

# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 4 (45) ' 2019

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

T AURIDA  
J OURNAL OF  
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
M ATHEMATICS

2019, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

**ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ**

<b>В. И. ДОНСКОЙ</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ</b>	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. М. ГУПАЛ</b>	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
<b>Ю. И. ЖУРАВЛЕВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. Н. КАРАПЕТАНЦ</b>	доцент, доктор физико-математических наук
<b>В. В. КРАСНОПРОШИН</b>	профессор, доктор технических наук
<b>М. А. МУРАТОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>К. В. РУДАКОВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. А. САПОЖЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. В. СТАРОСТЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. Н. ЧЕХОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:**

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)  
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)  
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала  
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42  
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466  
e-mail (гл. редактор): vidonskoy@mail.ru  
e-mail (для переписки): article@tvim.info  
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи  
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

#### EDITORIAL BOARD

<b>Vladimir DONSKOY</b>	<b>Editor-in-Chief</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Nikolay KOPACHEVSKY</b>	<b>Vice Chief Editor</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Anatoly GUPAL</b>	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Yuri ZHURAVLEV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexey KARAPETYANTS</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor KRASNOPROSHIN</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Mustafa MURATOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Olexander NAKONECHNY</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Konstantin RUDAKOV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexander SAPOJENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir STAROSTENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Valery CHEKHOV 1</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

#### SECRETARIAT

<b>Ayder ANAFIYEV</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor VOYTITSKY</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir BLYSCHIK</b>	<b>The Editor of the Cite</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Margarita KOZLOVA</b>	<b>Scientific Secretary of the Journal</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

#### OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE:** [www.tvim.info](http://www.tvim.info)

#### FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel.** +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

**Email:** [vidonskoy@mail.ru](mailto:vidonskoy@mail.ru) — editor-in-chief

[article@tvim.info](mailto:article@tvim.info) — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

#### THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Андреищева Е. Н.</b> Задача о факторизации рациональных матричных функций для случая обобщённого класса Неванлинны .....	7
<b>Гуров С. И., Жуков А. Е., Закаблуков Д. В., Кормаков Г. В.</b> Обратимые вычисления. Часть II .....	27
<b>Зайцева И. В.</b> Моделирование оптимального распределения трудовых ресурсов .....	59
<b>Струков В. Е., Струкова И. И.</b> О теореме Винера в исследовании периодических на бесконечности функций относительно подпространств исчезающих на бесконечности функций .....	78
<b>Третьяков Д. В.</b> Об общем подходе к построению $J$ -самосопряженной дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек ...	92
Рефераты .....	107
Список авторов номера .....	110

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Andreishcheva E. N.</b> The Problem of Factorization of Rational Matrix Functions for the Case of a Generalized Nevanlinna Class.....	7
<b>Gurov S. I., Zhukov A. E., Zakablukov D. V., Kormakov G. V.</b> Reversible Calculations. Part II .....	27
<b>Zaitseva I. V.</b> Modeling of the Optimal Allocation of Labor Resources .....	59
<b>Strukov V. E., Strukova I. I.</b> On Wiener Theorem in Studying Periodic at Infinity Functions with Respect to Subspaces of Vanishing at Infinity Functions	78
<b>Tretyakov D. V.</b> On Common Approach to the Construction of J-selfadjoint Dilation for a Linear Operator with a Nonempty Set of Regular Points .....	92
Abstracts.....	107
Authors .....	110

УДК: 517.58

MSC2010: 47A58

## ЗАДАЧА О ФАКТОРИЗАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОБОБЩЕННОГО КЛАССА НЕВАНЛИННЫ

© Е. Н. Андреищева

ЧЕРНОМОРСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЕННО-МОРСКОЕ УЧИЛИЩЕ ИМ. П. С. НАХИМОВА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЛ. ПАРКОВАЯ, 6, СЕВАСТОПОЛЬ, 299057, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [anda\\_el@mail.ru](mailto:anda_el@mail.ru)

### THE PROBLEM OF FACTORIZATION OF RATIONAL MATRIX FUNCTIONS FOR THE CASE OF A GENERALIZED NEVANLINNA CLASS.

Andreishcheva E. N.

**Abstract.** In the present paper, we consider  $z_1$  as a fixed point in the open upper half plane  $\mathbb{C}^+$ . We study rational  $2 \times 2$ - matrix functions  $\Theta(z)$  which have a pole only in the point  $z_1^*$ . Their entries are polynomials in  $1/(z - z_1^*)$ , and which are  $J_\ell$ -unitary, that is, satisfy on the real line:

$$\Theta(z)J_\ell\Theta(z)^* = J_\ell, \quad z \in \mathbb{R}, \quad J_\ell := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The main results are the existence and essential uniqueness of a minimal factorization of such a matrix function into elementary factors which have the same properties, and the analytic description of the elementary factors, see theorems 4 and 5. The assumption (1) on  $\Theta(z)$  does not imply that  $\Theta(z)$  is  $J_\ell$ -inner, which would mean that the kernel

$$K_\Theta(z, w) = \frac{J_\ell - \Theta(z)J_\ell\Theta(w)^*}{2\pi(z - w^*)}$$

is positive. However, due to our assumption that  $\Theta(z)$  is a polynomial in  $1/(z - z_1^*)$  this kernel has a finite number of negative (and positive) squares. This indefinite setting implies that the elementary factors can become more complicated than in the positive definite case, see formula (22).

The results of the present paper can be viewed as analogs of the results obtained in [1]. There the extension of the classical Schur transformation to generalized Schur functions as defined and studied for example, in the papers [3], [4], [5] and [6], played an important role.

In this paper, we use a corresponding for Nevanlinna functions and generalized Nevanlinna functions, which we also call Schur transformation and which to our knowledge, appears here for the first time. The factorization result of this paper is also an analog of the factorization for  $J_\ell$ -unitary  $2 \times 2$  matrix polynomials, which was proved in [1], and which corresponds to the case that  $z_1 = \infty$ ; there the role of the Schur transformation was played by a generalization of

a lemma of N. I. Akhiezer for Nevanlinna functions to generalized Nevanlinna functions which tend to zero if  $z_1 = \infty$  along the imaginary axis. A corresponding result for a real point  $z_1$  will be considered elsewhere; it is the analog to the case of rational matrix function with a pole on the unit circle which is  $J_\ell$ -unitary outside the pole, where

$$J_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Similar to [1], [3], and [5], the main tool for proving the factorization in the present paper is a result on finite-dimensional reproducing kernel Pontryagin spaces  $\mathcal{P}(\Theta)$  with reproducing kernel (2) see theorem 2. It states that for a rational  $J_\ell$ -unitary  $2 \times 2$  matrix function  $\Theta(z)$  with a single-pole this space consists of exactly one Jordan chain of the difference-quotient or backward-shift operator

$$R_0 \mathbf{f}(z) = \frac{\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(0)}{z}, \quad \mathbf{f}(z) \in \mathcal{P}(\Theta).$$

Theorem 2 is obtained from more general factorization and realization results from [9], [5] and [10], see Theorem 1. Note that  $\mathcal{P}(\Theta)$  is the state space for an underlying minimal realization of  $\Theta(z)$ , which is given in formula (12).

**Keywords:** *indefinite metrics, Nevanlinna function, Pontryagin space, Schur transformation, reproducing kernel, factorization of rational matrix function.*

## ВВЕДЕНИЕ

В данной статье  $z_1$  — фиксированная точка в открытой верхней полуплоскости  $\mathbb{C}^+$ . Мы рассматриваем рациональные  $2 \times 2$ -матричные функции  $\Theta(z)$ , имеющие полюс только в точке  $z_1^*$  так, что их элементы — полиномы по  $1/(z - z_1^*)$ , и являющиеся  $J_\ell$ -унитарными, удовлетворяющие на вещественной прямой:

$$\Theta(z)J_\ell\Theta(z)^* = J_\ell, \quad z \in \mathbb{R}, \quad J_\ell := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Основными результатами являются существование и единственность минимального разложения таких матричных функций на элементарные множители, имеющие такие же свойства, и аналитическое описание элементарных множителей (см. теоремы 4 и 5).

Представление (1) для  $\Theta(z)$  не подразумевает, что  $\Theta(z)$  является  $J_\ell$ -внутренней, что означало бы, что ядро

$$K_\Theta(z, w) = \frac{J_\ell - \Theta(z)J_\ell\Theta(w)^*}{2\pi(z - w^*)} \quad (2)$$



положительно. Однако, благодаря предположению, что  $\Theta(z)$  — полином по  $1/(z - z_1^*)$ , это ядро имеет конечное число отрицательных (и положительных) квадратов. Эта индефинитность подразумевает, что элементарные множители могут стать более сложными, чем в положительном определенном случае (см. (22)).

Результаты данной статьи являются аналогом результатов, полученных в [1]. В упомянутой работе рассматривается расширение классического преобразования Шура обобщенных функций Шура, определенных и изученных, например, в [3], [4], [5] и [6] и играющих важную роль. В данной статье используется соответствующее преобразование для обобщенных функций Неванлинны, которое мы также называем преобразование Шура.

Предлагаемое в данной работе разложение также является аналогом разложения для  $J_\ell$ -унитарных  $2 \times 2$ -матричных полиномов, доказанного в [1] и соответствующего случаю  $z_1 = \infty$ ; здесь роль преобразования Шура играло обобщение леммы Ахиезера Н.И. (или первого шага разложения в непрерывную дробь) для функций Неванлинны применительно к обобщенным функциям Неванлинны, стремящимся к нулю при  $z \rightarrow \infty$  вдоль мнимой оси. Аналог случая для рациональной матричной функции с полюсом на единичной окружности, являющейся  $J_c$ -унитарной вне полюса, где

$$J_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

исследуется в [5]. Подобно [1], [3] и [5], основным инструментом для доказательства разложения в настоящей статье является результат в пространствах Понтрягина  $\mathcal{P}(\Theta)$  с конечномерным воспроизводящим ядром (2) (см. теорему 2). В теореме 2 утверждается, что для  $J_\ell$ -унитарной  $2 \times 2$ -матричной функции  $\Theta(z)$  с единственным полюсом это пространство состоит ровно из одной цепочки Жордана для оператора разделенной разности

$$R_0 \mathbf{f}(z) = \frac{\mathbf{f}(z) - \mathbf{f}(0)}{z}, \quad \mathbf{f}(z) \in \mathcal{P}(\Theta). \quad (3)$$

В теореме 2 получено более общее разложение и результаты реализации, чем в [9], [5] и [10] (см. теорему 1 и замечания к ней). Обратите внимание, что  $\mathcal{P}(\Theta)$  является пространством состояний для основного минимального разложения  $\Theta(z)$ , данного в формуле (12).

Напомним некоторые определения, используемые ранее, которые будут применяться в дальнейшем. Функция  $N(z)$  называется *обобщенной функцией Неванлинны*

с  $\kappa$  отрицательными квадратами, если она мероморфна в  $\mathbb{C}^+$  и ядро

$$L_N(z, w) = \frac{N(z) - N(w)^*}{z - w^*} \left( = \frac{(1 - N(z))J_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ -N(w)^* \end{pmatrix}}{z - w^*} \right) \quad (4)$$

имеет  $\kappa$  неотрицательных квадратов в  $\text{hol}_+(N)$  — области голоморфизма  $N(z)$  в  $\mathbb{C}^+$ . Обозначим этот класс функций  $\mathbf{N}_\kappa$ .

Часто область определения  $N(z)$  расширяется на открытую нижнюю полуплоскость  $\mathbb{C}^-$ , полагая  $N(z^*) = N(z)^*$  для  $z \in \text{hol}_+(N)$  по голоморфности в тех точках вещественной оси, где это возможно. Область голоморфности расширенной функции будет обозначаться  $\text{hol}(N)$ . Ядро  $L_N(z, w)$ , рассматриваемое в  $\text{hol}(N)$ , по-прежнему имеет  $\kappa$  отрицательных квадратов (см. [12]). При  $\kappa = 0$  класс  $\mathbf{N}_0$  состоит из всех функций Неванлинны. Это функции  $N(z)$ , которые являются голоморфными в  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  так, что  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \text{hol}(N)$  и соблюдается условие  $N(z^*)^* = N(z)$  и  $\text{Im } N(z)/\text{Im } z \geq 0$  в этом множестве.

Мы расширяем класс  $\mathbf{N}_0$ , добавляя к нему функцию, тождественно равную  $\infty$ . Расширенный класс также обозначается  $\mathbf{N}_0$ , и мы полагаем  $\mathbf{N} = \cup_{\kappa \geq 0} \mathbf{N}_\kappa$ . Как  $\mathbf{N}_\kappa^{z_1}$  мы обозначим класс функций из  $\mathbf{N}_\kappa$ , которые голоморфны в  $z_1$ . Наконец, обозначим  $\mathbf{N}^{z_1} = \cup_{\kappa \geq 0} \mathbf{N}_\kappa^{z_1}$ . По-прежнему константа  $\infty$  рассматривается как элемент  $\mathbf{N}^{z_1}$ . Функцию  $f(z)$ , определенную на подмножестве из  $\mathbb{C}$ , симметричном относительно вещественной оси, мы будем называть *вещественной*, если  $f(z^*) = f(z)^*$ . Таким образом, функции Неванлинны являются вещественными, и полином по  $z$  является вещественным тогда и только тогда, когда его коэффициенты вещественны.

Напомним, что функция  $s(z)$  называется *функцией Шура*, если она определена и голоморфна в открытом единичном диске  $\mathbb{D}$  и удовлетворяет условию  $|s(z)| \leq 1$  для  $z \in \mathbb{D}$ . Если  $s(z)$  по модулю не равна единичной константе, то ее *преобразование Шура*  $\hat{s}(z)$  определяется посредством

$$\hat{s}(z) = \frac{1 - s(z)s(0)^*}{z - s(z)s(0)^*} \quad (5)$$

и также является функцией Шура. Функция  $s(z)$  называется *обобщенной функцией Шура с  $\kappa$  отрицательными квадратами*, если она мероморфна в  $\mathbb{D}$ , и ядро

$$K_s(z, w) = \frac{1 - s(z)s(w)^*}{1 - zw^*}, \quad z, w \in \text{hol}(s),$$

имеет  $\kappa$  отрицательных квадратов. Расширение преобразования Шура (5) для обобщенных функций Шура описано в [1], [9] и [13].

Матричная функция  $2 \times 2$

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \quad (6)$$

определяет дробное линейное преобразование  $\mathcal{T}_{\Theta(z)}$  на множестве комплексных функций  $N(z)$  соотношением

$$\mathcal{T}_{\Theta(z)}(N(z)) = \frac{a(z)N(z) + b(z)}{c(z)N(z) + d(z)}. \quad (7)$$

Оно обладает свойствами  $\mathcal{T}_{\Theta_1(z)\Theta_2(z)}(N(z)) = \mathcal{T}_{\Theta_1(z)}(\mathcal{T}_{\Theta_2(z)}(N(z)))$  так, что если определена  $\Theta(z)^{-1}$ , то

$$\mathcal{T}_{\Theta(z)^{-1}}(N(z)) = \mathcal{T}_{\Theta(z)}^{-1}(N(z)).$$

Связь между преобразованием Шура и разложением  $2 \times 2$ -матричных функций основана на том факте, что, по аналогии с преобразованием Шура (5) для обобщенных функций Неванлинны, матричные функции  $\Theta(z)$ , соответствующие обратному преобразованию Шура, являются элементарными  $J_\ell$ -унитарными множителями. Следовательно, минимальное разложение данной рациональной  $J_\ell$ -унитарной  $2 \times 2$ -матричной функции  $\Theta(z)$  может быть получено путем многократного применения преобразования Шура, что мы называем алгоритмом Шура.

В следующем разделе для данной функции  $N(z) \in \mathbf{N}^{z_1}$  мы введем два дробных линейных преобразования  $\widehat{N}_S(z)$ ,  $\widehat{N}(z)$ , связанные простым соотношением  $\widehat{N}_S(z) = -\widehat{N}(z)^{-1}$ .  $\widehat{N}_S(z)$  формально подобно классическому преобразованию Шура (5), однако  $\widehat{N}(z)$  для наших целей оказывается более подходящим. Поэтому в данной статье мы называем  $\widehat{N}(z)$  *преобразованием Шура для обобщенных функций Неванлинны*.

В статье вводится и изучается пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром  $L_N(z, w)$  из (4) для заданной функции  $N(z) \in \mathbf{N}$ . Раздел 1 связан с пространством  $\mathcal{P}(\Theta)$  с воспроизводящим ядром, порожденным рациональной  $J_\ell$ -унитарной  $2 \times 2$ -матричной функцией  $\Theta(z)$ . Если эта функция имеет единственный полюс  $z_1^*$ , то структура этого пространства достаточно проста (см. теорему 2).

Из обоснования определения преобразования Шура для обобщенных функций Неванлинны, в простейшем случае  $\text{Im } \nu_0 > 0$  может быть получена формула при помощи преобразования Кейли из преобразования Шура (5). В общем случае преобразование выбрано так, чтобы, подобно преобразованию Шура для обобщенных функций Шура, при операторной реализации функций (для заданной функции и ее преобразования) оно приводило к сокращению пространства состояний на первое

невырожденное пространство в цепочке инвариантных подпространств соответствующего оператора разнесенной разности. Эта геометрическая особенность аналитического определения преобразования, отмеченная здесь, будет исследована в последующих работах.

### 1. ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{P}(\Theta)$

Напомним, что для  $2 \times 2$ -матричной функции  $\Theta(z)$  пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$  является пространством Понтрягина с воспроизводящим ядром  $K_\Theta(z, w)$  из (2):

$$K_\Theta(z, w) = \frac{J_\ell - \Theta(z)J_\ell\Theta(w)^*}{2\pi(z - w^*)}. \quad (8)$$

В следующей теореме используются результаты в пространствах  $\mathcal{P}(\Theta)$ , которые понадобятся в дальнейшем. Здесь и далее  $R_0$  соответствует оператору разнесенной разности, определяемому по

$$R_0f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

для любой скалярной или матричной функции  $f(z)$ , голоморфной в 0.

**Теорема 1.** Пусть  $\Theta(z)$  — рациональная  $2 \times 2$ -матричная функция, являющаяся  $J_\ell$ -унитарной на  $\mathbb{R}$  и не имеющая полюсов в закрытой верхней полуплоскости, включающей  $\infty$ . Тогда

1. Оператор умножения на  $\Theta(z)$  является изометрией из  $\mathbf{H}_{2, J_\ell}$  в себя.

2. Пространство Понтрягина  $\mathcal{P}(\Theta)$  с воспроизводящим ядром (8) является конечномерным, инвариантным по отношению к оператору разнесенной разности  $R_0$  и удовлетворяет представлению

$$\mathcal{P}(\Theta) = \mathbf{H}_{2, J_\ell} \ominus (\Theta \mathbf{H}_{2, J_\ell}).$$

3. Имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}(\Theta) = \text{span}\{R_0^n \Theta(z) \mathbf{c} \mid n = 1, 2, \dots, \mathbf{c} \in \mathbb{C}\}. \quad (9)$$

4. Обратное, любое конечномерное невырожденное  $R_0$ -инвариантное подмножество из  $\mathbf{H}_{2, J_\ell}$  является пространством Понтрягина с воспроизводящим ядром (8), где  $\Theta(z)$  имеет свойства, описанные в первом предложении данной теоремы.

В более общем смысле, пусть  $\mathcal{M}$  будет конечномерным невырожденным  $R_0$ -инвариантным пространством Понтрягина двухэлементных векторных функций, голоморфных в окрестности начала координат так, что

$$\langle R_0 \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\mathcal{M}} - \langle \mathbf{f}, R_0 \mathbf{g} \rangle_{\mathcal{M}} = 2\pi \mathbf{g}(0)^* J_\ell \mathbf{f}(0), \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{M}. \quad (10)$$

Тогда воспроизводящее ядро для  $\mathcal{M}$  имеет вид (2), где  $\Theta(z)$  — рациональная  $2 \times 2$ -матричная функция, являющаяся  $J_\ell$ -унитарной на  $\mathbb{R} \cap \text{hol}(\Theta)$  и голоморфной в окрестности начала координат (см. [9, теорема 6.9]). Если элементы  $\mathcal{M}$  не имеют полюсов в закрытой верхней полуплоскости, тождество (10) предполагает, что метрика  $\mathcal{M}$  совпадает с метрикой  $\mathbf{H}_{2, J_\ell}$ .

Действительно, использование поляризации и плотности достаточно для доказательства последнего факта для функций вида

$$\mathbf{f}(z) = \frac{\mathbf{u}}{-2\pi i(z - w^*)}, \quad w \in \mathbb{C}^+, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{C}^2.$$

Имеем, что  $R_0 \mathbf{f}(z) = \frac{1}{w^*} \mathbf{f}(z)$ , и из (10) следует, что

$$\frac{w - w^*}{|w|^2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{2\pi \mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u}}{4\pi^2 |w|^2}, \quad (11)$$

при этом

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{\mathbf{u}^* (-i J_\ell) \mathbf{u}}{-2\pi i(w - w^*)} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{H}_{2, J_\ell}}.$$

Если элементы  $\mathcal{P}(\Theta)$  являются аналитическими в бесконечности, то пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$  натянуто на столбцы матричной функции вида  $C(zI_m - A)^{-1}$ , где  $C$  и  $A$  — матрицы размера  $2 \times m$  и  $m \times m$  соответственно для некоторого положительного  $m$ . Если пара  $(C, A)$  наблюдаема (так, что  $\bigcap_{j \geq 0} \ker CA^j = \{0\}$ , или, что то же самое,  $m$  настолько мало, насколько возможно), то минимальная реализация  $\Theta(z)$  определяется формулой (см. [11])

$$\Theta(z) = I_2 - 2\pi C(zI_m - A)^{-1} \mathbb{P}^{-1} C^* J_\ell, \quad (12)$$

где  $\mathbb{P}$  — единственное решение уравнения Ляпунова

$$\mathbb{P}A - A^* \mathbb{P} = 2\pi C^* J_\ell C. \quad (13)$$

Матричная функция  $\Theta(z)$  однозначно определена с точностью до умножения справа на постоянную матрицу  $2 \times 2$ , являющуюся  $J_\ell$ -унитарной и, следовательно, имеющую вид (см. [7])

$$e^{i\varphi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (14)$$

для вещественных  $\varphi, a, b, c$  и  $d$ , такими, что  $ad - bc = 1$ .

Полезно отметить формулу (см. [11])

$$\frac{J_\ell - \Theta(z) J_\ell \Theta(w)^*}{2\pi(z - w^*)} = C(zI_m - A)^{-1} \mathbb{P}^{-1} (w^* I_m - A^*)^{-1} C^*. \quad (15)$$

Минимальный размер матрицы  $A$  называется *степенью МакМиллана* для  $\Theta(z)$  и обозначается  $\deg \Theta$ . Имеем (см. [9] или [11]):

$$\deg \Theta = \dim \mathcal{P}(\Theta). \quad (16)$$

Множество рациональных  $J_\ell$ -унитарных  $2 \times 2$ -матричных функций с одиночным полюсом в точке  $z_1^*$  будет обозначаться  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ , а элемент  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  называется *нормализованным*, если  $\Theta(\infty) = I_2$ . Очевидно, что элементы  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  удовлетворяют всем предположениям теоремы 1.

**Теорема 2.** Если  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  такая, что  $\Theta(z_1) \neq 0$ , то

1. Пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$  натянуто на одиночную цепочку Жордана

$$\mathbf{g}_0(z), \mathbf{g}_1(z), \dots, \mathbf{g}_{r-1}(z)$$

для  $R_0$ , соответствующего собственному значению  $1/z_1^*$  так, что  $r = \dim \mathcal{P}(\Theta)$ , а  $\mathbf{g}_0(z) \neq 0$  является вектором собственных значений для  $R_0$ , соответствующего собственному значению  $1/z_1^*$ , и

$$(R_0 - 1/z_1^*)\mathbf{g}_j(z) = \mathbf{g}_{j-1}(z), \quad j = 1, \dots, r-1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. Существуют векторы  $\mathbf{u}_j \in \mathbb{C}^2$ ,  $j = 0, 1, \dots, r-1$  для  $\mathbf{u}_0 \neq 0$  такие, что функции

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{g}_0(z) = \frac{\mathbf{u}_0}{z - z_1^*}, \quad \mathbf{f}_j(z) = \frac{1}{z - z_1^*}(\mathbf{f}_{j-1}(z) + \mathbf{u}_j), \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (17)$$

также являются оболочкой пространства  $\mathcal{P}(\Theta)$ .

3. Для  $j = 1, \dots, r$  имеем:

$$\text{span}\{\mathbf{g}_0(z), \mathbf{g}_1(z), \dots, \mathbf{g}_{j-1}(z)\} = \text{span}\{\mathbf{f}_0(z), \mathbf{f}_1(z), \dots, \mathbf{f}_{j-1}(z)\}.$$

4) Если  $\mathcal{M}$  —  $R_0$ -инвариантное подпространство  $\mathcal{P}(\Theta)$ , тогда для некоторого целого  $j$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,

$$\mathcal{M} = \text{span}\{\mathbf{f}_0(z), \mathbf{f}_1(z), \dots, \mathbf{f}_{j-1}(z)\}.$$

*Доказательство.* 1. Так как, согласно теореме (1),  $\mathcal{P}(\Theta)$  — конечномерно и  $R_0$ -инвариантно, то  $R_0$  имеет собственное значение  $\lambda$  для функции собственных значений  $\mathbf{g}_0(z)$ :  $R_0\mathbf{g}_0(z) = \lambda\mathbf{g}_0(z)$ . Это соотношение и то, что по (9) все элементы  $\mathcal{P}(\Theta)$  имеют полюс только в  $z_1^*$ , предполагает, что  $\lambda = 1/z_1^*$  и  $\mathbf{g}_0(z)$  имеет вид (17).

Для доказательства пункта 1 теоремы достаточно показать, что пространство собственных значений для  $R_0$  в  $z_1^*$  одномерно. Положим обратное — оно натянуто на функции

$$\frac{\mathbf{u}}{z - z_1^*}, \quad \frac{\mathbf{v}}{z - z_1^*},$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — два линейно независимых вектора в  $\mathbb{C}^2$ . По теореме 1 эти два вектора собственных значений являются ортогональными по отношению к  $\Theta \mathbf{H}_{2, J_\ell}$  и, следовательно,

$$\mathbf{u}^* J_\ell \Theta(z_1) = \mathbf{v}^* J_\ell \Theta(z_1) = 0.$$

Это предполагает, что  $\Theta(z_1) = 0$  и противоречит предположению теоремы.

2. Обозначим  $G(z)$  матричную функцию размером  $2 \times r$ , столбцы которой равны векторам цепочки из 1:

$$G(z) = (\mathbf{g}_0(z) \quad \mathbf{g}_1(z) \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{r-1}(z)).$$

Тогда  $(R_0 - 1/z_1^*)G(z) = G(z)S_r$ , где  $S_r$  — матрица  $r \times r$

$$S_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Расписывая более подробно эту формулу, получаем

$$G(z) = G(0) \frac{z_1^*}{z_1^* - z} \left( I - \frac{z z_1^*}{z_1^* - z} \right)^{-1}.$$

Пусть  $R = (r_{ij})_{i,j=1}^r$  — матрица  $r \times r$ , удовлетворяющая уравнению

$$S_r R + z_1^{*2} R S_r + z_1^* S_r R S_r = 0. \tag{19}$$

Тогда  $R$  — треугольная сверху матрица. После заполнения элементов первой строки произвольными значениями,  $R$  определяется однозначно.  $R$  обратима тогда и только тогда, когда  $r_{11} \neq 0$ .

Выберем  $r_{11} = 1$ . Тогда остальные диагональные элементы находятся, как

$$r_{jj} = (-z_1^{*2})^j, \quad j = 2, 3, \dots, r.$$

Мы утверждаем, что

$$C(z - A)^{-1} = G(z)R^{-1},$$

где  $C$  — матрица  $2 \times r$

$$C = -z_1^* G(0) (I + z_1^* S_r)^{-1} R^{-1}$$

и  $A = z_1^* + S_r$ . Это следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} C(z - A)^{-1} &= -z_1^* G(0) (I + z_1^* S_r)^{-1} R^{-1} \frac{1}{z - z_1^*} \left( I - \frac{1}{z - z_1^*} S_r \right)^{-1} \\ &= \frac{z_1^*}{z_1^* - z} G(0) \left[ \left( I - \frac{1}{z - z_1^*} S_r \right) R (I + z_1^* S_r) \right]^{-1} \\ &= \frac{z_1^*}{z_1^* - z} G(0) \left[ R + \frac{z z_1^*}{z - z_1^*} R S_r \right]^{-1} = G(z) R^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь для третьего равенства мы использовали (19).

Обозначим столбцы  $C(z - A)^{-1}$  как  $\mathbf{f}_0(z)$ ,  $\mathbf{f}_1(z)$ , ...,  $\mathbf{f}_{r-1}(z)$ ; они имеют вид из доказательства пункта 2). Так как первый столбец  $R$  является первым единичным вектором в  $\mathbb{C}^r$ , мы имеем, что  $\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{g}_0(z)$ .

3. Совпадение оболочек следует из того, что  $R$  — треугольная сверху и обратимая матрица.

4. Так как  $\mathcal{M}$  —  $R_0$ -инвариантно, оно натягивается на  $\mathbf{g}_0(z)$ , ...,  $\mathbf{g}_{j-1}(z)$  для некоторого  $j \geq 1$  для  $1 \leq j \leq r$ . Равенство в 4 следует из 2.  $\square$

## 2. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Разложением (факторизацией)  $\Theta(z) = \Theta_1(z)\Theta_2(z)$  рациональной матричной функции  $\Theta(z)$ , являющейся  $J_\ell$ -унитарной на  $\mathbb{R} \cap \text{hol}(\Theta)$ , на две функции с такими же свойствами называется *минимальным*, если степени складываются, то есть

$$\deg \Theta = \deg \Theta_1 + \deg \Theta_2.$$

Описанное выше минимальное разложение называется *нетривиальным*, если оба множителя не равны  $J_\ell$ -унитарной константе.  $2 \times 2$ -матричная функция  $\Theta(z)$  называется *элементарной*, если она не допускает ни одного нетривиального минимального разложения. В этом разделе мы изучаем минимальное разложение  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  на элементарные множители в  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  такая, что  $\Theta(z_1) \neq 0$ . Предположим, что  $\Theta(z) = \Theta_1(z)\Theta_2(z)$ , где  $\Theta_1(z)$  и  $\Theta_2(z)$  — рациональные  $J_\ell$ -унитарные на  $\mathbb{R} \cap \text{hol}(\Theta)$   $2 \times 2$ -матричные функции. В таком случае разложение минимально тогда и только тогда, когда  $\Theta_1(z)$  и  $\Theta_2(z)$  принадлежат  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ .

*Доказательство.* Согласно [9] и [11], существует взаимно-однозначное соответствие между невырожденными  $R_0$ -инвариантными подпространствами пространства



$\mathcal{P}(\Theta)$  и минимальными разложениями (с точностью до постоянных  $J_\ell$ -множителей) и, по теореме 2, пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$  натянута на одиночную цепочку  $\mathbf{g}_0(z), \mathbf{g}_1(z), \dots, \mathbf{g}_{r-1}(z)$ .

Предположим, что

$$\Theta(z) = \Theta_1(z)\Theta_2(z)$$

является минимальным разложением  $\Theta(z)$  на две рациональные  $J_\ell$ -унитарные матричные функции. Ввиду упомянутого выше взаимно однозначного соответствия,  $\mathcal{P}(\Theta_1)$  изометрически включено в  $\mathcal{P}(\Theta)$  (так, что  $\mathcal{P}(\Theta_1)$  является подмножеством  $\mathcal{P}(\Theta)$ , и отображение включения изометрично) и натягивается на  $\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{r_1-1}$ , где  $r_1 = \deg \Theta_1$ , и, таким образом,  $\Theta_1(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ . Ввиду такого изометрического включения и ввиду равенства

$$K_\Theta(z, w) = K_{\Theta_1}(z, w) + \Theta_1(z)K_{\Theta_2}(z, w)\Theta_1(w)^*,$$

имеем ортогональное разбиение (см., например, [8, с. 33] или [9])

$$\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_1\mathcal{P}(\Theta_2). \tag{20}$$

Согласно теореме 3.4 (см. [10]) и ее следствия, элементы  $\mathcal{P}(\Theta_2)$  имеют полюс только в  $z_1^*$ . Следовательно,  $\Theta_2(z)$  тоже принадлежит  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ .

Обратно, если  $\Theta_1(z)$  и  $\Theta_2(z)$  принадлежат  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ , то произведение  $\Theta_1(z)\Theta_2(z)$  минимально. Действительно, ввиду включения  $\Theta_1\mathcal{P}(\Theta_2) \subset \Theta_1\mathbf{H}_{2, J_\ell}$ , ортогональное разбиение (20) выполняется, следовательно, по (16), степени складываются.  $\square$

**Теорема 4.** *Функция  $\Theta(z)$  является нормализованным элементарным элементом в  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  тогда и только тогда, когда она имеет один из двух следующих видов:*

$$\Theta(z) = I_2 + (b_\ell(z) - 1) \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell}{\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u}}, \tag{21}$$

где  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$  и  $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} \neq 0$ , или

$$\Theta(z) = b_\ell(z)^k I_2 - \frac{p(z)}{(z - z_1^*)^{2k}} \mathbf{u}\mathbf{u}^* J_\ell, \tag{22}$$

где  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$  и  $\mathbf{u} \neq 0$ ,  $\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} = 0$ ,  $k \geq 1$  — целое, а  $p(z)$  — вещественный полином степени  $\leq 2k - 1$  при  $p(z_1) \neq 0$ .

*Доказательство.* Напомним из теоремы 2, пункта 3, что  $\mathcal{P}(\Theta)$  натянута на элементы

$$\mathbf{f}_0(z) = \frac{\mathbf{u}_0}{z - z_1^*}, \quad \mathbf{f}_j(z) = \frac{1}{z - z_1^*}(\mathbf{f}_{j-1}(z) + \mathbf{u}_j), \quad j = 1, \dots, r - 1,$$

где  $r = \dim \mathcal{P}(\Theta)$  и  $\mathbf{u}_j \in \mathbb{C}^2$  при  $\mathbf{u}_0 \neq 0$ .

Положим

$$\mathcal{M}_j = \text{span}\{\mathbf{f}_0(z), \mathbf{f}_1(z), \dots, \mathbf{f}_{j-1}(z)\}.$$

Пусть  $k \geq 0$  такое, что является наименьшим, при котором

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_k \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} \neq 0, \quad (23)$$

и оболочка  $\{\mathbf{f}_0(z), \mathbf{f}_1(z), \dots, \mathbf{f}_k(z)\}$  невырождена.

1. Сначала положим, что  $k = 0$ . На основании (10) имеем:

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathbf{H}_{2, J_\ell}} = \frac{2\pi}{z_1 - z_1^*} \mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_0,$$

и, следовательно,  $\mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_0 \neq 0$ . Пространство  $\mathcal{M}_1$  является наименьшим невырожденным  $R_0$ -инвариантным подпространством пространства  $\mathcal{P}(\Theta)$ , и, следовательно, само есть пространство  $\mathcal{P}(\Theta_1)$  с нормализованным  $\Theta_1(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ . Из теорем, указанных в начале доказательства теоремы 3, следует, что  $\Theta_1(z)$  является множителем  $\Theta(z)$ . Так как обе являются нормализованными, а последняя — элементарной, то они равны. Тогда  $\mathcal{P}(\Theta) = \text{span}\{\mathbf{f}_0\}$  (и  $r = 1$ ). Если мы запишем  $\mathbf{f}_0(z)$  как  $C(z - A)^{-1}$  при  $C = \mathbf{u}_0$  и  $A = z_1^*$ , тогда из тождества (12) для  $\mathbb{P} = \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)}$  получаем, что  $\Theta(z)$  имеет вид (21).

2. Теперь положим, что  $k \geq 1$ , при этом

$$\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = 0, \dots, \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_{k-1} \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = 0, \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_k \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} \neq 0. \quad (24)$$

Покажем, что без потери общности мы можем принять

$$\mathbf{f}_j(z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(z - z_1^*)^{j+1}}, \quad j = 0, \dots, k - 1. \quad (25)$$

Так как  $\langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = 0$ , получаем, что  $\mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_0 = 0$ , и, следовательно, существует постоянная  $J_\ell$ -унитарная матрица  $U$  размером  $2 \times 2$  такая, что

$$U \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая  $U\Theta(z)$  вместо  $\Theta(z)$ , получаем, что без потери общности можно положить

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Таким образом, для  $k = 1$  соотношение (25) выполняется.

Теперь пусть  $k \geq 2$ . Вычитая из каждого  $\mathbf{f}_j(z)$  подходящее кратное для  $\mathbf{f}_0(z)$ , можем далее принять, что

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, r-1, \quad (27)$$

для некоторых комплексных чисел  $\mu_j$ . По индукции можно показать, что

$$\mu_j = \mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (28)$$

Из

$$R_0 \frac{1}{z - z_1^*} = \frac{1}{z_1^*} \frac{1}{z - z_1^*},$$

применяя многократно формулу

$$(R_0 h k)(z) = (R_0 h)(z)k(z) + h(0)(R_0 k)(z), \quad (29)$$

где  $h(z)$  и  $k(z)$  — аналитические функции в окрестности  $z = 0$ , получаем

$$(R_0 \mathbf{f}_j)(z) = \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^{j-s}}{z_1^{*(j-s+1)}} \mathbf{f}_s(z). \quad (30)$$

Следовательно, помимо равенств (24), мы также получаем равенства

$$\langle R_0 \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = 0, \dots, \langle R_0 \mathbf{f}_{k-1}, \mathbf{f}_0 \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} = 0. \quad (31)$$

Ранее мы видели, что (28) выполняется для  $i = 0$ . Предположим, что для  $1 \leq j \leq k-1$

$$\mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, j-1,$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{f}_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, j-1.$$

Тогда, ввиду (10), (24), (31) и  $R_0 \mathbf{f}_0(z) = (1/z_1^*) \mathbf{f}_0(z)$ , имеем

$$2\pi \frac{\mathbf{u}_0^*}{-z_1} J_\ell \left( -\frac{1}{z_1^*} \mathbf{f}_{j-1}(0) - \frac{1}{z_1^*} \mathbf{u}_j \right) = \langle R_0 \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_0 \rangle - \langle \mathbf{f}_j, R_0 \mathbf{f}_0 \rangle = 0,$$

и, следовательно,  $\mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_j = 0$ . Этим мы показали, что  $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = 0$ , т.е. (25) выполняется. Изменяя номер шага индукции на единицу до случая  $j = k$ , мы получаем из неравенства (24), что

$$\mu_k = \mathbf{u}_0^* J_\ell \mathbf{u}_k \neq 0. \quad (32)$$

3. Согласно определению в (23) для  $k$ , элементы в (25) образуют нейтральное подпространство в  $\mathcal{P}(\Theta)$ , а так как  $\mathcal{P}(\Theta)$  невырождено, то оно должно содержать, по крайней мере, функции  $\mathbf{f}_j(z)$  для  $j = k, \dots, 2k-1$  так, что  $\mathcal{M}_{2k} \subset \mathcal{P}(\Theta)$  и  $\mathcal{M}_{2k}$

не содержит ни одного нетривиального невырожденного  $R_0$ -инвариантного подпространства. Можно показать, что  $\mathcal{M}_{2k}$  является невырожденным и, так как  $\Theta(z)$  элементарна, это подразумевает, как и в шаге 1, что  $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{M}_{2k}$ . Ввиду (25) и (27), можно принять, что

$$\mathbf{f}_j(z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(z - z_1^*)^{j+1}} + \sum_{i=1}^j \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ m_j \end{pmatrix}}{(z - z_1^*)^{j+1-i}}, \quad j = k, \dots, 2k - 1,$$

где мы обозначили

$$m_j = \mu_{k+j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Для доказательства невырожденности  $\mathcal{M}_{2k}$  достаточно доказать, что матрица Грамма

$$\mathbb{P} = \left( \langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} \right)_{i,j=0,\dots,k-1}$$

является обратимой. Она имеет разбиение на части размером  $k \times k$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ X & Y \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где нулевая матрица  $k \times k$  в верхнем левом углу обусловлена тем, что первые  $k$  функций  $\mathbf{f}_j(z)$  образуют нейтральное подпространство;  $X$  — матрица  $k \times k$  с  $(i, j)$ -ми элементами  $\langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)}$ ,  $i = k, \dots, 2k - 1$ ,  $j = 0, \dots, k - 1$ ;  $Y$  — матрица  $k \times k$  с  $(i, j)$ -ми элементами  $\langle \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)}$ ,  $i, j = k, \dots, 2k - 1$ . Так как  $\mathcal{P}(\Theta)$  изометрически включена в  $\mathbf{H}_{2, J_\ell}$  и используя обозначение

$$c_{ij} = \left\langle \frac{1}{(z - z_1^*)^j}, \frac{1}{(z - z_1^*)^i} \right\rangle_{\mathbf{H}_2},$$

находим, что

$$X = -i \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \\ & & & \\ c_{k1} & & & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ 0 & m_1 & & m_{k-1} \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

и (хоть это и не нужно для доказательства)

$$Y = -i \begin{pmatrix} c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \cdots & c_{1k} \\ c_{k+2,1} & c_{k+2,2} & \cdots & \\ c_{2k,1} & & & c_{2k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ 0 & m_1 & & m_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{pmatrix} + i \left( \begin{pmatrix} c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \cdots & c_{1k} \\ c_{k+2,1} & c_{k+2,2} & \cdots & \\ c_{2k,1} & & & c_{2k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_k \\ 0 & m_1 & & m_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & m_1 \end{pmatrix} \right)^*.$$

Так как матрица  $(c_{ij})_{i,j=1}^k$  размером  $k \times k$  обратима и  $m_1 = \mu_k \neq 0$  (см. (32)), то матрица  $X$ , а, следовательно, и матрица Грамма  $\mathbb{P}$  являются обратимыми.

4. Покажем теперь, что  $\Theta(z)$  имеет вид (22). Матрица  $2 \times 2k$ , столбцы которой являются базисными элементами  $\mathbf{f}_j(z)$  для  $\mathcal{P}(\Theta)$ , может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_0(z) & \mathbf{f}_1(z) & \cdots & \mathbf{f}_{2k-1}(z) \end{pmatrix} = C(zI_{2k} - A)^{-1},$$

где матрица  $A$  размером  $2k \times 2k$  и матрица  $C$  размером  $2 \times 2k$  определяются из  $A = z_1^* I_{2k} + S_{2k}$ , где  $S_{2k}$  — квадратная матрица обратного переноса с нулевым первым столбцом в виде вектора с  $2k$  элементами, и

$$C = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0_{1 \times k} \\ 0_{1 \times k} & \vec{m} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = (1 \ 0 \ \cdots \ 0) \in \mathbb{C}^k, \quad \vec{m} = (m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_k).$$

Так как пространства с воспроизводящим ядром имеют однозначное ядро и, используя нормализацию в  $\infty$ , получаем, что  $\Theta(z)$  (или  $U\Theta(z)U^{-1}$  при  $U \neq I_2$ ) выражается из (12) для

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{11} = -X^{-1}YX^{-1*}, \quad G_{12} = X^{-1}.$$

Если мы разложим  $(zI_{2k} - A)^{-1}$  на четыре части размером  $k \times k$ :

$$(zI_{2k} - A)^{-1} = \begin{pmatrix} A_1(z) & A_2(z) \\ 0_{k \times k} & A_1(z) \end{pmatrix}$$

то

$$A_1(z) = ((z - z_1^*)I_k - S_k)^{-1}, \quad A_2(z) = \left( \frac{1}{(z - z_1^*)^{k+1-i+j}} \right)_{i,j=1}^k, \quad (35)$$

и определяем, что

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi \vec{e}_1 A_1(z) G_{12} \vec{m}^* & -2\pi \vec{e}_1 (A_1(z) G_{11} + A_2(z) G_{12}^*) \vec{e}_1^* \\ 0 & 1 + 2\pi \vec{m} A_1(z) G_{12}^* \vec{e}_1^* \end{pmatrix}.$$

Так как  $\Theta(z)$  —  $J_\ell$ -унитарна, и нижний левый угол — 0, то она должна иметь вид

$$\Theta(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ 0 & 1/\alpha(z^*)^* \end{pmatrix}$$

для некоторых рациональных функций  $\alpha(z)$  и  $\beta(z)$ , которые вместе с  $1/\alpha(z^*)^*$  имеют полюс только в  $z_1^*$  и удовлетворяют соотношению  $\beta(z)\alpha(z^*)^* = \beta(z^*)^*\alpha(z)$ . Из этого, с учетом формул (35) для  $A_1(z)$  и  $A_2(z)$ , следует, что

$$1 + 2\pi\vec{e}_1 A_1(z)G_{12}\vec{m}^* = \alpha(z) = cb_\ell(z)^t = 1/\alpha(z^*)^* = 1 + 2\pi\vec{m} A_1(z)G_{12}^*\vec{e}_1^*$$

для некоторого неотрицательного целого  $t \leq k$  и некоторого унимодулярного комплексного числа  $c$  такого, что

$$c^*(z - z_1^*)^{2t}\beta(z) = c(z - z_1)^{2t}\beta(z^*)^*,$$

и что

$$p(z) = -c^*(z - z_1^*)^{2k}\beta(z) = -c^*(z - z_1^*)^{2k} [-2\pi\vec{e}_1 (A_1(z)G_{11} + A_2(z)G_{12}^*)\vec{e}_1^*]$$

является полиномом степени максимум  $2k - 1$ . Из (9) получаем

$$\begin{aligned} t &= \dim \operatorname{span} \left\{ R_0^n \Theta(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \\ &= \dim \operatorname{span} \{ \mathbf{f}_0(z), \mathbf{f}_1(z), \dots, \mathbf{f}_{k-1}(z) \} = k, \end{aligned}$$

что подразумевает, что полином  $p(z)$  является вещественным и

$$\Theta(z) = cb_\ell(z)^k I_2 - \frac{cp(z)}{(z - z_1^*)^{2k}} \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* J_\ell.$$

Если мы положим, что  $\vec{e}_k = (0 \ 0 \ \dots \ 1) \in \mathbb{C}^k$ , то из (35) и формул для  $p(z)$  и  $1/\alpha(z^*)^*$  получаем, что

$$p(z_1^*) = -c^* \vec{e}_k G_{12}^* \vec{e}_1^* = \frac{-c^*}{2\pi m_1} \frac{(z - z_1^*)^k}{\alpha(z^*)^*} \Big|_{z=z_1^*} = -\frac{(z_1^* - z_1)^k}{2\pi m_1} \neq 0$$

и, следовательно,  $p(z_1) = p(z_1^*)^* \neq 0$ . Наконец, из  $\Theta(\infty) = I_2$  следует, что  $c = 1$ . Это завершает доказательство того, что  $\Theta(z)$  имеет вид (22).

5. Теперь докажем обратное, а именно: любая  $\Theta(z)$ , имеющая вид (21) или (22), в действительности определяет элемент  $\mathcal{W}_\ell^{z_1^*}$ . Для  $\Theta(z)$  вида (21) это следует из равенств  $\dim \mathcal{P}(\Theta) = \deg \Theta = 1$ . Рассмотрим  $\Theta(z)$  вида (22). Сначала отметим, что

ввиду предположения о виде  $p(z)$ , невозможно разложить на множители положительную степень  $b_\ell(z)$  из  $\Theta(z)$ . Из формулы

$$K_\Theta(z, w)J_\ell \mathbf{u} = i\mathbf{u}K_{b_\ell^k}(z, w), \quad K_{b_\ell^k}(z) = \frac{1 - b_\ell(z)^k b_\ell(w)^{*k}}{-2\pi i(z - w^*)},$$

следует, что пространство

$$\begin{aligned} & \text{span}\{K_\Theta(z, w)J_\ell \mathbf{u}d \mid d \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C} \setminus \{z_1^*\}\} \\ &= \text{span}\left\{\frac{\mathbf{u}}{(z - z_1^*)^j} \mid j = 1, 2, \dots, k\right\} \end{aligned}$$

имеет размерность  $k$  и является оболочкой первых  $k$  элементов цепочки, связанной с  $R_0$  при собственном значении  $1/z_1^*$  (см. (17)). Кроме того, оно нейтрально, потому что

$$\begin{aligned} & \langle K_\Theta(z, w)J_\ell \mathbf{u}, K_\Theta(z, v)J_\ell \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{P}(\Theta)} \\ &= \left\langle -iJ_\ell(i\mathbf{u})K_{b_\ell^k}(z, w), (i\mathbf{u})K_{b_\ell^k}(z, v) \right\rangle_{\mathbb{H}_2^2} = -i\mathbf{u}^* J_\ell \mathbf{u} K_{b_\ell^k}(v, w) = 0. \end{aligned}$$

Из этого следует, что пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$ , имея размерность  $\dim \mathcal{P}(\Theta) = \deg \Theta = 2k$ , не имеет какого-либо нетривиального  $R_0$ -инвариантного невырожденного подпространства. Другими словами,  $\Theta(z)$  из (22) является элементарной (см. начало доказательства теоремы 3).  $\square$

Теперь докажем теорему о разложении для элементов в  $\mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ .

**Теорема 5.** *Любая нормализованная функция  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$  допускает однозначное минимальное разложение*

$$\Theta(z) = b_\ell(z)^t \Theta_1(z) \cdots \Theta_q(z), \tag{36}$$

где  $t$  — наибольшее неотрицательное целое, при котором  $b_\ell(z)^{-t} \Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z_1^*}$ , а каждый из  $\Theta_j(z)$  является нормализованным элементарным множителем вида (21) или (22).

*Доказательство.* Если  $\Theta(z_1) = 0$ , то мы выносим элемент вида  $b_\ell(z)^t I_2$ , где  $t$  определено в условии теоремы. Это упрощает проблему до рассмотрения случая  $\Theta(z_1) \neq 0$ . По теореме 2 пространство  $\mathcal{P}(\Theta)$  в таком случае составлено из одиночной цепочки так, что существует однозначно определенная увеличивающаяся последовательность  $\mathcal{M}_j$   $R_0$ -инвариантных подпространств  $\mathcal{M}_j$ , для которых  $\dim \mathcal{M}_j = j$  и

$$\mathcal{P}(\Theta) = \cup\{\mathcal{M}_j \mid j = 1, 2, \dots, \deg \Theta\}.$$

Если все пространства  $\mathcal{M}_j$  для  $j < \deg \Theta$  являются вырожденными во внутреннем произведении  $\mathbf{H}_{2, J_\ell}$ , то  $\Theta(z)$  элементарна. Иначе, пусть  $n_1$  будет таким, что  $\mathcal{M}_{n_1}$  невырождено. По теореме 1 существует  $\Theta_1(z)$ , при котором  $\mathcal{M}_{n_1} = \mathcal{P}(\Theta_1)$ . Имеем

$$\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P}(\Theta_1) \oplus \Theta_1 \mathcal{P}(\Theta_2), \quad \Theta_2(z) = \Theta_1(z)^{-1} \Theta(z).$$

Следовательно,

$$\dim \mathcal{P}(\Theta) = \dim \mathcal{P}(\Theta_1) + \dim \mathcal{P}(\Theta_2),$$

и разложение  $\Theta(z) = \Theta_1(z)\Theta_2(z)$  минимально по теореме 3. Достаточно то же самое повторить для  $\Theta_2(z)$  при том же аргументе, чтобы получить (36).  $\square$

**Следствие 1.** Для  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z^*}$  имеем

$$\det \Theta(z) = \gamma b_\ell(z)^{\deg \Theta}, \quad (37)$$

где  $\gamma \in \mathbb{C}$  единичная константа по модулю.

*Доказательство.* Утверждение справедливо для элементарных множителей, что следует из теоремы 4. По теореме 5 оно выполняется для любого  $\Theta(z) \in \mathcal{U}_\ell^{z^*}$ . Постоянная  $\gamma$  возникает потому, что в общем случае  $\Theta(z)$  может быть не нормализована. Так как  $\Theta(\infty)$  является постоянной  $J_\ell$ -унитарной функцией, то она имеет вид (14), и, следовательно  $\gamma = \det \Theta(\infty)$  имеет модуль 1.  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуются свойства индефинитных функций Неванлинны  $N(z)$ . В этом контексте каждой такой функции ставится в соответствие пространство Понтрягина с воспроизводящим ядром  $L_N(z, \omega)$ , порождённым рациональной матричной функцией  $\Theta(z)$ . В статье подробно доказывается нетривиальный факт о факторизации индефинитных функций Неванлинны. Если функция  $\Theta(z)$  имеет единственный полюс, то имеет место однозначное разложение данной функции на элементарные множители.

В исследовании применяется понятие алгоритма Шура для обобщённой функции Неванлинны и Шура, который подробно рассматривался в предыдущих работах. Основной результат статьи получен путём многократного применения преобразования Шура к матричным рациональным функциям, связанными с функциями Неванлинны.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ALPAY, D., DIJKSMA, A. & LANGER, H. (2007) The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 176. p. 1–98.
2. ALPAY D. & DYM H. (1993) On a new class of reproducing kernel spaces and a new generalization of the Iohvidov laws. *Linear Algebra Applications*. Vol. 178. p. 109–183.
3. ALPAY, D. & DYM, H. (1996) On a new class of realization formulas and their applications. *Linear Algebra Applications*. Vol. 241–243. p. 3–84.
4. ALPAY, D. & GOHBERG, I. (1988) Unitary rational matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 33. p. 175–222.
5. ALPAY, D. & GOHBERG, I. (2006) Discrete analogs of canonical systems with pseudoexponential potential. Definitions and formulas for the spectral matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 161. p. 1–47.
6. ANDREISHCHEVA, E. (2006) Approximation of Generalized Schur functions. *International Conference “Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polynomials”*: Book of abstracts. p. 10–11.
7. DE BRANGES, L. (1963) Some Hilbert spaces of analytic functions I. *Trans. Amer. Math. Soc.*. Vol. 106. p. 445–468.
8. DE BRANGES, L. & ROVNYAK, J. (1966) Canonical models in quantum scattering theory. In: Wilcox C (ed) *Perturbation Theory and its applications in quantum mechanics*. p. 295–392.
9. DIJKSMA, A., LANGER, H., LUGER, A. & SHONDIN, Y. (2004) Minimal realizations of scalar generalized Nevanlinna functions related to their basic factorization. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 154. p. 69–90.
10. DYM, H. (1989) On reproducing kernel spaces,  $J$ -unitary matrix functions, interpolation and displacement rank. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 41. p. 173–239.
11. GOHBERG, I. (1986) Schur methods in operator theory and signal processing. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 18. p. 30–77.

12. IOHVIDOV, I. S., KREIN, M. G. & LANGER, H. (1982) Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. *Mathematical Research, Akademie-Verlag*. Band 9. p. 120.
13. JONAS, P. (1981) On the functional calculus and the spectral function for definizable operators in Krein space. *Beitrage Anal.*. Vol. 16. p. 121–135.
14. KREIN, M. G. (1970) Über die verallgemeinerte Rezolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators in Raume  $\Pi_\kappa$ . *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai.*. Vol. 5. p. 353–399.
15. KREIN, M. G. & LANGER, H. (1977) Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume  $\Pi_\kappa$  zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math. Nachr.*. Vol. 77. p. 187–236.
16. KREIN, M. G. & LANGER, H. (1981) Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space  $\Pi_\kappa$ . *Acta Sci. Math. Szeged*. Vol. 43. p. 181–205.
17. LANGER H. (1982) Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. *Lecture Notes in Mathematics*. (No 948). p. 1–46.
18. SCHUR, I. (1986) Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises ähnt sind. *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 18. p. 31–59.

УДК: 519.7, 621.3

MSC2010: 68M07

## ОБРАТИМЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ЧАСТЬ II

© С. И. Гуров

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Факультет Вычислительной математики и кибернетики  
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация  
E-MAIL: [sgur@cs.msu.su](mailto:sgur@cs.msu.su)

© А. Е. Жуков

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана  
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация  
E-MAIL: [aez\\_iu8@rambler.ru](mailto:aez_iu8@rambler.ru)

© Д. В. Закаблук

ООО "Алгоритмы и данные ул. Дмитрия Ульянова, д. 42, стр. 1, 117218, Москва,  
Российская Федерация E-MAIL: [dmitriy.zakablukov@gmail.com](mailto:dmitriy.zakablukov@gmail.com)

© Г. В. Кормаков

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Факультет Вычислительной математики и кибернетики  
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация  
E-MAIL: [egor2898@mail.ru](mailto:egor2898@mail.ru)

### REVERSIBLE CALCULATIONS. PART II.

Gurov S. I., Zhukov A. E., Zakablukov D. V., Kormakov G. V.

**Abstract.** In the second part of the work, the methods of logical synthesis of reversible circuits are analyzed. Some applications of reversible logic are considered: synthesis of fault-tolerant circuits, the use of circuits from reversible logic elements in cryptography.

**Keywords:** *reversible logic, logical synthesis of reversible circuits, fault-tolerant reversible circuits, cryptographic information protection.*

### 6. СХЕМНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАТИМОЙ ЛОГИКИ

Также как и в случае синтеза классических схем из элементов стандартной логики, единого подхода, который может быть напрямую применен для построения схем из обратимых логических элементов, не существует. При этом возникает ряд вопросов, характерных исключительно для таких схем.

**6.1. Проблема стоков.** Заметим, что реализация функции  $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$  схемой, построенной из обратимых элементов, обратимой, вообще говоря, не будет, даже если таковой является сама функция  $f$  (ясно, что в этом случае  $n = m$ ). Действительно, в процессе вычисления функции  $f$  на выходе схемы появляется не только вектор результатов  $y$ , но и полученная в процессе вычисления информация на незначимых выходах (вычислительный мусор). Без знания этой информации, а только по выходу  $y$ , вход получить невозможно.

Получаемые при вычислениях мусорные биты просто отбросить нельзя, их нужно каким-то образом утилизировать (обнулить). Если на каждый триггер процессора будет приходиться свой сток, то какого-либо выигрыша по энерговыделению не получится. Утилизация мусора — самая энергозатратная операция. Полностью избежать появления мусора, вообще говоря, не удастся. Практическая ценность обратимых схем определяется эффективностью способов утилизации мусора, и в целом ответ на вопрос о практической ценности обратимой ВТ (*не будет ли энергия, необходимая для утилизации, больше, чем выигрыш от обратимости?*) зависит и от физической реализации её элементов (см. раздел 6.4).

Наиболее грубым методом упомянутой утилизации будет сохранение каждого мусорного значения на выходе. Учитывая количество элементарных операций, требуемых на выполнение даже простого арифметического действия, такой метод абсолютно неэффективен и «съест» всю доступную память. Есть предположение, что если программа выполняет  $N$  команд, то для хранения стоков потребуется порядка  $\log_2 N$  бит памяти.

При этом придется выделить дополнительную память под информацию, связанную с истинно необратимыми командами, которую надо сохранить до конца работы программы. Однако, если код программы разработан достаточно аккуратно, то количество накапливающегося за время работы мусора можно держать в разумных рамках.

Конструкция Беннетта (рис. 1) позволяет сделать количество мусорных битов в обратимой схеме равным количеству входных битов. Для этого следует:

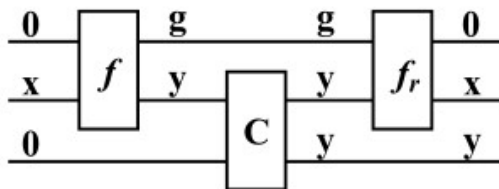


Рис. 1. Конструкция Беннетта

- (1) произвести вычисления, получив большое количество мусора;
- (2) скопировать результат;
- (3) выполнить вычисления в обратном направлении, уничтожив мусор, полученный на шаге (1).

При этом появляющееся на выходе схемы значение аргумента функции в данном случае рассматривается как вычислительный мусор [1].

Конструкция Беннетта примененная дважды позволяет в ряде случаев вообще обойтись без создания мусорных битов, правда за счет увеличения числа дополнительных линий, числа несущественных выходов и сложности самой схемы: действительно, пусть  $f$  — обратимая функция и если существуют схемы из обратимых элементов, реализующие функции  $f$  и  $f^{-1}$  то существует обратимая схема для вычисления  $f$  без создания мусорных битов.

Соответствующая конструкция представлена на рис. 2. Здесь  $\mathbf{f}$  — схема из обра-

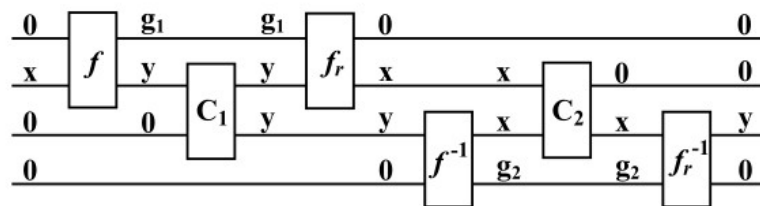


Рис. 2. Обратимая схема для вычисления обратимой функции без создания мусорных битов

тимых элементов, реализующая функцию  $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$ ,  $\mathbf{f}^{-1}$  — схема, реализующая обратную функцию,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$  — вход функции  $f$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^m$  — ее выход,  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  — вычислительный мусор,  $\mathbf{f}_r, \mathbf{f}_r^{-1}$  — соответствующие зеркальные схемы,  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  — подсхемы копирования.

## 6.2. Синтез обратимых схем.

6.2.1. *Обратимая схемотехника: критерии и библиотеки синтеза.* Под обратимой схемотехникой мы понимаем методы синтеза обратимых вычислителей, в т. ч. со специальными свойствами (например, сбоеустойчивость).

Обратимые схемы можно рассматривать в качестве модели реального вычислительного устройства. В зависимости от технологических ограничений при производстве устройств и предъявляемым к ним требованиям меняются цели и задачи методов синтеза. Среди них можно выделить следующие.

Для обычных и обратимых схем имеются естественные общие критерии оптимальности синтеза схем: это минимизация

- (1) количества элементов схемы (её сложности);
- (2) задержки.

Свойство обратимости обуславливает новые специфические для таких схем критерии: это минимизация количества:

- (3) дополнительных входов схемы или её *ширины* (в случаях, когда добавить дополнительный вход в схему технологически гораздо сложнее, чем увеличить её сложность);
- (4) мусорных выходов схемы (что связано с предыдущим пунктом);
- (5) элементов определённого типа.

Поясним последний пункт. В принципе любую обратимую комбинационную схему можно построить, используя какой-нибудь единственный универсальный элемент, например, TG. Однако сложность реализации TG выше, чем суммарная сложность составляющих его элементов NOT и CNOT, и поэтому использовать его целесообразно лишь в случаях, когда невозможно обойтись этими двумя.

Для целей синтеза схем обратимые элементы объединяют, как обычно принято, в библиотеки. Укажем наиболее известные из них, обладающие свойством универсальности [27, 28].

- NCT — NOT, CNOT, TG; рассмотрена в разделе Функциональная полнота семейств обратимых элементов части I статьи и является наиболее распространенным набором элементов, из которых можно составить любую обратимую схему.
- NCTSF — NOT, CNOT, TG, SWAP, FG; к библиотеке NCT добавлены элементы SWAP и Фредкина.
- NCTSFP — NCTSF + PG; к предыдущей библиотеке добавлен гейт Переса.
- GT/MCT — параметрическая библиотека<sup>1</sup>, состоящая из  $n$ -битных обобщённых элементов Тоффоли; включает в себя все гейты из NCT.
- MCT+MCF — параметрическая библиотека, получающаяся добавлением к предыдущей  $n$ -битных множественно управляемых гейтов Фредкина. Эта библиотека включает в себя все предыдущие, за исключением NCTSFP.
- GT+PG — к MCT добавлен гейт Переса.

<sup>1</sup> *Параметрическая библиотека* позволяет использовать элементы данного типа, отличающиеся значением некоторого параметра. Как правило это число входов (однако может быть нагрузочная способность, технологические свойства и др.).

6.2.2. *Методы синтеза обратимых схем.* Синтез схем даже в классическом случае — процесс во многом эмпирический, несмотря на огромное количество теоретических изысканий в этой области, опубликованных за последние 70 лет. Для синтеза обратимых схем в основном применяют традиционные методы, адаптированные под обратимую схемотехнику; все недостающие ссылки можно найти в [29, 30]. Эффективность различных методов синтеза сравнивается с помощью построения схем для «стандартных», «эталонных» функций [28].

Методы композиции. Метод заключается в том, чтобы составить обратимый блок из известных обратимых элементов. Далее применяются модификации процедур синтеза традиционной логики.

Методы декомпозиции. Методы декомпозиции могут быть охарактеризованы, как «уменьшение» функции от ее выхода к ее входу. Предполагается постепенное расщепление исходной функции на подфункции, каждая из которых может быть реализована при помощи обратимой схемы.

Указанные композиционные и декомпозиционные методы построения обратимых схем могут быть многоуровневыми. Следует заметить, что данные методы являются достаточно общим, но в то же время мощным инструментом при синтезе обратимых схем. Так, большинство существующих алгоритмов синтеза можно рассматривать как композиционные или декомпозиционные.

PPRM (Positive-Polarity Reed-Muller) — создаётся дерево с корневым узлом, от которого расходятся все выходящие переменные. В последствии из всех возможных представлений лучшее преобразуется в элемент Тоффоли.

ESOP<sup>2</sup>. Метод основан на представлении булевой функции в виде суммы по  $\text{mod } 2$  элементарных конъюнкций. Булева функция представляется в виде списка ячеек, каждая из которых соответствует одному или нескольким обратимым элементам.

Метод решающих диаграмм основан на представлении функции алгебры логики в форме двоичной диаграммы решений (BDD, Binary Decision Diagram). Узлы построенной диаграммы далее преобразуются в элементы Тоффоли.

RFTPLA. Регулярная структура обратимых отказоустойчивых программируемых логических матриц (RFTPLAs) и алгоритмы их построения описаны в [31]. Эти алгоритмы реализованы для представления функций в форме ESOP. Синтезированные схемы имеют минимальное количество вентиляей и битов мусора. При синтезе используются элементы FG и F2G (см. п. 7.1).

<sup>2</sup>SOP — Sum of Products, сумма произведений, дизъюнкция элементарных конъюнкций, ДНФ; ESOP — сумма по  $\text{mod } 2$  элементарных конъюнкций.

Cycle-based алгоритмы, основанные на представлении заданного биективного отображения в виде произведения независимых циклов (подстановки). Данное представление заменяется на эквивалентное и, возможно, избыточное, но удобное для синтеза по частям. Алгоритмы синтеза такого типа позволяют получать обратимые схемы с асимптотически оптимальной сложностью [32].

Методы факторизации. Идея метода факторизации состоит в выборе булевой операции  $\circ$  (например, это может быть конъюнкция или XOR) для функции  $f$  и поиске двух функций  $f_1$  и  $f_2$  таких, что

- $f = f_1 \circ f_2$ ;
- с точки зрения синтеза сложность функции  $f$  больше, чем суммарная сложность функций  $f_1$  и  $f_2$  совместно со сложностью реализации операции  $\circ$ .

В общем случае операция  $\circ$  может быть  $n$ -арной операцией.

Методы, основанные на применении операции «исключающее ИЛИ» (XOR).

Использование таких свойств операции XOR, как

$$a \oplus b = b \oplus a, \quad a \oplus 0 = a, \quad a \oplus 1 = a', \quad a \oplus a = 0$$

позволяет проводить эвристический анализ и значительное упрощение уже существующих обратимых схем. Доказано, что любая схема может быть приведена к канонической форме путем использования обратимых операций, а каноническая форма в свою очередь — сведена к минимальной.

Генетические алгоритмы. В основе генетических алгоритмов лежит идея эволюционного процесса. Описание идеи построения таких алгоритмов можно найти в [33]. Описанные в различных работах генетические алгоритмы формулируются по-разному, поэтому их применение также может различаться. К недостаткам следует отнести плохую масштабируемость.

Поиск, перебор с возвратом, алгоритм «искусственного отжига» и т. д. Описания алгоритмов указанного типа также может быть найдено в [33]. Основная идея указанных методов заключается в предварительном прогнозировании последующих шагов алгоритма и принятии решения, к какому результату может привести то или иное отклонение от заданного алгоритма. Данные методы являются трудоемкими в применении, поскольку с появлением каждого нового предположения число вершин в так называемом «дереве решений» растет экспоненциально, а глубина поиска увеличивается по линейному закону.



Теоретико-групповые методы. Группа перестановок  $S_n$  является хорошо изученной. Построение схемы для функции  $f$  эквивалентно задаче нахождения длины элемента группы подстановок в заданной системе образующих. Применение таких методов включает в себя использование различного алгебраического программного обеспечения, например GAP<sup>3</sup>.

Синтез регулярных структур. Под регулярными здесь подразумеваются сети, решетки, программируемые логические матрицы (ПЛМ) и др. Идея состоит в создании метода традиционного проектирования логики из обратимых компонентов, и затем применение известных средств синтеза логических схем для создания обратимых спецификаций. Построение обратимых схем указанным способом обычно характеризуется наличием большого количества мусора, что делает невозможным его применение в технологических решениях, требующих больших затрат на мусор (например, в квантовых технологиях).

Спектральные методы Миллера. Спектром булевой функции называют её корреляцию с векторами длины  $2^n$  всех линейных функций [34]. В своих работах Миллер описывает подход к решению о выборе элемента, основанный на спектральной сложности [35, 36]. Если добавление очередного элемента уменьшает спектральную сложность, то элемент добавляется к схеме. Данный метод дает хороший результат для обратимых схем небольшого размера, однако плохо масштабируется и требует детального описания используемых обратимых элементов.

В середине 1990-х гг. в Массачусетском технологическом институте были созданы первые чипы-процессоры, сопроцессоры и запоминающие устройства с обратимой логикой, а для них написаны реализации языка Си [38]. Хотя они представляют собой лишь модели обратимых вычислителей (реального сохранения энергии не происходит, так как применяются необратимые физические процессы), они продемонстрировали возможность проектирования логических обратимых схем достаточно высокой сложности.

В настоящее время исследования в области синтеза схем на базе обратимой логики интенсивно проводятся в Massachusetts Institute of Technology (MIT) и University of Florida (UF). Исследования охватывает широкий спектр проблем физики элементов до систем программирования и теории сложности (см. страницу <https://www.cise.ufl.edu/research/revcomp/> на сайте UF).

Некоторые результаты логического синтеза схем, реализованные на базе различных подходов можно найти на сайте Reversible logic synthesis benchmarks page [28].

<sup>3</sup>Примечание GAP (от англ. Groups, Algorithms, Programming — Группы, Алгоритмы, Программирование) — свободно распространяемая кроссплатформенная система компьютерной алгебры для вычислительной дискретной алгебры с особым вниманием к вычислительной теории групп.

### 6.3. Вопросы сложности.

6.3.1. *Сложность реализации обратимых элементов.* Уже указывалось, как на элементах Переса может быть построен однобитный обратимый сумматор. Быстрый однобитный полусумматор<sup>4</sup> состоит из 4-х гейтов Фредкина и срабатывает за время  $2\tau$ , где  $\tau$  — задержка на гейт; см. рис. 3.

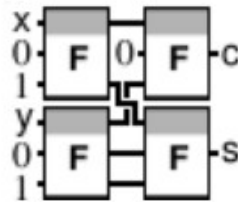


Рис. 3. Быстрый обратимый полусумматор [37].

Сумматоры большей разрядности можно синтезировать из одного полусумматора и  $(n - 1)$  3-битных суммирующих блоков. Пример минимального по размеру (4 гейта Фредкина) однобитного сумматора представлен на рис. 4.

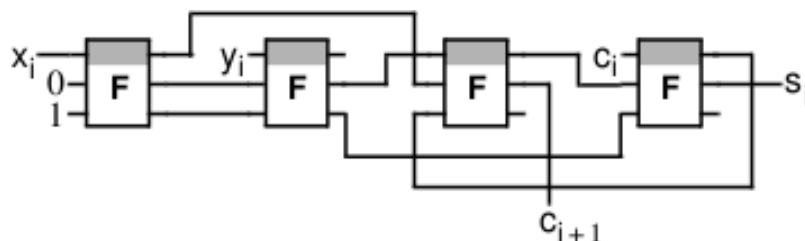


Рис. 4. Реализация обратимого сумматора на элементах Фредкина [37].

Отметим замечательный факт: обратимая логика требует в разы меньше вентиля, чем классическая (см. <http://akuklev.livejournal.com/941417.html>). Для примера на рис. 5 приведена принципиальная схема полусумматора на двух классических функциональных элементах. Казалось бы, схема несложна. Однако КМОП-

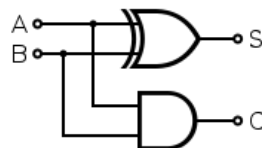


Рис. 5. Схема полусумматора на функциональных элементах

<sup>4</sup> Полусумматор (half adder) вычисляет сумму по  $mod 2$  битов данных разрядов двух чисел и бит переноса в следующий разряд.

реализации составляющих её элементов XOR2 и AND2 требуют по 6 транзисторов каждый. В результате получим, что классический полусумматор состоит из 12 транзисторов при задержке  $8\tau$ .

Отметим, что задержка 64-битного классического сумматора составляет более  $130\tau$ , а соответствующего обратимого сумматора на гейтах Фредкина —  $66\tau$ . Для аналогичного быстрого (со схемами ускоренного переноса) сумматора задержка составляет  $12\tau$ , что всё равно на  $3\tau$  медленнее быстрого обратимого сумматора на FG. Заметим, также величина  $\tau$  для КМОП-транзисторов по фундаментальным причинам на порядки больше соответствующей величины  $\tau$  для FG [38].

6.3.2. *Оценки сложности обратимых схем.* Пусть  $\mathcal{B}$  — некоторая заданная библиотека обратимых элементов. Рассмотрим произвольную  $\mathcal{B}$ -конструируемую функцию  $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ . Среди всех  $\mathcal{B}$ -конструируемых схем, реализующих функцию  $f$  с использованием  $q$  дополнительных входов, мы можем найти схему минимальной сложности. Обозначим через  $L(f, q)$  сложность этой обратимой схемы. Определим функцию Шеннона сложности  $L(n, q)$ :

$$L(n, q) = \max\{L(f, q)\},$$

где максимум берется по всем функциям  $f : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ , реализуемым  $\mathcal{B}$ -конструируемыми схемами с  $q$  дополнительными входами.

Оценки сложности тех или иных алгоритмов синтеза позволяют получить верхние оценки сложности для схем из обратимых элементов. В работах [32, 39, 40] было разработано несколько новых алгоритмов синтеза обратимых схем для библиотеки элементов NCT. Существенное отличие данных алгоритмов от известных аналогов заключается в том, что для синтезируемых ими обратимых схем доказана асимптотическая оптимальность сложности в худшем случае.

Пусть требуется реализовать некоторое отображение на множестве двоичных векторов длины  $n$ . Тогда  $L(n, q)$  — сложность обратимой схемы в худшем случае, где  $q$  — количество дополнительных входов схемы. Cycle-based алгоритм, разработанный в работе [40], позволяет получить обратимую схему без дополнительных входов сложности не более

$$L(n, 0) \lesssim \frac{48n2^n}{\log_2 n}.$$

Для синтеза произвольного отображения на множестве двоичных векторов длины  $n$  в [40] был разработан алгоритм синтеза, являющийся модификацией стандартного метода Лупанова и оптимизированный под различное количество дополнительных входов  $q$ . Данный алгоритм позволяет получить обратимую схему сложности не

более

$$L(n, q) \lesssim \frac{8n2^n}{\log_2 q}$$

при  $n^2 \lesssim q \lesssim 2^{n-o(n)}$ .

Стоит отметить, что сложность синтезированной обратимой схемы, как это видно из оценок выше, существенно зависит от количества дополнительных входов: чем их больше, тем меньше сложность схемы в худшем случае.

Для линейных обратимых преобразований в [41] был предложен оптимальный метод синтеза, который в худшем случае дает схемы из элементов CNOT сложности  $O(n^2/\log_2 n)$ . Помимо того, что данный алгоритм дает схемы меньшей сложности по сравнению со стандартным методом, он также является более эффективным в смысле времени работы, а именно  $O(n^3/\log_2 n)$  по сравнению с временем  $O(n^3)$  в случае синтеза на основе метода Гаусса.

Для получения нижних оценок сложности в основном используется мощной метод Риордана–Шеннона и получить эти оценки, как правило, весьма не просто. Тем не менее, ряд нижних оценок удастся получить из достаточно элементарных соображений.

Как уже было отмечено выше, множество всех подстановок, реализуемых  $\mathcal{B}$ -схемами с  $n$  входами и  $n$  выходами, является подгруппой  $\langle \mathcal{B} \rangle_n$  симметрической группы  $S_{2^n}$ , образующими элементами группы  $\langle \mathcal{B} \rangle_n$  являются подстановки, соответствующие элементам библиотеки  $\mathcal{B}$ . С этой точки зрения минимальная сложность схемы, реализующей подстановку  $\pi \in \langle \mathcal{B} \rangle_n$ , есть ничто иное, как длина элемента  $\pi$  относительно системы образующих  $\mathcal{B}$ , а функция Шеннона  $L(n, 0)$  — длина группы  $\langle \mathcal{B} \rangle_n$  относительно той же системы образующих. Очевидно, что длина  $\lambda(G, M)$  конечной группы  $G$  относительно системы образующих  $M$  удовлетворяет неравенству  $\lambda(G, M) \geq \log_{|M|} |G|$ .

Тогда, применяя это неравенство к знакопеременной группе  $A_{2^n}$ ,  $n > 3$ , которую порождают элементы NCT-библиотеки, учитывая, что  $|G| = |A_{2^n}| = (2n)!/2$ ,  $|M| = \sum_{k=0}^2 (n-k)C_n^k = \frac{n^3(1+o(1))}{2}$ , получаем следующую нижнюю оценку для  $L(n, 0)$ :

$$L(n, 0) \gtrsim \frac{\log_2((2^n)!/2)}{\log_2(n^3/2)} \gtrsim \frac{\log_2 2^{n2^n} - \log_2 e^{2^n}}{3 \log_2 n},$$

$$L(n, 0) \gtrsim \frac{n2^n}{3 \log_2 n}.$$

Таким образом, установлен порядок роста функции Шеннона для схем без дополнительной памяти:

$$L(n, 0) \asymp \frac{n2^n}{3 \log_2 n}.$$

Для схем с  $n$  основными и  $q$  дополнительными входами в [42] было доказано, что почти все отображения на множестве двоичных векторов длины  $n$  реализуются со сложностью  $L(n, q) \gtrsim n2^n / \log_2(n + q)$ .

В результате получаем, что для диапазона значений  $q$

$$n^2 \lesssim q \lesssim 2^{n-o(n)}$$

выполняется асимптотическое равенство

$$L(n, q) \asymp \frac{n2^n}{\log_2 q}$$

и, таким образом, алгоритм синтеза [40] является асимптотически оптимальным.

В работе [43] была получена более общая оценка порядка роста функции Шеннона: для любого значения  $q$  такого, что  $0 \leq q \lesssim 2^{n-o(n)}$ , верно соотношение

$$L(n, q) \asymp \frac{n2^n}{\log_2(n + q)}.$$

Таким образом, использование дополнительной памяти в обратимых схемах, состоящих из элементов NOT, CNOT и TG, почти всегда позволяет существенно снизить сложность, глубину и квантовый вес<sup>5</sup> таких схем, что существенным образом отличает схемы из обратимых элементов от схем из классических элементов [43]. В результате, в процессе синтеза обратимой схемы зачастую приходится искать компромисс, выбирая между большими либо сложностью схемы, либо количеством дополнительных входов.

**6.4. Физическая реализация обратимых вычислений.** К сожалению, до сих пор не удалось создать адекватную физическую реализацию обратимых вычислений в виде ИС. На сегодняшний день известны следующие подходы к данной задаче [3–5, 21, 44, 45]:

- 1) КМОП-технология с пониженным потреблением энергии;
- 2) ПЗС-структуры<sup>6</sup>;
- 3) цифровые оптические вычислительные устройства, использующие оптические солитоны;
- 4) спинтроника (использующая поляризованные потоки электронов);
- 5) фотонная логика (использующие поляризованные потоки фотонов);
- 6) квантовые вычислительные устройства.

<sup>5</sup> *Квантовым весом* обратимых функциональных элементов называют количество одно- и двухкубитных квантовых вентилях, необходимых для их реализации в квантовой технологии.

<sup>6</sup> приборы с зарядовой связью

На сегодняшний день считается, что обратимые элементы могут быть эффективно реализованы лишь на базе спинтроники<sup>7</sup> или фотонной логики, а обычная электроника обречена использовать обычные транзисторы (цит. по <https://habr.com/post/114579/>). Системы клеточных автоматов, возможно, удастся построить из молекул; см. рис. 6 с сайта Йельского университета.

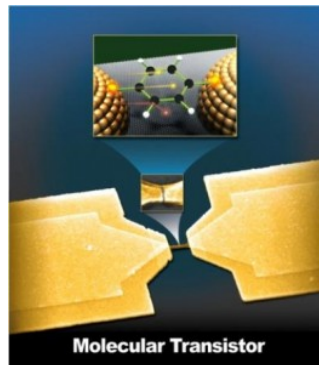


Рис. 6. Одномолекулярный транзистор.

## 7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБРАТИМОЙ ЛОГИКИ

### 7.1. Синтез сбоеустойчивых обратимых схем.

7.1.1. *Проблема надёжности ИМС.* Повышение надёжности функционирования ИМС остаётся актуальной проблемой синтеза. Важной стороной задачи синтеза таких схем остаётся проблема устойчивости их к кратковременным самоустраняемым отказам — *сбоям* (SEU, single event upsets).

Считается, что интенсивность сбоев на порядок превышает интенсивность отказов — потери способности устройства выполнить требуемую функцию. Причиной сбоев является воздействие на схему различных видов помех: радиационных, скачков напряжения питания, деградация сигналов во времени и др., и чем выше частота тактовой синхронизации, тем больше вероятность сбоя.

Ионизация высокой интенсивности, вызванная  $\alpha$ - и  $\gamma$ -излучением, а также тяжёлыми заряженными частицами (протонами и нейтронами) создает импульсы переходного тока, которые могут вызвать переключение битов в схемах функциональной

<sup>7</sup> Элементарные логические необратимые вентили спиновой электроники потенциально обладают задержкой  $\tau \approx 1$  нс и тепловыделением  $10^{-17}$  Дж

логики, что делает схему временно неисправной. Поэтому сбоеустойчивость является важнейшим требованием к аппаратуре, работающей в тяжёлых условиях космоса. В настоящее время в мире активно развивается направление радиационно-стойкого проектирования (RHBD, Radiation Hard by Design), основанного на использовании схмотехнических, топологических и алгоритмических методов повышения сбоеустойчивости.

Одинокная неисправность того или иного элемента может привести к кратной ошибке на выходе всей схемы (*конус ошибок*). Однако возможно и не проявление (*маскирование*) возникших ошибок элементов.

7.1.2. *Самопроверяемые обратимые схемы. Диагностика сбоев.* Построение самопроверяемых схем — традиционный подход к решению поставленной проблемы.

*Самокорректируемость* функциональных блоков есть свойство обнаруживать и исправлять неисправности как в основной, так и в контролирующей аппаратуре. Последнее свойство позволяет избежать проблемы “сторожа над сторожем”. В этом случае говорят о *схемной избыточности*. При возникновении ошибки контролирующая схема обеспечивает пересчет значений выхода основной схемы. Такой пересчёт может повторяться неоднократно (CED, Concurrent Error Detection), что иногда может привести к большой задержке времени получения результата.

Создание самокорректируемых схем есть задача синтеза вычислительных устройств с дополнительными требованиями. Считают, что гейты могут кратковременно выходить из строя, изменяя биты на своём выходе. Для обнаружения и/или исправления таких ошибок исходная схема усложняется за счёт включения в неё дополнительных блоков. Заметим здесь, что для большинства параметрических семейств функций алгебры логики  $f(x_1, \dots, x_n)$  доказана возможность построения самокорректирующих схем, сложность которых на логическом уровне асимптотически (при  $n \rightarrow \infty$ ) равна сложности схем без самокоррекции [46].

В простейшем случае сбоеустойчивая схема обеспечивает лишь обнаружение возникшей ошибки. Для этого используют либо схемы контроля чётности (сумма по  $\text{mod } 2$ ), либо схемы, устойчивые к ошибкам (логика, имеющая запас прочности). Схемы первого типа обеспечивают обнаружение однократной ошибки, в то время как схемы второго типа могут обеспечить обнаружение кратных ошибок.

Обзор известных подходов к синтезу сбоеустойчивых обратимых схем дан в [29], там же могут быть найдены все необходимые ссылки. Приведённые там подходы делятся на два класса.

Первый заключается в построении элементов, обеспечивающих контроль чётности своих выходов с использованием далее общих методов синтеза. Второй связан

с обеспечением контроля чётности уже синтезированных схем. Большинство известных методов находятся в рамках первого класса. Разработан универсальный способ преобразования произвольных обратимых элементов в гейты, сохраняющие чётность. Методы второго класса часто требуют значительного перепроектирования уже имеющихся схем. Отметим, что такой ресинтез ИМС требует существенных затрат. При этом увеличивается количество ключей, добавляются новые проверяющие элементы и увеличивается количество мусора.

Рассмотрим сначала обратимые логические элементы с контролем чётности. Обратимый элемент называют *элементом, сохраняющим чётность*, если чётности входных и выходных данных совпадают.

Укажем основные элементы, сохраняющие на выходе чётность входа. Это свойство нетрудно проверяется по таблицам истинности, строящимся по нижеприведённым формулам.

1. Элемент Фредкина FRG, рассмотренный выше.

2. *Двойной элемент Фейнмана* (F2G, Feynman Double Gate) — обратимый сохраняющий чётность  $3 \times 3$ -гейт, реализующий формулы

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = A \oplus C.$$

3. *Новый сбоеустойчивый элемент* (NFT, New Fault Tolerant Gate) — обратимый сохраняющий чётность  $3 \times 3$ -гейт, реализующий формулы

$$P = A \oplus B, \quad Q = B'C \oplus AC', \quad R = BC \oplus AC'.$$

4. *Элемент Ислама*<sup>8</sup>

(IG, Islam Gate) — обратимый сохраняющий чётность  $4 \times 4$ -гейт, реализующий формулы

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = AB \oplus C, \quad S = BD \oplus B'(A \oplus D).$$

5. *Модифицированный элемент Ислама* (MIG, Modified IG) — улучшенная версия IG, реализующая для первых трёх выходов те же формулы, что и IG и  $S = AB' \oplus D$ .

Обратимый элемент называется *устойчивым*, если вес Хэмминга (количество логических единиц) одинаков для входа и выхода. Только один из приведённых выше элементов является устойчивым — это элемент Фредкина FRG, что легко определяется по его таблице истинности. Устойчивые элементы хоть и обеспечивают обнаружение более чем одной ошибки, но их создание сопряжено с увеличением сложности элемента.

<sup>8</sup> предложен Сайфулом Исламом [47]



Схема называется *сбоеустойчивой*, если она обеспечивает обнаружение ошибок на своём выходе. Переходя от элементов к схемам, замечаем, что существует два вида сбоеустойчивых схем: схемы, сохраняющие чётность, состоящие из сохраняющих чётность обратимых элементов, и схемы, устойчивые к ошибкам. Примером схемы первого вида может служить сумматор, показанный на рис. 7.

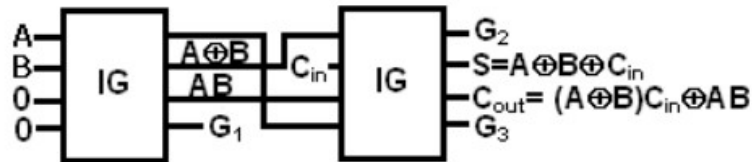


Рис. 7. Однобитный обратимый сумматор на элементах IG [47].

Обратимая схема называется *устойчивой*, если она сохраняет количество логических единиц для каждой пары вход/выход. Такие схемы более сложны в реализации. Пример сбоеустойчивого полного сумматора можно найти в [37].

Для диагностики сбоев применяют системы *тестового* (оффлайн) и *функционального* (онлайн) диагностирования. В системах функционального диагностирования входными воздействиями, поступающими на схему, являются воздействия, предусмотренные алгоритмом её штатной работы. При тестовом диагностировании на входы схемы подаются специально созданные тестовые воздействия (некоторые из которых могут быть неосуществимы в процессе стандартного функционирования). Ясно, что с учётом возрастающей сложности ИМС становится всё более сложно проверить функционирование тех или иных блоков моделированием различных входных последовательностей.

7.1.3. *Функциональное диагностирование.* Опишем кратко методы синтеза функционально диагностируемых обратимых схем; все ссылки см. в [29], рисунки взяты оттуда же.

1. *Схемы на базе элементов R1, R2 и R.* Данный метод основан на использовании трёх новых обратимых элементов, названных авторами R1, R2 и R, см. рис. 8.

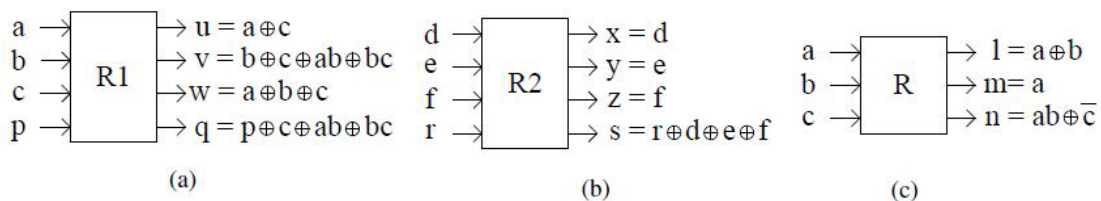


Рис. 8. Элементы R1, R2 и R.

Элемент R1 может при различных адресных входах реализовать штрих Шеффера (NAND), дизъюнкцию (OR), сумму по  $mod 2$  (XOR), эквивалентность (XNOR), а сигнальный выход  $q$  реализует сумму по  $mod 2$  всех выходов. Элемент R2 имеет единственный управляемый вход  $r$ , которому соответствует сигнальный выход  $s$ , реализующий сумму по  $mod 2$  всех 4-х входов. Схемы (ТВ, тестируемые блоки) состояются из этих элементов, см. рис. 9.

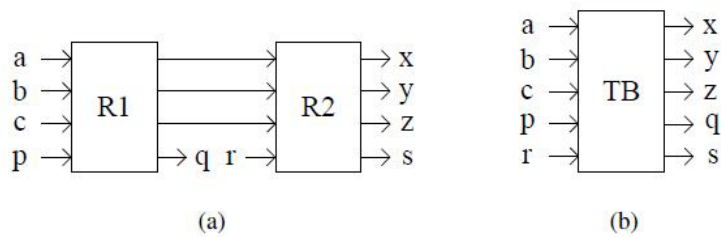


Рис. 9. Соединение элементов R1 и R2 и синтезированная схема ТВ.

Итоговая схема ТВ содержит два выхода чётности —  $q$  и  $s$ . Далее строится проверяющая схема (checker circuits) из 8 элементов R для тестирования указанных выходов двух тестируемых блоков, см. рис. 10. Для большего числа блоков используются

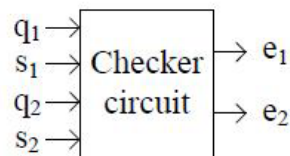


Рис. 10. Проверяющая схема.

каскады проверяющих схем.

Недостатком этого метода является то, что ошибки сбоев, возникших между двумя ТВ не диагностируются.

Метод также требует переформирования схемы, при этом увеличивается количество вентилях и требуется наличие проверяющего элемента.

2. Схемы, использующие онлайн-тестируемые элементы (OTG, Testable Circuits using Online Testable Gate). Метод основан на использовании новых  $4 \times 4$  обратимых элементов OTG, см. рис. 11.

Новые блоки строятся последовательным соединением R2 и OTG, см. рис. 12. Так же был предложен новый проверяющий элемент, основанный не на 8 элементах R (как это было необходимо для схем, основанных на элементах R, R1 и R2), а на

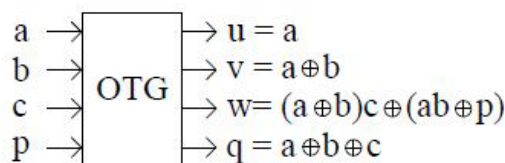


Рис. 11. Элемент OTG.

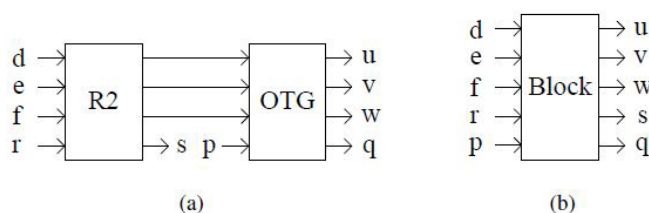


Рис. 12. Элемент OTG.

четырёх элементах Тоффоли и двух элементах Фредкина. Но и этот метод обеспечивает лишь частичную защиту. Метод также приводит к увеличению количества вентиляей и выходного мусора. При этом, однако, отсутствует необходимость перепроектирования схемы.

Метод не имеет особых преимуществ перед предыдущими. Однако основным недостатком этих трёх методов является обеспечение лишь частичного фиксирования ошибок.

3. *Схемы с парофазными каналами* (Testable Circuits using Dual Rail Reversible Gates). Метод использует набор вводимых обратимых  $4 \times 4$  элементов с двумя парами входов, на каждый из которых сигнал подаётся в парофазном виде: 01 или 10. Непарофазный выход означает возникновение битовой ошибки. Здесь нет необходимости в элементе проверки, так как ошибка фиксируется проверкой выходного вектора. Однако недостатком этого метода является необходимость замены формата основной схемы, поскольку он не работает с базовыми обратимыми элементами. Таким образом, метод обеспечивает исчерпывающее тестирование, однако требует ресинтеза схем.

4. *Схемы на ESOP*. Метод заключается в следующем:

- 1): в схему добавляют дополнительную линию L;
- 2): все  $n$ -битовые элементы Тоффоли заменяются на  $(n + 1)$ -битовые ETG;
- 3): для каждого элемента NOT, найденного в схеме, добавляется один элемент NOT на линии L;

- 4): добавляется  $q$  элементов CNOT на линию  $L$  для всех выходных линий, где  $q$  — количество выходных линий;
- 5): добавляются  $2p$  элементов CNOT на линию  $L$ , по  $p$  элементов с каждой стороны от уже полученной схемы, где  $p$  — количество входных линий.

Рассмотрим пример получения из обратимой схемы, основанной на ESOP, тестируемой онлайн схемы, см. рис. 13.

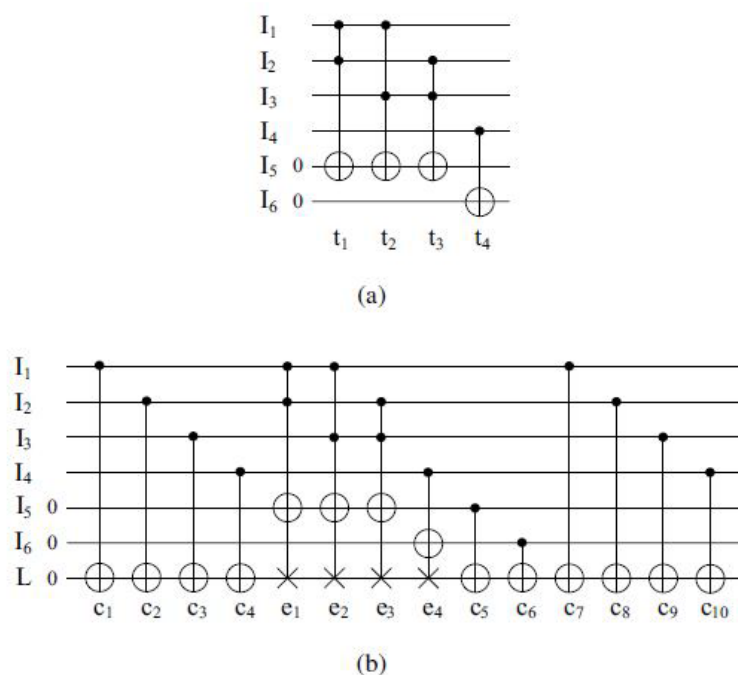


Рис. 13. Построение схемы ESOP: (a) — исходная и (b) — полученная сбоеустойчивая схемы.

Плюсами данного метода является лёгкость в реализации.

6. *Онлайн-тестируемые обратимые схемы, основанные на ETG*: В 2011 г. Найим и др. предложили ещё один метод, являющийся модификации предыдущего [48]. Новый метод возможно применить для всех схем, имеющих только элементы Тоффоли:

- 1): в схему добавляют линию  $L$ ;
- 2): все  $n$ -битовые элементы Тоффоли заменяются на  $(n + 1)$ -битовые ETG;
- 3): добавляются  $2p$  элементов CNOT на линию  $L$ , по  $p$  элементов с каждой стороны от уже полученной схемы,  $p$  — количество линий, которые работают как выходные, так и входные.

4): в отличие от предыдущего метода, количество элементов NOT подсчитывается и, если оно нечётное, то добавляется один элемент NOT на линию L в конец схемы.

Пример см. рис. 14.

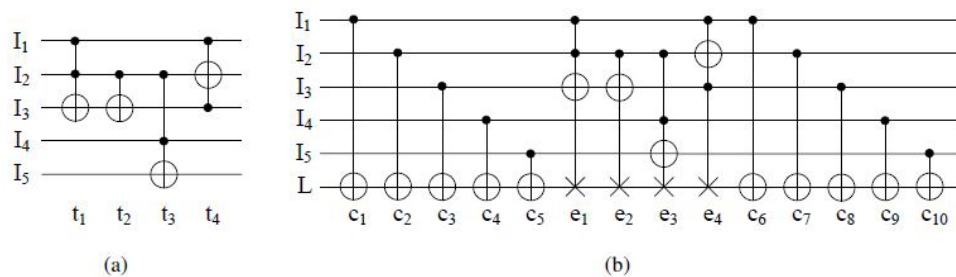


Рис. 14. Построение сбоеустойчивой схемы на ETG: (а) — исходная и (б) — полученная сбоеустойчивая схемы.

Последние два метода не требуют ресинтеза исходной схемы. Также они явно эффективнее по количеству добавляемых вентиляей.

7.1.4. *Сбоеустойчивость в хэмминговом пространстве.* При построении обратимых элементов на основе помехоустойчивого кодирования в пространстве Хэмминга [49, 50] обеспечивается гарантированное автоматическое исправление любой одиночной ошибки. Отметим сразу, что этот метод не связан прямо с применением теории помехоустойчивого кодирования выходов схем [51, 52].

Рассмотрим пространство Хэмминга размерности 3, т. е. каждый сигнал будем представлен тремя битами. Например, булевы значения 0 и 1 будем кодировать как 000 и 111, соответственно. Договоримся троированный сигнал  $A$  в этом случае обозначать с соответствующими нижними индексами:  $A_1, A_2, A_3$ .

Для реализации сбоеустойчивых элементов и схем в таком случае воспользуемся обратимым воутером, который будем обозначать  $V1$ :

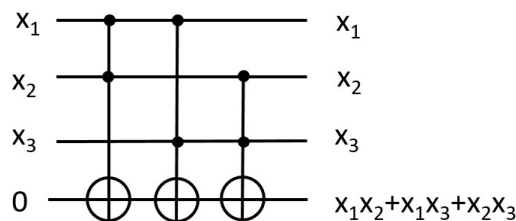


Рис. 15. Обратимый воутер V1: схема на элементах Тoffоли

Тогда, например, обратимый элемент отрицания в Хэмминговом пространстве (обозначим его HNOT) может быть реализован следующим образом — см. рис. 16.

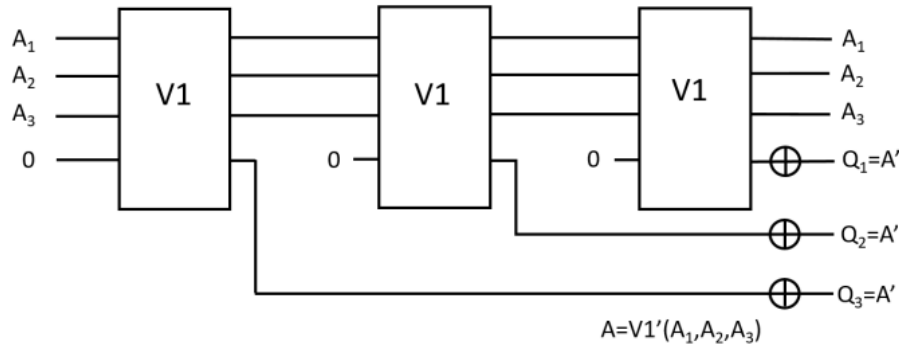


Рис. 16. Элемент HNOT

Очевидным преимуществом данного подхода по созданию сбоеустойчивых схем является исправление ошибок за счёт определённых операций в пространстве Хэмминга: исправление будет происходить уже на следующем элементе в схеме в процессе выполнения вычислений. Платой за такую защиту является увеличение аппаратной сложности схем. Например, если за аппаратную сложность брать количество элементов NOT в схеме, то для приведённого элемента HNOT сложность увеличилась с одного (обычный обратимый элемент NOT) до 12 элементов суммы по  $mod 2$ .

Некоторые обратимые элементы в пространстве Хэмминга приведены в [53].

**7.2. Использование схем из обратимых логических элементов в криптографии.** Использование в криптографии обратной логики и схем из обратимых элементов не является новой идеей [54]. Основными причинами заинтересованности в них, помимо очевидных вопросов снижения потребления энергии и рассеиваемого тепла, являются вопросы дополнительной защиты от утечек по побочным каналам. Так, одним из действенных методов современного криптоанализа является так называемая «разностная атака по мощности», которая использует информацию об энергопотреблении криптографического устройства. Известно, что энергия, потребляемая устройством, меняется в зависимости от обрабатываемых данных и выполняемых на разных этапах алгоритма команд, что дает возможность определить характеристики криптографического устройства и, в частности, используемый ключ криптоалгоритма. Важно отметить, что идеальная реализация схемы из обратимых элементов, теоретически, вообще лишена недостатков, связанных с возможностью утечки информации по соответствующему побочному каналу, что делает такие схемы очень привлекательными для использования в криптографических целях.

В этой связи наибольшее внимание было уделено схемам из обратимых элементов, реализующим многоарядные арифметические операции. Эти операции используются в большинстве ассиметричных криптосистем. К примеру, в современной реализации системы шифрования с открытым ключом RSA используются операции модульного сложения и модульного умножения 1024–3072-битовых чисел.

Исследования в этой области за последнее время ведутся со все возрастающей интенсивностью. Так различными авторами были предложены такие обратимые схемы, как, например, полусумматор, полный сумматор, триггер, умножитель. Из последних работ этого направления стоит выделить [55–64].

Среди них схемы умножения имеют особое значение. Так, еще в 1994 г. в работе [65] при помощи обратимой логики разрабатывается схема обратимого умножителя, которая потребляет на 99% меньше энергии, чем её классическая КМОП-реализация. В [66] была также предложена низкомощностная и высокоскоростная архитектура умножителей, основанная на необратимых элементах, а затем в 2005 году в [67] была предложена ее обратимая версия. В работе [54] предлагается обратимая реализация схем сложения и умножения в поле, как наиболее затратных по энергопотреблению операций АЛУ криптопроцессора. Авторы используют элемент TSG, предложенный в [68], и на его базе реализуют полный сумматор, а также умножитель Монтгомери. Этот вопрос получил развитие в работе [69]. Её авторы предлагают реализацию схем обратимых мультиплексоров, регистров и сдвиговых регистров, основываясь на модифицированных элементах TSG (MTSG), представленных в [70]. Это позволило им реализовать схему умножителя Монтгомери, более выгодную в вопросах элементной сложности, количества мусорных выходов и квантового веса.

Вскоре были предложены другие обратимые схемы для умножения [71]. Они имели меньшую сложность, количество мусорных бит было также сокращено, но достигнуто это было, как правило, с помощью введения новых обратимых элементов. Например, элементов MKS и HNG, введенных в [72], или PFAG-элемента, введенного в [73].

Операцией, обратной к операции возведения в степень элемента циклической группы, является операция дискретного логарифмирования, играющая ключевую роль в современной криптографии. В работах [39, 40] рассматривается алгоритм дискретного логарифмирования по основанию примитивного элемента в конечном поле характеристики 2 и его реализация обратимыми схемами, как без дополнительной памяти, так и с дополнительной памятью. Доказывается верхняя асимптотическая

оценка сложности обратимой схемы, реализующей алгоритм дискретного логарифмирования; показывается, что уже при использовании  $n$  дополнительных входов, где  $n$  — степень расширения поля, сложность таких схем существенно снижается. Данная оценка асимптотически ниже, чем для произвольного булева преобразования, и достигается при асимптотически меньшем количестве дополнительных входов.

Одним из важнейших понятий для современной криптографии является однонаправленная функция (one-way function), т. е. функция, вычислить значение которой можно за время, полиномиальное от числа битов входа, в то время как вычислить за полиномиальное время функцию, обратную к ней — не представляется возможным. Это определение, на первый взгляд, идёт в разрез с принципами обратимой логики, согласно которым «зеркальная» схема для обратного преобразования должна иметь ту же сложность. Из этого противоречия можно сделать вывод, что либо однонаправленные функции на деле не существуют, либо что их невозможно реализовать при помощи схем из обратимых элементов.

В работе [74] исследуется этот вопрос и доказывается, что такой вывод является ложным, обратимая логика позволяет реализовывать однонаправленные функции, а её использование не исключает возможность их существования. Авторы показывают, что различие в сложности реализации схем для прямой и обратной функций кроется в следующем факте: для построения схемы из обратимых элементов, реализующей однонаправленную функцию, необходимо использовать дополнительные (мусорные линии), значения на которых после выполнения алгоритма схемой не входят в число битов ответа и могут быть проигнорированы, однако необходимы для осуществления обратного преобразования, см. рис. ???. Именно незнание значений этих битов (garbage outputs) обуславливает сложность обращения прямого преобразования.

В [75, 76] предлагается развитие данного взгляда на вопрос однонаправленности. Схема из обратимых элементов, реализующая однонаправленную функцию, должна иметь некоторое количество мусорных линий с неопределёнными значениями на выходе и, в следствие этого, не является обратимой. Автор (также один из авторов данной статьи) рассматривает подход, заключающийся в модификации таких схем с целью получения на мусорных линиях константных значений, не зависящих от значений, поданных на вход. Такая процедура называется *уборкой мусора* и требует введения в схему дополнительных элементов. Количество элементов, отвечающих за уборку мусора в схемах, реализующих прямое и обратное преобразование, различается, что и обуславливает различия в сложности вычисления однонаправленной функции и обратного ей преобразования, см. рис. 17.



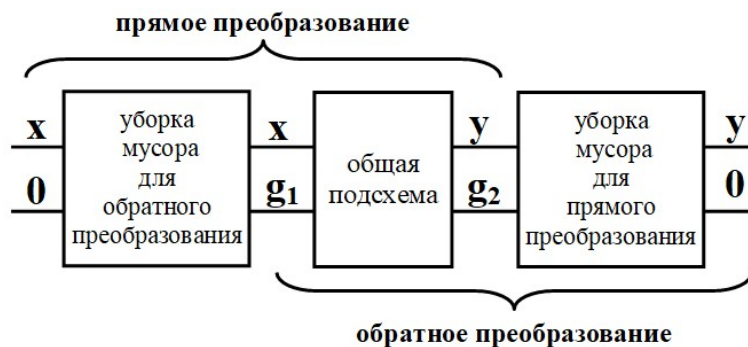


Рис. 17. Обратимая схема с уборкой мусора

## 8. ВЫВОДЫ

Обратимые вычисления — новая и развивающаяся парадигма вычислений, альтернативная существующей. Она обеспечивает принципиальную возможность выхода из ситуации «теплового проклятия». Важным является то, что обратимость возникает на всех уровнях вычислительных технологий, от схемотехники до физической реализации вычислений и на всех уровнях её необходимо поддерживать обратимость.

Обратимость возникает на всех уровнях вычислений. Это теория (алгебра и логика) вычислений, языки и парадигмы программирования, реализация прикладных программ и алгоритмов, схемотехника и, наконец, физическая реализация обратимых элементов.

На сегодняшний день теория логического синтеза обратимых схем активно развивается. Разные исследователи предлагают те или иные подходы к данной проблеме, но общих методов такого синтеза сбоеустойчивых схем ещё не разработано.

В последнее время проектные нормы ИМС уменьшаются до единиц нанометров, что влечёт уменьшение порога энергии заряженных частиц, вызывающего сбой. Это требует развития методов синтеза сбоеустойчивой вычислительной техники. В этой области настоятельной необходимостью является создание таких обратимых сбоеустойчивых стандартных элементов, как мультиплексор, демultipлексор, шифратор, дешифратор, сумматор и триггеры и др. Интересным и актуальным является направление, находящееся в общей области указанных направлений развития вычислительной техники: синтеза обратимых и сбоеустойчивых схем.

Теоретически интересным и практически важными является применение понятий обратимых вычислений в криптографии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bennett C. H. (1973) Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. Develop.*. (17(6)). p. 525–532.
2. Fredkin, E. & Toffoli, T. (1982) Conservative Logic. *International Journal of Theoretical Physics*. (21(3/4)). p. 632–644.
3. Бобков, С. Г. Высокопроизводительные вычислительные системы. — М.: НИИСИ РАН, 2014. — 296 с.  
Bobkov, S. G. (2014) *High performance computing systems*. Moscow: NIISI RAN.
4. Маймистов, А. И. Обратимые логические элементы — новая область применения оптических солитонов // Квантовая электроника. — М: ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 1995. — Т. 22 (10). — С. 1044–1048.  
Maimistov, A. I. (1995) Reversible logic elements — a new field of application of optical solitons. *Quantum electronics*. 22 (10). p. 1044–1048.
5. Merkle, R. C. (1993) Reversible Electronic Logic Using Switches. *Nanotechnology*. 4. p. 21–40.
6. Кучеренко, И. В. Обратимые клеточные автоматы // Дисс... канд. физ.-мат. наук. — М., 2012. — 147 с.  
Kucherenko, I. V. (2012) *Reversible Cellular Automata. Thesis ... PhD (Phys&Math)*. Moscow.
7. Schiff, J. L. (2007) *Cellular automata. A Discrete View of the World*. A John Wiley & Sons Inc., Publication. University of Auckland.
8. Margolus, N. (1984) Physics-like models of computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 10. p. 81–95.
9. Vichniac, G. (1984) Simulating physics with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 10. p. 96–115.
10. Wolfram, S. (1984) Cellular Automata as Models of Complexity. *Nature*. 311. p. 419–424.
11. Kauffman, S. A. (1969) Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *J. Theor. Biol.* 22. p. 437–467.

12. Сухинин, Б. М. Разработка генераторов псевдослучайных двоичных последовательностей на основе клеточных автоматов // НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ: Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. — М.: Национальный Электронно-Информационный Консорциум, 2010. — № 9. — С. 8.  
Sukhinin, B. M. (2010) Development of pseudorandom binary sequence generators based on cellular automata. *SCIENCE AND EDUCATION: Scientific publication of MSTU named after N. E. Bauman.* № 9. p. 8.
13. Durand, B. (1994) Inversion of 2D cellular automata: some complexity results. *Theoretical Computer Science.* 134 (2). p. 387–401.
14. Ключарёв, П. Г. NP-трудность задачи о восстановлении предыдущего состояния обобщенного клеточного автомата // НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ: Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. — М.: Национальный Электронно-Информационный Консорциум, 2012. — № 1. — С. 11.  
Klucharev, P. G. (2012) NP-difficulty of the problem of restoring the previous state of a generalized cellular automaton. *SCIENCE AND EDUCATION: Scientific publication of MSTU named after N. E. Bauman.* 1. p. 11.
15. Bennett C. H. (1989) Time/space trade-offs for reversible computation. *SIAM J. Comput.* 18 (4). p. 766–776.
16. Bennett, C. H. & Landauer, R. (1985) The Fundamental Physical Limits of Computation. *Scientific American.* July. p. 48–56.
17. Toffoli T. Reversible Computing // Automata, Languages and Programming / de Bakker (ed.). — Springer-Verlag, 1980. — С. 632–644.
18. Shende, V. V. & Prasad, A. K. & Markov, I. L. & Hayes, J. P. (2003) Synthesis of Reversible Logic Circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.* 22 (6). p. 710–722.
19. Coppersmith, D. & Grossman, E. (1975) Generators for certain alternating groups with applications to cryptography. *SIAM J. Appl. Math.* 29 (4). p. 624–627.
20. Even, S. & Goldreich, O. (1983) DES-like functions can generate the alternating group. *IEEE Trans. Inform. Theory.* IT-29 (6). p. 863–865.
21. Маслов, Д. Роль обратимости в компьютерных технологиях будущего // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:  
<http://www.kinnet.ru/cterra/538/33163.html>, свободный — (01.09.2019).

- Maslov, D 2004 // The role of reversibility in computer technology of the future [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.kinnet.ru/cterra/538/33163.html>, free — (01.09.2019).
22. Foster, J. N. (2010) *Bidirectional programming languages Technical Report MS-CIS-10-08*. Department of Computer & Information Science University of Pennsylvania — March 13.
  23. Yokoyama, T. & Gluck, K. (2007) A reversible programming language and its invertible self-interpreter. *Proceedings of the 2007 ACM SIGPLAN symposium on Partial evaluation and semantics-based program manipulation (PEPM '07)*, ACM, New York, NY, USA. 1. p. 144–153.
  24. Yokoyama, T. (2010) Reversible Computation and Reversible Programming Languages. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 253 (6). p. 71–81.
  25. Kalyan, S. & Perumalla, P. (2014) *Introduction to Reversible Computing*. CRC Press.
  26. Непейвода, Н. Н. От численного моделирования к алгебраическому // Параллельные вычисления и задачи управления РАСО'2012. Труды 6-й международной конференции. — ИПУ РАН, 2012. — Т. 1. — С. 93–103.  
Neprejvoda, N. N. (2012) From numerical modeling to algebraic. *Parallel computing and control tasks RASO'2012. Proceedings of the 6th International Conference*. 1. p. 93–103.
  27. Wille, R. & Große, D. & Teuber, L. & Dueck, G. W. and & Drechsler, R. (2008) Revlib: An online resource for reversible functions and reversible circuits. *International Symposium on Multiple Valued Logic*. May 2008. p. 220–225.
  28. Maslov, D.. (2018) *Reversible logic synthesis benchmarks page*. [Online] Available from: <http://www.cs.uvic.ca/dmaslov>. [Accessed: 31.08.2019].
  29. Jain, A. (2015) *Fault Tolerant Synthesis of Reversible Circuits*. LAMBERT Academic Publisher.
  30. Maslov, D. A. Reversible Logic Synthesis. — Ph.D. Thesis. University of New Brunswick Fredericton, N.B., Canada, 2003. — 165 с.
  31. Rahman, R. & Jamal, L. & Babu, H. M. H. (2011) Design of reversible fault tolerant programmable logic arrays with vector orientation. *Int. J. Inf. Commun. Technol. Res.* 1 (8). p. 337–342.

32. Закаблукон, Д. В. Быстрый алгоритм синтеза обратимых схем на основе теории групп подстановок // Прикладная дискретная математика. — ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», 2014. — № 2 (24). — С. 101–109.
- Zakablukov D. V. (2014) Fast synthesis algorithm for reversible schemes based on the theory of permutation groups. *Applied Discrete Math.* 2 (24). p. 101–109.
33. Карпенко, А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие / А. П. Карпенко. — М: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 446 с.
34. Hurst, S. L. & Miller, D. M. and & Muzio, J. C. (1985) *Spectral Techniques in Digital Logic*. Academic Press, Orlando, Florida.
35. Miller, D. M. (2002) Spectral and two-place decomposition techniques in reversible logic. *Proc. IEEE Midwest Symp. Circuits and Systems, August 2002*. p. .
36. Miller, D. M. and & Dueck, G. W. (2003) Spectral techniques for reversible logic synthesis. *6th International Symposium on Representations and Methodology of Future Computing Technologies, March 2003*. 2. p. 56–62.
37. Bruce, J. W. & Thornton M. A. & Shivakumaraiah, L. & Kokate, P. S. & Li, X. (2002) Efficient Adder Circuits Based on a Conservative Reversible Logic. *IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI, Pittsburgh, PA April 25–26, 2002*. 1. p. 83–88.
38. Бобровский, С. (2005) Будет ли обратимым зеттафлопсый компьютер?. *PC Week/RE*. [Online] 12 (474). p. 5. Available from: <https://www.itweek.ru/themes/detail.php?ID=70038>. [Accessed: 31.08.2019].
- Bobrovsky, S. (2005) Will a zettflops computer be reversible?. *PC Week/RE*. [Online] 12 (474). p. 5. Available from: <https://www.itweek.ru/themes/detail.php?ID=70038>. [Accessed: 31.08.2019].
39. Жуков, А. Е., Закаблукон, Д. В., Засорина, Ю. В., Чикин, А. А. Вычислительно асимметричные преобразования и схемы из обратимых элементов // Вопросы кибербезопасности. — М.: Закрытое акционерное общество Научно-производственное объединение «Эшелон», 2015. — № 2 (10). — С. 49–54.
- Zhukov, A. E., & Zakablukov, D. V., & Zasorina, Yu. V., & Chikin, A. A. (2015) Computationally asymmetric transformations and schemes of reversible elements. *Cybersecurity issues*. 2 (10). p. 49–54.

40. Закаблукон, Д. В. *Методы синтеза обратимых схем из функциональных элементов NOT, CNOT и 2-CNOT* // Дисс... канд. физ.-мат. наук. — М., 2018. — 139 с.  
Zakablukov, D. V. (2018) *Methods for the synthesis of reversible circuits from functional elements*. Thesis ... PhD (Phys&Math). Moscow.
41. Patel, K., N. & Markov, I., L. & Hayes, J., P. (2008) Optimal synthesis of linear reversible circuits. *Quantum Information and Computation*. 8 (3–4). p. 282–294.
42. Закаблукон, Д. В. Вентильная сложность обратимых схем как мера сложности четных подстановок // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, серия «Приборостроение». — М.: ФГБОУ ВО Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2015. — № 1(100). — С. 67–82.  
Zakablukov, D. V. (2015) Gate complexity of reversible circuits as a measure of the complexity of even permutations. *Bulletin of MSTU N. E. Bauman, series «Instrument-making»*. 1 (100). p. 67–82.
43. Закаблукон, Д. В. О синтезе обратимых схем с малым числом дополнительных входов из элементов NOT, CNOT и 2-CNOT // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:  
<https://arxiv.org/abs/1802.02346>, свободный — (01.09.2019).
44. Nakata, S. (2009) Recent Progress in Adiabatic Circuits. *Recent Patents on Electrical Engineering*. 2. p. 40–44.
45. Liu, B. (2009) Reconfigurable double gate carbon nanotube field effect transistor based nanoelectronic architecture. *Asia and South Pacific Design Automation Conference, ASP-DAC 2009*. 2. p. 19–22.
46. Яблонский, С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1988. — 1. — С. 5–25.  
Yablonskii, S. V. (1988) Some issues of reliability and control of control systems. *Mathematical Problems of Cybernetics*. 1. p. 5–25.
47. Islam, Md. Saiful & Rahman, M. M. & Begum, Z. Synthesis of fault tolerant reversible circuits // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:  
<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1008/1008.3340.pdf>, свободный — (01.09.2019).
48. Nayeem, N. M. and & Rice, J. E. Online fault detection in reversible logic // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:

- [https://mafiadoc.com/online-fault-detection-in-reversible-logic-semantic-scholar\\_59a8baad1723ddb5efc073.html](https://mafiadoc.com/online-fault-detection-in-reversible-logic-semantic-scholar_59a8baad1723ddb5efc073.html), свободный — (01.09.2019).
49. Alagoz, B. B. Boolean Logic with Fault Tolerant Coding // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:  
[https://www.researchgate.net/publication/24166383\\_Boolean\\_Logic\\_with\\_Fault\\_Tolerant\\_Coding/citation/download](https://www.researchgate.net/publication/24166383_Boolean_Logic_with_Fault_Tolerant_Coding/citation/download), свободный — (01.09.2019). 31.082019
50. Стемповский, А. Л., Тельпухов, Д. В., Жукова, Т. Д., Гуров, С. И., Соловьев, Р. А. Методы синтеза сбоеустойчивых комбинационных КМОП схем, обеспечивающих автоматическое исправление ошибок // Известия ЮФУ. Технические науки / Ростов-на-Дону: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет». — 2017, № 7. — 192. — С. 197–210.  
Stempkovsky, A. L., & Telpukhov, D. V., & Zhukova, T. D., & Gurov, S. I., & Soloviev, P. A. (2017) Synthesis methods for fault-tolerant CMOS combinational circuits providing automatic error correction. *News YuFU. Technical science.* 7 (192). p. 197–210.
51. Гаврилов, С. В., Гуров, С. И., Жукова, Т. Д., Рыжова, Д. И. Применение теории кодирования для повышения надёжности комбинационных схем // Информационные технологии. — М.: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство «Новые технологии», 2016. — № 12. — С. 931–937.  
Gavrilov, S. V., & Gurov, S. I., & Zhukova, T. D., & Ryzhova, D. I. (2016) Application of coding theory to increase the reliability of combinational circuits. *Информационные технологии.* № 12. p. 931–937.
52. Гаврилов, С. В., Гуров, С. И., Жукова, Т. Д. и др. Методы повышения сбоеустойчивости комбинационных ИМС методами избыточного кодирования // Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — № 53. — С. 93–103.  
Gavrilov, S. V., & Gurov, S. I., & Zhukova, T. D. et al (2016) Methods for increasing the robustness of combinational integrated circuits using redundant coding methods. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.* 53. p. 93–103.
53. Кормаков, Г. В., Гуров, С. И. Сбоеустойчивые обратимые схемы и метод их синтеза в пространстве Хэмминга // Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. — М.: МАКС Пресс, 2018. — № 57. — С. 21–35.

- Kormakov, G. V., & Gurov, S. I. (2018) Failure-proof reversible circuits and a method for their synthesis in Hamming space. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics*. 57. p. 21–35.
54. Thapliyal, H. & Zvolinski, M. (2006) Reversible logic to cryptographic hardware: a new paradigm. *Proceedings of the 49th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS '06), 2006, Aug. 6–9, Puerto Rico*. 1. p. 342–346.
55. Burignat, S. & De, Vos, A. (2012) A review on performances of reversible ripple-carry adders. *Intel Journal of Electronics and Telecommunications*. 58 (3). p. 205–212.
56. Rajput, S. & Jain, R. & Kandu, A. K. G. (2013) Review of full adder using reversible logic. *International Journal of Electronics and Communication Engineering (IJECE)*. 2 (3). p. 97–102.
57. Sinha, H. P. & Syal, N. (2012) Design of Fault Tolerant Reversible Multiplier. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*. 1 (6). p. 120–124.
58. Banerjee, A. & Sarkar, S. & Das, M. & Ghosh, A. (2015) Design of reversible binary logarithmic multiplier and divider using optimal garbage. *International Journal of Advanced Computer Research*. 5 (18). p. 1–10.
59. Sivakumar, G. P. & Devi, S. R. (2013) A Comparative Study: Multiplier Design using Reversible Logic Gates. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*. 2 (3). p. 365–369.
60. Bhagyalakshmi, H. R. & Venkatesha, M. K. (2010) An improved design of a multiplier using reversible logic gates. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2 (8). p. 3838–3845.
61. Ali, B. & Rahman, H. A. & Rahman, M. (2011) Design of a High Performance Reversible Multiplier. *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*. 8 (6, No 1). p. 134–141.
62. Mahfuzzreza, Md. & Islam, R. & Ali, B. (2013) Optimized Design of High Performance Reversible Multiplier Using BME and MHNG Reversible Gate. *American International Journal of Research in Science, Technology, Engineering & Mathematics*. 2 (2, March-May). p. 227–232.
63. Bhagyalakshmi, H. R. & Venkatesha, M. K. (2012) Optimized multiplier using reversible multicontrol input Toffoli gates. *International Journal of VLSI design & Communication Systems (VLSICS)*. 3 (6, December 2012). p. 27–40.



64. Rashmi, S. B. & Umarani, T. G. & Shreedhar, H. K. (2011) Optimized Reversible Montgomery Multiplier. *International Journal of Computer Science and Information Technologies (IJCSIT)*. 2 (2). p. 701–706.
65. Younis, S. G. (1994) *Asymptotically Zero Energy Computing Using Split-Level Charge Recovery Logic*. Ph.D. thesis. MIT EECS, June 1994.
66. Maaz, M. B. & Abu-Shama, E. & Bayoumi, M. (1996) A fast and low power multiplier architecture. *Proceedings of the 39th Midwest Symposium on Circuits and Systems, USA, 1996*. 3. p. 1371–1374.
67. Thapliyal, H. & Srinivas, M. B. (2006) Novel reversible multiplier architecture using reversible TSG gate. *IEEE Int. Conf. Computer Systems and Applications*. 1. p. 100–103.
68. Thapliyal, H. & Srinivas, M. B. (2005) Novel Reversible "TSG" Gate and Its Application for Designing Reversible Carry Look Ahead Adder and Other Adder Architectures. *Tenth Asia-Pacific Computer Systems Architecture Conference (ACSAC05), Singapore, October 24–26*. 1. p. 805–817.
69. Nayeem, Noor, Muhammed & Jamal, Lafifa and & Babu, Hafiz, Md. Hasan. (2009) Efficient Reversible Montgomery Multiplier and Its Application to Hardware Cryptography. *Journal of Computer Science*. 5 (1). p. 49–56.
70. Biswas, A. K. & Hasan, M. M. & Chowdhury, A. R. & Babu, H. M. H. (2008) Efficient approaches for designing reversible binary coded decimal adders. *Microelectronics Journal*. 39 (12). p. 1693–1703.
71. Banerjee, A. & Pathak, A. An analysis of reversible multiplier circuits // [Электронный ресурс]. — Режим доступа: arXiv:0907.3357v1, свободный — (01.09.2019).
72. Haghparast, M. & Navi, K. (2007) A Novel Reversible Full Adder Circuit for Nanotechnology Based Systems. *Journal of Applied Sciences*. 7. p. 3995–4000.
73. Islam, M. S. & Hafiz, M. Z & Rahman, M. M. & Begum, Z. (2009) Low cost quantum realization of reversible multiplier circuit. *Information technology journal*. 8. p. 208–213.
74. Chau, H. F. & Lo, H.-K. (1997) One-way Functions in Reversible Computations. *Cryptologia*. 21 (2). p. 139–148.

75. Жуков, А. Е. Схемы из обратимых логических элементов: Один подход к изучению однонаправленности // Труды III Международной конференции «Информационные системы и технологии» (IST'2006). — Минск: Издательство Белорусского государственного университета, 2006. — С. 85.

Zhukov A. E., (2006) Circuits from reversible logic elements: One approach to the study of unidirectionality. *Proceedings of the III International Conference «Information Systems and Technologies» (IST'2006)*. 1. p. 8–11.

76. Жуков, А. Е. Один подход к изучению однонаправленности // Журнал «Information Security / Информационная безопасность». — М, 2018. — Т. 1. — С. 40–43.

Zhukov A. E., (2006) One approach to the study of unidirectionality. *Magazine «Information Security / Information Security»*. 1. p. 40–43.

УДК: 51.77

MSC2010: 00A72

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

© И. В. Зайцева

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
ПЕР. ЗООТЕХНИЧЕСКИЙ, 12, СТАВРОПОЛЬ, 355017, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ - ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ НАБ., Д. 7–9, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 199034, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: [irina.zaitseva.stu@yandex.ru](mailto:irina.zaitseva.stu@yandex.ru)

### MODELING OF THE OPTIMAL ALLOCATION OF LABOR RESOURCES.

Zaitseva I. V.

**Abstract.** The article presents models of optimal distribution of labor resources. The developed game-theoretic model of a static optimal-purpose problem is described as a game in a normal form. The game is given a lot of workers and a lot of businesses, and the situation is a substitution. Each substitution is one of the possible assignments of employees to enterprises. To select an employee or an enterprise, an evaluation criterion is introduced.

The number of evaluation criteria is called the utility for the employee from the appointment to the enterprise (the degree of satisfaction of the player's interests), and for the enterprise — the utility for the enterprise from the appointment of an employee (the degree of satisfaction of the player's interests). From the numbers of the evaluation criterion, the utility matrix is written and the matrix of players' winnings in the game is built. According to the matrix, a compromise set is built in the game and a compromise win is found, which is a guaranteed win for the least satisfied player. An algorithm for constructing a compromise set is presented. For the algorithm, its time estimate and complexity class are found.

This paper considers game-theoretic model of dynamic optimal assignment in the example of the functioning of the labour market. The deterministic model of the optimal distribution of workers by enterprises is described, taking into account the changing conditions over time. At each moment of time, the States of the employee and the enterprise are determined. Moments of time are moments of stationary States of the system. In each stationary state is determined by the game in normal form. The game is a compromise situation, the optimal policy of the labor exchange, and also calculates the income of the system from the appointments as the sum of the functions of the winnings of all players. The functioning of the labor market as a system for some periods of time is presented in the form of a multi-step game on the tree.

In a one-step game based on the principle of optimal compromise set there is a compromise situation and the corresponding compromise vector of control. On the tree of a multi-step game there is a compromise income of the system in a few steps, when the sequence of games was realized, and a compromise path corresponding to the sequence of compromise control vectors.

The compromise income of the system and the sequence of compromise controls are found by means of recurrent relations of dynamic programming. Thus, it is possible to specify the optimal behavior of all participants in the labor market at any given time. The article presents the solution of the static and dynamic problem of optimal distribution of labor resources based on principle of optimal compromise set.

**Keywords:** *compromise set, modeling, optimality principle, distribution, labor resources.*

## ВВЕДЕНИЕ

В первой части работы рассмотрена теоретико-игровая модель статической задачи оптимального назначения. Заданы множество работников  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  и множество предприятий  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ , и описана игра в нормальной форме  $\Gamma = \langle I, X, \{H_i\}_{i=1}^{m+n} \rangle$ , в которой игроками являются работники и предприятия, а ситуацией является подстановка  $p_k$ . Каждая подстановка есть одно из возможных назначений работников на предприятия из множества  $P = \{p_k, k = 1, 2, \dots, n!\}$ .

Каждый работник  $s_i$  оценивает для себя работу на том или ином предприятии  $h_j$ . Критерий оценки может включать, например, заработную плату, соответствие полученной специальности, количество времени, необходимого на дорогу от дома до работы, предоставляемые льготы и т. д. Учтя все преимущества и недостатки, работник выносит предприятию свою оценку  $\alpha_{ih_j} \in Z^+$ , где  $Z^+$  — множество положительных целых чисел ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ). Число  $\alpha_{ih_j}$  назовем полезностью для работника  $s_i$  от назначения на предприятие  $h_j$  и будем понимать его как степень удовлетворенности интересов игрока  $s_i$ . Аналогично, предприятие  $h_j$  оценивает каждого работника  $s_i$  некоторым числом  $\beta_{h_j i} \in Z^+$ . На эту оценку влияет совокупность таких факторов, как профессиональная квалификация работника, назначаемая заработная плата, умение работать в коллективе, творческая инициатива и т. д. Число  $\beta_{h_j i}$  назовем полезностью для предприятия  $h_j$  от назначения на него работника  $s_i$ , и будем понимать под ним степень удовлетворенности интересов игрока  $h_j$ .

Оценки обеих сторон записаны в матрицы полезности  $A_{m \times n} = (\alpha_{ih_j})$  и  $B_{n \times m} = (\beta_{h_j i})$ , по которым построена матрица выигрышей игроков  $W_{n! \times (m+n)}$  в игре  $\Gamma$ . Строки матрицы выигрышей  $W_{n! \times (m+n)}$  соответствуют ситуациям  $p_k$  из множества ситуаций  $X = P = \{p_k, k = 1, 2, \dots, n!\}$ , столбцы соответствуют игрокам из множества  $I$ . Элементом матрицы  $W_{n! \times (m+n)}$  является функция выигрыша игрока

в определенной ситуации. По матрице  $W_{n! \times (m+n)}$  построено компромиссное множество  $C_H = \{p_{\bar{k}} \in X\}$  в игре  $\Gamma$  и найден компромиссный выигрыш, который является гарантированным выигрышем наименее удовлетворенного игрока. Алгоритм построения компромиссного множества  $C_H$  описан по шагам. Найдена его временная оценка и класс сложности. Во второй части работы на примере функционирования рынка труда рассмотрена теоретико-игровая модель динамической задачи оптимального назначения. Описана детерминированная модель оптимального распределения работников  $M^t = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M^t|}\}$  по предприятиям  $L^t = \{l_1, l_2, \dots, l_{|L^t|}\}$  с учетом изменяющихся условий за  $T$  периодов времени. В каждый момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  определены множества социально-экономических состояний работника  $A_{m_k}^t = \{a_{m_k}^t \mid a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu)\}$  и финансово-экономических состояний предприятия  $B_{l_d}^t = \{b_{l_d}^t \mid b_{l_d}^t = (b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\mu)\}$  ( $k = 1, 2, \dots, |M^t|$ ,  $d = 1, 2, \dots, |L^t|$ ). Состояние работника  $m_k$  описывает вектор параметров  $a_{m_k}^t$ , компоненты которого оценивают, например, его квалификацию, доход, семейное положение, жилищные условия и т. д. Состояние предприятия  $l_d$  описывает вектор параметров  $b_{l_d}^t$  с компонентами, соответствующими, например, оценке его основных фондов, размерам производства, качеству продукции, прибыли, численности работников и т. д. Векторы состояний работников и предприятий задают вектор состояния рынка труда, или системы,  $S_\eta^t = (a_{m_1}^t, a_{m_2}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t, b_{l_1}^t, b_{l_2}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t) \in S^t$  в момент времени  $t$ , где  $S^t$  — множество состояний системы в момент времени  $t$ ,  $\eta$  — номер состояния.

Моменты времени  $t$  являются моментами стационарных состояний системы. В каждом стационарном состоянии  $S_\eta^t$  определена игра в нормальной форме  $G_\eta^t = \left\langle I^t, X^t, \{K_{m_k}^t\}_{k=1}^{|M^t|}, \{K_{l_d}^t\}_{d=1}^{|L^t|} \right\rangle$  (аналогичная той, которая описана в статической задаче оптимального назначения в первой части работы). В игре  $G_\eta^t$  найдена компромиссная ситуация  $p_{\bar{\eta}} \in C_H^{t,\eta}$ , оптимальная политика биржи труда  $q_{\bar{\eta}} \in Q^t$ , а также вычислен доход системы от назначений  $V(S_\eta^t, p_{\bar{\eta}})$  как сумма функций выигрышей всех игроков. Переход системы из состояния  $S_\eta^t$  в состояние  $S_\zeta^{t+1} \in S^{t+1}$  происходит под действием общего вектора управлений  $U_\eta^{t+1} = \left( u_{a_{m_1}^{t+1}}, \dots, u_{a_{m_k}^{t+1}}, \dots, u_{a_{m_{|M^t|}}^{t+1}}, u_{b_{l_1}^{t+1}}, \dots, u_{b_{l_d}^{t+1}}, \dots, u_{b_{l_{|L^t|}}^{t+1}} \right) \in U^{t+1}$ , где  $U^{t+1}$  — множество общих векторов управления в момент времени  $t$ . Каждая компонента векторов  $u_{a_{m_k}^{t+1}} = (u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu})$  и  $u_{b_{l_d}^{t+1}} = (u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\mu})$  управляет соответствующим параметром векторов состояний  $a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu)$  и  $b_{l_d}^t = (b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\mu)$ , то есть задает вектор состояния работника  $a_{m_k}^{t+1}$  и вектор состояния предприятия  $b_{l_d}^{t+1}$  в следующий момент времени  $t + 1$ , а значит и новое состояние системы  $S_\zeta^{t+1} \in S^{t+1}$ .

Под действием общих векторов управления из множества  $U^{t+1}$  система переходит из состояния  $S_\eta^t \in S^t$  во множество состояний  $S^{t+1}$ .

Функционирование системы в течение  $T$  периодов времени представлено в виде многошаговой игры на дереве  $G$ . Вершины дерева соответствуют состояниям системы в определенный момент времени, дуги дерева соответствуют общим векторам управления. В периоды времени  $(t, t + 1)$  система находится в переходных состояниях. В многошаговой игре  $G$  переход системы из вершины  $S_\xi^t$  за один шаг описывает одношаговая игра  $\Gamma_\xi^t$ . Стратегиями игроков  $m_k$  и  $l_d$  являются их общие векторы управления  $u_{a_{m_k}^{t+1}} \in U_{m_k}^{t+1}$  и  $u_{b_{l_d}^{t+1}} \in U_{l_d}^{t+1}$ , которые составляют общий вектор стратегий, или общий вектор управления  $U_\eta^{t+1}$ , определяющий ситуацию  $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$  в игре  $\Gamma_\xi^t$ ,  $S^{t+1}$  — множество ситуаций в игре  $\Gamma_\xi^t$ . Функции выигрыша игроков в игре  $\Gamma_\xi^t$  заданы на множестве ситуаций  $S^{t+1}$  с помощью матриц полезности  $A^t, A^{t+1}, B^t, B^{t+1}$ . Доход системы от перехода  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1})$  из состояния  $S_\xi^t$  в состояние  $S_\lambda^{t+1}$  за один шаг в общем случае вычисляется как разность доходов системы от назначений  $V(S_\lambda^{t+1}, p_\lambda)$  и  $V(S_\xi^t, p_\xi)$  в соответствующих состояниях. В одношаговой игре  $\Gamma_\xi^t$  на основе принципа оптимальности компромиссного множества найдена компромиссная ситуацию  $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$  и соответствующий ей компромиссный вектор управления  $U_\lambda^{t+1}$ . На дереве многошаговой игры  $G$  найдем компромиссный доход системы за  $T$  шагов  $!^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1})$ , когда реализовалась последовательность игр  $\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-1}, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}$ , и компромиссный путь  $U_{\bar{r}} = (U_{\bar{r}}^1, U_{\bar{r}}^2, \dots, U_{\bar{r}}^T)$ , соответствующий последовательности компромиссных векторов управления  $\{U_{\bar{r}}^t\}_{t=1}^{T-1}$ . Компромиссный доход системы  $C^T$  и последовательность компромиссных управлений  $\{U_{\bar{r}}^t\}_{t=1}^{T-1}$  найдены с помощью рекуррентных соотношений динамического программирования.

## 1. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Рассмотрим множество работников  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ , желающих устроиться на работу, и множество предприятий  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ , которые предлагают рабочие места. Предположим, что каждое предприятие  $h_j$  имеет одну вакантную должность, на которую оно желает принять работника, и работник  $s_i$  может быть принят только на одно предприятие. Требуется произвести назначение работников оптимальным образом.

В качестве множества  $H$  можно рассмотреть предприятия, нуждающиеся в работниках, а под  $S$  понимать множество типов работников.

Будем считать, что каждое предприятие из множества  $H$  имеет работников только одного типа, и каждый работник из множества  $S$ , в свою очередь, может найти работу только на одном предприятии. В качестве множества  $S$  можно рассмотреть также множество типов работников, а под  $H$  понимать регионы, в которых можно найти для них работу. Решением этой задачи является выбор работника для каждого предприятия оптимальным образом.

Рассмотрим игру в нормальной форме  $\Gamma = \langle I, X, \{H_i\}_{i=1}^{m+n} \rangle$ , где  $I = \{1, 2, 3, \dots, m+n\}$  — множество игроков,  $X$  — множество всех ситуаций в игре,  $H_i : X \rightarrow R_1$  — функция выигрыша игрока  $i$ . Формально назначение работников на работы можно представить подстановкой  $p_k$  вида:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ h_k & h_l & \dots & h_n \end{pmatrix}$ , где первая строка неизменна и соответствует номерам работников из  $S$ , а вторая — игрокам из  $H$ . Рассмотрим случай, когда  $m = n$ . Количество таких подстановок  $|P| = n!$ . Ситуацией в игре будем считать подстановку. Таким образом  $|X| = |P| = n!$ .

Пусть каждый игрок оценивает свое назначение некоторым положительным числом, которое назовем полезностью для данного игрока от полученного назначения. Будем считать, что полезность тем больше, чем больше игрок удовлетворен полученным назначением. Таким образом, полезность показывает степень удовлетворенности интересов игрока.

Запишем полезности для игроков из множеств  $S$  и  $H$  в матрицы  $A$  и  $B$ , которые назовем матрицами полезности.

Матрицы  $A_{m \times n} = (\alpha_{lh_k})$  и  $B_{n \times m} = (\beta_{h_k l})$  ( $l = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$ ) (индекс  $l$  соответствует номерам игроков из множества  $S$ , индекс  $k$  соответствует номерам игроков из множества  $H$ ) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1h_1} & \alpha_{1h_2} & \dots & \alpha_{1h_n} \\ \alpha_{2h_1} & \alpha_{2h_2} & \dots & \alpha_{2h_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{mh_1} & \alpha_{mh_2} & \dots & \alpha_{mh_n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{h_1 1} & \beta_{h_1 2} & \dots & \beta_{h_1 m} \\ \beta_{h_2 1} & \beta_{h_2 2} & \dots & \beta_{h_2 m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{h_n 1} & \beta_{h_n 2} & \dots & \beta_{h_n m} \end{pmatrix}.$$

Функции выигрыша игроков зададим на множестве подстановок  $P$  следующим образом:

$$H_1(p_k) = \alpha_{1h_1}, H_2(p_k) = \alpha_{2h_1}, \dots, H_m(p_k) = \alpha_{mh_1};$$

$$H_{m+1}(p_k) = \beta_{h_1 m}, H_{m+2}(p_k) = \beta_{h_2 m}, \dots, H_{m+n}(p_k) = \beta_{h_n m}, k = 1, 2, \dots, n!$$

Сформируем матрицу выигрышей  $W_{n! \times (m+n)}$  (строки соответствуют подстановкам, образующим множество ситуаций  $X$ , а столбцы — номерам игроков из множества  $I$ ):

$$W = \begin{pmatrix} H_1(p_1) & H_2(p_1) & \dots & H_{m+n}(p_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1(p_k) & H_2(p_k) & \dots & H_{m+n}(p_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1(p_{n!}) & H_2(p_{n!}) & \dots & H_{m+n}(p_{n!}) \end{pmatrix}.$$

В качестве решения задачи предлагается компромиссное множество. Ниже приведем определение компромиссного множества.

**Определение 1.** Компромиссное множество  $C_H$  определяется следующим образом:  $C_H = \left\{ x \in X : \max_i (M_i - H_i(x)) \leq \max_i (M_i - H_i(x')), \forall x' \in X \right\}$ , где  $M_i = \max_{x \in X} H_i(x)$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что алгоритм принадлежит классу сложности  $O(f(n))$ , если время его работы  $T \leq \theta \cdot f(n)$ , где  $\theta$  — константа, зависящая от скорости вычисления ЭВМ. В этом случае время  $T$  называют временной сложностью алгоритма.

В наших обозначениях  $|I| = m + n$ ,  $|X| = n!$ ,  $W_{n! \times (m+n)}$ .

Представим алгоритм, который из состоит из 4-х шагов [3]:

1 шаг. Вычислим идеальный вектор  $M = (M_1, \dots, M_{m+n})$ , где  $M_i = \max_{x \in X} H_i(x)$ .

$$(T_1 \leq \theta \cdot n!(m+n)).$$

2 шаг. Для каждой ситуации  $x \in X$  и найдем отклонение функции выигрыша  $i$ -го игрока  $H_i(x)$  от компоненты идеального вектора  $M_i$ , то есть для  $\forall x \in X$  и вычислим  $M_i - H_i(x)$ . Так делаем для всех игроков из множества  $I$ .

$$(T_2 \leq \theta \cdot (m+n)n!).$$

3 шаг. Для каждой ситуации  $x \in X$  найдем максимальное отклонение разности  $M_i - H_i(x)$  по множеству игроков  $I$ , то есть вычислим  $\max_{i \in I} (M_i - H_i(x))$ .

$$(T_3 \leq \theta \cdot (m+n)n!).$$

4 шаг. На множестве ситуаций  $X$  найдем такую точку  $x^*$ , которая доставляет минимум выражению  $\max_{i \in I} (M_i - H_i(x))$ , то есть найдем ситуацию  $x^*$ :

$$\min_{x \in X} \max_{i \in I} (M_i - H_i(x)) = M_i - H_i(x^*).$$

$$(T_4 \leq \theta \cdot n!).$$



Тогда время работы алгоритма построения компромиссного множества оценивается как  $T \leq \theta \cdot n!(m + n + 1)$ , то есть алгоритм принадлежит классу  $O(n!(m + n + 1))$ .

**Замечание 1.** В случае  $m > n$  ( $m < n$ ) следует ввести  $m - n$  ( $n - m$ ) фиктивных игроков из  $H(S)$  и положить для них функции выигрыша равными нулю. Далее применить описанный алгоритм.

## 2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ УСЛОВИЙ

Рассмотрим функционирование рынка труда в течение нескольких периодов времени. Работники, предприятия и биржа труда являются его активными участниками. Работники подают сведения о своих профессиональных квалификациях и предполагаемой работе на биржу труда. Предприятия, испытывая необходимость в различных работниках, также подают заявки на биржу. Биржа труда, изучив спрос на работников того или иного профиля с учетом предложения со стороны работников, выбирает политику по распределению работников по предприятиям. Таким образом удовлетворяются запросы обеих сторон [5].

Предположим, что работник в любой момент времени может находиться в одном из конечного числа социально-экономических состояний. Состояние работника описывает вектор параметров, компоненты которого оценивают, например, его квалификацию, образование, доход и т. д. Каждое предприятие, в свою очередь, может находиться в одном из конечного числа финансово-экономических состояний, определяемых вектором параметров с компонентами, соответствующими, например, оценке его основных фондов, размеров производства, прибыли, численности работников и т. д. Векторы состояний работников и предприятий задают вектор состояния рынка (или системы) труда в каждый момент времени.

Пусть каждый работник, находясь в определенном социально-экономическом состоянии, оценивает для себя работу на том или ином предприятии. Критерий оценки может включать, например, заработную плату, соответствие полученной специальности, количество времени, необходимого на дорогу от дома до работы, предоставляемые льготы и т. д. Учтя все преимущества и недостатки, работник выносит предприятию свою оценку. Аналогично предприятие, находясь в определенном финансово-экономическом состоянии, дает оценку каждому работнику, на которую влияет совокупность таких факторов как профессиональная квалификация работника, назначаемая заработная плата, умение работать в коллективе и т. д. Оценки обеих сторон задают их матрицы полезности, в зависимости от которых биржа труда в каждом состоянии рынка труда выбирает свою политику [6].

Будем считать, что после распределения работников по предприятиям, то есть после проведения биржей труда определенной политики, рынок труда имеет некоторый доход. Назовем его доходом от назначений и будем понимать под ним доход биржи труда от проведенной политики. Доход от назначений может вычисляться, например, как сумма доходов работников и предприятий от полученных назначений, которые, в свою очередь, определяются по их матрицам полезности. Можно приписать доходам работников и предприятий различные весовые коэффициенты и вычислить доход от назначений как сумму этих доходов, взятых с весовыми коэффициентами.

Пусть в начальный момент времени задано состояние рынка труда, определено множество политик биржи труда, а также матрицы полезности работников и предприятий и их доходы от возможных назначений. Решение статической задачи о назначениях дает оптимальную политику биржи и соответствующие назначения работников на предприятия. В качестве принципа оптимальности можно выбрать, например, максимизацию суммарного дохода от назначений или принцип компромиссного множества [7].

Известно, что под влиянием изменений в экономике конъюнктура рынка труда может измениться. В следующий момент времени в зависимости от решения, принятого на предыдущем этапе, и, возможно, от иных причин может измениться множество предприятий, имеющих потребность в работниках, множество работников, нуждающихся в работе, а также множество их состояний. Могут измениться и критерии оценки обеих сторон и, соответственно, их матрицы полезности. Следовательно, возникает новая ситуация на рынке труда, в которой бирже труда необходимо определить оптимальную политику и в соответствии с ней произвести назначения, то есть необходимо решить новую задачу об оптимальных назначениях. Пусть для определенности имеется конечное множество таких ситуаций, причем в каждой из них может быть реализован любой из двух принципов оптимальности: принцип максимизации суммарного дохода от назначений или принцип компромиссного множества.

Те моменты времени, когда ситуация на рынке труда определена и оптимальное решение дает статическая задача о назначениях, будем называть моментами стационарных состояний рынка труда, или системы. Рассмотрим периоды времени, когда происходит процесс изменения конъюнктуры рынка. Будем называть их переходными периодами рынка труда. Переход рынка труда из одного состояния в другое осуществляется под действием общего вектора управления. Его компонентами являются векторы управлений из множества векторов управлений работников и предприятий.

Каждая компонента векторов управлений работника и предприятия изменяет соответствующий параметр их векторов состояний, то есть управляет этими параметрами. Например, работник может повысить свою квалификацию, увеличить или уменьшить свой доход, изменить семейное положение и т. д. Предприятие может изменить свои основные фонды, размеры производства, повысить качество выпускаемой продукции, увеличить прибыль, сократить или увеличить число работников и т. д.

Будем считать, что рынок труда от перехода из одного состояния в другое под действием общего вектора управления имеем доход, который назовем доходом от перехода за один шаг. Доход от перехода за один шаг может вычисляться как сумма доходов от перехода работников и предприятий, взятых с различными весовыми коэффициентами, а может быть найден как разность доходов от назначений рынка труда в соответствующих состояниях. Необходимо найти оптимальный вектор управления и соответствующий доход от перехода рынка труда из одного состояния в другое на основе известных принципов оптимальности.

Пусть работники и предприятия могут изменять параметры своих векторов состояний некоторое конечное число раз. Значит множество общих векторов управления конечно и конечно число возможных состояний рынка труда. Таким образом, возникает многошаговая модель функционирования рынка труда. Ее удобно представить на конечном связном графе (дереве). Вершины дерева соответствуют состояниям рынка труда в определенный момент времени. Дуги дерева соответствуют общим векторам управления, под действием которых осуществляется переход рынка труда из одного состояния в другое. В каждой вершине необходимо решить статическую задачу оптимального назначения и определить соответствующий доход системы, и, кроме того, найти оптимальный путь на дереве, соответствующий последовательности оптимальных векторов управления и доход от перехода рынка труда из одного состояния в другое за общее число шагов.

В качестве принципа оптимальности выберем принцип компромиссного множества, и решим задачу поиска компромиссного дохода от функционирования системы за  $T$  шагов и соответствующего компромиссного пути методом динамического программирования [8].

Перейдем к решению задачи. Считаем, что переход работников и предприятий в новые состояния детерминирован, то есть они переходят в новые состояния с вероятностью, равной единице. Процесс распределения работников по предприятиям в каждый момент времени осуществляет биржа труда [9]. Построим игры в моменты стационарных состояний системы. Пусть распределение работников по предприятиям происходит в течение  $t$  моментов времени, где  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  ( $T$  —

число периодов распределения). В каждый момент времени  $t$  множество работников, состоящих на бирже труда, обозначим через  $M^t = \{m_1, m_2, \dots, m_{|M^t|}\}$ , множество предприятий, нуждающихся в работниках, обозначим через  $L^t = \{l_1, l_2, \dots, l_{|L^t|}\}$  и определим игру в нормальной форме  $G^t = \left\langle I^t, X^t, \{K_{m_k}^t\}_{k=1}^{|M^t|}, \{K_{l_d}^t\}_{d=1}^{|L^t|} \right\rangle$ , где  $I^t = \{m_1, \dots, m_{|M^t|}, l_1, \dots, l_{|L^t|}\}$  — множество игроков,  $X^t$  — множество ситуаций в игре,  $K_{m_k}^t : X^t \rightarrow R_1$  — функция выигрыша игрока  $m_k$ ,  $K_{l_d}^t : X^t \rightarrow R_1$  — функция выигрыша игрока  $l_d$  ( $k = 1, 2, \dots, |M^t|$ ,  $l = 1, 2, \dots, |L^t|$ ) [10]. Назначение работников на работы можно представить подстановкой  $p_d$  вида:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & |M^t| \\ l_d & l_e & \dots & l_s \end{pmatrix}$ , где первая строка неизменна и соответствует номерам работников  $M^t$ , а вторая — игрокам из  $L^t$ . Ситуацией в игре будем считать подстановку,  $X^t = P^t = \{p_d | d = 1, 2, \dots, |L^t|\}$  — множество ситуаций (подстановок),  $|X^t| = (|L^t|)!$ . Каждой ситуации  $p_d$  однозначно соответствует политика биржи труда  $q_d$  из множества  $Q^t = \{q_1, q_2, \dots, q_{|L^t|}\}$ .

В каждый момент времени  $t$  игроки  $m_k$  и  $l_d$  находятся в некоторых состояниях, определяемых векторами параметров  $a_{m_k}^t$  и  $b_{l_d}^t$ :  $a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu)$ ,  $b_{l_d}^t = (b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu)$ , где  $A_{m_k}^t = \{a_{m_k}^t | a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu), k = 1, 2, \dots, |M^t|\}$  — множество векторов состояний игрока  $m_k$  в момент времени  $t$ ,  $B_{l_d}^t = \{b_{l_d}^t | b_{l_d}^t = (b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu), d = 1, 2, \dots, |L^t|\}$  — множество векторов состояний игрока  $l_d$  в момент времени  $t$ . Вектор состояния системы  $S_\eta^t$  задается векторами состояний всех игроков:  $S_\eta^t = (a_{m_1}^t, a_{m_2}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t, b_{l_1}^t, b_{l_2}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t)$ , где  $\eta$  — номер состояния в момент времени  $t$ . В каждый момент времени  $t$  определим матрицы полезности игроков  $A^t$  и  $B^t$  следующим образом. Пусть количество векторов состояний у каждого игрока  $m_k$  и  $l_d$  одинаково. Занумеруем векторы состояний  $a_{m_k}^t$  игрока  $m_k$  индексом  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, |A^t|$ , векторы состояний  $b_{l_d}^t$  игрока  $l_d$  индексом  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, |B^t|$ . Тогда матрицы  $A^t$  и  $B^t$  имеют вид:

$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{1m_1}(p_1) & \dots & \alpha_{1m_{|M^t|}}(p_1) & \dots & \alpha_{1m_1}(p_{|L^t|!}) & \dots & \alpha_{1m_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & & & & \\ \alpha_{im_1}(p_1) & \dots & \alpha_{im_{|M^t|}}(p_1) & & \alpha_{im_1}(p_{|L^t|!}) & \dots & \alpha_{im_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & & & & \\ \alpha_{|A^t|m_1}(p_1) & & \alpha_{|A^t|m_{|M^t|}}(p_1) & & \alpha_{|A^t|m_1}(p_{|L^t|!}) & & \alpha_{|A^t|m_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \end{pmatrix},$$

где номера строк соответствуют номерам состояний игрока  $m_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, |A^t|$ . Например,  $\alpha_{1m_1}(p_1)$  — оценка игроком  $m_1$  (работником) состоянии 1 того игрока (предприятия), который ему соответствует в ситуации  $p_1$  (при политике  $q_1$ ). Матрица  $B^t$

имеет вид:

$$B^t = \begin{pmatrix} \beta_{1l_1}(p_1) & \dots & \beta_{1l_{|L^t|}}(p_1) & \dots & \alpha_{1l_1}(p_{|L^t|!}) & \dots & \beta_{1l_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & & & & \\ \beta_{jl_1}(p_1) & \dots & \beta_{jl_{|L^t|}}(p_1) & & \beta_{jl_1}(p_{|L^t|!}) & \dots & \beta_{jl_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & & & & \\ \beta_{|B^t|l_1}(p_1) & & \beta_{|B^t|l_{|L^t|}}(p_1) & & \beta_{|B^t|l_1}(p_{|L^t|!}) & & \beta_{|B^t|l_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \end{pmatrix},$$

где номера строк соответствуют номерам состояний игрока  $l_d$ ,  $j = 1, 2, \dots, |B^t|$ . Например,  $\beta_{1l_1}(p_1)$  — игроком  $l_1$  (предприятием) в состоянии 1 того игрока (работника), который ему соответствует в ситуации  $p_1$  (при политике  $q_1$ ). Функции выигрыша игроков определим на множестве ситуаций  $X^t$  для каждого состояния системы  $S_\eta^t \in S^t$ . Пусть состояние системы  $S_\eta^t$  описывает вектор  $S_\eta^t = (a_{m_1}^t, a_{m_2}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t, b_{l_1}^t, b_{l_2}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t)$ . Его компонентами являются векторы состояний  $a_{m_k}^t \in A^t$  и  $b_{l_d}^t \in B^t$ , которые занумерованы индексами  $i$  и  $j$  соответственно. Тогда функции выигрыша игроков в ситуации  $p_1$  зададим следующим образом.

Для игрока  $m_1$  определяем, каким индексом  $i$  занумерована компонента  $a_{m_1}^t$  вектора  $S_\eta^t$ , и выбираем соответствующий элемент  $\alpha_{im_1}(p_1)$  в первом столбце матрицы полезности  $A^t$ . Для остальных игроков под номерами  $m_2, m_3, \dots, m_{|M^t|}$  определяем, какими индексами занумерованы компоненты  $a_{m_2}^t, a_{m_3}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t$ , и выбираем элементы с соответствующими номерами во 2-ом, 3-ем, ...,  $|M^t|$ -ом столбцах матрицы  $A^t$ .

Для игрока  $l_1$  определяем каким индексом  $j$  занумерована компонента  $b_{l_1}^t$  вектора  $S_\eta^t$  и выбираем соответствующий элемент  $\beta_{jl_1}(p_1)$  в первом столбце матрицы полезности  $B^t$ . Для остальных игроков  $l_2, l_3, \dots, l_{|L^t|}$  определяем какими индексами занумерованы компоненты  $b_{l_2}^t, b_{l_3}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t$  и выбираем элементы с соответствующими номерами во 2-ом, 3-ем, ...,  $|L^t|$ -ом столбцах матрицы  $B^t$ .

Аналогичным образом задаются функции выигрыша игроков в ситуациях  $p_2, p_3, \dots, p_{|L^t|!}$ . Запишем функции выигрыша игроков в матрицу выигрышей  $W_\eta^t$  (строки соответствуют ситуациям  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{|L^t|!}$  из множества ситуаций  $X^t$ , столбцы — игрокам из множества  $I^t$ ):

$$W_\eta^t = \begin{pmatrix} K_{m_1}^t(p_1) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t(p_1) & K_{l_1}^t(p_1) & \dots & K_{l_{|L^t|}}^t(p_1) \\ & & & & & \\ K_{m_1}^t(p_d) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t(p_d) & K_{l_1}^t(p_d) & & K_{l_{|L^t|}}^t(p_d) \\ & & & & & \\ K_{m_1}^t(p_{|L^t|!}) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t(p_{|L^t|!}) & K_{l_1}^t(p_{|L^t|!}) & & K_{l_{|L^t|}}^t(p_{|L^t|!}) \end{pmatrix}.$$

По матрице  $W_\eta^t$  построим компромиссное множество  $!_H^{t,\eta} = \{p_{\bar{\eta}}\}$  и определим соответствующую политику биржи труда  $q_{\bar{\eta}} \in Q^t$ . Доход системы от назначений  $V(S_\eta^t, p_{\bar{\eta}})$  в компромиссной ситуации  $p_{\bar{\eta}} \in C_H^{t,\eta}$  определим как сумму функций выигрыша всех игроков:  $V(S_\eta^t, p_{\bar{\eta}}) = \sum_{k=1}^{|M^t|} K_{m_k}^t(p_{\bar{\eta}}) + \sum_{d=1}^{|L^t|} K_{l_d}^t(p_{\bar{\eta}})$ .

В рассматриваемой модели в каждый момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$  определим множества управлений игроков  $m_k$  и  $l_d$  ( $k = 1, 2, \dots, |M^t|$ ,  $d = 1, 2, \dots, |L^t|$ ):  $U_{m_k}^{t+1} = \left\{ u_{a_{m_k}^{t+1}} | u_{a_{m_k}^{t+1}} = (u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu}) \right\}$ ,  $U_{l_d}^{t+1} = \left\{ u_{b_{l_d}^{t+1}} | u_{b_{l_d}^{t+1}} = (u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\nu}) \right\}$ , которые составляют общий вектор управления  $U_\eta^{t+1} = \left( u_{a_{m_1}^{t+1}}, \dots, u_{a_{m_{|M^t|}}^{t+1}}, u_{b_{l_1}^{t+1}}, \dots, u_{b_{l_{|L^t|}}^{t+1}} \right) \in U^{t+1}$ , где  $U^{t+1}$  — множество общих векторов управления на шаге  $t$ . Каждая компонента векторов  $u_{a_{m_k}^{t+1}} = (u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu})$  и  $u_{b_{l_d}^{t+1}} = (u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\nu})$  управляет соответствующим параметром векторов состояний  $a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu)$  и  $b_{l_d}^t = (b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu)$  из множеств  $A^t$  и  $B^t$ , то есть задает вектор состояния работника  $a_{m_k}^{t+1}$  и вектор состояния предприятия  $b_{l_d}^{t+1}$  в следующий момент времени  $t + 1$ , а значит и новое состояние системы  $S_\zeta^{t+1} \in S^{t+1}$ . Таким образом, под действием общих векторов управления из множества  $U^{t+1}$  система переходит из состояния  $S_\eta^t \in S^t$  во множество состояний  $S^{t+1}$ . Поскольку переход в каждое состояние  $S_\zeta^{t+1} \in S^{t+1}$  определяется одним из общих векторов управления  $U_\eta^{t+1} \in U^{t+1}$ , то количество состояний на шаге  $t + 1$  равно количеству общих векторов управления на шаге  $t$ ,  $|S^{t+1}| = |U^{t+1}|$ . Функционирование системы в течение  $t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  периодов времени удобно представить в виде многошаговой игры  $G$  на конечном связном графе (дереве). Опишем этапы построения дерева многошаговой игры  $G$ .

Рассмотрим этапы построения дерева многошаговой игры [11].

1 этап. Задание одношаговой игры  $\Gamma^0$  в начальной вершине  $S^0$  и множества доходов от перехода за один шаг  $R_{S^0 S^1}^1(U^1)$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  система находится в состоянии  $S^0$ , которое соответствует начальной вершине, или корню дерева. В вершине  $S^0$  определим игру в нормальной форме  $\Gamma^0 = \left\langle I^0, S^1, \{H_{m_k}^0\}_{k=1}^{|M^0|}, \{H_{l_d}^0\}_{d=1}^{|L^0|} \right\rangle$ . Опишем стратегии игроков  $m_k$  и  $l_d$ , множество ситуаций  $S^1$  и функции выигрыша игроков  $H_{m_k}^0$  и  $H_{l_d}^0$ . Стратегии игроков  $m_k$  и  $l_d$  могут быть следующими: они могут управлять одним из параметров  $a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu$  и  $b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu$  векторов состояний  $a_{m_k}^0$  и  $b_{l_d}^0$ , соответственно, управлять одновременно двумя параметрами векторов  $a_{m_k}^0$  и  $b_{l_d}^0$ , ..., управлять одновременно всеми  $\mu$  параметрами вектора состояния  $a_{m_k}^0$  и  $\nu$  параметрами вектора состояния  $b_{l_d}^0$  (под управлением

параметром будем понимать его изменение; если параметр сохранен прежним, то считаем, что игрок в данный момент времени им не управлял). В общем случае игрок  $m_k$  в начальный момент времени управляет всеми параметрами вектора  $a_{m_k}^0$ , поэтому его стратегия будет иметь вид:  $u_{a_{m_k}^1} = (u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu})$ . Стратегии игрока  $l_d$  в момент времени  $t = 0$  определяются аналогично. Игра  $\Gamma^0$  происходит следующим образом. Игроки  $m_k$  и  $l_d$  ( $k = 1, 2, \dots, |M^0|$ ,  $l = 1, 2, \dots, |L^0|$ ) выбирают свои стратегии  $u_{a_{m_k}^1} \in U_{m_k}^1$  и  $u_{b_{l_d}^1} \in U_{l_d}^1$  и определяют общий вектор стратегий, или общий вектор управления  $U_\gamma^1 \in U^1$ , ситуацию в игре и функции выигрыша. Ситуацией в игре  $\Gamma^0$  будет являться вершина дерева  $S_\gamma^1 \in S^1$  на следующем шаге  $t = 1$ ,  $S^1$  — множество ситуаций в игре  $\Gamma^0$ . Общий вектор управления  $U_\gamma^1 \in U^1$  описывает переход из вершины  $S^0$  в  $S_\gamma^1$ . Функции выигрыша игроков зададим на множестве ситуаций  $S^1$  помощью матриц полезности  $A^0, A^1, B^0$  и  $B^1$ . Например, если игрок  $m_k$  в начальной вершине находился в состоянии  $i$  и имел выигрыш  $K_{m_1}^0 = \alpha_{im_1}(p_{\bar{c}})$  в статической игре  $G^0$ , а после перехода в вершину  $S_\gamma^1$  он находится в состоянии  $j$  и имеет выигрыш  $K_{m_1}^1 = \alpha_{jm_1}(p_{\bar{\gamma}})$  в статической игре  $G_\gamma^1$ , то его функцию выигрыша в игре  $\Gamma^0$  зададим как разность выигрышей в играх  $G^0$  и  $G_\gamma^1$ , то есть  $H_{m_k}^0 = \alpha_{jm_k}(p_{\bar{\gamma}}) - \alpha_{im_k}(p_{\bar{A}})$ . Аналогично определим функции выигрыша остальных игроков. Тогда доход системы от перехода  $R_{S^0 S^1}^1(U_\gamma^1)$  из начальной вершины  $S^0$  в вершину  $S_\gamma^1$  за один шаг вычислим как сумму функций выигрыша всех игроков:

$$R_{S^0 S^1}^1(U_\gamma^1) = \sum_{k=1}^{|M^t|} H_{m_k}^0 + \sum_{d=1}^{|L^t|} H_{l_d}^0 = V(S_\gamma^1, p_{\bar{\gamma}}) - V(S^0, p_{\bar{c}}),$$

где  $V(S_\gamma^1, p_{\bar{\gamma}})$ ,  $V(S^0, p_{\bar{c}})$  — доходы от назначений в играх  $G_\gamma^1$  и  $G^0$ . Множество доходов от перехода системы из вершины  $S^0$  за один шаг обозначим  $R_{S^0 S^1}^1(U^1)$ .

2 этап. Задание одношаговой игры  $\Gamma_\xi^t$  в промежуточной вершине дерева  $S_\xi^t$  и множества доходов от перехода  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U^{t+1})$  за один шаг. Рассмотрим моменты времени  $t = 1, 2, \dots, T - 1$  и определим игру в нормальной форме  $\Gamma_\xi^t = \left\langle I^t, S^{t+1}, \{H_{m_k}^t\}_{k=1}^{|M^t|}, \{H_{l_d}^t\}_{d=1}^{|L^t|} \right\rangle$  в каждой промежуточной вершине дерева  $S_\xi^t \in S^t$ . Опишем стратегии игроков  $m_k$  и  $l_d$ , множество ситуаций  $S^{t+1}$  и функции выигрыша игроков  $H_{m_k}^t$  и  $H_{l_d}^t$ . Стратегии игроков  $m_k$  и  $l_d$  могут быть такими же, как в начальный момент времени, то есть игроки могут управлять одним из параметров  $a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu$  и  $b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu$  векторов состояний  $a_{m_k}^t$  и  $b_{l_d}^t$  соответственно,

двумя параметрами, ..., всеми  $\mu$  параметрами вектора состояния  $a_{m_k}^t$  и  $\nu$  параметрами вектора состояния  $b_{l_d}^t$ . Например, если игрок  $m_k$  в момент времени  $t$  управляет только первым параметром  $a_{m_k}^1$  вектора  $a_{m_k}^t$ , то его стратегия будет иметь вид:  $u_{a_{m_k}^t}^{t+1} = (u_{a_{m_k}^1}, \bar{u}_{a_{m_k}^2}, \dots, \bar{u}_{a_{m_k}^\mu})$ , где  $\bar{u}_{a_{m_k}^2}, \dots, \bar{u}_{a_{m_k}^\mu}$  — управления игрока на предыдущем шаге. Если игрок  $m_k$  управляет двумя параметрами  $a_{m_k}^i, a_{m_k}^j$ , то его стратегия будет следующей  $u_{a_{m_k}^t}^{t+1} = (\bar{u}_{a_{m_k}^1}, \dots, u_{a_{m_k}^i}, \dots, u_{a_{m_k}^j}, \dots, \bar{u}_{a_{m_k}^\mu})$ . В общем случае игрок  $m_k$  управляет всеми параметрами вектора  $a_{m_k}^t$ , поэтому его стратегия будет иметь вид  $u_{a_{m_k}^t}^{t+1} = (u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu})$ . Заметим, что игрок в момент времени  $t$  может не управлять ни одним из параметров вектора состояния  $a_{m_k}^t$ , тогда его стратегия будет иметь вид  $u_{a_{m_k}^t}^{t+1} = (\bar{u}_{a_{m_k}^1}, \bar{u}_{a_{m_k}^2}, \dots, \bar{u}_{a_{m_k}^\mu})$ . Такая стратегия может быть вполне обоснована, поэтому не будем ее исключать из множества стратегий игрока в момент времени  $t$ . Стратегии игрока  $l_d$  в момент времени  $t$  определяются аналогично.

Число стратегий игрока  $m_k$  равно числу подмножеств  $\mu$ -элементного множества  $\{u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu}\}$ , то есть  $|U_{m_k}^{t+1}| = 2^\mu$ . Число стратегий игрока  $l_d$  равно числу подмножеств  $\nu$ -элементного множества  $\{u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\nu}\}$ , то есть  $|U_{l_d}^{t+1}| = 2^\nu$ . Игра  $\Gamma_\xi^t$  происходит следующим образом. Игроки  $m_k$  и  $l_d$  ( $k = 1, 2, \dots, |M^t|$ ,  $l = 1, 2, \dots, |L^t|$ ) выбирают свои векторы стратегии  $u_{a_{m_k}^t} \in U_{m_k}^{t+1}$  и  $u_{b_{l_d}^t} \in U_{l_d}^{t+1}$  и определяют общий вектор управления  $U_\lambda^{t+1} \in U^{t+1}$ , ситуацию в игре и функции выигрыша. Ситуацией в игре  $\Gamma_\xi^t$  будет вершина дерева  $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$  на следующем шаге  $t + 1$ ,  $S^{t+1}$  — множество ситуаций в игре  $\Gamma_\xi^t$ . Общий вектор управления  $U_\lambda^{t+1}$  описывает переход из вершины  $S_\xi^t$  в  $S_\lambda^{t+1}$ . Функции выигрыша игроков зададим на множестве ситуаций  $S^{t+1}$  помощью матриц полезности  $A^t, A^{t+1}, B^t$  и  $B^{t+1}$ . Например, если игрок  $m_k$  в вершине  $S_\xi^t$  находился в состоянии  $i$  и имел выигрыш  $K_{m_1}^t = \alpha_{im_1}(p_\xi)$  в статической игре  $G_\xi^t$ , а после перехода в вершину  $S_\lambda^{t+1}$  он находится в состоянии  $j$  и имеет выигрыш  $K_{m_1}^{t+1} = \alpha_{jm_1}(p_\lambda)$  в статической игре  $G_\lambda^{t+1}$ , то его функцию выигрыша в игре  $\Gamma_\xi^t$  зададим как разность выигрышей в играх  $G_\xi^t$  и  $G_\lambda^{t+1}$ , то есть  $H_{m_k}^t = \alpha_{jm_k}(p_\lambda) - \alpha_{im_k}(p_\xi)$ . Аналогично определим функции выигрыша остальных игроков.

Тогда доход системы от перехода  $R_{S_0 S_1}^1(U_\lambda^{t+1})$  из вершины  $S_\xi^t$  в вершину  $S_\lambda^{t+1}$  за один шаг вычислим как сумму функций выигрыша всех игроков:

$$R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1}) = \sum_{k=1}^{|M^t|} H_{m_k}^t + \sum_{d=1}^{|L^t|} H_{l_d}^t = V(S_\lambda^{t+1}, p_\lambda) - V(S_\xi^t, p_\xi),$$

где  $V(S_\lambda^{t+1}, p_\lambda)$ ,  $V(S_\xi^t, p_\xi)$  — доходы системы от назначений в играх  $G_\lambda^{t+1}$  и  $G_\xi^t$ .



Заметим, что если  $|M^t| = |M^{t+1}|$ ,  $|L^t| = |L^{t+1}|$ , то доход системы от перехода  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1})$  может быть вычислен как сумма разностей функций выигрыши игроков в вершинах  $S_\xi^t$  и  $S_\lambda^{t+1}$ :

$$\begin{aligned} R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1}) &= \sum_{k=1}^{|M^t|} (K_{m_k}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}}) - K_{m_k}^t(p_{\bar{\xi}})) + \sum_{d=1}^{|L^t|} (K_{l_d}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}}) - K_{l_d}^t(p_{\bar{\xi}})) = \\ &= \left( \sum_{k=1}^{|M^t|} K_{m_k}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}}) + \sum_{l=1}^{|L^t|} K_{l_d}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}}) \right) - \left( \sum_{k=1}^{|M^t|} K_{m_k}^t(p_{\bar{\xi}}) + \sum_{l=1}^{|L^t|} K_{l_d}^t(p_{\bar{\xi}}) \right) = \\ &= V(S_\lambda^{t+1}, p_{\bar{\lambda}}) - V(S_\xi^t, p_{\bar{\xi}}) . \end{aligned}$$

Множество доходов системы от перехода из вершины  $S_\xi^t$  в вершину  $S_\lambda^{t+1}$  за один шаг обозначим  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U^{t+1})$ .

Построим компромиссный общий вектор управления за один шаг. Рассмотрим игру  $\Gamma_\xi^t$  в вершине  $S_\xi^t$  дерева многошаговой игры  $G$ . На основе принципа оптимальности компромиссного множества определим компромиссную ситуацию  $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$  в игре  $\Gamma_\xi^t$  и общий вектор управления  $U_\lambda^{t+1}$ , который переводит систему из состояния  $S_\xi^t$  в состояние  $S_\lambda^{t+1}$ .

Составим матрицу выигрышей игроков  $W(\Gamma_\xi^t)$ . Элементами этой матрицы являются функции выигрыша игроков в каждой ситуации. По матрице  $W(\Gamma_\xi^t)$  найдем компромиссную ситуацию  $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$  в игре  $\Gamma_\xi^t$ , а затем по дереву многошаговой игры  $G$  определим соответствующий общий вектор управления  $U_\lambda^{t+1} \in U^{t+1}$ , который назовем компромиссным общим вектором управления за один шаг, или просто компромиссным вектором управления за один шаг. Тогда соответствующий вектору  $U_\lambda^{t+1}$  доход системы от перехода  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1})$  будет являться компромиссным доходом за один шаг.

После того, как указан способ построения компромиссного вектора управления за один шаг, найдем компромиссный путь  $U_{\bar{r}} = (U_{\bar{r}}^1, U_{\bar{r}}^2, \dots, U_{\bar{r}}^T)$  на дереве игры  $G$  и соответствующий ему компромиссный доход  $C^T$  за  $T$  шагов. Для этого применим рекуррентные соотношения динамического программирования. Введем функцию дохода системы от перехода за  $T$  шагов, когда реализовалась последовательность игр  $\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-1}, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}$ :

$$R^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-1}, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}) = R_{S^0 S^1}^1(U_r^1) + \dots + R_{S^{t-1} S^t}^1(U_r^t) + \dots + R_{S^{T-1} S^T}^1(U_r^T),$$

где  $\Gamma_r^{t-1}$  — одношаговая игра в вершине  $S_r^{t-1}$  в момент времени  $t - 1$ ,  $U_r^t$  — общий вектор управления,  $U_r^t \in U^t$ ,  $R_{S^{t-1} S^t}^1(U_r^t)$  — доход системы от перехода из вершины  $S_r^{t-1}$  за один шаг. Обозначим через  $C^t$  компромиссный доход за  $t$  шагов,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Найдем компромиссный доход  $C^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1})$  за  $T$  шагов в игре  $G$  и ту

последовательность управлений  $\{U_{\bar{r}}^t\}_{t=1}^{T-1}$ , которая его реализует. Введем оператор  $comp$ , который задан на множестве доходов системы от перехода  $R_{S^{t-1}S^t}^1(U^t)$  за один шаг и возвращает компромиссный из этих доходов.

Выпишем функцию Беллмана

$$C^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}) = \underset{U_{\bar{r}, t=1, \dots, T}^t}{comp} R^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}),$$

и воспользуемся для ее вычисления рекуррентными соотношениями динамического программирования  $C^t(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-1}) = \underset{U_{\bar{r}, r}^t}{comp} (R_{S^{t-1}S^t}^1(U_r^t) + C^{t-1}(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-2}))$ ,  $t = T, T-1, \dots, 2, 1$ ;  $C^1(\Gamma^0) = \underset{U_{\bar{r}, r}^1}{comp} R_{S^0S^1}^1(U_r^1)$ . Применяя последовательно эти соотношения, вычислим компромиссные доходы системы за 1 шаг, 2 шага, ...,  $T$  шагов  $C^1(\Gamma^0)$ ,  $C^2(\Gamma^0, \Gamma_r^1)$ , ...,  $C^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{T-1})$  и сможем указать компромиссный путь  $U_{\bar{r}} = (U_{\bar{r}}^1, U_{\bar{r}}^2, \dots, U_{\bar{r}}^T)$  на дереве игры  $G$ , который соответствует последовательности компромиссных управлений  $\{U_{\bar{r}}^t\}_{t=1}^{T-1}$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Положим  $m = n = 3$ ,  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ ,  $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ .  $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  — множество игроков, причем игроки с номерами 1, 2, 3 соответствуют игрокам  $s_1, s_2, s_3$  из множества  $S$ , а игроки 4, 5, 6 соответствуют игрокам  $h_1, h_2, h_3$  из множества  $H$ . Матрицы полезности  $A$  и  $B$  игроков из множеств  $S$  и  $H$  соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 76 & 22 & 94 \\ 33 & 41 & 86 \\ 45 & 13 & 54 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 94 & 71 & 17 \\ 30 & 32 & 18 \\ 59 & 85 & 38 \end{pmatrix}.$$

Множество ситуаций в игре  $P = \{p_1, \dots, p_6\}$ :  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$ ,  
 $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_3 & h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ ,  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_1 & h_3 \end{pmatrix}$ ,  $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ ,  
 $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix}$ ,  $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_3 & h_1 \end{pmatrix}$ . Функции выигрыша игроков от подстановки  $p_1$ :  $H_1(p_1) = \alpha_{1h_1} = 76$ ,  $H_2(p_1) = \alpha_{2h_2} = 41$ ,  $H_3(p_1) = \alpha_{3h_3} = 54$ ,  
 $H_4(p_1) = \beta_{h_11} = 94$ ,  $H_5(p_1) = \beta_{h_22} = 32$ ,  $H_6(p_1) = \beta_{h_33} = 38$ . Функции выигрыша

игроков от подстановок  $p_2, p_3, p_4, p_5$  и  $p_6$  зададим аналогично. Тогда матрица выигрышей  $W$  будет следующей:

$$W = \begin{pmatrix} 76 & 41 & 54 & 94 & 32 & 38 \\ 22 & 33 & 54 & 30 & 71 & 38 \\ 94 & 41 & 45 & 59 & 32 & 17 \\ 94 & 33 & 13 & 94 & 71 & 18 \\ 76 & 86 & 13 & 94 & 85 & 18 \\ 22 & 86 & 45 & 30 & 85 & 17 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи будет:  $C_H = \{p_5\}$ ,  $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ ,  $H_3(p_5) = 13$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: представлено решение статической и динамической задач оптимального распределения трудовых ресурсов на основе принципа оптимальности компромиссного множества.

В первой части работы рассмотрена теоретико-игровая модель задачи оптимального назначения. Описана игра в нормальной форме, в которой найдена компромиссная ситуация, реализующая одно из возможных назначений, и компромиссный доход. Приведен алгоритм построения компромиссного множества и определен его класс сложности. Получена временная оценка работы алгоритма  $T \leq \theta \cdot n!(m+n+1)$  и определен его класс сложности  $O(n!(m+n+1))$ .

Во второй части работы рассмотрена теоретико-игровая модель динамической задачи оптимального назначения. Построена детерминированная модель функционирования рынка труда в течение  $T$  периодов времени. В каждый момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  в каждом состоянии рынка труда  $S_\xi^t \in S^t$  указано оптимальное назначение работников на предприятия  $p_\xi \in C_H^{t,\xi}$ , соответствующая политика биржи труда  $q_\xi \in Q^t$  и доход рынка труда  $V(S_\xi^t, p_\xi)$ . В те периоды времени  $(t, t+1)$ , когда осуществляется переход рынка труда из одного состояния в другое, указан оптимальный общий вектор управления  $U_\lambda^{t+1}$  и соответствующий ему доход рынка от перехода  $R_{S^t S^{t+1}}^1(U_\lambda^{t+1})$ . Найден оптимальный доход от функционирования рынка труда в течение  $T$  периодов времени  $C^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{T-1})$  и последовательность соответствующих векторов управления  $\{U_{\bar{r}}^t\}_{t=1}^{T-1}$ , по которым определяются оптимальные стратегии игроков  $\bar{u}_{a_{m_k}}^t$  и  $\bar{u}_{b_{l_d}}^t$  в каждый момент времени. Таким образом, можно указать оптимальное поведение всех участников рынка труда в каждый момент времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян, Л. А. Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М.: Высш. шк., 1998. — 304 с.  
Petrosyan, L. (1998) *game Theory*. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, E. A. Semina. M.: Higher. SHK.
2. Воробьев, Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — М.: Наука, 1985. — 272 с.  
Vorobyov, N. N. (1985) *Game Theory for cybernetic economists*. N. N. Vorobyov. M.: Science.
3. Конвей, Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. — М.: Наука, 1975. — 360 с.  
Conway, R. W. (1975) *Theory of scheduling*. R. W. Conway, W. L. Maxwell, L. W. Miller. M.: Science.
4. Малафеев, О. А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. Том 1. Общая теория и вспомогательные сведения / О. А. Малафеев, А. И. Муравьев. — Изд-во СПбГУЭФ, 2000. — 283 с.  
Malafeyev, O. A. (2000) *Mathematical models of conflict situations and their resolution. Volume 1. General theory and auxiliary information*. O. A. Malafeyev, A. I. Muravyev. SPb.: Spbguef publishing house.
5. Зайцева, И. В. Математическая модель оптимального распределения трудового потенциала региона по отраслям экономики / И. В. Зайцева, Е. А. Семенчин, В. А. Гимбицкий // Фундаментальные исследования. — 2013. — № 8-2. — С. 413–416.  
Zaitseva, I (2013) Mathematical model of optimal distribution of labor potential of the region by branches of economy. *Fundamental researches*. № 8-2. p. 413–416.
6. Зайцева, И. В. Математическая модель оптимального управления трудовым потенциалом региона / И. В. Зайцева, Е. А. Семенчин // Научно-методический электронный журнал Концепт. — 2014. — № Т20. — С. 1306–1310.  
Zaitseva, I. (2014) Mathematical model of optimal management of labor potential of the region. *Scientific-methodical electronic journal Concept*. № Т20. p. 1306–1310.
7. Зайцева, И. В. Экономико-математическое моделирование оптимального управления трудовыми ресурсами с учетом изменяющихся условий / И. В. Зайцева,

- М. Г. Казначеева, Л. И. Тимошенко, И. А. Колезнев // Экономика и управление: проблемы, решения. — 2018. — Т.4. № 10. — С. 61–67.
- Zaitseva, I. (2018) Economic-mathematical modeling of optimal management of human resources with a changing environment. *Economy and management: problems, solutions*. Т.4. № 10. p. 61–67.
8. Зайцева, И. В. Постановка задачи оптимального распределения трудовых ресурсов по предприятиям с учетом изменяющихся условий / И. В. Зайцева, М. В. Попова, О. А. Малафеев // Труды международной научно-практической конференции «Инновационная экономика и промышленная политика региона» (ЭКОПРОМ-2016). — 2016. — С. 439–443.
- Zaitseva, I. (2016) Formulation of the problem of optimal distribution of labor resources by enterprises taking into account changing conditions. *Proceedings of the international scientific and practical conference "Innovative economy and industrial policy of the region" (ECOPROM-2016)*. p. 439–443.
9. Зайцева, И. В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография / И. В. Зайцева. — НОУ ВПО «Северо-Кавказский социальный ин-т», 2009. — 116 с.
- Zaitseva, I. (2009) *Economic and mathematical modeling of the labor market: monograph*. NOU VPO "North-Caucasian Social Institute".
10. Малафеев, О. А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно-управляемые динамические процессы / О. А. Малафеев // Ленинградский университет. — 1990. — С. 113.
- Malafeyev, O. (1990) Stability of solutions to multi-criteria optimization problems and conflict-controlled dynamic processes. *Leningrad University*. p. 113.
11. Roth, Alvin, E. (The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory) E. Alvin Roth. *Journal of Political Economy*. 1994 (vol. Y2. no 6). p. 991–1016.

УДК: 517.98

MSC2010: 46B25

О ТЕОРЕМЕ ВИНЕРА В ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА  
БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВ ИСЧЕЗАЮЩИХ НА  
БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

© В. Е. Струков, И. И. Струкова

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ПЛ. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ, 1, ВОРОНЕЖ, 394005, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: *sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru*

ON WIENER THEOREM IN STUDYING PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS WITH  
RESPECT TO SUBSPACES OF VANISHING AT INFINITY FUNCTIONS.

Strukov V. E., Strukova I. I.

**Abstract.**

In the article under consideration we study periodic at infinity functions from  $C_b(\mathbb{J}, X)$ , i.e., bounded continuous functions defined on the real axis with their values in a complex Banach space  $X$ . On the basis of the well-known Wiener theorem we introduce a concept of a set satisfying Wiener condition. Together with an ordinary subspace  $C_0 \subset C_b$  we consider various subspaces of continuous functions vanishing at infinity in different senses, not necessarily tending to zero at infinity. For example, integrally vanishing at infinity functions and functions whose convolution with any function from the set satisfying Wiener condition gives a function tending to zero at infinity. Those subspaces we also call vanishing at infinity and denote then as  $\mathcal{C}_0$ . So, by choosing one of the subspaces  $\mathcal{C}_0$  we introduce different types of slowly varying and periodic at infinity functions (with respect to the chosen subspace).

A function  $x \in C_{b,u}$  is called slowly varying at infinity with respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  if  $(S(t)x - x) \in \mathcal{C}_0$  for all  $t \in \mathbb{J}$ . Respectively, for some  $\omega > 0$  a function  $x \in C_{b,u}$  is called  $\omega$ -periodic at infinity with respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  if  $(S(\omega)x - x) \in \mathcal{C}_0$ . Nevertheless, these functions are constructed as extensions of the classes of slowly varying and periodic at infinity functions respectively, we proved them to be congruent with these classes.

Ordinary periodic at infinity functions appear naturally as bounded solutions of certain classes of differential and difference equations. So, in our research, we also study the solutions of differential and difference equations of some kind. It is proved that for those equations, where

---

<sup>1</sup>Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097, работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00732 А

the right hand side of the equation is a function from any of the subspaces  $\mathcal{C}_0$  of vanishing at infinity functions, the solutions are periodic at infinity.

The results were received with essential use of isometric representations and Banach modules theories.

**Keywords:** Wiener theorem, vanishing at infinity function, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Banach space, Banach module, differential equation, difference equation.

### 1. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ .

Пусть  $L^1(\mathbb{R})$  — банахова алгебра определенных на  $\mathbb{R}$  измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов эквивалентности) функций со сверткой функций в качестве умножения  $(f_1 * f_2)(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t-s)f_2(s)ds$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ . Символом  $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  обозначается преобразование Фурье  $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , функции  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

В данной статье существенно используется следующая теорема Винера (см. [1]):

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{I}$  — идеал алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ . Он совпадает со всей алгеброй  $L^1(\mathbb{R})$ , если функции  $\widehat{\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathcal{I}$ , разделяют точки из  $\mathbb{R}$ , т.е. для любых чисел  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$  найдется функция  $\varphi \in \mathcal{I}$  такая, что  $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$ .

Будем говорить, что подмножество  $\mathcal{M}$  функций из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию Винера, если их преобразования Фурье разделяют точки из  $\mathbb{R}$ .

**Лемма 1.** Наименьший замкнутый идеал алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ , содержащий множество  $\mathcal{M}$ , удовлетворяющее условию Винера, совпадает со всей алгеброй  $L^1(\mathbb{R})$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  — наименьший замкнутый идеал из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ , содержащий  $\mathcal{M}$ , т.е.  $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \overline{\{f * g, f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{M}\}}$ . Покажем, что множество  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  удовлетворяет условию Винера. Возьмем произвольные числа  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . В силу того, что множество  $\mathcal{M}$  удовлетворяет условию Винера, найдется функция  $g \in \mathcal{M}$  такая, что  $\widehat{g}(\lambda_1) \neq \widehat{g}(\lambda_2)$ . Тогда для функции  $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$  вида  $\varphi = f * g$ , где  $g$  — указанная функция из  $\mathcal{M}$ , а  $f$  — произвольная функция из  $L^1(\mathbb{R})$ , выполняется условие  $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$ . Тогда из теоремы 1 следует, что  $\mathcal{I}(\mathcal{M}) = L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

Пусть  $X$  — комплексное банахово пространство,  $End X$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в  $X$ .

Рассматривается банахово пространство  $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$  непрерывных и ограниченных на  $\mathbb{R}$  функций со значениями в  $X$  и нормой  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$ ,  $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ ,  $C_0(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0\}$  — подпространство исчезающих на бесконечности функций из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ .

В банаховом пространстве  $C_b(\mathbb{R}, X)$  рассмотрим группу  $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_b(\mathbb{R}, X)$  операторов, действующих по правилу  $(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau)$ ,  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ ,  $t, \tau \in \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если  $S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом  $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ . Такие функции изучались в работах [2–6].

Примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

$$1) x_1(t) = \sin \ln(1 + |t|), t \in \mathbb{R}; \quad 2) x_2(t) = \text{arctg } t, t \in \mathbb{R};$$

3) любая непрерывно дифференцируемая функция  $x \in C_b(\mathbb{R})$  со свойством  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$ .

Наряду с  $C_0(\mathbb{R}, X)$  рассмотрим подпространство функций из  $C_b(\mathbb{R}, X)$  вида  $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f * x \in C_0(\mathbb{R}, X) \text{ для всех } f \in \mathcal{M}\}$ , где множество  $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию Винера. Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности*.

Во всех рассматриваемых подпространствах из  $C_b(\mathbb{R}, X)$  символ  $X$  опускается, если  $X = \mathbb{C}$  (например,  $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$ ,  $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}; \mathcal{M}) = C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ ).

**Пример 1.** Рассмотрим множество функций  $\{f_\alpha, \alpha > 0\}$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$  вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Их преобразования Фурье имеют вид  $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  множество  $\mathcal{M}_\alpha = \{f_\alpha\}$  удовлетворяет условию Винера.

Следующие функции принадлежат пространству  $C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$ :

$$1) x_1(t) = e^{it^2}; \\ 2) x_2(t) = \sin at^2; \quad 3) x_3(t) = \cos at^2, t \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Выберем произвольное  $\alpha > 0$  и покажем, что  $x_1 \in C_0(\mathbb{R}; \mathcal{M}_\alpha)$ , т.е. что  $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$ .

Действительно,  $(f_\alpha * x_1)(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau$ .



Вычислим последний интеграл отдельно:  $\int_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^0 e^{i\tau^2} d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ , где символом  $\operatorname{erf}$  обозначена функция ошибок, задаваемая формулой  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Отсюда получаем, что  $(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left( \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , т.е.  $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$ .

**Пример 2.** Если в качестве множества  $\mathcal{M}$  взять всю алгебру  $L^1(\mathbb{R})$ , то множество  $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$  будет иметь вид  $C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t) ds\| = 0 \text{ равномерно относительно } t \in \mathbb{R}\}$ .

Покажем это, т.е. для любой функции  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$  докажем эквивалентность следующих двух условий:

- 1)  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t) ds\| = 0$  равномерно относительно  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любой функции  $f$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{M} = \{f_\alpha, \alpha > 0\}$  функций из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$  вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \notin [0, \alpha], \end{cases}$$

каждая из которых имеет преобразование Фурье вида  $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{i\lambda\alpha}(1 - e^{-i\lambda\alpha})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда условие 1) можно записать в виде  $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любого  $\alpha > 0$ .

Поскольку преобразования Фурье  $\widehat{f}_\alpha$  функций  $f_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , разделяют точки из  $\mathbb{R}$ , то множество  $\mathcal{M}$  удовлетворяет условию Винера. Следовательно, из леммы 1 вытекает, что  $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любой функции  $f$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ .

Если выполнено свойство 2), то  $g_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любой направленности  $(g_\alpha, \alpha > 0)$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ , в частности, для  $(f_\alpha, \alpha > 0)$ , т.е. выполнено свойство 1).

**Определение 2.** Далее символом  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  обозначим замкнутое (с нормой из  $C_b$ ) подпространство функций из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ , обладающих свойствами:

- 1)  $S(t)x \in \mathcal{C}_0$  для любого  $t \in \mathbb{R}$  и любой функции  $x \in \mathcal{C}_0$ ;
- 2)  $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ , где множество  $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию Винера;
- 3)  $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$  для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ , где  $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций*.

Примерами таких подпространств являются определенные ниже подпространства  $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$  и  $C_{0,p}(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ .

Функцию  $x$  из  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  назовем *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\alpha} \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Множество интегрально исчезающих на бесконечности функций будем обозначать символом  $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ . Отметим, что  $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$  является замкнутым подпространством из  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ .

Рассмотрим также семейство замкнутых в  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\alpha} \|x(s+t)\|^p ds = 0\},$$

где  $p \in [1, \infty)$ . Таким образом,  $C_{0,1}(\mathbb{R}, X) = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$  — подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций.

Пусть  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2.

**Определение 3.** Функцию  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$  будем называть *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$* , если  $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  обозначим символом  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ . Непосредственно из определения следует, что любое пространство  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$  является замкнутым подпространством в  $C_b(\mathbb{R}, X)$ .

Рассмотрим множество  $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) \text{ для любого } \alpha \in \mathbb{R}\}$ , где множество  $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию Винера. Из определений 2 и 3 следует, что  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$  для любого подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , удовлетворяющего условиям определения 2.

Далее нам потребуется определение ограниченной аппроксимативной единицы (см. [7]) алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Определение 4.** Ограниченная последовательность  $(e_n, n \geq 1)$  функций из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$  называется *ограниченной аппроксимативной единицей (o.a.e.)* алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ , если выполняются два свойства:

- 1)  $\widehat{e}_n(0) = 1$  для всех  $n \geq 1$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n * f = f$  для всех  $f$  из  $L^1(\mathbb{R})$ .

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать равенство  $C_{sl,\infty}(\mathcal{M}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ . Включение  $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$  очевидно. Покажем обратное включение. Пусть  $x \in C_{sl,\infty}(\mathcal{M})$ , тогда  $\psi = S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ , т.е.  $f * \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для всех  $f \in \mathcal{M}$ . Пусть  $(e_n, n \geq 1)$  — произвольная о.а.е. алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ . Из леммы 1 следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(\alpha)x - x) = S(\alpha)(e_n * x) - (e_n * x) \in C_0(\mathbb{R}, X),$$

откуда получаем, что  $y = e_n * x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ , а, значит, и  $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ .  $\square$

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ .

Сформулируем определения обычной периодической на бесконечности функции и периодической на бесконечности функции относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющего всем условиям определения 2.

**Definition 1.** Пусть  $\omega > 0$ . Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  называется  $\omega$ -периодической на бесконечности, если  $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{R}, X)$ .

Множество  $\omega$ -периодических на бесконечности функций обозначается символом  $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ . Такие функции изучались в [2, 5, 6]. В работах [8–10] изучались медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции из однородных пространств (например, пространств Степанова, Гельдера, Лебега).

Примерами периодических на бесконечности функций являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ , представимые в виде  $x = y + y_0$ , где  $y \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ ,  $y_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$ ;

2) функция  $\bar{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  такая, что она совпадает с  $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$  на  $\mathbb{R}_+$  и  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\bar{x}(t)\|_X = 0$ ;

3) любая функция из  $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ ;

4) любая функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ , представимая в виде  $x = \sum_{k=-n}^n x_k(t) e^{i \frac{2\pi k}{\omega} t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 5.** Пусть  $\omega > 0$ . Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  называется  $\omega$ -периодической на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , если  $(S(\omega)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ .

Таким образом, каждая  $\omega$ -периодическая на бесконечности (относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ ) функция  $x$  является решением разностного уравнения вида  $x(t + \omega) - x(t) = y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , а каждая медленно меняющаяся на бесконечности (относительно  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ ) функция является периодической на бесконечности (относительно  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ ) любого периода. Множество  $\omega$ -периодических на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  обозначим символом  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ .

Пусть  $\omega > 0$ . Символом  $C_\omega(\mathbb{R}, X)$  обозначим подпространство банахова пространства  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ , состоящее из  $\omega$ -периодических функций, т.е. функций  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ , для которых выполнено условие  $S(\omega)x = x$ .

Отметим, что оба множества  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$  и  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$  образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ . Банахово пространство  $C_\omega(\mathbb{R}, X)$  образует замкнутое подпространство в  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ . Таким образом, имеют место включения  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ , при этом все они инвариантны относительно операторов  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathcal{M}) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M}) \text{ для любого } \alpha \in \mathbb{R}\}$ , где множество  $\mathcal{M} \subset L^1(\mathbb{R})$  удовлетворяет условию Винера. Из определений 2 и 3 следует, что  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathcal{M})$  для любого подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , удовлетворяющего условиям определения 2.

Справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2. Тогда  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать равенство  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathcal{M}) = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ . Включение  $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathcal{M})$  очевидно. Покажем обратное включение. Пусть  $x \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathcal{M})$ , тогда  $\psi = S(\omega)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X; \mathcal{M})$ , т.е.  $f * \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для всех  $f \in \mathcal{M}$ . Пусть  $(e_n, n \geq 1)$  — произвольная о.а.е. алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ . Из леммы 1 следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(\omega)x - x) = S(\omega)(e_n * x) - (e_n * x) \in C_0(\mathbb{R}, X),$$

откуда получаем, что  $y = e_n * x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ , а, значит, и  $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ .  $\square$

### 3. БАНАХОВЫ $L^1(\mathbb{R})$ -МОДУЛИ И СПЕКТР БЕРЛИНГА. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ.

В данном разделе будут приведены некоторые определения и факты из теории банаховых модулей, существенно используемые в дальнейшем.

Пусть  $\mathcal{X}$  — комплексное банахово пространство и  $End \mathcal{X}$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathcal{X}$ .

Будем считать, что  $\mathcal{X}$  является невырожденным банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [7, 11], структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$ . Это означает, что выполняются два свойства следующего утверждения:

**Утверждение 1.** Для банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  выполняются следующие условия:

- 1) из равенства  $fx = 0$ , справедливого для любой функции  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , следует, что вектор  $x \in \mathcal{X}$  — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля  $\mathcal{X}$ );
- 2) для всех  $x \in \mathcal{X}$  имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на  $\mathcal{X}$  с представлением  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$ ):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Если  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$  — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1)$$

определяет на  $\mathcal{X}$  структуру банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, удовлетворяющего условиям утверждения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением  $T$ .

**Замечание 1.** С каждым невырожденным банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем  $\mathcal{X}$  ассоциировано единственное представление  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$  (см. [7]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение  $(\mathcal{X}, T)$ .

Теория банаховых  $L^1(\mathbb{R})$ -модулей изложена в [7, 11–13].

**Определение 6.** Вектор из банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  назовем *непрерывным* (относительно представления  $T$ ) или  *$T$ -непрерывным*, если функция  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\varphi_x(t) = T(t)x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на  $\mathbb{R}$ ).

Совокупность всех  $T$ -непрерывных векторов из банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  обозначим через  $\mathcal{X}_c$  или  $(\mathcal{X}, T)_c$ . Оно образует замкнутый *подмодуль* из  $\mathcal{X}$ , т.е.  $\mathcal{X}_c$  —

замкнутое линейное подпространство из  $\mathcal{X}$ , инвариантное относительно всех операторов  $T(f), T(t), f \in L^1(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$ .

Пространство  $C_b(\mathbb{R}, X)$  является банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (1), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций)  $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_b(\mathbb{R}, X)$ .

Далее символом  $\mathcal{Y}$  обозначим фактор-пространство  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , являющееся банаховым пространством с нормой  $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{C}_0} \|y\|$ , где  $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0$  — класс эквивалентности, содержащий функцию  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ . В пространстве  $\mathcal{Y}$  действует сильно непрерывная группа изометрий  $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}$  вида  $\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, t \in \mathbb{R}, \tilde{x} \in \mathcal{Y}$ .

Тогда структура банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля на  $\mathcal{Y}$  (см. [3, 7] определяется с помощью представления  $\tilde{S}$  и задается формулой  $f\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x} d\tau, f \in L^1(\mathbb{R}), \tilde{x} \in \mathcal{Y}$ .

**Определение 7.** *Спектром Берлинга* вектора  $x \in \mathcal{X}$  называется множество чисел  $\Lambda(x)$  из  $\mathbb{R}$  вида  $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$ .

Из определения следует, что  $\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует функция } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \hat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0\}$ .

**Определение 8.** Пусть  $\omega > 0$ . Вектор  $x_0 \in (\mathcal{X}, T)$  называется  $\omega$ -периодическим (относительно представления  $T$ ), если выполнено  $x_0 \in \mathcal{X}_c$  и  $T(\omega)x_0 = x_0$ .

Множество  $\omega$ -периодических векторов, обозначаемое через  $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$ , образует замкнутое подпространство в  $\mathcal{X}$ , инвариантное относительно операторов  $T(t), t \in \mathbb{R}$ .

В [2] была получена следующая

**Теорема 4.** Пусть  $\omega > 0$ . Для того, чтобы вектор  $x_0 \in \mathcal{X}$  был  $\omega$ -периодическим (т.е.  $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$ ), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение  $\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ .

Непосредственно из определения представления  $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}$  следует, что  $\tilde{S}(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}$  для любого вектора  $x \in \mathcal{Y}_\omega$ . Следовательно, имеет место

**Теорема 5.** Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  является  $\omega$ -периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности  $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  является  $\omega$ -периодическим вектором относительно представления  $\tilde{S} \in \text{End } \mathcal{Y}$ .

Получен следующий спектральный критерий периодичности функции на бесконечности:

**Теорема 6.** Для того, чтобы функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  была  $\omega$ -периодической на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы имело место включение  $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Поскольку фактор-пространство  $\mathcal{U}$  является банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем, то из определений 10 и 11 статьи [2] следует, что  $\Lambda(\tilde{x}) = \Lambda_{ess}(x)$ , где  $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ . Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 5.  $\square$

#### 4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 2.

Пусть  $\omega > 0$ . Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t + \omega) = Bx(t) + y_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где  $B \in \text{End } X$ ,  $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ .

**Теорема 7.** Пусть спектр  $\sigma(B)$  оператора  $B$  удовлетворяет условию

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}. \quad (3)$$

Тогда каждое ограниченное решение  $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow X$  разностного уравнения (2) принадлежит пространству  $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ .

*Доказательство.* Пусть функция  $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  удовлетворяет разностному уравнению (2), т.е.  $S(\omega)x_0 - Bx_0 = y_0$ , где  $(Bx_0)(t) = Bx_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Поскольку  $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , то

$$\tilde{S}(\omega)\tilde{x}_0 - B\tilde{x}_0 = \tilde{0}, \quad (4)$$

где  $B\tilde{x}_0 = \widetilde{Bx_0}$ .

Докажем включение  $\Lambda(\tilde{x}_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ . Пусть  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus (\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z})$ . Выберем функцию  $f \in L^1(\mathbb{R})$  такую, что  $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$  и  $\text{supp } \hat{f}$  — компакт, причем  $(\text{supp } \hat{f}) \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} = \emptyset$ . Покажем, что  $f\tilde{x}_0 = 0$ . Из (4) получаем

$$f(\tilde{S}(\omega)\tilde{x}_0 - B\tilde{x}_0) = (S(\omega)f)\tilde{x}_0 - Bf\tilde{x}_0 = f_\omega\tilde{x}_0 - Bf\tilde{x}_0 = \tilde{0}, \quad (5)$$

где  $f_\omega = S(\omega)f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Из (5) получаем включение  $(f_\omega - Bf) * x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ . Поскольку  $\sigma(B) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$ , то существует окрестность  $V \subset \mathbb{T}$  числа  $\gamma_0 = e^{i\lambda_0}$  такая, что определена резольвента  $\lambda \mapsto R(e^{i\lambda}, B) : V \rightarrow \text{End } X$  оператора  $B$ .

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию  $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  такую, что  $\hat{\varphi}(\lambda_0) \neq 0$  и  $\text{supp } \varphi \subset [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$  для любого малого  $\delta > 0$  такого, что  $e^{i\lambda} \in \rho(B)$

для  $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ . Тогда она является преобразованием Фурье некоторой функции  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , а функция

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\lambda)(e^{i\lambda I} - B)^{-1} & , \lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta], \\ 0 & , \lambda \notin [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta], \end{cases}$$

является (в силу голоморфности функции  $\lambda \mapsto (e^{i\lambda I} - B)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ ) преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции  $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ .

Из равенств

$$(F * (f_\omega - Bf))^\wedge(\lambda) = \widehat{F}(\lambda)(e^{i\lambda I} - B)\widehat{f}(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda)\widehat{f}(\lambda)I, \lambda \in \mathbb{R},$$

и формулы (5) следует, что

$$F * (f_\omega - Bf) * x_0 = (\varphi * f) * x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X).$$

Обозначив  $\varphi * f$  через  $g$ , получаем, что  $\widehat{g}(\lambda_0) = \widehat{\varphi}(\lambda_0)\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ . Таким образом,  $\lambda_0$  не принадлежит существенному спектру функции  $x_0$ . Отсюда, в силу теоремы 6, следует, что функция  $x_0$  принадлежит пространству  $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ .  $\square$

## 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  — линейный оператор с областью определения  $D(A)$ , являющийся генератором сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где  $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  и пространство  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  удовлетворяет всем условиям определения 2.

Классическим решением дифференциального уравнения (6) называется дифференцируемая функция  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  такая, что  $x(t) \in D(A)$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ , и удовлетворяющая уравнению (6) для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Функция  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  называется *слабым решением* уравнения (6), если для всех  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $s \leq t$ , имеют место равенства

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int_s^t U(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Справедлива следующая



**Теорема 8.** Пусть  $\omega > 0$  и сильно непрерывная полугруппа операторов  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$  ограничена и имеет место включение

$$\sigma(U(\omega)) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}. \quad (8)$$

Тогда каждое ограниченное на  $\mathbb{R}$  слабое решение уравнения (6) с функцией  $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  принадлежит пространству  $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ .

*Доказательство.* Пусть выполнено условие (8). Пусть  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  – ограниченное на  $\mathbb{R}$  слабое решение уравнения (6).

Положив в (7)  $t = s + \omega$  и заменив впоследствии  $s$  на  $t$ , получим равенство

$$x(t+1) = U(1)x(t) + \int_t^{t+1} U(t+1-\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначения  $U(\omega) = B$ ,  $\int_t^{t+\omega} U(t+\omega-\tau)f(\tau)d\tau = y_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и покажем, что  $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ . В силу ограниченности полугруппы  $U$  имеем  $\|y_0(t)\| = \left\| \int_t^{t+\omega} U(t+\omega-\tau)y(\tau)d\tau \right\| \leq M \int_t^{t+\omega} \|y(\tau)\|d\tau$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , для некоторого  $M > 0$ . Тогда из того, что  $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , получаем, что  $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ , т.е. функция  $x$  удовлетворяет разностному уравнению (2). Из (8) следует, что выполнено условие (3) теоремы 7, и, значит,  $x \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X)$ .  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов, Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // УМН. — 1946. — Т. 1 — № 2(12). — С. 48–146.  
GELFAND, I. M., RAYKOV, D. A., SHILOV, G. E. (1997) Commutative rated rings. *UMN*. 1 (2). p. 48–146.
2. BASKAKOV, A., STRUKOVA, I. (2016) Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.* 7 (4). p. 9–29.
3. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. — 2013. — Т. 68 — № 1 (409). — С. 77–128.  
BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of Linear Differential Equations by Methods of the Spectral Theory of Difference Operators and Linear Relations. *Russian Math. Surveys*. 68 (1). p. 69–116.

4. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97 — № 2.. — С. 174–190.  
BASKAKOV, A. G. (2015) Harmonic and Spectral Analysis of Power Bounded Operators and Bounded Semigroups of Operators on Banach Spaces. *Math. Notes.* 97 (2). p. 164–178.
5. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функции // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57 — № 1. — С. 186–198.  
STRUKOVA, I. I. (2016) About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.* 57 (1). p. 145–154.
6. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.  
STRUKOVA, I. I. (2015) Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika.* 3. p. 186–198.
7. Баскаков, А. Г., Криштал, И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69 — № 3.. — С. 3–54.  
BASKAKOV, A. G. & KRISHTAL, I. A. (2005) Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.* 69 (3). p. 439–486.
8. Струкова, И. И. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 4. — С. 195–205.  
STRUKOVA, I. I. (2018) About slowly varying and periodic at infinity functions from homogeneous spaces and harmonic distributions. *Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika.* 4. p. 195–205.
9. Струкова, И. И., Струков, В. Е. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2018. — Т. 50 — № 3. — С. 254–264.  
STRUKOVA, I. I., STRUKOV, V. E. (2018) About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika.* 50 (3). p. 254–264.

10. Струкова, И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах // Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. — 2017. — № 2(39). — С. 29–38.  
STRUKOVA, I. I. (2017) Harmonic analysis of periodic at infinity functions in homogeneous spaces. *Vestnik VolGU. Ser. 1. Matematika. Fizika.* 2(39). p. 29–38.
11. Росс, К. Абстрактный гармонический анализ. Том 2 / К. Росс, Э. Хьюитт. — М.: Мир, 1975. — 899 с.  
ROSS, K. A., HEWITT, E. (1970) *Abstract Harmonic Analysis. Volume II.* Springer-Verlag, New York.
12. BASKAKOV, A. G., KRISHTAL, I. A. (2016) Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics.* 13 (5). p. 2443–2462.
13. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.  
BASKAKOV, A. G. (2006) Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 137 (4). p. 4885–5036.

УДК: 517.432

MSC2010: 46C20;47B50

## ОБ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ J-САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА С НЕПУСТЫМ МНОЖЕСТВОМ РЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

© Д. В. Третьяков

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [dttvd@mail.ru](mailto:dttvd@mail.ru)

ON COMMON APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF J-SELFADJOINT DILATION  
FOR A LINEAR OPERATOR WITH A NONEMPTY SET OF REGULAR POINTS.

Tretyakov D. V.

**Abstract.**

The common approach to construction of J-selfadjoint dilation for linear operator with nonempty regular point set is considered in this article.

Let  $A$  — linear operator with nonempty regular point set ( $-i \in \rho(A)$ ) and  $\text{Clos dom}(A) = \mathfrak{H}$ , where  $\mathfrak{H}$  — Hilbert space,

$$B_+ := iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}, \quad B_- := iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*,$$

$Q_{\pm} := \sqrt{|B_{\pm}|}$ ,  $B_{\pm} = \mathcal{J}_{\pm}Q_{\pm}$  — polar decompositions of  $B_{\pm}$ ,  $\mathfrak{Q}_{\pm} = \text{Clos}(Q_{\pm}\mathfrak{H})$ .

Let  $\mathfrak{D}_{\pm}$  — arbitrary Hilbert spaces and  $F_{\pm} : \text{dom}(F_{\pm}) \rightarrow \mathfrak{D}_{\pm}$  ( $\text{dom}(F_{\pm}) \subset \mathfrak{D}_{\pm}$ ) — simple maximal symmetric operators with defect numbers  $(q_-, 0)$  and  $(0, q_+)$  respectively, moreover  $\dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm} = q_{\pm}$ ,  $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$  are isometries,  $V_{\pm}$  — Caley transformations of  $F_{\pm}$ .

Let  $\langle \mathcal{H}_{\pm}, \Gamma_{\pm} \rangle$  are the spaces of boundary values of operators  $F_{\pm}^*$ , i.e.:

$$1) \forall f, g \in \text{dom}(F_{\pm}^*) \quad (F_{\pm}^*f, g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (f, F_{\pm}^*g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp i(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}g)_{\mathcal{H}_{\pm}};$$

$$2) \text{ the transformations } \text{dom}(F_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}f \in \mathcal{H}_{\pm} \text{ are surjective.}$$

Consider the Hilbert space  $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$ . Define in this space indefinite metric  $J = J_- \oplus I \oplus J_+$  and operator  $S$ :

$$\forall h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}, \quad n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}, \quad J_{\pm} \left( \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm}.$$

The vector  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  iff

- 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;
- 2)  $\varphi = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$ ;

3)  $\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi$ , where  $T^* = I + 2iR_{-i}$ .

If this conditions are fulfil, that for all  $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$

$$Sh = S(h_-, h_0, h_+)^T := (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi, F_+^* h_+)^T.$$

**Theorem.** *Operator  $S$  is a  $J$ -selfadjoint dilation of operator  $A$ .*

Different private cases of dilation  $S$  are considered too.

**Keywords:**  *$J$ -selfadjoint dilation, maximal closed symmetric operator, defect operators.*

## ВВЕДЕНИЕ

Фактически понятие дилатации линейного оператора впервые появляется у М. А. Наймарка [1] в 1940 году. Идея дилатации базируется на растяжении заданного оператора до оператора с более хорошими свойствами в более широком пространстве.

Унитарную дилатацию сжатия впервые построил Б. Сёкефальви-Надь [2]. Идея дилатации оказалась очень плодотворной, она принесла многочисленные приложения в различные математические дисциплины (см., напр., [3]). Отметим, что в [4] была построена унитарная дилатация общего вида для оператора сжатия.

Далее, Л. А. Сахнович [5], А. В. Кужель [6] и Ch. Davis [7] независимо друг от друга построили  $J$ -унитарные дилатации произвольного ограниченного оператора.

В 1977 году в [8] вышла в свет пионерская работа Б. С. Павлова, в которой была построена самосопряженная дилатация оператора Шредингера. При этом область определения исходного оператора совпадала с областью определения сопряженного оператора.

Полученные результаты были обобщены в работах А. В. Кужеля [9] и Ю. Л. Кудряшова [10], в которых были построены трансляционная и спектральная формы самосопряженной дилатации произвольного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Этими же авторами были построены трансляционная [9] и спектральная [11] формы  $J$ -самосопряженной дилатации произвольного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. Позже вторым автором был доказан изоморфизм трансляционных и спектральных форм в случае самосопряженной дилатации [12].

Анализ перечисленных результатов приводит к возможности построения  $J$ -самосопряженной дилатации *общего вида* для произвольного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек, частными случаями которой являются дилатации А. В. Кужеля [9] и Ю. Л. Кудряшова [11]. Построению такой дилатации посвящена данная работа.

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть  $\mathfrak{H}$  — гильбертово пространство (ГП),  $A$  — плотно заданный линейный оператор, причем  $-i \in \rho(A)$ ,  $R_{-i} = (A + i)^{-1}$ . Рассмотрим самосопряженные операторы [6]

$$B_+ = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^*R_{-i}, \quad B_- = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}R_{-i}^*$$

и их полярные разложения  $B_{\pm} = \mathcal{J}_{\pm}|B_{\pm}|$ . Пусть  $Q_{\pm} = \sqrt{|B_{\pm}|}$ . Определим дефектные подпространства оператора  $A$  следующим образом:  $\mathfrak{Q}_{\pm} = \text{Clos}(Q_{\pm}\mathfrak{H})$ .

Рассмотрим произвольные ГП  $\mathfrak{D}_{\pm}$ , в которых действуют произвольные замкнутые простые максимальные симметрические операторы  $F_{\pm}$  с индексами дефекта  $(0, \mathfrak{q}_+)$  и  $(\mathfrak{q}_-, 0)$  соответственно, где  $\mathfrak{q}_{\pm} = \dim \mathfrak{Q}_{\pm} = \dim \mathfrak{N}_{\pm}$ , а  $\mathfrak{N}_{\pm}$  — дефектные подпространства операторов  $F_{\pm}$ . В силу последних равенств существуют изометрии  $\Phi_{\pm} : \mathfrak{N}_{\pm} \rightarrow \mathfrak{Q}_{\pm}$ .

Обозначим через  $V_{\pm}$  изометрические простые операторы, которые являются преобразованиями Кэли операторов  $F_{\pm}$ :

$$V_- = (F_- + i)(F_- - i)^{-1} \quad V_+ = (F_+ - i)(F_+ + i)^{-1}. \quad (1)$$

Формулы обращения имеют вид:

$$F_- = i(V_- + 1)(V_- - 1)^{-1} \quad F_+ = -i(V_+ + 1)(V_+ - 1)^{-1}. \quad (2)$$

**Определение 1.** Пары  $\langle \mathcal{H}_{\pm}, \Gamma_{\pm} \rangle$ , где  $\mathcal{H}_{\pm}$ -ГП со скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_{\pm}}$ ,

$\Gamma_{\pm} : \text{dom}(F_{\pm}^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\pm}$  — операторы, называются пространствами граничных значений (ПГЗ) операторов  $F_{\pm}^*$ , если:

- а)  $\forall f, g \in \text{dom}(F_{\pm}^*) \quad (F_{\pm}^*f, g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (f, F_{\pm}^*g)_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp i(\Gamma_{\pm}f, \Gamma_{\pm}g)_{\mathcal{H}_{\pm}};$  (3)  
 б) отображения  $\text{dom}(F_{\pm}^*) \ni f \mapsto \Gamma_{\pm}f \in \mathcal{H}_{\pm}$  сюръективны.

Из определения и формул фон Неймана вытекает, что в нашем случае в качестве  $\mathcal{H}_{\pm}$  можно взять подпространства  $\mathfrak{N}_{\pm}$ .

Отметим, что ПГЗ для исследования различных свойств симметрических операторов с равными дефектными числами впервые были введены в работах Горбачук В.И., Брука В.М., Маламуда М.М. и Деркача В.А. в 80-х годах прошлого столетия и оказали, в дальнейшем, большое влияние на решение различных сложных задач в разных разделах математики (см., напр., [15], [16], [17]).

Рассмотрим частный случай формул (3). Пусть в этих формулах  $g = f \in \text{dom}(F_{\pm})$ . Тогда получаем, что  $\|\Gamma_{\pm}f\| = 0$ , то есть  $\text{dom}(F_{\pm}) \subseteq \ker \Gamma_{\pm}$ . Обратно, пусть, к примеру,  $h_+ = h_+^0 + n_+ \in \ker \Gamma_+$ , где  $h_+^0 \in \text{dom}(F_+)$ ,  $n_+ \in \mathfrak{N}_+$ .

Тогда по формулам фон Неймана

$$0 = \|\Gamma_+ h_+\|^2 = (F_+^* h_+, h_+)_{\mathfrak{D}_+} - (h_+, F_+^* h_+)_{\mathfrak{D}_+} = (F_+ h_+^0 - in_+, h_+^0 + n_+)_{\mathfrak{D}_+} - \\ - (h_+^0 + n_+, F_+ h_+^0 - in_+)_{\mathfrak{D}_+} = (F_+ h_+^0, n_+)_{\mathfrak{D}_+} - i(n_+, h_+^0)_{\mathfrak{D}_+} - 2i\|n_+\|^2 - \\ - i(h_+^0, n_+)_{\mathfrak{D}_+} - (n_+, F_+ h_+^0)_{\mathfrak{D}_+} = -2i\|n_+\|^2.$$

Отсюда  $n_+ = 0$  и  $h_+ = h_+^0 \in \text{dom}(F_+)$ . Таким образом,  $\text{dom}(F_+) = \ker \Gamma_+$ . Аналогично  $\text{dom}(F_-) = \ker \Gamma_-$ . Нами доказана

**Лемма 1.** *Имеют место равенства  $\text{dom}(F_{\pm}) = \ker \Gamma_{\pm}$ .*

Построим теперь ГП  $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$  и определим в  $\mathbb{H}$  оператор  $J = J_- \oplus I \oplus J_+$ , где  $J_{\pm}$  определяются равенствами:

$$\forall h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}, \quad n_k^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}, \quad J_{\pm} \left( \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \right) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm}. \quad (4)$$

Имеет место следующее предложение.

**Лемма 2.**  $J_{\pm} V_{\pm} = V_{\pm} J_{\pm}$ ,  $J_{\pm} \Gamma_{\pm} \subseteq \Gamma_{\pm} J_{\pm}$ ,  $J_{\pm} F_{\pm} \subseteq F_{\pm} J_{\pm}$ .

*Доказательство.* В силу (4) для любых векторов  $n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$

$$J_{\pm} V_{\pm} n_{\pm} = V_{\pm} \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_{\pm} = V_{\pm} J_{\pm} n_{\pm}.$$

Отсюда для любых векторов  $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm}$

$$J_{\pm} V_{\pm} h_{\pm} = J_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^{k+1} n_k^{\pm} = V_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm} = V_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}.$$

Аналогично для произвольных векторов  $h_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} \in \text{dom} F_{\pm}^*$

$$J_{\pm} \Gamma_{\pm} h_{\pm} = J_{\pm} \Gamma_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k n_k^{\pm} = J_{\pm} n_0^{\pm} = \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_0^{\pm} = \Gamma_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} V_{\pm}^k \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_k^{\pm} = \Gamma_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}.$$

Оставшиеся включения доказываются с помощью равенств (2):

$$J_{\pm} F_{\pm} = \mp i J_{\pm} (I + 2(V_{\pm} - 1)^{-1}) \subseteq F_{\pm} J_{\pm}.$$

При этом для любых векторов  $h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$  имеем  $J_{\pm} h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}^*$  так как из-за леммы 2  $\Gamma_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}^0 = J_{\pm} \Gamma_{\pm} h_{\pm}^0 = 0$ .  $\square$

**Следствие 1.**  $J_{\pm} F_{\pm}^* \subseteq F_{\pm}^* J_{\pm}$ .

*Доказательство.* По формулам фон Неймана для любых векторов  $h_{\pm} \in \text{dom} F_{\pm}^*$  имеют место равенства  $h_{\pm} = h_{\pm}^0 + n_{\pm}$ , где  $h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$ ,  $n_{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$  и  $F_{\pm}^* h_{\pm} = F_{\pm}^* h_{\pm}^0 \mp in_{\pm}$ .

Отсюда

$$J_{\pm}F_{\pm}^*h_{\pm} = J_{\pm}(F_{\pm}h_{\pm}^0 \mp in_{\pm}) = F_{\pm}J_{\pm}h_{\pm}^0 \mp iJ_{\pm}n_{\pm}. \quad (5)$$

Так как  $J_{\pm}n_{\pm} = \Phi_{\pm}^{-1} \mathcal{J}_{\pm} \Phi_{\pm} n_{\pm}^{\pm} \in \mathfrak{N}_{\pm}$  и  $\Gamma_{\pm} J_{\pm} h_{\pm}^0 = 0$ , то  $J_{\pm} h_{\pm}^0 \in \text{dom} F_{\pm}$ . Следовательно, из равенства (5) вытекает, что  $J_{\pm} F_{\pm}^* h_{\pm} = F_{\pm}^* J_{\pm} h_{\pm}$  для любых  $h_{\pm} \in \text{dom} F_{\pm}^*$ .  $\square$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ J-САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В пространстве  $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$  определим оператор  $S$ .

Будем говорить, что вектор  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T$  из пространства  $\mathbb{H}$  принадлежит  $\text{dom}(S)$  тогда и только тогда, когда:

- 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;
- 2)  $\varphi = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$ ;
- 3)  $\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi$ , где  $T^* = I + 2iR_{-i}^*$ .

Для любого вектора  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  положим

$$S\mathbf{h} = S(h_-, h_0, h_+)^T := (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi, F_+^* h_+)^T. \quad (6)$$

Доказательству основной теоремы предположим следующие два предложения.

**Лемма 3.** Если вектор  $\mathbf{h} = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$ , то

$$\psi = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*) \text{ и } (A + i)\varphi - (A^* - i)\psi = 2ih_0$$

*Доказательство.* Подействуем на обе части условия 3 на область определения оператора  $S$  оператором  $Q_+$  с учетом равенств  $TQ_+ = Q_-T$  и  $Q_+T^* = T^*Q_-$ :

$$\begin{aligned} Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ &= T^* Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+^2 (A + i)\varphi = (I + 2iR_{-i}^*) Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + iB_+(A + i)\varphi = \\ &= (I + 2iR_{-i}^*) Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i(iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^* R_{-i})(A + i)\varphi = \\ &= (I + 2iR_{-i}^*) Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- - \varphi + R_{-i}^* (A + i)\varphi - 2iR_{-i}^* \varphi = (I + 2iR_{-i}^*) (Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- - \varphi) + \\ &\quad + R_{-i}^* (A + i)\varphi = -(I + 2iR_{-i}^*) h_0 + R_{-i}^* (A + i)\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Из равенства (7) получаем:

$$2iR_{-i}^* h_0 + (h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+) = R_{-i}^* (A + i)\varphi \quad (8)$$

Так как  $\{R_{-i}^* h_0, R_{-i}^* (A + i)\varphi\} \subset \text{dom}(A^*)$ , то вектор  $\psi = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$ . Подействуем теперь на обе части равенства (8) оператором  $(A^* - i)$ :

$$2ih_0 + (A^* - i)\psi = (A + i)\varphi,$$

что и требовалось доказать.  $\square$



Аналогично доказывается

**Лемма 4.** Если вектор  $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \text{dom}(S^*)$ , то

$$\varphi = g_0 + \mathcal{J}_- Q_- \Phi_- \Gamma_- g_- \in \text{dom}(A) \text{ и } (A + i)\varphi - (A^* - i)\psi = 2ig_0.$$

**Теорема.** Оператор  $S$  является  $J$ -самосопряженной дилатацией оператора  $A$ .

*Доказательство.* Легко проверить, что оператор  $S$  плотно задан.

Так как оператор  $S^{[*]}$ , сопряженный к  $S$  в метрике  $J$ , удовлетворяет равенству  $S^{[*]} = JS^*J$  [13], то достаточно доказать, что  $S = JS^*J$ .

Найдем дефинитный сопряженный оператор  $S^*$ . Для любых векторов  $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  и  $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \mathbb{H}$ , где  $g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$

$$\begin{aligned} (Sh, g)_{\mathbb{H}} &= (F_-^* h_-, g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (-ih_0 + (A + i)\varphi, g_0) + (F_+^* h_+, g_+)_{\mathfrak{D}_+} = \\ &= (h_-, F_-^* g_-)_{\mathfrak{D}_-} + i(\Gamma_- h_-, \Gamma_- g_-)_{\mathfrak{N}_-} + (h_+, F_+^* g_+)_{\mathfrak{D}_+} - i(\Gamma_+ h_+, \Gamma_+ g_+)_{\mathfrak{N}_+} + \\ &+ (h_0, ig_0) + ((A + i)\varphi, g_0) = (h_-, F_-^* g_-)_{\mathfrak{D}_-} + i(\Phi_- \Gamma_- h_-, \Phi_- \Gamma_- g_-)_{\mathfrak{N}_-} + (h_+, F_+^* g_+)_{\mathfrak{D}_+} - \\ &- i(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi, \Phi_+ \Gamma_+ g_+) + (h_0, ig_0) + ((A + i)\varphi, g_0) = \\ &= (h_-, F_-^* g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^* g_+)_{\mathfrak{D}_+} + i(\Phi_- \Gamma_- h_-, \Phi_- \Gamma_- g_- - T\Phi_+ \Gamma_+ g_+)_{\mathfrak{N}_-} + \\ &+ ((A + i)\varphi, g_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ g_+) + (h_0, ig_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Из равенства 9 вытекает, что вектор  $\psi = g_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ g_+$  должен принадлежать  $\text{dom}(A^*)$ . Тогда используя условие 2. на  $\text{dom}(S)$ , получим:

$$\begin{aligned} (Sh, g)_{\mathbb{H}} &= (h_-, F_-^* g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^* g_+)_{\mathfrak{D}_+} + i(\Phi_- \Gamma_- h_-, \Phi_- \Gamma_- g_- - T\Phi_+ \Gamma_+ g_+)_{\mathfrak{N}_-} + \\ &+ (h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_-, (A^* - i)\psi) + (h_0, ig_0) = (h_-, F_-^* g_-)_{\mathfrak{D}_-} + (h_+, F_+^* g_+)_{\mathfrak{D}_+} + \\ &+ (h_0, ig_0 + (A^* - i)\psi) + i(\Phi_- \Gamma_- h_-, \Phi_- \Gamma_- g_- - T\Phi_+ \Gamma_+ g_+ + iQ_- (A^* - i)\psi)_{\mathfrak{N}_-} = (h, g^*)_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда вектор  $g = (g_-, g_0, g_+)^T \in \mathbb{H}$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $g_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;
- 2)  $\psi = g_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ g_+ \in \text{dom}(A^*)$ ;
- 3)  $\Phi_- \Gamma_- g_- = T\Phi_+ \Gamma_+ g_+ - iQ_- (A^* - i)\psi$ , где  $T = I - 2iR_{-i}$ .

Условия 1.\*-3.\* определяют область определения оператора  $S^*$ . Если  $g \in \text{dom}(S^*)$ , то

$$S^* g = S^*(g_-, g_0, g_+)^T = (F_-^* g_-, ig_0 + (A^* - i)\psi, F_+^* g_+)^T.$$

Докажем теперь, что  $J \text{dom}(S) = \text{dom}(S^*)$ . Пусть  $h \in \text{dom}(S)$ . Тогда, в частности,  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ . Но тогда  $J_{\pm} h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ . В самом деле, это вытекает из доказательства следствия 1. Рассмотрим вектор  $Jh = (J_- h_-, h_0, J_+ h_+)^T$ . Проверим условия 2.\* и 3.\*

$$\begin{aligned} \text{Условие 2.}^* \psi &= h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ J_+ h_+ = h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ \sum_{k=0}^{\infty} V_+^k \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_k^+ = \\ &= h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_0^+ = h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \mathcal{J}_+ \Phi_+ n_0^+ = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*) \end{aligned}$$

в силу леммы 3.

Условие 3.\* Рассмотрим вектор

$$\omega = \Phi_- \Gamma_- J_- h_- - T \Phi_+ \Gamma_+ J_+ h_+ + i Q_- (A^* - i) \psi, \quad (10)$$

где  $\psi = h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ J_+ h_+ = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$  на основании леммы 3.

Так как  $h \in \text{dom}(S)$ , то, в частности,

$$\Phi_+ \Gamma_+ h_+ = T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i) \varphi, \quad (11)$$

где  $\varphi = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$ .

Подействуем на обе части равенства (11) слева оператором  $T \mathcal{J}_+$ :

$$T \mathcal{J}_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ = \mathcal{J}_- (I - 2i R_{-i}) (I + 2i R_{-i}^*) \Phi_- \Gamma_- h_- + i Q_- (A + i) \varphi + 2Q_- \varphi. \quad (12)$$

В равенстве (12) используем еще раз лемму 3:

$$\begin{aligned} T \mathcal{J}_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ &= \mathcal{J}_- (I - 2(i R_{-i} - i R_{-i}^* - 2R_{-i} R_{-i}^*)) \Phi_- \Gamma_- h_- i Q_- + \\ &+ i Q_- ((A^* - i) \psi + 2i h_0) + 2Q_- (h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_-) = \mathcal{J}_- \Phi_- \Gamma_- h_- + i Q_- (A^* - i) \psi. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано равенство

$$\mathcal{J}_- \Phi_- \Gamma_- h_- = T \mathcal{J}_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ - i Q_- (A^* - i) \psi, \quad (13)$$

где  $\psi = h_0 + \mathcal{J}_+ Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ J_+ h_+ = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$ .

При этом  $\Phi_- \Gamma_- J_- h_- = \Phi_- \Gamma_- \sum_{k=0}^{\infty} V_-^k \Phi_-^{-1} \mathcal{J}_- \Phi_- n_k^- = \mathcal{J}_- \Phi_- n_0^- = \mathcal{J}_- \Phi_- \Gamma_- h_-$ , и, аналогично,  $T \Phi_+ \Gamma_+ J_+ h_+ = T \mathcal{J}_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+$ . Сравнивая равенства (10) и (13), приходим к заключению, что  $\omega$  — нулевой вектор. Это доказывает включение  $J \text{dom}(S) \subseteq \text{dom}(S^*)$ .

Обратное включение доказывается аналогично с помощью леммы 4. Следовательно, справедливо равенство  $J \text{dom}(S) = \text{dom}(S^*)$ , опираясь на которое, легко убедиться в  $J$ -самосопряженности оператора  $S$ . В самом деле, для любого вектора  $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  на основании следствия 1

$$JS^* Jh = JS^* J(h_-, h_0, h_+)^T = J(J_- F_-^* h_-, i h_0 + (A^* - i) \psi, J_+ F_+^* h_+)^T = Sh$$

в силу леммы 3. Здесь  $\psi = h_0 + Q_+ \Phi_+ \Gamma_+ h_+ \in \text{dom}(A^*)$ ,  $\varphi = h_0 + Q_- \Phi_- \Gamma_- h_- \in \text{dom}(A)$ .

Предположим теперь, что  $\text{Im } \lambda < 0$ . Найдем резольвенту оператора  $S$ . Для этого составим следующее уравнение

$((F_-^* - \lambda)h_-, -(i + \lambda)h_0 + (A + i)\varphi, (F_+^* - \lambda)h_+)^T = (g_-, g_0, g_+)^T$ , которое эквивалентно системе:

$$\begin{cases} (F_-^* - \lambda)h_- = g_-, \\ -(i + \lambda)h_0 + (A + i)\varphi = g_0, \\ (F_+^* - \lambda)h_+ = g_+. \end{cases} \quad (14)$$

Так как  $F_-$  симметрический оператор с индексом дефекта  $(q_-, 0)$ , то нижняя полуплоскость не содержит собственных значений оператора  $F_-^*$ , поэтому  $h_- = (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-$ . Второе уравнение перепишем так:  $(A - \lambda)\varphi + (i + \lambda)(\varphi - h_0) = g_0$  или

$$(A - \lambda)\varphi = g_0 - (i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- h_-.$$

Множество  $\rho(A)$  открыто. Будем считать, что  $\lambda$  принадлежит той окрестности точки  $-i$  в нижней полуплоскости, которая содержит только регулярные точки оператора  $A$ . Тогда

$$\varphi = R_\lambda(g_0 - (i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-). \quad (15)$$

Из равенства (15) находим вектор  $h_0$ :

$$h_0 = R_\lambda g_0 - (I + (i + \lambda)R_\lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-.$$

Из условия 3. на  $\text{dom}(S)$  следует равенство

$$\Gamma_+ h_+ = \Phi_+^{-1} T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \Phi_+^{-1} \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi. \quad (16)$$

По формулам фон Неймана  $h_+ = h_+^0 + n_+$ ,  $h_+^0 \in \text{dom}(F_+)$ ,  $n_+ \in \mathfrak{N}_+$ , причем,  $\Gamma_+ h_+ = n_+$ . Ввиду формулы (16)

$$n_+ = \Phi_+^{-1} (T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi). \quad (17)$$

Перепишем теперь третье уравнение системы (14) следующим образом:

$$(F_+ - \lambda)h_+^0 - (i + \lambda)n_+ = g_+.$$

Находим вектор  $h_+^0$ :

$$h_+^0 = (F_+ - \lambda)^{-1}(g_+ + (i + \lambda)n_+) = (F_+ - \lambda)^{-1}(g_+ + (i + \lambda)\Phi_+^{-1}(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi)).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h_+ &= h_+^0 + n_+ = (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})n_+ = \\ &= (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})\Phi_+^{-1}(T^* \Phi_- \Gamma_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi) = \\ &= (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + (I + (i + \lambda)(F_+ - \lambda)^{-1})\Phi_+^{-1}(T^* \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_- + \\ &\quad + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)R_\lambda(g_0 - (i + \lambda)Q_- \Phi_- \Gamma_- (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-)). \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими обозначениями: для любого линейного оператора  $L$ , для которого существует  $(L - \lambda)^{-1}$  обозначим через  $W_{-i\lambda}(L)$  оператор  $I + (i + \lambda)R_\lambda(L)$ . Кроме того положим

$$v_-(\lambda) := (F_-^* - \lambda)^{-1}g_-,$$

$$v_+(\lambda) := T^*\Phi_-\Gamma_-v_-(\lambda) + i\mathcal{J}_+Q_+W_{-i\lambda}(A)(g_0 - (i + \lambda)Q_-\Phi_-\Gamma_-v_-(\lambda)).$$

Тогда получаем формулу

$$h_+ = (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + W_{-i\lambda}(F_+)\Phi_+^{-1}v_+(\lambda). \quad (18)$$

Используя (17) и (18), находим решение системы (14):

$$\begin{cases} h_- = v_-(\lambda) \\ h_0 = R_\lambda g_0 - W_{-i\lambda}(A)Q_-\Phi_-\Gamma_-v_-(\lambda) \\ h_+ = (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + W_{-i\lambda}(F_+)\Phi_+^{-1}v_+(\lambda) \end{cases}$$

Таким образом, резольвента оператора  $S$  имеет вид:

$$R_\lambda(S)(g_-, g_0, g_+)^T =$$

$$= (v_-(\lambda), R_\lambda g_0 - W_{-i\lambda}(A)Q_-\Phi_-\Gamma_-v_-(\lambda), (F_+ - \lambda)^{-1}g_+ + W_{-i\lambda}(F_+)\Phi_+^{-1}v_+(\lambda))^T.$$

Обозначим через  $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  ортопроектор. Тогда

$$PR_\lambda(S)(0, g_0, 0)^T = P(0, R_\lambda g_0, iW_{-i\lambda}(F_+)\Phi_+^{-1}\mathcal{J}_+Q_+W_{-i\lambda}(A)g_0)^T = R_\lambda g_0.$$

Теорема доказана. □

### 3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим некоторые частные случаи построенной дилатации.

1. Пусть  $\mathfrak{D}_\pm = L_2(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)$ , где  $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ . Тогда операторы  $\Phi_\pm$  можно считать единичными. В пространствах  $\mathfrak{D}_\pm$  рассмотрим симметрические операторы  $F_\pm$ , которые определяются следующим образом:

$$\text{dom}(F_\pm) = \{h_\pm \in W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm) | h_\pm(0) = 0\}, \quad (F_\pm h_\pm) = ih'_\pm(t), \quad h_\pm(t) \in \text{dom}(F_\pm),$$

где  $W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)$ –классы Соболева. Операторы  $F_\pm$ , очевидно, являются простыми и максимальными с индексом дефекта  $(0, \mathfrak{q}_+)$  и  $(\mathfrak{q}_-, 0)$  соответственно. Сопряженные операторы  $F_\pm^*$  задаются такими же дифференциальными выражениями на линеалах  $\text{dom}(F_\pm^*) = W_2^1(\mathbb{R}_\pm; \mathfrak{Q}_\pm)$ .

Для любых векторов  $f_\pm, g_\pm \in \text{dom}(F_\pm^*)$

$$(F_\pm^* f_\pm, g_\pm)_{\mathfrak{D}_\pm} - (f_\pm, F_\pm^* g_\pm)_{\mathfrak{D}_\pm} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\pm}} ((if'_{\pm}(t), g_{\pm}(t))_{\Omega_{\pm}} - (f_{\pm}(t), ig'_{\pm}(t))_{\Omega_{\pm}}) dt = \mp i(f_{\pm}(0), g_{\pm}(0))_{\Omega_{\pm}}.$$

Отсюда получаем равенства для граничных операторов:  $\Gamma_{\pm} f_{\pm} = f_{\pm}(0)$ .

По формулам (1) легко находятся операторы  $V_{\pm}$ :

$$(V_+ y)(t) = y(t) - 2 \int_0^t e^{u-t} y(u) du, \quad (V_- y)(t) = y(t) - 2 \int_{-\infty}^t e^{t-u} y(u) du.$$

Рассмотрим дефектное подпространство  $\mathfrak{N}_+ = \text{span}\{\psi_0(2t)q_+ | q_+ \in \Omega_+\}$  оператора  $F_+$ , где

$$\psi_n(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}(t^n e^{-t})^{(n)}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ортонормированные функции Чебышева-Лаггера [14]. При этом, как легко проверить, справедливы равенства  $V_+^n(\psi_0(2t)q_+) = \psi_n(2t)q_+$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Так как оператор  $F_+$  простой, максимальный и симметрический, то  $V_+$ -односторонний сдвиг [14] и, поэтому, для любой функции  $h_+(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; \Omega_+)$  справедливо разложение

$$h_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(2t)q_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} V_+^n(\psi_0(2t)q_n^+), \quad q_n^+ = \int_0^{\infty} \psi_n(2t)h_+(t)dt \in \Omega_+, \quad n \geq 0.$$

С помощью равенства (4) зададим оператор  $J_+$ :

$$(J_+ h_+)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(2t) \mathcal{J}_+ q_n^+ = \mathcal{J}_+ \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(2t)q_n^+ = \mathcal{J}_+ h_+(t),$$

то есть, оператор  $\mathcal{J}_+$  действует на функцию  $h_+(t)$  при каждом  $t$ .

Аналогичная ситуация обстоит с определением оператора  $J_-$ . Продолжим вначале ортонормированную систему функций Чебышева-Лаггера на промежутке  $(-\infty, 0]$ :

$$\tilde{\psi}_{-n}(t) := \psi_n(-t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Справедливы следующие равенства  $V_-^n(\tilde{\psi}_0(2t)q_-) = \tilde{\psi}_{-n}(2t)q_-$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $V_-$ -односторонний сдвиг. Для любой функции  $h_-(t) \in L_2(\mathbb{R}_-; \Omega_-)$  имеет место разложение

$$h_-(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_{-n}(2t)q_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} V_-^n(\tilde{\psi}_0(2t)q_n^-), \quad q_n^- = \int_{-\infty}^0 \tilde{\psi}_{-n}(2t)h_-(t)dt \in \Omega_-, \quad n \geq 0.$$

По равенству (4)

$$(J_- h_-)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_{-n}(2t) \mathcal{J}_- q_n^- = \mathcal{J}_- \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_{-n}(2t)q_n^- = \mathcal{J}_- h_-(t).$$

Оператор  $\mathcal{J}_-$ , таким образом, действует на функцию  $h_-(t)$  при каждом  $t$ . Отсюда вытекает формула

$$\mathbf{J}h = (\mathcal{J}_-h_-(t), h_0, \mathcal{J}_+h_+(t))^T.$$

В пространстве  $\mathbb{H} = L_2(\mathbb{R}_-; \mathfrak{Q}_-) \oplus \mathfrak{H} \oplus L_2(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Q}_+)$  определим оператор  $\mathbf{S}$ .

Вектор  $\mathbf{h} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T$  принадлежит  $\text{dom}(\mathbf{S})$  тогда и только тогда, когда:

- 1)  $h_{\pm}(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$ ;
- 2)  $\varphi = h_0 + Q_-h_-(0) \in \text{dom}(A)$ ;
- 3)  $h_+(0) = T^*h_-(0) + i\mathcal{J}_+Q_+(A+i)\varphi$ , где  $T^* = I + 2iR_{-i}^*$ .

Для любого вектора  $\mathbf{h} = (h_-(t), h_0, h_+(t))^T \in \text{dom}(\mathbf{S})$  положим

$$\mathbf{S}h = \mathbf{S}(h_-(t), h_0, h_+(t))^T := (ih'_-(t), -ih_0 + (A+i)\varphi, ih'_+(t))^T.$$

В результате получаем  $\mathbf{J}$ -самосопряженную дилатацию, построенную в [11].

2. Пусть  $\mathfrak{D}_{\pm} = l_2(\mathbb{Z}_{\pm}; \mathfrak{Q}_{\pm})$ , где  $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ ,  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ . Тогда операторы  $\Phi_{\pm}$  можно считать единичными. В пространствах  $\mathfrak{D}_{\pm}$  рассмотрим симметрические операторы  $F_{\pm}$ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{dom}(F_{\pm}) &= \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \|S_{\pm n}h_{\pm}\|^2 < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} h_{\pm n}^{\pm} = 0 \right\}, \\ F_+h_+ &= F_+(h_1^+, h_2^+, \dots) := -2i(S_1h_+, S_2h_+, \dots), \\ F_-h_- &= F_-(\dots, h_{-2}, h_{-1}) := 2i(\dots, S_{-2}h_-, S_{-1}h_-), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_n h_+ &= \frac{1}{2}h_n^+ + \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k^+, \quad S_{-n}h_- = \frac{1}{2}h_{-n}^- + \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_{-k}^-, \\ \text{dom}(S_{\pm n}) &= \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|h_{\pm k}^{\pm}\|^2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим также операторы

$$S_{\pm}h_{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} h_{\pm k}, \quad \text{dom}(S_{\pm}) = \left\{ h_{\pm} \in \mathfrak{D}_{\pm} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} \|h_{\pm k}^{\pm}\|^2 < \infty \right\}.$$

Вычисления показывают [6], что  $(F_{\pm}h_{\pm}, g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} - (h_{\pm}, F_{\pm}g_{\pm})_{\mathfrak{D}_{\pm}} = \mp 2i(S_{\pm}h_{\pm}, S_{\pm}g_{\pm})_{\mathfrak{Q}_{\pm}}$ , следовательно, для граничных операторов получаем следующие равенства:  $\Gamma_{\pm}f_{\pm} = \sqrt{2}S_{\pm}f_{\pm}$ .

По формулам (1) находим операторы  $V_{\pm}$ :

$$V_-h_- = (\dots, h_{-2}, h_{-1}, 0), \quad V_+h_+ = (0, h_1, h_2, 0, \dots), \quad h_{\pm k} \in \mathfrak{Q}_{\pm}$$

это односторонние сдвиги в  $\mathfrak{D}_{\pm}$ .

В пространстве  $\mathbb{H} = \mathfrak{D}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{D}_+$  зададим оператор  $J$ :

$$J(h_-, h_0, h_+)^T = (J_- h_-, h_0, J_+ h_+)^T,$$

где  $J_- h_- = (\dots, \mathcal{J}_- h_{-2}, \mathcal{J}_- h_{-1})$ ,  $J_+ h_+ = (\mathcal{J}_+ h_1, \mathcal{J}_+ h_2, \dots)$ .

Определим теперь оператор  $S$  в пространстве  $\mathbb{H}$ . Вектор  $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  тогда и только тогда, когда:

- 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;
- 2)  $\varphi' = h_0 + \sqrt{2}Q_- S_- h_- \in \text{dom}(A)$ ;
- 3)  $\sqrt{2}S_+ h_+ = \sqrt{2}T^* S_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi'$ , где  $T^* = I + 2iR_{-i}$ .

Для любого  $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$

$$S(h_-, h_0, h_+)^T = (F_-^* h_-, -ih_0 + (A + i)\varphi', F_+^* h_+)^T$$

Условия 1.-3. принадлежности вектора  $(h_-, h_0, h_+)^T \in \text{dom}(S)$  области определения оператора  $S$  запишем следующим образом:

- 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$ ;
- 2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}h_0 + Q_- S_- h_- \in \text{dom}(A)$ ;
- 3)  $S_+ h_+ = T^* S_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi')$ .

Положим  $\varphi = (\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi')$ . Тогда получаем условия на  $\text{dom}(S)$  и формулу для оператора  $S$ :

- 1)  $h_{\pm} \in \text{dom}(F_{\pm}^*)$
- 2)  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}h_0 + Q_- S_- h_- \in \text{dom}(A)$ ;
- 3)  $S_+ h_+ = T^* S_- h_- + i \mathcal{J}_+ Q_+ (A + i)\varphi$ ,

$$S(h_-, h_0, h_+)^T = (F_-^* h_-, -ih_0 + \sqrt{2}(A + i)\varphi, F_+^* h_+)^T.$$

Это и есть  $J$ -самосопряженная дилатация из [6].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена общая  $J$  – самосопряженная дилатация произвольного линейного, плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. Для построения дилатации использовались операторы  $F_{\pm}^*$ , сопряженные к максимальным простым симметрическим операторам, и пространства граничных значений операторов  $F_{\pm}^*$ . Частными случаями построенной дилатации являются известные ранее  $J$  – самосопряженные дилатации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк, М. А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. — 1940, Т. 4. — № 3. — С. 277–318.  
NAYMARK, M A. (1940) Spectral functions of symmetric operator. *Izvestiya AN SSSR*. V. 4, N. 3. p. 277–318.
2. SG.-NAGY, B. (1953) Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math.* V. 15. p. 87–92.
3. Никольский, Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. — М.: Наука, 1980. — 384 с.  
NIKOLSKY, N, K. (1980) *Lectons on shift operator*. Moscow: Nauka.
4. Никольский, Н. К., Хрущёв Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций // Труды Математ. института АН СССР. — 1974, Т. 176. — С. 97–210.  
NIKOLSKY, N K., KHRUSCHOV, S V. (1987) Functional model and some problems of spectral function theory. *Works of Mathematical institute. Academy of Science USSR*. V. 176. p. 97–210.
5. Сахнович, Л. А. О  $J$ -унитарной дилатации ограниченного оператора // Функц. анализ и его приложения. — 1974, Т. 8, Вып. 3. — С. 83–84.  
SAKHNOVICH, L A. (1974) On  $J$ -unitary dilation of bounded operator. *Func. analiz i ego prilozheniya*. V. 8, Issue 3. p. 83–84.
6. Кужель, А. В.  $J$ -самосопряженные и  $J$ -унитарные дилатации линейных операторов // Функц. анализ и его приложения. — 1983, Т. 17, Вып. 1. — С. 75–76.  
KUZHEL, A V. (1983)  $J$ -selfadjoint and  $J$ -unitary dilations of linear operators. *Func. analiz i ego prilozheniya*. V. 17, Issue 1. p. 75–76.
7. DAVIS, CH. (1970)  $J$ -unitary dilation of a general operators. *Acta Sci. Math.* V. 31, N. 1-2. p. 75–86.
8. Павлов, Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб.. — 1977, Вып. 102 (144), № 4. — С. 511–536.  
PAVLOV, B. S. (1977) Selfadjoint dilations of dissipative Shredinger operator and its eigenfunctions decomposition. *Mat. sb.* V. 102 (144), N. 4. p. 511–536.



9. Кужель, А. В. Самосопряженные и  $J$ -самосопряженные дилатации линейных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прил.. — 1982, Вып. 37. — С. 54–62.  
KUZHEL, A V. (1982) Selfadjoint and  $J$ -selfadjoint dilations of linear operators. *Teoriya functsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. V. 37. p. 54–62.
10. Кудряшов, Ю. Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // Теория функций, функц. анализ и их прил.. — 1982, Вып. 37. — С. 51–54.  
KUDRYASHOV, Yu L. (1982) Symmetric and selfadjoint dilations of dissipative operators. *Teoriya functsiy, func. analiz i ikh prilozheniya*. V. 37. p. 51–54.
11. Кудряшов, Ю. Л.  $J$ -эрмитовы и  $J$ -самосопряженные дилатации линейных операторов // Динам. системы. — 1984, № 3. — С. 94–98.  
KUDRYASHOV, Yu L. (1984)  $J$ -Hermite and  $J$ -selfadjoint dilations of linear operators. *Dynam.sistemy*. N. 3. p. 94–98.
12. Кудряшов, Ю. Л. Изоморфизм спектрального и трансляционного представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора // ТВИМ. — 2018, № 1. — С. 40–47.  
KUDRYASHOV, Yu L. (2018) Isomorphism of spectral and translation representations for selfadjoint dilations of dissipative operator. *TVIM*. N.1. p. 40–47.
13. BOGNAR, J. (1974) *INDEFINITE INNER PRODUCT SPACES*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 224 p..
14. Ахиезер, Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т.1 / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — Харьков.: Выща школа, 1977. — 315 с.  
AKHIEZER, N, I., GLAZMAN, I M. (1980) *Theory of linear operators in Hilbert space*. V. 1. Kharkov: Vyscha shkola.
15. Горбачук, В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук. — К.: Наукова думка, 1984. — 284 с.  
GORBACHUK, V, I. (1984) *Boundary value problems for differential-operator equations*. Kiev: Naukova dumka.

16. DERKACH, V., A, MALAMUD, M., M. (1999) Non-self-adjoint extensions of a Hermitian operator and their characteristic functions. *Journal of Mathematical Sciences*. V. 97, N.5. p. 4461–4499.
17. BRUK, V., M. (2014) On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the indefinite-dimensional case. *Journal of Math. Physics? Analysis, Geometry*. V. 10, N.2. p. 163–188.

---

Андреищева Е. Н. Задача о факторизации рациональных матричных функций для случая обобщённого класса Неванлинны / Е. Н. Андреищева // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 4 (45). — С. 7–26.

УДК: 517.58

В данной работе рассматривается преобразование Шура для обобщенных функций класса Неванлинны и показывается, что оно может использоваться при построении однозначного минимального разложения класса рациональных  $J_\ell$ -унитарных  $2 \times 2$ -матричных функций на элементарные множители из этого же класса.

*Ключевые слова:* индефинитная метрика, пространство Понтрягина, функция Неванлинны, преобразование Шура, воспроизводящее ядро, факторизация рациональных матричных функций.

---

Гуров С. И., Жуков А. Е., Закаблук Д. В., Кормаков Г. В. Обратимые вычисления. Часть II / С. И. Гуров, А. Е. Жуков, Д. В. Закаблук, Г. В. Кормаков // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 4 (45). — С. 27–58.

УДК: 519.7, 621.3

Во второй части работы проанализированы методы логического синтеза обратимых схем и рассмотрены некоторые приложения обратимой логики: синтез отказоустойчивых схем, использование схем из обратимых логических элементов в криптографии.

*Ключевые слова:* обратимая логика, модели обратимых вычислений, логический синтез обратимых схем, отказоустойчивые обратимые схемы, криптографическая защита информации.

---

Зайцева И. В. Моделирование оптимального распределения трудовых ресурсов / И. В. Зайцева // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 4 (45). — С. 59–77.

УДК: 51.77

В статье представлены модели оптимального распределения трудовых ресурсов. Разработанная теоретико-игровая модель статической задачи оптимального назначения

описана как игра в нормальной форме. В игре заданы множество работников и множество предприятий, а ситуацией является подстановка. Каждая подстановка есть одно из возможных назначений работников на предприятия. Для выбора работника или предприятия введен критерий оценки. Компромиссный доход системы и последовательность компромиссных управлений находятся с помощью рекуррентных соотношений динамического программирования. Таким образом, можно указать оптимальное поведение всех участников рынка труда в каждый момент времени. В статье получено решение статической и динамической задачи оптимального распределения трудовых ресурсов на основе принципа оптимальности компромиссного множества.

**Ключевые слова:** компромиссное множество, моделирование, принцип оптимальности, распределение, трудовые ресурсы.

---

Струков В. Е., Струкова И. И. О теореме Винера в исследовании периодических на бесконечности функций относительно подпространств исчезающих на бесконечности функций / В. Е. Струков, И. И. Струкова // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 4 (45). — С. 78 – 91.

УДК: 517.98

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций. На основе знаменитой теоремы Винера вводится понятие множества, удовлетворяющего условию Винера. Рассматриваются различные подпространства непрерывных исчезающих на бесконечности (в различных смыслах) функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Например, функции, интегрально исчезающие на бесконечности, и функции, которые в свертке с любой функцией из множества, удовлетворяющего условию Винера, дают стремящуюся к нулю функцию. Вводятся пространства медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Доказывается, что все такие пространства совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций соответственно (вне зависимости от выбора подпространства исчезающих на бесконечности функций). Полученные результаты применяются к исследованию свойств решений некоторых классов дифференциальных и разностных уравнений. В статье существенно используются теории изометрических представлений и банаховых модулей.

---

*Ключевые слова:* теорема Винера, исчезающая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, банахово пространство, банахов модуль, дифференциальное уравнение, разностное уравнение.

---

---

Третьяков Д. В. Об общем подходе к построению  $J$ -самосопряженной дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек / Д. В. Третьяков // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 4 (45). — С. 92–106.

УДК: 517.432

Предложен общий подход к построению  $J$ -самосопряженной дилатации линейного оператора с непустым множеством регулярных точек. Пространство дилатации строится с помощью произвольных гильбертовых пространств, в которых действуют минимальные, простые симметрические операторы  $F_{\pm}$  и пространств граничных значений операторов  $F_{\pm}^*$ . Частными случаями построенной дилатации являются известные ранее  $J$ -самосопряженные дилатации.

*Ключевые слова:*  $J$ -самосопряженная дилатация, максимальный замкнутый симметрический оператор, дефектные операторы.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

*Андреищева Елена  
Николаевна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и начертательной геометрии Черноморского высшего военного-морского училища им. П. С. Нахимова, г. Севастополь, Российская Федерация  
*e-mail: anda\_el@mail.ru*

*Гуров Сергей  
Исаевич*

к. ф.-м. н, доцент кафедры Математических методов прогнозирования факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская Федерация  
*e-mail: sgur@cs.msu.su*

*Жуков Алексей  
Евгеньевич*

к. ф.-м. н, доцент кафедры Информационной безопасности факультета Информатики и систем управления государственного университета Московского государственного технического университет имени Н. Э. Баумана, Российская Федерация  
*e-mail: email@gmail.com*

*Зайцева Ирина  
Владимировна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры информационных систем экономического факультета Ставропольского государственного аграрного университета, г. Ставрополь, Российская Федерация; докторант Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
*e-mail: irina.zaitseva.stv@yandex.ru*

*Закаблукое Дмитрий  
Владимирович*

к. ф.-м. н, программист ООО «Алгоритмы и данные», г. Москва, Российская Федерация  
*e-mail: dmitriy.zakablukov@gmail.com*

*Кормаков Георгий  
Владимирович*

студент кафедры Математических методов прогнозирования факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация  
*e-mail: egor2898@mail.ru*

**Струков Виктор  
Евгеньевич**

к. ф.-м. н, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация  
*e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com*

**Струкова Ирина  
Игоревна**

к. ф.-м. н, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация  
*e-mail: irina.k.post@yandex.ru*

**Третьяков Дмитрий  
Вадимович**

к. ф.-м. н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: dvttvd@mail.ru*

Подписано к печати 6.11.2019. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,5 п. л. Тираж 50 экз.  
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 6.02.2020.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7