Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 3 (44) ’ 2019

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2019, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 8 от 6 ноября 2019 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 517.58

MSC2010: 47A58

АППРОКСИМАЦИЯ ИНДЕФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ШУРА

© Е. Н. Андреищева

Черноморское высшее военно-морское училище им. П. С. Нахимова
кафедра математики и начертательной геометрии
ул. Парковая, 6, Севастополь, 299057, Российская Федерация
e-mail: *anda_el@mail.ru*

The Approximation of Indefinite Schur's Functions.

Andreishcheva E. N.

Abstract. In the paper by M. G. Krein and H. Langer [18] researched the questions about aproximations of Nevanlinna functions. Our purpose is to get such result for Schur functions. A function $s(\lambda)$ is called a generalized Schur function if it is meromorphic in the open unit disk and the kernel $K_s(\lambda,\mu) = \dfrac{1 - s(\lambda)\overline{s(\mu)}}{1-\lambda\overline{\mu}}$ has finite number of negative squares.
A set of all such functions forms the generalized Schur class.

As it is known, Schur function admits a unitary realization $s(\lambda) = s(0) + \lambda[(I-\lambda T)^{-1}u, v]$ or, in other words, it is a characteristic function for some unitary colligation V:

$$V = \begin{bmatrix} T & u \\ \\ [\cdot, v] & s(0) \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} \Pi_\varkappa \\ \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Pi_\varkappa \\ \\ \mathbb{C} \end{pmatrix},$$

Here $\Pi_\varkappa$ is a Pontryagin space with indefinite inner product $[\cdot,\cdot]$, T is a contractive operator in $\Pi_\varkappa$, and $u, v \in \Pi_\varkappa$. Note that the unitary colligation must be chosen minimal what means that $\Pi_\varkappa = \overline{span}\{T^n u, (T^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \dots\}$, where T^c is $\pi_\varkappa$-adjoint with T. Let T be a contractive operator in $\Pi_\varkappa$. Then the element $u \in \Pi_\varkappa$ is called generating for operator T if

$$\Pi_\varkappa = \overline{span}\{(I-\lambda T)^{-1}u,\ \lambda \in \mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)\}.$$

By W_θ we denote a set of all $\beta \in \mathbb{C}_-$ such that $|\arg\beta + \dfrac{\pi}{2}| \leqslant \theta$, where $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

By Λ_θ denote a set of all $\lambda \in \mathbb{D}$, where $\mathbb{D} = \{\xi : |\xi| < 1\}$ such that

$$\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1},\ -\alpha \in W_\theta.$$

The main result of this research is researched the question of the representation generalized Schur function in the neighborhood of the unit.

Let $s(\lambda) = \lambda^k s_k(\lambda),\ s_k(0) \neq 0,\ k \leqslant n$. Then we have assertions

1. $s \in S_\varkappa$, where $S_\varkappa$ is a generalized Schur class;

2. for some integer $n > 0$ there exist $2n$ numbers $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ such that the following equality is true: $s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu(\lambda-1)^\nu + O((\lambda-1)^{2n+1}),\ \lambda \to 1,\ \lambda \in \Lambda_\theta$

if and only if there exist a Pontryagin space $\Pi_\varkappa$, a contractive operator T in $\Pi_\varkappa$, and a generative element $u \in dom(I-T)^{-(n+1)}$ for operator T such that:

$$s(\lambda) = \lambda^k - \frac{1}{s_k(0)}\lambda^k(\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}T^{k+1}u, T^k u], \lambda \in \mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)$$

In this case we can express c_ν in such form:

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{1}{s_k(0)} \sum_{i=1}^{\nu} C_{k-i}^{\nu-i}[(I-T)^{-(i+1)}T^{k+1}u, T^k u] - C_k^\nu,\ 1 \leqslant \nu < k+1; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(\nu+1)}T^\nu u, T^k u],\ k+1 \leqslant \nu \leqslant n; \\ \frac{1}{s_k(0)}[(I-T)^{-(n+1)}T^n u, (I-T^c)^{-(\nu-n)}T^{c(\nu-n)}T^k u], \\ n+1 \leqslant \nu \leqslant 2n; \end{cases}$$

Keywords: *Schur function, approximation, contraction, kernel, Pontryagin space, Cayley-Neumann transformation, indefinite metric, unitary realization, operator.*

Введение

На протяжении всей работы мы рассматриваем два класса скалярных функций — Шура и Неванлинны, которые связаны между собой дробно-линейными преобразованиями. Функции из этих двух классов будем обозначать s и g соответственно. Для их определения нам понадобятся некоторые понятия и обозначения. Через $\mathbb{D}$ всюду в диссертации будем обозначать открытый единичный круг $\mathbb{D} = \{\xi :\ |\xi| < 1\}$, через Ω — подобласть $\mathbb{D}$, содержащую нуль.

Определение 1. Скалярная функция $K(z,\omega)$ двух переменных, определённая на $\Omega \times \Omega$ называется эрмитовым ядром, если

$$\overline{K(z,\omega)} = K(\omega, z),\ \omega, z \in \Omega.$$

Определение 2. Говорят, что эрмитово ядро $K(z,\omega)$ имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов, если для любых конечных наборов $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\tau} \subset \Omega$ матрица $(K(\lambda_i,\lambda_j))_{i,j=1}^{\tau}$ имеет не более $\varkappa$ отрицательных собственных значений, а хотя бы для одного набора их ровно $\varkappa$.

Символами $K_s(\lambda,\mu)$, $K_g(\alpha,\beta)$ будем обозначать ядра, порождённые функциями Шура и Неванлинны соответственно.

Первый класс состоит из мероморфных на $\mathbb{D}$ функций s, для которых ядро $K_s(\lambda, \mu) = \dfrac{1 - s(\lambda)\overline{s(\mu)}}{1 - \lambda\overline{\mu}}$, где λ, μ из области голоморфости функции s, имеет конечное число $\varkappa$ отрицательных квадратов.

Множество всех таких функций назовём обобщённым классом Шура и обозначим $S_\varkappa$, где $\varkappa$ — число отрицательных квадратов с учетом их кратностей.

Символом $\mathbb{C}_+$ будем обозначать открытую верхнюю комплексную полуплоскость. Обобщённым классом Неванлинны назовём множество мероморфных в $\mathbb{C}_+$ функций g, для которых ядро $K_g(\alpha, \beta) = \dfrac{g(\alpha) - \overline{g(\beta)}}{\alpha - \overline{\beta}}$, где α, β из области голоморфости функции g, имеет конечное число $\varkappa$ отрицательных квадратов, и обозначим $N_\varkappa$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — векторные пространства с индефинитной метрикой. Обозначим прямое произведение и прямую ортогональную сумму пространств $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ через $\mathfrak{F}\times\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}[+]\mathfrak{G}$ соответственно. Напомним некоторые определения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 3. Пространство $\mathfrak{E}$ с индефинитной метрикой $[x, y]$, допускающее каноническое разложение $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^+[+]\mathfrak{E}^-$, где $\mathfrak{E}^+$ и $\mathfrak{E}^-$ являются гильбертовыми пространствами по отношению к нормам $\|x\| = [x, x]^{\frac{1}{2}}$ $(x \in \mathfrak{E}^+)$ и $\|x\| = (-[x, x])^{\frac{1}{2}}$ $(x \in \mathfrak{E}^-)$ соответственно, будем называть пространством Крейна и обозначать $\mathscr{K}$.

Если на пространстве Крейна $\mathscr{K}$ индефинитная метрика задаётся как $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где J — самосопряжённый унитарный оператор, то $\mathscr{K}$ называют J-пространством, а метрику, заданную таким образом — J-метрикой.

Пусть $T : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ — произвольный оператор, где $\mathscr{K}$ является J-пространством. Символом T^c будем обозначать сопряжённый оператор в смысле J-метрики.
Назовём оператор T J-изометрическим (J-унитарным), если он является изометрическим (унитарным) в смысле J-метрики.

Определение 4. Оператор $T : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ назовём J-сжатием, если для любого $x \in \mathscr{K}$ выполнено неравенство $[Tx, Tx] \leqslant [x, x]$.

Если одновременно с T J-сжатием будет и $T^c = JT^*J$, где T^* — гильбертов сопряжённый оператор, то T будем называть J-бисжатием.

Свяжем с пространством $\mathscr{K}$ числа $ind_\pm \mathscr{K} = \dim \mathscr{K}^\pm$, которые являются целыми или ∞, не зависят от выбора канонического разложения и называются положительным и отрицательным индексами этого пространства.

Частным случаем пространств Крейна является пространство Понтрягина и обозначается $\Pi_\varkappa$, где $\varkappa$ иногда называют числом положительных или отрицательных квадратов в зависимости от того, размерность какого подпространства (положительного или отрицательного) в каноническом разложении $\Pi_\varkappa$ минимальна. Далее без ограничения общностей будем считать $\varkappa$ числом отрицательных квадратов (размерностью максимального отрицательного подпространства).

Определение 5. Операторным узлом назовём структуру $(\mathscr{K}, \mathbb{C}, T, u, v, \gamma)$, где $\mathscr{K}$ является пространством Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]$ и называется пространством состояний, оператор T непрерывный и называется связующим оператором, элементы u, v являются векторами пространства $\mathscr{K}$, γ — комплексное число. Таким образом, с операторным узлом можно ассоциировать оператор $V \in L(\mathscr{K} \oplus \mathbb{C}, \mathscr{K} \oplus \mathbb{C})$ вида

$$V = \begin{pmatrix} T & u \\ [\cdot, v] & \gamma \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathscr{K} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathscr{K} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}, \ T \in L(\mathscr{K}). \tag{1}$$

Оператор T называется главным оператором узла.

Всюду далее мы будем рассматривать операторный узел V, предполагая, что главный оператор T является J-сжатием.

Определение 6. Характеристической функцией узла V называется функция, порождённая оператором V вида (1):

$$\Theta_V(\lambda) = \gamma + \lambda[(1 - \lambda T)^{-1} u, v], \ u, \ v \in \mathscr{K}, \ \lambda \in \mathbb{D}.$$

Далее для краткости речи всюду в работе операторный узел будем называть оператором.

Задача реализации функции состоит в её представлении как характеристической функции некоторого операторного узла

$$s(\lambda) = \Theta_V(\lambda) \tag{2}$$

на $\mathbb{D}$. А само представление (2) называется реализацией функции $s(\lambda)$. Мы назовём реализацию унитарной, изометрической или коизометрической в зависимости от соответствующих свойств оператора V.

Основным объектом исследования в работе является обобщённая функция Шура и её унитарная реализацию. В параграфе предполагается, что оператор V унитарен, то есть справедлива следующая система равенств (здесь $\gamma = s(0)$):

$$\begin{cases} T^cT = I - [\cdot, v]v, \\ [v, v] + |s(0)|^2 = 1, \\ Tv + \overline{s(0)}u = 0, \\ TT^c = I - [\cdot, u]u, \\ [u, u] + |s(0)|^2 = 1, \\ T^c u + s(0)v = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Каждая функция Шура допускает унитарную реализацию, то есть может быть представлена в виде (2), где оператор V является унитарным.

Определение 7. Оператор V называется минимальным, если

$$\mathscr{K} = \text{ з.л.о.}\{T^n u, (T^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Минимальная реализация функции Шура единственна с точностью до унитарного подобия: вместе с V вида (1) минимальной будет и реализация, соответствующая оператору

$$\widetilde{V} = \begin{pmatrix} S^*TS & S^*u \\ [\cdot, S^*v] & \gamma \end{pmatrix},$$

где оператор $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ является J-унитарным.

Определение 8. Пусть T — сжатие в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$. Скажем, что элемент $u \in \Pi_\varkappa$ является порождающим для оператора T, если $\Pi_\varkappa = \text{ з.л.о.}\{(I - \lambda T)^{-1}u,\ \lambda \in \Omega,\ \dfrac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)\}$, где Ω — малая окрестность нуля.

Теорема 1. *Пусть $T : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$ — сжимающий оператор. Вектор u является порождающим для оператора T тогда и только тогда, когда оператор T — циклический с циклическим вектором u, то есть $\Pi_\varkappa =$ з.л.о.$\{T^n u,\ u = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M} = \text{ з.л.о.}\{T^n u,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$, через $\mathfrak{N} = \text{ з.л.о.}\{(I - \lambda T)^{-1}u,\ \lambda \in \Omega,\ \dfrac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T)\}$.

Пусть u является порождающим элементом для оператора T. Докажем, что u — циклический. Поскольку $\lambda \in \Omega$, то $(I - \lambda T)^{-1}u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n u \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Из определения порождающего элемента следует, что $\mathfrak{N} = \Pi_\varkappa$. Отсюда получаем $\mathfrak{M} = \Pi_\varkappa$.

Обратно, пусть u — циклический вектор для оператора T. Докажем, что u — порождающий элемент для T. Действительно, так как $u \in \mathfrak{N}$ имеем

$(I-\lambda T)^{-1}u-u=(I-\lambda T)^{-1}(u-u+\lambda Tu)=\lambda(I-\lambda T)^{-1}Tu\in\mathfrak{N}$.
Следовательно, $(I-\lambda T)^{-1}Tu\in\mathfrak{N}$. Устремив $\lambda\to 0$, получим $Tu\in\mathfrak{N}$. Предположим, что для фиксированного n справедливо $\sum\limits_{i=0}^{n}T^n u\in\mathfrak{N}$. Докажем, что $T^{n+1}u\in\mathfrak{N}$. $(I-\lambda)^{-1}u-\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda^i T^i u=\lambda^{n+1}(I-\lambda T)^{-1}T^{n+1}u\in\mathfrak{N}$. Устремив $\lambda\to 0$, имеем $T^{n+1}u\in\mathfrak{N}$. Таким образом, для любого $n=\overline{0,\infty}$ мы получаем, что $\sum\limits_{i=0}^{n}T^n u\in\mathfrak{N}$. Отсюда $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, следовательно $\mathfrak{N}=\Pi_\varkappa$. И значит элемент u является порождающим для оператора T. $\square$

Определение 9. Сжатие T называется простым, если не существует такого инвариантного подпространства $\mathfrak{L}$, что $T\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$ и $T|_{\mathfrak{L}}$ — изометрия, то есть $[Tx,Ty]=[x,y],\ x,y\in\mathfrak{L}$.

Теорема 2. *Если унитарная реализация обобщённой функции Шура, соответствующая оператору* $V:\Pi_\varkappa[+]\mathbb{C}\to\Pi_\varkappa[+]\mathbb{C}$ *вида* (1)*, минимальна, то T является простым оператором.*

Доказательство. Пусть реализация функции Шура является минимальной. Докажем, что оператор T — простой. Предположим, что существует инвариантное подпространство $\mathfrak{L}\subset\Pi_\varkappa$ такое, что $T\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$ и $[Tx,Ty]=[x,y]$ для всех $x,y\in\mathfrak{L}$. Рассмотрим форму $\langle x,y\rangle=[x,y]-[Tx,Ty]$ для любых $x,y\in\Pi_\varkappa$. Так как T — сжимающий оператор, то $\langle x,x\rangle\geqslant 0,\ x\in\Pi_\varkappa$. Получаем, что $\langle x,x\rangle=0$ для любых $x\in\mathfrak{L}$. Тогда, по неравенству Коши-Буняковского, $\langle x,z\rangle=[(I-T^cT)x,z]=0$ для любых $z\in\Pi_\varkappa$.

Следовательно, из системы (3) имеем $[x,u]=0,\ [x,v]=0$ для любых $x\in\mathfrak{L}$. И значит, $u,v\in\mathfrak{L}^{[\perp]}$. Из этого вытекает, что подпространство $\mathfrak{L}$ инвариантно и для оператора V, и выполнено $V\mathfrak{L}=\mathfrak{L},\ [Vx,Vy]=[x,y]$ для любых $x,y\in\mathfrak{L}$.

Без ограничения общностей можно считать, что $\mathfrak{L}$ — максимальное подпространство, для которого $T|_{\mathfrak{L}}$ является изометрией и выполнено равенство $T\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{L}$ — невырожденное подпространство, то есть справедливо разложение в прямую ортогональную сумму

$$\Pi_\varkappa=\mathfrak{L}[+]\mathfrak{L}^{[\perp]}.$$

Представим оператор T в виде

$$T=\begin{pmatrix}T_1&0\\0&T_2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathfrak{L}\\\mathfrak{L}^{[\perp]}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathfrak{L}\\\mathfrak{L}^{[\perp]}\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$V = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & u \\ 0 & [\cdot, v] & s(0) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathfrak{L} \\ \mathfrak{L}^{[\perp]} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathfrak{L} \\ \mathfrak{L}^{[\perp]} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}.$$

Поскольку оператор V является минимальным, то есть

$$\Pi_\varkappa = \text{ з.л.о.}\{T^n u, (T^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \ldots\},$$

а элемент $u \in \mathfrak{L}^{[\perp]}$, то

$$\Pi_\varkappa = \text{ з.л.о.}\{T_2^n u, (T_2^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{L}^{[\perp]}.$$

Следовательно, $\mathfrak{L} = \{\emptyset\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — вырожденное подпространство, тогда через $\mathfrak{L}^0$ обозначим её изотропную часть. Через $\mathfrak{M}$ обозначим максимальное нейтральное подпространство в $\mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L}^0 \subset \mathfrak{M}$, рассмотрим разложение

$$\Pi_\varkappa = \mathfrak{L}_1[+]\mathfrak{M}[+]\mathfrak{L}^{[\perp]},$$

где $\mathfrak{L}_1$ — невырожденное подпространство $\mathfrak{L}$.

Относительно данного разложения построим оператор V :

$$V = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & u \\ 0 & 0 & [\cdot, v] & s(0) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{M} \\ \mathfrak{L}^{[\perp]} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{M} \\ \mathfrak{L}^{[\perp]} \\ \mathbb{C} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, аналогично предыдущим рассуждениям, получаем

$$\Pi_\varkappa = \text{ з.л.о.}\{T_3^n u, (T_3^c)^m v : n, m = 0, 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{L}^{[\perp]}.$$

И значит, $\mathfrak{L} = \{\emptyset\}$ и оператор T — простой. □

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность. Пусть унитарная реализация обобщённой функции Шура, соответствующая оператору V, минимальна. Оператор T — сжимающий в пространстве $\Pi_\varkappa$. Тогда $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.*

Действительно, допустим существует $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$, и пусть e_0 — собственный вектор, отвечающий λ_0. Тогда можно построить инвариантное подпространство $\mathfrak{L} =$ з.л.о.$\{e_0\}$ такое, что $T|_{\mathfrak{L}}$ — изометрия и $T\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$. Следовательно, оператор T — непростой. Получили противоречие. По теореме 2, реализация не является минимальной.

В работе М. Г. Крейна и Г. Лангера [18] была доказана теорема об аппроксимации обобщённой функции Неванлинны в окрестности бесконечно удалённой точки. В данной доказывается подобный результат, касающийся обобщённой функции Шура. Ситуация осложняется тем, что в рассматриваемой точке $\lambda = 1$ ядро, характерное для обобщённых функций Шура, не является голоморфным и, следовательно, единица не принадлежит резольвентному множеству.

Определение 10. Через $W_\theta^{'}$ обозначим множество всех $\beta \in \mathbb{C}_-$ таких, что $|\arg\beta + \frac{\pi}{2}| \leqslant \theta$, где $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Через Λ_θ обозначим множество всех $\lambda \in \mathbb{D}$ вида $\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1}$, $-\alpha \in W_\theta^{'}$.

1. Условия аппроксимации обобщённой функции Шура в окрестности единицы.

Основным результатом данной работы является теорема:

Теорема 4. *Пусть $s(\lambda) = \lambda^k s_k(\lambda)$, $s_k(0) \neq 0$, $k \leqslant n$. Тогда следующие свойства:*

1. *$s \in S_\varkappa$, где $S_\varkappa$ — обобщённый класс Шура;*
2. *для некоторого натурального числа $n > 0$, существуют $2n$ чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}),\ \lambda \to 1,\ \lambda \in \Lambda_\theta \tag{4}$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, сжимающий оператор T в $\Pi_\varkappa$ и порождающий для оператора T элемент $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$ такие, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = \lambda^k - \frac{1}{s_k(0)} \lambda^k (\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1} T^{k+1} u, T^k u],\ \lambda \in \mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T) \tag{5}$$

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{s_k(0)} \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} C_{k-i}^{\nu-i} [(I - T)^{-(i+1)} T^{k+1} u, T^k u] - C_k^\nu,\ 1 \leqslant \nu < k + 1; \\ \dfrac{1}{s_k(0)} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^\nu u, T^k u],\ k + 1 \leqslant \nu \leqslant n; \\ \dfrac{1}{s_k(0)} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu-n)} T^{c(\nu-n)} T^k u],\ n + 1 \leqslant \nu \leqslant 2n; \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 4 нам необходимы следующие результаты, имеющие и самостоятельное значение.

Лемма 1. *Для функции s, $\lambda \in \Lambda_\theta$ с $s(0) \neq 0$ следующие свойства:*

$$1.\ s \in S_\varkappa;\ 2.\ \lim_{\lambda \to 1} s(\lambda) = 1;\ 3.\ \varlimsup_{\lambda \to 1} \frac{1 - |s(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} < \infty;$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$*, сжимающий оператор* T *в* $\Pi_\varkappa$ *и порождающий для оператора* T *элемент* $u \in \Pi_\varkappa$ *такие, что справедливо представление:*

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}}[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u], \;\lambda \in \mathbb{D},\; \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть функция s обладает свойствами *1.– 3.* Докажем справедливость существования представления (6).

Из условия унитарности оператора V получаем, что элемент v в (2) выражается формулой:

$$v = -(1/s(0))T^c u. \tag{7}$$

Запишем операторное представление функции Шура:

$$s(\lambda) = s(0) + \lambda[\cdot, v]\mathbf{1}(I - \lambda T)^{-1}[\cdot, \mathbf{1}]u. \tag{8}$$

Согласно (8) имеем равенство $1-\overline{s(\lambda)}s(\lambda) = (1-|\lambda|^2)[(I-\lambda T)^{-1}u, (I-\lambda T)^{-1}u]$. Таким образом условие *3.* примет вид:

$$\varlimsup_{\lambda \to 1}[(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \lambda T)^{-1}u] < \infty. \tag{9}$$

Пусть $\widetilde{T} : \widetilde{\Pi}_\varkappa \to \widetilde{\Pi}_\varkappa$ — минимальная унитарная дилатация T, где $\widetilde{\Pi}_\varkappa = \Pi_\varkappa[+]H$, H — гильбертово пространство, $\Pi_\varkappa$ — пространство Понтрягина с $\varkappa$ отрицательными квадратами. Справедливо следующее разложение пространства $\widetilde{\Pi}_\varkappa$:

$$\widetilde{\Pi}_\varkappa = E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa[+](I - E(\Delta))\widetilde{\Pi}_\varkappa \;, \tag{10}$$

где $E(\Delta)$ — спектральная функция, Δ — малая дуга единичной окружности в окрестности единицы такая, что $\overline{\Delta}$ не содержит собственных значений оператора $\widetilde{T}$, соответствующих неположительным собственным векторам.

Пространство $E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa$ — инвариантное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, $\sigma(\widetilde{T}|_{E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa}) \subset \overline{\Delta}$. Для оператора $\widetilde{T}_2 = \widetilde{T}|_{(I-E(\Delta))\widetilde{\Pi}_\varkappa}$ единица является регулярной точкой, поэтому равномерная сходимость $(I - \lambda\widetilde{T}_2)^{-1} \to (I - \widetilde{T}_2)^{-1}$ при $\lambda \to 1$ справедлива. И тогда можно ограничиться доказательством только для $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}|_{E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa}$, где $E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa$ — гильбертово пространство. Для этого сначала рассмотрим элемент $u \in \Pi_\varkappa$ и его разложение $u = u_1+u_2$, где $u_1 \in E(\Delta)\widetilde{\Pi}_\varkappa,\; u_2 \in (I-E(\Delta))\widetilde{\Pi}_\varkappa$. Покажем, что элемент $u \in dom(I - \widetilde{T})^{-1}$.

Пусть $A = A^c$ — обратное преобразование Кэли-Неймана оператора $\widetilde{T}$:

$$A = i(I - \widetilde{T})^{-1}(I + \widetilde{T}),\; \widetilde{T} = (A - i)(A + i)^{-1} \tag{11}$$

Аргумент λ преобразуется следующим образом:

$$\lambda = (\alpha - i)(\alpha + i)^{-1},\ \lambda \to 1 \Leftrightarrow \alpha \to \infty.$$

Согласно (9) имеем

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} |\alpha|^2 [(A+\alpha)^{-1}(A+i)u, (A+\alpha)^{-1}(A+i)u] < \infty \tag{12}$$

Обозначив через $A_1 = i(I + \widetilde{T}_1)(I - \widetilde{T}_1)^{-1}$, последнее неравенство для оператора A_1, действующего в гильбертовом пространстве, можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{t+i}{t+\alpha} \right|^2 |\alpha|^2 d\sigma(t) < \infty,$$

где $\sigma(t) = [E_t u_1, u_1]$, E_t — спектральная функция для самосопряжённого оператора A_1. Поскольку $\alpha \in W_\theta$, то для любого $n \in \mathbb{R}$, существует $K \in \mathbb{R}$ такое, что $\int\limits_{-n}^{n} |t+i|^2 d\sigma(t) \leqslant K$ при $\alpha \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t+i|^2 d\sigma(t) < \infty$. Следовательно, согласно [1] элемент $u_1 \in dom(A_1 + i) = dom(I - \widetilde{T}_1)^{-1}$.

Из того, что $\widetilde{T}$ — минимальная унитарная дилатация оператора T и условия $u_1 \in dom(I - \widetilde{T}_1)^{-1}$ следует $u \in dom(I - T)^{-1}$. Аналогично доказывается, что элемент v вида (7) из $dom(I - T^c)^{-1}$. Используя представление (7), получим $s(\lambda) = s(0) - (\lambda/\overline{s(0)})[(I - \lambda T)^{-1}u, T^c u]$. Отсюда $[(I-\lambda T)^{-1}u, u] \to [(I-T)^{-1}u, u]$ при $\lambda \to 1$. Поэтому из условия $\lim\limits_{\lambda\to 1} s(\lambda) = 1$ имеем

$$s(\lambda) = 1 - ((\lambda - 1)/\overline{s(0)})[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u].$$

Обратно, пусть справедливо представление (6). Докажем, что свойства *1.– 3.* выполнены. Действительно, из (9) получаем

$$\frac{1 - \overline{s(\lambda)} s(\mu)}{1 - \bar{\lambda}\mu} = [(I - \lambda T)^{-1}u, (I - \mu T)^{-1}u]$$

и значит $s \in S_\varkappa$.

$$\lim_{\lambda\to 1} s(\lambda) = \lim_{\lambda\to 1} (1 - \frac{\lambda - 1}{\overline{s(0)}}[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u]) = 1,\ \lambda \in \Lambda_\theta$$

$$\overline{\lim_{\lambda\to 1}} \frac{1 - |s(\lambda)|^2}{1 - |\lambda|^2} \leqslant \overline{\lim_{\lambda\to 1}} \frac{|\lambda - 1|}{(1 - |\lambda|)|\overline{s(0)}|} |[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u]| < \infty,\ \lambda \in \Lambda_\theta$$

Таким образом получили условия *2. и 3.* леммы. □

Теорема 5. *Для функции s с $s(0) \neq 0$ следующие свойства:*

1. *$s \in S_\varkappa$;*

2. *для некоторого натурального числа $n > 0$, существуют $2n$ чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}),\ \lambda \to 1,\ \lambda \in \Lambda_\theta \tag{13}$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, сжимающий оператор T в $\Pi_\varkappa$ и порождающий для оператора T элемент $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$ такие, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u],\ \lambda \in \mathbb{D},\ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T) \tag{14}$$

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^\nu u, u],\ 1 \leqslant \nu \leqslant n; \\ \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu-n)} (T^c)^{\nu-n} u],\ n + 1 \leqslant \nu \leqslant 2n. \end{cases} \tag{15}$$

Схема доказательства теоремы 4. Мы поясним полученный результат приведением схемы доказательства для случая $s(0) \neq 0$. При $s(0) = 0$ следует перейти к функции Шура вида $s_k(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^k} s(\lambda)$ и применить результат для случая $s(\lambda) \neq 0$.

Пусть выполнены свойства *1.* и *2.* теоремы 5. Докажем справедливость представления (14) и формулу для коэффициентов (15). Сначала заметим, что для любого неотрицательного числа k и $u \in dom(I - T)^{-(k+1)}$ выполнено тождество:

$$(\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u] = \overline{s(0)} \sum_{\nu=1}^{2k+1} c_\nu (\lambda - 1)^\nu +$$
$$+ (\lambda - 1)^{2k+2} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-(k+1)} T^{k+1} u, (I - T^c)^{-(k+1)} (T^c)^{k+1} u], \tag{16}$$

где коэффициенты c_ν представлены формулой (15) для $\nu = \overline{1, 2k+1}$. Из условий *1.– 2.* теоремы и леммы 1 непосредственно следует (14). Покажем, что $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$. Для этого рассмотрим унитарную дилатацию $\widetilde{T} : \widetilde{\Pi}_\varkappa \to \widetilde{\Pi}_\varkappa$ оператора T и разложение вида (10) пространства $\widetilde{\Pi}_\varkappa$.

Известен общий вид функции Неванлинны:

$$g(\beta) = \frac{g(-i) + \overline{g(-i)}}{2} + i[u, u] + (\beta - i)[(A - \beta)^{-1} (A + i) u, u],\ \beta \in W_\theta',$$

где A — самосопряжённый оператор в пространстве $\Pi_\varkappa$.
Отсюда, в силу неравенства (12) получим $\varlimsup\limits_{\beta \to \infty} |\beta| |Im\ g(\beta)| < \infty$.

Функция Шура связана с функцией Неванлинны с помощью преобразования Кэли-Неймана:

$$s(\lambda) = (i + g(\beta))(i - g(\beta))^{-1},\ \lambda = (\beta + i)(\beta - i)^{-1},\ \beta \in W_\theta^{'}$$

Поэтому условия $\lim\limits_{\lambda \to 1} s(\lambda) = 1$ и $\lim\limits_{\beta \to \infty} g(\beta) = 0$ эквивалентны. Таким образом, мы построили функцию Неванлинны вида

$$g(\beta) = [(A - \beta)^{-1}(A + i)u, (A + i)u],\ \beta \in W_\theta^{'}.$$

Так как $s(\lambda)$ допускает разложение (13) и справедливо представление (14), то

$$(\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-1}u, T^c u] = (\lambda - 1)[(I - \lambda \widetilde{T})^{-1}(I - \widetilde{T})^{-1}u, \widetilde{T}^c u] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu^{'}(\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}),\ \lambda \to 1,\ \lambda \in \Lambda_\theta \quad (17)$$

где $c_\nu^{'} = \overline{s(0)} c_\nu$.

Записав равенство (17) через дилатацию $\widetilde{T}$ и применив преобразование Кэли–Неймана, получим:

$$[(A - \beta)^{-1}u^{'}, u^{'}] = -\sum_{\nu=1}^{2n} \widetilde{c}_\nu (\beta - i)^{-\nu} + O((\beta - i)^{-(2n+1)}),$$

где $u^{'} = (A + i)u$, $\widetilde{c}_\nu = c_\nu^{'}(2i)^{\nu+1}$.

Отсюда, в силу теоремы Крейна-Лангера [18] и согласно (11) получаем формулу для коэффициентов (15), где порождающий элемент $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$.

Обратно, если $u \in dom(I - T)^{-(n+1)}$ и справедливо тождество (16), выполнено:

$$\overline{s(0)}(\lambda - 1)^{-(2n+1)}(1 - s(\lambda) - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu(\lambda - 1)^\nu) =$$

$$= [(I - T)^{-(n+1)}T^{n+1}u, (I - T^c)^{-(n+1)}(T^c)^n u] +$$

$$+ (\lambda - 1)[(I - \lambda T)^{-1}(I - T)^{-(n+1)}T^{n+1}u, (I - T^c)^{-(n+1)}(T^c)^{n+1}u]$$

Разложение (13) будет доказано, если покажем, что второе слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю при $\lambda \to 1$. Перейдём к дилатации $\widetilde{T}$, тогда, согласно (11) и работе [3, стр. 238] нужно показать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - i)^{2n+1}}{t - \beta} d\sigma(t) \to 0$ при $\beta \to \infty,\ \beta \in W_\theta^{'}$.

Действительно, это выполнено из-за существующих неравенств для $\beta \in W_\theta^{'}$:

$$|(t - i) - (\beta - i)| \geqslant |\beta - i| \cos\theta,\ |(t - i) - (\beta - i)| \geqslant |t - i| \cos\theta.$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-i)^{2n+1}}{t-\beta}d\sigma(t)\right| \leqslant \frac{1}{|\beta-i|\cos\theta}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}|t-i|^{2n+1}d\sigma(t)+$$

$$+\frac{1}{\cos\theta}\int\limits_{|t|>\gamma}|t-i|^{2n}d\sigma(t)\to 0,\ \beta\to\infty.$$

Теорема полностью доказана. □

Заключение

Операторное обобщение класса Шура определяется множеством функций $s(z)$, заданных и голоморфных на подобласти единичного круга содержащей нуль и принимающих значения во множестве $L(\mathfrak{F},\mathfrak{G})$ непрерывных операторов, где $\mathfrak{F},\mathfrak{G}$ — гильбертовы пространства, пространства Понтрягина либо пространства Крейна.

Каждой такой функции поставим в соответствие три ядра

$$K_s(\omega,z)=\frac{I-s(z)s(\omega)^*}{1-z\omega^*},\ K_{\widetilde{s}}(\omega,z)=\frac{I-\widetilde{s}(z)\widetilde{s}(\omega)^*}{1-z\omega^*},$$

$$D_s(\omega,z)=\begin{pmatrix} K_s(\omega,z) & \dfrac{s(z)-s(\omega^*)}{z-\omega^*}\\ \dfrac{\widetilde{s}(z)-\widetilde{s}(\omega^*)}{z-\omega^*} & K_{\widetilde{s}}(\omega,z)\end{pmatrix},$$

где $\widetilde{s}(z)=s(z^*)^*$, а I обозначает скалярную единицу или единичный оператор в зависимости от контекста. Когда эти ядра неотрицательны, они являются воспроизводящими ядрами гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(s)$, $\mathfrak{H}(\widetilde{s})$, $\mathfrak{D}(s)$ векторно-значных функций. Данные пространства появляются в канонической модели сжимающих операторов для случая гильбертовых пространств в теории Л. де Бранжа и Дж. Ровняка.

В общем случае у данных трёх ядер предполагалось наличие $\varkappa$ отрицательных квадратов, для некоторого неотрицательного целого числа $\varkappa$. Тогда мы говорим, что функция $s(z)$ принадлежит обобщённому классу Шура $\mathbf{S}_\varkappa(\mathfrak{F},\mathfrak{G})$. Согласно теории Л. Шварца и П. Сорьонена, в случае обобщённого класса Шура пространства $\mathfrak{H}(s)$, $\mathfrak{H}(\widetilde{s})$, $\mathfrak{D}(s)$ также существуют, однако теперь как пространства Понтрягина с отрицательным индексом κ. Заметим, что индефинитность появляется и тогда, когда пространства $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ являются пространствами Понтрягина или Крейна. Данный подход впервые исследовался В. П. Потаповым. Индефинитные случаи также были изучены в сериях работ Д. Алпая, Т. Я. Азизова, М. Г. Крейна и Г. Лангера и недавних работах Л. де Бранжа.

Теория Крейна-Лангера предполагает, что пространства $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ гильбертовы, и необходимость такого подхода мотивируется спектральной теорией, классическими представлениями резольвент и вопросами теории функций.

Теория де Бранжа охватывает различные системы точек зрения и использует понятие дополнения для создания ключевой конструкции. Однако, несмотря на то, что получено множество выдающихся результатов, индефинитная теория менее изучена, нежели гильбертов случай.

Своё развитие теория пространств с индефинитной метрикой и действующих в них операторов получила в работах М. Г. Крейна , И. С. Иохвидова, Р. Филлипса, М. А. Наймарка, Г. К. Лангера, П. Йонаса, Т. Я. Азизова, А.А. Шкаликова, в ряде совместных работ Д. Алпая, Т. Я. Азизова, А. Дайксмы и Г. Лангера.

В настоящей работе мы подробно остановились на результатах исследования М. Г. Крейна и Г. Лангера [18], полученных в 1977 году и связанных с актуальными проблемами современной математики, а именно с теорией приближения и факторизации функций в пространствах с индефинитной метрикой. Для доказательства основных результатов используются методы математического анализа, теории приближений, операторной теории, теории интерполяции функций.

Основным результатом является доказательство теоремы об аппроксимации обобщённой функции Шура в окрестности единицы и приведены условия её представления в некоторой области Λ_θ.

Список литературы

1. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.. — М.: Наука, 1966. — 316 с.

   AHIEZER, N. and GLAZMAN, I. (1966) *Theory of linear operators in Hilbert space.* Moscow: Nauka.

2. ALPAY, D. & AZIZOV, T. YA. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. & WANJALA, G. (2004) The Shur Algorithm for Generalized Schur Functions IV: Unitary Realizations. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 149). p. 23–45.

3. ALPAY, D. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. (2007) The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 176.). p. 1–98.

4. ALPAY D. & DYM H. (1993) On a new class of reproducing kernel spaces and a new generalization of the Iohvidov laws. *Linear Algebra Applications.* (Vol. 178). p. 109–183.

5. ALPAY D. & DYM H. (1996) On a new class of realization formulas and their applications. *Linear Algebra Applications.* (Vol. 241–243). p. 3–84.

6. ALPAY D. & GOHBERG I. (1988) Unitary rational matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 33). p. 175-222.

7. ALPAY D. & GOHBERG I. (2006) Discrete analogs of canonical systems with pseudoexponential potential. Definitions and formulas for he spectral matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 161). p. 1–47.

8. ANDREISHCHEVA E. (2006) Approximation of Generalized Schur functions. *International Conference "Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polynomials": Book of abstracts.* Berlin. p. 10–11.

9. ANDREISHCHEVA E. (2007) Representation of Schur function for case of unitary realization . *International Conference "Modern Analysis and Applications": Book of abstracts.* Kyiv. p. 8–9.

10. DE BRANGES L. (1963) Some Hilbert spaces of analytic functions I. *Trans.Amer.Math.Soc..* (Vol. 106). p. 445–468.

11. DE BRANGES L. & ROVNYAK J. (1966) Canonical models in quantum scattering theory. *Wiley.* New York. p. 295–392.

12. DIJKSMA A. & LANGER H. & LUGER A. & SHONDIN Y. (2004) Minimal realizations of scalar generalized Nevanlinna functions related to their basic factorization. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 154). p. 69–90.

13. DYM H. (1989) On reproducing kernel spaces, J-unitary matrix functions, interpolation and displacement rank. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 41). p. 173–239.

14. GOHBERG I. (1986) Schur methods in operator theory and signal processing. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 30–77.

15. IOHVIDOV I. S. & KREIN M. G. & LANGER H. (1982) Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. *Mathematical Research, Akademie-Verlag.* Berlin (Band 9). p. 120.

16. JONAS P. (1981) On the functional calculus and the spectral function for definizable operators in Krein space . *Beitrage Anal..* (Vol.16). p. 121–135.

17. KREIN M. G. (1970) Über die verallgemeinerte Rezolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators in Raume Π_κ . *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai..* Tihany (Hungary) (Vol. 5). p. 353–399.

18. KREIN M. G. & LANGER H. (1977) Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math. Nachr.* (Vol. 77). p. 187–236.

19. KREIN M. G. & LANGER H. (1981) Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ . *Acta Sci. Math. Szeged.* (Vol. 43). p. 181–205.

20. LANGER H. (1982) Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. *Lecture Notes in Mathematics.* (№ 948). p. 1–46.

21. SCHUR I. (1986) Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises änkt sind. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 31–59.

УДК: 517.988

MSC2010: 46F30

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© А. Б. Антоневич, Т. Г. Шагова

Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
просп. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь
e-mail: *antonevich@bsu.by*, *tanya.shagova@gmail.com*

Solutions of Some Differential Equations in the Distributions Space.

Antonevich A. B., Shagova T. R.

Abstract.

The concept of solution for differential equations with generalized coefficients is not determined in classical distributions theory because the product of arbitrary distributions can not be defined.

A number of approaches for solving the problem of distributions multiplication were suggested by different mathematicians such as V. Ivanov, J.-F. Colombeau, Yu. Egorov, E. E. Rosinger and others. The general idea of these approaches is to consider new objects which preserve some properties of distributions and form an algebra at the same time. Such objects are called new generalized functions or mnemofunctions.

The simplest linear differential equation of the form

$$u' + qu = 0$$

where q is a distribution is under consideration in this paper. We analyze the solvability conditions for such equation when $q = b\delta$, $q = b\delta'$ and $q = P(\frac{1}{x})+c\delta$. The theory of mnemofunctions provides a great tool for solving such equation in the space of distributions. According to mnemofunctions theory approach we change the generalized coefficient q by its approximation $q_\varepsilon(x)$ by smooth functions depending on small parameter ε. Then we consider the family of equations of the form $u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0$ and investigate the behaviour of it's solutions $u_\varepsilon(x)$ as ε tends to zero. If $u_\varepsilon(x)$ have a limit in the space of distributions we declare it as a solution of initial equation.

Examples considered in this paper show that there are no common statements about solvability for differential equations with generalized coefficient and each case has it's own conditions of solvability which depend on singularity type of coefficient.

Keywords: *differential equation with generalized coefficient, mnemofunction, solvability condition, analytical representation of distribution*

Введение

Предметом исследования в данной работе являются решения простейшего дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом, а именно уравнения

$$u' + qu = 0, \tag{1}$$

где q есть обобщенная функция (распределение) из пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ [1].

Обобщенную функцию $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ нельзя подставить в левую часть уравнения, т.к. в теории обобщенных функций не определено произведение qu, входящее в уравнение. Поэтому в классической теории обобщенных функций не определено понятие решения такого уравнения.

Для решения проблемы умножения обобщенных функций были предложены различные подходы (В. К. Иванов [2], Ж. Ф. Коломбо [3], Ю. В. Егоров [4], Э. Розингер [5] и др.). Общая идея этих подходов состоит во введении новых объектов, сохраняющих ряд свойств распределений и допускающих корректно заданное умножение. Эти объекты обычно задаются семействами гладких функций, их называют *новыми обобщенными функциями* или *мнемофункциями.*

Используемый в теории мнемофункций подход к определению понятия решения для уравнений с обобщенным коэффициентами заключается в следующем. Обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Если в пространстве распределений $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ существует предел соответствующих решений u_ε при $\varepsilon \to 0$, то он называется *обобщенным решением* исходного уравнения при заданном способе аппроксимации коэффициента.

В частности, при исследовании уравнения (1) обобщенный коэффициент q заменяется на его аппроксимацию гладкими функциями q_ε и рассматривается семейство уравнений

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Будем говорить, что задача Коши для уравнения (1) *разрешима в пространстве распределений*, если у семейства $u_\varepsilon(x)$ решений уравнения (2), удовлетворяющих условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C$, существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon := U$$

в смысле сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Распределение U будем называть *обобщенным решением задачи Коши при заданном способе аппроксимации.*

В случае существования обобщенного решения после перехода к пределу в (2) получаем равенство $U' = -qU$, означающее, в частности, что распределение $-U'$ можно считать произведением q и U, т. е. это пара распределений, для которых определено произведение qU.

Цель работы заключается в том, чтобы продемонстрировать на примерах, что существование обобщенных решений задачи Коши достаточно сложным образом зависит от вида сингулярности коэффициента q и для уравнений с обобщенными коэффициентами нет общих утверждений о разрешимости задачи Коши. Здесь ситуация родственна переходу от линейных уравнений к нелинейным, для которых картина разрешимости определяется видом нелинейности в уравнении.

1. Формальные решения

В рассматриваемых ниже примерах обобщенная функция q имеет особенность только в точке 0, т. е. совпадает с гладкой функцией при $x < 0$ и при $x > 0$, и рассматривается задача Коши с начальным условием $u(-1) = C$. Поэтому при $x < 0$ определены классические решения и, в частности, начальное условие выделяет при $x < 0$ одно из решений.

При $x > 0$ также существует однопараметрическое семейство классических решений, но в теории дифференциальных уравнений нет подходов, позволяющих выяснить, какое из этих решений, заданных при $x > 0$, следует считать продолжением решения задачи Коши, определенным при $x < 0$. Как показано ниже, обобщенное решение однозначно определяет такое продолжение.

Напомним, что решение задачи Коши однородного уравнения (1) с интегрируемым коэффициентом q задается формулой

$$u(x) = C \exp\left[-\int_{-1}^{x} q(s)ds\right]. \tag{3}$$

В частности, решения задачи Коши для уравнения (2) задаются формулой

$$u_\varepsilon(x) = C \exp\left[-\int_{-1}^{x} q_\varepsilon(s)ds\right]. \tag{4}$$

Поэтому вопрос сводится к исследованию поведения семейства функций, заданных (4).

Согласно формуле (3), построение решения u состоит из двух шагов: нахождения первообразной $g(x)$ от q и вычисления экспоненты $\exp[-g(x) + g(-1)]$, причем результат не зависит от выбора первообразной. Обсудим, какой смысл можно придать этим операциям, если q есть обобщенная функция. Для обобщенной функции q первообразная (такое распределение g, что $g' = q$) всегда существует. Поскольку мы рассматриваем коэффициент q, совпадающий с гладкой функцией при $x < 0$, первообразная g также совпадает с гладкой функцией при $x < 0$ и, в частности, определено значение $g(-1)$. Поэтому придание смысла формуле (3) для уравнения с обобщенным коэффициентом равносильно определению экспоненты от распределения g. Заметим, что задание экспоненты с помощью степенного ряда

$$\exp g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!}$$

не имеет смысла для распределений, так как не определены степени g^k. Но если g есть обычная функция $g(x)$, то экспонента определена и формула задает формальное решение $u(x) = \exp[-g(x) + g(-1)]$, также являющееся обычной функцией. А интересующая нас экспонента в пространстве распределений определяется как предел при $\varepsilon \to 0$ семейства гладких функций $\exp[-g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(-1)]$, где $g_\varepsilon(x)$ есть первообразная для $q_\varepsilon(x)$. Такой предел не всегда существует даже в случае, когда g является обычной функцией и формальное решение не всегда оказывается обобщенным решением.

2. Уравнения с дельта-образными коэффициентами

Пример 1. Наиболее известным и исследованным уравнением из рассматриваемого класса является

$$u' - b\delta u = 0, \quad b = const, \tag{5}$$

где δ есть $\delta-$функция Дирака, которая определяется как функционал, заданный формулой $\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0)$.

Так как $\delta = 0$ вне любой окрестности нуля, решение уравнения, как функция, может быть только вида

$$u(x) = \begin{cases} C, & x < 0, \\ C_1, & x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

или, в другой записи,

$$u(x) = C + (C_1 - C)\Theta(x),$$

где $\Theta(x)$ есть функция Хевисайда

$$\Theta(x) \ = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Такую функцию нельзя непосредственно подставить в уравнение, так как возникает произведение $\delta\Theta$, которое не определено. В частности, из уравнения нельзя по C найти C_1, т. е. однозначно продолжить решение на положительную полуось.

Первообразной для $\delta-$функции является функция Хевисайда, и при подстановке ее в формулу (3) получаем формальное решение

$$u(x) = Ce^{b\Theta(x)} = C\big[1 + (e^b - 1)\Theta(x)\big] = \begin{cases} C, & x < 0, \\ Ce^b, & x > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Такие формальные решения однозначно определены на все прямой и являются кусочно постоянными функциями, удовлетворяющими условию на скачок в точке 0, которое зависит от коэффициента b:

$$u(+0) = e^b u(-0).$$

Покажем, что такое формальное решение является также обобщенным решением.

Согласно общему подходу, заменим δ-функцию на ее аппроксимацию вида

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где $\varphi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция с носителем на отрезке $[-1, 1]$ и такая, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 1.$$

Пусть

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

Тогда решение аппроксимирующего уравнения есть

$$u_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]$$

и, ввиду того, что это семейство функций ограничено и поточечно сходится к формальному решению, оно сходится и в пространстве распределений к функции (7). Таким образом, в данном примере формальное решение является и обобщенным. Также следует отметить, что в рассматриваемом примере результат не зависит от способа аппроксимации, т. е. от выбора функции φ.

Замечание 1. При формальной подстановке (7) в уравнение получаем, что

$$C(e^b - 1)\delta = bC[\delta + (e^b - 1)\delta\Theta(x)],$$

из которого следует равенство

$$\delta\Theta = \frac{e^b - 1 - b}{b(e^b - 1)}\,\delta.$$

Обратим внимание на то, что полученное значение для произведения $\delta\Theta$ зависит от коэффициента b уравнения. Это объясняется тем, что в приведенных вычислениях используется аппроксимация для $\Theta(x)$, которая диктуется рассматриваемым уравнением, что и приводит к зависимости результата от b. Это рассуждение показывает, что нельзя однозначно определить произведение $\delta\Theta$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$u' - b\delta' u = 0, \quad b = const, \tag{8}$$

в котором коэффициент есть производная δ-функции. Как и в примере 1, $\delta' = 0$ вне любой окрестности нуля, поэтому решение уравнения, как функции, должно иметь вид (6).

Так как первообразная для δ' есть распределение δ, то при подстановке в (3) получаем выражение $Ce^{b\delta}$, которое не определено. Это указывает на то, что здесь могут быть препятствия к построению обобщенного решения и здесь не определено формальное решение.

Заменив δ' на ее аппроксимацию $\delta'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi'(\frac{x}{\varepsilon})$, получаем решения аппроксимирующего однородного уравнения

$$u_\varepsilon(x) = C \exp\left[b\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right].$$

Это семейство функций вне любой окрестности нуля равномерно сходится к постоянной C. Простой анализ позволяет установить следующий факт.

Предложение 1. При рассматриваемом способе аппроксимации коэффициента в уравнении (8) семейство $u_\varepsilon(x)$ решений аппроксимирующих уравнений сходится в пространстве распределений при условии

$$\mathrm{Re}b\mathrm{Re}\varphi(x) - \mathrm{Im}b\mathrm{Im}\varphi(x) \leq 0$$

для всех x, и при этом пределом является постоянная C.

Данное условие является достаточным, а в случае, когда функция φ является вещественнозначной и коэффициент b является вещественным, то условие, что $b \leq 0$, является и необходимым для сходимости $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений.

Таким образом, сходимость семейства $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений и, соответственно, существование обобщенного решения, зависит от взаимоотношений между функцией φ и коэффициентом b.

Если рассмотреть уравнение

$$u' - b\delta'' u = 0,$$

содержащее вторую производную от $\delta-$ функции, то аналогичные рассуждения показывают, что у него не существует обобщенных решений.

3. Дифференциальное уравнение с коэффициентом $\frac{1}{x}$

Основным новым результатом в данной работе является анализ обобщенных решений уравнения

$$u' + \frac{1}{x}u = 0. \tag{9}$$

Классические решения дифференциального уравнения (9) есть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C}{x}, & x < 0, \\ \frac{C_1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Для конкретности будем рассматривать решение задачи Коши с условием $u(-1) = -1$. Тогда при $x < 0$ решение есть $u(x) = \frac{1}{x}$. Это решение уходит на бесконечность при $x \to -0$, причем в классической теории дифференциальных уравнений нет методов, позволяющих естественным образом продолжить это решение на положительную полуось. Поэтому кандидатом на формальное решение задачи Коши является любая функция вида

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \frac{C_1}{x}, & x > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим, *что* можно считать обобщенным решением исследуемой задачи в смысле описанного подхода. Прежде всего обратим внимание на то, что функция $\frac{1}{x}$ не является локально интегрируемой, и в пространстве обобщенных функция ей соответствует целое семейство распределений вида $q = P(\frac{1}{x}) + M\delta$, где M — произвольная комплексная постоянная. Здесь $P(\frac{1}{x})$ есть обобщенная функция, заданная выражением

$$\left\langle P\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{x}\varphi(x)dx,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Поэтому первое уточнение постановки задачи заключается в том, что сначала нужно указать, какое из этих распределений q мы считаем коэффициентом в уравнении. В результате мы фактически имеем дело с семейством уравнений с обобщенными коэффициентами вида

$$u' + \Big[P\Big(\frac{1}{x}\Big) + M\delta\Big]u = 0, \tag{11}$$

где M — произвольная комплексная постоянная.

Для рассматриваемого распределения q первообразная есть локально интегрируемая функция

$$g(x) = \ln|x| + M\Theta(x),$$

поэтому интегралу в (3) можно придать смысл — считать, что

$$\int_{-1}^{x} q(s)ds = g(x) - g(-1) = g(x).$$

При подстановке функции g в (9) получаем формальное решение

$$u(x) = -\exp[-g(x)] = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ -e^{-M}\frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

т. е. функцию вида (10), у которой $C = -e^{-M}$. Таким образом, после выбора распределения, соответствующего функции $\frac{1}{x}$, однозначно определено формальное решение, которое, в частности, задает правило продолжения решения задачи Коши через особенность.

Построенное формальное решение не является локально интегрируемой функцией, не задает распределение и, следовательно, не может быть обобщенным решением. Но ей, как и $\frac{1}{x}$, соответствует целое семейство распределений W_S, параметризованное произвольным комплексным числом S. Распределение W_S может быть задано как производная в смысле распределений от локально интегрируемой функции

$$f_S(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x < 0; \\ -e^{-M}\ln x + S, & x > 0. \end{cases}$$

Выясним, для каких распределений $q = P(\frac{1}{x}) + M\delta$ разрешима задача Коши в пространстве распределений, и найдем соответствующие решения.

Понятие обобщенного решения зависит от выбранного способа аппроксимации, для рассматриваемых распределений один из наиболее естественных способов аппроксимации задается известным аналитическим представлением распределений [6]. Это представление распределения q в виде

$$q = \lim_{\varepsilon\to 0}[q^+(x+i\varepsilon) - q^-(x-i\varepsilon)],$$

где q^+ есть функция, аналитическая в верхней полуплоскости, а q^- — в нижней. Для распределения $P(\frac{1}{x})$ такие аппроксимации имеют вид

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon}\Big] = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2},$$

а для $\delta-$функции аппроксимирующее семейство есть

$$\frac{i}{2\pi}\Big[\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\Big]=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Заметим, что при такой аппроксимации δ-функции для уравнения (5) результат совпадает с результатом из примера 1, а для уравнения (8) обобщенное решение существует только при $Reb \le 0$.

Аппроксимирующее семейство для распределения $q = P(\frac{1}{x}) + M\delta$ может быть записано в виде

$$q_\varepsilon(x)=\lambda\frac{1}{x+i\varepsilon}+(1-\lambda)\frac{1}{x-i\varepsilon}, \qquad (12)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{M}{2\pi i}$.

Теорема 1. *При аппроксимации* (12) *коэффициента* $q = P(\frac{1}{x})+M\delta$ *задача Коши для уравнения* (11) *разрешима тогда и только тогда, когда обобщенный коэффициент имеет вид* $q = P(\frac{1}{x}) + i\pi(2m+1)\delta$, *где* m *целое число. При* $m < 0$ *обобщенным решением является распределение* $P(\frac{1}{x}) - i\pi\delta$, *а при* $m \ge 0$ *— распределение* $P(\frac{1}{x}) + i\pi\delta$.

Доказательство. Найдем в явном виде функцию

$$g_\varepsilon(x)=\int\limits_{-1}^{x} q_\varepsilon(t)dt.$$

Так как

$$\frac{1}{x+i\varepsilon}=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}-i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},$$

то ее первообразная есть функция

$$\frac{1}{2}\ln[x^2+\varepsilon^2]-i\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}.$$

А для

$$\frac{1}{x-i\varepsilon}=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}+i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

первообразная имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln[x^2+\varepsilon^2]+i\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}.$$

Поэтому первообразная для q_ε есть

$$Q_\varepsilon(x)=\lambda\Big[\frac{1}{2}\ln[x^2+\varepsilon^2]-i\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big]+(1-\lambda)\Big[\frac{1}{2}\ln[x^2+\varepsilon^2]+i\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big].$$

Тогда $g_\varepsilon(x) = Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon(-1)$, и получаем явный вид решений аппроксимирующих уравнений

$$u_\varepsilon(x)=e^{-g_\varepsilon(x)}=e^{-Q_\varepsilon(x)+Q_\varepsilon(-1)},$$

и вопрос сводится к исследованию поведения данного семейства при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что если взять ветвь аргумента комплексного числа, принимающую значения от нуля до 2π, то

$$\arg(x+i\varepsilon)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon},\quad \arg(x-i\varepsilon)=\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}.$$

Поскольку функцию $Q_\varepsilon(x)$ можно записать в виде

$$Q_\varepsilon(x)=\big[\ln|x-i\varepsilon|+i\arg(x-i\varepsilon)-\frac{3\pi}{2}i\big]+\lambda\big[\ln|x+i\varepsilon|+i\arg(x+i\varepsilon)-\frac{\pi}{2}i\big]-\lambda\big[\ln|x-i\varepsilon|+$$

$$+i\arg(x-i\varepsilon)-\frac{3\pi}{2}i\big]=\big[\ln|x-i\varepsilon|+i\arg(x-i\varepsilon)-\frac{3\pi}{2}i\big]+i\lambda\big[\arg(x+i\varepsilon)-\arg(x-i\varepsilon)+\pi\big],$$

для решений получаем представление

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1+i\varepsilon}{x-i\varepsilon}z^\lambda,$$

где

$$z=z(x,\varepsilon)=\Big\{\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\times\frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon}\Big\},$$

причем $|z|=1$ и $z(-1,\varepsilon)=1$. Если число λ целое, то функция z^λ определена однозначно и непрерывна. Если λ произвольное комплексное число, то z^λ есть многозначная функция. В записанной выше формуле под z^λ понимаются значения, заданные следующим образом: если

$$z=e^{it},\text{где } 0\le t<2\pi,\ \text{ то } z^\lambda=e^{i\lambda t}.$$

Поэтому, если t стремится к нулю, то $e^{i\lambda t}$ стремится к 1, а если t стремится к 2π, то $e^{i\lambda t}$ стремится к $e^{i\lambda 2\pi}$.

При $\varepsilon\to 0$ функция $z(x,\varepsilon)$ стремится к 1 для всех x. Но при $x<0$ видим, что $z(x,\varepsilon)$ стремится к 1 из верхней полуплоскости, а при $x<0$ — из нижней. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[z(x,\varepsilon)]^\lambda=\begin{cases}1, & x<0,\\ e^{i2\pi\lambda}, & x>0.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что при $x\neq 0$ семейство $u_\varepsilon(x)$ поточечно сходится к формальному решению (10), где $C_1=e^{i2\pi\lambda}$, причем вне окрестности нуля сходимость равномерная.

Вопрос о сходимости в пространстве распределений более деликатный. Сначала рассмотрим целые значения λ. Для исследования поведения решений $u_\varepsilon(x)$ выделим часть

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)}=\frac{1}{(x+i\varepsilon)^\lambda}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{1-\lambda}}.$$

Тогда $u_\varepsilon(x) = C(\varepsilon)\widetilde{u_\varepsilon(x)}$, где коэффициент

$$C(\varepsilon) = (1+i\varepsilon)\Big[\frac{-1+i\varepsilon}{-1-i\varepsilon}\Big]^\lambda$$

стремится к 1 при $\varepsilon \to 0$. Пусть $\lambda = -m$, $m \geq 0$. Тогда

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{(x+i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon)^{m+1}} = \frac{((x-i\varepsilon)+2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon)^{m+1}}.$$

После преобразования получаем, что

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{\sum_{k=0}^m C_m^k (x-i\varepsilon)^{m-k}(2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{m+1}} = \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k(2i\varepsilon)^k}{(x-i\varepsilon)^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{x-i\varepsilon} + \frac{2i\varepsilon m}{(x-i\varepsilon)^2} - \frac{2m(m-1)\varepsilon^2}{(x-i\varepsilon)^3} + \ldots. \tag{13}$$

В силу того, что мнемофункции $\frac{1}{(x-i\varepsilon)^n}$ имеют в пространстве распределений конечный предел, семейство (13) при $\varepsilon \to 0$ сходится в пространстве распределений к $P\big(\frac{1}{x}\big) + i\pi\delta$.

Таким образом получаем, что при $\lambda = -m$, где $m \geq 0$, предел $u_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений существует и равен $P\big(\frac{1}{x}\big) + i\pi\delta$.

Аналогично предыдущему случаю исследуем поведение решения $u_\varepsilon(x)$ при $\lambda = m+1$, где $m \geq 0$. Тогда

$$\widetilde{u_\varepsilon(x)} = \frac{(x-i\varepsilon)^m}{(x+i\varepsilon)^{m+1}} = \frac{((x+i\varepsilon)-2i\varepsilon)^m}{(x-i\varepsilon)^{m+1}} = \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k(-2i\varepsilon)^k}{(x+i\varepsilon)^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{2i\varepsilon m}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{2m(m-1)\varepsilon^2}{(x+i\varepsilon)^3} + \ldots.$$

Так как семейства $\frac{1}{(x+i\varepsilon)^n}$ имеют в пространстве распределений конечный предел, то $\widetilde{u_\varepsilon(x)}$ ведет себя как мнемофункция $\frac{1}{x+i\varepsilon}$, которая ассоциирована с распределением $P\big(\frac{1}{x}\big) - i\pi\delta$.

Таким образом, предел решения $u_\varepsilon(x)$ при целых $\lambda = m+1$, где $m \geq 0$, существует в пространстве распределений и равен $P\big(\frac{1}{x}\big) - i\pi\delta$.

Следовательно, для любого целого λ существует обобщенное решение задачи Коши для исследуемого дифференциального уравнения.

Принципиально другая картина возникает при произвольном не целом $\lambda = \alpha+i\beta$, где $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Покажем, что в данном случае не будет сходимости в пространстве распределений. Выберем функцию φ такую, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq h$ и $\varphi(x) = 0$ при

$|x| \geq 2h$, и исследуем поведение интеграла

$$\langle u_\varepsilon, \varphi\rangle = \int_{-2h}^{2h} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-2h}^{-h} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \int_{h}^{2h} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \int_{-h}^{h} u_\varepsilon(x)dx. \quad (14)$$

В силу того, что у первых двух интегралов в правой части существуют пределы при $\varepsilon \to 0$, достаточно исследовать поведение последнего интеграла. После преобразования имеем

$$\int_{-h}^{h} u_\varepsilon(x)dx = \int_{0}^{h} [u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(-x)]dx = \int_{0}^{h} w_\varepsilon(x)dx = \int_{0}^{h} \mathrm{Re} w_\varepsilon(x)dx + i\int_{0}^{h} \mathrm{Im} w_\varepsilon(x)dx, \quad (15)$$

где $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + u_\varepsilon(-x)$. Поэтому сходимость при $\varepsilon \to 0$ интегралов (14) равносильна сходимости интегралов от действительной и мнимой частей функции $w_\varepsilon(x)$.

Отметим, что на $[0, h]$ функции $w_\varepsilon(x)$ при почти всюду сходятся к функции

$$w(x) = \frac{e^{2\pi i\lambda} - 1}{x} = \frac{e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\alpha - 1}{x} + i\frac{e^{-2\pi\beta}\sin 2\pi\alpha}{x}.$$

Пусть $e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\alpha - 1 > 0$. Тогда на $[0, h]$ действительная часть функций $w_\varepsilon(x)$ сходится поточечно к функции $\mathrm{Re} w(x) > 0$, и при этом она будет ограничена снизу нулем для достаточно малых ε. Поэтому, если интегралы от $\mathrm{Re} w_\varepsilon(x)$ ограничены сверху, то, согласно лемме Фату, предельная функция интегрируема. Однако $\mathrm{Re} w(x)$ неинтегрируема на отрезке $[0, h]$ при $e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\alpha - 1 > 0$, следовательно интегралы от $\mathrm{Re} w_\varepsilon(x)$ неограничены, и, значит, не существует предела интегралов ß(15) при $\varepsilon \to 0$. Аналогично, предел интегралов (15) не существует при $e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\alpha - 1 < 0$.

Таким образом, сходимость может иметь место только, если $e^{-2\pi\beta}\cos 2\pi\alpha = 1$.

Кроме того, для существования предела интегралов (15) необходимо существование предела интегралов от мнимых частей $\mathrm{Im} w_\varepsilon(x)$. Аналогичное исследование показывает, что такой предел может существовать только при условии, что $\sin 2\pi\alpha = 0$.

Следовательно, для существования предела интегралов (15) необходимо выполнение двух указанных условий, из которых следует, что число λ должно быть целым.

Так как $M = i\pi(1 - 2\lambda)$, получаем утверждение теоремы. □

Из теоремы следует, в частности, что определены произведения распределений $\left[P\left(\frac{1}{x}\right) \pm i\pi\delta\right] \times \left[P\left(\frac{1}{x}\right) \pm i\pi\delta\right]$, что согласуется с результатами [7].

Рассмотренное уравнение (3) является частным случаем более общего уравнения

$$u' + b\Big[P\Big(\frac{1}{x}\Big) + M\delta\Big]u = 0.$$

При этом в доказательстве теоремы 1 существенно использовалось то, что был рассмотрен случай $b = 1$, поэтому естественно ожидать, что существование обобщенного решения существенно зависит от коэффициента b, и описание значений b и M, для которых такое решение существует, требует отдельного исследования.

Все рассмотренные уравнения являются частными случаями уравнений вида

$$u' + qu = 0,$$

где коэффициент q есть распределение, у которого при аналитическом представлении функции $q^{\pm}$ являются рациональными. Получение условий разрешимости таких уравнений в общем случае является нерешенной задачей.

Заключение

Проведенное исследование показывает, что существование обобщенного решения задачи Коши даже для простейших уравнений с обобщенными коэффициентами не является общим фактом, а достаточно сложным образом зависит от вида особенностей коэффициента и от выбранного способа аппроксимации коэффициента. Поэтому каждый вид особенностей требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

1. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

   VLADIMIROV, V. S. (1979) *Generalized functions in Mathrmatical Physics.* Moscow: Mir Publ.

2. Иванов, В. К. Асимптотическое приближение к произведению обобщенных функций // Известия вузов. Математика. — 1981. — №. 1. — С. 19–26.

   IVANOV, V. (1981) Asymptotic approximation to a product of generalized functions. *Soviet Math. (Iz. VUZ).* 25(1). p. 19–26.

3. COLOMBEAU, J. F. (1984) *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland.

4. Егоров, Ю. В. К теории обобщенных функций // Успехи математических наук. — 1990. — Т. 45, № 5. — С. 3–40.

   EGOROV, Yu. (1990) A contribution to the theory of generalized functions. *Russian Mathematical Surveys.* 45(5). p. 1–49.

5. ROSINGER, E. E. (2013) *Singularities and differential algebras of generalized functions: A basic dichotomic shealf theoretic singularity test*. Lap Lambert Academic Pabl.

6. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. — М.: Мир, 1968. — 276 с.

   BREMERMANN, H. (1965) *Distributions, complex variables, and Fourier transforms*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

7. Шагова, Т. Г. Рациональные мнемофункции на $\mathbb{R}$ // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2019. — № 2. — С. 6–17.

   SHAGOVA, T. (2019) Rational mnemofunctions on $\mathbb{R}$. *Journal of Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2. p. 6–17.

УДК: 519.7, 621.3
MSC2010: 68M07

ОБРАТИМЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ЧАСТЬ I

© С. И. Гуров

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *sgur@cs.msu.su*

© А. Е. Жуков

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация
e-mail: *aez_ iu8@rambler.ru*

© Д. В. Закаблуков

ООО "Алгоритмы и данные ул. Дмитрия Ульянова, д. 42, стр. 1, 117218, Москва,
Российская Федерация e-mail: *dmitriy.zakablukov@gmail.com*

© Г. В. Кормаков

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *egor2898@mail.ru*

Reversible Calculations. Part I.

Gurov S. I., Zhukov A. E., Zakablukov D. V., Kormakov G. V.

Abstract. In the first part of the paper, the main provisions of reversibility as a new paradigm for the development of computer technology are considered. The fundamentals of reversible logic and models of reversible calculations, reversible programming languages are stated.

Keywords: *reversible logic, reversible computation models, reversible programming languages.*

1. Введение в проблематику. Принцип Неймана–Ландауэра

Интерес к обратимым вычислениям и реализующим их схемам из обратимых элементов возник в начале 1960-х гг., когда был сформулирован казавшийся сначала парадоксальным принцип Неймана–Ландауэра: *в любой вычислительной системе, независимо от её физической реализации, при потере одного бита информации выделяется теплота в количестве не менее* $\varepsilon_0 = kT \ln 2$ Дж (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура) [1].

Продолжительное время данный принцип оставался всего лишь чистой теорией, не подкреплённой результатами экспериментов, что было связано с трудностями измерения крайне малых количеств выделяемой энергии. Однако в 2012 г. в эксперименте с коллоидной частицей эффект Ландауэра удалось обнаружить на практике [2]. В 2014 г. был проведен ещё один эксперимент, показавший, что при уменьшении возможных макроскопических состояний системы в два раза выделяется минимум ε_0 тепла [3].

При комнатной температуре $\varepsilon_0 \approx 3 \cdot 10^{-21}$ Дж $= 0{,}017$ эВ — крайне малое количество. Но в пересчете на процессор суммарная рассеиваемая мощность вырастает уже до величин порядка 1 Вт[1].

Проведённый в рамках проекта International Technology Roadmap for Semiconductors ITRS-2001[2] анализ развития транзисторных технологий на период после 2001 г. показал, что при использовании 22-нм технологии интегральных микросхем (ИМС), выделение тепла составит 5–10 МВт на кв. см поверхности процессора; для сравнения: Солнце выделяет не более 6,5 кВт/см^2. Очевидно, что обеспечить необходимое охлаждение становится всё более трудным. Поэтому проблема отвода тепла уже в следующем десятилетии станет гораздо более существенной и игнорировать эффект Ландауэра, оставаясь в рамках современных технологий, уже нельзя. В результате исследователи пришли к выводу, что, без учёта тепловых шумов и требований надёжности, физический предел традиционных технологий вычислителя с плавающей точкой — 10^{22} операций в секунду [4]. Данная ситуация выглядит как конец развития вычислительной техники в рамках существующих технологий из-за «*теплового проклятия*».

[1] http://old.computerra.ru/2004/538/204845/
[2] http://www.itrs2.net

Выход видят в переходе к вычислительным устройствам, реализующим *обратимые вычисления*[3], позволяющие обойти ограничение, устанавливаемое принципом Ландауэра. При обратимых вычислениях информация не теряется, откуда следуют (теоретически) нулевые потери энергии на её обработку.

Важным является то, что обратимость необходимо поддерживать на всех уровнях вычислений: физической модели, архитектуры вычислителя, языков программирования высокого уровня и реализуемых алгоритмов: Ч. Беннетт указал, что необратимость хотя бы на одном уровне полностью разрушает положительные эффекты остальных [5]. Отсюда следует, что для создания парадигмы обратимых вычислений требуется разработать следующие новые направления:

- теорию (алгебру и логику) обратимых вычислений;
- языки и парадигмы обратимого программирования;
- методы реализации прикладных программ и алгоритмы обратимого программирования;
- обратимую схемотехнику;
- физическую реализацию обратимых элементов.

В статье дан краткий обзор основных понятий, связанных с обратимостью, рассмотрены вопросы построения схем из функциональных обратимых элементов, в том числе сбоеустойчивых и предложены основные такие элементы. Указаны направления и результаты применения схем из обратимых логических элементов в криптографии.

2. Основы обратимой схемотехники

2.1. **Понятие обратимости. Мусорные биты.** Говорят, что вычисления *логически обратимы*, если по выходным величинам можно восстановить входные. Такие вычисления реализуют на *обратимых элементах*.

Логический элемент назовём *полуобратимым*, если он осуществляет инъективное преобразование входного булевого вектора в выходной. Обычно дополнительно требуют, чтобы произвольный сигнал, направленный в обратном направлении, от выхода элемента к его входу, однозначно и безошибочно восстановил исходный входной вектор. Назовём элемент с n входами *обратимым*, если и только если он осуществляет некоторую биекцию на множестве всех 2^n возможных входов или их перестановку. Как следствие, такой элемент должен иметь n выходов. В общем случае элементы с n входами и m выходами будем называть $n \times m$-элементами.

[3] англ. *reversible*; ранее употреблялись также термины *консервативные, реверсивные* вычисления

При реализации комбинационной логики схемами из обратимых элементов, на выходе кроме *информационных битов* — значений вычисляемой функции — как правило, формируются ещё и дополнительные биты, называемые (неудачно) *мусорными* или *стоками* (англ. *garbage* и *sink* соответственно). Мусорные биты в действительности играют очень важную роль: они дают возможность по выходному вектору однозначно восстановить входной, т. е. обратить вычисления. Если их не сохранить, произойдёт рассеяние энергии, а именно этого требуется избежать.

2.2. **Обратимые комбинационные элементы.** Чтобы отличать обычные комбинационные элементы от обратимых, будем называть первые *вентилями*, а вторые *гейтами*, оставив термин *элемент* для обоих. Входы элементов будем, как правило, обозначать литерами с начала алфавита: A, B, $\ldots$, а выходы — с середины алфавита: P, Q, $\ldots$. Иногда удобнее обозначения A_1, A_2, $\ldots$ и P_1, P_2, $\ldots$ соответственно. На схемах часто входы и выходы обозначают литерами x, y, $\ldots$, а их порядок указывают положением на элементе сверху вниз. В формулах $\oplus$ означает сумму по $mod\,2$, штрихом $'$ обозначают инвертирование, знак конъюнкции "$\cdot$" иногда опускаем.

Простейшими обратимыми элементами являются NOT и SWAP.

Инвертор (NOT) — имеет один вход A, один выход P и осуществляет безусловное инвертирование входного сигнала:

$$P = A'.$$

Обмен (SWAP) — имея два входа A, B, меняет их местами на выходах P, Q:

$$P = B, \quad Q = A.$$

Входы большинства других обратимых элементов разделяются на *управляющие*, или *адресные* и *управляемые*, или *целевые*. Значения вторых на выходе могут быть изменены в зависимости от значений первых, которые передаются на выход без изменений (их иногда называют *сквозными дорожками*). Преобразованные выходы также называют *сигнальными*.

Контролируемый инвертор (CNOT, Controlled NOT, элемент Феймана, FG) — 2×2-обратимый гейт, реализующий *условное инвертирование*. Имеет два входа A, B и два выхода P, Q. Первый вход A — управляющий, а второй вход будет инвертирован на выходе, если и только если $A = 1$:

$$P = A, \quad Q = A \oplus B.$$

Рассмотренные выше элементы *вычислительно не универсальны*: используя только их, невозможно реализовать произвольную логическую функцию. Ясно, что универсальный элемент должен обеспечить реализацию (в зависимость от значений управляющих входов) полной системы булевых функций, например, пар функций AND2 и NOT или OR2 и NOT. Кроме того, такие элементы должны обеспечивать возможность *каскадирования* — организации последовательного соединения элементов. Далее рассматриваются универсальные обратимые элементы. В наибольшим числе работ в качестве таковых используют элементы Тоффоли или Фредкина.

Вентиль Тоффоли (CCNOT, Controlled Controlled NOT, TG) — 3×3-универсальный контролируемый обратимый гейт, имеет три входа A, B, C и три выхода P, Q, R. Первые два входа A, B — управляющие: третий вход будет инвертирован на выходе, если и только если $A = B = 1$. Формулы выходов:

$$P = A, \quad Q = B, \quad R = C \oplus A \cdot B.$$

Очевидно, элемент Тоффоли действительно вычислительно универсален: при $A = B = 1$ он реализует инвертор NOT, а при $C = 0$ — AND2. На элементах Тоффоли можно осуществить операцию ветвления и передачу сигналов, обеспечивая каскадирование: при входном векторе $(A, 1, 0)$ на его выходе будет вектор $(A, 1, A)$.

Вентиль Фредкина (CSWAP, Controlled SWAP, управляемый обмен, симметрический переключатель, FRG) — 3×3-универсальный контролируемый обратимый гейт, он, как и TG, имеет три входа A, B, C и три выхода P, Q, R. Первый вход A — управляющий: если он равен 1, то остальные два входа B, C на выходе поменяются местами, в противном же случае они подаются на выход неизменными:

$$P = A, \quad Q = A' \cdot B \vee A \cdot C, \quad R = A \cdot B \vee A' \cdot C.$$

Иногда FRG изображают, как показано на рис. 1.

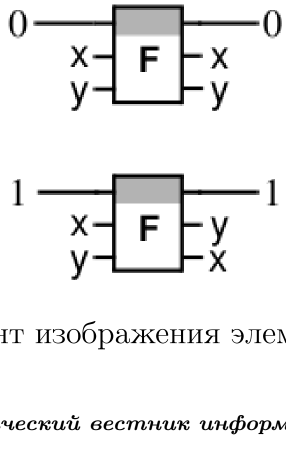


Рис. 1. Вариант изображения элемента Фредкина

Нетрудно видеть, что элемент Фредкина также вычислительно универсален: во-первых, при входе $(A, 0, 1)$ на его выходе будет (A, A, A'), что означает реализацию функций NOT и дублирования сигнала и, во-вторых, при входах $(A, B, 1)$ и $(A, B, 0)$ на его выходе будут векторы $(A, A \oplus B, B \,\mathrm{Im}\, A)$ и $(A,\ A' \cdot B,\ A \cdot B)$, т. е. реализуются пары функций (OR2, обратная импликация) и (обратная коимпликация, AND2) соответственно. Так, реализация функции XOR2 на двух гейтах Фредкина показана на рис. 2.

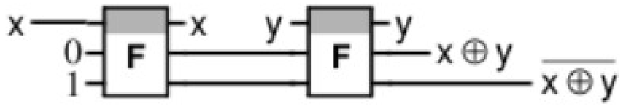


Рис. 2. Реализация функции XOR2 на гейтах Фредкина

Сам факт того, что управляемо перемешивая проводки в кабеле между входом и выходом и не используя никаких других элементов, можно получить на выходе значение любой булевой функции от входа, далеко не очевиден [6].

Рассмотренные элементы NOT, CNOT, Тоффоли и Фредкина оказываются обратными самим себе: если сигналы пройдут через два экземпляра одного элемента, они останутся неизменными. Ясно, что элемент *самообратим*, если и только если реализуемое им биективное преобразование представляется в виде совокупности транспозиций (перестановок внутри некоторых пар) элементов множества всех двоичных векторов.

Обычно схематически рассмотренные гейты изображаются как показано на рис. 3.

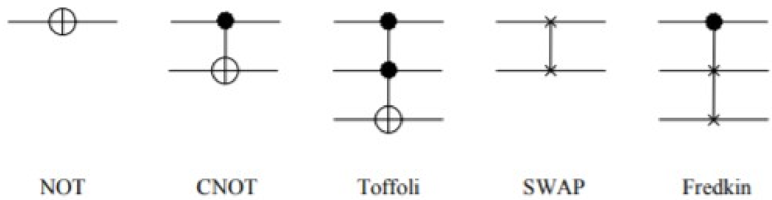


Рис. 3. Обычное схематическое изображение гейтов NOT, CNOT, TG, SWAP, FRG

Отметим ещё *обобщённый гейт Тоффоли* (C^{n-1}NOT, MCT, Multiple-Control Toffoli Gate, generalized n-bit Toffoli) — $n \times n$-гейт. Из n входов $A_1, \ldots, A_n$ первые $n-1$ — управляющие, функции n выходов $P_1, \ldots, P_n$, представляются формулами

$$P_i = A_i,\ i = \overline{1, n-1}, \quad P_n = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \oplus A_n.$$

Ясно, что при $n = 2$ элемент $\mathrm{C^1NOT}$ есть FG, а при $n = 3$ элемент $\mathrm{C^2NOT}$ есть TG.

Расширенный гейт Тоффоли (ETG) имеет $n+1$ входов $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$, первые $n-1$ из которых — управляющие и $n+1$ выходов $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$, из которых последние два (а не один, как у $\mathrm{C}^{n-1}\mathrm{NOT}$) сигнальные, инвертирующие управляемые сигналы A_n и A_{n+1} соответственно при 1 на всех управляющих входах:

$$P_i = A_i,\ i = \overline{1, n-1}, \quad P_n = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \oplus A_n \quad P_{n+1} = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \oplus A_{n+1}.$$

Схематическое представление элемента ETG дано на рис. 4 (обратите внимание на использование знака $\times$).

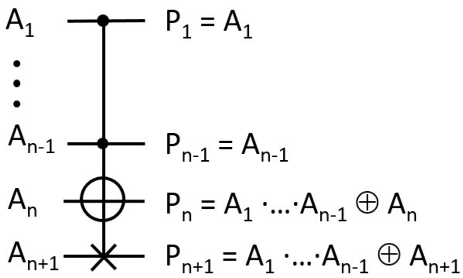


Рис. 4. Элемент ETG

Обобщённый (множественно управляемый) гейт Фредкина (обобщённый CSWAP, C^nSWAP, MCF, Multiple-Control Fredkin Gate) имеет n входов $A_1, \ldots, A_n$ из которых первые $n-2$ управляющие, и n выходов $P_1, \ldots, P_n$, последние два из которых — сигнальные, повторяющие A_n и A_{n-1}, если все управляющие входы — единичные, или не делая этого, иначе.

Вентиль Переса (PG) — обратимый 3×3-гейт, имеющий три входа A, B, C и три выхода P, Q, R:

$$P = A, \quad Q = A \oplus B, \quad R = A \cdot B \oplus C.$$

Вентиль Переса может быть реализован на гейтах TG и CNOT, соединённых последовательно, как показано на рис. 5.

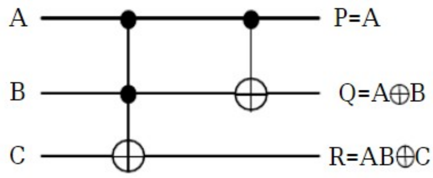


Рис. 5. Вентиль Переса, реализованный на TG и CNOT

Этот элемент интересен тем, что на его основе относительно просто может быть синтезирован полный однобитный сумматор[4] — см. рис. 6.

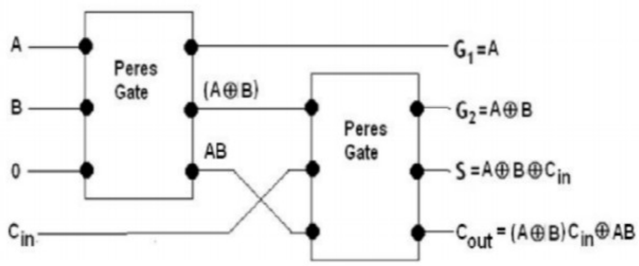


Рис. 6. Обратимый однобитный сумматор на PG: A, B — суммируемые разряды, C_{in} — перенос из предыдущего разряда, S — сумма, C_{out} — перенос в следующий разряд

Следующие два гейта удовлетворяют условию инъективного, но не биективного преобразования входа в выход. Как следствие, у них число выходов больше числа входов.

Переключатель Прайса универсальный полуобратимый гейт; имеет два входа — A, B и три выхода — P, Q, R. Логика его работы представлена формулами:

$$P = A, \quad Q = A \cdot B, \quad R = A' \cdot B.$$

Вентиль ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ (Interaction Gate, IG) — универсальный полуобратимый гейт, имеет два входа A, B и четыре выхода P, Q, R, S, реализующих четыре функции, эквивалентные относительно преобразований Поварова-Шеннона конъюнкций входов:

$$P = A \cdot B, \quad Q = A' \cdot B, \quad R = A \cdot B', \quad S = A' \cdot B'.$$

Кроме рассмотренных, известны также гейты Кернтопфа, Марголуса, несколько гейтов Де Воса и множество других; ссылки можно найти в [7, 8].

3. Модели обратимых вычислений

3.1. Модель бильярдных шаров. Так называют реализующую обратимую логику абстрактную физическую модель (Billiard Ball Model, BBM), предложенную Э. Фредкиным и Т. Тоффоли [6]; из этой работы взяты рисунки 7 и 8 данного подраздела.

[4] *Полный однобитный сумматор* вычисляет 1) сумму по $mod\,2$ трёх битов — двух данных разрядов чисел и переноса из младшего разряда и 2) бит переноса в старший разряд.

Данная модель используется во многих исследований по обратимости вычислений и вычисления в ней называют *баллистическими*.

Модель представляет собой плоскость, «стол», по которой без трения (точнее, без потери энергии) в строго заданных направлениях перемещаются бильярдные шары. Вследствие обратимости времени в кинематических уравнениях, траектория движения шара полностью обратима.

Совершение логических операций моделируются изменениями траектории движения шаров при их соударении между собой. Скорости, допустимые направления и размеры шаров подобраны таким образом, что в дискретные моменты времени, соответствующие тактам, шары могут находиться только в небольшом наборе точек, образующих прямоугольную, повернутую на 45° сетку, см. рис. 7. Если шары попадают в соседние точки, между ними происходит абсолютно упругое столкновение.

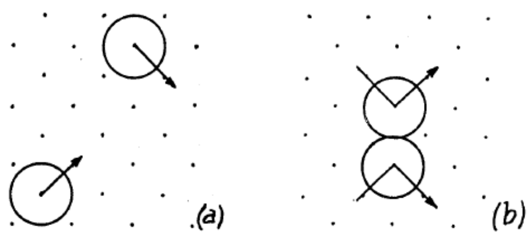


Рис. 7. (a) Шары радиуса $1/\sqrt{2}$, перемещающиеся по узлам сетки; (b) Центральное столкновение двух шаров.

Логической единицей считается наличие шара в данной точке и в данный момент времени, а нулем — его отсутствие. На плоскости могут быть установлены неподвижные стенки, или *зеркала* для отражения, сдвига, задержки и обеспечения пересечения траекторий шаров, см. рис. 8. Элемент (d) на рис. 9 называется *нетривиальным*

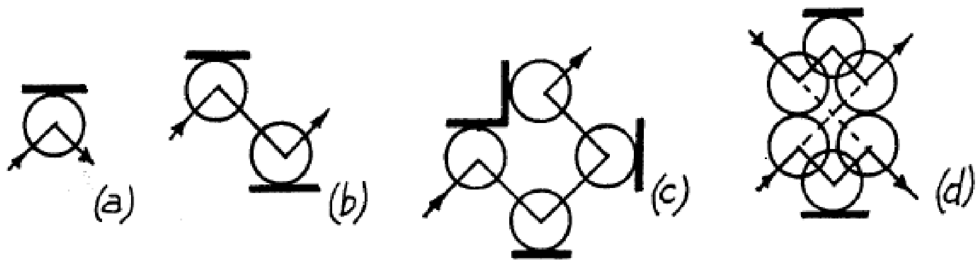


Рис. 8. Зеркала для поворота (a), сдвига (b), задержки (c) и безопасного пересечения траекторий (d) шаров.

кроссовером и позволяет шарам «как бы проходить друг через друга».

Возможность создания в рамках данной модели обратимых гейтов показана на рис. 9.

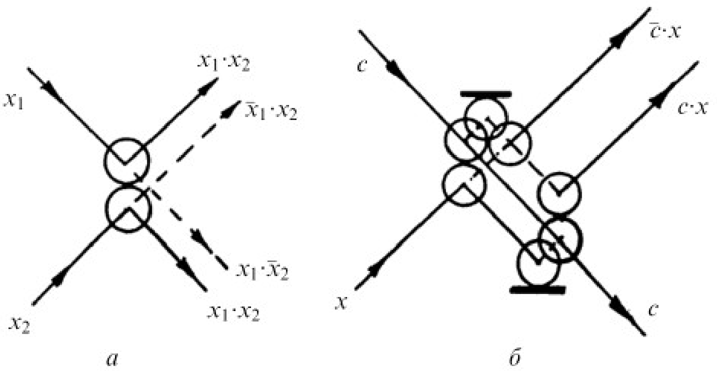


Рис. 9. Бильярдная реализация а) элемента IG и б) переключателя Прайса [9]. x_1, x_2, c, x — битовые сигналы.

Из нетривиального кроссовера, переключателей Прайса и IG можно сконструировать схему, эквивалентную гейту Фредкина.

Таким образом, возможно построение бильярдной модели компьютера. Если после того как компьютер завершил «вычисления» запустить бильярдные шары в обратном направлении, модель вернётся в исходное состояние.

Заметим, что предположение об абсолютно упругом и без потери энергии взаимодействии шаров друг с другом и с отражающими стенками является очень жёстким ограничением. Оно не влияет на теоретические рассмотрения, но существенно для физической реализации. Также ясно, что «бильярдный компьютер» чрезвычайно чувствителен к малейшим неточностям реализации: случайным отклонениям шара от правильного направления, погрешностям в установке зеркал и т. д., в результате которых ошибки «вычислений» будут накапливаться. Данные трудности существенно уменьшаются, если в качестве бильярдных шаров используется субмикроскопические частицы, например, электроны. Законы квантовой механики накладывают определённые ограничения на состояние элементарных частиц, поэтому оказывается возможным купировать малые отклонения в их движении.

Р. Меркль предложил практическую реализацию BBM [10]. Роль бильярдных шаров при этом играют электроны, пучки которых перемещаются по индуктивным контурам между конденсаторами, а стол представляет собой алмазный контейнер, обработанный определённым образом. Исследование модели проходили при температуре 1°K.

3.2. **Машины Тьюринга и обратимость.**

3.2.1. *Классическая машина Тьюринга (МТ).* Напомним, что машина Тьюринга — абстрактный компьютер, управляющее устройство которого (*головка записи-чтения*) способно находиться в одном из состояний конечного множества Q состояний. Головка читает/пишет/удаляет символы конечного алфавита $A = \{ a_0, a_1, \ldots, a_n \}$ с неограниченной в обе стороны разделённой на ячейки ленты, и передвигается вдоль неё на один шаг вправо/влево за такт работы. Выделяется особый *пустой символ*, заполняющий все ячейки ленты, кроме конечного числа тех, на которых записаны входные данные.

Управляющее устройство работает согласно последовательно выбираемым командам, которые представляют алгоритм, реализуемый данной МТ. Команда МТ

$$\langle q, a, q', a', d \rangle$$

означает: *находясь в состоянии q и считывая символ a, МТ переходит в состояние q', заменяет символ в ячейке на a' и либо сдвигается на ячейку вправо/влево ($d = \pm 1$), либо остаётся на месте ($d = 0$).* Некоторые состояния могут быть помечены как *терминальные*, и переход в любое из них означает конец работы алгоритма. Машина Тьюринга называется *детерминированной*, если каждой комбинации состояния и ленточного символа в таблице соответствует не более одной команды.

3.2.2. *Существование обратимых МТ.* И. Лесёрф и Ч. Беннетт в своих работах независимо доказали существование обратимых машин Тьюринга [5, 11]. Точнее, любую машину Тьюринга можно реализовать обратимо, т. е. любое вычисление, которое можно сделать на обычном необратимом вычислительном устройстве (компьютере), можно выполнить так, что оно будет обратимо.

Стирания символов с ленты делают обычную машину Тьюринга необратимой, поэтому Беннетт предложил добавить к ней вторую ленту, названную *лентой истории*, на которой сохраняются сведения об удаленных или изменённых данных. В конце вычислений полученный результат может быть записан на ещё одну ленту для сохранности. Затем машина Тьюринга начинает работать в обратную сторону, с помощью ленты истории она обращает одну за одной все операции, пока не вернется к исходному состоянию.

3.2.3. *Реверсивная машина Тьюринга (РМТ).* Рассмотрим другую конструкцию, обеспечивающее обратимость вычислений — реверсивную машину Тьюринга (РМТ) [12].

Главное отличие её от МТ — невозможность одновременного считывания символа с ленты и перемещения головки.

Команды РМТ

$$1)\ \langle\, q,\, a,\, q',\, a'\,\rangle, \qquad 2)\ \langle\, q,\, *,\, q',\, d\,\rangle$$

означают:

1) *находясь в состоянии q и считывая символ a, РМТ переходит в состояние q' и заменяет символ на a';*
2) *находясь в состоянии q РМТ переходит в состояние q' и сдвигается на ячейку вправо/влево $d = +1/-1$.*

Если РМТ перешла из состояний q_1 и q_2 в одно и то же состояние q', то q_1 и q_2 оба принадлежат *записывающему типу* и они должны записать на ленту разные символы. Отсюда следует существование обратного прохода по пути вычислений.

При реализации на РМТ классических (на МТ) вычислений, проходящих за время T и требующие памяти S, потребуются уже время T_R и объём памяти S_R, оцениваемые как

$$T_R \,=\, 3 \cdot 2^{O\left(T/2^k\right)}, \quad S_R \,=\, S \cdot (1 + O(k))\,, \qquad \text{где } k \in (1, \log_2 T).$$

Мы видим, что при переходе к РМТ значительно увеличивается как число операций, так и требуемая для вычисления память.

Н. Н. Непейвода указал способ возможного суперэкспоненциального сокращения для любой системы алгебраического моделирования, в т. ч. и для РМТ, основанный на идее петербургского логика В. П. Оревкова [13, 14]. Поясним её на примере. Если в распоряжении вычислителя имеется лишь операция прибавления единицы, то вычисление экспоненты требует экспоненциального числа шагов. Запишем неявное определение функции $\varphi(x, y) = x + 2^y$ с помощью равенств

$$\varphi(x, 0) \,=\, x + 1, \qquad \varphi(x, y + 1) \,=\, \varphi(\varphi(x, y), y),$$

тогда экспонента вычисляется за линейное число шагов. Аналогично за линейное число шагов можно обеспечить вычисление суперэкспоненты и т. д.

3.3. **Обратимые клеточные автоматы.** Н. Марголус обобщая модель бильярдных вычислений, пришел к идее обратимых клеточных автоматов [15].

3.3.1. *Классические клеточные автоматы (КлА).* Клеточные автоматы — одна из старейших моделей вычислений, насчитывающая уже более 70 лет [15].

Классический КлА представляет собой упорядоченный набор ячеек памяти, образующих регулярную n-мерную решетку. Каждая ячейка памяти клеточного автомата может хранить одно значение из некоторого конечного множества (как правило — 1 бит). Время для клеточного автомата дискретно и измеряется тактами или шагами. Работу КлА определяют правила переписывания, по которому клетки на каждом шаге изменяют содержание хранимой в них информации.

Обычно эти правила одинаковы для всех ячеек. Смена состояний всех ячеек решетки происходит синхронно и одновременно на каждом такте, при этом новое значение каждой ячейки памяти является функцией от текущих значений ячеек, образующих её окрестность.

3.3.2. *Исследование обратимости.* КлА называется *обратимым*, если каждое его внутреннее состояние имеет единственный прообраз. Наиболее существенные результаты, связанные с вопросами обратимости, получены для классических КлА, заданных на бесконечных решетках. Если автомат является обратимым, обратное преобразование может быть реализовано также с помощью КлА (возможно с другой, в том числе и с большей окрестностью по сравнению с исходным автоматом) [16]. Также было показано, что для одномерных КлА задача алгоритмического распознавания обратимости является разрешимой [17]. В той же работе был построен алгоритм распознавания, имеющий экспоненциальную сложность.

Позже были построены алгоритмы для распознавания обратимости одномерных КлА, имеющие полиномиальную сложность [18–21]. Однако для клеточных автоматов на решетках размерности 2 и более измерений таких алгоритмов нет. Было установлено, что в общем случае эта задача является алгоритмически неразрешимой в том смысле, что не существует алгоритма, который для любого автомата всегда заканчивал бы свою работу в конечное время и давал бы правильный ответ [22, 23]. В работах [24, 25] исследовались границы между классами клеточных автоматов, для которых свойство обратимости является алгоритмически разрешимым, и теми, для которых оно алгоритмически неразрешимо, и получен критерий разрешимости свойства обратимости для классов клеточных автоматов фиксированной размерности и с фиксированным числом состояний ячейки.

Построение обратимых КлА в случае размерностей, больших 1, наталкивается на значительные трудности. Известно лишь несколько типов обратимых двумерных КлА, основными из которых являются блочные клеточные автоматы [15, 26] и клеточные автоматы второго порядка [27–29]. Автоматы этих типов отличаются от классических клеточных автоматов, однако доказано, что они могут быть эмулированы классическими КлА (возможно, с значительно большим размером окрестности и числом состояний ячейки).

3.3.3. *Пример обратимого двумерного блочного КлА.* Автомат работает следующим образом [15]. Плоскость разбивается на квадраты размером 2×2 непрерывными и пунктирными линиями, причём разбивка пунктирными линиями сдвинута относительно разбивки непрерывными линиями на один квадрат по диагонали. В цитируемой работе в стартовой конфигурации берется квадрат размером 512×512 клеток, раскрашенных случайным образом в черный и белый цвета. Затем в каждый нечётный момент времени правило используется для перекраски клеток разбиения, заданного непрерывными линиями, а в каждый чётный момент времени то же самое правило применяется к клеткам разбиения, заданного пунктиром.

3.3.4. *Клеточные автоматы конечного размера.* В большинстве приложений решетка КлА имеет конечные размеры. Это порождает т. н. «проблему краевых клеток»: необходимо определить, как задавать значения функции для ячеек, у которых отсутствует часть соседей. Чаще всего в соответствии со свойством однородности для разрешения этой проблемы противоположные края решетки клеточных автоматов отождествляются, образуя многомерный тор (в одномерном случае — кольцо). Известны и другие варианты решения проблемы краевых клеток, например, введение «нулевой границы» (null-boundary), когда значения для отсутствующих соседей полагаются равными 0.

Важной разновидностью КлА конечного размера являются *обобщенные клеточные автоматы (ОКлА)*. Такие автоматы впервые описаны в работах С. Кауффмана под именем «булевой сети» (Boolean network) и предназначались для моделирования генетических процессов в биологии [30]. Затем ОКлА был предложен в работе [31], где был назван «неоднородным клеточным автоматом»[5]. ОКлА математически можно описать следующим образом.

Пусть задан ориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_N\}$ — множество вершин графа, E — множество дуг, а δ_i — полустепень захода для вершины v_i и при этом входящие в данную вершину дуги пронумерованы числами $1, \ldots, \delta_i$.

[5] в более поздних работах этот термин использовался в другом смысле

Будем считать, что с каждой вершиной v_i связана ячейка памяти, содержащая булеву переменную m_i, и булева функция $f_i(x_1, \ldots, x_{\delta_i})$ — локальная функция связи i-й вершины.

Обобщенный клеточный автомат это автономный автомат, его внутренним состоянием в момент времени t называется заполнение массива ячеек $(m_1(t), m_2(t), \ldots, m_N(t))$. Функция переходов задаёт отображение множества состояний в себя и определяет следующее состояние автомата. При этом заполнение ячеек памяти обобщенного КлА описывается уравнением:

$$m_i(t) \;=\; f_i\left(m_{n(i,1)}(t-1), m_{n(i,2)}(t-1), \ldots, m_{n(i,\delta_i)}(t-1)\right),$$

где $m_i(t)$ — состояние i-й ячейки памяти в момент времени t, а $n(i, j)$ — номер вершины, из которой исходит дуга, входящая в вершину i и имеющая номер j.

Однородный обобщенный клеточный автомат — это ОКлА, граф которого является регулярным по входу (т. е. число дуг, заходящих в вершину одинаково для всех вершин) и при этом локальная функция связи для всех ячеек одинакова. В противном случае обобщенный клеточный автомат будет называться *неоднородным.*

Вопросы обратимости для КлА конечного размера в принципе — всегда разрешимы, и основная задача состоит в нахождении приемлемых критериев для проверки обратимости, алгоритмов для реализации обратного преобразования и оценки сложности этих алгоритмов. В настоящее время эти вопросы весьма мало исследованы, результатов очень немного, а те, какие есть, — не внушают большого оптимизма на быстрое продвижение и скорые успехи в этом направлении. Так в работе [32] проводились попытки исследовать свойство обратимости двумерных КлА на множестве конфигураций, помещающихся в некоторый квадрат. Было установлено, что задача распознавания обратимости в этой постановке является $co - NP$-полной. В свою очередь, для ОКлА, как показано в [33], задача восстановления предыдущего состояния (а значит и начального заполнения) обобщенного клеточного автомата является NP-трудной, а в случае КлА с локальной функцией связи от 2 переменных, задача о существовании предыдущего состояния принадлежит классу P.

3.4. **Другие модели обратимых вычислений.** Известны и другие модели обратимых вычислений, укажем некоторые из них.

Броуновская машина (Ч. Беннетт). Идея — случайные блуждания, корректируемые с помощью незначительных количеств управляющей энергии [34].

Адиабатическое переключение (Р. Меркль). Адиабатическим называют процесс, протекающий без подвода и отвода теплоты. Идея — все переключения на гейтах делаются при одинаковом напряжении и при этом энергия не тратится. При изменении напряжения между переключениями энергии тратится тем меньше, чем более плавно происходит изменение. В идеале будут почти нулевые выбросы тепла; см. [12]. Минусом является низкая скорость работы.

Модель стержней и пазов (Ч. Беннетт и Р. Ландауэр). Элемент управления — стержень с выступом, имеющий одну степень свободы. Взаимодействие моделируется блокировкой стержня при попадании выступов в одну область. Стержни размещены внутри матрицы с фиксированными каналами и снабжены эластичными фиксаторами, ограничивающими движение по оси и обеспечивающими дополнительное сдерживание стержня, который претерпел столкновение. Стержни не двигаются, пока их не толкнут, и только с толчком можно выяснить, заблокирован ли стержень. В каждый момент времени стержень можно толкнуть, освободить или оставить как есть [35].

4. Математика обратимой логики

4.1. **Модели схем из функциональных обратимых элементов.** Схема из функциональных элементов классически определяется как ориентированный граф без циклов с помеченными рёбрами и вершинами. Правильно сформированная обратимая схема — ациклическая комбинационная логическая схема, в которой все элементы обратимы и соединены друг с другом последовательно без ветвлений. В самой простой математической модели обратимых схем все элементы имеют одинаковое количество входов и выходов n. В ориентированном графе, описывающем такую обратимую схему, все вершины нумеруются от 1 до l и имеют ровно n занумерованных входов и выходов. При этом i-й выход m-й вершины, $m < l$, соединяется только с i-м входом $(m + 1)$-й вершины. Входами обратимой схемы являются входы первой вершины, а выходами — выходы l-й вершины. Величина l называется *сложностью схемы*.

Для описания модели схем из обратимых элементов, имеющих не n входов, а меньше, вводится понятие несущественных входов наравне с адресными и целевыми. Значения на несущественных входах, как следует из названия, не влияют на значение на целевом выходе и передаются на соответствующие выходы без изменений. Для перехода от этой модели к предыдущей потребуется в качестве функциональных элементов рассматривать все возможные схемы сложности 1, построенные на n проводниках.

Модель обратимых схем можно свести к модели функциональных схем с *ограниченной памятью*. В случае обратимой схемы с n входами каждой линии ставится в соответствие один из n регистров памяти (ячеек памяти), хранящих результат вычислений на каждом шаге работы схемы. Входы и выходы элементов, подключенные к линиям схемы, считывают и записывают значения в соответствующий линии регистр памяти.

Перед началом работы в регистры памяти записываются начальные значения, в конце работы из них считывается результат. Для реализации биективного отображения на множестве двоичных векторов длины n необходимо как минимум n регистров памяти. Если требуемое отображение невозможно реализовать при помощи заданного семейства обратимых элементов на n регистрах памяти, но можно реализовать на $(n+q)$ регистрах памяти, то говорят, что схема реализует отображение с q дополнительными входами. В большинстве случаев перед началом работы в регистры памяти, соответствующие дополнительным входам, записывают нулевые значения, однако могут быть записаны и единичные значения.

Обратимый элемент по определению задаёт биективное отображение на множестве $\mathbb{Z}_2^n$ — множестве двоичных векторов длины n. Любое такое преобразование можно описать подстановкой на данном множестве. Следовательно, последовательное соединение обратимых элементов задаёт подстановку, равную произведению соответствующих подстановок. Отсюда следует очевидная связь между обратимыми схемами с n входами и подстановками из симметрической группы S_{2^n}. Так если взять элементы, обратные элементам обратимой схемы Σ, и соединить их в обратном порядке, то мы получим схему Σ_r, которая задает биективное отображение, обратное к отображению, задаваемому схемой Σ. Будем называть такую схему *зеркальной*. Если обратимая схема состоит только из самообратимых элементов, то обратное отображение реализует схема, состоящая из тех же самых элементов, но соединенных в обратном порядке.

4.2. **Функциональная полнота семейств обратимых элементов.** Семейство логических элементов, из которых строиться схема, называют *библиотекой*. Если в ней присутствуют элементы с переменным числом входов, выходов, изменяемых свойств, то такая библиотека называется параметрической. При этом конкретный элемент выбирается в зависимости от значения некоторого параметра. Применение параметрических библиотек значительно облегчает процесс создание логической схемы. Схему, построенную из элементов библиотеки $\mathscr{B}$, называют $\mathscr{B}$-схемой. Подстановка называется $\mathscr{B}$-конструируемой если она может быть реализована $\mathscr{B}$-схемой.

Множество всех подстановок, реализуемых $\mathscr{B}$-схемами с n входами и n выходами, является группой, обозначаемой $\langle\mathscr{B}\rangle_n$. Эта группа, в свою очередь, является подгруппой симметрической группы S_{2^n} (может быть совпадающей со всей S_{2^n}).

Подстановки, соответствующие элементам библиотеки $\mathscr{B}$, являются образующими элементами группы $\langle\mathscr{B}\rangle_n$. В связи с этим задачи построения схем из обратимых элементов, реализующих элементы группы подстановок, и получения оценок для их сложности сводятся к задачам нахождения длин элементов группы подстановок в заданной системе образующих, длины самой группы и мощностей её слоев. При этом естественно возникает вопрос функциональной полноты заданного семейства обратимых элементов: какие биективные отображения (какой класс отображений) могут быть реализованы и при каком количестве дополнительных входов.

Библиотека, образованную элементами NOT, CNOT, TG называют NCT-библиотекой [36]. Будем называть *N-конструируемой* (*C-конструируемой, T-конструируемой*) подстановку, построенную исключительно с помощью элементов NOT (соответственно CNOT, TG). В работе [37] установлены следующие результаты.

- Группа S_{2^n} содержит 2^n N-конструируемых подстановок, $\prod\limits_{i=0}^{n-1}\left(2^n-2^i\right)$ C-конструируемых подстановок, $\dfrac{1}{2}\left(2^n-n-1\right)!$ T-конструируемых подстановок. Все три указанных множества являются подгруппами в S_{2^n}.
- В схеме с $n>3$ входами каждый из элементов NCT-библиотеки задаёт чётную подстановку, как следствие и сама обратимая схема также реализует чётную подстановку.
- Для любой заданной подстановки на множестве двоичных векторов длины $n \leqslant 3$ существует реализующая её NCT-схема с n входами.
- Для любой заданной чётной подстановки на множестве двоичных векторов длины $n \geqslant 4$ существует реализующая её NCT-схема с n входами.
- Для любой заданной нечётной подстановки на множестве двоичных векторов длины $n \geqslant 4$ не существует реализующей её NCT-схемы с n входами, однако существует реализующая ее NCT-схема с $(n+1)$ входами (один дополнительный).

Зафиксируем набор библиотек $\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_k$ и построим $(\mathscr{B}_1|\ldots|\mathscr{B}_k)$-*схему*, присоединяя к выходу $\mathscr{B}_i$-схемы входы $\mathscr{B}_{i+1}$-схемы, $i=1,\ldots,k-1$. Входом построенной $(\mathscr{B}_1|\ldots|\mathscr{B}_k)$-схемы есть вход $\mathscr{B}_1$-схемы, а выходом — выход $\mathscr{B}_k$-схемы.

Каждая подстановка из S_{2^n} при $n=1,2,3$ и каждая четная подстановка при $n\geqslant 4$ может быть реализована некоторой (T|C|T|N)-схемой и, следовательно, является NCT-конструируемой [37].

Аналогично, для других семейств обратимых элементов можно установить их функциональную полноту. Пусть $\mathscr{B}$ — библиотека из обратимых логических элементов. Тогда $\mathscr{B}$ универсальна, если для любого n и любой подстановки $\pi \in S_{2^n}$ существует такое q, что некоторая $\mathscr{B}$-схема вычисляет π, используя q линий дополнительной (вспомогательной) памяти. Доказано, что для любой универсальной библиотеки $\mathscr{B}$ и достаточно большого n подстановки из знакопеременной группы A_{2^n} являются $\mathscr{B}$-конструируемыми, а подстановки из S_{2^n} реализуются с помощью не более чем одной дополнительной линии (вспомогательной памяти) [37].

Приведем примеры универсальных библиотек, имеющих прикладное значение для криптографии. Библиотека Тоффоли–подобных обратимых элементов $\sigma : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ для которых координатные функции $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, задаются системой

$$\begin{aligned} y_i &= x_i \oplus f\,(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \\ y_j &= x_j \ \text{ при } j \neq i, \end{aligned}$$

где $\oplus$ — операция сложения по $mod\,2$, а функция $f : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$. В работе [38] доказывается, что при $n > 1$, $k = n - 1$ множество указанных элементов порождает группу S_{2^n}, а при $n \geqslant 4$ и фиксированном $2 \leqslant k \leqslant n - 2$ — группу A_{2^n}.

Другая интересная библиотека состоит из подстановок $\sigma : \mathbb{Z}_2^{2m} \to \mathbb{Z}_2^{2m}$ вида $\sigma(a, b) = (b,\ f(a, b))$, где $a, b \in \mathbb{Z}_2^m$, $f : \mathbb{Z}_2^m \times \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^m$. Для случая $f(a, b) = a \oplus \varphi(b)$, φ — произвольное отображение $\mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^m$, $\oplus$ — операция покоординатного сложения по $mod\,2$. Доказано, что множество указанных подстановок порождает группу $A_{2^{2m}}$ [39].

4.3. **Схемы с дополнительными входами.** Считаем, что схема из обратимых элементов с n значимыми и q дополнительными входами реализует функцию $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$, если подавая на значимые входы значение аргумента функции $\mathbf{x}$, подавая 0 на дополнительные входы, на m значимых выходах мы получаем значение $\mathbf{y}$ (значения, полученные на незначимых выходах, игнорируются). Если в конце работы схемы значение на незначимом выходе не равно входной константе, линия называется *мусорной*, а полученное значение — *вычислительным мусором.* Достаточно часто мусорными считаются все незначимые выходы. В общем, число основных (значимых) входов плюс число дополнительных входов должно равняться числу основных (значимых) выходов плюс число незначимых выходов, включая мусорные, см. рис. 10.

Рис. 10. Входы и выходы обратимой схемы

Чтобы реализовать необратимое отображение с помощью обратимых логических элементов необходимо сделать его обратимым, добавив дополнительные входы на которые подаются константы 0. Для реализации необратимой функции, в которой совпадающие выходные наборы встречаются до M раз, требуется как минимум $\lceil \log_2 M \rceil$ дополнительных линий [40]. В частности, для любого заданного отображения на множестве двоичных векторов длины n существует реализующая её обратимая схема, состоящая из элементов данного семейства и имеющая не более $2n$ входов (n дополнительных).

Поскольку произвольная схема с $n+q$ входами, построенная из обратимых элементов реализует некоторую подстановку на множестве двоичных векторов длины $n+q$, реализация этой схемой функции $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$ может быть математически описана при помощи расширяющего отображения $\varphi_{n,n+q} : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^{n+q}$ вида

$$\varphi_{n,n+q}\left(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\right) = \langle x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0 \rangle$$

и редуцирующего отображения $\psi^{\pi}_{n+q,n} : \mathbb{Z}_2^{n+q} \to \mathbb{Z}_2^n$ вида

$$\psi^{\pi}_{n+q,m}\left(\langle x_1, \ldots, x_{n+q} \rangle\right) \;=\; \langle x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(m)} \rangle,$$

где π — некоторая подстановка на множестве $\mathbb{Z}_{n+q}$.

Тогда обратимая схема с $(n+q) \geqslant m$ входами, задающая подстановку $g : \mathbb{Z}_2^{n+q} \to \mathbb{Z}_2^{n+q}$, реализует отображение $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$ с использованием $q \geqslant 0$ дополнительных входов (дополнительной памяти), если существует такая подстановка $\pi \in \mathbb{Z}_{n+q}$, что

$$\psi^{\pi}_{n+q,m}\left(g\left(\varphi_{n,n+q}(\mathbf{x})\right)\right) \;=\; f(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$, $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}_2^m$.

В основополагающей работе Ч. Беннетта была предложена общая конструкция для обратимого вычисления произвольной (обратимой или необратимой) функции [5]. Конструкция Беннетта схематично представлена на рис. 11. Здесь $\mathbf{f}$ — схема

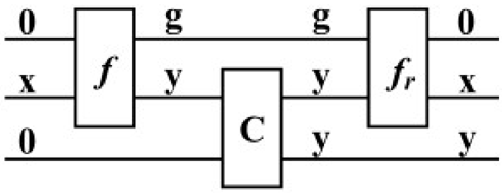


Рис. 11. Конструкция Беннетта

из обратимых элементов, реализующая функцию $f\,:\ \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$ — вход функции, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^m$ — ее выход, $\mathbf{g}$ — вычислительный мусор, $\mathbf{f}_r$ — зеркальная схема. В конструкции используется подсхема копирования C, которая может быть построена из элементов CNOT (рис. 12).

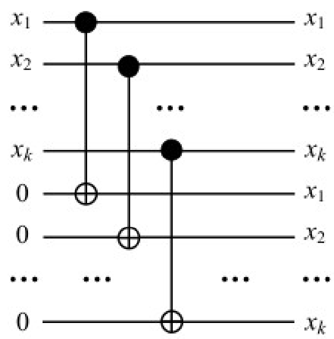


Рис. 12. Схема копирования

В развитие этой идеи Т. Тоффоли [36] была предложена общая конструкция NCT-схемы для вычисления произвольной (обратимой или необратимой) функции (см. ниже п. 5.1).

С помощью любой библиотеки, содержащей универсальный элемент, можно реализовать обратимой схемой любое заданное отображение на множестве двоичных векторов длины n, однако количество необходимых для этого дополнительных входов схемы может кардинально отличаться для различных библиотек: оно может быть либо константным, либо зависящим от количества элементов в схеме. От количества дополнительных входов обратимой схемы зависит и класс отображений на множестве двоичных векторов, реализуемых при помощи заданного семейства обратимых элементов, даже если оно содержит универсальный элемент. К примеру, гейт Фредкина является универсальным, однако при помощи обратимой схемы без дополнительных входов, состоящей только из элементов данного типа, невозможно реализовать отображение, изменяющее вес Хэмминга двоичного вектора (количество единичных координат в нем). Помимо этого от количества дополнительных входов обратимой схемы существенно зависит и её сложность (будет рассмотрено в части II статьи).

5. Обратимые языки программирования

5.1. Обратимые надстройки над функциями. Для обеспечения обратимости при вычислениях используют функции, инъективные по первому аргументу, которые получают из обычных функций, применяя процедуру обратимой надстройки.

Определение. Бинарную функцию $A\times B \xrightarrow{\odot} C$ называют *инъективной по первому аргументу*, если

$$a_1 \odot b = a_2 \odot b \;\Rightarrow\; a_1 = a_2.$$

Пример: $n+3 = m+3 \;\Rightarrow\; n = m$; антипример: $n \times 0 = m \times 0 \;\not\Rightarrow\; n = m$.

Теорема. *Пусть $\odot$ — бинарная функция, инъективная по первому аргументу. Тогда существует функция $C \times B \xrightarrow{\oslash} A$ такая, что*

$$(a \odot b) \oslash b \,=\, a.$$

Неформально говорят, что операция $\oslash$ «обратна» к операции $\odot$. Примеры пар $(\odot, \oslash)$: для чисел — $(+, -)$, при работе с ненулевыми числами — $(\times, \div)$, для булевых векторов — $(\oplus, \oplus)$.

Обратимая надстройка над унарной функцией $f(y)$ есть бинарная функция $g(x, y) \,=\, (\,x \odot f(y),\, y\,)$, такая, что операция $\odot$ обратима по первому аргументу.

$$\begin{array}{lcl} x & \longrightarrow & x \odot f(y) \\ y & \longrightarrow & y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} (x \odot f(y)) \oslash f(y) = x & \longleftarrow & x \odot f(y) \\ y & \longleftarrow & y \end{array}$$

Рис. 13. Схема обратимого вычисления функции $f(y)$

Пример: если $g(x, y) = (x + f(y), y)$, то $g^{-1}(x, y) = (x - f(y), y)$. Пусть $f(y) = \sin y$, x — произвольное, тогда

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (x + \sin y,\, y) \\ g^{-1}(x,y) &= (x - \sin y,\, y) \\ g^{-1}(x + \sin y,\, y) &= (x + \sin y - \sin y,\, y) \,=\, (x,\, y) \end{aligned}$$

Обратимые надстройки существуют у всех функций. Обратная детерминированность программы позволяет проводить вычисления программы в обратном порядке («инверсность»).

Двунаправленные программы называют *линзами* (lens) [41].

5.2. **Язык Janus.** Язык Janus — первый обратимый язык программирования, интерпретатор был построен Т. Йокоямой и Р. Глюком [42]. Преобразователь и интерпретатор Janus свободно доступны[6]. Janus также реализован на языке Prolog.

В языке Janus все функции заменены обратимыми надстройками, в циклах и условиях возвращается информация о пройденном пути («история» Ч. Беннетта), параметры процедур передаются только по ссылке, глобальных переменных нет, при инициализации процедур все переменные и элементы массива обнуляются, а стеки опустошаются.

Janus — императивный язык программирования: исполнение программы состоит в последовательном выполнении команд. Программа *prog* на языке Janus состоит из основной процедуры p_{main}, за которой следует последовательность d_proc^* определений процедур p:

$$prog ::= p_{main}\, d\_proc^*$$

Основная процедура p_{main} не имеет параметров и состоит из указания типов переменных и оператора. Определение процедуры имеет вид

`procedure` <имя>((<тип скаляр/массив><имя>)*)<тело процедуры>.

Имеются следующие типы переменных данных: скаляр (32-разрядное неотрицательное целое), одномерный массив целых $x[c]$ и стек целых. Логические значения суть 'целое ненулевое' = *true*, 'целое нулевое' = *false*. Массивы индексируются целыми числами, начиная с нуля.

Управляющие структуры языка Janus традиционны. Это операторы (*statement*) присваивания (`+=`, `-=`, `^`), обмена двух значений (`<=>`), условный (*if* e_1 *then* s_1 *else* s_2 *fi* e_2) и цикла (*from* e_1 *do* s_1 *until* e_2).

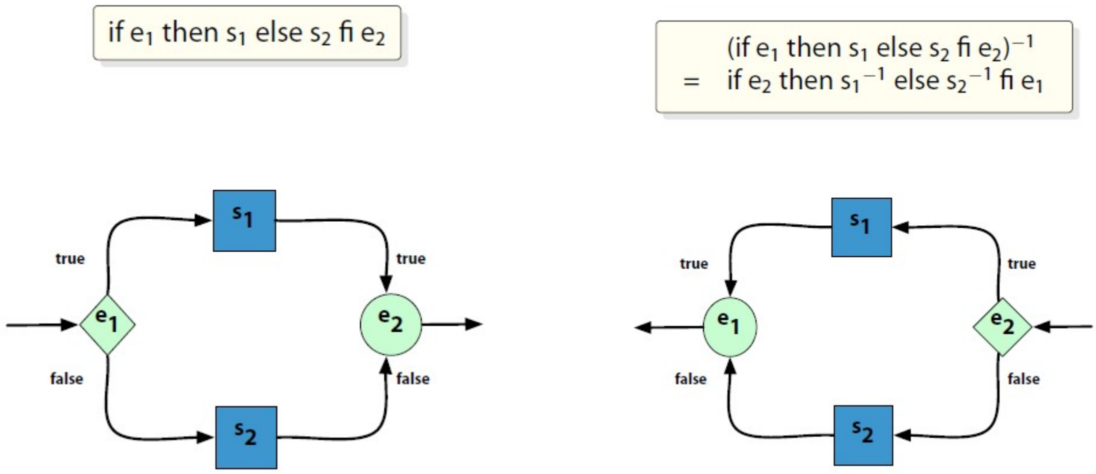
Логика их работы проиллюстрирована на рис. 14 и 15 [41].

В Janus'е также имеются операторы работы со стеком — поместить данное значение в стек извлечь его из стека (*push, pop*), прямого (*call*) и обратного (*uncall*) вызовов процедуры.

Пример: процедура вычисления чисел Фибоначчи [43]. Вычисление n-го числа Фибоначчи в Janus программируется с запоминанием n-го и $(n-1)$-го чисел, что делает неинъективную функцию вычисления чисел инъективной. Программа `fib` состоит только из обратимых операций (`+=`, `-=`) и обратимого условного оператора с критериями входа и выхода.

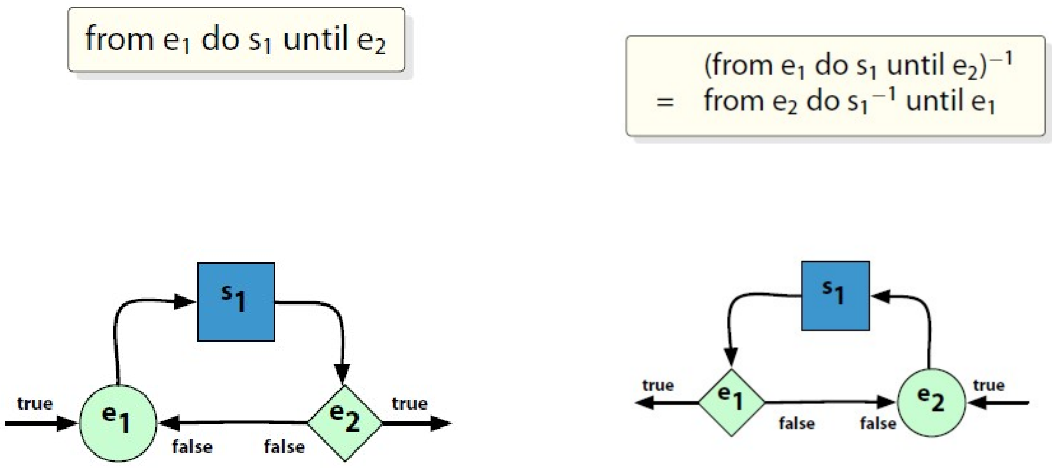
```
procedure fib(int x1, int x2, int n)
  if n=0 then x1 += 1
              x2 += 1
```

[6] http://topps.diku.dk/pirc/janus-playground/



а) б)

Рис. 14. Прямое а) и обратное б) вычисление условия.



а) б)

Рис. 15. Прямое а) и обратное б) вычисление цикла.

```
        else n -= 1
             call fib(x1,x2,n)
             x1 += x2
             x1 <=> x2     // swap
fi x1=x2
```

При прямом вызове процедуры, положив $n = 4$, получим $x1 = 5$, $x2 = 8$, т. е. 5-е и 6-е числа Фибоначчи и $n = 0$:

```
procedure fib_fwd(int x1,int x2,int n)
    n += 4
    call fib(x1,x2,n) // forward execution
```

При обратном вызове процедуры, положив $x1 = 5$, $x2 = 8$, получим $x1 = x2 = 0$ и $n = 4$ — исходные значения парметров:

```
procedure fib_bwd(int x1,int x2,int n)
    x1 += 5
    x2 += 8
    uncall fib(x1,x2,n) // backward execution
```

Известны и другие обратимые языки: логический язык CRL, PsiLisp (Ψ-LISP, Baker (1992)), R (Frank (1999)), Inv (Mu, Hu, and Takeichi (2004)); все ссылки можно найти в [12, 44].

При функциональном программировании каждая процедура должна проектироваться одновременно с процедурой отката.

Обратимое программирование тесно связано с алгебраическим (функциональным). Некоторые результаты по алгебрам программ в связи с обратимыми вычислениями можно найти в работах Н. Н. Непейводы [14].

Список литературы

1. Landauer, R. (1961) Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development.* 5. p. 183–191.

2. Berut, A. et al. (2012) Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics. *Nature.* 483. p. 187–189.

3. Jun, Y. & Gavrilov, M., & Bechhoefer, J. (2014) High-Precision Test of Landauer's Principle in a Feedback Trap. *Phys. Rev. Lett.*. arXiv:1408.5089 (113). p. 71-82.

4. DeBenedictis, E. (2004) Will Moore's Law be Sufficient?. *Proceedings of the 2004 ACM/IEEE Conference on Supercomputing.* 1. p. 45–57.

5. Bennett C. H. (1973) Logical reversibility of computation. *IBM J. Res. Develop.* (17 (6)). p. 525–532.

6. Fredkin, E. & Toffoli, T. (1982) Conservative Logic. *International Journal of Theoretical Physics.* (21(3/4)). p. 632–644.

7. Бобков, С. Г. Высокопроизводительные вычислительные системы. — М.: НИИСИ РАН, 2014. — 296 с.

   Bobkov, S. G. (2014) *High performance computing systems.* Moscow: NIISI RAN.

8. Saeedi, M. & Markov, I. L. Synthesis and Optimization of Reversible Circuits — A Survey // arxiv.org [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/1110.2574, свободный — (01.09.2019)

9. Маймистов, А. И. Обратимые логические элементы — новая область применения оптических солитонов // Квантовая электроника. — М: ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 1995. — Т. 22 (10). — С. 1044–1048.

   Maimistov, A. I. (1995) Reversible logic elements — a new field of application of optical solitons. *Quantum electronics.* 22 (10). p. 1044–1048.

10. Merkle, R. C. (1993) Reversible Electronic Logic Using Switches. *Nanotechnology.* 4. p. 21–40.

11. Lecerf, Y. (1963) Machines de turing réversibles. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 257. p. 2597–2600.

12. Непейвода, Н. Н. & Непейвода, А. Н. Реверсивные вычисления // www.botik.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.botik.ru/cprc/bichkova/seminarICPU/materials/19032012/mat19032012.pdf, свободный — (01.09.2019)

13. Непейвода, Н. Н. Прикладная логика / Непейвода, Н. Н.. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2000. — 521 с.

14. Непейвода, Н. Н. Алгебры как альтернатива численному параллелизму // 2012.nscf.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://2012.nscf.ru/Tesis/Nepeivoda.pdf.

15. Тоффоли, Т., Марголус, Н. Машины клеточных автоматов / Т. Марголус, Тоффоли Н. — М.: Мир, 1991. — 280 с.

    Toffoli, T. & Margolus, N. (1987) *Cellular automata machines: A new environment for modeling.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

16. Richardson, D. (1972) Tesselations with local transformations. *Journal of Computer and System Sciences.* 6. p. 373–388.

17. Amoroso, S. & Patt, Y. N. (1972) Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *J. Comput. System Sci.*. 6 (5). p. 448–464.

18. Sutner, K. (1991) De Bruijn graphs and linear cellular automata. *Complex Systems.* 5 (1). p. 19–30.

19. Sutner, K. Linear Cellular Automata and de Bruijn Automata // Cellular Automata. Mathematics and Its Applications / Delorme M., Mazoyer J. (eds). — Springer, Dordrecht, 1998. — 460. — C. 303–319.

20. Culik, K. (1987) On invertible cellular automata. *Complex Systems.* 1 (6). p. 1035–1044.

21. Hillman, D. (1991) The structure of reversible one-dimensional cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 52 (2–3). p. 277–292.

22. Kari, J. (1990) Reversibility of 2D cellular automata is undecidable. *Physica D.* 45. p. 379–385.

23. Kari, J. (1994) Reversibility and surjectivity problems of cellular automata. *Journal of Computer and System Science.* 48 (1). p. 149–182.

24. Кучеренко, И. В. О разрешимости обратимости клеточных автоматов // Интеллектуальные системы. — М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, кафедра Математической теории интеллектуальных систем, 2004. — Т. 8, № 1–4. — С. 465–482.

25. Кучеренко, И. В. Обратимые клеточные автоматы // Дисс... канд. физ.-мат. наук. — М., 2012. — 147 с.

    Kucherenko, I. V. (2012) *Reversible Cellular Automata. Thesis ... PhD (Phys&Math).* Moscow.

26. Schiff, J. L. (2007) *Cellular automata. A Discrete View of the World.* A John Wiley & Sons Inc., Publication. University of Auckland.

27. Margolus, N. (1984) Physics-like models of computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 10. p. 81–95.

28. Vichniac, G. (1984) Simulating physics with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 10. p. 96–115.

29. Wolfram, S. (1984) Cellular Automata as Models of Complexity. *Nature.* 311. p. 419–424.

30. Kauffman, S. A. (1969) Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *J. Theor. Biol.* 22. p. 437–467.

31. Сухинин, Б. М. Разработка генераторов псевдослучайных двоичных последовательностей на основе клеточных автоматов // НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ: Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. — М.: Национальный Электронно–Информационный Консорциум, 2010. — № 9. — С. 8.

    Sukhinin, B. M. (2010) Development of pseudorandom binary sequence generators based on cellular automata. *SCIENCE AND EDUCATION: Scientific publication of MSTU named after N. E. Bauman.* № 9. p. 8.

32. Durand, B. (1994) Inversion of 2D cellular automata: some complexity results. *Theoretical Computer Science.* 134 (2). p. 387–401.

33. Ключарёв, П. Г. *NP*-трудность задачи о восстановлении предыдущего состояния обобщенного клеточного автомата // НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ: Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. — М.: Национальный Электронно–Информационный Консорциум, 2012. — № 1. — С. 11.

    Klucharev, P. G. (2012) *NP*-difficulty of the problem of restoring the previous state of a generalized cellular automaton. *SCIENCE AND EDUCATION: Scientific publication of MSTU named after N. E. Bauman.* 1. p. 11.

34. Bennett C. H. (1989) Time/space trade-offs for reversible computation. *SIAM J. Comput.* 18 (4). p. 766–776.

35. Bennett, C. H. & Landauer, R. (1985) The Fundamental Physical Limits of Computation. *Scientific American.* July. p. 48–56.

36. Toffoli T. Revercible Computing // Automata, Languages and Programming / de Bakker (ed.). — Springer-Verlag, 1980. — C. 632–644.

37. Shende, V. V. & Prasad, A. K. & Markov, I. L. & Hayes, J. P. (2003) Synthesis of Reversible Logic Circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.* 22 (6). p. 710–722.

38. Coppersmith, D. & Grossman, E. (1975) Generators for certain altemating groups with applications to cryptography. *SIAM J. Appl. Math.* 29 (4). p. 624–627.

39. Even, S. & Goldreich, O. (1983) DES-like functions can generate the alternating group. *IEEE Trans. Inform. Theory.* IT-29 (6). p. 863–865.

40. Маслов, Д. Роль обратимости в компьютерных технологиях будущего // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
http://www.kinnet.ru/cterra/538/33163.html, свободный — (01.09.2019).

Maslov, D. (2004) *The role of reversibility in computer technology of the future.* [Online] Available from:
http://www.kinnet.ru/cterra/538/33163.html. [Accessed: 01.09.2019, free].

41. Foster, J. N. (2010) *Bidirectional programming languages Technical Report MS-CIS-10-08.* Department of Computer & Information Science University of Pennsylvania — March 13.

42. Yokoyama, T. & Gluck, K. (2007) A reversible programming language and its invertible self-interpreter. *Proceedings of the 2007 ACM SIGPLAN symposium on Partial evaluation and semantics-based program manipulation (PEPM '07), ACM, New York, NY, USA.* 1. p. 144–153.

43. Yokoyama, T. (2010) Reversible Computation and Reversible Programming Languages. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* 253 (6). p. 71–81.

44. Kalyan, S. & Perumalla, P. (2014) *Introduction to Reversible Computing.* CRC Press.

УДК: 519.83

MSC2010: 91A35

HYBRID EQUILIBRIUM IN N-PERSON GAMES

© K. N. Kudryavtsev

South Ural State University
76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 45480, Russia
Chelyabinsk State University
129, Bratiev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russia
e-mail: *kudrkn@gmail.com*

© V. I. Zhukovskiy

Lomonosov Moscow State University
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics
1, Leninskiye Gory, Moscow, Russia, 119991,
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© L. V. Zhukovskaya

Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Science
32, Nakhimovsky prospect, Moscow, 117418, Russia
e-mail: *Zhukovskaylv@mail.ru*

Hybrid Equilibrium in N-person Games.

Kudryavtsev K. N., Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V

Abstract. How can we combine altruism of Berge equilibrium with selfishness of Nash equilibrium? The positive answer to this question will be given below. In short, they can be combined but in the class of mixed strategies. For a noncooperative N-player normal form game, we introduce the concept of hybrid equilibrium (HE) by synthesizing the concepts of Nash and Berge equilibria and Pareto maximum. Some properties of this equilibrium are explored and its existence in mixed strategies is established under standard assumptions of mathematical game theory (convex and compact strategy sets and continuous payoff functions).

Keywords: *Berge equilibrium, Nash equilibrium, Pareto optimum, Germeier convolution, noncooperative game*

Introduction

In 1949 twenty-one years old Princeton University postgraduate J.F. Nash suggested and proved the existence of a solution [1, 2], which subsequently became known as Nash equilibrium (NE). Nash equilibrium has been widely used in economics, military science, policy, and sociology. After 45 years, J. Nash together with R. Selten and J. Harsanyi were awarded the Nobel Prize in Economic Sciences “for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games." The whole point is that NE has stability against any unilateral deviations of a single player, which explains its success in economic and political applications.

Almost every issue of modern journals on operations research, systems analysis or game theory contains papers with the concept of Nash equilibrium. However, there are spots on the sun: an obvious drawback of NE consists in pronounced selfishness as each player seeks *to increase his/her/its own payoff only.*

The antipode of NE is the concept of Berge equilibrium (BE): each player applies every effort to maximize the payoffs of the other players, neglecting his/her/its individual interests. BE was formalized in 1985 by V. Zhukovskiy [3] as a possible solution of noncooperative N-player games, after perusal of C. Berge's book *Théorie générale des jeux a n personnes* [4] published in 1957 (which explains the term "Berge equilibrium"). In 1995 Russian mathematician K. Vaisman defended his Candidate of Sciences Dissertation entitled "Berge equilibrium" at Department of Applied Mathematics and Control Processes (St. Petersburg State University) under scientific supervision of Zhukovskiy. This dissertation and Vaisman's early papers [5, 6] attracted the attention of researchers, in Russia and then abroad. As of today, the number of publications related to this equilibrium has exceeded three hundreds. BE is a good mathematical model for the Golden Rule of ethics ("Behave to others as you would like them to behave to you.") [7, 8]. BE is famed for its altruism.

Obviously, these streaks – selfishness and altruism are intrinsic (in some proportion) to any individual, including a conflicting party. However, it seems delusive to expect that such a combined solution exists in pure strategies. Therefore, again following the approach of E. Borel [9], J. von Neumann [10], J. Nash [1] and their scholars, we will establish the existence of combined Nash–Berge equilibrium in mixed strategies. This solution is called hybrid equilibrium (HE). The main goal of this paper is to prove the existence of HE in mixed strategies. Also note a negative property of NE [11] and BE: the sets of both types of equilibria are internally unstable, i.e., there may exist two (NE or BE) profiles such that the payoff of each player in one of them is strictly greater than in the other. We will remove this "negativity" by adding the Pareto maximality of HE with respect to all other equilibria. Well our formalization unites three properties, namely, a HE is first, *a Nash equilibrium*, second, *a Berge equilibrium*, third, *Pareto maximal with respect to the other equilibria.*

This article proves the following result: if a noncooperative N-player normal form game has bounded convex and closed strategy sets of players and also continuous payoff functions, then there exists a HE in mixed strategies in this game.

In addition, we obtain sufficient conditions for the existence of HE that are reduced to saddle point calculation for a special Germeier convolution of payoff functions.

1. Formalization of hybrid equilibrium

Consider a mathematical model of a conflict as a noncooperative N-player normal form game described by an ordered triplet

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle.$$

Here $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ denotes the set of serial numbers (indexes) of players ($N > 1$); each of N players chooses his/her/its *strategy* $x_i \in \mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$, thereby forming a *strategy profile*

$$x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X} = \prod_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^n \ \ (n = \sum_{i\in\mathbf{N}} n_i)$$

in this game; *a payoff function* $f_i(x)$ is defined over the set X, which gives *the payoff* of player i ($i\in\mathbf{N}$). At conceptual level, each player i in the game Γ seeks for choosing a strategy x_i that would *maximize* his/her/its payoff.

A natural approach is the define a solution of the game Γ using a pair

$$(x^*, f(x^*) = \ f_1(x^*), \ldots, f_N(x^*)) \in \mathrm{X} \times \mathbf{R}^N,$$

where the strategies of a profile $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_N = X$ are determined by an optimality principle while the elements of a vector $f(x^*)$ specify the corresponding payoffs of players under these strategies. As noted by N. Vorobiev, the founder of the largest national scientific school on game theory, "...the practice of games shows that all the optimality principles developed so far directly or indirectly reflect the idea of a stable strategy profile that satisfies these principles..." [12, p. 94]. For introducing the concept of hybrid equilibrium, we will adopt three optimality principles, namely, Nash equilibrium, Berge equilibrium (from theory of noncooperative games) and Pareto maximum (PM, from theory of multicriteria choice problems). Interestingly, each of these principles has its own *type of stability*: NE is stable against the unilateral deviations of any player i (i.e., the deviations of x_i from x_i^*); BE is stable against the deviations of all players except given player i subject to the payoff function $f_i(x)$ (i.e., the deviations of $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ from $(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_N^*)$); PM is stable against the deviations of all players (i.e., the deviation of the whole current profile x from the optimal solution x^*). Using the standard notation $(x\|z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ of noncooperative games, we proceed with the following notions.

Definition 1. A strategy profile $x^e = (x_1^e, \dots, x_i^e, \dots, x_N^e) \in \mathrm{X}$ is called a Nash equilibrium in the game Γ if

$$\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i(x^e \| x_i) = f_i(x^e) \ \ (i \in \mathbf{N}). \tag{1}$$

Definition 2. A strategy profile $x^B = (x_1^B, \dots, x_i^B, \dots, x_N^B) \in \mathrm{X}$ is called a Berge equilibrium in the game Γ if

$$\max_{x \in \mathrm{X}} f_i(x \| x_i^B) = f_i(x^B) \ \ (i \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

Let us associate the game Γ with the N-criteria choice problem

$$\Gamma_v = \langle\, \mathrm{X},\ f(x)\,\rangle,$$

where the set of alternatives X coincides with the set of strategy profiles X in the game Γ and the vector criterion has the form $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$, consisting of the payoff functions $f_i(x)$ of all players $i \in \mathbf{N}$ in the game Γ.

Definition 3. An alternative (here a strategy profile $x \in \mathrm{X}$) is Slater (Pareto) maximal in the problem Γ_v if, for all $x \in \mathrm{X}$, the system of inequalities

$$f_i(x) > f_i(x^*) \quad (i \in \mathbf{N})$$

$(f_i(x) \geq f_i(x^P)\ (i \in \mathbf{N})$, respectively), with at least one strict inequality, is inconsistent.

Corollary 1. *It is possible to suggest the following sufficient condition of Pareto maximality: if*

$$\max_{x \in \mathrm{X}} \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i(x) = \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i(x^*) \quad \forall x \in \mathrm{X}, \tag{3}$$

then the strategy profile x^* is Pareto maximal in the problem Γ_v.

Now, we introduce the central concept of this paper.

Definition 4. A pair $(x^*, f(x^*)) \in \mathrm{X} \times \mathbf{R}^N$ is called a Pareto hybrid equilibrium (PHE) in the game Γ if the strategy profile x^* is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in this game and also a Pareto maximal alternative in the multicriteria choice problem Γ_v, i.e., the PHE x^* satisfies three conditions as follows:

$$\begin{aligned} &\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i(x^* \| x_i) = f_i(x^*) \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ &\max_{x \in \mathrm{X}} f_i(x \| x_i^*) = f_i(x^*) \ \ (i \in \mathbf{N}), \end{aligned} \tag{4}$$

x^* is Pareto maximal in Γ_v.

Remark 1. In accordance with Corollary 1, a strategy profile x^* is a PHE in the game Γ if it simultaneously satisfies the three optimality conditions (1)–(3).

Remark 2. By analogy with Definition 4, we may easily introduce the concept of Slater hybrid equilibrium (SHE), just replacing the Pareto maximality of x^* with its Slater maximality in the problem Γ_v.

2. Properties of hybrid equilibria

Hereinafter, the notation $\operatorname{cocomp}\mathbf{R}^n$ is used for the set of convex and compact subsets from space $\mathbf{R}^n$ while $\varphi(\cdot) \in C(\mathrm{X})$ for a continuous scalar function $\varphi(x)$ defined over X.

In this section, let the game Γ satisfy the assumptions

$$\mathrm{X}_i \in \operatorname{cocomp}\mathbf{R}^{n_i}, \quad f_i(\cdot) \in C(\mathrm{X}) \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

Property 1. *Under conditions (5), any PHE in the game* Γ *is simultaneously a SHE; the set of all SHE is compact in* $\mathrm{X} \times \mathbf{R}^N$ *(perhaps, empty).*

Property 1 directly follows from the fact that a Pareto maximal alternative in the choice problem Γ_v is also Slater maximal (in general, the converse fails) while the set of Slater maximal alternatives X^S in Γ_v is a nonempty compact set in X [13, p. 142].

The sets of Nash and Berge equilibria, X^e and X^B, in the game Γ are also compact in X (perhaps, empty) if assumptions (5) hold. In this case, the intersection of the three compact sets $(\mathrm{X}^S \bigcap \mathrm{X}^e \bigcap \mathrm{X}^B) = \mathrm{X}^*$ is also a compact set in X (again, can be empty). The compactness of $f(\mathrm{X}^*) = \{f(x) | x \in \mathrm{X}^*\}$ is immediate from the continuity of the payoff functions $f_i(x)$ over X $(i \in \mathbf{N})$.

Note that the set of PHE can be noncompact, generally speaking, due to the noncompactness of the set of all Pareto maximal alternatives X^P in the choice problem Γ_v. Also keep in mind the inclusion $f(\mathrm{X}^P) \subseteq f(\mathrm{X}^S)$.

Property 2. *Under assumptions (5), the PHE* x^* *satisfies the individual rationality condition, i.e.,*

$$\begin{aligned} f_i(x^*) \geq \max_{x_i \in \mathrm{X}_i} \min_{x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}} \in \mathrm{X}_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}} f_i(x_i, x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}) = \\ = \min_{x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}} \in \mathrm{X}_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}} f_i(x_i^0, x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}) = f_i^0 \quad (i \in \mathbf{N}), \end{aligned} \tag{6}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) = (x_i, x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}})$, $x_{\mathbf{N}\setminus\{i\}} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ *and* $\mathrm{X}_{\mathbf{N}\setminus\{i\}} = \prod_{j \in \mathbf{N}\setminus\{i\}} \mathrm{X}_j$ $(\mathbf{N}\setminus\{i\} = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N)$.

Really, each Nash equilibrium x^* in the game Γ has property 2 (individual rationality), i.e., $f_i(x^*) \geq f_i^0$ $(i \in \mathbf{N})$, where x_i^0 and f_i^0 are the maximin strategy and payoff of player i, respectively.

Remark 3. As illustrated by Vaisman's counter-example [14, pp. 68–69], individual rationality generally fails for a Berge equilibrium x^B in the game Γ.

Property 3. *A PHE x^* is collectively rational in a cooperative N-player game without side payments, which appears from the Pareto maximality of the alternative x^* in the choice problem Γ_v.*

Remark 4. Individual rationality applies certain requirements to alliances (coalitions) with other players: player i joins a coalition only if his/her/its payoff becomes not smaller than the maximin value f_i^0, which can be achieved by this player independently using the maximin strategy x_i^0.

Collective rationality drives all players to the largest payoffs (in the vector sense!) – the Pareto maximums.

As x^* is a Nash equilibrium, each player seeks to maximize his/her/its payoff.

Berge equilibrium matches an altruistic aspiration of each player for the maximal payoffs of all other players.

Actually, the first two requirements (individual and collective rationality) are among the standard criteria of "good" solutions for cooperative N-player games without side payments. At the same time, Nash and Berge equilibria are new properties for such games, which (we believe) makes the novel concept of PHE an efficient solution for the game Γ.

3. Sufficient conditions

To formulate sufficient conditions for the existence of PHE in the game Γ, we will ensure Pareto maximality in terms of Definition 3 by satisfying equality (3). The sufficient conditions will be based on the original approach from [15]. Introduce an N-dimensional vector $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathrm{X}$ and the Germeier convolution [16] of the form

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x, z) = f_i(z \| x_i) - f_i(z) \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ &\varphi_{i+N}(x, z) = f_i(x \| z_i) - f_i(z) \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ &\varphi_{2N+1}(x, z) = \textstyle\sum_{j \in \mathbf{N}} f_j(x) - \sum_{j \in \mathbf{N}} f_j(z), \\ &\psi(x, z) = \max_{r=1,\dots,2N+1} \varphi_r(x, z). \end{aligned} \tag{7}$$

A saddle point $(x^0, z^*) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ of the scalar function $\psi(x, z)$ (7) is given by the chain of inequalities

$$\psi(x, z^*) \le \psi(x^0, z^*) \le \psi(x^0, z) \ \ \forall x \in \mathrm{X}, z \in \mathrm{X}. \tag{8}$$

Theorem 1. *If (x^0, z^*) is a saddle point of the function $\varphi(x, y)$ (8) in the zero-sum two-player game*

$$\Gamma_a = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Z} = \mathrm{X}, \psi(x, z) \rangle,$$

then the maximin strategy $z^* \in \mathrm{X}$ is a PHE of the game Γ.

Proof. Really, formula (7) with $z = x^0$ gives $\psi(x^0, x^0) = 0$. Then, by transitivity,

$$\psi(x, z^*) \leq 0 \ \ \forall x \in \mathrm{X}.$$

Using $\max\limits_{r=1,\dots,2N+1} \varphi_r(x, z^*) \leq 0 \ \forall x \in \mathrm{X}$ and (7), we arrive at $2N+1$ inequalities of the form

$$\begin{array}{l} f_i(z^* \| x_i) \leq f_i(z^*) \ \ \forall x_i \in \mathrm{X}_i \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ f_i(x \| z_i^*) \leq f_i(z^*) \ \ \forall x \in \mathrm{X} \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ \sum\limits_{j \in \mathbf{N}} f_j(x) \leq \sum\limits_{j \in \mathbf{N}} f_j(z^*) \ \ \forall x \in \mathrm{X}. \end{array}$$

Here the first N inequalities make $z^* \in \mathrm{X}$ a Nash equilibrium in the game Γ (see (1)); the second group of inequalities ensures that z^* is a Berge equilibrium as dictated by (2); finally, the last $(2N+1)$th inequality means that z^* is a Pareto maximal alternative in the choice problem Γ_v. □

Remark 5. In accordance with Theorem 1, PHE design is reduced to calculation of a saddle point (x^0, z^*) for the Germeier convolution $\psi(x, z)$ (7). Thus, we have developed *a constructive method* of PHE design in the game Γ, which includes the following steps:

first, define the scalar function $\psi(x, z)$ using formulas (7);

second, find a saddle point (x^0, z^*) of the function $\psi(x, z)$ (see the chain of inequalities (8));

third, calculate the values $f_i(z^*)$ $(i \in \mathbf{N})$.

Then the pair $(z^*, f(z^*) = (f_1(z^*), \dots, f_N(z^*)))$ is a PHE in the game Γ: each player $i \in \mathbf{N}$ should apply his/her/its strategy from the profile z^*, thereby obtaining the payoff $f_i(z^*)$.

Remark 6. The whole complexity of PHE design in the game Γ lies in calculation of the saddle point (x^0, z^*) for the Germeier convolution (7). The fact is that maximization of a finite number of functions $\varphi_r(x, z)$ $(r = 1, \dots, 2N+1)$ spoils the differentiability and concavity (or convexity) of $\varphi_r(x, z)$, although preserving the continuity of this function over the product $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$ of the compact sets X and Z, see [17, p. 54]. Here we face a situation well described by C. Hermite: "I turn with terror and horror from this lamentable scourge of continuous functions with no derivatives". So it is necessary to develop numerical calculation methods for the saddle point (x^0, z^*) of the Germeier convolution $\max\limits_{r=1,\dots,2N+1} \varphi_r(x, z)$. Unfortunately, no literature has been found in this field of research to date. In particular, the saddle point calculation problem was not solved at the International Conference on Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017, St. Petersburg, May 22–27, 2017) dedicated to the Memory of Professor V. Demyanov.

4. Existence of Pareto hybrid equilibrium in mixed strategies

One must be a reckless optimist for considering the game Γ (especially an explicit form of the payoff function) with PHE in pure strategies $x_i^* \in \mathrm{X}_i$ $(i \in \mathbf{N})$ (by Definition 4, the desired strategy profile x^* is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium in the game Γ and also a Pareto maximal alternative in the corresponding choice problem). Thus, employing the approach of E. Borel [9], J. von Neumann [10], J. Nash [1] and their followers, we will extend the set X_i of pure strategies x_i to the mixed ones. Then we will establish the existence of appropriately formalized mixed strategy profiles in the game Γ that satisfy the three requirements of hybrid equilibrium.

As before, $\operatorname{cocomp}\mathbf{R}^{n_i}$ stands for the set of all convex and compact (closed and bounded) subsets of the Euclidean n_i-dimensional space $\mathbf{R}^{n_i}$ while $f_i(\cdot) \in C(\mathrm{X})$ means that a scalar function $f_i(x)$ is continuous over X.

Again consider the noncooperative N-player game Γ without side payments. Without special mention, assume the elements of the ordered triplet Γ satisfy requirements (5), i.e.,

$$\mathrm{X}_i \in \operatorname{cocomp}\mathbf{R}^{n_i}, \quad f_i(\cdot) \in C(\mathrm{X}) \quad (i \in \mathbf{N}).$$

For each compact set $\mathrm{X}_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbf{N})$, construct the Borel σ-algebra $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$, i.e., the set of all subsets of X_i such that $\mathrm{X}_i \in \mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$, and $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ is closed with respect to the complement and union of a countable number of sets from $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$; in addition, $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ is the minimal σ-algebra that contains all closed subsets of the compact set X_i.

Therefore, construct the Borel σ-algebra $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ for each compact set X_i $(i \in \mathbf{N})$ and the Borel σ-algebra $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ for the set $\mathrm{X} = \prod\limits_{i \in \mathbf{N}} \mathrm{X}_i$ of all strategy profiles, assuming that $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ contains all Cartesian products of the elements from the Borel σ-algebras $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ $(i \in \mathbf{N})$.

Within the framework of mathematical game theory, *a mixed strategy* $\nu_i(\cdot)$ of player i is identified with *a probability measure over the compact set* X_i. By definition [18, p. 271], in the notations of [19, p. 284] a probability measure is a *nonnegative* scalar function $\nu_i(\cdot)$ defined on the Borel σ-algebra $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ of all subsets of the compact set $\mathrm{X}_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ that satisfies two conditions as follows:

(1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ for any sequence $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ of pairwise disjoint elements from $\mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ (*countable additivity*);

(2) $\nu_i(\mathrm{X}_i) = 1$ (*normalization*), which implies $\nu_i\left(Q^{(i)}\right) \leq 1$ for all $Q^{(i)} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$.

Designate as $\{\nu_i\}$ the set of all mixed strategies of player i $(i \in \mathbf{N})$.

Also note that the product measures $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_N(dx_N)$, treated in the sense of the well-known definitions of [18, p. 370] (and the notations of [19, p. 123]), are probability measures over the strategy profile set X. Let $\{\nu\}$ be the set of such probability measures (strategy profiles). Once again, we emphasize that in the design of the product measure $\nu(dx)$ the role of the σ-algebra of all subsets of the set $\mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_N = \mathrm{X}$ is played by the *smallest* σ-algebra $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ that contains all Cartesian products $Q^{(1)} \times \ldots \times Q^{(N)}$, where $Q^{(i)} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}_i)$ $(i \in \mathbf{N})$. The well-known properties of probability measures [20, p. 288], [18, p. 254] imply that the sets of all possible measures $\nu_i(dx_i)$ $(i \in \mathbf{N})$ and $\nu(dx)$ are *weakly closed and weakly self-compact* (see [18, pp. 212, 254], and [21, pp. 48, 49]). As applied, e.g., to $\{\nu\}$, this means that from any infinite sequence $\{\nu^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ it is possible to extract a subsequence $\{\nu^{(k_j)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ with *a weak convergence* to a measure $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. In other words, for any scalar function $\psi(x)$ that is continuous over X, we have

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathrm{X}} \psi(x)\nu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_{\mathrm{X}} \psi(x)\nu^{(0)}(dx)$$

and $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. Owing to the continuity of $\psi(x)$, the integrals $\int\limits_{\mathrm{X}} \psi(x)\nu(dx)$ (the expectations) are well-defined; by Fubini's theorem,

$$\int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\nu(dx) = \int\limits_{\mathrm{X}_1} \ldots \int\limits_{\mathrm{X}_N} \varphi(x)\nu_N(dx_N)\ldots\nu_1(dx_1),$$

and the order of integration can be interchanged.

Let us associate the game Γ in pure strategies with *its mixed extension*

$$\widetilde{\Gamma} = \langle \mathbf{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i[\nu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f[x]\nu(dx)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle, \tag{9}$$

where, like in Γ, the set $\mathbf{N}$ consists of all serial numbers (indexes) of players while $\{\nu_i\}$ is the set of mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ of player i; in game (9), each conflicting party $i \in \mathbf{N}$ chooses its mixed strategy $\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$, thereby forming a mixed strategy profile $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; the payoff function of each player i, i.e., the expectation

$$f_i[\nu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i[x]\nu(dx),$$

is defined over the set $\{\nu\}$.

For game (9), the notion of a PHE x^* (see Definition 4) has the following analog.

Definition 5. A mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is called a hybrid equilibrium (HE) in the mixed extension (9) (equivalently, a hybrid equilibrium in mixed strategies in the game Γ) if first, the profile $\nu^*(\cdot)$ is a Nash equilibrium in the game $\widetilde{\Gamma}$, i.e.,

$$\max_{\nu_i(\cdot)\in\{\nu_i\}} f_i(\nu^*\|\nu_i) = f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbf{N}); \tag{10}$$

second, $\nu^*(\cdot)$ is a Berge equilibrium in game (9), i.e.,

$$\max_{\nu_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}(\cdot)\in\{\nu_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}\}} f_i(\nu\|\nu_i^*) = f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbf{N}); \tag{11}$$

and third, $\nu^*(\cdot)$ is a Pareto maximal alternative in the N-criteria choice problem

$$\widetilde{\Gamma}_v = \langle\{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle,$$

i.e., for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, the system of inequalities

$$f_i(\nu) \geq f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbf{N}),$$

with at least one strict inequality, is inconsistent.

Here and in the sequel,

$$\nu_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}(dx_{\mathbf{N}\setminus\{i\}}) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_{i+1}(dx_{i+1})\ldots\nu_N(dx_N),$$
$$(\nu\|\nu_i^*) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_i^*(dx_i)\nu_{i+1}(dx_{i+1})\ldots\nu_N(dx_N),$$
$$\nu^*(dx) = \nu_1^*(dx_1)\ldots\nu_N^*(dx_N);$$

in addition, denote by $\{\nu^*\}$ the set of hybrid equilibria $\nu^*(\cdot)$, i.e., the strategy profiles that satisfy the three requirements of Definition 5.

Consider several results used below for proving the existence of HE in mixed strategies. The following sufficient condition of Pareto maximality is obvious, see the statement below.

Proposition 1. A mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is a Pareto maximal alternative in the choice problem $\Gamma_v = \langle\{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle$ if

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} \sum_{i\in\mathbf{N}} f_i(\nu) = \sum_{i\in\mathbf{N}} f_i(\nu^*). \tag{12}$$

Proposition 2. Consider the game Γ under conditions (5), i.e., the sets X_i are convex and compact while the payoff functions $f_i(x)$ are continuous over $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_N$. Let

$\{\nu^e\}$ be the set of Nash equilibria $\nu^e(\cdot)$ that satisfy (10) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^e(\cdot)$;

$\{\nu^B\}$ be the set of Berge equilibria $\nu^B(\cdot)$ that satisfy (11) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^B(\cdot)$;

$\{\nu^P\}$ be the set of alternatives $\nu^P(\cdot)$ that satisfy (12) with $\nu^*(\cdot)$ replaced by $\nu^P(\cdot)$ (i.e., ν^P is a Pareto maximal alternative in mixed strategies in the N-criteria choice problem $\langle\{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle$).

Then the set $\{\nu^*\}$ of hybrid equilibria $\nu^*(\cdot)$ in the mixed extension $\widetilde{\Gamma}$ of the game Γ is a weakly compact-in-itself subset of the set of mixed strategy profiles $\{\nu\}$ in the game Γ (although, $\{\nu^*\}$ can be empty).

Proof. Under conditions (5), we have $\{\nu^e\} \neq \varnothing$ in accordance with the Gliksberg theorem [22]. Next, the fact $\{\nu^B\} \neq \varnothing$ has been established in the preceding sections of our book. The non-emptiness of the set of Pareto maximal alternatives, $\{\nu^P\} \neq \varnothing$, can be demonstrated by analogy. The intersection of a finite number of weakly compact sets (in our case, three ones) is also weakly compact, perhaps empty. □

Corollary 2. *Under conditions (5), the set*

$$f(\{\nu^*\}) = \bigcup_{\nu(\cdot)\in\{\nu^*\}} f(\nu), f = (f_1, \ldots, f_N),$$

is compact (bounded and closed) in the N-dimensional Euclidean criterion space $\mathbf{R}^N$.

Theorem 2 below proves the implication (5) $\Rightarrow \{\nu^*\} \neq \varnothing$, which is the central result of this article.

Proposition 3. Consider game (9) under conditions (5). Then the function $\varphi_r(x, z)$ from

$$\psi(x, z) = \max_{r=1,\ldots,2N,2N+1} \varphi_r(x, z) \tag{13}$$

satisfies the inequality

$$\begin{aligned} &\max_{r=1,\ldots,2N,2N+1} \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu(dz) \leq \\ &\leq \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \max_{r=1,\ldots,2N,2N+1} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu(dz) \end{aligned} \tag{14}$$

for any $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, where

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x, z) = f_i(x\|z_i) - f_i(z) \ \ (i \in \mathbf{N}), \\ &\varphi_j(x, z) = f_j(z\|x_i) - f_j(z) \ \ (j \in \{N+1, \ldots, 2N\}), \\ &\varphi_{2N+1}(x, z) = \sum_{i\in\mathbf{N}} [f_i(x) - f_i(z)]. \end{aligned} \tag{15}$$

This proposition was argued in [11].

Remark 7. In fact, formula (14) generalizes the well-known property of maximization: the maximum of a sum does not exceed the sum of the maximums.

Now, proceed with an interesting fact from operations research, which will be vital for proving Theorem 2. Consider $(2N + 1)$ scalar functions $\varphi_r(x, z)$ $(r = 1, \ldots, 2N, 2N + 1)$, where $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathrm{Z} = \mathrm{X}$ and $\varphi_j(x, z)$ $(j = = 1, \ldots, 2N + 1)$ are defined by (15).

Proposition 4. If $(2N+1)$ scalar functions $\varphi_j(x,z)$ $(j=1,\ldots,2N+1)$ are continuous over the product $\mathrm{X}\times(\mathrm{Z}=\mathrm{X})$ of compact sets, then the function

$$\psi(x,z)=\max_{j=1,\ldots,2N+1}\varphi_j(x,z)$$

is also continuous over $\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$.

The proof of a more general result can be found in many textbooks on operations research, e.g., [17] and [23].

Finally, let us establish the central result of this article – the existence of a hybrid equilibrium (HE) in mixed strategies under conditions (5).

Theorem 2. *If in the game* Γ *the sets* $\mathrm{X}_i\in\operatorname{cocomp}\mathbf{R}^{n_i}$ *and* $f_i(\cdot)\in C(\mathrm{X})$ $(i\in\mathbf{N})$, *then there exists a hybrid equilibrium in mixed strategies in this game.*

Proof. Consider an auxiliary zero-sum two-player game

$$\Gamma^a=\langle\{1,2\},\{\mathrm{X},\mathrm{Z}=\mathrm{X}\},\psi(x,z)\rangle.$$

In the game Γ^a, the set X of strategies x chosen by player 1 (which seeks to maximize $\psi(x,z)$) coincides with the set of strategy profiles of the game Γ; the set Z of strategies z chosen by player 2 (which seeks to minimize $\psi(x,z)$) coincides with the same set X. A solution of the game Γ^a is *a saddle point* $(x^0,z^B)\in\mathrm{X}\times\mathrm{X}$; for all $x\in\mathrm{X}$ and each $z\in\mathrm{X}$, it satisfies the chain of inequalities

$$\psi(x,z^B)\leq\psi(x^0,z^B)\leq\psi(x^0,z).$$

Now, associate the game Γ^a with its mixed extension

$$\widetilde{\Gamma}^a=\langle\{1,2\},\{\mu\},\{\nu\},\psi(\mu,\nu)\rangle,$$

where $\{\nu\}$ and $\{\mu\}=\{\nu\}$ denote the sets of mixed strategies $\nu(\cdot)$ and $\mu(\cdot)$ of players 1 and 2, respectively. The payoff function of player 1 is the expectation

$$\psi(\mu,\nu)=\int\limits_{X\times X}\psi(x,z)\mu(dx)\nu(dz).$$

The solution of the game $\widetilde{\Gamma}^a$ (the mixed extension of the game Γ^a) is also *a saddle point* (μ^0,ν^*) defined by the two sequential inequalities

$$\psi(\mu,\nu^*)\leq\psi(\mu^0,\nu^*)\leq\psi(\mu^0,\nu) \tag{16}$$

for any $\nu(\cdot)\in\{\nu\}$ and $\mu(\cdot)\in\{\nu\}$.

Sometimes, this pair (μ^0,ν^*) is called *the solution of the game* Γ^a *in mixed strategies.*

In 1952, I. Gliksberg [22] established the existence theorem of a mixed strategy Nash equilibrium for a noncooperative game of $N \geq 2$ players. Applying this theorem to the zero-sum two-player game Γ^a as a special case, we obtain the following result. In the game Γ^a, let the set $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^n$ be nonempty, convex and compact while the payoff function $\psi(x, z)$ of player 1 be continuous over $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ (note that the continuity of $\psi(x, z)$ is assumed in Proposition 4). Then the game Γ^a has a solution (μ^0, ν^*) defined by (16), i.e., there exists a saddle point in mixed strategies in this game.

Taking into account (13), inequalities (16) can be written as

$$\begin{gathered}\int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leq \\ \leq \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu^0(dx)\nu^*(dz) \leq \\ \leq \int\limits_{X\times X} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu^0(dx)\nu(dz)\end{gathered} \tag{17}$$

for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Using the measure $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbf{N})$ (and hence $\nu(dz) = \mu^0(dx)$) in the expression

$$\psi(\mu^0, \nu) = \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu^0(dx)\nu(dz),$$

we obtain $\psi(\mu^0, \mu^0) = 0$ on the strength of (13). Similarly, $\psi(\nu^*, \nu^*) = 0$, and then it appears from (16) that

$$\psi(\mu^0, \nu^*) = 0.$$

The condition $\psi(\mu^0, \mu^0) = 0$ and the chain of inequalities (16) by transitivity give

$$\psi(\mu, \nu^*) = \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leq 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

In accordance with Proposition 3, then we have

$$\begin{gathered}0 \geq \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \geq \\ \geq \max_{j=1,\dots,2N,2N+1} \int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz).\end{gathered}$$

Therefore, for all $j = 1, \dots, 2N, 2N+1$,

$$\int\limits_{\mathrm{X}\times\mathrm{X}} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leq 0 \;\; \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}. \tag{18}$$

Consider three cases as follows.

Case I $(j = N, \dots, 2N)$. Here, by (18), (15) and the normalization of $\mu(\cdot)$, we arrive at

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \varphi_{N+i}(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz) = \int\limits_{X\times X} [f_i(z\|x_i) - f_i(z)]\mu^0(dx)\nu(dz) =$$
$$= \int\limits_{X\times X} f_i(z\|x_i)\mu^0(dx)\nu(dz) - \int\limits_X f_i(z)\mu^0(dx)\int\limits_X \nu(dz) =$$
$$= f_i(\mu^0\|\nu_i) - f_i(\mu^0) \;\; \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\} \;\; (i \in \mathbf{N}).$$

By (10), $\mu^0(\cdot)$ is a Nash equilibrium in the game $\widetilde{\Gamma}$ (equivalently, a Nash equilibrium in mixed strategies in the game Γ).

Case II ($j = 1, \ldots, N$). Again, using (18), (15) and the normalization of $\nu(\cdot)$,

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{X\times X} [f_i(x\|z_i) - f_i(z)]\mu(dx)\nu^*(dz) =$$
$$= \int\limits_{X\times X_i} f_i(x\|z_i)\mu(dx)\nu_i^*(dz) - \int\limits_X f_i(z)\mu(dz)\int\limits_X \nu^*(dz) =$$
$$= f_i(\mu\|\nu_i^*) - f_i(\nu^*) \;\; \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\} \;\; (i \in \mathbf{N}).$$

On the strength of (11), the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is a Berge equilibrium in the game Γ by Definition 5.

Case III ($j = 2N + 1$). Again, using (18), (15) and the normalization of $\nu(\cdot)$ and $\mu(\cdot)$, we have

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \left[\sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(x) - \sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(z)\right] \mu(dx)\nu^*(dz) =$$
$$= \int\limits_X \sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(x)\mu(dx) \int_X \nu^*(dz) - \int\limits_X \mu(dx) \int\limits_X \sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(z)\nu^*(dz) =$$
$$= \sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(\mu) - \sum\nolimits_{r\in\mathbf{N}} f_r(\nu^*) \;\; \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

In accordance with Proposition 1 and (12), the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ of the game Γ is a Pareto maximal alternative in the multicriteria choice problem

$$\widetilde{\Gamma}_v = \langle \{\nu\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbf{N}} \rangle.$$

Thus, we have proved that the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ in the game Γ is simultaneously a Nash equilibrium and a Berge equilibrium that satisfies Pareto maximality. Hence, by Definition 5, the mixed strategy profile $\nu^*(\cdot)$ is a hybrid equilibrium in the game Γ. □

Remark 8. Note that a bimatrix games do not satisfy the conditions of Theorem 2.

Conclusion

In this work, we propose a new concept of equilibrium. It combines the concepts of Nash and Berge equilibria and Pareto maximum. In the future, we hope to develop constructive methods for constructing this equilibrium.

References

1. NASH, J.F. (1951) Non-Cooperative Games. *Annals of mathematics.* 54. p. 286–295.

2. NASH, J.F. (1950) Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of the national academy of sciences.* 36 (1). p. 48–49.

3. ZHUKOVSKIY, V.I. (1985) Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Methods in Operations Research.* Institute of Mathematics with Union of Bulgarian Mathematicians: Rousse. p. 103–195.

4. BERGE, C. (1957) *Théorie générale des jeux á n personnes games.* Paris: Gauthier Villars.

5. VAISMAN, K.S. (1994) The Berge Equilibrium for Linear–Quadratic Differential Game. *The 3-rd Intern. Workshop on Multiple Criteria Problems under Uncertainty.* Orekhovo-Zuevo, Russia. p. 96.

6. VAISMAN, K.S. & ZHUKOVSKIY, V.I. (1994) The Berge Equilibrium under Uncertainty. *The 3-rd Intern. Workshop on Multiple Criteria Problems under Uncertainty.* Orekhovo-Zuevo, Russia. p. 97–98.

7. ZHUKOVSKIY, V.I. & KUDRYAVTSEV, K.N. (2017) Mathematical Foundations of the Golden Rule. I. Static Case. *Automation and Remote Control.* 78 (10). p. 1920–1940.

8. ZHUKOVSKIY, V.I., SMIRNOVA, L.V. & GORBATOV, A.S. (2018) Mathematical Foundations of the Golden Rule. II. Dynamic Case. *Automation and Remote Control.* 79 (10). p. 1929–1952.

9. BOREL, E. (1924) Sur les jeux an interviennent l'hasard et l'abilité des joueurs. *Théorie des probabilite's.* Paris. p. 204–224.

10. VON NEUMANN, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Mathematische annalen.* 100 (1). p. 295–320.

11. ZHUKOVSKIY, V.I. (2011) *Risks in Conflict Situations.* Moscow: URSS.

12. VOROBIEV, N.N. (1984) *Fundamentals of Game Theory. Noncooperative Games.* Moscow: Nauka.

13. PODINOVSKII, V.V. and NOGHIN, V.D. (2007) *Pareto Optimal Solutions of Multicriteria Problems.* Moscow: Fizmatlit.

14. ZHUKOVSKIY, V.I. (2010) *Introduction to Differential Games under Uncertainty. Berge–Vaisman Equilibrium.* Moscow: URSS.
15. ZHUKOVSKIY, V.I. & KUDRYAVTSEV, K.N. (2016) Pareto-Optimal Nash Equilibrium: Sufficient Conditions and Existence in Mixed Strategies. *Automation and Remote Control.* 77 (8). p. 1500–1510.
16. GERMEIER, Yu.B. (1971) *Introduction to Operations Research.* Moscow: Nauka.
17. MOROZOV, V.V., SUKHAREV, A.G. and FEDOROV, V.V. (1986) *Operations Research in Problems and Exercises.* Moscow: Vysshaya Shkola.
18. LYUSTERNIK, L.A. and SOBOLEV, V.I. (1969) *Elements of Functional Analysis.* Moscow: Nauka.
19. KRASOVSKII, N.N. and SUBBOTIN, A.I. (1985) *Positional Differential Games.* Moscow: Nauka.
20. DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T. (1958) *Linear Operators.* New York: Interscience.
21. HILLE, E. and PHILLIPS, R.S. (1996) *Functional Analysis and Semi-Groups.* Vol. 31. American Mathematical Soc..
22. GLICKSBERG, I.L. (1952) A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 3 (1). p. 170–174.
23. DMITRUK, A.V. (2012) *Convex Analysis. An Elementary Introductory Course.* Moscow: Makspress.

УДК: 517.28, 517.984.46, 517.91

MSC2010: 34B05, 34B27, 46C07, 47A68

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© К. А. Коваль

МГИМО МИД России
Одинцовский филиал
факультет математических методов и бизнес-информатики
143007, Московская область, г. Одинцово,ул. Ново-Спортивная, д.3
e-mail: *k.koval@odin.mgimo.ru*

Mixed Boundary Value Transmission Problems for the Linear Theory of Elasticity.

Koval K. A.

Abstract.

In previous works, the author studied the general approach to solving mixed boundary, spectral, and initial-boundary transmission problems. In this paper, this approach is applied to the mixed boundary transmission problem of the linear theory of elasticity. On the basis of the corresponding Green's formulas, the solution of the problem can be represented as the sum of the solutions of auxiliary problems.

Let us consider an elastic body consisting of two joined regions Ω_1 and Ω_2 from $\mathbb{R}^m$. Let its outer boundaries be Lipschitz $(\Gamma_{11} \cup \Gamma_{22}) \cup \partial\Gamma_{11} = \Gamma = \partial\Omega$, moreover, the contour $\partial\Gamma_{11}$ is also Lipschitz. We suppose that the interface $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ is Lipschitz.

We study a mixed boundary value problem of the linear theory of elasticity with nonhomogeneous equations and nonhomogeneous conditions at the boundary:

$$\begin{aligned} L_1\vec{v}_1 &:= -[\mu_1\Delta v + (\lambda_1+\mu_1)\nabla \mathrm{div}\vec{v}_1] = \vec{f}_1(x)(\text{в } \Omega_1), \\ L_2\vec{v}_2 &:= -[\mu_2\Delta v + (\lambda_2+\mu_2)\nabla \mathrm{div}\vec{v}_2] = \vec{f}_2(x)(\text{в } \Omega_2); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\gamma_{11}\vec{v}_1 = \vec{\varphi}_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \gamma_{22}\vec{v}_2 = \vec{\varphi}_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}); \tag{2}$$

$$\gamma_{21}\vec{v}_1 - \gamma_{12}\vec{v}_2 = \vec{\varphi}_{21}, \quad P_{21}\vec{v}_1 + P_{12}\vec{v}_2 = \vec{\psi}_{21} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \tag{3}$$

$$P_{21}\vec{v}_1 := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_1\tau_{jk}(\vec{v}_1) + \lambda_1\delta_{jk}\mathrm{div}\vec{v}_1)\cos(\vec{v}_1, \vec{e}_j)\vec{e}_j,$$

$$P_{12}\vec{v}_2 := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_2\tau_{jk}(\vec{v}_2) + \lambda_2\delta_{jk}\mathrm{div}\vec{v}_2)\cos(\vec{v}_2, \vec{e}_j)\vec{e}_j.$$

On the basis of the corresponding Green's formulas

$$(\vec{\eta}, \vec{v})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L\vec{v} \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \vec{\eta}, P_k \vec{v} \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{v} \in \widehat{\overrightarrow{H}}^1(\Omega), \tag{4}$$

$$\gamma_k \vec{\eta} = \vec{\eta}|_{\Gamma_k} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma), \quad P_k \vec{v} := (P\vec{v})|_{\Gamma_k} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma), \ k = 1, 2;$$

$$(\vec{\eta}, \vec{v})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L\vec{v} \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \vec{\eta}, P_k \vec{v} \rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{v} \in \check{\overrightarrow{H}}^1_{\Gamma_1}(\Omega), \tag{5}$$

$$\gamma_k \vec{\eta} = \vec{\eta}|_{\Gamma_k} \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma), \quad P_k \vec{v} := (P\vec{v})|_{\Gamma_k} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{-1/2}(\Gamma), \ k = 1, 2,$$

the solution of the problem can be represented as the sum of the solutions of auxiliary problems.

The traces $\gamma \vec{v} \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)$ have restrictions on Γ_k, that can be continued by zero in the class of $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)$. Wherein $\vec{v}$ belong to the space $\widehat{\overrightarrow{H}}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$.

Functions $P_k \vec{v}$ in the second formula can be continued by zero on Γ in the class of $\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Wherein $\vec{v}$ belong to the space $\check{\overrightarrow{H}}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, that is, the space of functions whose $P_k \vec{v}$ extendible by zero.

For the four auxiliary problems, we find weak solutions using Green's formulas. Original problem (1) – (3) is the sum of the auxiliary solutions.

Keywords: *Green's formula, transmission problem, weak solution, Lipschitz boundaries, theory of elasticity.*

Введение

Данная работа является продолжением исследований автора и его научного руководителя в области применения обобщённой формулы Грина. Для смешанных краевых задач в предыдущих работах (см. [1]–[5]) и кандидатской диссертации [6] автор использовал общий подход к изучению смешанных краевых, спектральных и начально-краевых задач сопряжения для различных конфигураций пристыкованных областей. Подход был основан на применении обобщённой формулы Грина, в основном для оператора Лапласа. В данной работе показано применение этой схемы для аналогичной задачи линейной теории упругости на базе соответствующих формул Грина.

1. Формула Грина линейной теории упругости

Рассмотрим поле перемещений сплошной среды $\vec{v} = \vec{v}(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. В линейной теории упругости для него основным является выражение

$$L\vec{v} := \vec{v} - [\mu\Delta\vec{v} + (\lambda+\mu)\bigtriangledown \mathrm{div}\vec{v}],\ \lambda > 0,\ \mu > 0. \tag{6}$$

Классическая формула Грина для дифференциального выражения (6) в области Ω с гладкой границей Γ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \vec{\eta}(L\vec{v})d\Omega = \mu E(\vec{\eta},\vec{v}) + \lambda \int\limits_{\Omega} (\mathrm{div}\vec{\eta})\cdot(\mathrm{div}\vec{v})d\Omega + \int\limits_{\Omega} \vec{\eta}\vec{v}d\Omega - \int\limits_{\Gamma} (\gamma\vec{\eta})(P\vec{v})d\Gamma, \tag{7}$$

$$\vec{\eta} \in \vec{C}^1(\bar{\Omega}),\ \vec{v} \in \vec{C}^2(\bar{\Omega}),\ E(\vec{\eta},\vec{v}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{v})d\Omega, \tag{8}$$

$$\tau_{jk}(\vec{v}) := \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j},\ P\vec{v} := \sum_{j,k=1}^{3}(\mu\tau_{jk}(\vec{v}) + \lambda \mathrm{div}\vec{v}\ \delta_{jk})\cos(\widehat{\vec{\eta},\vec{e}_j})\vec{e}_j, \tag{9}$$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j\vec{e}_j,\ \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3}(\gamma v_j)\vec{e}_j = \vec{\eta}\mid_{\Gamma}.$$

Рассмотрим пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} |\vec{v}(x)|^2 d\Omega < \infty$$

и пространство $\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)} := \mu E(\vec{v},\vec{v}) + \lambda \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{v}|^2 d\Omega + \int\limits_{\Omega} |\vec{v}|^2 d\Omega.$$

Можно доказать (см. [7], с. 65-69), что нормы в пространствах $\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$ и $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ эквивалентны.

Теперь рассмотрим пространство $\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ тех элементов из $\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$, для которых

$$\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega) \cap \overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}} = \{0\},$$

где $\overrightarrow{R}_{\vec{a},\vec{\delta}}$ — подпространство из $\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)$, описывающее жесткие перемещения (сдвиги и вращения) сплошной среды:

$$\vec{\eta} := \vec{a} + \vec{\delta}\times\vec{r},\quad \vec{a},\vec{\delta} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{r} = \sum_{k=1}^{3} x_k\vec{e}_k.$$

В этом случае можно доказать, что на множестве $\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)$ можно ввести норму по закону

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)} := \mu E(\vec{v},\vec{v}) + \lambda \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{v}|^2 d\Omega,$$

и эта норма эквивалентна норме пространства $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$,

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \Big(|\vec{v}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \Big|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big|^2\Big) d\Omega < \infty.$$

Опираясь на эти утверждения, получаем две обобщённые формулы Грина линейной теории упругости:

$$(\vec{\eta},\vec{v})_{\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta},\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega), \tag{10}$$

$$(\vec{\eta},\vec{v})_{\overrightarrow{H}^1_{eq,\vec{R}}(\Omega)} = \langle \vec{\eta}, L_0\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta},\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{eq,\overrightarrow{R}}(\Omega), \tag{11}$$

$$L_0\vec{v} := L\vec{v} - \vec{v} \in (\overrightarrow{H}^1_{eq,\overrightarrow{R}}(\Omega))^*, \quad P\vec{v} \in (\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma))^*,$$

где косыми скобками обозначены значения соответствующих функционалов, отвечающих оснащённым пространствам.

Формула (10) следует из абстрактной теоремы (см. [7], теорема 1.3.1), применённой для пространств

$$E = \overrightarrow{L}_2(\Omega), F = \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega), G = \overrightarrow{L}_2(\Gamma),$$

и векторного оператора следа (см. 8-9), а также из эквивалентности норм в $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ и теоремы Гальярдо (см. [7], теорема 1.4.2).

Формула (11) следует из той же абстрактной теоремы, если

$$E = \overrightarrow{L}_2(\Omega), F = \overrightarrow{H}^1_{eq,\overrightarrow{R}}(\Omega) \supset \overrightarrow{H}^1_0(\Omega), G = \overrightarrow{L}_2(\Gamma)$$

и оператора следа γ. При этом $\overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$ плотно в $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$, а норма в $\overrightarrow{H}^1_{eq,\overrightarrow{R}}(\Omega)$ эквивалентна норме $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$. Здесь $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, заданных на Γ с проекциями на оси координат, являющимися функциями из $H^{1/2}(\Gamma)$.

Приведём теперь некоторые построения, которые понадобятся для дальнейшего изучения смешанных задач. Для начала введём в векторном пространстве $\overrightarrow{H}^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной:

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_e(\Omega)} := \mu E(\vec{v},\vec{v}) + \lambda \int\limits_{\Omega} |\mathrm{div}\vec{v}|^2 d\Omega + \Big|\int\limits_{\Gamma_1} \vec{v} d\Gamma_1\Big|^2, \ \ \mu > 0, \ \lambda > 0. \tag{12}$$

$$E(\vec{v},\vec{v}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\sum_{i,j=1}^{3}|\tau_{kj}(\vec{v})|^2)d\Omega, \quad \tau_{kj}(\vec{v}) := \frac{\partial v_j}{\partial v_k} + \frac{\partial v_k}{\partial v_j},$$

где $\Gamma_1 \subset \Gamma$ — липшицев кусок границы $\Gamma = \partial\Omega$.

Теперь рассмотрим в $\overrightarrow{H}^1_e(\Omega)$ подпространство

$$\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_e(\Omega) : \int\limits_{\Gamma_1} \vec{v} d\Gamma_1 = \vec{0}\} \subset \overrightarrow{H}^1_e(\Omega). \tag{13}$$

Это пространство имеет коразмерность 3 в $\overrightarrow{H}^1_e(\Omega)$, причем в нем квадрат нормы вычисляется по формуле

$$\|\vec{v}\|^2_{\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)} := \mu E(\vec{v},\vec{v}) + \lambda\int\limits_{\Omega}|\mathrm{div}\vec{v}|^2 d\Omega. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь обобщённую формулу Грина для элементов из $\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$:

$$(\vec{\eta},\vec{v})_{\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)} = \langle\vec{\eta}, L\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \langle\gamma\vec{\eta}, P\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall\vec{\eta},\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{15}$$

Рассмотрим также в $\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ подпространство $\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ тех элементов, для которых поле перемещений на Γ_1 является нулевым:

$$\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) : \gamma_1\vec{v} = \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{0}\}. \tag{16}$$

Это подпространство содержит подпространство

$$\overrightarrow{H}^1_0(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1(\Omega) : \gamma\vec{v} = \vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}\}, \tag{17}$$

плотное в $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$. Поэтому $\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ и $\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ также плотны в $\overrightarrow{L}_2(\Omega)$.

Ортогональным дополнением к $\overrightarrow{H}^1_0(\Omega)$ в $\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ является подпространство "гармонических" векторных полей

$$\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1,h}(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) : L\vec{v} = \vec{0} \quad (\text{в } \Omega)\}, \tag{18}$$

и возникает ортогональное разложение:

$$\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \overrightarrow{H}^1_0(\Omega) \oplus \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1,h}(\Omega). \tag{19}$$

Введем еще два подпространства:

$$\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1{}_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_1,h}(\Omega) : \gamma_1\vec{v} = \vec{v}|_{\Gamma_1} = \vec{0}\}, \tag{20}$$

$$\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1{}_{0,\Gamma_2,h}(\Omega) := \{\vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{\Gamma_2,h}(\Omega) : \gamma_2\vec{v} = \vec{v}|_{\Gamma_2} = \vec{0}\},\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{21}$$

а также подпространство

$$\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1{}_{0,\Gamma,h}(\Omega) := \overrightarrow{H}{}^1_0(\Omega) \oplus (\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1{}_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)(\dot{+})\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1{}_{0,\Gamma_2,h}(\Omega)) \subset \overrightarrow{H}{}^1_{\Gamma_1}(\Omega). \tag{22}$$

Теперь рассмотрим формулы Грина на случай, когда липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ односвязна и разбита на несколько односвязных открытых частей Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Более подробно формулы Грина для смешанных краевых задач описаны в работах [6], п. 1.1 и [7], глава 3.

В первой формуле следы функций $\gamma\vec{v} \in \overrightarrow{H}{}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулём на всю Γ в классе $\overrightarrow{H}{}^{1/2}(\Gamma)$. При этом допускающие такое продолжение функции $\vec{v}$ принадлежат пространству $\widehat{\overrightarrow{H}}{}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$. Эта формула Грина имеет вид:

$$(\vec{\eta},\vec{v})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \langle\vec{\eta}, L\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\vec{\eta}, P_k\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\vec{\eta},\vec{v} \in \widehat{\overrightarrow{H}}{}^1(\Omega), \tag{23}$$

$$\gamma_k\vec{\eta} = \vec{\eta}|_{\Gamma_k} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}{}^{1/2}(\Gamma), \quad P_k\vec{v} := (P\vec{v})|_{\Gamma_k} \in \overrightarrow{H}{}^{-1/2}(\Gamma),\ k = 1,2.$$

Во второй формуле функции $P_k\vec{v}$ продолжимы нулем на всю Γ в классе $\overrightarrow{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$. При этом функции $\vec{v}$ принадлежат пространству $\check{\overrightarrow{H}}{}^1_{\Gamma_1}(\Omega)$, т.е. пространству функций, у которых $P_k\vec{v}$ продолжимы нулем. Получаем следующую формулу Грина

$$(\vec{\eta},\vec{v})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} = \langle\vec{\eta}, L\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\vec{\eta}, P_k\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\vec{\eta},\vec{v} \in \check{\overrightarrow{H}}{}^1_{\Gamma_1}(\Omega), \tag{24}$$

$$\gamma_k\vec{\eta} = \vec{\eta}|_{\Gamma_k} \in \overrightarrow{H}{}^{1/2}(\Gamma), \quad P_k\vec{v} := (P\vec{v})|_{\Gamma_k} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}{}^{-1/2}(\Gamma),\ k = 1,2.$$

2. Общая схема исследования смешанных задач теории упругости

Пусть упругое тело состоит из двух пристыкованных областей Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$, имеет внешние липшицевы границы $(\Gamma_{11} \cup \Gamma_{22}) \cup \partial\Gamma_{11} = \Gamma = \partial\Omega$, причём контур $\partial\Gamma_{11}$ также липшицев. Считаем также, что граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, тоже липшицева (см. Рис. 1).

Рассмотрим смешанную краевую задачу теории упругости с неоднородными уравнениями и неоднородными условиями на границах.

$$\begin{aligned} L_1\vec{v}_1 &:= -[\mu_1\Delta v + (\lambda_1+\mu_1)\nabla\mathrm{div}\vec{v}_1] = \vec{f}_1(x)(\text{в } \Omega_1), \\ L_2\vec{v}_2 &:= -[\mu_2\Delta v + (\lambda_2+\mu_2)\nabla\mathrm{div}\vec{v}_2] = \vec{f}_2(x)(\text{в } \Omega_2); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\gamma_{11}\vec{v}_1 = \vec{\varphi}_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \gamma_{22}\vec{v}_2 = \vec{\varphi}_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}); \tag{26}$$

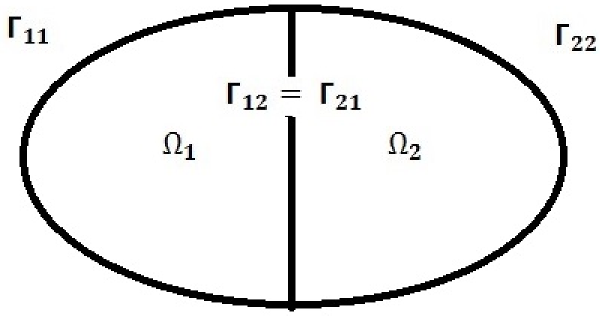


Рис. 1

$$\gamma_{21}\vec{v}_1 - \gamma_{12}\vec{v}_2 = \vec{\varphi}_{21}, \quad P_{21}\vec{v}_1 + P_{12}\vec{v}_2 = \vec{\psi}_{21} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \tag{27}$$
$$P_{21}\vec{v}_1 := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_1 \tau_{jk}(\vec{v}_1) + \lambda_1 \delta_{jk} \mathrm{div} \vec{v}_1) \cos(\vec{v}_1, \vec{e}_j)\vec{e}_j,$$
$$P_{12}\vec{v}_2 := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu_2 \tau_{jk}(\vec{v}_2) + \lambda_2 \delta_{jk} \mathrm{div} \vec{v}_2) \cos(\vec{v}_2, \vec{e}_j)\vec{e}_j.$$

Решение таких краевых, спектральных и начально-краевых задач будем разыскивать в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте: либо в уравнении, либо в краевом условии (см. [6]). При этом построения для краевых задач линейной теории упругости будут проведены на базе соответствующих формул Грина (23), (24).

Первым этапом является векторный аналог вспомогательной задачи Зарембы (см. [6], п.1.2.2).

$$\begin{gathered} L_1\vec{v}_{11} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_1), \qquad L_2\vec{v}_{12} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_2), \\ \gamma_{11}\vec{v}_{11} = \vec{\varphi}_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \qquad \gamma_{22}\vec{v}_{12} = \vec{\varphi}_2 \text{ (на } \Gamma_{22}); \\ P_{21}\vec{v}_{11} = \vec{0}, \qquad P_{12}\vec{v}_{12} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{gathered} \tag{28}$$

Здесь неоднородность остается лишь в условиях на внешних границах. Получаем две распадающиеся задачи для функции $v^{(1)} = (\vec{v}_{11}; \vec{v}_{12})$. Рассмотрим сначала первую из них. Слабое решение $\vec{v}_{11}$ будем считать элементом пространства

$$\overrightarrow{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{\vec{v} \in H^1_e(\Omega_1) : \int_{\Gamma_{11}} \vec{v} d\Gamma_{11} = \vec{0}\} \subset H^1_e(\Omega_1), \tag{29}$$

Тогда должно выполняться необходимое условие разрешимости:

$$\int\limits_{\Gamma_{11}} \vec{\varphi}_1 d\Gamma_{11} = \vec{0}. \tag{30}$$

Теперь введём в пространстве $\overrightarrow{L}_2(\Gamma_{11})$ подпространство $\overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}}(\Omega)$ тех его элементов, для которых выполнено условие

$$\overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}} := \{\vec{\varphi} \in \overrightarrow{L}_2(\Gamma_{11}) : \int\limits_{\Gamma_{11}} \vec{\varphi} d\Gamma_{11} = \vec{0}\}.$$

Соответствующий проектор $P_{2,\Gamma_{11}}\vec{\varphi} : \overrightarrow{L}_2(\Gamma_{11}) \to \overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}}$ выражается формулой

$$P_{2,\Gamma_{11}}\vec{\varphi} := \vec{\varphi} - |\Gamma_{11}|^{-1} \int\limits_{\Gamma_{11}} \vec{\varphi} d\Gamma_{11}.$$

Рассмотрим также пространство

$$\overrightarrow{H}^{1/2}_{\Gamma_{11}} := \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11}) \cap \overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}}.$$

Здесь $(\overrightarrow{H}^{1/2}_{\Gamma_{11}}; \overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}})$ — гильбертова пара пространств, так как $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11}) \hookrightarrow\hookrightarrow \overrightarrow{L}_2(\Gamma_{11})$ и потому $\overrightarrow{H}^{1/2}_{\Gamma_{11}} \hookrightarrow\hookrightarrow \overrightarrow{L}_{2,\Gamma_{11}}$.

Рассматривая первую из задач, т.е. задачу

$$L_1\vec{v}_{11} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_1), \ \gamma_{11}\vec{v}_{11} = \vec{\varphi}_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \ P_{21}\vec{v}_{11} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{31}$$

будем считать, что её решение $\vec{v}_{11}$ есть функция из $\overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1)$,

$$\overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1) := \{\vec{v}_{11} \in \overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega) : L_1\vec{v}_{11} = 0 \text{ (в } \Omega_1)\}.$$

Тогда (по теореме Гальярдо для векторных полей) её след $\gamma_1\vec{v}_{11} := \vec{v}_{11}|_{\partial\Omega_1}$ есть функция из $\overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_1)$, а на липшицевом куске $\Gamma_{11} \subset \partial\Omega_1$ этот след является функцией из $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (31) является условие

$$\vec{\varphi}_1 \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{32}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (31).

Продолжим функцию $\vec{\varphi}_1$, заданную на Γ_{11}, на всю границу $\partial\Omega_1$ липшицевой области Ω_1 в классе $\overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_1)$. Это можно сделать согласно лемме 3.3.3 из [7], так как по предположению $\partial\Gamma_{11}$ — липшицева граница липшицевой поверхности Γ_{11}. Используя оператор продолжения ω_{11} по В. С. Рычкову, имеем

$$\hat{\vec{\varphi}}_1 := \omega_{11}\vec{\varphi}_1 \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_1), \ \omega_{11} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11}), \overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_1)). \tag{33}$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что между элементами из $\overrightarrow{H}_h^1(\Omega_1)$ и $\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11})$ имеет место взаимно–однозначное соответствие (и даже изометрия при специальном выборе эквивалентной нормы в $\overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_1)$). Тогда существует единственный элемент

$$\vec{w}_{11} = \hat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\vec{\varphi}_1 \in \overrightarrow{H}_h^1(\Omega_1), \tag{34}$$

который является решением задачи

$$L_1\vec{w}_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_1\vec{v}_{11} = \omega_{11}\vec{\varphi}_1 \ (\text{на } \partial\Omega_1). \tag{35}$$

Учитывая этот факт, получаем, что для функции $\vec{w}_{12} := \vec{v}_{11} - \vec{w}_{11}$ из (31), (33) возникает векторная задача Неймана:

$$L_1\vec{w}_{12} = \vec{0} \ (\text{в } \Omega_1), \ \gamma_{11}\vec{w}_{12} = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ P_{21}\vec{w}_{12} = -P_{21}\vec{w}_{11} \ (\text{на } \Gamma_{12}), \tag{36}$$

Её слабое решение естественно рассматривать в пространстве

$$\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{\vec{v}_1 \in \overrightarrow{H}^1(\Omega_1) : \gamma_{11}\vec{v}_1 = \vec{0}\}. \tag{37}$$

Отсюда следует, что в задаче (36) должно быть $\gamma_{21}\vec{w}_{12} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{12})$, и тогда необходимым условием разрешимости этой задачи является условие

$$P_{21}\vec{w}_{11} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}). \tag{38}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (36), причём оно действительно выполнено на решениях $\vec{w}_{11}$ задачи (35).

Для этого воспользуемся формулой Грина (23):

$$(\vec{\eta}, \vec{v})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega_1)} = \langle \vec{\eta}, L_1\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\vec{\eta}, P_{21}\vec{v}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_{12})}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{v} \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{39}$$

На её основе естественно определяется слабое решение $\vec{w}_{12} \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1)$ задачи (36):

$$(\vec{\eta}, \vec{w}_{12})_{\overrightarrow{H}^1_{eq}(\Omega)} = \langle \gamma_{21}\vec{\eta}, (-P_{21}\vec{w}_{11})\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_{12})}, \quad \forall \vec{\eta} \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{40}$$

Здесь в силу (38) и теоремы Гальярдо правая часть является линейным ограниченным функционалом в $\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Значит, при любом $\vec{\varphi}_1 \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11})$ (см. (32)) существует единственная функция $\vec{w}_{12} \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1)$, являющаяся слабым решением задачи (36):

$$\vec{w}_{12} =: V_{21}(-P_{21}\vec{w}_{11}) = -V_{21}P_{21}\hat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\vec{\varphi}_1, \tag{41}$$

$$V_{21} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}), \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1)).$$

Отсюда окончательно приходим к выводу, что условие (32) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения $\vec{v}_{11}$ задачи Зарембы (31), и это решение выражается формулой

$$\vec{v}_{11} = \vec{w}_{11} + \vec{w}_{12} = \hat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\vec{\varphi}_1 - V_{21}P_{21}\hat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\vec{\varphi}_1 =: \hat{\gamma}_{11}^{-1}\vec{\varphi}_1, \tag{42}$$
$$\hat{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{11}), \overrightarrow{H}_h^1(\Omega_1)).$$

Аналогично рассматривается вторая задача (29), и итогом рассмотрения этих задач является следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждая из задач Зарембы (29) имеет единственное слабое решение* $\vec{v}_{2k} \in \overrightarrow{H}_h^1(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\vec{\varphi}_k \in \overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{kk}), \quad k = 1, 2, \tag{43}$$

и это решение выражается формулой

$$\vec{v}_{1k} = \hat{\gamma}_{kk}^{-1}\vec{\varphi}_k, \ \hat{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{1/2}(\Gamma_{kk}); \overrightarrow{H}_h^1(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \tag{44}$$

Перейдём теперь ко второму этапу (в общей схеме исследования, описанной в [1, 7]) — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (25)–(27). Здесь необходимо исследовать проблему нахождения набора функций

$$\vec{v}_2 = (\vec{v}_{21}, \vec{v}_{22}) \in \overrightarrow{H}^1(\Omega_1) \oplus \overrightarrow{H}^1(\Omega_2) \tag{45}$$

из следующих уравнений и краевых условий (неоднородность в краевом условии на Γ_{12}):

$$\begin{gathered} L_1\vec{v}_{21} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_1), \qquad L_2\vec{v}_{22} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_2), \\ \gamma_{11}\vec{v}_{21} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_{11}), \qquad \gamma_{22}\vec{v}_{22} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_{22}); \\ \gamma_{21}\vec{v}_{21} - \gamma_{12}\vec{v}_{22} = \widetilde{\vec{\varphi}}_{21} := \vec{\varphi}_{21} - \gamma_{21}\vec{v}_{11} + \gamma_{12}\vec{v}_{12} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ P_{21}\vec{v}_{21} = -P_{12}\vec{v}_{22} (= \vec{\chi}_{21}) \text{ (на } \Gamma_{12}). \end{gathered} \tag{46}$$

Здесь $(\vec{v}_{11}; \vec{v}_{12}) = \vec{v}_1$ — решение задачи Зарембы (28), а $\vec{\varphi}_{21}$ — заданная функция.

Если функция $\vec{\chi}_{21}$ известна, то вместо (46) возникают две распадающиеся задачи Неймана. В частности, для $\vec{v}_{21}$ имеем задачу

$$L_1\vec{v}_{21} = \vec{0} \text{ (в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11}\vec{v}_{21} = \vec{0} \text{ (на } \Gamma_{11}), \qquad P_{21}\vec{v}_{21} = \vec{\chi}_{21} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \tag{47}$$

слабое решение которой будем искать в пространстве

$$\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega_1) =: \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1). \tag{48}$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (36), (37)). Для её слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (38)), чтобы выполнялось условие

$$\vec{\chi}_{21} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}), \tag{49}$$

и тогда решение выражается формулой

$$\vec{v}_{21} = V_{21}\vec{\chi}_{21}, \quad V_{21} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}); \overrightarrow{H}^{1}_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{50}$$

Аналогичное рассмотрение второй задачи (46) приводит к следующему выводу:

$$\vec{v}_{22} = -V_{12}\vec{\chi}_{21}, \quad V_{12} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}); \overrightarrow{H}^{1}_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)). \tag{51}$$

Имея представления (50) и (51) для решений $\vec{v}_{2k}$, $k = 1, 2$, из оставшегося граничного условия на Γ_{21} в (46) получаем соотношение

$$(\gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12})\vec{\chi}_{21} =: C\vec{\chi}_{21} = \widetilde{\vec{\varphi}}_{21} \ \ (\text{на } \Gamma_{12}). \tag{52}$$

Здесь оператор Стеклова

$$C \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}); \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{21})). \tag{53}$$

Оказывается, он является положительным оператором: подсчёт, основанный на определениях слабых решений $\vec{v}_{21}$ и $\vec{v}_{22}$ с помощью операторов V_{21} и V_{12}, показывает, что

$$\langle C\vec{\chi}_{21}, \vec{\chi}_{21}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_{21})} = \sum_{k=1}^{2} \|\vec{v}_{2k}\|^2_{\overrightarrow{H}^1(\Omega_k)}. \tag{54}$$

Отсюда следует, что оператор C положителен и действует из $\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})$ на всё пространство $\widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{21})$. Поэтому по теореме Банаха существует обратный оператор

$$C^{-1} \in \mathscr{L}(\widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{21}); \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})). \tag{55}$$

Значит, решение задачи (52) существует и единственно при

$$\widetilde{\vec{\varphi}}_{21} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{56}$$

Теорема 2. *Пусть в задаче (46) выполнены условия (50), а также условия согласования (56). Тогда задача Стеклова (46) имеет единственное слабое решение*

$$\vec{v}_2 = (V_{21}C^{-1}\widetilde{\vec{\varphi}}_{21}; -V_{12}C^{-1}\widetilde{\vec{\varphi}}_{21}),$$
$$\vec{v}_2 = (\vec{v}_{21}; \vec{v}_{22}) \in \overrightarrow{H}^{1}_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})\overrightarrow{H}^{1}_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2), \tag{57}$$

где оператор Стеклова определён в (52), (53).

Третьим этапом задачи сопряжения (25)–(27) является рассмотрение первой задачи С. Крейна (неоднородность в уравнениях):

$$\begin{gathered} L_k\vec{v}_{3k} := -[\mu_k\Delta\vec{v}_{3k} + (\lambda_k+\mu_k)\Delta\mathrm{div}\vec{v}_{3k}] = \vec{f}_k \ (\text{в } \Omega_k), \\ \gamma_{kk}\vec{v}_{3k} = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k=1,2; \\ \gamma_{21}\vec{v}_{31} - \gamma_{12}\vec{v}_{32} = \vec{0}, \quad P_{21}\vec{v}_{31} + P_{12}\vec{v}_{32} = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_{12}=\Gamma_{21}). \end{gathered} \tag{58}$$

Исходя из первого граничного условия Дирихле на Γ_{12}, введём на Γ_{12} подпространство $\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(\vec{v}_{31}, \vec{v}_{32})$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(\vec{v}_{31}, \vec{v}_{32}) \in \overrightarrow{H}^1(\Omega_1) \oplus \overrightarrow{H}^1(\Omega_2) =: \overrightarrow{H}^1(\Omega) : \\ \gamma_{kk}\vec{v}_{31} = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k=1,2, \ \gamma_{21}\vec{v}_{31} - \gamma_{12}\vec{v}_{32} = \vec{0}, \ (\text{на } \Gamma_{12})\}. \end{gathered} \tag{59}$$

Это подпространство плотно вложено в пространство

$$\overrightarrow{L}_2(\Omega) := \overrightarrow{L}_2(\Omega_1) \oplus \overrightarrow{L}_2(\Omega_2), \tag{60}$$

так как $\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ содержит подпространство

$$\overrightarrow{H}^1_0(\Omega) := \{(\vec{v}_{31}, \vec{v}_{32}) : \vec{v}_{3k} \in \overrightarrow{H}^1_0(\Omega_k), \ k=1,2\}, \tag{61}$$

где $\overrightarrow{H}^1_0(\Omega_k)$ плотно (и компактно) вложено в $\overrightarrow{L}_2(\Omega_k)$, $k=1,2$. Поэтому $(\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega), \overrightarrow{L}_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Опираясь на обобщённые формулы Грина для областей $\Omega_k, k=1,2$ (см. (23), (24)), получим следующую формулу Грина:

$$\sum_{k=1}^{2}(\vec{\eta}_k, \vec{v}_{3k})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle\vec{\eta}_k, L_k\vec{v}_{3k}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega_k)} + \langle\gamma_{21}\vec{\eta}_1, P_{21}\vec{v}_{31} + P_{12}\vec{v}_{32}\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Gamma_{12})}, \tag{62}$$

$$\gamma_{21}\vec{\eta}_1 = \gamma_{12}\vec{\eta}_2 \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{12}), \ \ \forall\vec{\eta} = (\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2), \ \ \vec{v}_3 = (\vec{v}_{31}; \vec{v}_{32}) \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Отсюда естественно даётся определение слабого решения задачи (58): это такой набор $\vec{v}_3 = (\vec{v}_{31}; \vec{v}_{32}) \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$(\vec{\eta}, \vec{v}_3)_{\overrightarrow{H}^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2}(\vec{\eta}_k, \vec{v}_{3k})_{\overrightarrow{H}^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle\vec{\eta}_k, \vec{f}_k\rangle_{\overrightarrow{L}_2(\Omega_k)}, \ \ \forall\vec{\eta} \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{63}$$

Теорема 3. *Первая задача С. Крейна (58) имеет единственное слабое решение $\vec{v}_3 \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\vec{f} := (\vec{f}_1; \vec{f}_2) \in (\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*. \tag{64}$$

Это решение выражается формулой

$$\vec{v}_3 = A^{-1}\vec{f}, \tag{65}$$

где A *— оператор гильбертовой пары* $(\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega); \overrightarrow{L}_2(\Omega))$.

Если, в частности,

$$\vec{f} = (\vec{f}_1; \vec{f}_2) \in \overrightarrow{L}_2(\Omega) = \overrightarrow{L}_2(\Omega_1) \oplus \overrightarrow{L}_2(\Omega_2), \tag{66}$$

то задача (58) имеет единственное решение

$$\vec{v}_3 \in \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^{1/2}) = \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega), \mathscr{R}(A) = \overrightarrow{L}_2(\Omega), \tag{67}$$

выражается той же формулой (65).

Рассмотрим, наконец, четвёртый этап исследования задачи сопряжения (25)–(27) — вторую задачу С. Крейна (неоднородность в краевом условии типа Неймана на Γ_{12}). Здесь для $\vec{v}_4 = (\vec{v}_{41}; \vec{v}_{42}) \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем следующую проблему:

$$\begin{gathered} L_k\vec{v}_{4k} = \vec{0} \ (\text{в } \Omega_k), \qquad \gamma_{kk}\vec{v}_{4k} = \vec{0} \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = 1, 2; \\ \gamma_{21}\vec{v}_{41} - \gamma_{12}\vec{v}_{42} = \vec{0}, \quad P_{21}\vec{v}_{41} + P_{12}\vec{v}_{42} = \vec{\psi}_{21} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{gathered} \tag{68}$$

Отсюда для решений $\vec{v}_4 = (\vec{v}_{41}; \vec{v}_{42}) \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства:

$$\gamma_{21}\vec{v}_{41} = \gamma_{12}\vec{v}_{42} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{21}), \quad P_{21}\vec{v}_{41} = -P_{12}\vec{v}_{42} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}),$$

а потому необходимое условие разрешимости этой задачи таково:

$$\vec{\psi}_{21} \in \overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{69}$$

Оно определяется из тождества, следующего из (63):

$$(\vec{\eta}, \vec{v}_4)_{\vec{H}^1(\Omega)} := \langle \gamma_{21}\vec{\eta}_1, \vec{\psi}_{21} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall \vec{\eta} = (\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2) \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{70}$$

Теорема 4. *Вторая задача С. Крейна (68) имеет единственное слабое решение* $\vec{v}_4 \in \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие (69). Это решение имеет вид*

$$\vec{v}_4 = W_{21}\vec{\psi}_{21}, \ \ W_{21} \in \mathscr{L}(\overrightarrow{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}); \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \tag{71}$$

$$\overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := \overrightarrow{H}^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap \overrightarrow{H}^1_h(\Omega), \ \ \overrightarrow{H}^1_h(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{2} \overrightarrow{H}^1_{0,h}(\Omega_k).$$

При этом оператор W_{21} *обладает свойствами*

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (W_{21})^*, \ \ \rho_k\vec{\eta} = \rho_k(\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2) := \vec{\eta}_k, \ k = 1, 2. \tag{72}$$

Подводя итог рассмотрения четырёх вспомогательных краевых задач сопряжения, порождённых исходной задачей (25)–(27), приходим к следующему выводу.

Теорема 5. *Пусть области Ω_k $(k = 1, 2)$ из $\mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, разбитые на липшицевы куски Γ_{jk}, и примыкают друг к другу по куску $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$. Пусть, кроме того, выполнены условия существования слабых решений рассмотренных выше четырёх вспомогательных задач (см. (43), (56), (64), (69)). Тогда задача сопряжения (25)–(27) имеет единственное слабое решение*

$$\vec{v} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \sum_{j=1}^{4} (\vec{v}_{1j}, \vec{v}_{2j}) \in \overrightarrow{H}^1(\Omega) = \overrightarrow{H}^1(\Omega_1) \oplus \overrightarrow{H}^1(\Omega_2), \tag{73}$$

где слагаемые $(\vec{v}_{1j}, \vec{v}_{2j})$, $j = \overline{1,4}$ выражаются соответственно формулами (44), (57), (65), (71).

Следствие 1. *Если, в частности, в задаче (25)–(27) граничные условия (26) однородные, то решение задачи Зарембы (28) тривиальное, т.е. $\vec{v} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \vec{0}$. В этом случае вместо условия согласования (56) необходимым и достаточным является естественное условие*

$$\vec{\varphi}_{21} \in \widetilde{\overrightarrow{H}}^{1/2}(\Gamma_{21}). \tag{74}$$

Следствие 2. *Если конфигурация примыкающих друг к другу областей Ω_k будет представлять собой фигуру, "разрезанную" не один, а n раз, то применённый выше подход применим и в этом случае. Тогда вместо оператора Стеклова C возникает операторная матрица Стеклова с теми же общими свойствами.*

Следствие 3. *Если границы $\partial\Omega_k$ областей Ω_k находятся на положительном расстоянии друг от друга (см. [7], п. 5.2.2), то имеют место свойства*

$$(\overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_k))^* = \overrightarrow{H}^{-1/2}(\partial\Omega_k), \quad (\overrightarrow{H}^{-1/2}(\partial\Omega_k))^* = \overrightarrow{H}^{1/2}(\partial\Omega_k), \quad k = \overline{1,n},$$

и тогда не требуется выполнение согласования граничных условий (см. (56)).

Автор благодарит Копачевского Н.Д. за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Копачевский Н. Д. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М.. — 2016. — Т. 61. — С. 67–102.

KOPACHEVSKY, N. & RADOMIRSKAYA, K. (2016) Abstract Mixed Boundary and Spectral Transmission Problems and their Applications. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* 61. p. 67–102.

2. Копачевский Н. Д. Смешанные краевые задачи сопряжения. / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2016. — №1 (30). — С. 89–108.

   KOPACHEVSKY, N. & RADOMIRSKAYA, K. (2016) Mixed Boundary Value Transmission Problems. *TVIM.* 30. p. 89–108.

3. Радомирская К.А. Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения. / К. А. Радомирская // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2017. — Т. 63. — С. 316–339.

   RADOMIRSKAYA, K. (2017) The Spectral and Initial-Boundary Transmission Problems. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* 63. p. 316-339.

4. Радомирская К.А. О некоторых начально-краевых задачах сопряжения. / К. А. Радомирская // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 72–96.

   RADOMIRSKAYA, K. (2017) About some Initial-Boundary Transmission Problems. *TVIM.* 2 (35). p. 72-96.

5. Радомирская К.А. Спектральные задачи сопряжения. / К. А. Радомирская // Динамические системы, КФУ, Симферополь. — 2017. — Т. 7(35), №1. — С. 63–79.

   RADOMIRSKAYA, K. (2017) The Spectral Transmission Problems. *Dynamic systems.* 7 (35). p. 63–79.

6. Коваль К.А. Операторный подход к краевым, спектральным и начально–краевым задачам сопряжения / К.А. Коваль // Диссертация на соискание степени кандидата физико–математических наук. — 2018. — 150 С. [Научно-информационный портал ВГУ]. – Режим доступа: http://www.science.vsu.ru/disserinfocand=3070

   KOVAL, K. (2018) *Dissertation.* Operator approach to boundary, spectral and initial-boundary value transmission problems. 150 p.

7. Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения: монография / Н. Д. Копачевский // Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского. Симферополь: ФОРМА, 2016. — 279 с.

KOPACHEVSKY, N. (2016) *Abstract Green Formulas for mixed boundary value problems.* Crimean Federal University. Simpheropol,. 279 p.

8. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм. / Н. Д. Копачевский // Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — Т. 57. — С. 71–107.

   KOPACHEVSKY, N. (2015) Abstract Green Formulas for Triples of Hilbert Spaces and Sesquilinear Forms. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* 57. p. 71–107.

9. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых её приложениях. / Н. Д. Копачевский // Спектральные и эволюционные задачи (Симферополь). — 2011. — Т. 21, № 1. — С. 2–39.

   KOPACHEVSKY, N. (2011) On the abstract Green's formula for mixed boundary-value problems. *Spectral and evolutionary problems.* 21 (1). p. 2–39.

10. Agranovich M. S. Generalized method of eigenoscillations in difraction theory / M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov, N. N. Voitovich // Berlin: Wiley–VCN. — 1999.

11. Aubin J.-P. Abstract boundary-value operators and their adjoint./ J.-P. Aubin // Rend. Semin. Math. Univ. Padova. — 1970. — T. 43.— P. 1–33.

УДК: 517.983.23
MSC2010: 47G10

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ХАРДИ

© **Е. А. Павлов**

Крымский инженерно-педагогический университет
Инженерно-педагогический факультет
пер. Учебный, 8, Симферополь, 295015, Российская Федерация
e-mail: *pavlov-oe@bk.ru*

On the Operators of Hardy's Type.

Pavlov E. A.

Abstract. In this paper, we obtain sufficient conditions for the boundedness of the generalized Hardy-Littlewood operator and the Hardy type operator in ideal spaces of the form E_α, where $\alpha(t)$ is a positive, Lebesgue-measurable function. E is a symmetric space.

Keywords: *symmetry spasce, ideal, lattice, operator Hardy.*

Введение

В работе [1] Г. Г. Харди и Дж. Литтльвудом было получено интегральное неравенство, которое, с точки зрения функционального анализа, означает непрерывность интегрального оператора, впоследствии названного оператором Харди-Литтльвуда, в лебеговых пространствах L_p со степенным весом. Т. Шимогаки в статье [2] сформулировал и доказал критерий непрерывности оператора Харди-Литтльвуда в симметричных пространствах, введенных в работе [3]. В статье [4] этот оператор был исследован, в частности, в симметричных пространствах с весом. В монографии [5] был введен в рассмотрение интегральный оператор, который является обобщением оператора Харди-Литтльвуда для случая степенных функций. При изучении оператора А. Кальдерона автором данной работы, в статье [6] было получено дальнейшее обобщение оператора Харди–Литтльвуда. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора Кальдерона в симметричных пространствах. В статье [7] получен критерий ограниченности обобщенного оператора Харди–Литтльвуда в симметричном пространстве. Первое «весовое» неравенство для максимальной функции Харди было получено в [8]. В работе [9] были введены еще более общие, чем оператор Харди–Литтльвуда — операторы типа Харди и Харди–Стеклова.

В данной статье изучен оператор типа Харди и обобщенный оператор Харди–Литтльвуда в симметричных пространствах и симметричных пространствах с весом. Рассмотрен, более общий чем H, оператор типа Харди (см., [9]), вида

$$(H_{\varphi}{}^{\psi}x)(t)=\varphi(t)\int\limits_0^t x(s)\psi(s)\,ds \tag{1}$$

и его формально сопряженный

$$(H^{1}_{\varphi}{}^{\psi}x)(t)=\psi(t)\int\limits_t^\infty x(s)\varphi(s)\,ds. \tag{2}$$

Основные определения, обозначения и необходимые утверждения можно найти в [5], [3].

Частным случаем оператора типа Харди (1) является обобщенный оператор Харди-Литтльвуда

$$(H_{\varphi}\;x)(t)=\frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_0^t x(s)\,d\varphi(s), \tag{3}$$

где $\varphi(s)$ – положительная, возрастающая функция на $[0,+\infty)$.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Определение 1. Положительная всюду конечная на $(0,+\infty)$ функция $v(t)$ называется полумультипликативной (см. [5]), если выполняется неравенство

$$v(t_1\cdot t_2)\leqslant v(t_1)\cdot v(t_2),$$

где $t_1,t_2\in(0,+\infty)$.

Предложение 2 ([5])**.** Введем в рассмотрение числа

$$\alpha=\lim_{t\to0}\frac{\ln v(t)}{\ln t}=\sup_{0<t<1}\frac{\ln v(t)}{\ln t},$$

$$\beta=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln v(t)}{\ln t}=\inf_{t>1}\frac{\ln v(t)}{\ln t}.$$

Числа α и β называются, соответственно, нижним и верхним индексами функции $v(t)$. Выполняются соотношения:

1) $-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty$;

2) $v(t)\geqslant t^{\beta}$ при $t>1$ и $v(t)\geqslant t^{\alpha}$ при $0<t<1$;

3) $v(t)\leqslant t^{\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ и t достаточно близких к 0;

4) $v(t)\leqslant t^{\beta+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ и t достаточно больших.

Определение 2. Пусть $\psi(t)$ – положительная всюду конечная функция на полуоси $(0, +\infty)$. Функцией растяжения для функции $\psi(t)$ называется функция, определяемая равенством

$$\mu_\psi(s) = \sup_{0<t<+\infty} \frac{\psi(s \cdot t)}{\psi(t)},\ 0 < s < +\infty.$$

Несложно проверить, что $\mu_\psi(s)$ является полумультипликативной функцией, то есть выполняется неравенство

$$\mu_\psi(s_1 \cdot s_2) \leqslant \mu_\psi(s_1) \cdot \mu_\psi(s_2), s_1,\ s_2 \in (0, +\infty).$$

Предложение 3 ([5], стр. 76)**.** Пусть $\psi(t)$ – положительная всюду конечная функция на полуоси $(0, +\infty)$. Тогда существуют два числа γ_ψ и δ_ψ такие, что

1) $0 < \gamma_\psi \leqslant \delta_\psi < \infty$;
2) $\mu_\psi(s) \geqslant s^{\delta_\psi}$ при $s > 1$;
3) $\mu_\psi(s) \geqslant s^{\gamma_\psi}$ при $0 < s < 1$;
4) для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s выполняется неравенство

$$\mu_\psi(s) \leqslant s^{\delta_\psi + \varepsilon};$$

5) для достаточно малых $0 < s < \infty$ выполняется неравенство

$$\mu_\psi(s) \leqslant s^{\gamma_\psi - \varepsilon}.$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$\gamma_\psi = \lim_{t\to 0} \frac{\ln \mu_\psi(t)}{\ln t};\ \delta_\psi = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \mu_\psi(t)}{\ln t}.$$

Определение 3. Оператором растяжения , определенном на функциях $f(t)$ из функционального пространства E, определенных на $(0, a), 0 < a \leqslant +\infty$, называется оператор, задаваемый формулой

$$\sigma_\tau f(t) = \begin{cases} f(\frac{t}{\tau}), & \text{если } 0 < t < \tau \cdot a; \\ 0, & \text{если } t > \tau \cdot a. \end{cases}$$

Определение 4 ([5])**.** Пусть $x(t)$ – неотрицательная функция, определенная на $(0, a), 0 < a \leqslant +\infty$. Функцией распределения для функции $x(t)$ называется функция

$$\eta_x(\tau) = \mathrm{mes}\{t : x(t) > \tau\}.$$

Определение 5. Две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные на $(0, a), 0 < a \leqslant +\infty$, называются равноизмеримыми, если выполняется равенство ([5])

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau),\ \tau > 0.$$

Определение 6. Пусть $x(t)$ – неотрицательная функция, определенная на $(0, a), 0 < a \leqslant +\infty$. Перестановкой функции $x(t)$ называется функция $x^*(t)$, равноизмеримая с функцией $x(t)$, убывающая на $(0, a)$ и непрерывная слева.

Предложение 4 ([5])**.** Справедливо равенство

$$x^*(t) = \inf\{\tau : \ \eta_x(\tau) < t\}.$$

Определение 7. Функциональное банахово пространство E измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на $(0, a)$, где $0 < a \leqslant +\infty$, называется симметричным или перестановочно-инвариантным, в другой терминологии ([3], [5], [6]), если:

1) из того, что $y(t) \in E$ и выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти всюду на $(0, a)$, вытекает, что $x(t) \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из того, что $y(t) \in E$ и $|y(t)|$ равноизмерима с $|x(t)|$ следует, что $x(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Предложение 5 ([2], [3], [5])**.** Оператор растяжения σ_τ ограниченно действует в каждом симметричном пространстве E.

Определение 8. Пусть E – симметричное пространство и $\|\sigma_\tau\|_E$ – норма оператора растяжения, действующего в E. Тогда $\|\sigma_\tau\|_E$ является полумультипликативной функцией аргумента τ ([5], [6]).

Через α_E и β_E обозначаются нижний и верхний индексы (показатели) Бойда ([5], [6]), определяемые равенствами

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}; \ \beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}.$$

Предложение 6. Справедливо неравенство $0 \leqslant \alpha_E \leqslant \beta_E \leqslant 1$.

Предложение 7 ([5])**.** Оператор растяжения σ_τ коммутирует с операцией $*$ – знак перестановки функции $x(t) \geqslant 0$, то есть

$$(\sigma_\tau x(t))^* = \sigma_\tau x^*(t).$$

Лемма 1 (Е.М. Семенова, см. [5], стр. 136)**.** *Пусть $\psi(t)$ – непрерывная возрастающая функция. Тогда для любой функции $x \in E$, где E – симметричное пространство измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на $(0, +\infty)$ справедливо неравенство*

$$\| \int\limits_0^\infty \sigma_\tau x^*(t) d\psi(\tau) \|_E \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \|\sigma_\tau x(t)\|_E d\psi(\tau).$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть симметрическое пространство E и положительная возрастающая функция $\rho(t)$ удовлетворяют условию*

$$\beta_E < \alpha_\varphi - \beta_\rho. \tag{4}$$

Тогда оператор H_φ ограниченно действует из E_{μ_ρ} в E_ρ.

Доказательство. Получаем, делая замену переменной $s = t \cdot \tau$ и пользуясь неравенством $\varphi(t) \leqslant \mu_\varphi(t)$, где $\mu_\varphi(t)$ – функция растяжения для $\varphi(t)$,

$$\begin{gathered}\rho(t)(H_\varphi x)(t) = \tfrac{\rho(t)}{\varphi(t)}) \int\limits_0^t x(s)d\varphi(s) = \\ = \tfrac{\rho(t)}{\varphi(t)} \int\limits_0^1 x(t\cdot\tau)d\varphi(t\cdot\tau) \leqslant \mu_\rho(t) \int\limits_0^1 x(t\cdot\tau)d\mu_\varphi(\tau).\end{gathered} \tag{5}$$

Учитывая полумультипликативность функции $\mu_\varphi(t)$ (см. [5]), получаем

$$\rho(t)(H_\varphi x)(t) \leqslant \int\limits_0^1 x(t\cdot\tau)\mu_\rho(t\cdot\tau)\mu_\rho(\frac{1}{\tau})d\mu_\varphi(\tau) = \int\limits_0^1 \sigma_{\frac{1}{\tau}}[x(t)\mu_\rho(t)]\mu_\rho(\frac{1}{\tau})d\mu_\varphi(\tau). \tag{6}$$

Используя лемму Е.М. Семенова (см. [5], лемма 4.7) получаем

$$\begin{gathered}\|\rho(t)(H_\varphi x)(t)\|_E \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}[x(t)\mu_\rho(t)]\|_E \mu_\rho(\tfrac{1}{\tau})d\mu_\varphi(\tau) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \mu_\rho(\tfrac{1}{\tau})d\mu_\varphi(\tau)\|x(t)\mu_\rho(t)\|_E.\end{gathered} \tag{7}$$

Из свойства полумультипликативных функций (см. [5], стр. 75-76) и условия $\beta_E < \alpha_\varphi - \beta_\rho$ вытекает конечность интеграла

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \mu_\rho(\frac{1}{\tau})d\mu_\varphi(\tau) < \infty. \tag{8}$$

□

Следствие 1. *Пусть $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ – полумультипликативны. Тогда, если выполняется соотношение $\beta_E < \alpha_\varphi - \beta_\rho$, то оператор H_φ ограниченно действует из E_ρ в E_ρ.*

Доказательство. В силу полумультипликативности функций $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ условие (8) запишется в виде

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \rho(\tau^{-1}) d\varphi(\tau) < \infty. \tag{9}$$

□

Следствие 2. *Пусть в следствии 1* $\varphi(t) \sim t$. *Тогда, если выполняется условие(см. [5], стр.194)*

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \rho(\tau^{-1}) d\tau < \infty, \tag{10}$$

то оператор Харди-Литтльвуда ограниченно действует из E_ρ *в* ${E_\rho}^{11}$ *и из* E_ρ *в* E_ρ, *если* E *– максимально.*

Рассмотрим дальнейшее обобщение оператора Харди-Литтльвуда (см. [9]). Оператор

$$({H_\varphi}^\psi x)(t) = \psi(t) \int\limits_0^t x(s)\varphi(s) ds \tag{11}$$

называется оператором типа Харди, где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ – положительные на $(0, +\infty)$ функции.

Теорема 2. *Пусть* $E((0, +\infty); dt)$ *– симметричное пространство и выполнено соотношение*

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \mu_\psi(\frac{1}{\tau}) \mu_\varphi(\tau) d\tau < \infty. \tag{12}$$

Тогда оператор ${H_\varphi}^\psi$ *ограниченно действует из* E_{μ_ψ} *в* $E_{\frac{1}{\varphi}}$.

Доказательство. Получаем

$$\frac{1}{\varphi(t)}({H_\varphi}^\psi x)(t) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \int\limits_0^t x(s)\varphi(s) ds. \tag{13}$$

Делая замену переменной $s = t \cdot \tau$ и пользуясь неравенством

$$\frac{\varphi(\tau \cdot t)}{\varphi(t)} \leqslant \mu_\varphi(\tau) \tag{14}$$

и пользуясь свойством полумультипликативности функции $\mu_\varphi(\tau)$, получаем

$$\frac{1}{\varphi(t)}(H_\varphi{}^\psi x)(t) \leqslant \int\limits_0^1 \sigma_{\frac{1}{\tau}}[x(t)\mu_\psi(t)]\mu_\psi(\frac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau. \tag{15}$$

Беря норму в E от обеих частей неравенства (15), получаем, пользуясь леммой Е. М. Семенова [5],

$$\begin{gathered}\|\tfrac{1}{\varphi(t)}(H_\varphi{}^\psi x)(t)\|_E \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}[x(t)\mu_\psi(t)]\|_E\mu_\psi(\tfrac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E\mu_\psi(\tfrac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau \cdot \|x(t)\mu_\psi(t)\|_E.\end{gathered} \tag{16}$$

Теорема доказана. □

Следствие 3. *Пусть $E((0,+\infty);dt)$ – симметричное пространство, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – неотрицательные функции на $(0,+\infty)$.*

Тогда, если выполняется соотношение

$$\beta_E < \alpha_\varphi - \beta_\psi + 1 \tag{17}$$

то оператор $H_\varphi{}^\psi$ ограниченно действует из E_{μ_ψ} в $E_{\frac{1}{\varphi}}$.

Доказательство следует из условия (12) теоремы 2, свойств полумультипликативных функций и индексов Бойда.

Следствие 4. *Пусть в условии Теоремы 2, $\psi(t)$ – полумультипликативная функция, $\varphi(t)$ – полумультипликативная функция, тогда достаточное условие может быть записано в виде*

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E\psi(\tau^{-1})\varphi(\tau)d\tau < \infty. \tag{18}$$

Пусть выполнено соотношение

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E\mu_{\gamma\psi}(\frac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau < \infty. \tag{19}$$

Рассмотрим $H_\varphi{}^\psi$ в пространстве с весом γ. Получаем

$$\begin{gathered}\gamma(t)(H_\varphi{}^\psi x)(t) = \gamma(t)\psi(t)\int\limits_0^t x(s)\varphi(s)ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 \sigma_{\frac{1}{\tau}}[x(t)\mu_{\gamma\psi}(t)]\mu_{\gamma\psi}(\tfrac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau.\end{gathered} \tag{20}$$

Далее имеем

$$\|\gamma(t)(H_\varphi{}^\psi x)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_E \mu_{\gamma\psi}(\tfrac{1}{\tau})\mu_\varphi(\tau)d\tau \cdot \|\mu_{\gamma\psi}(t)x(t)\|_E. \tag{21}$$

То есть справедлива

Теорема 3. *Если выполнено соотношение* (19)*, то оператор*

$$H_\varphi{}^\psi : E_{\mu_{\gamma\psi}} \to E_\gamma.$$

Заключение

В данной статье получены достаточные условия непрерывности операторов Харди-Литтльвуда, обобщенного оператора Харди-Литтльвуда и оператора типа Харди в симметричных пространствах и симметричных пространствах с весом.

Полученные результаты можно перенести на случай более общих идеальных структур, в которых действует оператор растяжения.

Список литературы

1. Харди, Г. Г. Неравенства. / Г. Г. Харди, Д. У. Литтльвуд, Г. Полиа. –М.: ИЛ, 1948.

   HARDY, G. H., LITTLEWOOD J. E., POLYA G. (1948) *Inequalities.* Moscow.

2. SHIMOGAKI, T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces // *J. Math. Soc. Japan* – 1965. – 17. – № 4. – P. 365–375.

3. Семенов, Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // *Доклады АН СССР* – 1964. – 156. – № 6. – С. 1292–1295.

   SEMENOV, E. M. (1964) Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 156 (6). p. 1292–1295.

4. Павлов, Е. А. Некоторые свойства оператора Харди-Литтльвуда // *Математические заметки* – 1979. – 26. – № 6. – С. 909–912.

   PAVLOV, E. A. (1979) Some properties of the operator Hardy-Littlewood. *Mathematical Notes.* 26 (6). p. 909–912.

5. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов. /С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. –М.: Наука, 1978.

   S. G. KREIN, YU. I. PETUNIN & E. M. SEMENOV. (1978) *Interpolation of linear operators.* Moscow: Nauka.

6. PAVLOV, E. A. On the Calderon type operator // *Anal. Math* – 1978. – 4. – № 2. – C. 117–124.

7. Павлов, Е. А. О некоторых обобщениях неравенства Харди-Литтльвуда / Е. А. Павлов, А. И. Фурменко // *Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика* – 2018. – № 1. – С. 128–134.

   PAVLOV, E. A. & FURMENKO, A. I. (2018) On some generalizations of Hardy-Littlewood inequality. *Vestnik Voronezhskogo gosuniversiteta.* No. 1. p. 128–134.

8. MUCHENHOUPT, B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // *Trans of American Math. Soc.* – 1972. – 165. – P. 207–226.

9. Прохоров, Д. В. Интергальные операторы Харди-Стеклова. /Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова // *Современные проблемы математики. МИАН* – 2016. – 22. – С. 3–185.

   PROKHOROV D. V., STEPANOV V. D., USHAKOVA E. P. (2016) Hardy-Steklov Integral Operators. *Bulletin of the Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Science, Moscow.* 22. p. 3–185.

Андреищева Е. Н. Аппроксимация индефинитных функций Шура / Е. Н. Андреищева // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 7 – 22.

УДК: 517.58

Данная работа посвящена исследованию свойств обобщённых функций Шура и её унитарной реализации. Задача реализации функции Шура состоит в её представлении, как характеристической функции некоторого операторного узла V. Представление $s(\lambda) = s(0)+\lambda[(I-\lambda T)^{-1}u, v]$ называется реализацией обобщённой функции Шура $s(\lambda)$. Каждая функция Шура допускает унитарную реализацию, то есть может быть представлена в виде $s(\lambda) = s(0) + \lambda[(I - \lambda T)^{-1}u, v]$, где оператор V является унитарным. Основные результаты статьи посвящены подробным исследованиям вопросов аппроксимации индефинитной функций Шура в окрестности единичной точки.

Ключевые слова: *функция Шура, аппроксимация, сжатие, ядро, пространство Понтрягина, преобразование Кэли-Неймана, индефинитная метрика, унитарная реализация, оператор.*

Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А. Б. Антоневич, Т. Г. Шагова // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 23 – 36.

УДК: 517.988

В данной работе рассмотрены решения в пространстве обобщенных функций простейшего линейного дифференциального уравнения, в котором коэффициентом является одна из обобщенных функций, порожденных рациональной функцией $\frac{1}{x}$. Показано, что обобщенное решение существует не для всех таких коэффициентов, и получены необходимые и достаточные условия существования обобщенного решения.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с обобщенным коэффициентом, мнемофункция, условие разрешимости, аналитическое предстваление распределения.*

Гуров С. И., Жуков А. Е., Закаблуков Д. В., Кормаков Г. В. Обратимые вычисления. Часть I / С. И. Гуров, А. Е. Жуков, Д. В. Закаблуков, Г. В. Кормаков // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 37 – 65.

УДК: 519.7, 621.3

В первой части работы рассмотрены основные положения обратимости как новой парадигмы развития вычислительной техники. Изложены основы обратимой логики и модели обратимых вычислений, обратимые языки программирования.

Ключевые слова: *обратимая логика, модели обратимых вычислений, обратимые языки программирования.*

Zhukovskiy V. I., Zhukovskaya L. V., Kudryavtsev K. N. Hybrid Equilibrium in N-person Games / V. I. Zhukovskiy, L. V. Zhukovskaya, K. N. Kudryavtsev // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 66 – 81.

УДК: 519.83

Существует ли способ уравновешивания конфликта, который уравновешивает эгоизм отдельного игрока (диктуемый равновесием по Нэшу) с его альтруизмом (равновесием по Бержу)? Положительному ответу на вопрос и посвящена настоящая статья. Конкретный ответ: «Существует, но в смешанных стратегиях». Именно, для игры N лиц в нормальной форме вводится понятие гибридного равновесия, которое является синтезом равновесия по Нэшу и по Бержу, а так же Парето-максимума. Выявлены свойства такого равновесия. Установлены достаточные условия, которым удовлетворяет гибридное равновесие и, наконец, доказано его существование в смешанных стратегиях при «привычных» ограничениях для математической теории игр (компактность и выпуклость множества стратегий игроков и непрерывность их функций выигрыша).

Ключевые слова: *равновесие по Бержу, равновесие по Нэшу, оптимум по Парето, свертка Гермейера, бескоалиционные игры.*

Коваль К. А. Смешанные краевые задачи линейной теории упругости / К. А. Коваль // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 82 – 97.

УДК: 517.28, 517.984.46, 517.91

В работе рассмотрено упругое тело, состоящее из двух пристыкованных областей с липшицевыми внешними и внутренними границами. Для данной конфигурации записана смешанная краевая задача теории упругости с неоднородными уравнениями и условиями на границах. Решение задачи разыскивается в виде суммы решений четырех вспомогательных задач. Построения для краевых задач линейной теории упругости проведены на базе соответствующих обобщенных формул Грина. В работе установлены теоремы о слабой разрешимости вспомогательных задач, а также исходной задачи.

Ключевые слова: *формула Грина, теория упругости, слабое решение, липшицева граница, теория упругости.*

Павлов Е. А. Об операторах типа Харди / Е. А. Павлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 3 (44). — С. 98 – 106.

УДК: 517.983.23

Г.Г. Харди доказал важное неравенство для конечных и бесконечных сумм арифметических средних a_n^p, где $p > 1$. Затем он обобщил это неравенство на интегралы. С функциональной точки зрения интегральное неравенство Г.Г. Харди означает непрерывность оператора Харди-Литтльвуда в лебеговых пространствах L_p, где $p > 1$. В данной статье изучен обобщенный оператор Харди-Литтльвуда с точки зрения ограниченности его действия в симметричных пространствах и более общих идеальных структурах, обладающих свойством Минковского, в которых ограниченно действует оператор растяжения. Получен критерий ограниченности этого оператора H_φ (Харди-Литтльвуда) в симметричном пространстве E для случая, когда верхний и нижний показатели функции растяжения μ_φ совпадают. Получены достаточные условия ограниченности оператора H_φ в идеальных структурах с вышеперечисленными свойствами. В частности, получен критерий непрерывности оператора H_{t^l} в симметричных пространствах. Этот оператор был рассмотрен в монографии С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова, в которой были получены достаточные условия ограниченности этого оператора в L_p.

Ключевые слова: *симметрические пространства, идеал, решетка, оператор Харди.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Андреищева Елена Николаевна	к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и начертательной геометрии Черноморского высшего военно-морского училища им. П. С. Нахимова, г. Севастополь, Российская Федерация *e-mail: anda_el@mail.ru*
Антоневич Анатолий Борисович	д. ф.-м. н, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь *e-mail: antonevich@bsu.by*
Гуров Сергей Исаевич	к. ф.-м. н, доцент кафедры математических методов прогнозирования факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Российская Федерация *e-mail: sgur@cs.msu.su*
Жуков Алексей Евгеньевич	к. ф.-м. н, доцент кафедры информационной безопасности факультета информатики и систем управления государственного университета Московского государственного технического университет имени Н. Э. Баумана, Российская Федерация *e-mail: email@gmail.com*
Жуковский Владислав Иосифович	д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация *e-mail: zhkvlad@yandex.ru*
Жуковская Лидия Владиславовна	к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН, г. Москва, Российская Федерация *e-mail: Zhukovskaylv@mail.ru*

Закаблуков Дмитрий Владимирович — к. ф.-м. н, программист ООО «Алгоритмы и данные», г. Москва, Российская Федерация
e-mail: dmitriy.zakablukov@gmail.com

Коваль Карина Александровна — к.ф-м.н., старший преподаватель кафедры математических методов и бизнес-информатики Одинцовского филиала МГИМО МИД России, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: k.koval@odin.mgimo.ru

Кормаков Георгий Владимирович — студент кафедры Математических методов прогнозирования факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: egor2898@mail.ru

Кудрявцев Константин Николаевич — к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Южно-Уральского государственного университета, доцент кафедры теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: kudrkn@gmail.com

Павлов Евгений Александрович — д. ф.-м. н, профессор Крымского инженерно-педагогического университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: pavlov-oe@bk.rum

Шагова Татьяна Григорьевна — аспирант кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь
e-mail: tanya.shagova@gmail.com

Подписано к печати 6.11.2019. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,8 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 6.02.2020.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7