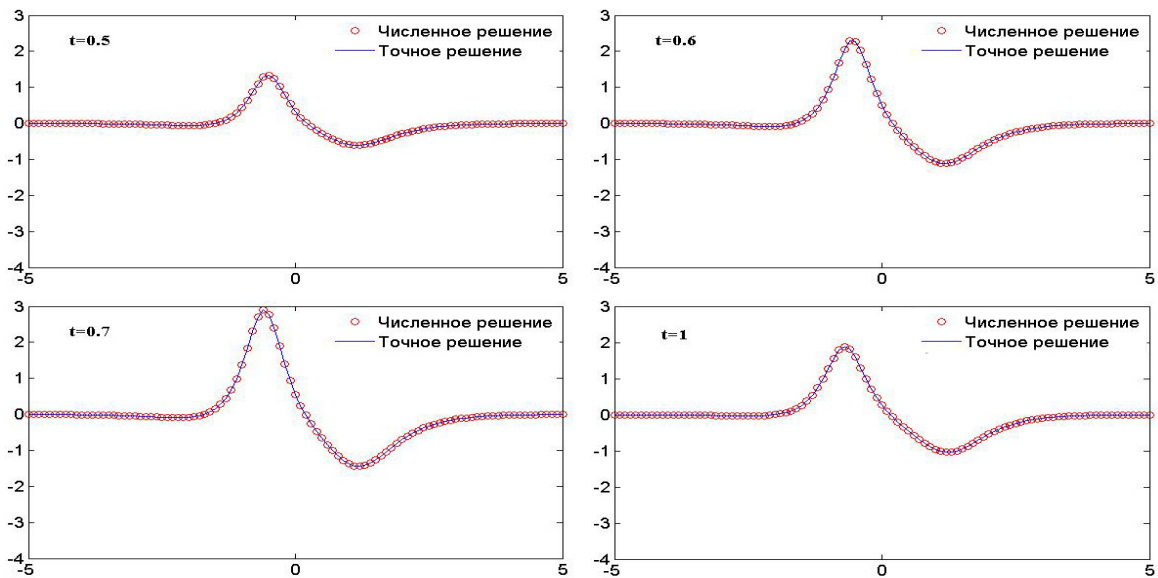


Рис. 2. Вещественная часть численного и аналитического решений нелинейного уравнения Шредингера.

3.2. В отражательном случае. Значения параметров выбираем $N_x = 100$, $\tau = 0.1$ для отрезка $[-5, 5]$. Пусть $\left\{ r(\xi) = \frac{1}{1+\xi}, \xi_1(0) = i, \chi_0(0) = 1 \right\}$. Используя формулы (16)–(18), получим $\left\{ r(\xi, t) = \frac{1}{1+\xi}, \xi_1(t) = i, \chi_0(t) = e^{-4it} \right\}$.

График соответствующий численному решению для исходных данных рассеяния в разных значениях времени ($t = 0.5, t = 0.6, t = 0.7, t = 1$) на отрезке $[-5, 5]$ показан на рисунке 3.

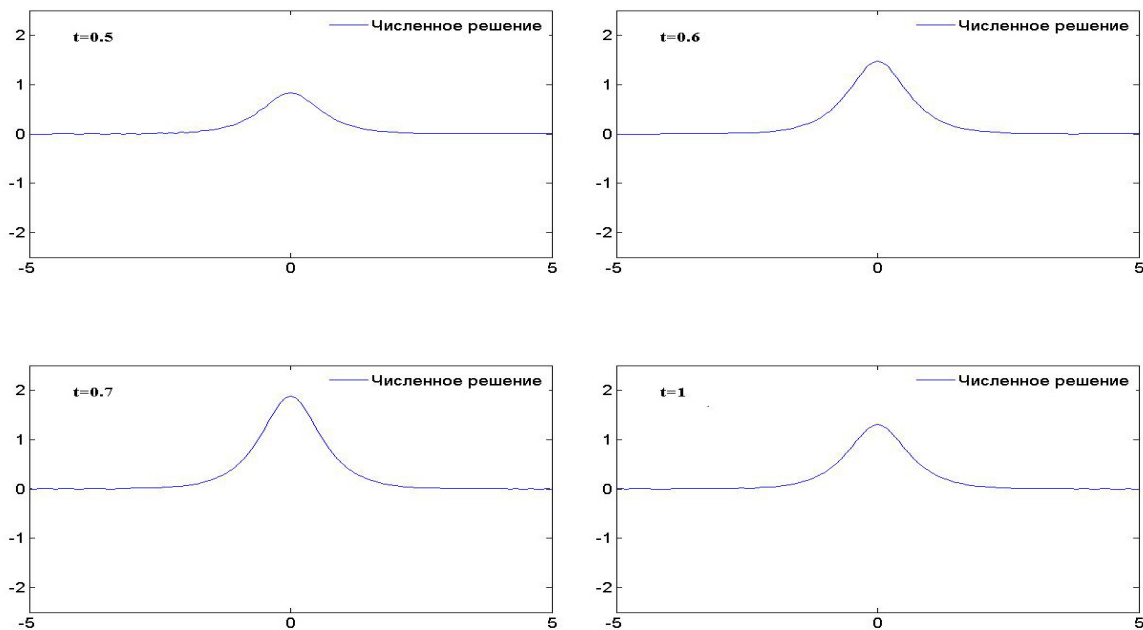
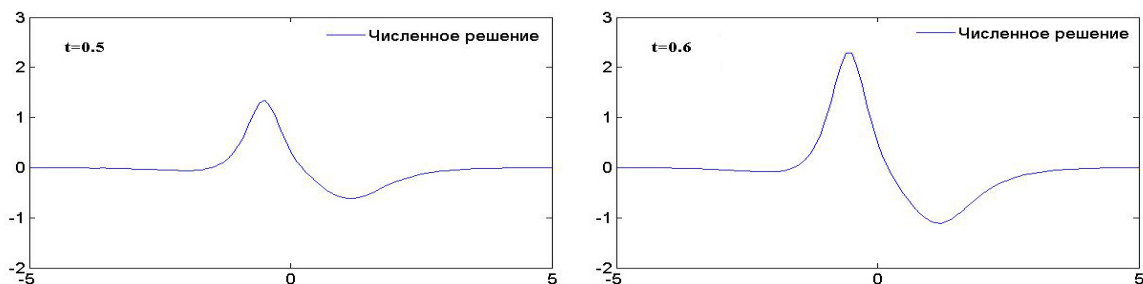


Рис. 3. Вещественный часть численного решения нелинейного уравнения Шредингера

Пусть $\left\{ r(\xi, t) = \frac{1}{1+\xi}, \xi_1(t) = i, \chi_0(t) = e^{-4it}, \chi_1(t) = (i + 2it)e^{-4it} \right\}$. Для этого случая на рисунке 4. приведен график соответствующий численному решению для исходных данных рассеяния в разных значениях времени ($t = 0.1, t = 0.5, t = 0.6, t = 1$) на отрезке $[-5, 5]$.



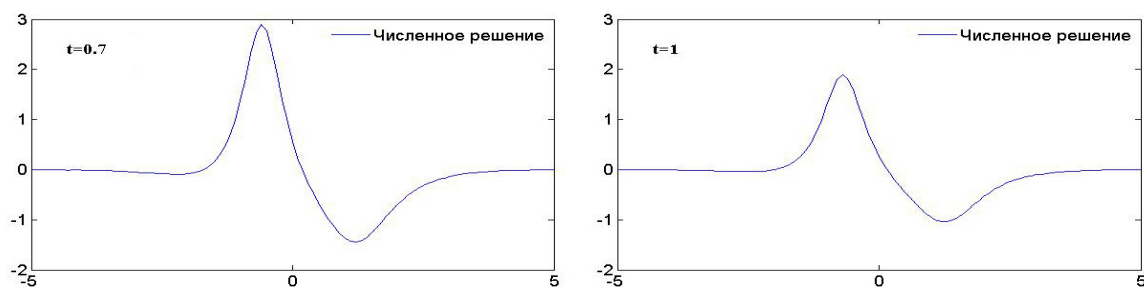


Рис. 4. Вещественный часть численного решения нелинейного уравнения Шредингера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был использован численный метод получения приближенного решения системы интегральных уравнений Марченко. Понятно, что для получения наилучших аппроксимирующих решений для данных систем, степень усечения N_x должна быть выбрана достаточно большой. Рассмотренные примеры иллюстрируют возможности и надежность рассмотренного в работе метода. Полученные предложенным методом решения имеют достаточно высокую точность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. HASEGAWA, A., MATSUMOTO and M., KATTAN, PI. (2000) *Optical Solitons in Fibers*. 3rd ed. New York: Springer-Verlag.
2. BRANDT-PEARCE, M., JACOBS, I., and Shaw, JK. (1999) Optimal input Gaussian pulse width for transmission in dispersive nonlinear fiber. *Journal of the Optical Society of America B*. 16. p. 1189–1196.
3. ТАНА, Т. R. and ABLOWITZ, M. J. (1984) Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations. II. Numerical, Nonlinear Schrodinger Equation. *Journal of Computational Physics*. 55. p. 203–230.
4. ZHANG, L. (2005) A High Accurate and Conservative Finite Difference Scheme for Nonlinear Schrodinger Equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*. 28. p. 178–186.
5. DUAN, A., and RONG, F. A. (2013) Numerical Scheme for Nonlinear Schrodinger Equation by MQ Quasi-Interpolatin. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 37. p. 89–94.

6. DAG, I. (1999) A Quadratic B-Spline Finite Element Method for Solving Nonlinear Schrodinger Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 174. p. 247–258.
7. DEHGHAN, M., and TALEEI, A. (2010) A Compact Split-Step Finite Difference Method for Solving the Nonlinear Schrodinger Equations with Constant and Variable Coefficients. *Computer Physics Communications*. 181. p. 43–51.
8. DEHGHAN, M. and TALEEI, A. A. (2011) Chebyshev Pseudospectral Multidomain Method for the Soliton Solution of Coupled Nonlinear Schrodinger Equations. *Computer Physics Communications*. 182. p. 2519–2519.
9. MOHAMMADI, R. (2014) An Exponential Spline Solution of Nonlinear Schrodinger Equations with Constant and Variable Coefficients. *Computer Physics Communications*. 185. p. 917–932.
10. LIN, B. (2013) Parametric Cubic Spline Method for the Solution of the Nonlinear Schrodinger Equation. *Computer Physics Communications*. 184. p. 60–65.
11. LIN, B. (2015) Septic Spline Function Method for the Solution of the Nonlinear Schrodinger Equation. *Applicable Analysis*. 94. p. 279–293.
12. ZAKHAROV, V. E. and SHABAT, A. B. (1971) Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *JETP 61, № 1*. 118–1-134. p. 62.
13. FADDEEV, L. D. and TAKHTAJAN, L. A. (2007) *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag Берлин Гейдельберг.
14. ABLOWITZ, M. J., KAUP, D. J., NEWELL, A. C. and SEGUR, H. (1974) The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math 53*. 4. p. 249–315.
15. LJANCE, V. E. (1964) A differential operator with spectral singularities, I. *Math col., 64(106)*. 4. p. 521–561.
16. LAM, D. L. (1984) *Introduction to Soliton Theory*. Moscow: Nauka.
17. BONIS, M. C. De and MASTROIANNI, G. (2009) Nystrom method for systems of integral equations on the real semiaxis. *Journal of Numerical Analysis*. 29. p. 632–650.
18. ARICÒ, A., RODRIGUEZ, G. and SEATZU, S. (2011) Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation, starting from the scattering data. *Calcolo*. (48). p. 75–88.

УДК: 517.584, 543.067.22, 537.533.9, 620.187, 51–73

MSC2010: 35G16, 33C10, 78A55

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ПРИ
МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ В ОДНОРОДНОМ
ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ

© Д. В. Туртин

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова

Ивановский филиал

Кафедра гуманитарных и естественнонаучных дисциплин

ул. Дзержинского, 53, Иваново, 153025, Российская Федерация

E-MAIL: turtin@mail.ru

© М. А. Степович*, В. В. Калманович**

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

Физико-технологический институт

Кафедра физики и математики

ул. Степана Разина, 26, Калуга, 248023, Российская Федерация

E-MAIL: *m.stepovich@rambler.ru, **v572264@yandex.ru

ON THE USE OF HANKEL TRANSFORMATION IN MATHEMATICAL MODELING OF
CATODOLUMINESCENCE IN A HOMOGENEOUS SEMICONDUCTOR MATERIAL.

Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V.

Abstract. The possibility of using the Hankel transform in solving the non-stationary differential heat and mass transfer equation and the subsequent description of the decrease in the intensity of linear radiative recombination of minority charge carriers (or excitons) generated by an electron probe in a homogeneous semiconductor target is considered. The mathematical model of unsteady diffusion in the problem under consideration (when the electron probe is turned off) is described using the partial differential equation

$$\frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, z, t) - \frac{c(x, y, z, t)}{\tau}$$

with initial condition

$$c(x, y, z, 0) = n(x, y, z).$$

Here $c(x, y, z, t)$ is the concentration of minority carriers (or excitons) at a point with coordinates (x, y, z) at time t , $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — Laplace operator and all the coefficients in the differential equation that characterize the semiconductor, are constant values. Function $n(x, y, z)$ satisfies the stationary differential equation, describing diffusion in the state of quasiequilibrium, with the electron probe turned on, when the number of minority charge carriers (or excitons)

generated and recombined in the semiconductor volume per unit time is constant and equal to each other:

$$\Delta n(x, y, z) - \frac{n(x, y, z)}{\lambda^2} = -\rho(x, y, z).$$

The boundary conditions for this equation have the form:

$$D \frac{\partial n(x, y, 0)}{\partial z} = v_s n(x, y, 0), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} n(x, y, z) = 0,$$

and the function $\rho(x, y, z)$ describes the concentration of carriers, generated in a semiconductor per unit time. Cathodoluminescence intensity for linear radiative recombination

$$I(t) \cong \iiint_P c(x, y, z, t) dV.$$

Here P is the region in which minority charge carriers or excitons are generated, the recombination of which gives cathodoluminescent radiation emerging from the semiconductor volume.

Received expression for $I(t)$, which is more convenient for practical implementation than previously used in this method. In general, the obtained results can be used in planning the experiment, conducting quantitative calculations and processing the results in electron-probe technologies.

Keywords: *mathematical model, non-stationary differential heat and mass transfer equation, partial derivatives, Cauchy problem, cathodoluminescence, Hankel transform.*

ВВЕДЕНИЕ

Одними из немногих методов, позволяющими реализовать бесконтактную неразрушающую диагностику твёрдых тел являются электроннозондовые методы, основанные на использовании остро сфокусированных пучков киловольтных электронов низких (примерно до 8–10 кэВ) и средних (от 8–10 до 50 кэВ) энергий [1]. В полупроводниковом материаловедении при проведении локальных исследований материалов с использованием сфокусированных пучков электронов наиболее часто в качестве информативного регистрируется сигнал, связанный с генерацией и диффузией в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) и/или регистрируются сигналы, характеристики которых существенно зависят от распределения ННЗ — например, катодоллюминесцентное (КЛ) излучение, возникающее при излучательной рекомбинации ННЗ, генерированных в полупроводниковой мишени

пучком киловольтных электронов [2, 3]. Регистрация информативных сигналов, возбуждаемых в полупроводниковой мишени и сравнение экспериментальных данных с математической моделью этого явления позволяют идентифицировать параметры полупроводника, которые весьма сложно или даже невозможно определить другими методами [4, 5]. При этом экспериментальное определение локальных характеристик мишени, облучаемой остро сфокусированным электронным пучком (электронным зондом), в области возбуждения локального сигнала сильно осложнено малым размером этой области (единицы микрометра и менее) [6, 7]. Поэтому особую ценность в практике электроннозондовых исследований приобретают расчетные оценки, характеризующие физические процессы, обусловленные взаимодействием электронного зонда с мишенью и их возможности для идентификации локальных параметров исследуемых объектов [8–11]. Однако математически корректное исследование математических моделей физических явлений, возникающих при взаимодействии электронных пучков с полупроводниковыми объектами и описываемых дифференциальными уравнениями тепломассопереноса с частными производными ранее практически не проводилось [12, 13]. Необходимость подобных математических исследований обусловлена также недостаточной изученностью физических явлений математическими методами: имеются лишь единичные публикации, посвящённые изучению корректности математических моделей, используемых в электроннозондовых технологиях. В частности, можно сказать, что ранее такая задача моделирования диффузии (и последующей излучательной рекомбинации с выходом КЛ излучения из полупроводника) для рассматриваемого процесса в определённой степени носила полуквалификационный характер. Она решалась только при использовании модели потерь энергии первичными низкоэнергетическими электронами в мишени в виде двумерного нормального распределения Гаусса [5, 12–14], что для широкого диапазона энергий электронов зонда (до 50 кэВ) является довольно грубым приближением, описывающим имеющиеся экспериментальные данные потерь энергии в конденсированном веществе во многом лишь качественно — см., например [9, 10]. Использование трёхмерной модели потерь энергии электронами зонда позволяет количественно лучше описать рассматриваемый процесс, а наличие осевой симметрии в задаче взаимодействия электронного зонда с твёрдым телом позволяет для проведения расчётов КЛ использовать преобразование Ханкеля (в некоторой русскоязычной литературе — Ганкеля) [15–18].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВРЕМЯПРОЛЁТНОЙ КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Одним из методов, позволяющих решить задачу идентификации параметров полупроводниковой мишени, является метод времяпролётной КЛ (см., например [4, 14, 19]), в основе количественной реализации которого лежит математическая модель диффузии и последующей излучательной рекомбинации неравновесных ННЗ или экситонов [20, 21].

Суть времяпролётных КЛ измерений состоит в следующем. На поверхность исследуемого полупроводника наносится маска, непроницаемая для КЛ излучения. В маске имеется круглое отверстие известного радиуса. КЛ излучение возбуждается в центре отверстия при помощи пульсирующего электронного пучка. При взаимодействии киловольтных электронов с полупроводниковой мишенью в последней генерируются неравновесные ННЗ (или экситоны), которые диффундируют в объёме полупроводника, после чего рекомбинируют с имеющимися в полупроводнике основными носителями заряда. Возникающее рекомбинационное излучение через отверстие в маске выходит из мишени и регистрируется в области спектра, характерной для рекомбинации генерированных частиц, например свободных экситонов в нитриде галлия — перспективном материале оптоэлектроники и СВЧ-техники — ранее для этого материала нами проведено рассмотрение двумерной модели диффузии ННЗ [12, 13, 22]. Интенсивность вышедшего из полупроводника КЛ излучения будет зависеть от диаметра отверстия в маске, т.к. часть излучения, обусловленного ННЗ, продиффундировавшими под маску и там рекомбинировавшими, дадут нулевой вклад в регистрируемую КЛ — здесь можно считать, что вследствие полного внутреннего отражения излучение из мишени выходит практически вертикально. После того, как в образце установится равновесие между процессами генерации и рекомбинации, возбуждение прекращается: электронный пучок отклоняется системой бланкирования на маску, на полупроводник электроны не попадают и КЛ излучение не возбуждается. Характер следующего за этим спада интенсивности КЛ зависит в общем случае только от известного радиуса отверстия и электрофизических параметров полупроводника: времени жизни ННЗ и коэффициента диффузии, характеризующих движение ННЗ под маску. Время действия электронного импульса во много раз больше времени установления стационарного процесса при включении или выключении электронного зонда, что даёт возможность описывать рассматриваемые процессы диффузии ННЗ следующим образом: на первом этапе (при сравнительно длительном облучении полупроводника электронным зондом) — как стационарный процесс, обусловленный генерацией и рекомбинацией ННЗ, при котором мощность, рассеиваемая электронным пучком в мишени, а, значит, и число генерируемых ННЗ

и интенсивность КЛ, есть величины постоянные, а на втором этапе, при выключении электронного зонда — как нестационарный процесс диффузии ННЗ, при котором происходит уменьшение их количества со временем (электронный пучок выключен и потому новые ННЗ не возникают) и, значит, происходит соответствующее уменьшение интенсивности КЛ. Это может позволить при наличии математической модели, описывающей рассматриваемое явление, на основе анализа экспериментальных данных получать оценки электрофизических параметров исследуемых полупроводниковых материалов, в общем случае путем решения соответствующей обратной задачи. Поскольку задача математического моделирования диффузии ННЗ и последующей КЛ в полупроводниковой мишени является трёхмерной и имеющей осевую симметрию, для расчётов КЛ будем использовать преобразование Ханкеля. Этот подход целесообразно применять, если решение операторного уравнения можно разложить по одной из функций Бесселя, что присутствует и в исследуемой задаче. Применяв данный метод к решению задачи о КЛ, получим решение рассматриваемой задачи в виде, удобном для дальнейшего исследования. Отметим, что традиционные подходы через преобразование Лапласа или применение метода Фурье дают более сложные формы для решения изучаемой задачи, что в дальнейшем затрудняет исследование функции, описывающей зависимость интенсивности КЛ от энергии электронов зонда и параметров полупроводниковой мишени. Этим и объясняется выбор преобразования Ханкеля при математическом моделировании КЛ, обусловленной остро сфокусированным электронным зондом в однородном полупроводниковом материале.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗУЧАЕМОГО ПРОЦЕССА

В общем случае при использовании остро сфокусированного электронного зонда реализуется трёхмерная диффузия неравновесных ННЗ. В этом случае математическая модель нестационарной диффузии ННЗ в рассматриваемой задаче (при выключении электронного зонда) описывается при помощи уравнения в частных производных

$$\frac{\partial c(x, y, z, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, z, t) - \frac{c(x, y, z, t)}{\tau} \quad (1)$$

с начальным условием

$$c(x, y, z, 0) = n(x, y, z). \quad (2)$$

Оси прямоугольной декартовой системы координат x и y лежат на плоской поверхности полубесконечного полупроводника, $x, y \in (-\infty, \infty)$, а ось z направлена вглубь полупроводника, $z \in [0, \infty)$; $c(x, y, z, t)$ — концентрация ННЗ в точке с координатами

(x, y, z) в момент времени t , а τ и D — время жизни и коэффициент диффузии ННЗ; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа. Функция $n(x, y, z)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия (при включённом электронном зонде, когда число ННЗ, генерируемых и рекомбинирующих в объёме полупроводника в единицу времени постоянно и равно друг другу):

$$\Delta n(x, y, z) - \frac{n(x, y, z)}{\lambda^2} = -\rho(x, y, z). \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (3) имеют вид:

$$D \frac{\partial n(x, y, 0)}{\partial z} = v_s n(x, y, 0), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} n(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} n(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина и v_s — скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно. Отметим, что при моделировании процесса диффузии в правой части уравнения (3) должна находиться функция $\rho(x, y, z)$, описывающая концентрацию ННЗ, генерированных в полупроводнике в единицу времени, что достигается делением энергии, выделяемой в единице объёма полупроводника в единицу времени, на энергию образования электронно-дырочной пары [20, 21].

Вопрос о существовании решения задачи (1)-(4) изучался в работе [23]. Построив функцию Грина, было найдено решение задачи (3)-(4), которое описывается формулой

$$n(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \rho(\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{\exp(-\chi R_0)}{4\pi R_0} + \frac{\exp(-\chi R_1)}{4\pi R_1} - \beta \int_{\zeta}^{+\infty} \frac{\exp\{\alpha(\zeta - s) - \chi\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}\}}{\sqrt{\rho^2 + (z+s)^2}} ds \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (5)$$

где $R_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $R_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$, $\chi = 1/\lambda$, $\alpha = v_s/D$, $\beta = \alpha/2\pi$, $\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$.

Используя [24], было получено решение задачи (1), (2):

$$c(x, y, z, t) = \frac{\exp(-\frac{t}{\tau})}{(2\sqrt{D\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} n(\xi, \eta, \zeta) \exp\left(-\frac{r^2(\xi, \eta, \zeta)}{4Dt}\right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (6)$$

$$r(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Следуя [24], в рассматриваемом случае область генерации ННЗ будем описывать наиболее простой моделью — функцией Гаусса $\rho(x, y, z) = G_0 \tau \phi(x, y, z) / \lambda^2$, где G_0 — частота пульсирующего электронного зонда (и равная ей частота генерации ННЗ), а $\phi(x, y, z)$ — плотность трёхмерного нормального распределения Гаусса. В дальнейшем будем считать, что $\rho(x, y, z) = c_2 \exp(-c_1(x^2 + y^2 + z^2))$, $c_1 = 1/2\sigma^2$, $c_2 = G_0 \tau / \lambda^2 (\sigma \sqrt{2\pi})^3$.

Далее запишем формулу для интенсивности КЛ без учёта поглощения излучения в объёме полупроводника. Такой подход используется для проведения количественных расчётов КЛ, возбуждаемой низкоэнергетичными электронами, при этом процессы потери энергии электронами пучка, генерации и излучательной рекомбинации генерированных электронным пучком неравновесных ННЗ реализуются в приповерхностной области полупроводниковой мишени [4, 5, 12, 13]. Такой подход может быть использован и для расчётов интенсивности КЛ длинноволнового участка спектра, где коэффициент поглощения весьма мал (часто менее 10 см^{-1}) и потому самопоглощением излучения в полупроводнике можно пренебречь [25, 26]. Используем очевидное и наиболее простое выражение, устанавливающее связь интенсивности КЛ с концентрацией ННЗ для случая линейной излучательной рекомбинации ННЗ [4, 5, 14]

$$I(t) \cong \iiint_P c(x, y, z, t) dV.$$

Здесь P — область, в которой генерируются ННЗ, рекомбинация которых даёт КЛ излучение, выходящее из объёма полупроводника. Для рассматриваемой задачи это прямой круговой цилиндр с радиусом основания R , одно основание которого лежит на облучаемой поверхности полупроводника, а второе находится на расстоянии, во много раз большем значения диффузионной длины ННЗ λ , т.е. практически на бесконечности.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ХАНКЕЛЯ

Преобразование Ханкеля функции $f(r)$ порядка ν даётся формулой [15–18]

$$F_\nu(k) = \int_0^{+\infty} f(r) J_\nu(kr) r dr,$$

где $J_\nu(kr)$ — функция Бесселя порядка ν и $\nu \geq -1/2$. Отсюда преобразование Ханкеля нулевого порядка определяется формулой

$$F_0(k) = \int_0^{+\infty} f(r) J_0(kr) r dr.$$

Обратным преобразованием Ханкеля функции $F_\nu(k)$ называют следующее выражение:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} F_\nu(k) J_\nu(kr) k dk.$$

Преобразование Ханкеля функции $f(r)$ верно для любых точек на интервале $(0, +\infty)$, в которых функция $f(r)$ непрерывна или кусочно-непрерывна с конечными скачками и интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(r)| r^{1/2} dr$$

конечен. Можно также расширить это определение подобно тому, как это делается для преобразования Фурье, включив в него некоторые функции, интеграл которых бесконечен (например, $f(r) = r$). В то же время, поскольку в моделируемой физической задаче при $x = 0$ все рассматриваемые функции имеют конечные значения, а на интервале $[0, +\infty)$, они непрерывные, более того, гладкие, преобразование Ханкеля будем рассматривать на интервале $[0, +\infty)$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ

Сделав в задаче (1)–(2) замену

$$c(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) v(x, y, z, t),$$

получим

$$\frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t} = D\Delta v(x, y, z, t), \quad (7)$$

$$v(x, y, z, 0) = n(x, y, z). \quad (8)$$

К уравнению (7) применим преобразование Ханкеля. Обозначим

$$\hat{V}(\eta, t) = \int_0^{+\infty} rV(r, t) J_0(\eta r) dr,$$

причём

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} \eta \hat{V}(\eta, t) J_0(\eta r) d\eta.$$

Здесь $J_0(\eta x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

В левой части уравнения (7) выражение $V_t(r, t)$ заменяется на $\hat{V}_t(\eta, t)$, а для правой части этого уравнения, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) J_0(\eta r) dr = \\ & = \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} J_0(\eta r) \right) \Big|_{r=0}^{r=+\infty} - \int_0^{+\infty} \eta r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = -\eta \int_0^{+\infty} r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} dr = \\ & = -\eta \left(V(r, t) r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}^{r=+\infty} + \eta \int_0^{+\infty} V \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) dr = \\ & = \eta \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} r \eta \right) V dr = \int_0^{+\infty} \left(\eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} \right) V dr. \end{aligned}$$

Для функции Бесселя $J_0(x)$ по определению имеем равенство

$$\eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} + \eta^2 J_0(\eta r) = 0,$$

откуда

$$\eta^2 r \frac{\partial^2 J_0(\eta r)}{\partial r^2} + \eta \frac{\partial J_0(\eta r)}{\partial r} = -r \eta^2 J_0(\eta r).$$

Значит

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \right) r J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \int_0^{+\infty} r V J_0(\eta r) dr = -\eta^2 \hat{V}(\eta, t).$$

Поэтому уравнение (7) переходит в уравнение вида

$$\frac{\partial \hat{V}(\eta, t)}{\partial t} + D \eta^2 \hat{V}(\eta, t) = 0. \quad (9)$$

Решив уравнение (9), получим $\hat{V}(\eta, t) = A(\eta) \exp(-D \eta^2 t)$, откуда

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) \exp(-D \eta^2 t) d\eta. \quad (10)$$

Здесь $B(\eta) = \eta A(\eta)$ — произвольная функция.

Учитывая начальное условие (8), из (10) имеем

$$\int_0^{+\infty} B(\eta) J_0(\eta r) d\eta = n(r). \quad (11)$$

Применив к (11) обратное преобразование Ханкеля, получим

$$B(\eta) = \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\eta\xi) \xi d\xi. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10) и учитывая, что $B(\eta) = \eta A(\eta)$, получим

$$V(r, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} n(\xi) J_0(\xi\eta) J_0(\eta r) \exp(-D\eta^2 t) \eta \xi d\eta d\xi. \quad (13)$$

С учётом соотношения

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\rho^2 x^2) J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx = \frac{1}{2\rho^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\rho^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right),$$

где $I_p(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка p [15–18, 27], выражение (13) можно переписать в виде

$$V(r, t) = \frac{1}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi.$$

Таким образом, решение $c(r, t)$ задачи Коши (1)–(2) имеет вид

$$c(r, t) = \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) \xi d\xi. \quad (14)$$

Формулу для интенсивности КЛ в полярных координатах для рассматриваемой задачи запишем в виде

$$I(t) = 2\pi \int_0^R c(r, t) r dr. \quad (15)$$

Подставив (14) в (15), получим

$$I(t) = \frac{\pi \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{Dt} \int_0^R \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) r \xi d\xi dr. \quad (16)$$

Исследуем некоторые свойства полученного выражения при $R \rightarrow \infty$, что отвечает однородному полубесконечному полупроводнику:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(t) = \frac{\pi \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{Dt} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2 + \xi^2}{4Dt}\right) I_0\left(\frac{r\xi}{2Dt}\right) n(\xi) r \xi d\xi dr. \quad (17)$$

Для вычисления интеграла в (17) применим формулу

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad (18)$$

где i — мнимая единица. Применив (18) к (17) для $n = 0$ и, воспользовавшись формулой

$$\int_0^{+\infty} \exp(-a^2 x^2) t^{\nu+1} J_\nu(bx) dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right),$$

получим

$$I(t) = 2\pi \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^{+\infty} n(\xi) \xi d\xi. \quad (19)$$

Выражение (19) совпадает с результатами расчёта интенсивности КЛ для однородного полубесконечного полупроводникового материала, полученными в [5, 14] для двумерной КЛ и результатами сравнения данных математического моделирования с экспериментальными данными [4] что также подтверждает справедливость выражения (16).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя преобразование Ханкеля, аналитически решена нестационарная задача тепломассопереноса, описывающая спад интенсивности катодолюминесценции в полубесконечном однородном полупроводниковом материале после выключения электронного зонда в методе времяпролётной катодолюминесценции. Полученное выражение для $I(t)$ удобнее для практической реализации, чем используемые ранее в этом методе. Эти результаты могут быть использованы при планировании эксперимента, проведении количественных вычислений и обработки полученных результатов в электроннозондовых технологиях при использовании электронов низких и средних энергий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Растровая электронная микроскопия для нанотехнологий. Методы и применение / Под ред. У. Жу и Ж. Л. Уанга. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 582 с.

- Ed. by Weili ZHOU and Zhong Lin WANG. (2006) *Scanning Microscopy for Nanotechnology. Techniques and Applications*. Springer Science+Business Media, LLC. 522 pp
2. YACOBI, B. G., HOLT, D. B. Cathodoluminescence microscopy of inorganic solids. — New York: Plenum Press, 1990. — 354 pp.
 3. Степович М.А. Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.04.07). — М.: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2003. — 351 с.
СТЕПОВИЧ, М. А. (2003) *Quantitative Cathodoluminescent Microscopy of Direct-Gap Materials of Semiconductor Optoelectronics. Thesis Dr. Phys.-Math. Sci.* Moscow: Bauman Moscow State Technical University. 351 pp. (in Russian)
 4. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Катодолюминесцентные экспериментальные исследования транспорта экситонов в нитриде галлия // Известия РАН. Серия физическая. — 2012. — Т. 76, № 9. — С. 1082–1085.
POLYAKOV, A. N., NOLTEMEYER, M., HEMPEL, T., CHRISTEN, J., STEPOVICH, M. A. (2012) Experimental Cathodoluminescence Studies of Exciton Transport in Gallium Nitride. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 76 (9). p. 970–973.
 5. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2012. — № 11. — С. 35–40.
POLYAKOV, A. N., NOLTEMEYER, M., HEMPEL, T., CHRISTEN, J., STEPOVICH, M. A. (2012) Two Dimensional Diffusion and Cathodoluminescence of Excitons Generated by Electron Beam in Semiconductors: Results of Mathematical Modelling. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 6 (6). p. 901–906.
 6. EVERHART, T. E. Kilovolt electron energy dissipation in solids // J. Appl. Phys. — 1960. — Vol. 31, No. 10. — Pp. 1483–1492.
 7. KANAYA, K., OKAYAMA, S. Penetration and energy-loss theory of electrons in solid targets // J. Phys. D. — 1972. — Vol. 5, No. 1. — Pp. 43–58.

8. Михеев Н.Н., Никоноров И.М., Петров В.И., Степович М.А. Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолюминесценции // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 274–280.
MIKHNEEV, N. N., NIKONOROV, I. M., PETROV, V. I., STEP OVICH, M. A. (1990) Determining the Electro–physical Parameters of Semiconductors in a Raster Electron Microscope by the Induced–Current and Cathodoluminescence Methods. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series.* 54 (2). p. 82–88.
9. Михеев Н.Н., Петров В.И., Степович М.А. Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии // Известия РАН. Серия физическая. — 1991. — Т. 55, № 8. — С. 1474–1482.
MIKHNEEV, N. N., PETROV, V. I., STEP OVICH, M. A. (1991) Quantitative Analysis of Semiconductor Optoelectronic Materials by Raster Electron Microscopy. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical Series.* 55 (8). p. 1–9.
10. Михеев Н.Н., Степович М.А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — Т. 62, № 4. — С. 20–25.
MIKHNEEV, N. N., STEP OVICH, M. A. (1996) Distribution of Energy Losses in Interaction of an Electron Probe with Material. *Industrial Laboratory.* 62 (4). p. 221–226.
11. STEP OVICH, M. A., AMRASTANOV, A. N., SEREGINA, E. V., and FILIPPOV, M. N. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface // Journal of Physics: Conf. Series. — 2018. — Vol. 955. — 012040 (6 pp.).
12. POLYAKOV, A. N., SMIRNOVA, A. N., STEP OVICH, M. A., TUR TIN, D. V. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, No. 2. — Pp. 259–262.
13. STEP OVICH, M. A., TUR TIN, D. V., SEREGINA, E. V., and POLYAKOV, A. N. On the qualitative characteristics of a two–dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low–energy electron beam in a homogeneous semiconductor material // Journal of Physics: Conf. Series. — 2019. — Vol. 1203. — 012095 (8 pp.).

14. Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолюминесценции экситонов // Прикладная физика. — 2012. — № 6. — С. 41–46.
POLYAKOV, A. N., NOLTEMEYER, M., HEMPEL, T., CHRISTEN, J., STEPOVICH, M. A. (2012) Estimation of values of electrophysical parameters of semiconductor materials by results of measurements of excitons cathodoluminescence. *Prikladnaya Fizika/Applied Physics*. (6). p. 41–46.
15. Тихонов, А. Н., Самарский, А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1972. — 736 с.
TIKHONOV, A. N., SAMARSKY, A. A. (1990) *Equations of mathematical physics*. Dover Publications, Inc. 784 pp.
16. Корн, Г., Корн, Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1974. — 832 с.
KORN, Granino A., KORN, Theresa M. (1968) *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. 2nd, Enlarged and Revised Edition*. New York: McGraw–Hill Book Company. 1130 pp.
17. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их разложения. 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1963. — 359 с.
LEBEDEV, N. N. (1963) *Special functions and their decompositions. 2nd Edition*. Moscow: Uchpedgiz. 359 pp. (in Russian)
18. Прудников, А. П., Брычков, Ю. А., Маричев, О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1983. — 752 с.
PRUDNIKOV, A. P., BRYCHKOV, Yu. A., MARICHEV, A. I. (1983) *Integrals and series. Special features*. Moscow: Science. The main Edition of the Phys.-Math. Literature. 752 pp. (in Russian)
19. NOLTEMEYER, M., BERTRAM, F., HEMPEL, T., BASTEK, B., POLYAKOV, A., CHRISTEN, J., BRANDT, M., LORENZ, M., GRUNDMANN, M. Excitonic transport in ZnO // *J. Mater. Research*. — 2012. — Vol. 27, Issue 17. — Pp. 2225–2231.
20. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках. — М.: Мир, 1973. — 384 с.

- PANKOVE, J. I. (2010) *Optical Processes in Semiconductors*. Dover Publications; 2nd revised ed. 448 pp.
21. Бонч–Бруевич, В. Л., Калашников, С. Г. Физика полупроводников: Учебн. пособие для вузов. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1990. — 685 с.
- BONCH–BRUEVICH, V. L., and KALASHNIKOV, S. G. (1990) *The Physics of Semiconductors*. Moscow: Nauka. 685 pp. (in Russian)
22. Степович М.А., Туртин Д.В., Серегина Е.В., Поляков А.Н. О качественных характеристиках двумерной математической модели диффузии неосновных носителей заряда, генерированных низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов международной научной конференции (17–19 декабря 2018 г., г. Воронеж, Воронежский государственный университет). — Воронеж: Научно–исследовательские публикации, 2019. — С. 127–133.
- СТЕПОВИЧ, М. А., ТУРТИН, Д. В., СЕРЕГИНА, Е. В., ПОЛЯКОВ, А. Н. (2019) *On the qualitative characteristics of the two-dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low-energy electron probe in a homogeneous semiconductor material*. Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference (Voronezh, 2018, Voronezh State university). — Voronezh: Research publications. p. 127–133 (in Russian)
23. Поляков А.Н., Степович М.А., Туртин Д.В. Математическое моделирование катодоллюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале // Известия РАН. Серия физическая. — 2016. — Т. 80, № 12. — С. 1629–1633.
- POLYAKOV, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2016) Mathematical modeling of the cathodoluminescence of excitons generated by a narrow electron beam in a semiconductor material. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 80 (12). p. 1436–1440.
24. Поляков А.Н., Степович М.А., Туртин Д.В. Трехмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2015. — № 12. — С. 48–52.

-
- POLYAKOV, A. N., STEPOVICH, M. A., TURTIN, D. V. (2015) Three-Dimensional Diffusion of Excitons Generated by an Electron Beam in a Semiconductor Material: Results of Mathematical Modeling. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 9 (5). p. 1251–1255.
25. WITTRY, D. B., KYSER, D. F. Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation // *J. Appl. Phys.* — 1967. — Vol. 38, No. 1. — Pp. 375–382.
26. RAO-SAHIB, T. S., WITTRY, D.B. Measurements of diffusion lengths in *p*-type gallium arsenide by electron beam excitation // *J. Appl. Phys.* — 1969. — Vol. 40, No. 9. — Pp. 3745–3750.
27. Владимиров, В. С., Жаринов, В. В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов, 2-е изд., стереотип. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.
- VLADIMIROV, V. S., ZHARINOV, V. V. (2004) *Equations of mathematical physics: a textbook for universities. 2nd edition*. Moscow: Fizmatlit. 400 pp. (in Russian)

Shchukin M. V. On 3-homogeneous C^* -algebras over two-dimensional oriented manifolds / M. V. Shchukin // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 11–18.

УДК: 517.9

В работе исследуются 3-однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому многообразию. Используется геометрическая интерпретация такой алгебры как алгебры непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения. Используя эту реализацию, доказывается, что такая 3-однородная C^* -алгебра может быть порождена тремя идемпотентами. Доказывается также, что такая алгебра не может быть порождена двумя идемпотентами.

Ключевые слова: Алгебраическое расслоение, n -однородная C^* -алгебра, неприводимое представление, идемпотент, конечно-порожденная алгебра.

Voytitsky V. I. On hyper-sums and hyper-products of progressions / V. I. Voytitsky // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 19–31.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

В статье исследуются свойства последовательностей чисел (так называемых “гиперсумм” и “гиперпроизведений”), которые можно построить на основе данной числовой последовательности. Мы рассматриваем такие последовательности для арифметических, геометрических прогрессий и чисел Фибоначчи. Получены явные формулы для n -того члена, изучены задачи асимптотического поведения. В качестве основного результата доказана новая асимптотическая формула для гиперпроизведения арифметической прогрессии, обобщающую формулу Стирлинга и асимптотику суперфакториала.

Ключевые слова: ключевые слова: числовая последовательность, гиперсуммы, гиперпроизведения, асимптотика, обобщенная формула Стирлинга, суперфакториал.

Донской В. И. Интеллектуальная оптимизация на основе машинного обучения: современное состояние и перспективы (обзор) / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 32 – 63.

УДК: 004.855.5+519.852

Данный обзор посвящен следующей проблеме: необходимо, наблюдая за поведением объекта, автоматически выявить стратегию, позволяющую улучшить (оптимизировать) качество его функционирования. Другими словами, восстановить целевую функцию (набор целевых функций) и ограничения; иначе говоря, синтезировать математическую модель оптимизации с помощью машинного обучения.

В обзоре представлены основные разработанные на сегодняшний день методы и алгоритмы, позволяющие автоматически строить математические модели объектов планирования и управления с использованием массивов прецедентов, предположительно являющихся достоверной информацией, что позволяет получать объективные модели управления, отражающие реальные процессы. В этом состоит главное преимущество изложенных в обзоре методов по сравнению с традиционным, субъективным подходом к построению моделей планирования и управления.

Ключевые слова: машинное обучение, оптимизационные модели, неполные данные, искусственный интеллект, нейронные сети.

Марянин Б. Д., Смолич В. П. Гладкие меры на многообразиях с римановой структурой / Б. Д. Марянин, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 64 – 79.

УДК: 519.58+517.22+517.91

Статья посвящена актуальному и активно развивающемуся в настоящее время направлению развития анализа гладких мер на гладких бесконечномерных многообразиях. Важность этого направления диктуется обширной областью его приложений, включающих в себя бесконечномерный анализ и ряд разделов математической физики систем с бесконечным числом степеней свободы.

В бесконечномерном анализе ввиду отсутствия стандартной меры типа меры Лебега

пространства мер играют ту же роль, что и пространства функций. Поэтому в каждом из таких пространств независимым образом должно быть построено дифференциальное исчисление. При этом двойственным объектом к гладким мерам являются обобщённые функции, а к гладким функциям — обобщённые меры.

Дифференциальное исчисление мер в линейных пространствах получило свое развитие в работах С. В. Фомина, А. В. Авербуха, О. Г. Смолянова, а также в работах А. В. Скорохода. Но во всех этих работах рассматривалась дифференцирование мер по постоянным направлениям. Поэтому необходимо рассмотреть понятие производной меры вдоль векторного поля, имеющее смысл и в линейном пространстве, и на гладком многообразии.

Устанавливается инвариантность производной меры вдоль векторного поля относительно гладких преобразований и устойчивость логарифмической производной меры относительно гладких обратимых отображений. При этом производная меры вдоль конечного набора векторных полей оказывается симметричной относительно векторных полей. Соответствующие конструкции приводят к обобщению на негауссов случай формул интегрирования по частям, лежащих в основе построения расширенных стохастических интегралов.

Рассматриваются ковариантные дифференциальные операции на многообразиях со структурой Гильберта–Шмидта. Моделью такого многообразия является банахово оснащение вещественного сепарабельного гильбертова пространства. Формулы интегрирования по частям для таких многообразий тесно связаны с дифференциально-геометрическими характеристиками многообразия, они содержат тензор Риччи многообразия.

Ключевые слова: гладкая мера, распределение, дифференцирование меры, производная меры вдоль векторного поля, логарифмическая производная меры.

Рейимберганов А. А., Рахимов И. Д. Численно-аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера / А. А. Рейимберганов, И. Д. Рахимов // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 80–91.

УДК: 517.946

Основной целью данной работы является исследование численных решений фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Начальная задача для НУШ

решается численно с использованием метода обратного преобразования рассеяния, когда начальная функция обладает достаточно гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$.

Известно, что метод обратного преобразования рассеяния для решения начальной задачи для НУШ основан на спектральном анализе системы Захарова–Шабата. Обратная задача рассеяния для системы Захарова–Шабата сводится к системе двух интегральных уравнений, так называемой системе интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко (Марченко).

Здесь использовано численный метод для получения приближенных решений системы интегральных уравнений Марченко в тех случаях, когда соответствующая система Захарова–Шабата имеет простые и кратные собственные значения.

Ключевые слова: *Нелинейные уравнения Шредингера, обратные задачи рассеяния, численные методы, интегральные уравнения.*

Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В. Об использовании преобразования Ханкеля при математическом моделировании катодоллюминесценции в однородном полупроводниковом материале / Д. В. Туртин, М. А. Степович, В. В. Калманович // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 92–107.

УДК: 517.584, 543.067.22, 537.533.9, 620.187, 51–73

Показана возможность использования преобразования Ханкеля при решении нестационарного дифференциального уравнения тепломассопереноса и последующего описания спада интенсивности излучательной рекомбинации неравновесных неосновных носителей заряда (или экситонов), генерированных электронным зондом в однородной полупроводниковой мишени.

Математическая модель рассматриваемого явления описывается уравнениями в частных производных. Сначала рассматривается модель стационарного облучения полупроводниковой мишени электронами и находится распределение генерированных неравновесных носителей в объеме полупроводника, затем решается нестационарное дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации носителей после прекращения облучения. Для описания интенсивности катодоллюминесцентного излучения используется модель линейной излучательной рекомбинации,

согласно которой интенсивность считается пропорциональной количеству неравновесных носителей. Полученное выражение удобнее для практической реализации, чем используемые ранее в методе времяпролётной катодолюминесценции. В целом полученные результаты могут быть использованы при планировании эксперимента, проведении количественных вычислений и обработки полученных результатов в электроннозондовых технологиях.

Ключевые слова: математическая модель, нестационарное дифференциальное уравнение теплопереноса, частные производные, задача Коши, катодолюминесценция, преобразование Ханкеля..

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Донской Владимир
Иосифович*

д. ф.-м. н, заведующий кафедрой информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: vidonskoy@mail.ru

*Калманович Вероника
Валерьевна*

старший преподаватель Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, РФ
e-mail: v572264@yandex.ru

*Марянин Борис
Давыдович*

к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета, г. Симферополь, РФ
e-mail: maryaninbd@mail.ru

*Смолич Владимир
Павлович*

к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета, г. Симферополь, РФ
e-mail: svp54@mail.ru

*Рахимов Илхом
Давронбекович*

PhD студент кафедры прикладная математика и математическая физика, физика и математического факультета Ургенчского государственного университета, г.Ургенч, Республики Узбекистан
e-mail: ilxom@urdu.uz

*Рейимбергенов Анвар
Акназарович*

к. ф.-м. н, доцент кафедры прикладная математика и математическая физика, физика и математического факультета Ургенчского государственного университета, г.Ургенч, Республики Узбекистан
e-mail: anvar@urdu.uz

*Степович Михаил
Адольфович*

д. ф.-м. н, профессор, профессор Калужского государственного университета им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, РФ
e-mail: m.stepovich@rambler.ru

*Туртин Дмитрий
Витальевич*

к. ф.-м. н, доцент Ивановского филиала Российско-
го экономического университета им. Г. В. Плеханова,
г. Иваново, РФ
e-mail: turtin@mail.ru

*Щукин Михаил
Владимирович*

к. ф.-м. н, доцент кафедры высшей математики Бе-
лорусского национального технического университета,
г. Минск, Республика Беларусь
e-mail: mvs777777@gmail.com

Подписано к печати 3.6.2020. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7