

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 2 (43) ' 2019

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2019, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТАНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

к. ф.-м. н., доцент А. С. АНАФИЕВ	— ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент В. И. ВОЙТИЦКИЙ	— ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент В. Ф. БЛЫЩИК	— редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент М. Г. КОЗЛОВА	— ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Nikolay KOPACHEVSKY	Vice Chief Editor , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoliy GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valeriy CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Андреищева Е. Н. Трансформация Шура для обобщенной функции Каратеодори на окружности.....	7
Дубровская В. А., Переварюха А. Ю. Модели специфических форм биологических вспышек в модификациях уравнений Базыкина и Ферхюльста–Пирла	26
Жуковский В. И., Смирнова Л. В., Житенева Ю. Н., Бельских Ю. А. Дифференциальная игра трех лиц, в которой не существует равновесия по Нэшу, но имеется равновесие угроз и контругроз	39
Новиков В. В., Худошина А. О. О состоятельности оценок ортогонального разложения по системе многочленов Якоби.....	67
Пискунова В. В., Третьяков Д. В. t -дискриминанты с параметрами	77
Рефераты	100
Список авторов номера	103

TABLE OF CONTENTS

Andreishcheva E. N. Schur Transformation for the Generalized Caratheodory Function on Circle.....	7
Dubrovskaya V. A., Perevaryukha A. Yu. Models of specific forms of insect outbreaks in modifications of Bazykin and Verhulst-Pearl equations.....	26
Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V., Zhiteneva J. N., Belskih J. A. Differential game of three persons in which Nash equilibrium doesn't exist but equilibrium of objections and counterobjection is present.....	39
Novikov V. V., Hudoshina A. O. On a consistency of orthogonal series estimators with respect to Jacobi polynomials system	67
Piskunova V. V., Tretyakov D. V. t -discriminants with parameters.....	77
Abstracts.....	100
Authors	103

УДК: 517.58

MSC2010: 47A58

ТРАНСФОРМАЦИЯ ШУРА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ НА ОКРУЖНОСТИ

© Е. Н. Андреищева

ЧЕРНОМОРСКОЕ ВЫСШЕЕ ВОЕННО-МОРСКОЕ УЧИЛИЩЕ ИМ. П. С. НАХИМОВА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЛ. ПАРКОВАЯ, 6, СЕВАСТОПОЛЬ, 299057, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: anda_el@mail.ru

SCHUR TRANSFORMATION FOR THE GENERALIZED CARATHEODORY FUNCTION ON CIRCLE.

Andreishcheva E. N.

Abstract. In the present paper we consider essentially Caratheodory class of scalar functions. This class consists of the meromorphic functions $f(z)$ on the open unit disc \mathbb{D} for which the kernel

$$K_f(z, \omega) = \frac{f(z) + f(\omega)^*}{1 - z\omega^*}, \quad z, \omega \in \mathbf{hol}(\mathbf{f})$$

has a finite number \varkappa of negative squares (here $\mathbf{hol}(\mathbf{f})$ is the domain of homomorphy of $f(z)$). This is equivalent to the fact that the function $f(z)$ has \varkappa poles in \mathbb{D} but the metric constraint of being not expansive on the unit circle \mathbb{T} . We call these functions $f(z)$ generalized Caratheodory functions with \varkappa negative squares.

The approach to the Schur transformation in the indefinite case in the given paper is based on the theory of reproducing kernel Pontryagin spaces for the scalar and matrix functions, associated with a Caratheodory function $f(z)$ and a 2×2 matrix function $\Theta(z)$ through the reproducing kernels

$$K_f(z, \omega) = \frac{f(z) + f(\omega)^*}{1 - z\omega^*}, \quad K_\Theta(z, \omega) = \frac{J_f - \Theta(z)J_f\Theta(\omega)^*}{1 - z\omega^*}, \quad J_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In positive case, they have been first introduced by L. de Branges and J. Rovnyak in [9] and [10]. They play an important role in operator models and interpolation theory, see, for instance, [3] and [4]. In the indefinite case equivalent spaces were introduced in the papers by M.G. Krein and H. Langer [16],[17] and [18] mentioned earlier.

The transformation $s(z) \mapsto \hat{s}(z)$ was defined and studied by I.Schur in 1917–1918 in the paper [21] and is called the Schur transformation. The starting point is a function $s(z)$ which is analytic and contractive in the open unit disk \mathbb{D} ; we call such functions Schur functions. The Schur transformation maps the set of Schur functions which are not identically equal to a unimodular constant into the set of Schur functions. In this way, I. Schur associated with a Schur

function $s(z)$ a finite or infinite sequence of numbers, called Schur coefficients, via the formulas

$$s_0(z) = s(z), \quad s_{j+1}(z) = \hat{s}_j(z) = \frac{1}{b(z)} \frac{s_j(z) - s_j(z_1)}{1 - s_j(z)s_j(z_1)^*}, \quad b(z) = \frac{z - z_1}{1 - zz_1^*}, \quad z_1 \in \mathbb{D}, \quad j = 0, 1, \dots$$

This recursion is called the Schur algorithm.

In given paper we consider this transformation to an indefinite setting for generalized Caratheodory functions centered at $z_1 \in \mathbb{T}$. We called this transformation the generalized Schur transformation for Caratheodory functions.

The generalized Schur transformation can be written as linear fractional transform $\hat{f}(z) = \chi_{\Theta^{-1}}(f(z))$, for any matrix polynomial $\Theta(z)$ and generalized Caratheodory function $f(z)$. If $z_1 \in \mathbb{T}$ we consider functions $f(z)$ which have an asymptotic expansion of the form

$$f(z) = \tau_0 + \sum_{i=1}^{2p-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2p}), \quad z \rightarrow z_1.$$

We define the vector function $R(z)$, fix some normalization point $z_0 \in \mathbb{T}$, $z_0 \neq z_1$, and introduce the polynomial $p(z)$. Then the Schur transformation $\hat{f}(z)$ for generalized Caratheodory function $f(z)$ is defined by the formula

$$\hat{f}(z) = \chi_{\Theta(z)^{-1}}(f(z)) = \frac{\{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0(1 - zz_0^*)p(z)\}f(z) - \tau_0\tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)}{-(1 - zz_0^*)p(z)f(z) + \{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)\}}.$$

In this paper we also consider the basic boundary interpolation problem for generalized Caratheodory functions and factorization of the rational matrix functions which are J -unitary on $\mathbb{T} \setminus \{z_1\}$ and have a unique pole in z_1 .

Keywords: *indefinite metrics, Pontryagin space, Schur transformation, generalised Carateodori function, interpolation problem, factorization of rational matrix function*

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмом Шура называют последовательность дробно-линейных преобразований, характерных для функций классов Шура, Каратеодори, Неванлинны. Классом Шура в комплексном анализе называют множество голоморфных функций, определённых и ограниченных единицей на единичном круге. Понятие функций Шура встречается как в интерполяционной теории и теории инвариантных подпространств, так и в приложениях. Некоторые ядра, индуцированные функцией Шура, встречаются в теории наиболее часто. Это воспроизводящие ядра для функциональных гильбертовых пространств, которые сегодня понимаются как пространства состояний для канонических коизометрических, изометрических и унитарных операторных узлов, чьи характеристические функции совпадают с данной функцией Шура.

Алгоритм Шура для функций Шура и Неванлинны исследовался в целом ряде работ (см., например, [1, 2, 5, 6] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей работе получено развитие ряда результатов, установленных в работе авторов [2] для построения алгоритма Шура обобщённых функций Шура, Неванлинны, Каратеодори.

Напомним понятие алгоритма Шура на примере функции Шура. Рассмотрим классический дефинитный случай.

Пусть $s(\lambda)$ — функция Шура, определённая в открытом единичном круге \mathbb{D} . Если $|s(0)| < 1$, то, по лемме Шварца [2, стр.10], функция вида

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{s(\lambda) - s(0)}{1 - s(\lambda)s(0)^*} \quad (1)$$

также является функцией Шура. Преобразование (1) будем называть преобразованием Шура.

Таким образом, функции $s(\lambda)$ мы можем поставить в соответствие конечную или бесконечную последовательность чисел ρ_j в $\overline{\mathbb{D}}$, называемую коэффициентами Шура:

$$\begin{aligned} s_0(\lambda) &= s(\lambda), \quad \rho_0 = s_0(0), \\ s_{j+1}(\lambda) &= \tilde{s}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{s_j(\lambda) - s_j(0)}{1 - s_j(\lambda)s_j(0)^*}, \quad \rho_{j+1} = s_{j+1}(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Рекурсия (2) называется алгоритмом Шура. Алгоритм будет конечен, если после конечного числа шагов для некоторого j_0 мы получим $|\rho_{j_0}| = 1$, и в этом случае $s_{j+n}(\lambda) = s_{j+1}(\lambda)$, $j \geq j_0$.

Определим для некоторой 2×2 матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\nu \in \mathbb{C}$ дробно-линейное преобразование вида

$$\chi_M(\nu) = \frac{a\nu + b}{c\nu + d}.$$

Тогда (1) можно записать как $\tilde{s}(\lambda) = \chi_{\Phi(\lambda)}(s(\lambda))$, где

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\lambda\sqrt{1 - |s(0)|^2}} \begin{pmatrix} 1 & -s(0) \\ -\lambda s(0)^* & \lambda \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование Шура определяется формулой

$$s(\lambda) = \chi_{\Phi(\lambda)^{-1}}(\tilde{s}(\lambda)) = \frac{s(0) + \lambda\tilde{s}(\lambda)}{1 + \lambda\tilde{s}(\lambda)s(0)^*}.$$

Аналогичным образом определяется алгоритм Шура для функций Шура с условиями $|s(0)| > 1$ и $|s(0)| = 1$.

Преобразование Шура (1) рассматривается в точке $\lambda_1 = 0$. Для произвольной точки $\lambda_1 \in \mathbb{D}$ преобразование Шура определяется по формуле

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{1}{b_c(\lambda)} \frac{s(\lambda) - s(\lambda_1)}{1 - s(\lambda)s(\lambda_1)^*},$$

где через $b_c(\lambda)$ обозначается множитель Бляшке вида

$$b_c(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{1 - \lambda\lambda_1^*}.$$

Далее будем рассматривать обобщённое преобразование Шура в индефинитном случае, то есть преобразование Шура для обобщённой функции в произвольной фиксированной точке круга или окружности.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУРА НА ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ

В данном пункте мы изложим схему построения преобразования Шура для обобщённой функции Каратеодори для произвольной точки на единичной окружности.

Обобщённым классом Каратеодори назовём множество мероморфных в \mathbb{D} функций f , для которых ядро $K_f(z, \omega) = \frac{f(z) + f(\omega)^*}{1 - z\omega^*}$ имеет конечное число \varkappa отрицательных квадратов, и обозначим этот класс C_\varkappa .

Пусть $f \in C_\varkappa$, \mathbb{T} — единичная окружность; $z_1, z_0 \in \mathbb{T}$, $z_1 \neq z_0$, $|z| < 1$.

Рассматриваем обобщённую функцию Каратеодори $f(z)$, которая для некоторого целого $p \geq 1$ в точке $z_1 \in \mathbb{T}$ имеет асимптотическое разложение

$$f(z) = \tau_0 + \sum_{i=1}^{2p-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2p}), \quad z \rightarrow z_1. \quad (3)$$

Рассмотрим две аналитические функции $a(z) = 1$ и $b(z) = z$ на связном множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ с тем свойством, что множества

$$\Omega_+ = \{z \in \Omega \mid |z| < 1\}, \quad \Omega_0 = \{z \in \Omega \mid |z| = 1\}$$

непусты.

Ядро $K_f(z, \omega)$ рассмотрим как частный случай ядра

$$K_X(z, \omega) = \frac{X(z)JX(\omega)^*}{a(z)a(\omega)^* - b(z)b(\omega)^*}, \quad (4)$$

где J — матрица 2×2 , $X(z)$ — мероморфная в Ω_+ 1×2 вектор-функция.

Действительно, ядро $K_f(z, \omega)$ мы получим в случае $\Omega = \mathbb{C}$ и

$$X(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -f(z)^* \end{pmatrix}^*, \quad a(z) = 1, \quad b(z) = z, \quad J = J_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Предположим, что $K_f(z, \omega)$ имеет конечное число отрицательных квадратов. Будем обозначать $\mathcal{B}(f)$ соответствующее пространство Понтрягина, порождённое ядром $K_f(z, \omega)$.

Построим линейное пространство \mathcal{M} как линейную оболочку 2×1 вектор-функций вида

$$f_j(z) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j JX(\omega)^*}{\partial \omega^{*j}} \Big|_{\omega=z_1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что для функций $f_j(z)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, справедлива следующая рекуррентная формула

$$\begin{aligned} f_{j+1}(z) &= \frac{1}{(1 - zz_1^*)} \left\{ \begin{pmatrix} \tau_{j+1}^* \\ 0 \end{pmatrix} + f_j(z)z \right\} = \\ &= \frac{z^{j+1}}{(1 - zz_1^*)^{j+2}} \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{z^{j+1-k}}{(1 - zz_1^*)^{j+2-k}} \begin{pmatrix} \tau_k^* \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введём внутреннее произведение на \mathcal{M} , определяя его на подпространствах

$$\mathcal{M}_k = \text{л.о.} \{f_0(z), \dots, f_{k-1}(z)\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Матричная функция

$$F(z) = (f_0(z) \ f_1(z) \ \dots \ f_{k-1}(z))$$

может быть представлена в виде (см. [2])

$$F(z) = C_{z_1} (M_{z_1} - zN_{z_1})^{-1},$$

где $M_{z_1} = I_k$,

$$N_{z_1} = \begin{pmatrix} z^* & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z^* & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^* & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z^* \end{pmatrix}, \quad C_{z_1} = \begin{pmatrix} \tau_0^* & \tau_1^* & \tau_2^* & \dots & \tau_{k-2}^* & \tau_{k-1}^* \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конечномерное пространство инвариантно относительно оператора запоздалого сдвига

$$(R_\zeta f_j)(z) = \frac{f_j(z) - f_j(\zeta)}{z - \zeta}, \quad f_j(z) \in \mathcal{M},$$

где $\zeta \in \Omega_+$ тогда и только тогда, когда оно является линейной оболочкой столбцов матричной функции вида

$$F(z) = C(M - zN)^{-1}$$

для некоторых матриц M , N и C (см. [2]).

Отсюда \mathcal{M}_k инвариантно относительно оператора запоздалого сдвига.

Определив сужение внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$ на \mathcal{M}_k , построим матрицу Грама G , соответствующую k функциям:

$$G = (g_{ij})_{i,j=0}^{k-1}, \quad g_{ij} = [f_j, f_i], \quad f_i \in \mathcal{M}_k, \quad i = \overline{0, k-1},$$

как решение матричного уравнения

$$G - N_{z_1}^* G N_{z_1} = C_{z_1}^* J C_{z_1}. \quad (6)$$

По теореме [2, стр.13] функция $\Theta(z)$ может быть представлена следующим образом

$$\Theta(z) = I_2 - (1 - z z_0^*) F(z) G^{-1} F(z_0)^* J_f,$$

где z_0 — точка единичной окружности, отличная от точки z_1 .

Через Γ_p обозначим матрицу Грама векторов $f_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ размерности p , в через G — подматрицу матрицы Γ_p размерности k .

Наша цель — найти матрицу Γ_p и её подматрицу G .

Ядро $K_f(z, \omega) = \frac{f(z) + f(\omega)^*}{1 - z\omega^*}$, характерное для функций Каратеодори, также имеет асимптотическое представление вида

$$K_f(z, \omega) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^i (\omega - z_1)^{*j} + O((\max\{|z - z_1|, |\omega - z_1|\})^{2p-1}) \quad (7)$$

при $z, \omega \rightarrow z_1$.

Из равенств (3) и (7) мы найдем соотношения, из которых получим необходимые нам коэффициенты разложения γ_{ij} , которые и будут элементами искомой матрицы Γ_p .

$$\begin{aligned} f(z) + f(\omega)^* &= \\ &= (1 - z\omega^*) \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^i (\omega - z_1)^{*j} + O((\max\{|z - z_1|, |\omega - z_1|\})^{2p-1}) \right) = \\ &= (-z_1^*(z - z_1) - z_1(\omega - z_1)^* - (z - z_1)(\omega - z_1)^*) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^i (\omega - z_1)^{*j} + O((\max\{|z - z_1|, |\omega - z_1|\})^{2p-1}) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2p-1} \tau_i (z - z_1)^i + \sum_{j=0}^{2p-1} \tau_j^* (\omega - z_1)^{*j} + O((z - z_1)^{2p}) + O((\omega - z_1)^{*2p}) = \\ & = -z_1^* \sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^{i+1} (\omega - z_1)^{*j} - \\ & \quad - z_1 \sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^i (\omega - z_1)^{*(j+1)} - \\ & \quad - \sum_{0 \leq i+j \leq 2p-2} \gamma_{ij} (z - z_1)^{i+1} (\omega - z_1)^{*(j+1)} + \\ & \quad + O((\max\{|z - z_1|, |\omega - z_1|\})^{2p-1}). \end{aligned}$$

Из этого мы замечаем, что справедлива следующая система равенств

$$\begin{cases} -z_1^* \gamma_{i-1,j} - z_1 \gamma_{i,j-1} - \gamma_{i-1,j-1} = 0, \quad i, j = \overline{1, p}; \\ \tau_i = -z_1^* \gamma_{i-1,0}, \quad i = \overline{1, p}; \\ \tau_j^* = -z_1 \gamma_{0,j-1}, \quad j = \overline{1, p}; \\ \tau_0 + \tau_0^* = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Данную систему (8) можно переписать матричным равенством

$$-z_1^* S^* \Gamma_p - z_1 \Gamma_p S - S^* \Gamma_p S = -(n \ e) J_f (n \ e)^*,$$

где $n = (\tau_0 \ \tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_{p-1})$, $e = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$, $J_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

матрица $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ является $p \times p$ матрицей сдвига.

Из системы (8) последовательно получим коэффициенты γ_{ij} :

$$\begin{cases} \gamma_{ij} = (-1)^{j+1} \sum_{m=i}^{i+j+1} C_{i-1}^{m-i} \tau_m z_1^m, \quad \text{при } i \geq j; \\ \gamma_{ij} = (-1)^{i+1} \sum_{m=j}^{i+j+1} C_{j-1}^{m-j} \tau_m^* z_1^{*m}, \quad \text{при } i < j. \end{cases}$$

Таким образом мы получили матрицу Γ_p вида:

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} -\tau_1 z_1 & -\tau_2^* z_1^* & -\tau_3^* z_1^* & \cdots & -\tau_p^* z_1^* \\ -\tau_2 z_1 & \sum_{i=2}^3 \tau_i z_1^i & \sum_{i=3}^4 \tau_i^* z_1^{*i} & \cdots & \sum_{i=p}^{p+1} \tau_i^* z_1^{*i} \\ -\tau_3 z_1 & \sum_{i=3}^4 \tau_i z_1^i & -\sum_{i=3}^5 C_2^{i-3} \tau_i z_1^i & \cdots & -\sum_{i=p}^{p+2} C_2^{i-p} \tau_i^* z_1^{*i} \\ -\tau_4 z_1 & \sum_{i=4}^5 \tau_i z_1^i & -\sum_{i=4}^6 C_2^{i-4} \tau_i z_1^i & \cdots & \sum_{i=p}^{p+3} C_3^{i-p} \tau_i^* z_1^{*i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\tau_p z_1 & \sum_{i=p}^{p+1} \tau_i z_1^i & -\sum_{i=p}^{p+2} C_2^{i-p} \tau_i z_1^i & \cdots & (-1)^p \sum_{i=p}^{2p+1} C_{p+1}^{i-p} \tau_i^* z_1^{*i} \end{bmatrix}.$$

Также из системы (8) мы можем упростить нашу матрицу и "избавиться" от сопряжённости. Таким образом, имеем равенство

$$\gamma_{ij} = (-1)^{j+1} \sum_{m=i}^{i+j+1} C_{i-1}^{m-i} \tau_m z_1^m, \text{ при } i < j.$$

И тогда мы получаем матрицу Γ_p в ином, "упрощенном" виде

$$\Gamma_p = \begin{bmatrix} -\tau_1 z_1 & \sum_{i=1}^2 \tau_i z_1^{i+1} & -\sum_{i=1}^3 C_2^{i-1} \tau_i z_1^{i+2} & \cdots & (-1)^p \sum_{i=1}^p C_{p-1}^{i-1} \tau_i z_1^{i+p-1} \\ -\tau_2 z_1 & \sum_{i=2}^3 \tau_i z_1^i & -\sum_{i=2}^4 C_2^{i-2} \tau_i z_1^{i+1} & \cdots & (-1)^p \sum_{i=2}^{p+1} C_{p-1}^{i-2} \tau_i z_1^{i+p-2} \\ -\tau_3 z_1 & \sum_{i=3}^4 \tau_i z_1^{i-1} & -\sum_{i=3}^5 C_2^{i-3} \tau_i z_1^i & \cdots & (-1)^p \sum_{i=3}^{p+2} C_{p-1}^{i-3} \tau_i z_1^{i+p-3} \\ -\tau_4 z_1 & \sum_{i=4}^5 \tau_i z_1^{i-2} & -\sum_{i=4}^6 C_2^{i-4} \tau_i z_1^{i-1} & \cdots & (-1)^p \sum_{i=4}^{p+3} C_{p-1}^{i-4} \tau_i z_1^{i+p-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\tau_p z_1 & \sum_{i=p}^{p+1} \tau_i z_1^{i-p+2} & -\sum_{i=p}^{p+2} C_2^{i-p} \tau_i z_1^{i-p+3} & \cdots & (-1)^p \sum_{i=p}^{2p-1} C_{p-1}^{i-p} \tau_i z_1^i \end{bmatrix}, \text{ КОТО-}$$

рую в свою очередь можно представить в виде произведения двух матриц:

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \tau_p & \tau_{p-1} & \tau_{p-2} & \cdots & \tau_1 \\ \tau_{p+1} & \tau_p & \tau_{p-1} & \cdots & \tau_2 \\ \tau_{p+2} & \tau_{p+1} & \tau_p & \cdots & \tau_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{2p-1} & \tau_{2p-2} & \tau_{2p-3} & \cdots & \tau_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^p C_{p-1}^0 z_1^{2p-1} \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{p-1} C_{p-2}^0 z_1^{2p-3} & (-1)^p C_{p-1}^1 z_1^{2p-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_1^0 z_1^3 & \cdots & (-1)^{p-1} C_{p-2}^{p-3} z_1^p & (-1)^p C_{p-1}^{p-2} z_1^{p+1} \\ -z_1 & C_1^1 z_1^2 & \cdots & (-1)^{p-1} C_{p-2}^{p-2} z_1^{p-1} & (-1)^p C_{p-1}^{p-1} z_1^p \end{pmatrix}.$$

Пусть в разложении (3) $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{k-1} = 0$. Рассмотрим подматрицу G размерности k матрицы Γ_p :

$$G = \begin{pmatrix} \tau_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{k+1} & \tau_k & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{k+2} & \tau_{k+1} & \tau_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{2k-1} & \tau_{2k-2} & \tau_{2k-3} & \dots & \tau_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^k C_{k-1}^0 z_1^{2k-1} \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{k-1} C_{k-2}^0 z_1^{2k-3} & (-1)^k C_{k-1}^1 z_1^{2k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_1^0 z_1^3 & \dots & (-1)^{k-1} C_{k-2}^{k-3} z_1^k & (-1)^k C_{k-1}^{k-2} z_1^{k+1} \\ -z_1 & C_1^1 z_1^2 & \dots & (-1)^{k-1} C_{k-2}^{k-2} z_1^{k-1} & (-1)^k C_{k-1}^{k-1} z_1^k \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим оператор $(I - zN)^{-1}$:

$$(I - zN)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-zz_1^*} & \frac{z}{1-zz_1^*} & \frac{z^2}{1-zz_1^*} & \dots & \frac{z^{k-1}}{1-zz_1^*} \\ 0 & \frac{1}{1-zz_1^*} & \frac{z}{1-zz_1^*} & \dots & \frac{z^{k-2}}{1-zz_1^*} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-zz_1^*} & \dots & \frac{z^{k-3}}{1-zz_1^*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-zz_1^*} \end{pmatrix},$$

$$F(z) = C(I - zN)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau_0^*}{(1-zz_1^*)} & \frac{z\tau_0^*}{(1-zz_1^*)^2} & \dots & \frac{z^{k-1}\tau_0^*}{(1-zz_1^*)^k} \\ -\frac{1}{(1-zz_1^*)} & \frac{z}{(1-zz_1^*)^2} & \dots & \frac{z^{k-1}}{(1-zz_1^*)^k} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функцию $F(z)$ можно записать в следующем виде

$$F(z) = uR(z),$$

где $R(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-zz_1^*)} & \frac{z}{(1-zz_1^*)^2} & \dots & \frac{z^{k-1}}{(1-zz_1^*)^k} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $p(z)$ полином степени $\deg p(z) \leq k - 1$

$$p(z) = (1 - zz_1^*)^k R(z)G^{-1}R(z_0)^*, \quad p(z_1) \neq 0. \quad (10)$$

Для данного полинома $p(z)$ характерно свойство

$$p(z) - z_0(-z_1^*)^k z^{k-1} p(1/z^*)^* = 0$$

и выполнена асимптотика

$$\frac{(1 - zz_1^*)^k}{(1 - zz_0^*)p(z)} = \sum_{i=k}^{2k-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2k}). \quad (11)$$

Исходя из вышесказанного, формула представления матрицы $\Theta(z)$ имеет вид

$$\Theta(z) = I_2 - (1 - zz_0^*)R(z)G^{-1}R(z_0)^*uu^*J_f = I_2 - \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k}p(z) \begin{pmatrix} \tau_0^* & -\tau_0^*\tau_0 \\ -1 & \tau_0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Найдём обратную матрицу $\Theta(z)^{-1}$.

$$\Theta(z)^{-1} = I_2 - \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k}p(z) \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_0^*\tau_0 \\ 1 & \tau_0^* \end{pmatrix} = I_2 + \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k}p(z)uu^*J_f,$$

где $\begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix}$, $J_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Итак, получили преобразование Шура для функции Каратеодори в точке z_1 на окружности:

$$\widehat{f}(z) = \chi_{\Theta(z)^{-1}}(f(z)) = \frac{\{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0(1 - zz_0^*)p(z)\}f(z) - \tau_0\tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)}{-(1 - zz_0^*)p(z)f(z) + \{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)\}}. \quad (13)$$

2. ОСНОВНАЯ ГРАНИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Сформулируем основную граничную интерполяционную задачу для обобщённой функции Каратеодори.

Пусть $z_1 \in \mathbb{T}$, где \mathbb{T} — единичная окружность, для целого числа $k \geq 1$ существует набор комплексных чисел $\tau_0, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{2k-1}$ с условием $\tau_0 + \tau_0^* = 0$, $\tau_k \neq 0$ и такой, что матрица G вида (9) является эрмитовой.

Основная граничная интерполяционная задача состоит в том, чтобы определить все функции $f \in C_{z_1}$ такие, что имеет место асимптотика

$$f(z) = \tau_0 + \sum_{i=k}^{2k-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2k}), \quad z \rightarrow z_1. \quad (14)$$

Через $C_{z_1}^{z_1; 2k}$ обозначим обобщённый класс Каратеодори функций, голоморфных в точке z_1 и для которых справедлива асимптотика (14).

Если функция $f(z)$ является решением основной граничной интерполяционной задачи, то $f(z)$ принадлежит классу $C_{z_1}^{z_1; 2k}$, где $\varkappa \in \mathbb{Z}$ и $\varkappa \geq \varkappa_-(G)$, $\varkappa_-(G)$ — число отрицательных квадратов матрицы G .

Определим также точку $z_0 \in \mathbb{T} \setminus \{z_1\}$ и полином $p(z)$ по формуле (10).

Теорема 1. Дробно-линейное преобразование

$$f(z) = \frac{\{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)\}\tilde{f}(z) + \tau_0\tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)}{(1 - zz_0^*)p(z)\tilde{f}(z) + \{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0(1 - zz_0^*)p(z)\}} \quad (15)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми решениями $f(z) \in C_{\mathcal{K}}^{z_1; 2k}$ основной граничной интерполяционной задачи и всеми функциями $\tilde{f}(z) \in C_{\tilde{\mathcal{K}}}$, для которых

$$\liminf_{z \rightarrow z_1} |\tilde{f}(z) - \tau_0| > 0, \quad (16)$$

где $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} - \mathcal{K}_-(G)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(z) \in C_{\tilde{\mathcal{K}}}$ обладает свойством (16). Докажем, что все функции $f(z)$ вида (14) являются решениями основной граничной интерполяционной задачи. Если функция $f(z)$ задана формулой (15), то выполнено равенство

$$f(z) - \tau_0 = \frac{(1 - zz_1^*)^k(\tilde{f}(z) - \tau_0)}{(1 - zz_0^*)p(z)\tilde{f}(z) + \{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0(1 - zz_0^*)p(z)\}}.$$

Данное равенство показывает, что функция $f(z) - \tau_0$ имеет нуль порядка k в точке $z = z_1$ и отсюда, учитывая свойство (16), следует

$$(1 - zz_0^*)p(z)(f(z) - \tau_0) - (1 - zz_1^*)^k = -\frac{(1 - zz_1^*)^k(f(z) - \tau_0)}{\tilde{f}(z) - \tau_0} = O((z - z_1)^{2k}),$$

при $z \rightarrow z_1$.

Заметим, что дробно-линейное преобразование вида (15) является обратным обобщенным преобразованием Шура и

$$\tilde{f}(z) = \chi_{\Theta(z)^{-1}}(f(z)) = \hat{f}(z).$$

Следовательно, полином $p(z)$ обладает свойством (11). Тогда

$$f(z) - \tau_0 - \sum_{i=k}^{2k-1} \tau_i(z - z_1)^i = O((z - z_1)^{2k}).$$

Из чего и получаем, что $f(z)$ вида (15) является решением основной граничной интерполяционной задачи.

Обратно, пусть выражение (15) определяет все решения основной граничной интерполяционной задачи. Докажем, что свойство (16) выполнено и $\tilde{f}(z) \in C_{\tilde{\mathcal{K}}}$ с $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} - \mathcal{K}_-(G)$.

Рассмотрим выражение

$$(1 - zz_0^*)p(z)(\tilde{f}(z) - \tau_0) + (1 - zz_1^*)^k = \frac{(1 - zz_1^*)^k(\tilde{f}(z) - \tau_0)}{f(z) - \tau_0} =$$

$$= \frac{z_1^*(\tilde{f}(z) - \tau_0)}{\tau_k + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_{k+i}(z - z_1)^i + O((z - z_1)^k)},$$

при $z \rightarrow z_1$.

Следовательно, когда функция $\hat{f}(z)$ рациональна, неравенство (16) эквивалентно тому, что знаменатель в (15)

$$(1 - zz_0^*)p(z)(\tilde{f}(z) - \tau_0) + (1 - zz_1^*)^k$$

не равен нулю в точке $z = z_1$.

Докажем, что $\tilde{f}(z) \in C_{\tilde{\kappa}}$.

Рассмотрим ядро $K_X(z, \omega)$ вида (4), где $X(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -f(z)^* \end{pmatrix}^*$.

Поскольку $f(z) \in C_{\kappa}$, то $K_X(z, \omega)$ имеет κ отрицательных квадратов. Представим $K_X(z, \omega)$ в виде

$$K_X(z, \omega) = X(z) \frac{J_f - \Theta(z)J_f\Theta(\omega)^*}{1 - z\bar{\omega}} X(\omega)^* + \frac{X(z)\Theta(z)J_f\Theta(\omega)^* X(\omega)^*}{1 - z\bar{\omega}},$$

где $\Theta(z)$ — матрица вида (12). Матрица $X(z)\Theta(z)$ описывает обобщенное преобразование Шура (13) в терминах линейных отношений. Обозначим количество отрицательных квадратов матрицы G через $\kappa_-(G)$. Поскольку количество отрицательных квадратов ядра $K_\Theta(z, \omega)$ ровно столько, сколько отрицательных квадратов матрицы G , получаем $\kappa = \kappa_-(G) + \tilde{\kappa}$, где $\tilde{\kappa}$ — количество отрицательных квадратов ядра $K_{X\Theta}(z, \omega)$. \square

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ $\mathcal{U}_f^{z_1}$

Цель данного пункта исследовать факторизацию класса рациональных функций на элементарные множители.

Напомним, что всякая рациональная аналитическая в нуле функция $\Theta(z)$ может быть представлена в виде [2]

$$\Theta(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B, \quad (17)$$

где A, B, C , и D — матрицы подходящих размеров и $D = \Theta(0)$.

Реализация (17) называется минимальной, если размерность матрицы A на столько мала, на сколько это возможно. Иначе говоря, реализация минимальна, если выполнено

$$\bigcap_{l=0}^{\infty} \ker CA^l = \{0\} \text{ и } \bigcup_{l=0}^{\infty} \text{ran} A^l B = \mathbb{C}^m,$$

где A — матрица $m \times m$.

Размерность матрицы A минимальной реализации (17) называется степенью Макмиллана и обозначается $\deg \Theta$.

Определение 1. Произведение (или факторизация)

$$\Theta(z) = \Theta_1(z)\Theta_2(z), \quad (18)$$

где $\Theta(z), \Theta_1(z), \Theta_2(z)$ — рациональные $p \times p$ матричные функции, называется минимальной, если $\deg \Theta_1\Theta_2 = \deg \Theta_1 + \deg \Theta_2$.

Факторизация (18) называется тривиальной, если не менее одного множителя является постоянной матрицей.

Рациональная функция $\Theta(z)$ называется элементарной, если она не допускает нетривиальных минимальных факторизаций.

Если функция $\Theta(z)$ является J -унитарной, факторизация (18) называется J -унитарной только тогда, когда оба множителя $\Theta_1(z)$ и $\Theta_2(z)$ — J -унитарны.

В случае, когда $\Theta(z)$ является рациональной и J -унитарной функцией на \mathbb{T} , ядро

$$K_\Theta(z, w) = \frac{J_f - \Theta(z)J_f\Theta(w)^*}{1 - zw^*}$$

имеет конечное число положительных и отрицательных квадратов. Обозначим за $\mathcal{P}(\Theta)$ пространство Понтрягина, порождённое ядром $K_\Theta(z, w)$.

Обозначим через $\mathcal{U}_f^{z_1}$, где $z_1 \in \mathbb{T}$, класс всех рациональных 2×2 матричных функций, обладающих свойством J -унитарности на $\mathbb{T} \setminus \{z_1\}$ и имеющих единственный полюс в точке z_1 . Класс $\mathcal{U}_f^{z_1}$ является подпространством $\mathcal{P}(\Theta)$.

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{T} \setminus \{z_1\}$ — фиксированная на окружности.

Определение 2. Функция $\Psi(z) = \Theta(z)\Theta(z_0)^{-1}$ называется нормализованной матричной функцией.

Сформулируем вспомогательные теоремы, которые лежат в основе доказательства основного результата данного пункта.

Теорема 2. [2, стр.40] Пусть $z_1 \in \mathbb{T}$ и $\Theta(z)$ нормализованная функция класса $\mathcal{U}_f^{z_1}$. Тогда $\Theta(z)$ допускает единственную минимальную факторизацию на нормализованные множители.

Теорема 3. [2, стр.33] Пусть C, N — матрицы размера $k \times t$ и $t \times t$ соответственно. Пусть матрица G — обратимая эрмитовая $t \times t$ матрица. Тогда линейная оболочка \mathcal{M} столбцов матричной функции $F(z) = C(I - zN)^{-1}$, на которой определена метрика

$$[Fc, Fd] = d^*Gc, \quad c, d \in \mathbb{C}^m,$$

является пространством Понтрягина $\mathcal{P}(\Theta)$ тогда и только тогда, когда матрица G является решением уравнения

$$G - N^*GN = C^*JN.$$

В этом случае

$$\Theta(z) = I - (1 - zz_0^*)C(I - zN)^{-1}G^{-1}(I - z_0N)^{-*}C^*J, \quad (19)$$

где $z_0 \in \mathbb{T}$ такое, что $z_0^* \in \rho(N)$.

Основываясь на этих теоремах докажем следующий результат о факторизации функции Θ на элементарные множители.

Теорема 4. (1) Нормализованная матричная функция $\Theta(z) \in \mathcal{U}_f^{z_1}$ элементарна тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\Theta(z) = I_2 - \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k} p(z) u u^* J_f, \quad (20)$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, вектор $\begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix}$ — J -нейтральный: $u^* J u = 0$, $p(z)$ — полином степени $\deg p(z) \leq k - 1$ и удовлетворяющий условиям

$$p(z) - z_0(-z_1^*)^k z^{k-1} p(1/z^*)^* = 0, \quad p(z_1) \neq 0.$$

(2) Каждая функция $\Theta(z) \in \mathcal{U}_f^{z_1}$ допускает единственную минимальную факторизацию

$$\Theta(z) = \Theta_1(z) \cdots \Theta_n(z) U,$$

для которой каждая функция $\Theta_j(z)$ является нормированной элементарной матричной функцией из класса $\mathcal{U}_f^{z_1}$ и $U = \Theta(z_0)$ является J_f -унитарной константой.

Доказательство. (1) Пусть $\Theta(z) \in \mathcal{U}_f^{z_1}$ является нормализованной элементарной матричной функцией. Докажем, что для $\Theta(z)$ справедливо представление в виде (20).

Действительно, по теореме 3, поскольку класс $\mathcal{U}_f^{z_1}$ является подпространством $\mathcal{P}(\Theta)$, функция $\Theta(z)$ имеет вид (19), а отсюда и следует нужное нам представление (20). Функция (20) является нормализованной, поскольку $\Theta(z_0) = I$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\Theta(z)$ представима в виде (20), докажем, что она элементарна. Предположим, что условие элементарности не выполняется, тогда факторизуем матрицу $\Theta(z)$. Через конечное число шагов мы получим

$$\Theta(z) = \Theta_1(z) \Theta_2(z) \cdots \Theta_n(z),$$

где $\Theta_j(z)$, $j = \overline{1, n}$ — элементарные матрицы. Тогда, из доказанного, мы получаем, что каждая из матриц $\Theta_j(z)$ имеет вид (20) и, следовательно, $n = 1$.

(2) Следует из теоремы 2. □

Это показывает, что функция $\Theta(z)$, соответствующая обобщённому преобразованию Шура и основной граничной интерполяционной задаче в предыдущем параграфе, является нормированным элементарным множителем в $\mathcal{U}_f^{z_1}$.

Мы схематично обозначим, как получить факторизацию произвольной матричной функции $\Theta(z) \in \mathcal{U}_f^{z_1}$, используя алгоритм Шура.

1) Во-первых, нормализуем $\Theta(z)$:

$$\Theta(z) = \Psi(z)\Theta(z_0), \quad \Psi(z) = \Theta(z)\Theta(z_0)^{-1} = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\Psi(z)$ не является J_f -унитарной константой, иначе процедура остановилась бы прямо на первом шаге. Обозначим за $o_{z_1} g$ порядок полюса функции $g(z)$ в точке z_1 . Выберем $\xi \in \mathbb{T}$ такое, что выполнено

- (a₁) $c(0)\xi + d(0) \neq 0$,
- (a₂) $o_{z_1}(a\xi + b) = \max\{o_{z_1}(a), o_{z_1}(b)\}$,
- (a₃) $o_{z_1}(c\xi + d) = \max\{o_{z_1}(c), o_{z_1}(d)\}$,
- (a₄) функция $f(z) = \frac{a(z)\xi + b(z)}{c(z)\xi + d(z)}$ не равна тождественно константе.

Каждое из первых трех условий выполнено самое большее для одного значения ξ . Четвертое условие выполнено для всех кроме двух значений. Таким образом, есть не более пяти запрещённых значений для $\xi \in \mathbb{T}$. Поскольку $\Psi(z) \in \mathcal{U}_f^{z_1}$, функция $f(z)$ является рациональной обобщённой функцией Каратеодори и, следовательно, голоморфна на \mathbb{T} и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{T}$, то есть, $f(z)$ — частное двух множителей Бляшке. Из этого следует, что для ядра $K_f(z, w)$ справедливо асимптотическое представление (7) для $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$. Поскольку ядро $K_f(z, w)$ является симметричным, то матрица Γ любого размера эрмитовая.

2) Мы можем применить алгоритм Шура:

$$f_0(z) = f(z), \quad f_1(z) = \chi_{\Psi_1(z)^{-1}}(f_0(z)), \dots, f_n(z) = \chi_{\Psi_n(z)^{-1}}(f_{n-1}(z)),$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ — нормализованные матричные функции вида (20). Алгоритм будет конечным, поскольку на некотором шаге $\Psi_n(z)$ станет унитарной постоянной матричной функцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классом Шура в комплексном анализе называют множество голоморфных функций, определённых и ограниченных единицей на единичном круге. Понятие функций Шура встречается как в интерполяционной теории и теории инвариантных подпространств, так и в приложениях. Некоторые ядра, индуцированные функцией Шура, встречаются в теории наиболее часто. Это воспроизводящие ядра для функциональных гильбертовых пространств, которые сегодня понимаются как пространства состояний для канонических коизометрических, изометрических и унитарных операторных узлов, чьи характеристические функции совпадают с данной функцией Шура.

Операторное обобщение понятия класса Шура определяется множеством функций $s(z)$, заданных и голоморфных на подобласти единичного круга, содержащей нуль, и принимающих значения во множестве $L(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$ непрерывных операторов, где $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}$ — гильбертовы пространства Понтрягина либо пространства Крейна.

Каждой такой функции поставим в соответствие три ядра

$$K_s(\omega, z) = \frac{I - s(z)s(\omega)^*}{1 - z\omega^*}, \quad K_{\tilde{s}}(\omega, z) = \frac{I - \tilde{s}(z)\tilde{s}(\omega)^*}{1 - z\omega^*},$$

$$D_s(\omega, z) = \begin{pmatrix} K_s(\omega, z) & \frac{s(z) - s(\omega^*)}{z - \omega^*} \\ \frac{\tilde{s}(z) - \tilde{s}(\omega^*)}{z - \omega^*} & K_{\tilde{s}}(\omega, z) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{s}(z) = s(z^*)^*$ и I обозначает скалярную единицу или единичный оператор в зависимости от контекста. Когда эти ядра неотрицательны, они являются воспроизводящими ядрами гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(s)$, $\mathfrak{H}(\tilde{s})$, $\mathfrak{D}(s)$ векторнозначных функций. Данные пространства появляются в канонической модели сжимающих операторов для случая гильбертовых пространств в теории Л. де Бранжа и Дж. Ровняка.

В общем случае у данных трёх ядер предполагалось наличие \varkappa отрицательных квадратов, для некоторого неотрицательного целого числа \varkappa . Тогда мы говорим, что функция $s(z)$ принадлежит обобщённому классу Шура $\mathbf{S}_\varkappa(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$. Согласно теории Л. Шварца и П. Сорьонена, в случае обобщённого класса Шура пространства $\mathfrak{H}(s)$, $\mathfrak{H}(\tilde{s})$, $\mathfrak{D}(s)$ также существуют, однако теперь как пространства Понтрягина с отрицательным индексом κ . Заметим, что индефинитность появляется и тогда, когда пространства \mathfrak{H} и \mathfrak{G} являются пространствами Понтрягина или Крейна. Данный подход впервые исследовался В. П. Потаповым.

Индефинитные случаи также были изучены в сериях работ Д. Алпая, Т. Я. Азизова, М. Г. Крейна и Г. Лангера и недавних работах Л. де Бранжа.

Теория Крейна-Лангера предполагает, что пространства \mathfrak{F} и \mathfrak{G} гильбертовы, и необходимость такого подхода мотивируется спектральной теорией, классическими представлениями резольвент и вопросами теории функций.

Теория де Бранжа охватывает различные системы точек зрения и использует понятие дополнения для создания ключевой конструкции.

Однако, несмотря на то, что получено множество выдающихся результатов, индефинитная теория менее изучена, нежели гильбертов случай.

Своё развитие теория пространств с индефинитной метрикой и действующих в них операторов получила в работах М. Г. Крейна, И. С. Иохвидова, Р. Филлипса, М. А. Наймарка, Г. К. Лангера, П. Йонаса, Т. Я. Азизова, А. А. Шкаликова, в ряде совместных работ Д. Алпая, Т. Я. Азизова, А. Дайксмы и Г. Лангера.

В настоящей работе мы исследуем качественные свойства обобщенных функций Каратеодори, касающиеся построения алгоритма Шура, факторизации и интерполяции матричных функций. Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Шура дробно-линейным преобразованием Кэли-Неймана.

Для доказательства основных результатов используются методы математического анализа, теории приближений, операторной теории, теории интерполяции функций.

Основные результаты работы:

1. Получено преобразование Шура для обобщённой функции Каратеодори в точке, принадлежащей единичной окружности.
2. Доказаны теоремы о факторизации и интерполяции рациональных матричных функций для случая преобразования Шура обобщённой функции Каратеодори на единичной окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ALPAY, D. & AZIZOV, T. YA. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. & WANJALA, G. (2004) The Shur Algorithm for Generalized Schur Functions IV: Unitary Realizations. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 149). p. 23–45.
2. ALPAY, D. & DIJKSMA, A. & LANGER, H. (2007) The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 176.). p. 1–98.

3. ALPAY D. & DYM H. (1993) On a new class of reproducing kernel spaces and a new generalization of the Iohvidov laws. *Linear Algebra Applications*. (Vol.178). p. 109–183.
4. ALPAY D. & DYM H. (1996) On a new class of realization formulas and their applications. *Linear Algebra Applications*. (Vol. 241-243). p. 3–84.
5. ALPAY D. & GOHBERG I. (1988) Unitary rational matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 33). p. 175-222.
6. ALPAY D. & GOHBERG I. (2006) Discrete analogs of canonical systems with pseudoexponential potential. Definitions and formulas for the spectral matrix functions. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 161). p. 1–47.
7. ANDREISHCHEVA E. (2006) Approximation of Generalized Schur functions. *International Conference "Sixth Workshop Operator Theory in Krein Spaces and Operator Polynomials": Book of abstracts*. Berlin. p. 10–11.
8. ANDREISHCHEVA E. (2007) Representation of Schur function for case of unitary realization . *International Conference "Modern Analysis and Applications": Book of abstracts*. Kyiv. p. 8–9.
9. DE BRANGES L. (1963) Some Hilbert spaces of analytic functions I. *Trans.Amer.Math.Soc.* (Vol. 106). p. 445–468.
10. DE BRANGES L. & ROVNYAK J. (1966) Canonical models in quantum scattering theory. *Wiley*. New York. p. 295–392.
11. DIJKSMA A. & LANGER H. & LUGER A. & SHONDIN Y. (2004) Minimal realizations of scalar generalized Nevanlinna functions related to their basic factorization. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 154). p. 69–90.
12. DYM H. (1989) On reproducing kernel spaces, J -unitary matrix functions, interpolation and displacement rank. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 41). p. 173-239.
13. GOHBERG I. (1986) Schur methods in operator theory and signal processing. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 30-77.

14. IOHVIDOV I. S. & KREIN M. G. & LANGER H. (1982) Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. *Mathematical Research, Akademie-Verlag*. Berlin (Band 9). p. 120.
15. JONAS P. (1981) On the functional calculus and the spectral function for definizable operators in Krein space . *Beitrage Anal.*. (Vol.16). p. 121–135.
16. KREIN M. G. (1970) Über die verallgemeinerte Rezolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators in Raume Π_κ . *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai.*. Tihany (Hungary) (Vol.5). p. 353–399.
17. KREIN M. G. & LANGER H. (1977) Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math. Nachr.*. (Vol.77). p. 187–236.
18. KREIN M. G. & LANGER H. (1981) Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ . *Acta Sci. Math. Szeged.* (Vol. 43). p. 181–205.
19. LANGER H. (1982) Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces. *Lecture Notes in Mathematics.* (№948). p. 1–46.
20. PHILLIPS R. (1961) The extension of dual subspaces invariant under an algebra. *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces.* Paris: Pergamon Press. p. 366–398.
21. SCHUR I. (1986) Über die Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises ähnt sind. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 18). p. 31–59.
22. WANJALA H. (2005) Closely connected unitary realizations of the solutions to the basic interpolation problem for generalized Schur functions. *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel (Vol. 160). p. 441–468.

УДК: 519.688, 573.7

MSC2010: 57M15, 94C15

МОДЕЛИ СПЕЦИФИЧЕСКИХ ФОРМ БИОЛОГИЧЕСКИХ ВСПЫШЕК В МОДИФИКАЦИЯХ УРАВНЕНИЙ БАЗЫКИНА И ФЕРХЮЛЬСТА–ПИРЛА¹

© В. А. Дубровская, А. Ю. Переварюха

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

14-линия Васильевского острова., 39, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 199178, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: madelf@rambler.ru, temp_elf@mail.ru

MODELS OF SPECIFIC FORMS OF INSECT OUTBREAKS IN MODIFICATIONS OF
BAZYKIN AND VERHULST-PEARL EQUATIONS.

Dubrovskaya V. A., Perevaryukha A. Yu.

Abstract. The article discusses environmentally sound modifications for two popular population models of Bazykin and Verhulst-Pearl for the task of describing particular and non-trivial changes in population processes. A variety of the extreme nature of the number dynamics of an invasive insect species — outbreak activity of pests is modeled. The problem of applied computational modeling of transient modes of oscillating and destructive invasions of alien pests is relevant for many cases of sporadic mass reproduction of insect pests without biological control. As a result of analyzing the properties of known ecological models, we propose a modification that combines the most ecologically relevant trajectory behaviors after the cycle birth Hopf bifurcation. In the new equation of insect population dynamics with the deviating argument $\dot{x} = rx(t-h)f(x^k(t-\tau))$, an alternative unimodal regulator function $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > \epsilon$ instead of $r(x/K)^k$ and $rx \exp(-bx)$ or $rx \sqrt[3]{(x-L)}$ — for threshold in population dynamic:

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln \left(\frac{K}{x(t-\tau)} \right) \sqrt[3]{(x-L)}.$$

L — is a critical threshold. With a significant increase in the value of the delay in such equations, the behavior of the trajectory becomes more complicated. As a result of the modification, we were able to overcome and correct the lack of unrealistically low minima in the Hutchinson equation, as we see when a relaxation cycle of considerable amplitude occurs. We have proposed a new equation describing the effect of a critical minimum based on a modification of the Bazykin model with a regulator function $\ln K/N(t-h)$. In the extreme extension of the Ferhulst-Pearl equation with delay:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right) (\mathfrak{H} - x(t-\tau_1)).$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-07-00125.

In the new equation the destruction of relaxation oscillations is described as a transitional regime of a specific outbreak of the number of insects affecting the state of agrocenosis. The cycle is compressed and destroyed, there is a loss of dissipative properties with preservation of the pseudoperiodic component. The computational experiment is stopped by the internal message of the instrumental environment about overflow in floating-point calculations.

Keywords: *equation with deviating argument, cycles, Hopf bifurcation, control functions, forms of delay in biosystems, outbreaks and insect invasion*

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поиска подходящих функций-регуляторов, формализующих механизмы контроля эффективности размножения видов с потенциально очень большим r -параметром, основополагающая в математической биологии. Еще Фибоначчи рассматривал модель с размножением кроликов со скоростью геометрической прогрессии. В экологической реальности это невозможно, существуют сложные механизмы ограничения размножения. Однако, как любой сложный механизм может ломаться, регуляторы могут иногда не срабатывать вовремя. Актуальной задачей для математического моделирования остаются проблемы связанные со «вспышками численности». Математически такие явления можно назвать стремительным сдвигом индекса выравнивания биологического разнообразия.

В предыдущей работе мы провели анализ деградации биоресурсов Каспийского моря [1] в дискретно-непрерывной системе. Для случая осетровых рыб мы использовали сценарный подход для описания коллапса промысловых популяций [2]. В настоящей статье мы рассмотрим другой особый случай — сценарии модели критической ситуации при вторжении чужеродного вида. Предложим модификации моделей динамики локальной популяции, резко принимающей экстремальный характер с учетом того, что емкость среды K не является константным ограничением и балансовым равновесием.

В экологии квадратичная саморегуляция уравнения Ферхюльста считается хрестоматийной:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (0)$$

Модификация в обобщенном уравнении Ферхюльста-Пирла:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^k \right), \quad 1 < k < i, \quad k, i \in \mathbb{N}$$

Скорее из политико-экономических соображений полагалось у решения (0) $\dot{N} = rf(N^2)$ наличие точки $f'(\tilde{N}) = 0 : f'(N) < 0, N > \tilde{N}$, — снижения скорости прироста до его остановки на уровне «насыщения среды»: $f(N^*) = 0, N^* = K, \forall N(0), \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$. Как описать емкость экологической ниши в условиях стремительной инвазии — распространению чужеродного вида, отвоевывающего свою нишу. Мы полагаем, базовое понятие емкость среды K имеет ограниченную область применения, что необходимо учитывать при построении усовершенствованных моделей.

1. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ БАЗЫКИНА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ПОРОГА

При низкой плотности популяции происходят особые процессы, связанные с эффектом бутылочного горлышка, состояния с предельно низкой численностью. Существует понятие о минимально возможной низкой численности, которая допустима для существования популяции у многих социальных животных. Можно формализовать данное представление, добавив сомножитель $\dot{N} = rf(N^2)(N - L)$, но не как предложил Базыкин в известном уравнении [3].

Модифицируем уравнение (0) с применением другой функцией $f(N)$, имеющей свойство $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$. Соответственно, с другим положением точки $f'(\tilde{N}) = 0$, следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r \ln \left(\frac{K}{N} \right) N \sqrt[3]{(N - L)}, \quad (1)$$

где r — традиционно репродуктивный параметр. Теоретически, r в моделях регуляции нужно отличать от мальтузианского параметра \mathbf{r} модели неограниченного роста $N(t) = N(0)e^{\mathbf{r}t}$ популяции, где \mathbf{r} полностью реализованный репродуктивный потенциал плодовитости особей. В правую часть (1), где $f(N) = 0, \ln(N/K) = 1$, добавлен сомножитель, что увеличивает число ее нулей. Подобным образом можно описать минимальную численность, связанную с эффектом Олли, только данное явления триггерное (проявляющееся вдруг и резко). Снижение репродуктивного потенциала начинает наблюдаться, когда состояние популяции далеко не оптимальное. В оптимальном состоянии большой группы особей эффект никак не проявляется на регуляции численности, потому выбор $f(N) = \ln(K/N)$ и степени $1/3$ более логичен, чем для функции квадратичной регуляции $f(N) = rN(1 - N/K)$.

Вымирание ($N(t) \rightarrow 0$) в модели вида (1) будет выглядеть стремительным и безвозвратным явлением. Введения явного порога L не самый элегантный метод описания эффекта Олли. Альтернативный способ — воспользоваться стохастическим возмущением. Многие популяции могут восстанавливать численность от единичных

сохранившихся особей (как бабочка-вредитель непарный шелкопряд прочие случайные вселенцы) и через некоторое время снова демонстрировать нестационарные режимы. Исчезновение ряда популяций (характерно для островных сообществ, где нет разреженной границы ареала) может происходить как раз не из состояния близкого к L , но при запрещенном для (1) режиме $\exists t : N(t) > K, N(0) < K$.

Интересна задача математического описания частного, но весьма показательного сценария популяционной динамики возникновения флуктуаций, при этом между пиками поддерживается численность на достаточно высоком уровне. Актуальным является сценарий подавления флуктуаций и перевод популяции чужеродного вида вредителя через диапазон минимальной численности «горлышка бутылки» к некоторому новому незначительному стационарному уровню, не воздействующему на среду.

2. ФУНКЦИИ-РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В МОДЕЛЯХ ЭКОЛОГИИ

Для возникающих резких режимов флуктуаций используются уравнения с запаздыванием $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - v(N(t))$, так как подобные явления наблюдаются у популяций при постоянных условиях и без участия хищников. В модели нет возможности перевести ситуацию к системе уравнений с классической потерей устойчивости точки-фокуса и бифуркацией Андронова-Хопфа.

В уравнениях с запаздыванием не составляет сложности получить после бифуркации колебательные режимы сложной формы. Актуален вопрос об адекватности характеристик полученных режимов при увеличении параметров r, τ . Усложнение колебаний и рост амплитуды могут сопровождаться понижением минимума цикла до ϵ -окрестности нуля, и вряд ли могут соотноситься с наблюдением за общей численностью популяции. На графиках вспышек, которые можно видеть в литературе, приводятся данные не о численности вредителя, но размеры пораженной территории или масштабы гибели леса. Нулевые отметки размера дефолиации леса не значат отсутствие насекомых.

Прохождение бутылочного горлышка — совсем не циклический эффект, это экстремальное состояние популяции. Отличается форма существования вида высокой вероятностью гибели от случайных факторов. Многие популяции оказывались в размерах малой группы, включая человеческую. Еще больше популяций вымерло в результате неблагоприятных факторов отбора.

Проблема метода состоит в экологической интерпретации запаздывания. Мы будем исходить из теории, что запаздывание не есть только атрибут биологического вида, (время взросления). Запаздывание возникает (или наоборот не наблюдается) при взаимодействии вида именно с конкретным биотическим окружением. Потому

регуляция с включением $N(t - \tau)$ является агрегированным фактором. Форму запаздывания можно принести в структуру когнитивного графа взаимодействия экологических факторов, который мы строили для проблем Каспийского моря в работе [4]. Введенное в уравнения запаздывание τ служит характеристикой регуляции; τ зависит от использования и восстановления нужных ресурсов или накопления/распада отравляющих продуктов метаболизма, но не связано с возрастом полового созревания. Задержка реакции при иммунном ответе не относится к данному типу запаздывания в регуляции.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ С $N(t - \tau)$

Из лабораторных экспериментов энтомолога Никольсона стало понятно, что колебания численности могут появляться у изолированной популяций, обитающих при постоянных условиях и получающих фиксированное количество корма. В [5] была предложена модификация $\dot{N} = rN(1 - N/K)$, исходя из запаздывающего действия саморегуляции, что привело к уравнению с отклоняющимся по времени аргументом:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (2)$$

Возникающие в подобных уравнениях режимы исследованы в работах многих математиков и обсуждались биологами [6] без применения вычислительных методов. При малых значениях запаздывания τ динамика модели опишет затухающие колебания $N(t) \rightarrow K$. В (2) установлена возможность возникновения бифуркации Андронова-Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла $N_*(t, r)$, где нарушение критерия устойчивости состояния равновесия зависит от величины $r\tau$. Дальнейшее увеличение $r\tau > \pi/2$ вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Однако, быстрое увеличение амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при малом временном промежутке между максимумами и стремящимися к нулю минимумами выводят такой релаксационный цикл за рамки допустимого экологического обоснования.

4. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ФЕРХЮЛЬСТА-ПИРЛА С $\ln(K/N(t - \tau))$

Модификацию колебательной модели с запаздыванием мы предложим с функцией регуляции с логарифмом $f(N) = \ln(K/N)$ вместо квадратичной или экспоненциальной:

$$\frac{dN}{dt} = r_g N(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает актуальный для развития инвазии чужеродного вида сценарий развития единичной, почти катастрофической вспышки численности. Взрывообразный рост при исчерпании ресурсов приводит к малочисленному состоянию и далее медленно уравнивается к не воздействующему на среду балансу K . На (рис. 1) показано сравнение динамики (2) и (3) при одинаковых значениях $K, \tau, N(0)$ и значении $r = r_g + 10$. Для варианта Хатчинсона видны два резких пика при стремящихся к нулю минимумах. При полном соответствии параметров в сценарии траектория уравнения Хатчинсона $N(0) < K$ монотонно $N(t) \rightarrow K$, повторяя поведение модели Ферхюльста–Пирла.

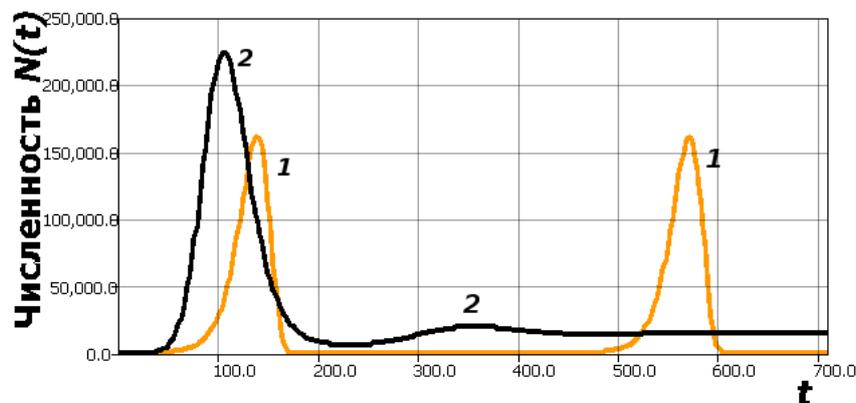


Рис. 1. 1 — Релаксационный цикл в уравнении (2), 2 — однократная вспышка в (3) $K = 15000, \tau = 48, r_g = 0.017$.

Описываемая уравнением (3) ситуация развивалась для интродуцированного для борьбы с инвазионным сорняком амброзией фитофага американского жука-зигогаммы *Zigogramma suturalis*. Популяция листоеда образовала волну, распространилась фронтом большой плотности, но далее прошла «бутылочное горлышко» и теперь трудно обнаруживается. Аналогично может описываться сохранение очага хронической инфекции в организме. При дополнении (3) сомножителем $N \sqrt[3]{(N - L)}$, аналогичным уравнению Базыкина

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) N \sqrt[3]{(N - L)}, \quad (3^*)$$

получим, что в (3*) прохождения «бутылочного горлышка» после максимума не наблюдается — популяция чужеродного вида после катастрофической вспышки $N(t) = 0$.

5. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ФЕРХЮЛЬСТА-ПИРЛА С НЕЗАВИСИМЫМ ИЗЪЯТИЕМ

Возможность вымирания популяций необходимо рассматривать в модельных сценариях экстремальных состояний, пусть даже связанных со вспышками численности. После вспышки всегда следует спад и депрессия. Интересный результат можно получить и более естественным средством, чем явным, но невидимым наблюдателю порогом L . Добавим в правую часть параметр независимой убыли $qN(t)$, который может отражать целенаправленное изъятие в целях борьбы с вселенцем:

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln \left(\frac{K}{N(t-\tau)} \right) N(t) - qN(t), \quad (3^{**})$$

и это изменит качественный характер решения. В (3**) после первой вспышки при инвазии следует следующая, действительно катастрофическая, но второй глубокий минимум становится последним — вычислительный эксперимент завершается, так как $N(t) < 0$ недопустимо. Сравнение на рис. 2 при $q = \bar{q} = 0.007$ тех же параметрах и (2*) — модификации (2)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right) - qN(t), \quad (2^*)$$

Остановка расчетов происходит при $N(t) < 0$.

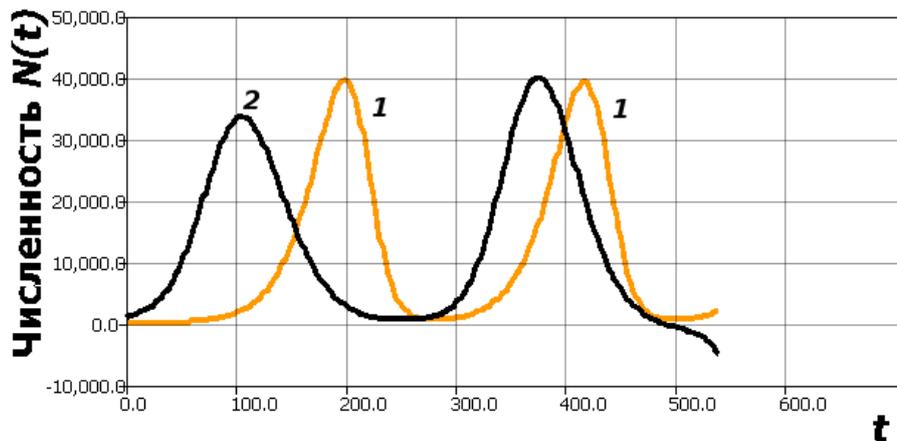


Рис. 2. 1 — Релаксационный цикл (2*), 2 — повторная катастрофическая вспышка и гибель популяции по (3**) $K = 15000, \tau = 48, r_g = 0.017, q = 0.007$.

При $q < \bar{q}$ мы получим второй пик меньше первого и классические затухающие колебания. Сценарий (рис. 3) показывает эффективность включения борьбы с чужеродным видом именно в период минимумов.

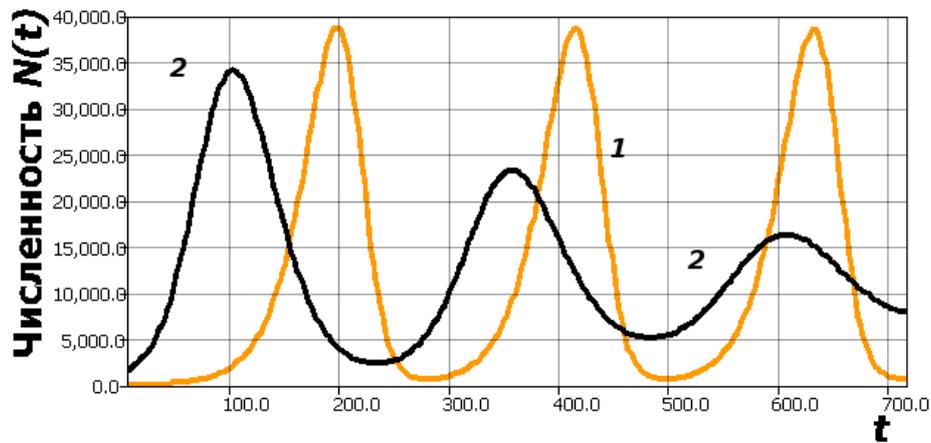


Рис. 3. 1 — Релаксационный цикл (2*), 2 — затухающие колебания (3**) $K = 15000, \tau = 48, r_g = 0.017, q = 006$.

В (2) можно получить сценарий $\exists t_M : N(r\tau, t_M) > K, \lim_{t \rightarrow \infty} = K$, но подобный режим модели Хатчинсона не будет катастрофической вспышкой, а незначительным перепополнением экологической ниши, и мы не увидим прохождения минимально возможных значений численности. Добавление независимой убыли в (2) улучшает свойства цикла и положение $\min N_*(t, r\tau)$. Сомножитель $\sqrt[3]{(N - L)}$ действует аналогично во всех уравнениях.

Формы колебаний для автохтонных и инвазионных, формирующихся в новой среде популяций, могут быть различными. Помимо затухающих и гармонических колебаний может возникать и противоположное явление — возникновение флуктуации с затяжными пиками численности. Для отдельных насекомых вредителей (как *Loxostege sticticalis* луговой мотылёк) характерна ситуация с переходом к пилообразной вспышке численности в виде серии коротких пиков между длительной депрессией [7], которую можно описать при некотором дополнении модели. За вспышкой всегда следует долгий период депрессии мотылька.

Дополнения правой «репродуктивной» части запаздыванием $rN(t - \tau)f[N(t), N(t - \tau)]$ не несут экологического смысла.

Амплитуду цикла $N_*(t, r)$ можно корректировать известными методами. В [8] рассматривалась модификация модели Хатчинсона (уже с приведенными коэффициентами)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \quad (4)$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, например $f(x) = (1-x)/(1+\Upsilon x)$. Для (4) установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы [9]. В такой модели коэффициент $\Upsilon > 0$ становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла, при увеличении Υ сжимается амплитуда, но $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow 0$ сохраняется. Можно считать такие уравнения моделями со смешанной регуляцией при наличии в уравнении $-N(t)N(t-\tau)$.

6. КАТАСТРОФИЧЕСКИЙ СЦЕНАРИЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВСПЫШКИ

Мы предложили модификацию уравнения, где получили сценарий вспышки, который назвали «предкатастрофическим». Рассмотрим теперь действительно катастрофический сценарий завершения инвазионного процесса. Во время нашествия насекомых могут полностью уничтожаться сотни гектаров лесов.

Предположим существование некоторого значимого порогового уровня $H < K$ при котором реализация репродуктивного потенциала максимальна $r \rightarrow \mathbf{r}$. Положим, что достижение значения численности K означает не уравнивание, но непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог имеет значение для скрытых от нас механизмов контроля внутривидовой структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение $(H - N(t - \tau))$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (2)² следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \tau)). \quad (5)$$

Можно считать, что при смене знака отклонения члены правой части (воспроизводства и регуляции) меняются своими функциональными ролями в модели.

При малом значении запаздывания в (5) получаем затухающие осцилляции с $N \rightarrow H$. Очевидно, что при увеличении τ в таком уравнении с $r_1 = 10^{-3}r$ возникнет устойчивый цикл (рис. 4, $K = 15000, H = 5000$).

На рис. 4 динамика после плавного прохождения бифуркационного изменения по сценарию Андронова-Хопфа при увеличении r_1 , (в вычислительном эксперименте рис. 1 все параметры модели сохраняются) показывающая установление к циклу при $N(0) = H + \epsilon, H = 5000, K = 15000$.

Цикл быстро становится релаксационным, но амплитуда колебаний в отличие аналогичного случая модели (3) не возрастает до нереалистичных величин, но остается в разумных для биологии границах. Негармоническая форма колебаний даже

²Вариант модификации модели (3) возможен, но менее удобен для сравнений.

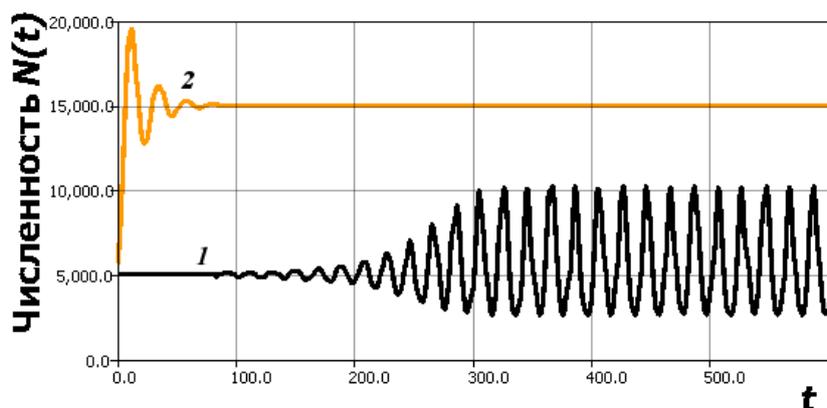


Рис. 4. 1 — цикл после бифуркации в (5), 2 — динамика (2) при аналогичных параметрах.

более похожа на реальные данные популяционной динамики мелких млекопитающих [10], чем циклы 2^i дискретных итераций $x_{n+1} = \psi(x_n)$. Поведение (5) зависит от начальных условий $N(0)$ интереснее, чем (2), при $N(0) < H$ переход к установившимся флуктуациям происходит не плавно, но через скачкообразный переходный режим.

При дальнейшем увеличении значения $r_1\tau$ произойдет другое резкое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. При бифуркации траектория системы вместо установления из переходного режима цикла со все увеличивающейся огромной амплитуды может быть резко выброшена за пределы допустимых для её существования значений при $N(t - \tau) > K$. Такая потеря установившегося режима считается жесткой (катастрофической). На рис. 5 показана ситуация после бифуркации, когда в результате изменения параметра r_1 (в сравнении с аналогичным изменением r в (3) в момент $t = 150$) траектория в релаксационных колебаниях преодолевает значение K , и далее $N(t) \rightarrow \infty$.

Цикл сжимается и разрушается, происходит потеря диссипативных свойств с сохранением псевдопериодической компоненты. Вычислительный эксперимент останавливается внутренним сообщением инструментальной среды о переполнении при вычислениях с плавающей точкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены результаты, дополняющие методы математической биологии. В новых модификациях уравнений нам удалось рассмотреть три сценария развития

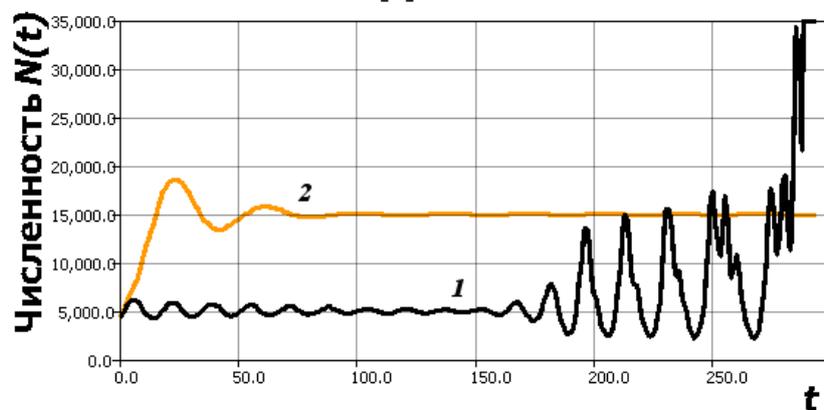


Рис. 5. 1 — выброс за границы емкости среды в (5), 2 — динамика (2) при аналогичном изменении параметра.

инвазионного процесса активно размножающегося чужеродного вида. Предполагается, что вид оказывает жесткое давление на среду и может подавлять конкурирующие с ним автохтонные группы организмов. В одном из модельных сценариев после вспышки вид проходит минимальный порог и далее его давление не ощущается и повторных вспышек не происходит. Однако на практике этот сценарий может быть «долгим», как для активного вселенца гребневика *Mnemiopsis leidyi* у берегов Крыма. В другом варианте развития ситуации вид после сценария с повторной вспышкой погибает из-за быстрого истощения ресурсов и включения активного сопротивления среды. Сценарий напоминает развитие эпидемий по типу «испанского гриппа», которые вдруг заканчиваются полностью. Третий сценарий предполагает деструкцию экосистемы вместе с видом после серии пиков численности, и скорее описывает летальное развитие инфекции. Сценарий, когда чужеродный вид после режима флуктуаций просто становится доминирующим, вполне описывается известными моделями.

Для практики интересно то, что нужно включать активное сопротивление и меры борьбы на этапе очевидного снижения численности. Особенно эффективно подавление при прохождении предпорогового уровня численности. На этапе нарастания темпов прироста изъятие только затягивает развитие вспышки, соответственно увеличивает последствия.

Особенно интересен последний сценарий катастрофического завершения инвазии. В современном обзоре по применению уравнений [11] в математической биологии подобный вариант поведения не упоминался. Бифуркация, для которой требовалось изменение условий регуляции, приводит систему не к изменению амплитуды/периода

цикла или переходу к хаотическому движению, но к скачку за границы экологического баланса в виде резкой потери замкнутого колебательного контура и образованию быстро возрастающего псевдопериодического решения.

Разработанная модель с внешней регуляцией методологически дополняет существующие модели локальной вспышки насекомых с быстрым завершением без возможности повторных пиков численности [12]. Наши модели более подходят для инвазионных видов — специфического случая в экологии, где важной новой характеристикой является циклическая составляющая перехода к ускоренному размножению вне действия обычных факторов контроля численности. Модель (5) можно использовать так же в составной вычислительной конструкции для описания преодоления порогового барьера начала вспышки. В следующей работе мы рассмотрим модель вспышки в форме пилообразных осцилляций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переварюха, А.Ю. Разработка вычислительных моделей воспроизводства рыб для сценарного исследования // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — №. 1. — С. 93–103.
PEREVARYUKHA, A. (2014) The development of computational models for fish reproduction in scenario investigations. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1. p. 93-103.
2. MYERS, R. (1997) Why do Fish Stocks Collapse? The Example of Cod in Atlantic Canada. *Ecological Applications*. 7. p. 96–106.
3. BAZYKIN, A. (1983) A model of evolutionary appearance of dissipative structure in ecosystems. *J. Math. Biology*. 4 (18). p. 13–23.
4. Переварюха, А.Ю. Метод когнитивной формализации в анализе многофакторной экологической проблемы Каспия // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — №. 4. — С. 52–65.
PEREVARYUKHA, A. (2015) Graph formalization and multifactor analysis of environmental problems on example of the Caspian Sea. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4. p. 52–65.
5. HUTCHINSON, G. (1959) A theoretical ecological model of size distributions among species of animals. *American Naturalist*. 4 (93). p. 117–125.

6. MUNKEMULLER, T. (2009) Hutchinson revisited: patterns of density regulation and the coexistence of strong competitors. *Journal of Theoretical Biology*. 1 (259). p. 109–117.
7. FROLOV, A.N. (2015) The beet webworm *Loxostege sticticalis* l. (Lepidoptera, Crambidae) in the focus of agricultural entomology objectives: The periodicity of pest outbreaks. *Entomological Review*. 2. p. 147–156.
8. GOPALSAMY, K. (1990) Global stability in the Delay logistic Equation with discrete delays. *Houston J. Math*. 2 (16). p. 347–356.
9. KOLESOV, A. (2010) A modification of Hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 12 (50). p. 347–356.
10. KREBS, C., MYERS, J. (1974) Population Cycles in Small Mammals. *Advances in Ecological Research*. 12 (8). p. 267–399.
11. RUAN, S. (2006) *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*. Springer, Berlin..
12. CHEN, C. (2006) Modeling and control of local outbreaks of West Nile virus in the United States. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 21 (8). p. 2423–2449.

УДК: 519.833.2:519.837

MSC2010: 91A10

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ТРЕХ ЛИЦ, В КОТОРОЙ НЕ
СУЩЕСТВУЕТ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ, НО ИМЕЕТСЯ
РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ**

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
Ленинские горы, МГУ, ВМК, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© Л. В. Смирнова, Ю. Н. Житенева

Государственный гуманитарно-технологический университет
Физико-математический факультет
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская Федерация
E-MAIL: smirnovaidiya@rambler.ru, unzh2011@mail.ru

© Ю. А. Бельских

Государственный гуманитарно-технологический университет
Физико-математический факультет
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская Федерация
E-MAIL: fozbelskih@rambler.ru

**DIFFERENTIAL GAME OF THREE PERSONS IN WHICH NASH EQUILIBRIUM DOESN'T
EXIST BUT EQUILIBRIUM OF OBJECTIONS AND COUNTEROBJECTION IS PRESENT.**

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V., Zhiteneva J. N., Belskih J. A.

Abstract. In opinion of luminaries in mathematical game theory the equilibrium as acceptable solution of differential game is characterized by the property of stability: the deviation from it of individual player cannot increase the payoff of deviated one. The solution proposed in [22], [23] by the 25-years old post-graduate of Princeton university John Forbes Nash (Jr) and later on called Nash equilibrium (NE) completely responds to this condition. NE certainly gained «the reigning position» in economics, sociology, military sciences. John Nash was awarded the Nobel Prize in economics in 1994 (simultaneously with John Harsanyi) «for fundamental analysis of equilibrium in the theory of noncooperative games». Actually, Nash created the basis of scientific method which played the vast role in the development of world economics. When opening fast any scientific journal in economics, operations research, systems analysis or game theory we certainly collide with publications concerning Nash equilibrium (NE). But «And in the

sun there are spots»: the set of situations of Nash equilibrium can be internally and externally unstable. So in the simplest noncooperative game of two persons in normal form

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i = [-1; 1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

the set of Nash equilibrium situations will be

$$X^e = \{x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\}, f_i(x^e) = \alpha^2 \ (i = 1, 2).$$

For the elements of this set (the segment of bisectrix of 1st and 3rd quarter of coordinate angle) firstly, for $x^{(1)} = (0, 0) \in X^e$ and $x^{(2)} = (1, 1) \in X^e$ we have $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ ($i = 1, 2$) and therefore the set X^e is internally unstable; secondly, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ($i = 1, 2$) and therefore the set X^e is externally unstable.

Both external and internal instability of the set of Nash equilibrium (NE) is negative for its practical use. In the first case there exists the situation which dominates NE (including all players), and in the second one such situation is even NE. Pareto maximality of Nash equilibrium situation allowed to avoid consequences of external and internal instability. But such coincidence is most likely exotic phenomenon (we know at least three cases of such coincidence). So to avoid trouble connected with external and internal instability we must add condition of Pareto maximality to discussed below equilibrium of objections and counterobjections (EOAC). Let us pass to EOAC. First it occurred in books [13], [15]. The point is that a nonstop stream of publications is devoted to the investigation of positive and negative properties of Nash equilibrium concept prevailing in economics (as solution of noncooperative game). Mostly they are related to non-uniqueness and, as a consequence, to the lack of equivalence, interchangeability, external stability as well as instability to simultaneous deviation of such solutions of two and more players. The game «dilemma of prisoners» also revealed the property of «ability to improve». The book [10] is devoted to detailed analysis of such negative properties for differential positional games. The authors of this book come to the following conclusion: either make use of those situations of Nash equilibrium that are simultaneously free from some of the stated disadvantages, or introduce new solutions of noncooperative game. Such solutions having the merits of Nash equilibrium situation would allow to get rid of its certain disadvantages. The present article is devoted to one of such possibilities for differential games related to concepts of objections and counterobjections. The concepts of objections and counterobjections used in it are based on the concept of objections and counterobjections well known classical game theory. The paper [4] is devoted to theoretical questions of this concept. The term «active equilibrium» suggested R. E. Smolyakov in 1983 [...], the notion of equilibrium of objections and counterobjections in differential games was first used apparently by E. M. Vaisbord in 1974 [2], and then it was picked up by the first author of the present article in the above mentioned book [10], but this concept was applied and is being applied in differential games, in our opinion, insufficiently widely. This fact «called to life» the present paper. In it the class of differential games of two persons is revealed, where the usual Nash equilibrium situation is absent, but the equilibrium of objections and counterobjections is

present. This concept of objections and counterobjections, as mentioned above, occurs in first publications on mathematical game theory. But in these publications either static variant of the game or differential game of only two persons were examined. Differential games of three and more players were not considered. This fact stimulated the authors to write the paper.

Keywords: *noncooperative games, Nash equilibrium, active equilibrium, equilibrium of objections and counterobjections*

ВВЕДЕНИЕ

Согласно математической теории игр, равновесию, как приемлемому решению дифференциальной игры должно быть присуще свойство *устойчивости*: отклонение от него отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклонившегося.

Решение, предложенное в [22, 23] (тогда двадцатиоднолетним аспирантом Принстонского университета Джоном Форбсом Нэшем (мл.) и названное впоследствии *равновесием по Нэшу* (РН)) полностью отвечает этому требованию. РН уверенно завоевало «царствующее положение» в экономике, социологии, военных науках. Джошу Нэшу в 1994 г. была присуждена Нобелевская премия по экономике (совместно с Джоном Харшаньи и Рейхардом Зельтенем) «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр». Фактически Нэш создал основы научного метода, сыгравшего огромную роль в развитии мировой экономики. Открывая теперь почти любой научный журнал по экономике, исследованию операций, системному анализу или теории игр, мы наверняка столкнёмся с публикациями, касающимися равновесия по Нэшу. Однако «And in the sun there are spots»: множество ситуаций равновесия по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым. Так в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i = [-1; 1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество равновесных по Нэшу ситуаций будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\alpha, \alpha) \mid \forall \alpha = const \in [-1, 1]\}, f_i(x^e) = \alpha^2 \ (i = 1, 2).$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-ой и 3-ей четверти координатного угла)

- во-первых, для $x^{(1)} = (0, 0) \in X^e$ и $x^{(2)} = (1, 1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1 \ (i = 1, 2)$ и поэтому множество X^e внутренне неустойчиво,

– во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ($i = 1, 2$) и поэтому множество X^e внешне неустойчиво.

Как внешняя, так и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу — негатив при его практическом использовании. В первом случае существуют такие две ситуации РН, что одна из них доминирует другую (по всем игрокам), а во втором такая «улучшаемая» ситуация даже не является равновесной по Нэшу. Избежать последствия внешней и внутренней неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Однако такое совпадение — явление скорее экзотическое (по крайней мере, нам известно лишь три случая [16, с. 92–93], [14], [19] такого совпадения). Итак, чтобы избежать «неприятностей», связанных с внешней и внутренней неустойчивостью, далее добавляем требование максимальной по Парето к обсуждаемому ниже равновесию угроз и контругроз (РУИК).

Перейдём к РУИК. Базируется оно на понятиях угроз и контругроз. «Угроза — обещание принести какое-либо зло, неприятность» [1, с. 1371]. Угроза — не обязательно реальное действие, она может заключаться в сообщении о возможности такого действия (запугивание!). Иногда для смягчения «агрессивного характера» слова «угроза» используют в некоторых публикациях (как синоним) «возражение». Сообщение о действии игрока «обнуляющего» угрозу называют «контругрозой» (контрвозражением). Концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, появляется уже в начальных публикациях по матричной теории игр [13], но ограничиваются они либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми, но только двух лиц [8, 9, 18, 20, 21, 24–26]. Дифференциальные игры трёх и более участников не затрагивались, что и явилось (не в последнюю очередь!) толчком к написанию этой работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бескоалиционная линейно-квадратичная дифференциальная игра трех лиц в нормальной форме, заданная упорядоченной четверкой,

$$\Gamma = \langle \{1, 2, 3\}, \Sigma, \{\mathcal{A}_i\}_{i=1,2,3}, \{\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle.$$

В Γ множество порядковых номеров игроков $\{1, 2, 3\}$, управляемая динамическая система Σ описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь фазовый (вектор состояния системы Σ) n -вектор $x \in \mathbb{R}^n$; фиксирован момент окончания игры $\vartheta = \text{const} > 0$, а само время продолжительности игры $t \in [t_0, \vartheta]$;

управляющее воздействие i -го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, 3$); для $n \times n$ -матрицы $A(t)$ будем предполагать непрерывность на $[0, \vartheta]$ ее элементов и обозначать этот факт $A(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$; пара $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — текущая позиция игры Γ , (t_0, x_0) — начальная позиция, $0 \leq t_0 < \vartheta$.

Стратегию i -го игрока U_i будем отождествлять с n -вектор-функцией $u_i(t, x)$ (обозначая это соответствие $U_i \div u_i(t, x)$), тогда множество стратегий i -игрока

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t, x), u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]\}.$$

Таким образом, выбор своей стратегии i -м игроком сводится к выбору конкретной $n \times n$ -матрицы $Q_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) из $C_{n \times n}[t_0, \vartheta]$.

Игра с течением времени разворачивается следующим образом. Игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою стратегию $U_i \div Q_i(t)x$; в результате образуется ситуация игры $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$. Затем находят решение $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, системы (1) при $u_i = Q_i(t)x$ ($i = 1, 2, 3$), т.е.

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)]x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Система линейных однородных дифференциальных уравнений (2) с непрерывными на $[t_0, \vartheta]$ коэффициентами имеет непрерывное продолжимое на $[t_0, \vartheta]$ ($i = 1, 2, 3$) решение $x(t)$. Затем игроки строят реализации выбранных ими стратегий $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ ($i = 1, 2, 3$) и соответствующую реализацию ситуации $u[t] = (u_1[t], u_2[t], u_3[t])$, которую составляют три непрерывных на $[t_0, \vartheta]$ n -вектора $u_1[t], u_2[t], u_3[t]$.

Функцию выигрыша i -го игрока тогда образует определенный на непрерывных четверках $(x(t), u_1[t], u_2[t], u_3[t] \mid t \in [t_0, \vartheta])$ квадратичный функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = & x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \\ & + \int_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{i1}u_1[t] + u_2'[t]D_{i2}u_2[t] + u_3'[t]D_{i3}u_3[t])dt \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (3)$$

где, не уменьшая общности, считаем постоянные $n \times n$ -матрицы C_i, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) симметричными; штрих сверху означает операцию транспонирования (x' — вектор-строка). Значение функционала (3) называется выигрышем i -го игрока. Полагаем, что игроки заинтересованы выбрать в игре Γ свою стратегию таким образом, чтобы возможно увеличить свой выигрыш.

Цель настоящей статьи — выявить достаточно общий класс линейно-квадратичных дифференциальных позиционных игр трех лиц в нормальной форме вида Γ , в котором отсутствует равновесие по Нэшу, но одновременно существует равновесие угроз и контругроз.

Для этого игре Γ поставим в соответствие трехкритериальную динамическую задачу

$$\Gamma_\nu = \langle \Sigma, \mathfrak{A}, \{ \mathcal{J}_i(U, t_0, x_0) \}_{i=1,2,3} \rangle.$$

Здесь управляемая динамическая система Σ совпадает с (1), множество альтернатив \mathfrak{A} совпадает с множеством ситуаций $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^3 \mathfrak{A}_i$ игры Γ , три критерия $\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0)$ ($i = 1, 2, 3$) определены в (3).

Цель ЛПР (лица, принимающего решение) в задаче Γ_ν — выбор такой альтернативы (ситуации) $U^P \in \mathfrak{A}$, при которой все три критерия (3) принимали бы одновременно возможно *большие* значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето.

Определение 1. Альтернатива (ситуация) $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \in \mathfrak{A}$ называется *максимальной по Парето* в Γ_ν , если при $\forall U \in \mathfrak{A}$ и $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ несовместна система неравенств

$$\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0) \geq \mathcal{J}_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i = 1, 2, 3),$$

из которых хотя бы одно строгое, при этом вектор $\mathcal{J}^P = \mathcal{J}^P[t_0, x_0] = (\mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_3(U^P, t_0, x_0))$ называется *максимумом по Парето* в задаче Γ_ν .

Отметим здесь два обстоятельства, которые сразу следуют из определения 1.

Свойство 1. Справедлива импликация:

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_i(\hat{U}, t_0, x_0) > \mathcal{J}_i(U^P, t_0, x_0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathcal{J}_j(\hat{U}, t_0, x_0) < \mathcal{J}_j(U^P, t_0, x_0) \text{ для хотя бы одного } j = 1, 2, 3; j \neq i. \end{aligned}$$

Свойство 2. Если для постоянных $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} & \max_{U \in \mathfrak{A}} \{ \mathcal{J}_1(U, t_0, x_0) + \beta \mathcal{J}_2(U, t_0, x_0) + \gamma \mathcal{J}_3(U, t_0, x_0) \} = \\ & = \text{Idem}\{U \rightarrow U^P\}, \end{aligned} \quad (4)$$

то ситуация U^P — максимальна по Парето в Γ_ν . Напомним, что $\text{Idem}\{U \rightarrow U^P\}$ означает выражение в фигурных скобках из (4), где U заменено на U^P .

Перейдем к понятиям равновесных решений игры Γ , где вектор $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \in \mathbb{R}^3$.

Определение 2. Пара $(U^e, \mathcal{J}^e = \mathcal{J}(U^e, t_0, x_0)) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^3$ называется равновесием по Нэшу игры Γ , если

$$\begin{cases} \max_{U_1 \in \mathfrak{A}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_1(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_1^e, \\ \max_{U_2 \in \mathfrak{A}_2} \mathcal{J}_2(U_1^e, U_2, U_3^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_2(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_2^e, \\ \max_{U_3 \in \mathfrak{A}_3} \mathcal{J}_3(U_1^e, U_2^e, U_3, t_0, x_0) = \mathcal{J}_3(U_1^e, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_3^e \end{cases}$$

при любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ (0_n — нулевой n -вектор).

Более громоздко выглядит понятие равновесия угроз и контругроз.

Пусть $U = (U_1, U_2, U_3)$ некоторая фиксированная ситуация игры Γ . Будем считать, что у первого игрока имеется *угроза на ситуацию U* , если у него существует такая стратегия $U_1^T \in \mathfrak{A}_1$, что

$$\mathcal{J}_1(U_1^T, U_2, U_3, t_0, x_0) > \mathcal{J}_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0). \quad (5)$$

Наличие угрозы не означает ее обязательное применение, а лишь «*animus denuntiandi*»¹. Применение угрозы выгодно первому игроку, ибо при этом, согласно (5), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации U .

В ответ на угрозу первого игрока U_1^T у второго имеется «*неполная*» контругроза, если у него существует стратегия $U_2^C \in \mathfrak{A}_2$, при которой

$$\mathcal{J}_1(U_1^T, U_2^C, U_3, t_0, x_0) \leq \mathcal{J}_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0), \quad (6)$$

и у второго имеется «*полная*» контругроза, если существует такая стратегия $U_2^C \in \mathfrak{A}_2$, что одновременно с неравенством (6) выполняется

$$\mathcal{J}_2(U_1^T, U_2^C, U_3, t_0, x_0) > \mathcal{J}_2(U_1^T, U_2, U_3, t_0, x_0). \quad (7)$$

Аналогично формализуется контругроза (полная) третьего игрока в ответ на угрозу U_1^T .

При наличии «неполной» контругрозы второй игрок за счет выбора своей стратегии U_2^C приводит, согласно (6), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации U (но может и уменьшиться!). Все происходит как по девизу Наполеона I «*Order, contre-order, disorder*»². Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы. В дополнение к этому, «полная» контругроза побуждает второго к применению

¹Намерение пригрозить (*лат.*)

²Распоряжение – контрраспоряжение – беспорядок (*фр.*)

U_2^C , ибо в (полученной в результате угрозы и контругрозы) ситуации (U_1^T, U_2^C, U_3) выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации (U_1^T, U_2, U_3) , сложившейся при реализации угрозы U_1^T .

Аналогично определяется угроза второго (третьего) игрока на ситуацию U и ответная контругроза (полная) одного из двух оставшихся.

Естественно, если в ответ на каждую угрозу на U любого игрока у хотя бы одного из оставшихся имеется контругроза, то игроку не имеет смысла применять угрозу, т.к. в результате реакции (контругрозы) на эту угрозу другого игрока его выигрыш не увеличится (но может и уменьшиться!).

Определение 3. Ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \in \mathfrak{A}$ называется активно равновесной в игре Γ , если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$,

- 1) U^P максимальна по Парето в Γ_ν ,
- 2) в ответ на каждую угрозу $U_i^T \in \mathfrak{A}_i$ любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется неполная контругроза.

Определение 4. Пара $(U^P, \mathcal{J}^P) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^3$ называется равновесием угроз и контругроз в игре Γ , если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$,

- 1) U^P максимальна по Парето в Γ ,
- 2) в ответ на каждую угрозу любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется полная контругроза.

Здесь, напомним, $\mathcal{J}^P = (\mathcal{J}_1^P, \mathcal{J}_2^P, \mathcal{J}_3^P)$, $\mathcal{J}_i^P = \mathcal{J}_i(U^P, t_0, x_0)$ ($i = 1, 2, 3$).

Из определений 3 и 4 следует, что любое равновесие угроз и контругроз является одновременно активным равновесием, а равновесие по Нэшу (в силу определения 2) не допускает угроз, причем только «самые хорошие» из них (одновременно максимальные по Парето) будут активно равновесными.

Как уже упоминалось в аннотации, приведенные здесь понятия угроз и контругроз основываются на известной [15] в классической теории игр концепции угроз и контругроз. На её основе в [15, с. 109] определяются устойчивые коалиционные структуры, впервые, по-видимому, рассмотренные для дифференциальных коалиционных игр в [10]. Концепция «угроз и контругроз» для дифференциальных игр использована Э. М. Вайсбордом в 1974 г. в статье [2], развита В. И. Жуковским в [3, 27]. Теоретическим аспектам посвящены работы Э. И. Вилкаса [4, 5]. Свой способ классификации решений бескоалиционной игры, включающий, как составную часть, равновесие угроз и контругроз, предложил Э. Р. Смольяков [17]. Им же был введен термин «активное равновесие» (на основе упомянутого определения

неполной контругрозы). Понятие активного равновесия для позиционных, дифференциальных, бескоалиционных игр использовалось и в [26]. Способ доказательства существования активной равновесности был предложен первым автором настоящей статьи в [26] и затем успешно применен болгарскими математиками при установлении факта существования такого решения в дифференциальных позиционных играх двух лиц, описываемых уравнениями с частными производными [18, 25], стохастическими [21], в банаховом пространстве [24], уравнениями с постоянным запаздыванием [20].

Активно равновесным ситуациям и равновесиям угроз и контругроз присущи все позитивные свойства ситуации равновесия по Нэшу [8, с. 49]:

- во-первых, они устойчивы к отклонению отдельного игрока;
- во-вторых, удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности;
- в-третьих, совпадают с седловой точкой в случае антагонистической игры.

Одновременно с тем неумлучшаемые равновесия свободны от следующих недостатков [8, с. 58]:

- существуют в ряде случаев, когда равновесие по Нэшу отсутствует (например, как в игре Г из настоящей статьи);
- в отличие от равновесия по Нэшу неумлучшаемы и внутренне устойчивы (в силу паретовости);
- наличие в игре равновесия по Нэшу влечет существование некоторых видов неумлучшаемых (паретовских) равновесий, выигрыши всех игроков при которых не меньше, чем при равновесии по Нэшу;
- наконец, лишь «самые хорошие» ситуации равновесия по Нэшу (которые одновременно максимальны по Парето) являются равновесиями угроз и контругроз. Однако лишь частные виды игр (см. [14], [16], [19]) обладают такими «самыми хорошими» равновесиями.

Заметим, что указанные свойства имеют место и для позиционных дифференциальных бескоалиционных игр, а в [8] использована математическая формализация стратегий игроков и порожденных ими движений динамической системы, предложенная Н. Н. Красовским в [12] для антагонистической дифференциальной позиционной игры.

2. МАКСИМАЛЬНЫЕ ПО ПАРЕТО СИТУАЦИИ И ПАРЕТОВСКИЕ ВЫИГРЫШИ

Далее запись $D < 0$ (> 0) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определено отрицательна (соответственно, положительна).

Прежде всего приведем вспомогательное утверждение (лемму 1).

Рассмотрим трехкритериальную статическую задачу

$$\Gamma_3 = \langle X = \mathbb{R}^{3n}, \{f_i(u) = u'_1 D_{i1} u_1 + u'_2 D_{i2} u_2 + u'_3 D_{i3} u_3\}_{i=1,2,3} \rangle,$$

в которой ЛПР выбирает альтернативу (ситуацию) $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^{3n}$ с целью достичь одновременно возможно больших значений всех трех компонент векторного критерия $f(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$. Аналогом определения 1 здесь будет:

альтернатива u^P *максимальна по Парето* в Γ_3 , если при $\forall u \in \mathbb{R}^{3n}$ несовместна система неравенств $f_i(u) \geq f_i(u^P)$ ($i = 1, 2, 3$), из которых хотя бы одно строгое.

Ниже используем аналог свойства 2.

Лемма 1. *Если в задаче Γ_3 симметричны $n \times n$ -матрицы D_{ij} и положительные числа $\Lambda_{ii}, \lambda_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$) таковы, что*

$$D_{ii} > 0, D_{ij} < 0 \text{ (при } j \neq i), \quad \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}, \quad (8)$$

то существуют числа $\beta > 0, \gamma > 0$, при которых квадратичные формы $x' D_i x$ ($i = 1, 2, 3$) в

$$f(u) = f_1(u) + \beta f_2(u) + \gamma f_3(u) = u'_1 D_1 u_1 + u'_2 D_2 u_2 + u'_3 D_3 u_3$$

становятся определенно отрицательными.

Здесь

$$D_i = D_{1i} + \beta D_{2i} + \gamma D_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

кроме того, Λ_{ii} — наибольший корень характеристического уравнения

$$\Delta_{ii}(\Lambda) = \det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

величина $-\lambda_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$) так же наибольший (по абсолютной величине наименьший) корень уравнения

$$\delta_{ij}(\lambda) = \det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0,$$

E_n — единичная $n \times n$ -матрица.

Доказательство. В силу симметричности всех девяти используемых в Γ_3 матриц D_{ii}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$) корни характеристических уравнений $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ и $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ вещественны, причем корни $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ положительны, а $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ — отрицательны. Обозначим наибольший из n корней уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ через Λ_{ii} , а наибольший из корней уравнения $\delta_{ij}(\lambda) = 0$ через $-\lambda_{ij}$, тогда из [7, с. 281] следует, что при $\forall u_i \in \mathbb{R}^n$ будет

$$u'_i D_{ii} u_i \leq \Lambda_{ii} u'_i u_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$u'_j D_{ij} u_j \leq -\lambda_{ij} u'_j u_j \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(u) &= f_1(u) + \beta f_2(u) + \gamma f_3(u) = \\ &= u'_1 [D_{11} + \beta D_{21} + \gamma D_{31}] u_1 + u'_2 [D_{12} + \beta D_{22} + \gamma D_{32}] u_2 + \\ &+ u'_3 [D_{13} + \beta D_{23} + \gamma D_{33}] u_3 \leq [\Lambda_{11} - \beta \lambda_{21} - \gamma \lambda_{31}] u'_1 u_1 + \\ &+ [-\lambda_{12} + \beta \Lambda_{22} - \gamma \lambda_{32}] u'_2 u_2 + [-\lambda_{13} - \beta \lambda_{23} + \gamma \Lambda_{33}] u'_3 u_3. \end{aligned}$$

Итак $f(u) < 0 \forall u \in \{\mathbb{R}^{3n} \setminus \{0_{3n}\}\}$, если

$$\begin{cases} \Lambda_{11} - \beta \lambda_{21} - \gamma \lambda_{31} < 0, \\ -\lambda_{12} + \beta \Lambda_{22} - \gamma \lambda_{32} < 0, \\ -\lambda_{13} - \beta \lambda_{23} + \gamma \Lambda_{33} < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда, первые два строгих неравенства из (10) имеют место, если

$$\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} < \beta < \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \Rightarrow f(u) < 0 \quad \forall u \in \{\mathbb{R}^{3n} \setminus \{0_{3n}\}\},$$

т.е. если $\Lambda_{11} \Lambda_{22} < \lambda_{12} \lambda_{21}$ (например, при $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right)$).

Аналогично третье неравенство из (10) выполнено, если

$$0 < \gamma < \frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}},$$

например, для $\gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right]$.

Замечание 1. Аналогично лемме 1 получаем: если в задаче Γ_3 симметричные $n \times n$ -матрицы D_{ij} и положительные числа Λ_{ii} , λ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$), определенные в лемме 1 таковы, что

$$D_{ii} > 0, D_{ij} < 0 \text{ (при } j \neq i), \Lambda_{11} \Lambda_{33} < \lambda_{13} \lambda_{31},$$

то при

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}} \right) \frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}} \right], \\ \gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}} \right) \end{aligned}$$

квадратичная форма

$$f(u) = f_1(u) + \beta f_2(u) + \gamma f_3(u) = u'_1 D_1 u_1 + u'_2 D_2 u_2 + u'_3 D_3 u_3$$

становится определенно отрицательной.

В самом деле, фигурирующие здесь «новые» β и γ также являются решением строгих неравенств (10).

Отметим, что (помимо двух приведенных в лемме 1 и замечании 1) решений (β, γ) системы строгих неравенств (10) может быть континуум. Как будет показано ниже, каждое из них «порождает», конечно, при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ ($i, j = 1, 2, 3$; $j \neq i$), своё равновесие угроз и контругроз (РУИК) дифференциальной игры Γ .

Лемма 2. Решениям $x(t)$ системы $\dot{x} = K(t)x$, $x(t_0) = x_0$, где $K(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \vartheta]$, присуще свойство («нетривиальности»):

$$x_0 \neq 0_n \Rightarrow x(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Здесь 0_n — нуль-вектор из \mathbb{R}^n .

Доказательство. Предположим противное: пусть $\exists t_1 \in (t_0, \vartheta]$ такой, что $x(t_1) = 0_n$. Это означает, что в момент t_1 через позицию $(t_1, 0_n)$ «проходит» два решения системы $\dot{x} = K(t)x$: именно, тривиальное $x^{(1)}(t) = 0_n \quad \forall t \in [0, \vartheta]$ и нетривиальное $x^{(2)}(t_1)$, порожденное ненулевым начальным условием $x_0 \neq 0_n$. Это противоречит теореме единственности решения линейного дифференциального уравнения.

Утверждение 1. Если в дифференциальной игре Γ

$$D_{ii} > 0, D_{ij} < 0, C_i < 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i), \quad \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}, \quad (11)$$

то максимальная по Парето ситуация U^P в трехкритериальной задаче Γ_ν будет

$$\begin{aligned} U^P &= (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div (u_1^P(t, x), u_2^P(t, x), u_3^P(t, x)) = u^P(t, x) = \\ &= (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, Q_3^P(t)x) = \\ &= (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x), \end{aligned} \quad (12)$$

где симметричная, непрерывная на $[0, \vartheta]$ $n \times n$ -матрица

$$\begin{aligned} \Theta^P(t) &= [X^{-1}(t)]' \{ C^{-1} - \\ &- \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau) [D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}] X^{-1}(\tau) d\tau \}^{-1} X^{-1}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

и постоянные симметричные $n \times n$ -матрицы

$$D_i = D_{1i} + \beta D_{2i} + \gamma D_{3i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

числа

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right], \quad \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right]$$

или

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}} \right) \frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}} \right], \quad \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}} \right];$$

величина Λ_{ii} — наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ ($i = 1, 2, 3$), величина $-\lambda_{ij}$ — наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$ ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$), E_n — единичная $n \times n$ -матрица, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Найдем максимальную по Парето ситуацию U^P , применяя лемму 1 (конкретно, используя (4)) и метод динамического программирования (МДП) из [11, с. 112]. Само применение МДП, с учетом свойства 2, здесь сведется к осуществлению двух этапов. На первом этапе для задачи Γ_3 нужно найти два положительных числа β и γ , а также непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t, x) = x'\Theta(t)x$, $\Theta(t) = \Theta'(t) \forall t \in [0, \vartheta]$ и три n -вектор-функции $u_i(t, x, V)$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta, x) = x'Cx, \quad C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3; \tag{15}$$

с помощью скалярной функции

$$W(t, x, u_1, u_2, u_3, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]' (A(t)x + u_1 + u_2 + u_3) + u_1' D_1 u_1 + u_2' D_2 u_2 + u_3' D_3 u_3$$

определить три n -вектор-функции $u_i(t, x, V)$ ($i = 1, 2, 3$), исходя из $\left(\frac{\partial V}{\partial x} = \text{grad}_x V \right)$,

$$\max_{u_1 u_2 u_3} W(t, x, u_1, u_2, u_3, V) = \text{Idem}\{u_i \rightarrow u_i(t, x, V)\} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{16}$$

при любых $t \in [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}$. Достаточные условия существования $u(t, x, V)$ в (16) сводятся к выполнению требований: при $\forall (t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W}{\partial u_i} \right|_{u(t,x,V)} &= \frac{\partial V}{\partial x} + 2D_i u_i(t, x, V) = 0_n \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} &= 2D_i < 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{17}$$

где, напомним, 0_n — нулевой n -вектор-столбец из \mathbb{R}^n , а $D_i < 0$ в силу леммы 1.

Из (17) получаем

$$u_i(t, x, V) = -\frac{1}{2}D_i^{-1}\frac{\partial V}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (18)$$

Тогда

$$W(t, x, u(t, x, V), V) = W[t, x, V] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]' A(t)x - \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' [D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}] \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Второй этап. Найдем решение вида $V = V^P(t, x) = x'\Theta^P x$, $\Theta^P = [\Theta^P(t)]'$ дифференциального уравнения с частными производными

$$W[t, x, V] = 0$$

и граничным условием ($C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3$)

$$V(\vartheta, x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. для $\forall t \in [0, \vartheta]$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ должно иметь место

$$W[t, x, V(t, x) = x'\Theta^P x] = 0, \quad V(\vartheta, x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Оба эти требования выполнены, если симметричная $n \times n$ -матрица $\Theta^P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати ($0_{n \times n}$ — нулевая $n \times n$ -матрица)

$$\dot{\Theta}^P(t) + \Theta^P(t)A(t) + A(t)\Theta^P(t) - \Theta^P(t)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}]\Theta^P(t) = 0_{n \times n}, \\ \Theta^P(\vartheta) = C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3.$$

Решение $\Theta^P(t)$ полученного матричного уравнения типа Риккати имеет [11, с. 65] вид (13). Здесь учтена импликация

$$C_i < 0 \quad (i = 1, 2, 3) \Rightarrow C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 < 0.$$

Наконец, из (18), а так же учитывая

$$[V(t, x) = x'\Theta^P(t)x] \Rightarrow \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 2\Theta^P(t)x\right],$$

приходим к справедливости (12). Таким образом, максимальная по Парето ситуация U^P в задаче Γ_ν имеет вид (12)–(14).

Перейдем к построению максимальных по Парето выигрышей $\mathcal{J}^P = (\mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_3(U^P, t_0, x_0)) = (\mathcal{J}_1^P, \mathcal{J}_2^P, \mathcal{J}_3^P)$ опять-таки с помощью идей МДП.

Утверждение 2. Пусть выполнены требования (11) (из утверждения 1) и для дифференциальной игры Γ удалось найти три скалярные непрерывно дифференцируемые функции вида $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t)x$ ($i = 1, 2, 3$) такие, что

- 1) $V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- 2) система из трех уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right)' (N(t)x + x' \Theta^P(t) M_i(t) \Theta^P(t)x) &= 0, \\ V_i(\vartheta, x) &= x' C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (19)$$

имеет решение вида $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t)x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$).

Тогда при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ имеет место

$$\mathcal{J}_i^P = \mathcal{J}_i(U^P, t_0, x_0) = x_0' \Theta_i^P(t_0) x_0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

В (19) непрерывные $n \times n$ -матрицы

$$\begin{aligned} N(t) &= A(t) - (D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}) \Theta^P(t), \\ M_i(t) &= \Theta^P(t) [D_1^{-1} D_{i1} D_1^{-1} + D_2^{-1} D_{i2} D_2^{-1} + \\ &\quad + D_3^{-1} D_{i3} D_3^{-1}] \Theta^P(t) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

$n \times n$ -матрицы D_i , $\Theta^P(t)$ приведены в (13), (14), а симметричные $n \times n$ -матрицы

$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]' \left\{ C_i - \int_t^\vartheta Y'(\tau) \Theta^P(\tau) M_i(\tau) \Theta^P(\tau) Y(\tau) d\tau \right\} Y^{-1}(t) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Наконец, $Y(t)$ — фундаментальная матрица решения однородной системы $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Составим три скалярные функции

$$\begin{aligned} W_i[t, x, V_i] &= \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} \right]' (N(t)x + [u_1^P(t, x)]' D_{i1} u_1^P(t, x) + \\ &\quad + [u_2^P(t, x)]' D_{i2} u_2^P(t, x) + [u_3^P(t, x)]' D_{i3} u_3^P(t, x) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (21)$$

причем $u_i^P(t, x)$ — n -вектор-функции, определенные в (12).

Ищем решение $V_i(t, x)$ ($i = 1, 2, 3$) системы из трех уравнений с частными производными

$$W_i[t, x, V_i] = 0, \quad V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, 3) \quad (22)$$

в виде квадратичной формы $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t)x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$).

Установим два факта.

Во-первых, решению системы (21), (22) присуще свойство

$$V_i(t_0, x_0) = \mathcal{J}_i(U^P, t_0, x_0) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23)$$

где ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$ имеет вид (12). В самом деле, если U^P — ситуация из (12)–(14), то, согласно (21) и (22), решение $x^P(t)$ системы $\dot{x} = N(t)x$, $x(t_0) = x_0 \neq 0_n$, при $x = x^P(t)$ будет

$$\begin{aligned} 0 &= W_i[t, x^P(t), V_i(t, x^P(t))] = \frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i(t, x^P(t))}{\partial x} \right]' N(t)x^P(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^3 [u_j^P(t, x^P(t))]{}' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) = \bar{W}_i[t] \quad \forall t \in [t_0, \vartheta] \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от t_0 до ϑ , с учетом граничных условий из (22), приходим к

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{W}_i[t] dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_i^P(t, x^P(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 [u_j^P(t, x^P(t))]{}' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt = \\ &= V_i^P(\vartheta, x^P(\vartheta)) - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 [u_j^P(t, x^P(t))]{}' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt = \\ &= x'(\vartheta) C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 [u_j^P(t, x^P(t))]{}' D_{ij} u_j^P(t, x^P(t)) dt - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) = \\ &= J_i(U^P, t_0, x_0) - V_i^P(t_0, x^P(t_0)) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Откуда сразу следует справедливость равенств (23).

Во-вторых, установим, что решение $V_i(t, x)$ ($i = 1, 2, 3$) системы (22) имеет вид $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x$, симметричная $n \times n$ -матрица $\Theta_i(t)$ представима в виде (20). В самом деле, подставив $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x$ в (22), получаем справедливость (23), если только $\Theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\Theta_i + \Theta_i N + N \Theta_i + \Theta^P(t) M_i \Theta^P(t) = 0_{n \times n}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Нетрудно подстановкой $\Theta_i(t)$ из (20) убедиться, что симметричная $n \times n$ -матрица $\Theta_i(t)$ из (20) в самом деле является решением (24), что и завершает доказательство утверждения 2.

Замечание 2. Наконец, объединение утверждений 1 и 2 приводит к следующему итоговому результату, касающемуся явного вида максимального по Парето решения $(U^P, \mathcal{J}^P) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^3$ игры Γ .

Пусть для дифференциальной игры Γ

1⁰. постоянные симметричные $n \times n$ -матрицы

$$D_{ii} > 0, D_{ij} < 0, C_i < 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i);$$

2⁰. $[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \lambda_{12}\lambda_{21}]$.

Тогда при $\forall(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ будет

$$U^P \div u^P(t, x) = (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x),$$

$$\mathcal{J}^P = (\mathcal{J}_1^P, \mathcal{J}_2^P, \mathcal{J}_3^P), \mathcal{J}_i^P = x'_0 \Theta_i(t_0)x_0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

а симметричные $n \times n$ -матрицы

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]' \{C^{-1} +$$

$$+ \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau)[D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}]X^{-1}(\tau)d\tau\}^{-1} X^{-1}(t),$$

$$\Theta_i(t) = [Y^{-1}(t)]' \left\{ C_i - \int_t^\vartheta Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)d\tau \right\} Y^{-1}(t),$$

$n \times n$ -матрица $X(t)$, $(Y(t))$ — фундаментальная матрица решения системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ (соответственно, $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$); матрицы

$$C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3, D_i = D_{i1} + \beta D_{i2} + \gamma D_{i3},$$

$$N(t) = A(t) - (D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1})\Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t)[D_1^{-1}D_{i1}D_1^{-1} + D_2^{-1}D_{i2}D_2^{-1} +$$

$$D_3^{-1}D_{i3}D_3^{-1}]\Theta^P(t),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right], \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right],$$

величина Λ_{ii} ($-\lambda_{ij}$) — наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$) ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$).

3. ЛЕММЫ О МАЖОРАНТАХ

Перейдем к утверждениям, которые

- во-первых, позволяют сразу судить об отсутствии в дифференциальных играх вида Γ равновесия по Нэшу (конечно, при выполнении (11)),
- во-вторых, реализуют для Γ концепцию равновесия угроз и контругроз.

Причем эти сведения получаются на основании специальной знакоопределенности квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша (3).

Не оговаривая особо, далее предполагаем выполненными ограничения (11) и поэтому существует максимальная по Парето в Γ_ν ситуация

$$\begin{aligned} U^P &= (U_1^P, U_2^P, U_3^P) \div (u_1^P(t, x), u_2^P(t, x), u_3^P(t, x)) = u^P(t, x) = \\ &= (Q_1^P(t)x, Q_2^P(t)x, Q_3^P(t)x) = \\ &= (-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x). \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть в (3) при $i = 1$ матрица $D_{11} > 0$, тогда для максимальной по Парето в Γ ситуации U^P существует постоянная $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такая, что при $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ и стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ будет

$$\mathcal{J}_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > \mathcal{J}_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) \quad (25)$$

для любых начальных позиций $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$.

Доказательство. В утверждении 2 уже установлено существование функции Беллмана $V_1(t, x) = x'\Theta_1(t)x$, для которой

$$\mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0) = x'_0\Theta_1(t_0)x_0,$$

здесь непрерывная и симметричная на $[0, \vartheta)$ $n \times n$ -матрица $\Theta_1(t)$ имеет вид (20) ($i = 1$).

Рассмотрим теперь стратегию первого игрока $U_1^T \div u_1^T(t, x) = \alpha x$, величину числового параметра $\alpha > 0$ определим ниже. Вследствие симметричности матрицы D_{11} и дополнительно $D_{11} > 0$ имеет место

$$u'_1 D_{11} u_1 \geq \lambda_1 \|u_1\|^2 = \lambda_1 u'_1 u_1 \quad \forall u_1 \in \mathbb{R}^n, \quad (26)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма и $\lambda_1 > 0$ — наименьший корень характеристического уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$ [6, с. 89].

Далее будем использовать симметричную $n \times n$ -матрицу $\Theta^P(t)$ из (13)–(15), а из (12) стратегию $U_2^P \div Q_2^P(t)x$ второго и $U_3^P \div Q_3^P(t)x$ третьего игроков. Затем рассмотрим скалярную функцию

$$W_1[t, x] = W_1(t, x, u_1^T(t, x) = \alpha x, u_2^P(t, x) = Q_2^P(t)x,$$

$$\begin{aligned}
 u_3^P(t, x) &= Q_3^P(t)x, V_1(t, x) = x'\Theta_1(t)x = \\
 &= \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \right]' (A(t)x + u_1^T(t, x) + u_2^P(t, x) + u_3^P(t, x)) + \\
 &+ [u_1^T(t, x)]' D_1 u_1^T(t, x) + [u_2^P(t, x)]' D_2 u_2^P(t, x) + [u_3^P(t, x)]' D_3 u_3^P(t, x) \geq \\
 &\geq x' \frac{d\Theta_1(t)}{dt} x + 2x'\Theta_1(t) [A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)] x + \\
 &+ x'(\lambda_1 \alpha^2 E_n)x + x' [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t)x + x' [Q_3^P(t)]' D_{13} Q_3^P(t)x = \\
 &= x' \left\{ \frac{d\Theta_1(t)}{dt} + \Theta_1(t) [A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)] + \right. \\
 &+ [A'(t) + \alpha E_n + (Q_2^P(t))' + (Q_3^P(t))'] \Theta_1(t) + \lambda_1 \alpha^2 E_n + \\
 &\left. + [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) + [Q_3^P(t)]' D_{13} Q_3^P(t) \right\} x = x' M_1(t, \alpha)x.
 \end{aligned}$$

Используемая здесь в фигурных скобках матрица $M_1(t, \alpha)$ симметрична и имеет следующий вид

$$M_1(t, \alpha) = \lambda_1 \alpha^2 E_n + 2\alpha \Theta_1(t) + K_1(t),$$

где непрерывная и симметричная $n \times n$ -матрица

$$\begin{aligned}
 K_1(t) &= \dot{\Theta}_1(t) + \Theta_1(t) [A(t) + Q_2^P(t) + Q_3^P(t)] + [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) + \\
 &+ [Q_3^P(t)]' D_{13} Q_3^P(t) + [A'(t) + (Q_2^P(t))' + (Q_3^P(t))'] \Theta_1(t).
 \end{aligned}$$

Элементы матриц $\Theta_1(t)$ и $K_1(t)$ непрерывны на $[0, \vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены на компакте $[0, \vartheta]$. Множитель α^2 входит только в диагональные элементы матрицы $M_1(t, \alpha)$. Напомним, что $\lambda_1 > 0$ является наименьшим корнем характеристического уравнения $\det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$, а E_n — единичная $n \times n$ -матрица. Поэтому постоянную $\alpha = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ можно выбрать настолько большой, чтобы все ведущие миноры матрицы $M_1(t, \alpha)$ стали положительными при $\forall t \in [0, \vartheta]$ и $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ (для полноты изложения далее в конце этого раздела (перед замечанием 3) приводится доказательство данного факта). Тогда, согласно лемме 2 и [6, с. 88], квадратичная форма $x' M_1(t, \alpha)x$ будет определено положительной для всех $t \in [0, \vartheta]$ и постоянных $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$.

Перейдем к доказательству существования постоянной $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такой, что при всех $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ квадратичная форма $x' M_1(t, \alpha)x$ будет определено положительной для $\forall t \in [0, \vartheta]$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что $n \times n$ -матрица $M_1(t, \alpha)$ симметрична. По критерию Сильвестра квадратичная форма $x' M_1(t, \alpha)x$ определено положительна, если все ведущие (угловые) миноры Δ_r ($r = 1, \dots, n$) матрицы $M_1(t, \alpha)$ положительны. Миноры Δ_r расположены в первых r строках и первых r

столбцах матрицы $M_1(t, \alpha)$, именно, $(r = 1, \dots, n)$

$$\Delta_r(t, \alpha) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha^2 n + \alpha l_{11}(t) + k_{11}(t) & \alpha l_{12}(t) + k_{12}(t) & \dots & \alpha l_{1r}(t) + k_{1r}(t) \\ \alpha l_{21}(t) + k_{21}(t) & \lambda_1 \alpha^2 n + \alpha l_{22}(t) + k_{22}(t) & \dots & \alpha l_{2r}(t) + k_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{r1}(t) + k_{r1}(t) & \alpha l_{r2}(t) + k_{r2}(t) & \dots & \lambda_1 \alpha^2 n + \alpha l_{rr}(t) + k_{rr}(t) \end{vmatrix}$$

должны быть положительны при $\forall t \in [0, \vartheta]$, $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$. Раскрывая определители $\Delta_r(t, \alpha)$ и располагая слагаемые по убыванию степени параметра α , получаем

$$\Delta_r(t, \alpha) = a_0 \alpha^{2r} + a_1(t) \alpha^{2r-1} + \dots + a_{2r-1}(t) \alpha + a_{2r}(t),$$

причем постоянная $a_0 = \lambda_1^r n^r > 0$, а остальные коэффициенты $a_1(t), \dots, a_{2r}(t)$ непрерывны на компакте $[0, \vartheta]$ (и поэтому равномерно ограничены). Заметим, что данная равномерная ограниченность приводит к существованию $\Omega_r = \text{const} > 0$ такого, что

$$\max_{0 \leq t \leq \vartheta} \{a_p(t) \mid p = 0, 1, \dots, 2r\} < \Omega_r.$$

Покажем ниже, что при

$$\alpha > \frac{\Omega_r}{|a_0|} + 1 = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$$

будет

$$|a_1(t) \alpha^{2r-1} + a_2(t) \alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r-1}(t) \alpha + a_{2r}(t)| < |a_0 \alpha^{2r}|,$$

т.е. знак многочлена при достаточно большом $|\alpha|$ определяется знаком его старшего члена. Действительно,

$$\begin{aligned} & |a_1(t) \alpha^{2r-1} + a_2(t) \alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r-1}(t) \alpha + a_{2r}(t)| \leq \\ & \leq |a_1(t)| \alpha^{2r-1} + |a_2(t)| \alpha^{2r-2} + \dots + |a_{2r-1}(t)| \alpha + |a_{2r}(t)| \leq \\ & \leq \Omega_r (\alpha^{2r-1} + \alpha^{2r-2} + \dots + \alpha + 1) = \Omega_r \frac{\alpha^{2r} - 1}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left[\alpha > \frac{\Omega_r}{a_0} + 1\right] \Rightarrow [\Omega_r < a_0(\alpha - 1)].$$

Поэтому, подставляя в предыдущее неравенство вместо Ω_r заведомо большую величину $a_0(\alpha - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} & |a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| < \\ & < a_0(\alpha - 1)\frac{\alpha^{2r} - 1}{\alpha - 1} = a_0(\alpha^{2r} - 1) < a_0\alpha^{2r}. \end{aligned}$$

Итак, при $\forall \alpha \geq \Omega_r = \alpha^{(r)}(U, t_0, x_0) > 0$ и $\forall t \in [0, \vartheta]$ имеет место

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| < a_0\alpha^{2r},$$

т.е. при достаточно большом α знак многочлена $\Delta_r(t, \alpha)$ определяется знаком его старшего члена. Наконец, для каждого $r = 1, \dots, n$ находим число $\Omega_r > 0$ и считаем $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) = \max_{r=1, \dots, n} \Omega_r$.

Тогда при $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ получаем

$$\widetilde{W}_1[t, x] = x'M_1(t, \alpha^{(1)})x > 0 \quad \forall t \in [0, \vartheta], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}. \quad (27)$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение (при $t \in [0, \vartheta]$) векторного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + \alpha^{(1)}x + Q_2^P(t)x + Q_3^P(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \neq 0_n.$$

Так как (лемма 2) $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow (\tilde{x}(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [0, \vartheta])$, то, согласно (27), будет

$$\widetilde{W}_1[t, \tilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [0, \vartheta].$$

Отсюда, интегрируя снова обе части последнего неравенства в пределах от t_0 до ϑ и учитывая граничное условие $\Theta_1(\vartheta) = C_1$, а также $u_1^T[t] = \alpha^{(1)}\tilde{x}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{\vartheta} \widetilde{W}_1[t, \tilde{x}(t)]dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\partial V_1(t, x)}{\partial x} \right]' [A(t)x + \alpha^{(1)}E_n x + Q_2^P(t)x + Q_3^P(t)x] \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ (\alpha^{(1)})^2 x' D_{11} x + x' [Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t)x + \right. \\ &\quad \left. + x' [Q_3^P(t)]' D_{13} Q_3^P(t)x \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt = \\ &= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_1(t, \tilde{x}(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 [u_j^T[t]]' D_{1j} u_j^T[t] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\tilde{x}(\vartheta)]' C_1 \tilde{x}(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 [u_j^T[t]]' D_{1j} u_j^T[t] dt - V_1(t_0, x_0) = \\
&= \mathcal{J}_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) - V_1(t_0, x_0).
\end{aligned}$$

Отсюда и из $\mathcal{J}_1(U_1^P, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0)$ сразу следует справедливость леммы 3.

Замечание 3. Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре Γ : найти $\max_{U_1 \in \mathfrak{A}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0)$ при ограничении (1), фиксированных стратегиях $U_2^P \in \mathfrak{A}_2$ второго и $U_3^P \in \mathfrak{A}_3$ третьего игроков, а также любых $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$. Фактически лемма 3 утверждает, что при $D_{11} > 0$ и $x_0 \neq 0_n$ эта задача максимизации не имеет решения. В самом деле, какую бы стратегию $U_1 \in \mathfrak{A}_1$ первый игрок не выбрал, всегда существует стратегия $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{A}_1$ этого игрока такая, что

$$\mathcal{J}_1(\tilde{U}_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > \mathcal{J}_1(U_1, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) \quad \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}].$$

Такой результат позволяет сразу «отметать» (при выборе решения игры Γ) те концепции принятия равновесных решений игровых задач вида Γ , в условиях которых фигурирует максимизация функции выигрыша первого игрока (например, не применять при $D_{11} > 0$ концепцию равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в игре Γ).

Таким образом, в дифференциальной игре Γ при выполнении (11) ситуация равновесия по Нэшу $U^e \in \mathfrak{A}$ не существует. Одновременно с тем стратегия первого игрока $U_1^T \div \alpha x$, $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ реализует, согласно (5), угрозу первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P . В следующих леммах считаем начальную позицию (t_0, x_0) «замороженной» и совпадающей с той, которая фигурирует в лемме 3, а в «угрожающей» стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ также считаем постоянным скаляр $\alpha = \alpha^{(1)}$. Напомним, что, не оговаривая особо, считаем выполненными ограничения (11).

Итак фактически лемма 3 устанавливает справедливость следующего

Утверждение 3. Если в игре Γ хотя бы одна из постоянных симметричных $n \times n$ -матриц $D_{ii} > 0$ ($i = 1, 2, 3$), то в дифференциальной игре Γ не существует равновесия по Нэшу, именно, не существует стратегии $U_i^e \in \mathfrak{A}_i$, для которой выполнено соответствующее требование для U_i^e из определения 2.

Здесь следует отметить, что, во-первых, условие $D_{ii} > 0$ (при «замороженном» $i \in \{1, 2, 3\}$) не допускает выполнения только i -го равенства из определения 2. Этого

достаточно для отсутствия равновесной по Нэшу ситуации U^e в игре Γ . Если же $D_{ii} > 0$ при всех $i = 1, 2, 3$, то не могут реализоваться все три равенства (из определения 2).

Во-вторых, очевидна эквиваленция

$$D > 0 \Leftrightarrow -D < 0.$$

$(-D)$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на -1 .

Тогда лемма 3 приводит к справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть в (3) матрица $D_{12} < 0$. Тогда существует постоянная $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) > 0$ такая, что для стратегии второго игрока $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ будет

$$\mathcal{J}_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) < \mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0), \quad (28)$$

т.е. стратегия $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ реализует в игре Γ неполную контругрозу в ответ на угрозу U_1^T первого игрока.

Доказательство. Доказательство, с очевидными изменениями, сразу следует из леммы 3.

Аналогично доказательству лемм 3 и 4 устанавливается справедливость следующих двух утверждений (леммы 5 и 6). В них, напомним, считаем «замороженными» начальную позицию (t_0, x_0) , $n \times n$ -непрерывную матрицу $\Theta^P(t)$, стратегию $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$ неполной угрозы, фигурирующих в леммах 3 и 4, и выполнены ограничения (11).

Лемма 5. Имеет место импликация $D_{22} > 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(3)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) = const > 0$ такая, что при $\forall \alpha \geq \alpha^{(3)}$ и стратегии $U_2^C \div \alpha x$ будет

$$\mathcal{J}_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) > \mathcal{J}_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0),$$

т.е. стратегия второго игрока $U_2^C \div (\max\{\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\})x$ завершает полную контругрозу (совместно с $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$) в ответ на угрозу первого на U^P .

Аналогично лемме 4 доказывается

Лемма 6. Пусть U_2^T — угроза второго игрока на максимальную по Парето в Γ_v ситуацию $U^P = (U_1^P, U_2^P, U_3^P)$, т.е. нашлась стратегия $U_2^T \div \alpha x$ такая, что при $\alpha \geq \alpha^{(2)}$

$$\mathcal{J}_2(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0),$$

(такая стратегия U_2^T существует вследствие $D_{22} > 0$).

Тогда справедлива импликация

$$D_{21} < 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(4)} = \text{const} > 0 : \forall \alpha = \text{const} \geq \alpha^{(4)}$$

$$\mathcal{J}_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0)$$

для стратегии $U_1^C \div \alpha x$, т.е. U_1^C реализует в игре Γ неполную контругрозу на ситуацию U^P .

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РУИК

Теорема 1. Предположим, что для игры Γ выполнены ограничения (11). Тогда четверка

$$(U^P, \mathcal{J}_1^P, \mathcal{J}_2^P, \mathcal{J}_3^P) = ((U_1^P, U_2^P, U_3^P), \mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0), \mathcal{J}_3(U^P, t_0, x_0)) =$$

$$= ((-D_1^{-1}\Theta^P(t)x, -D_2^{-1}\Theta^P(t)x, -D_3^{-1}\Theta^P(t)x), x'_0\Theta_1(t_0)x_0, x'_0\Theta_2(t_0)x_0, x'_0\Theta_3(t_0)x_0)$$

является равновесием угроз и контругроз для дифференциальной игры

$$\Gamma = \langle \{1, 2, 3\}, \Sigma \div (2), \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2,3}, \{\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0) \div (3)\}_{i=1,2,3} \rangle;$$

здесь матрица

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]' \{C^{-1} -$$

$$- \int_t^\vartheta X^{-1}(\tau) [D_1^{-1} + D_2^{-1} + D_3^{-1}] [X^{-1}(\tau)]' d\tau\}^{-1} X^{-1}(t),$$

$$D_i = D_{1i} + \beta D_{2i} + \gamma D_{3i}, C = C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3,$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right], \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right) \frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right],$$

где Λ_{ii} — наибольший корень уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$, $-\lambda_{ij}$ — наибольший корень уравнения $\det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$, $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ ($i, j = 1, 2, 3$; $j \neq i$), а симметричные матрицы $\Theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) определены в (20).

Доказательство. Во-первых, из $D_{11} > 0$ следует сразу два вывода: отсутствие в Γ ситуации равновесия по Нэшу и наличие угрозы U_1^T со стороны первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P в трехкритериальной задаче Γ_ν (замечание 3). Существование максимальной по Парето ситуации и максимальных по Парето выигрышей в Γ_ν (а также их явный вид при этом) получены в утверждениях 1 и 2 соответственно. Условие $D_{21} < 0$ позволяет построить неполную контругрозу U_2^C второго игрока в ответ на угрозу первого (лемма 4), а $D_{22} > 0$ и лемма 5 дают

возможность довести второму игроку неполную контругрозу U_2^C до полной \bar{U}_2^C . Одновременно требование $D_{22} > 0$ влечет отсутствие ситуации равновесия по Нэшу (не существует $\max_{U_1} \mathcal{J}(U_1, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0)$ при $\forall U_1 \in \mathfrak{A}_1$) и возможность аналитически сконструировать второму игроку угрозу $U_2^T \in \mathfrak{A}_2$ на U^P в игре Γ :

$$\mathcal{J}_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) \leq \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0). \quad (29)$$

Условие $D_{21} < 0$ и лемма 6 обеспечивают существование неполной контругрозы $U_1^C \in \mathfrak{A}_1$ первого игрока на угрозу U_2^T второго:

$$\mathcal{J}_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < \mathcal{J}_2(U^P, t_0, x_0). \quad (30)$$

Наконец, из максимальнойности по Парето U^P и свойства 1 будет следовать

$$\mathcal{J}_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) < \mathcal{J}_1(U^P, t_0, x_0), \quad (31)$$

а из $D_{11} > 0$ и леммы 3 получаем существование $\bar{U}_1^C \in \mathfrak{A}_1$ такого, что

$$\mathcal{J}_1(\bar{U}_1^C, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0) > \mathcal{J}_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, t_0, x_0). \quad (32)$$

Аналогичны построения контругрозы в ответ на угрозу третьего на U^P .

Таким образом, установили, что в игре Γ в ответ на угрозу любого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P у одного из оставшихся имеется полная контругроза, что и доказывает теорему 1.

Заключение

Итак, в предлагаемой читателю статье установлено, что в линейно-квадратичной позиционной дифференциальной игре Γ при выполнении ограничений (11) не существует ситуации равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт показывает настоятельную необходимость дополнительных исследований свойств этого равновесия, вопросов существования, нахождения других классов игр (и не дифференциальных тоже!), обладающих выявленным теоремой 1 свойством (отсутствием ситуации равновесия по Нэшу и одновременного существования равновесия угроз и контругроз). Интерес представляют и вопросы устойчивости коалиционных структур [15]. Этому вопросу авторы надеются посвятить дальнейшие исследования.

В конце статьи хотелось бы остановиться на некоторых задачах, которые возникли при подготовке настоящей статьи.

1. Построение максимальной по Парето ситуации здесь сведено к нахождению постоянных $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, удовлетворяющих системе из трех строгих неравенств (10). Явный вид возможных β и γ приведен перед замечанием 1, но хотелось бы

иметь общий вид решений (10) и связь его с РУИК игры Γ (при этом исключая вид β и γ из замечания 1).

2. РУИК для дифференциальных игр с числом участников больше трех и учет при этом интервальной неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большой толковый словарь русского языка / Сост. и гл. ред. С. А. Кузнецов. — Санкт-Петербург: Норинт, 2003. — 1536 с.
(2003) *Large explanatory dictionary of the Russian language*. Compiler and editor-in-chief S. A. Kuznetsov. St. Petersburg: Norint.
2. Вайсборд, Э. М. О коалиционных дифференциальных играх // . — Дифференциальные уравнения, 1974. — Т 10, № 4. — С. 613–623.
VAISBORD, E. M. (1974) Coalition differential games. *Differ. Uravn.* 10 (4). p. 613–623.
3. Вайсборд, Э. М., Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Советское радио, 1980. — 304 с.
VAISBORD, E. M. and ZHUKOVSKIY, V. I. (1980) *Introduction to Multi Player Differential Game and Their Application*. Moscow: Sovetskoe radio.
4. Вилкас, Э. И. Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. — Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. СС, 1972. — Вып. 2. — С. 9–55.
VILKAS, E. I. (1972) Formalization of the problem of choosing a game-theoretic criterion of optimality. *Mathematical Methods in Social Sciences: a collection of articles*. 2. p. 9–55.
5. Вилкас, Э. И., Майминас, Е. З. Решения: теория, информация, моделирование. — М.: Радио и связь, 1981. — 328 с.
VILKAS, E. I. and MAYMINAS, E. Z. (1981) *Solutions: theory, information, modeling*. Moscow: Radio i svyaz'.
6. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
VOEVODIN, V. V., KUZNETSOV, Yu. A. (1984) *Matrices and calculations*. Moscow: Nauka.

7. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
GANTMAKHER, F. R. (2004) *Theory of matrices*. Moscow: Fizmatlit.
8. Жуковский, В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз. — М.: КРАСАНД, 2010. — 192 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. (2010) *Introduction to differential games under uncertainty. The equilibrium of objections and counterobjections*. Moscow: KRASAND.
9. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Самсонов, С. В., Высокос, М. И., Бельских, Ю. А. Класс дифференциальных игр, в которых отсутствует равновесие по Нэшу, но существует равновесие угроз и контругроз // Вестник Южно-Уральского университета. Серия Математика, Механика, Физика. — 2018. — Т. 10, № 2. — С. 5–21.
ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N., SAMSONOV, S. P., VYSOKOS, M. I. & BELSKIY, YU. A. (2018) Class of differential games with no Nash equilibrium, but with equilibrium of objections and counterobjections. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematics. Mechanics. Physics*. 10 (2). p. 5–21.
10. Жуковский, В. И., Тынянский, Н. Т. Равновесные управления многокритериальных динамических задач. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 224 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. and TYNYANSKIY, N. T. (1984) *Equilibrium control of multicriteria dynamic problems*. Moscow: Izdatel'stvo MGU.
11. Жуковский, В. И., Чикрий, А. А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — М.: Юрайт, 2017. — 332 с.
ZHUKOVSKIY, V. I., CHIKRIY, A. A. (2018) *Differential equation. Linear-quadratic differential games*. Moscow: Yurayt.
12. Красовский, Н. Н., Субботин, А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1984. — 456 с.
KRASOVSKIY, N. N. and SUBBOTIN, A. I. (1984) *Positional-differential games*. Moscow: Nauka.
13. Льюс, Р. Д., Райфа, Х. Игры и решения. — М.: Иностранная литература, 1961.
LUCY, R. D. and RAIFFA, H. (1957) *Games and decisions*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

14. Мамедов, М. Б. О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук.. — 1983. — Т. 4, № 2. — С. 11–17.
MAMEDOV, M. B. (1983) About the Nash equilibrium of the Pareto optimal situation. *Izv. AN Azerbaydjana. Series Phys.-tecnic. science.* 4 (2). p. 11–17.
15. Оуэн, Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 230 с.
OWEN, G. (1995) *Game theory*. New York: Academic Press.
16. Подиновский, В. В., Ногин, В. Д. Парето–оптимальное решение многокритериальных задач.. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.
PODINOVSKIY, V. V. and NOGIN, V. D. (2007) *Pareto optimal solution of multicriteria problems*. Moscow: Fizmatlit.
17. Смольяков, Э. Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: УРСС, 2005. — 301 с.
SMOL'YAKOV, E. R. (2005) *Theory of Conflict Equilibria*. Moscow: URSS.
18. BILTCHEV, S. J. (1984) $\varepsilon - Z$ -Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System. *Many Players Differential Game.* p. 47–52.
19. CASE, J. H. (1974) A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium. *J. Optimiz. Theory Appl.* 13 (3). p. 378–385.
20. DOCHEV, D. T. & STOJANOV, N. V. (1984) Existence of Z -Equilibrium in a Differential Game with Delay. *Many Players Differential Game.* p. 64–72.
21. GAIDOV, S. D. (1984) Z -Equilibrium in Stochastic Differential Game. *Many Players Differential Game.* p. 53–63.
22. NASH, J. (1950) Equilibrium points in N -person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 36 (1). p. 48–49.
23. NASH, J. (1951) Non-cooperative games. *Annales of Mathematics.* 54 (2). p. 286–295.
24. RASHKOV, P. I. (1984) Sufficient Conditions for Z -Equilibrium in a Differential Game in Banach Space. *Many Players Differential Game.* p. 91–99.
25. TERSIAN, St. A. (1984) On the Z -Equilibrium Points in a Differential Game. *Many Players Differential Game.* p. 106–111.
26. ZHUKOVSKIY, V. I. (1985) Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Method in Operation Research.* p. 103–195.
27. ZHUKOVSKIY, V. I. and SALUKVADZE, M. E. (1994) *The Vector--Valued Maximin*. New York: Academic Press.

УДК: 519.23

MSC2010: 62G08

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНОК ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

© В. В. Новиков, А. О. Худошина

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УЛ. АСТРАХАНСКАЯ, 83, САРАТОВ, 410012, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: vnovikov@yandex.ru, hudoshina.an@mail.ru

ON A CONSISTENCY OF ORTHOGONAL SERIES ESTIMATORS WITH RESPECT TO
JACOBI POLYNOMIALS SYSTEM.

Novikov V. V., Hudoshina A. O.

Abstract. Consider a nonparametric regression model

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

where $m(x)$ is the unknown regression function to be estimated, $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ is a dataset and $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ are observation errors. Suppose that the regression function can be represented as a Fourier series

$$m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varphi_j(x),$$

where the system of functions $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ constitutes an orthonormal basis on $[-1, 1]$, with respect to inner product

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) \rho(x) dx,$$

and $\{\beta_j\}$ are Fourier coefficients. Next assume that observations $\{Y_i\}_{i=1}^n$ have been taken at equidistant points $\{X_i\}_{i=1}^n$ over the interval $[-1, 1]$ and let $\{A_i\}_{i=1}^n$ be a set of disjoint intervals such that $\cup_{i=1}^n A_i = [-1, 1]$ and $X_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$. Put

$$\hat{m}_{N(n)}(x) = \sum_{j=0}^{N(n)} \hat{\beta}_j \varphi_j(x), \quad \hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} \varphi_j(x) \rho(x) dx,$$

where $N(n)$ is a suitable finite number. This estimator is called an orthogonal series estimator of $m(x)$.

In the present paper, we give the consistency condition for $\hat{m}(x)$ provided that the regression function $m(x)$ is Lipschitz continuous and $\varphi_j(x) = P_j^{(\alpha, \beta)}(x)$, $j = 0, 1, \dots$, is the Jacobi orthonormal polynomials system with certain restrictions for exponents α, β . The main result is as follows.

Theorem 1. Suppose that the following conditions are satisfied:

i) $E\varepsilon_i = 0$, $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, and $E\varepsilon_i^2 < C$, $i = 1, \dots, n$;

ii)

$$m(\cdot) \in \text{Lip}_M 1;$$

iii)

$$p := \min\{\alpha; \beta\} \geq -1/2;$$

iv)

$$(N(n))^2 = o\{A_n(\alpha; \beta)\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

where $A_n(\alpha, \beta) = n$, if $p > -1/2$ and $A_n(\alpha, \beta) = n/\log n$, if $p = -1/2$. Then $\hat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x)$, $N(n) \rightarrow \infty$ for every $x \in (-1, 1)$.

Theorem 2. Let the conditions i)–iii) of previous theorem are satisfied, $q = \max\{\alpha; \beta\} < 1/2$, and

$$(N(n))^{2q+3} = o\{A_n(\alpha, \beta)\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Then $\hat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x)$, $N(n) \rightarrow \infty$, for every $x \in [-1, 1]$.

Keywords: nonparametric regression, consistency, estimator, orthogonal series, Jacobi polynomials

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим непараметрическую регрессионную модель

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $m(x) = E(Y|X = x)$ – неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ – случайные ошибки. В настоящей заметке обсуждаются достаточные условия состоятельности оценок ортогонального разложения $\hat{m}(x)$, основанных на представлении функции $m(x)$ рядом Фурье

$$m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varphi_j(x) \quad (2)$$

по некоторой заранее выбранной ортонормированной системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. При построении таких оценок бесконечный ряд (2) заменяется его частичной суммой подходящего порядка $N(n)$, а коэффициенты Фурье β_j – их оценками $\hat{\beta}_j$. Хотя методы оценивания непараметрической регрессии, связанные с ортогональными разложениями, уступают в популярности ядерным методам (см., например, [1] и библиографию там же), они также представляют значительный интерес. Это связано, прежде всего, с простотой и естественностью конструкции таких оценок, а также с не слишком

обременительными условиями, обеспечивающими их состоятельность. Обсуждению условий состоятельности и прикладным аспектам оценок ортогонального разложения посвящена, например, серия работ [2]–[4]. Эти вопросы рассматриваются также в известных книгах [5], [6].

Пусть система $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ ортонормирована на $[-1, 1]$ относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) \rho(x) dx,$$

где $\rho(x)$ — весовая функция. Предположим, далее, что переменная X принимает равноотстоящие значения

$$X_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n} + \theta_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $\theta_n \in [0, 2/n]$ — постоянные числа и $\{A_i\}_{i=1}^n$ — разбиение отрезка $[-1, 1]$ на неналегающие интервалы такие, что $X_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} m(x) \varphi_j(x) \rho(x) dx \approx \sum_{i=1}^n m(X_i) \int_{A_i} \varphi_j(x) \rho(x) dx.$$

Заменяя значение $m(X_i)$ на Y_i , получим оценку для коэффициента β_j :

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} \varphi_j(x) \rho(x) dx, \quad (4)$$

после чего, ограничиваясь конечным числом $N(n)$ членов разложения (2), получаем искомую оценку для функции регрессии

$$\hat{m}_{N(n)}(x) = \sum_{j=0}^{N(n)} \hat{\beta}_j \varphi_j(x). \quad (5)$$

Очевидно, что для удовлетворительного приближения интегралов β_j конечными суммами $\hat{\beta}_j$ количество наблюдений n должно заметно превосходить номер $j = 0, \dots, N(n)$ любого из оцениваемых коэффициентов. Возникает вопрос, насколько быстро может расти последовательность $N(n)$ при заданной гладкости функции $m(x)$ и при том, чтобы имела место приемлемая аппроксимация $m(x)$ посредством $\hat{m}(x)$, иными словами, состоятельность $\hat{m}(x)$?

Полученное в настоящей статье утверждение дает ограничение на порядок роста величин $N(n)$ по сравнению с n , гарантирующее состоятельность оценки (5) для

случая, когда $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$, — ортонормированные многочлены Якоби с некоторыми ограничениями на показатели α , β .

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $P_j^{(\alpha, \beta)}(x)$, $j = 0, 1, \dots$, — многочлены Якоби, ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$ и пусть $p := \min\{\alpha; \beta\}$, $q := \max\{\alpha; \beta\}$. Через $\text{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, обозначается класс функций f , удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α с константой $M > 0$, т. е. таких, что $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ для любых $x, y \in [-1, 1]$. Далее, как обычно, запись $f(n) \sim g(n)$, $n \rightarrow \infty$, означает, что существует последовательность $h(n) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, такая, что для достаточно больших n имеет место равенство $f(n) = h(n)g(n)$. Наконец, через C , $C(p)$, $C(p, q)$ и т. п. будем обозначать постоянные (вообще говоря, различные), соответственно, абсолютные или зависящие от одного или нескольких параметров.

Лемма 1. [7] При условии $p \geq -1/2$ имеет место следующее весовое неравенство для ортонормированных многочленов Якоби

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}} \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \leq C(\alpha, \beta), \quad x \in [-1, 1],$$

или

$$\rho(x) \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \leq C(\alpha, \beta) (1-x)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} (1+x)^{\frac{\beta}{2} - \frac{1}{4}}. \quad (6)$$

Лемма 2. [8] В каждой точке $x \in (-1, 1)$ для ортонормированных многочленов Якоби справедливо соотношение

$$P_j^{(\alpha, \beta)}(x) = O_x(1), \quad (7)$$

которое выполняется равномерно на каждом интервале $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Лемма 3. Положим для $n \geq 2$

$$A_n(\alpha, \beta) := \begin{cases} n, & \text{если } p > -1/2; \\ n/\log n, & \text{если } p = -1/2. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда при $\alpha, \beta \geq -1/2$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \right)^2 \leq \frac{C(\alpha, \beta)}{A_n(\alpha, \beta)}. \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим $\gamma = \alpha/2 - 1/4$ и $\delta = \beta/2 - 1/4$. Тогда в силу (6)

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \right)^2 \leq C(\alpha, \beta) \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \right)^2. \quad (10)$$

Докажем неравенство (9) сначала для случая $p > -1/2$. Заметим, что если $\min\{\gamma; \delta\} \geq 0$ или, что то же самое, $\min\{\alpha; \beta\} \geq 1/2$, то (9) непосредственно следует из (10). Поэтому предположим, для определенности, что $\gamma \in (-1/2, 0)$ и пусть индекс i таков, что $A_i \subset [0, 1]$, причем $i \leq n-2$. Тогда по теореме о среднем найдется $t_i \in A_i$ для которого

$$\int_{A_i} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \leq C(\beta) \int_{A_i} (1-x)^\gamma dx \leq \frac{C(\beta)}{n} (1-t_i)^\gamma. \quad (11)$$

Поскольку

$$t_i \leq X_{i+1} = -1 + \frac{2i}{n} + \theta_n \leq -1 + \frac{2(i+1)}{n} < 1,$$

из (11) находим

$$\int_{A_i} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \leq \frac{C(\beta)}{n} \left(2 - \frac{2(i+1)}{n} \right)^\gamma = \frac{C(\beta)}{n^{1+\gamma}} (n-i-1)^\gamma.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^n k^r \sim \frac{n^{r+1}}{r+1}, \quad n \rightarrow \infty, \quad r > -1, \quad (12)$$

и

$$\int_{A_{n-1}} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \leq C(\beta) \int_{1-\frac{6}{n}}^1 (1-x)^\gamma dx \leq \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{1+\gamma}},$$

$$\int_{A_n} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \leq C(\beta) \int_{1-\frac{4}{n}}^1 (1-x)^\gamma dx \leq \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{1+\gamma}},$$

получаем,

$$\begin{aligned} \sum_{i: A_i \in [0, 1]} \left(\int_{A_i} (1-x)^\gamma (1+x)^\delta dx \right)^2 &< \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{2(1+\gamma)}} \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1)^{2\gamma} + \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{2(1+\gamma)}} \\ &\leq \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{2(1+\gamma)}} \cdot n^{2\gamma+1} + \frac{C(\alpha, \beta)}{n^{2(1+\gamma)}} \leq \frac{C(\alpha, \beta)}{n}. \end{aligned}$$

Если окажется, что не только γ , но и $\delta \in (-1/2, 0)$, то применяя аналогичные рассуждения (с заменой γ на δ) к сумме по i таким, что $A_i \subset [-1, 0)$, получим для нее

ту же оценку сверху величиной $C(\alpha, \beta)n^{-1}$. В противном случае, т. е. если $\delta \geq 0$, то требуемая оценка для этой суммы, как было указано, получается сразу. Наконец, оставшееся слагаемое с номером i_0 для которого $0 \in A_{i_0} \not\subset [-1, 0)$, $A_{i_0} \cap [-1, 0) \neq \emptyset$ сразу оценивается сверху величиной $C(\alpha, \beta)n^{-2}$. Таким образом, неравенство (9) для случая $p > -1/2$ доказано.

Для доказательства (9) в случае $p = -1/2$ следует провести те же рассуждения, воспользовавшись вместо (12) соотношением $\sum_{k=1}^n k^{-1} \sim \log n$, $n \rightarrow \infty$. \square

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

i) $E\varepsilon_i = 0$, $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, и $E\varepsilon_i^2 < C$, $i = 1, \dots, n$, где C — некоторая постоянная;

ii)

$$m(\cdot) \in \text{Lip}_M 1; \quad (13)$$

iii)

$$p = \min\{\alpha; \beta\} \geq -1/2; \quad (14)$$

iv)

$$(N(n))^2 = o\{A_n(\alpha; \beta)\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Тогда при $N(n) \rightarrow \infty$ для оценки (5) имеем

$$\hat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (16)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что из (13) следует (см., например, [7], гл. VII) равномерная сходимостъ ряда Фурье–Якоби (2) с произвольными $\alpha, \beta > -1$ на любом интервале $[a, b] \subset (-1, 1)$, и тем более, в каждой точке $x \in (-1, 1)$. Далее, в предположениях теоремы справедливо равенство

$$E(\hat{\beta}_j) = \sum_{i=1}^n m(x_i) \int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx,$$

так что, учитывая (13), будем иметь

$$\begin{aligned} |E\hat{m}_N(x) - m(x)| &= \left| E \left(\sum_{j=0}^N \hat{\beta}_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right) - m(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^N P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \sum_{i=1}^n \int_{A_i} (m(x_i) - m(u)) P_j^{(\alpha, \beta)}(u) \rho(x) du \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \sum_{j=0}^N P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \sum_{i=1}^n \int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(u) m(u) \rho(x) du - m(x) \right| \\
 & \leq CMn^{-1} \sum_{j=0}^N |P_j^{(\alpha, \beta)}(x)| \int_{-1}^1 |P_j^{(\alpha, \beta)}(u)| \rho(u) du + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|,
 \end{aligned}$$

откуда в силу леммы 1 получаем

$$|\mathbb{E} \hat{m}_N(x) - m(x)| \leq C(\alpha, \beta) n^{-1} \sum_{j=0}^N |P_j^{(\alpha, \beta)}(x)| + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|. \quad (17)$$

Применив лемму 2, найдем

$$|\mathbb{E} \hat{m}_N(x) - m(x)| \leq C(\alpha, \beta, x) N n^{-1} + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|. \quad (18)$$

Оценим дисперсию $\hat{m}_N(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 D(\hat{m}_N(x)) &= \sum_{j=0}^N \left(P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right)^2 D(\hat{\beta}_j) + \\
 & 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \text{cov}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) \equiv A + B.
 \end{aligned}$$

В силу условий i), лемм 2 и 3

$$\begin{aligned}
 A &\leq C(\alpha, \beta, x) \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^n D(\varepsilon_i) \left(\int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \right)^2 \\
 &\leq C(\alpha, \beta, x) \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \right)^2 \leq \frac{C(\alpha, \beta, x) N}{A_n(\alpha, \beta)}.
 \end{aligned}$$

Далее, в силу (7)

$$|B| \leq C(\alpha, \beta, x) \sum_{0 \leq k < j \leq N} |\text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_j)|.$$

Положим

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \equiv \sum_{i=1}^n a_{i,j} Y_i, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда, учитывая, вытекающее из условия равенство,

$$\text{cov}(Y_i, Y_s) = D(Y_i) \delta_{is} = D(\varepsilon_i) \delta_{is},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \text{cov}(\widehat{\beta}_k, \widehat{\beta}_j) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_{i,k} a_{s,j} \text{cov}(Y_i, Y_s) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_{i,k} a_{i,j}| D(Y_i) \leq C \sum_{i=1}^n |a_{i,k} a_{i,j}| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2}. \end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению лемму 3, найдем

$$|B| \leq \frac{N(N+1)}{2} \cdot \frac{C(\alpha, \beta, x)}{A_n(\alpha, \beta)} \leq \frac{N^2 C(\alpha, \beta, x)}{A_n(\alpha, \beta)},$$

так что

$$D(\widehat{m}_N(x)) \leq \frac{N^2 C(\alpha, \beta, x)}{A_n(\alpha, \beta)}. \quad (19)$$

Таким образом, из (15), (17)–(19) и сходимости ряда (2) следует, что

$$|E\widehat{m}_N(x) - m(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

и

$$|D\widehat{m}_N(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Докажем теперь (16). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (20) существует такой номер $n_0(\varepsilon, x)$, что для всех $n > n_0$

$$|E\widehat{m}_{N(n)}(x) - m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

поскольку предполагается, что $N(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} P(|\widehat{m}_N(x) - m(x)| > \varepsilon) &\leq P(|\widehat{m}_N(x) - E\widehat{m}_N(x)| + |E\widehat{m}_N(x) - m(x)| > \varepsilon) \\ &\leq P\left(|\widehat{m}_N(x) - E\widehat{m}_N(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Применив неравенство Чебышева, на основании (21) получим

$$P\left(|\widehat{m}_N(x) - E\widehat{m}_N(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{4D\widehat{m}_N(x)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Замечание. Легко видеть, что в условиях теоремы соотношение (16) выполняется равномерно относительно параметра x на любом замкнутом интервале $[a, b] \subset (-1, 1)$, поскольку правые части соотношений (17), (20) и (21) стремятся к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия i)–iii) предыдущей теоремы, $q < 1/2$, и, кроме того,

$$(N(n))^{2q+3} = o\{A_n(\alpha, \beta)\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Тогда

$$\hat{m}_N(x) \xrightarrow{P} m(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (23)$$

Доказательство. Известно (см. [7], гл. VII), что если $q \geq -1/2$, $m \in C^s[-1, 1]$ и $m^{(s)} \in \text{Lip}_M \gamma$, $0 < \gamma \leq 1$, причем выполнено условие $s + \gamma > q + 1/2$, то ряд Фурье–Якоби функции m сходится к ней на всем замкнутом промежутке ортогональности. Поэтому в предположениях теоремы имеет место равномерная сходимости ряда на всем отрезке $[-1, 1]$. Далее (см. там же), при условии $q \geq -1/2$ для ортонормированного многочлена Якоби имеет место равномерная оценка

$$\left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \leq C(\alpha, \beta) j^{q+1/2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (24)$$

Легко видеть, что неравенство (17) остается в силе, только теперь оно выполнено на всем $[-1, 1]$. Поскольку $-1/2 \leq p \leq q < 1/2$, условия (22) и (24) гарантируют равномерное по $x \in [-1, 1]$ стремление к нулю правой части (17).

Оценим дисперсию. Рассуждая как при доказательстве теоремы 1 и учитывая (24), для любого $x \in [-1, 1]$ получим

$$\begin{aligned} D(\hat{m}_N(x)) &= \sum_{j=0}^N \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|^2 D(\hat{\beta}_j) + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \text{cov}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) \leq \\ &\leq C \sum_{j=0}^N \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|^2 \sum_{i=1}^n \left(\int_{A_i} P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \rho(x) dx \right)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \text{cov}(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{C(\alpha, \beta)}{A_n(\alpha, \beta)} \left(\sum_{j=0}^N \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) \right|^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| P_j^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \right| \right) \\ &\leq \frac{C(\alpha, \beta)}{A_n(\alpha, \beta)} \left(\sum_{j=0}^N j^{2q+1} + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq N} (kj)^{q+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < j \leq N} (kj)^{q+\frac{1}{2}} &= \sum_{j=1}^N j^{q+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{j-1} k^{q+\frac{1}{2}} \leq C \sum_{j=1}^N j^{q+\frac{1}{2}} (j-1)^{q+\frac{3}{2}} \\ &\leq C \sum_{j=1}^N j^{2q+2} \leq CN^{2q+3}, \end{aligned}$$

окончательно находим

$$D(\widehat{m}_N(x)) \leq \frac{C(\alpha, \beta)N^{2q+3}}{A_n(\alpha, \beta)}.$$

Таким образом, мы вновь получаем соотношения (20) и (21), которые теперь выполняются уже равномерно по $x \in [-1, 1]$. Для обоснования (23) следует дословно повторить соответствующие рассуждения из доказательства предыдущей теоремы. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Расин, Д. Непараметрическая эконометрика: вводный курс // Квантиль. — 2008. — No. 4. — С. 7–56.
RACINE, J. (2008) Nonparametric econometrics: a primer. *Quantile*. No. 4. p. 7–56.
2. RUTKOWSKI, L. (1982) On System Identification by Nonparametric Function Fitting. *IEEE Transactions of Automatic Control*. Vol. AC–27. p. 225–227.
3. RUTKOWSKI, L. (1982) On-line identification of time varying systems by nonparametric techniques. *IEEE Transactions of Automatic Control*. Vol. AC–27. p. 228–230.
4. GREBLICKI, W. & RUTKOWSKA, D. & RUTKOWSKI, L. (1983) An Orthogonal Series Estimate of Time-varying Regression. *Ann. Inst. Statist. Math.* Vol. 35. p. 215–228.
5. Хардле, В. Прикладная непараметрическая регрессия / В. Хардле. — М.: Мир, 1993. — 349 с.
HÄRDLE, W. (1989) *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press.
6. LI, Q. & RACINE, J. (2007) *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*. Princeton University Press.
7. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. — М.: Наука, 1979. — 419 с.
SUETIN, P. (1979) *Classic orthogonal polynomials*. Moscow: Nauka.
8. Алексич, Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов / Г. Алексич. — М.: ИЛ, 1963. — 359 с.
ALEXITS, G. (1961) *Convergence problems of orthogonal series*. Budapest: Académai Kiadó.

УДК: 511.41

MSC2010: 11A55

***T*-ДИСКРИМИНАНТЫ С ПАРАМЕТРАМИ**

© **В. В. Пискунова, Д. В. Третьяков**

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАД. ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: VIKTORYAPISKUNOVA@YANDEX.RU, DVTTVD@MAIL.RU

***t*-DISCRIMINANTS WITH PARAMETERS.**

Piskunova V. V., Tretyakov D. V.

Abstract. Quadratic irrationalities which have continued fractions decomposes of next forms:

$$\alpha(h, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_2, q_1, tq_0}],$$

$$\alpha_1(h, t) = \frac{\sqrt{D_1} - b_1}{a_1} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_2, q_1, tq_0}],$$

$$\alpha_2(h_1, h_2, t) = \frac{\sqrt{D_2} - b_2}{a_2} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_2, q_1, tq_0}]$$

are considered in this paper. $h, h_1, h_2, t \geq 2$ are natural parameters and number system $\langle q_1, q_2, \dots, q_n, q_n, \dots, q_2, q_1 \rangle$ is palindrome.

Formulas for calculating $D, D_i, a, a_i, b, b_i, i = 1, 2$ are obtained.

Monotone irrationalities properties with respect to parameters are investigated. Case $t = 2$ is previously considered.

In first of two cases indicated monotonicity is depend on "semiperiod" length n for everyone $t \geq 2$.

In third case for everyone $t \geq 2$ the monotone dependence is a more complicated. For fixed h_1 α_2 is monotonically increasing (decreasing) with respect to h_2 and for fixed h_2 α_2 is monotonically decreasing (increasing) with respect to h_1 depending on "semiperiod" length n .

The monotonicity with respect to parameter $t \geq 2$ investigated too. Obtained dependence is rather different and is not depending on "semiperiod".

Oblique asymptote is found in all cases.

Every considered case is illustrated by examples.

Keywords: *t-discriminants, continued periodic fractions with parameters, monotonicity.*

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена решению некоторых частных случаев одной из нерешенных задач теории цепных дробей, которая заключается в упорядочении двух цепных дробей по их внешнему виду.

Более точно, в данной статье исследуются свойства монотонности цепных дробей следующего вида:

$$\alpha(h, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}],$$

$$\alpha(h, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0],$$

$$\alpha(h_1, h_2, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0],$$

где h, h_1, h_2, t — натуральные параметры и $t > 2$.

Случай $t = 2$ рассмотрен в работе [5]. Найдена наклонная асимптота для каждого вида указанных цепных дробей. Некоторые результаты работы анонсированы в [3, 4, 6].

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ВИДА

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$$

Определение 1. [7] Квадратичные иррациональности $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$, которые раскладываются в ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}]$, где $t \geq 2$ — натуральное число, называются t -дискриминантами.

Теорема 1. [7] Равенство

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}],$$

где $t \geq 2$ — натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда

$$2b = (t - 2)q_0a, \quad q_0 = [\alpha] > 1.$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (t - 2)q_0P_{n-1}, \quad a = 2P_{n-1}, \quad D = (tq_0P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n,$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, \dots, q_2, q_1].$$

Используя известные сведения и теоремы из теории бесконечных цепных дробей (см., напр., [1, 2, 8]), убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Лемма 1. [3] 1) если $\alpha(h, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] - t$ -дискриминант, то

$$D = \left(h(tq_0P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1}) + (2tq_0P_{n-1}P_{n-2} + 2(Q_{n-1}P_{n-2} + P_{n-1}Q_{n-2})) \right)^2 - 4,$$

$$b = (t - 2)q_0P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2}), \quad a = 2(hP_{n-1}^2 + 2P_{n-1}P_{n-2});$$

2) если $\alpha(h, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] - t$ -дискриминант, то

$$D = \left(tq_0(\mu^2(h) + P_{n-1}^2) + (2\mu(h)\beta(h) + P_{n-1}Q_{n-1}) \right)^2 + 4, \quad a = 2(\mu^2(h) + P_{n-1}^2),$$

$$b = (t - 2)q_0(\mu^2(h) + P_{n-1}^2),$$

где

$$\mu(h) = P_{n-1}h + P_{n-2}, \quad \beta(h) = Q_{n-1}h + Q_{n-2};$$

3) если $\alpha(h_1, h_2, t) = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, то

$$D = (tq_0\gamma(h) + (h_1 - h_2)(-1)^n + 2\delta(h))^2 + 4, \quad b = (t - 2)q_0\gamma(h) + (-1)^{n+1}(h_1 - h_2), \quad a = 2\gamma(h).$$

Здесь

$$\gamma(h) = \mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2, \quad \delta(h) = \beta(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}Q_{n-1}.$$

Доказательство этой леммы при $t = 2$ было проведено в [5]. Доказательство настоящей леммы проводится аналогично.

Рассмотрим дробь

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}].$$

В силу леммы 1, α принимает вид:

$$\alpha = \frac{(2-t)q_0P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2}) + \sqrt{\left[h(tq_0P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1}) + (2tq_0P_{n-1}P_{n-2} + 2(Q_{n-1}P_{n-2} + P_{n-1}Q_{n-2})) \right]^2 - 4}}{2[hP_{n-1}^2 + 2P_{n-1}P_{n-2}]},$$

где

$$(2 - t)q_0P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2}) \neq 0.$$

Для удобства в формуле для α введем следующие обозначения:

$$tq_0P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1} = A, \quad 2tq_0P_{n-1}P_{n-2} + 2(Q_{n-1}P_{n-2} + P_{n-1}Q_{n-2}) = B,$$

$$P_{n-1}^2 = C, \quad 2P_{n-1}P_{n-2} = E, \quad (2-t)q_0P_{n-1}(hP_{n-1} + P_{n-2}) = M.$$

Исследуем теперь величину α на монотонность, считая, что $h \in [1, +\infty)$ — независимая переменная. Тогда $\alpha = \alpha(h)$ является непрерывно дифференцируемой на $[1, +\infty)$ функцией и, следовательно, можно применить дифференциальное исчисление. Вычислим функцию $\alpha'(h)$:

$$\alpha' = \frac{\left((2-t)q_0P_{n-1}^2 + \frac{(hA+B)A}{\sqrt{(hA+B)^2-4}} \right) (2(hC+E)) - 2C(M + \sqrt{(hA+B)^2-4})}{(2(hC+E))^2}$$

Рассмотрим подробнее числитель данной дроби:

$$2(2-t)q_0P_{n-1}^2(hC+E) + \frac{2A(hA+B)(hC+E)}{\sqrt{(hA+B)^2-4}} - 2(2-t)Chq_0P_{n-1}^2 - 4C(2-t)q_0P_{n-1}P_{n-2} - 2C\sqrt{(hA+B)^2-4} = \frac{2A(hA+B)(hC+E) - 2C((hA+B)^2-4)}{\sqrt{(hA+B)^2-4}}.$$

Отсюда

$$\alpha' = \frac{A(hA+B)(hC+E) - C((hA+B)^2-4)}{2(hC+E)^2 \cdot \sqrt{(hA+B)^2-4}}.$$

Очевидно, что:

$$2(hC+E)^2 \cdot \sqrt{(hA+B)^2-4} > 0.$$

Нам необходимо узнать, при каких условиях производная функции положительна, а при каких отрицательна. Для этого преобразуем числитель α' :

$$A(ACH^2 + (AE+BC)h + BE) - A^2Ch^2 - 2hABC - CB^2 + 4C = (Ah+B)(AE-BC) + 4C.$$

Так как

$$Ah + B = (tq_0P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1})h + (2tq_0P_{n-1}P_{n-2} + 2Q_{n-1}P_{n-2} + 2P_{n-1}Q_{n-2}) > 0,$$

$$AE - BC = (tq_0P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1})(2P_{n-1}P_{n-2}) - (2tq_0P_{n-1}P_{n-2} + 2Q_{n-1}P_{n-2} + 2P_{n-1}Q_{n-2})P_{n-1}^2 = 2(-1)^{n+1}P_{n-1}^2,$$

то $\alpha' > 0$ при нечетном n и, следовательно, $\alpha' < 0$ при четном n , $h = 1$ — точка экстремума для $\alpha(h)$ (*max* при четном n и *min* при нечетном).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *t-дискриминанты $[q_0, q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0]$ при нечетном n возрастают, а при четном n убывают, с ростом натурального параметра h и для любого t .*

Для функции α вычислим наклонную асимптоту, которая задается уравнением $y = kh + b$, где

$$k = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(h)}{h}, \quad b = \lim_{h \rightarrow +\infty} (\alpha(h) - kh).$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{((2-t)q_0 P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2})) + \sqrt{(Ah + B)^2 - 4}}{2h(Ch + E)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\left((2-t)q_0 P_{n-1}^2 + \frac{2}{h}(2-t)q_0 P_{n-1} P_{n-2} \right) + \sqrt{A^2 + \frac{2}{h}AB + \frac{B^2}{h^2} - \frac{4}{h^2}}}{2h\left(C + \frac{E}{h}\right)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)q_0 P_{n-1}^2 + A}{2Ch} = 0. \end{aligned}$$

Так как $k = 0$, то

$$\begin{aligned} b &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \alpha(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{((2-t)q_0 P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2})) + \sqrt{(Ah + B)^2 - 4}}{2(Ch + E)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h\left((2-t)q_0 P_{n-1}^2 + \frac{2}{h}(2-t)q_0 P_{n-1} P_{n-2} + \sqrt{A^2 + \frac{2}{h}AB + \frac{B^2}{h^2} - \frac{4}{h^2}} \right)}{2h\left(C + \frac{E}{h}\right)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)q_0 P_{n-1}^2 + A}{2C} = \frac{(2-t)q_0 P_{n-1}^2 + A}{2C}. \end{aligned}$$

Поскольку $A = tq_0 P_{n-1}^2 + 2P_{n-1}Q_{n-1}$, $C = P_{n-1}^2$, то b принимает вид:

$$b = \frac{(2-t)q_0 P_{n-1}^2 + A}{2C} = \frac{(2-t)q_0}{2} + \frac{tq_0}{2} + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Для t -дискриминантов $[q_0, q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$.

Следствие 1. 1) $[q_0, q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0] = o(h)$;

2) $[q_0, q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0] \sim q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$, при $h \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим примеры периодических ЦД вида $[q_0, q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0]$, когда $h = 1, \dots, 8$, $t = 4$ и $t = 10$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 1. а) при четном n :

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 8}] = \frac{4\sqrt{35} - 10}{5} \approx 2,7328\dots \\ \alpha(2) &= [2, \overline{1, 2, 2, 2, 1, 8}] = \frac{\sqrt{798} - 12}{6} \approx 2,7081\dots \\ \alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 3, 2, 1, 8}] = \frac{2\sqrt{6006} - 66}{33} \approx 2,6968\dots \\ \alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}] = \frac{\sqrt{22} - 2}{1} \approx 2,6904\dots \\ \alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 5, 2, 1, 8}] = \frac{4\sqrt{3570} - 102}{51} \approx 2,6862\dots \\ \alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 6, 2, 1, 8}] = \frac{\sqrt{4935} - 30}{15} \approx 2,6833\dots \\ \alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 8}] = \frac{6\sqrt{322} - 46}{23} \approx 2,6811\dots \\ \alpha(8) &= [2, \overline{1, 2, 8, 2, 1, 8}] = \frac{\sqrt{33306} - 78}{39} \approx 2,6794\dots\end{aligned}$$

б) при нечетном n :

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{979141914255}}{182135} \approx 1,432871\dots \\ \alpha(2) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 2, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{566248955}}{4380} \approx 1,432873\dots \\ \alpha(3) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 3, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{5939485655235}}{448585} \approx 1,4328744\dots \\ \alpha(4) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{99912951318}}{58181} \approx 1,4328749\dots \\ \alpha(5) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{1676762556935}}{238345} \approx 1,432875\dots \\ \alpha(6) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 6, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{5309547324270}}{424130} \approx 1,4328755\dots \\ \alpha(7) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 7, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{\sqrt{28433273985795}}{981485} \approx 1,4328756\dots \\ \alpha(8) &= [1, \overline{2, 3, 4, 2, 5, 8, 5, 2, 4, 3, 2, 10}] = -4 + \frac{2\sqrt{254695257490}}{185785} \approx 1,4328758\dots\end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемые дроби ведут себя следующим образом: возрастают при нечетном n , а при четном n — убывают.

- Теорема 4.** 1) t -дискриминанты $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ возрастают по t для любого h и n ;
 2) для ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = \frac{(4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0)}{2\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B}q_0)}$.

Доказательство. 1) считая t вещественным параметром, меняющимся на полуинтервале $[2, +\infty)$, продифференцируем функцию

$$\alpha(h, t) = \frac{(2-t)\tilde{A} + \sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}}{2\tilde{E}}$$

по t на указанном промежутке:

$$\begin{aligned} \alpha'(h, t) &= \frac{1}{2\tilde{E}} \left(-\tilde{A} + \frac{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})\tilde{B}q_0}{\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\tilde{E}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} \cdot \left((\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})\tilde{B}q_0 - \tilde{A}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2\tilde{E}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} \cdot \frac{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2\tilde{B}^2q_0^2 - \tilde{A}^2(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 + 4\tilde{A}^2}{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})\tilde{B}q_0 + \tilde{A}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} = \\ &= \frac{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2(\tilde{B}^2q_0^2 - \tilde{A}^2) + 4\tilde{A}^2}{2\tilde{E}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4} \cdot \left((\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})\tilde{B}q_0 + \tilde{A}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4} \right)} = \\ &= \frac{4\tilde{A}^2}{2\tilde{E}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4} \cdot \left((\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})\tilde{B}q_0 + \tilde{A}\sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4} \right)} > 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{B}^2q_0^2 - \tilde{A}^2 &= 0, \quad \tilde{A} = q_0P_{n-1}(hP_{n-1} + 2P_{n-2}), \\ \tilde{C} &= 2hP_{n-1}Q_{n-1} + 2P_{n-2}Q_{n-1} + 2P_{n-1}Q_{n-2}, \quad \tilde{B} = \tilde{E} = hP_{n-1}^2 + 2P_{n-1}P_{n-2}. \end{aligned}$$

- 2) теперь найдем наклонную асимптоту функции $\alpha(h, t)$ по t :

$$k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\tilde{A} + \frac{2\tilde{A}}{t} + \sqrt{\left(\tilde{B}q_0 + \frac{\tilde{C}}{t}\right)^2 - \frac{4}{t^2}}}{2\tilde{E}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\tilde{A} + \tilde{B}q_0}{2\tilde{B}} = \frac{1}{2\tilde{B}} \left(-q_0(hP_{n-1}^2 + 2P_{n-1}P_{n-2}) + (hP_{n-1}^2 + 2P_{n-1}P_{n-2})q_0 \right) = 0. \\
b &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)\tilde{A} + \sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}}{2\tilde{B}} = \\
&= \frac{1}{2\tilde{B}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)^2\tilde{A}^2 - (\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 + 4}{(2-t)\tilde{A} - \sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} = \\
&= -\frac{1}{2\tilde{B}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2(\tilde{A}^2 - \tilde{B}^2q_0^2) - (4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0)t + 4\tilde{A}^2 - \tilde{C}^2 + 4}{(t-2)\tilde{A} - \sqrt{(\tilde{B}tq_0 + \tilde{C})^2 - 4}} = \\
&= -\frac{1}{2\tilde{B}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{- (4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0) + \frac{4\tilde{A}^2}{t} - \frac{\tilde{C}^2}{t} + \frac{4}{t}}{\tilde{A} - \frac{2\tilde{A}}{t} - \sqrt{\left(\tilde{B}q_0 + \frac{\tilde{C}}{t}\right)^2 - \frac{4}{t^2}}} = \\
&= -\frac{- (4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0)}{2\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B}q_0)} = \frac{(4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0)}{2\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B}q_0)}.
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим t -дискриминанты вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1}, tq_0]$, когда $h = 1$, $t \geq 2$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 2.

$$\begin{aligned}
\alpha(2) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 4] = \frac{4\sqrt{105}}{15} \approx 2,732520\dots \\
\alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 6] = \frac{\sqrt{3135} - 15}{15} \approx 2,732738\dots \\
\alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 8] = \frac{4\sqrt{35} - 10}{5} \approx 2,732863\dots \\
\alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 10] = \frac{\sqrt{7395} - 45}{15} \approx 2,732945\dots \\
\alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 12] = \frac{2\sqrt{102} - 12}{3} \approx 2,733003\dots \\
\alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 14] = \frac{\sqrt{1495} - 25}{5} \approx 2,733045\dots \\
\alpha(8) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 16] = \frac{2\sqrt{4290} - 90}{15} \approx 2,733078\dots \\
\alpha(9) &= [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1}, 18] = \frac{7\sqrt{435} - 105}{15} \approx 2,733105\dots
\end{aligned}$$

$$\alpha(10) = [2, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 20}] = \frac{24\sqrt{5} - 40}{5} \approx 2,733126\dots$$

- Следствие 2.** 1) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] = o(t)$;
 2) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] \sim \frac{(4\tilde{A}^2 + 2\tilde{B}\tilde{C}q_0)}{2\tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B}q_0)}$, при $t \rightarrow +\infty$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ВИДА

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$$

- Теорема 5.** 1) t -дискриминанты $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ при нечетном n возрастают, а при четном n убывают, с ростом натурального параметра h и для любого t ;
 2) для ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$.

Доказательство. 1) рассмотрим дробь

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}],$$

которая в силу леммы 1 принимает следующий вид:

$$\alpha = \frac{q_0(2-t)(\mu^2(h) + P_{n-1}^2) + \sqrt{\left(tq_0(\mu^2(h) + P_{n-1}^2) + 2(\mu(h)\beta(h) + P_{n-1}Q_{n-1})\right)^2 + 4}}{2(\mu^2(h) + P_{n-1}^2)}, \tag{2.1}$$

где

$$(2-t)q_0(\mu^2(h) + P_{n-1}^2) \neq 0.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$F(h) = \mu^2(h) + P_{n-1}^2, \quad G(h) = \mu(h)\beta(h) + P_{n-1}Q_{n-1}.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{(2-t)q_0F(h) + \sqrt{(tq_0F(h) + 2G(h))^2 + 4}}{2F(h)}.$$

Вычисление функции $\alpha'(h)$ проводится аналогично пункту 1.

Таким образом, $\alpha'(h)$ примет следующий вид:

$$\alpha'(h) = \frac{F(h)(tq_0F(h) + 2G(h))(tq_0F'(h) + 2G'(h)) - F'(h)\sqrt{(tq_0F(h) + 2G(h))^2 + 4}}{\sqrt{(tq_0F(h) + 2G(h))^2 + 4} \cdot 2F^2(h)} =$$

$$= 2(-1)^{n+1}(tq_0F(h) + 2G(h))\left(P_{n-1}^2(h-1)^2 - 2P_{n-1}^2 + P_{n-2}^2\right) +$$

$$+ 2hP_{n-1}^2\left(2(-1)^{n+1}(tq_0F(h) + 2G(h)) - 4\right) + 2P_{n-1}P_{n-2}\left(2(-1)^{n+1}(tq_0F(h) + 2G(h))h - 4\right),$$

где

$$(tq_0F(h) + 2G(h)) > 0.$$

Нам необходимо узнать, при каких условиях производная функции положительна, а при каких отрицательна.

Так как

$$(tq_0F(h) + 2G(h)) > 0,$$

то $\alpha'(h) > 0$ при нечетном n и, следовательно, $\alpha'(h) < 0$ при четном n , $h = 1$ — точка экстремума для $\alpha(h)$ (*max* при четном n и *min* при нечетном n).

- 2) наклонная асимптота для $\alpha(h)$ вычисляется аналогичным образом (см. предыдущий пункт):

$$k = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(h)}{h} = 0, \quad b = \lim_{h \rightarrow +\infty} \alpha(h) = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}.$$

□

Следствие 3. 1) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] = o(h)$;

- 2) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}] \sim q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$, при $h \rightarrow +\infty$ и для любого t .

Рассмотрим *примеры* периодических ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, когда $h = 1, \dots, 8$, $t = 5$ и $t = 6$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 3. а) при четном n :

$$\alpha(1) = [2, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{818} - 15}{5} \approx 2,7201\dots$$

$$\alpha(2) = [2, \overline{1, 2, 2, 2, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{109562} - 174}{58} \approx 2,7069\dots$$

$$\alpha(3) = [2, \overline{1, 2, 3, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{385642} - 327}{109} \approx 2,6972\dots$$

$$\alpha(4) = [2, \overline{1, 2, 4, 4, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{1026170} - 534}{178} \approx 2, 6910 \dots$$

$$\alpha(5) = [2, \overline{1, 2, 5, 5, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{90842} - 159}{53} \approx 2, 6867 \dots$$

$$\alpha(6) = [2, \overline{1, 2, 6, 6, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{4422610} - 1110}{370} \approx 2, 6837 \dots$$

$$\alpha(7) = [2, \overline{1, 2, 7, 7, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{7845602} - 1479}{493} \approx 2, 6815 \dots$$

$$\alpha(8) = [2, \overline{1, 2, 8, 8, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{12967202} - 1902}{634} \approx 2, 6798 \dots$$

б) при нечетном n :

$$\alpha(1) = [1, \overline{2, 3, 5, 1, 1, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{5146546} - 1322}{661} \approx 1, 4320 \dots$$

$$\alpha(2) = [1, \overline{2, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{740765090} - 15860}{7930} \approx 1, 4321 \dots$$

$$\alpha(3) = [1, \overline{2, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 2, 6}] = \frac{13\sqrt{9698} - 746}{373} \approx 1, 43222 \dots$$

$$\alpha(4) = [1, \overline{2, 3, 5, 4, 4, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{7596691282} - 50788}{25394} \approx 1, 43226 \dots$$

$$\alpha(5) = [1, \overline{2, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{17220525530} - 76466}{38233} \approx 1, 43229 \dots$$

$$\alpha(6) = [1, \overline{2, 3, 5, 6, 6, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{1364460170} - 21524}{10762} \approx 1, 43231 \dots$$

$$\alpha(7) = [1, \overline{2, 3, 5, 7, 7, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{2451378730} - 28850}{14425} \approx 1, 43233 \dots$$

$$\alpha(8) = [1, \overline{2, 3, 5, 8, 8, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{102284192762} - 186356}{93178} \approx 1, 43234 \dots$$

Таким образом, рассматриваемые дроби возрастают при нечетном n , а при четном n — убывают.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ВИДА

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$$

Рассмотрим дробь

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0],$$

которая принимает следующий вид по лемме 1:

$$\alpha = \frac{q_0(2-t)\gamma(h) + (-1)^{n+1}(h_1 - h_2) + \sqrt{(tq_0\gamma(h) + (h_1 - h_2)(-1)^n + 2\delta(h))^2 + 4}}{2\gamma(h)}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(h_1) &= h_1P_{n-1} + P_{n-2}, & \mu(h_2) &= h_2P_{n-1} + P_{n-2}, & \beta(h_1) &= h_1Q_{n-1} + Q_{n-2}, \\ \beta(h_2) &= h_2Q_{n-1} + Q_{n-2}, & \gamma(h) &= \mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2, & \delta(h) &= \beta(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$A = (2-t)q_0\gamma(h), \quad B = (-1)^{n+1}(h_1 - h_2), \quad C = \gamma(h), \quad F = (-1)^n(h_1 - h_2), \quad E = 2\delta(h).$$

Тогда

$$\alpha = \frac{A + B + \sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}}{2C}.$$

Теперь вычислим функцию $\alpha'_{h_1}(h_1, h_2)$, считая h_2 постоянной:

$$\begin{aligned} \alpha'_{h_1}(h_1, h_2) &= \frac{2CA' + 2CB' + 2C \frac{(tq_0C+F+E)(tq_0C'+F'+E')}{\sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4}} - 2C'(A+B+\sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4})}{4C^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4}(C(A'+B')-(A+B)C') + (tq_0C+F+E)(C(tq_0C'+F'+E')-(tq_0C+F+E)C') - 4C'}{2C^2\sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4}}. \end{aligned}$$

Преобразуем выражения, составляющие числитель:

$$\begin{aligned} CA' - AC' &= (2-t)q_0(\mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2)' \gamma(h) - (2-t)q_0(\mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2) \gamma'(h) = 0. \\ CB' - BC' &= (-1)^{n+1}\gamma(h) - (-1)^{n+1}(h_1 - h_2)\mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2' = (-1)^{n+1}(\mu^2(h_2) + P_{n-1}^2). \\ C(tq_0C' + F' + E') - (tq_0C + F + E)C' &= \gamma(h)(tq_0\mu(h_2)P_{n-1} + (-1)^n + 2\mu(h_2)Q_{n-1}) - \\ &\quad - (tq_0\gamma(h) + (-1)^n(h_1 - h_2) + 2\delta(h))\mu(h_2)P_{n-1} = (-1)^n(P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \alpha'_{h_1}(h_1, h_2) &= \\ &= \frac{\sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4} \left((-1)^{n+1}(P_{n-1}^2 + \mu^2(h_2)) \right) + (tq_0C+F+E) \left((-1)^n(P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2)) \right) - 4\mu(h_2)P_{n-1}}{2(\mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2) \sqrt{(tq_0C+F+E)^2+4}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее числитель данной дроби, считая, что n нечетное:

$$(P_{n-1}^2 + \mu^2(h_2)) \sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} - (tq_0C + F + E)(P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2)) - 4\mu(h_2)P_{n-1}.$$

Заметим, что выражение

$$-(tq_0C + F + E)(P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2)) = (tq_0C + F + E)((h_2^2 - 1)P_{n-1}^2 + 2h_2P_{n-1}P_{n-2} + P_{n-2}^2) > 0,$$

где $(h_2^2 - 1) \geq 0$.

Остается определить, какой знак принимает оставшаяся часть числителя при нечетном n .

$$\begin{aligned} (P_{n-1}^2 + \mu^2(h_2))\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4 - 4\mu(h_2)P_{n-1}} &= A - 4\mu(h_2)P_{n-1} \geq A - (\mu(h_2) + P_{n-1})^2 \geq \\ \geq 2(\mu^2(h_2) + P_{n-1}^2) - (\mu(h_2) + P_{n-1})^2 &= 2\mu^2(h_2) + 2P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2) - 2\mu(h_2)P_{n-1} - P_{n-1}^2 = \\ &= \mu^2(h_2) + P_{n-1}^2 - 2\mu(h_2)P_{n-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь n – четное, тогда

$$-(P_{n-1}^2 + \mu^2(h_2))\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} + (tq_0C + F + E)(P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2)) - 4\mu(h_2)P_{n-1} < 0,$$

где $P_{n-1}^2 - \mu^2(h_2) = P_{n-1}^2(1 - h_2^2) - 2h_2P_{n-1}P_{n-2} - P_{n-2}^2 < 0$, $(1 - h_2^2) \leq 0$.

Таким образом, при фиксированном h_2 функция α'_{h_1} ведет себя следующим образом: при нечетном n она положительна, а при четном – отрицательна.

Следовательно, доказана

Теорема 6. Если h_2 – фиксированный параметр, то ЦД вида $[q_0, q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0]$ при нечетном n возрастают, а при четном n убывают, с ростом параметра h_1 и для любого t .

Наклонная асимптота для $\alpha(h)$ вычисляется аналогичным образом (см. пункт 1):

$$k = \lim_{h_1 \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(h_1, h_2)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)q_0A_1 + (-1)^{n+1} + \sqrt{C_1}}{2h_1A_1} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = h_2P_{n-1}^2 + P_{n-1}P_{n-2}, \quad C_1 = t^2q_0^2(h_2^2P_{n-1}^4 + 2h_2P_{n-1}^3P_{n-2} + P_{n-1}^2P_{n-2}^2) + 1 + tq_0(2(-1)^n h_2P_{n-1}^2 + \\ + 2(-1)^n P_{n-1}P_{n-2} + 4h_2^2P_{n-1}^3Q_{n-1} + 8h_2P_{n-1}^2P_{n-2}Q_{n-1} + 4P_{n-1}P_{n-2}^2Q_{n-1}) + \\ + 4(-1)^n(h_2P_{n-1}Q_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-2}). \end{aligned}$$

$$b = \lim_{h_1 \rightarrow +\infty} \alpha(h_1, h_2) = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 7. Для ЦД вида $[q_0, q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$.

Следствие 4. 1) $[q_0, q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0] = o(h_1)$;

$$2) [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}] \sim q_0 + \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}, \text{ при } h_1 \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим *примеры* периодических ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, когда $h_1 = 1, \dots, 8$, $h_2 = 1$, $t = 5$ и $t = 3$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 4. а) при n четном:

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= [2, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{818} - 15}{5} \approx 2,7201\dots \\ \alpha(2) &= [2, \overline{1, 2, 2, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{178933} - 223}{74} \approx 2,7027\dots \\ \alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{78401} - 148}{49} \approx 2,6939\dots \\ \alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 4, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{485813} - 369}{122} \approx 2,6885\dots \\ \alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 5, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{173890} - 221}{73} \approx 2,6849\dots \\ \alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 6, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{942845} - 515}{170} \approx 2,6823\dots \\ \alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 7, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{306917} - 294}{97} \approx 2,6804\dots \\ \alpha(8) &= [2, \overline{1, 2, 8, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{1550029} - 661}{218} \approx 2,6789\dots \end{aligned}$$

б) при n нечетном:

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{988037} - 269}{269} \approx 2,6951\dots \\ \alpha(2) &= [2, \overline{1, 2, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{8696605} - 797}{798} \approx 2,6967\dots \\ \alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{3822026} - 528}{529} \approx 2,6975\dots \\ \alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{23726645} - 1315}{1318} \approx 2,6980\dots \\ \alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 3, 5, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{8503057} - 787}{789} \approx 2,6983\dots \\ \alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 3, 6, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{46144853} - 1833}{1838} \approx 2,6985\dots \\ \alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 3, 7, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{15031130} - 1046}{1049} \approx 2,6987\dots \end{aligned}$$

$$\alpha(8) = [2, \overline{1, 2, 3, 8, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{75951229} - 2351}{2358} \approx 2,6988\dots$$

Таким образом, при фиксированном параметре h_2 рассматриваемые дроби возрастают при нечетном n , а убывают при четном n .

Теперь зафиксируем переменную h_1 .

Аналогично доказывается

Теорема 8. Если h_1 — фиксированный параметр, то ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ при нечетном n убывают, а при четном n возрастают, с ростом параметра h_2 и для любого t .

Так же, как и в пункте 1, получаем:

$$k = \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(h_1, h_2)}{h_2} = \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)q_0K - (-1)^{n+1} + R_1}{2h_2K} = 0,$$

где

$$R_1 = tq_0h_1P_{n-1}^2 + tq_0P_{n-1}P_{n-2} - (-1)^n + 2h_1P_{n-1}Q_{n-1} + 2P_{n-1}Q_{n-2},$$

$$K = h_1P_{n-1}^2 + P_{n-1}P_{n-2}.$$

Так как $k = 0$, то

$$b = \lim_{h_2 \rightarrow +\infty} \alpha(h_1, h_2) = q_0 + \frac{h_1Q_{n-1} + Q_{n-2}}{h_1P_{n-1} + P_{n-2}}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 9. Для ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = q_0 + \frac{h_1Q_{n-1} + Q_{n-2}}{h_1P_{n-1} + P_{n-2}}$.

Следствие 5. 1) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}] = o(h_2)$;

2) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}] \sim q_0 + \frac{h_1Q_{n-1} + Q_{n-2}}{h_1P_{n-1} + P_{n-2}}$, при $h_2 \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим примеры периодических ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, когда $h_2 = 1, \dots, 8$, $h_1 = 1$, $t = 3$ и $t = 5$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 5. а) при четном n :

$$\alpha(1) = [2, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{346} - 5}{5} \approx 2,7202\dots$$

$$\alpha(2) = [2, \overline{1, 2, 1, 2, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{75629} - 73}{74} \approx 2,7298\dots$$

$$\begin{aligned}\alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 1, 3, 2, 1, 6}] = \frac{25\sqrt{53} - 48}{49} \approx 2,7347\dots \\ \alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 1, 4, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{205213} - 119}{122} \approx 2,7377\dots \\ \alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 1, 5, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{73442} - 71}{73} \approx 2,7397\dots \\ \alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 1, 6, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{398165} - 165}{170} \approx 2,7411\dots \\ \alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 1, 7, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{129601} - 94}{97} \approx 2,7422\dots \\ \alpha(8) &= [2, \overline{1, 2, 1, 8, 2, 1, 6}] = \frac{\sqrt{654485} - 211}{218} \approx 2,7431\dots\end{aligned}$$

б) при нечетном n :

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 10}] = \frac{5\sqrt{93881} - 807}{269} \approx 2,6951\dots \\ \alpha(2) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{20657029} - 2395}{798} \approx 2,6942\dots \\ \alpha(3) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{9078170} - 1588}{529} \approx 2,6937\dots \\ \alpha(4) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{56355053} - 3957}{1318} \approx 2,6934\dots \\ \alpha(5) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 5, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{20196037} - 2369}{789} \approx 2,6932\dots \\ \alpha(6) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 6, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{109599965} - 5519}{1838} \approx 2,6931\dots \\ \alpha(7) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 7, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{35700626} - 3150}{1049} \approx 2,6930\dots \\ \alpha(8) &= [2, \overline{1, 2, 3, 1, 8, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{180391765} - 7081}{2358} \approx 2,6929\dots\end{aligned}$$

Таким образом, при фиксированном параметре h_1 рассматриваемые дроби возрастают при четном n , а убывают при нечетном n .

Исследуем теперь поведения указанных ЦД по параметру t .

1) будем считать, что параметр t меняется непрерывно на полуинтервале $[2, +\infty)$.

Продифференцируем функцию

$$\alpha(h_1, h_2, t) = \frac{(2-t)A + B + \sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}}{2C}$$

по переменной t :

$$\begin{aligned} \alpha'(h_1, h_2, t) &= \frac{1}{2C} \left(-A + \frac{2(tq_0C + F + E) \cdot Cq_0}{2\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}} \right) = \\ &= \frac{1}{2C\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}} \cdot \left((tq_0C + F + E)Cq_0 - A\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} \right) = \\ &= \frac{1}{2C\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}} \cdot \frac{(tq_0C + F + E)^2 C^2 q_0^2 - A^2 (tq_0C + F + E)^2 - 4A^2}{(tq_0C + F + E)Cq_0 + A\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}} = \\ &= \frac{(tq_0C + F + E)^2 (q_0^2 C^2 - A^2) - 4A^2}{2C\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} \left((tq_0C + F + E)q_0C + A\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} \right) - 4A^2} = \\ &= \frac{-4A^2}{2C\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} \left((tq_0C + F + E)q_0C + A\sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4} \right)} < 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$q_0^2 C^2 - A^2 = q_0^2 \gamma^2(h) - q_0^2 \gamma^2(h) = 0,$$

$$A = q_0 \gamma(h), \quad B = (-1)^{n+1} (h_1 - h_2), \quad C = \gamma(h), \quad F = (-1)^n (h_1 - h_2), \quad E = 2\delta(h),$$

где

$$\gamma(h) = \mu(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}^2, \quad \delta(h) = \beta(h_1)\mu(h_2) + P_{n-1}Q_{n-1},$$

$$\mu(h_1) = P_{n-1}h_1 + P_{n-2}, \quad \mu(h_2) = P_{n-1}h_2 + P_{n-2}, \quad \beta(h_1) = Q_{n-1}h_1 + Q_{n-2}.$$

2) теперь найдем наклонную асимптоту функции $\alpha(h_1, h_2, t)$ по t :

$$\begin{aligned} k &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-A + \frac{2A+B}{t} + \sqrt{\left(q_0C + \frac{F+E}{t}\right)^2 + \frac{4}{t^2}}}{2C} = \\ &= \frac{-A + q_0C}{2C} = \frac{-q_0\gamma(h) + q_0\gamma(h)}{2C} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)A + B + \sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}}{2C} = \\ &= \frac{1}{2C} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2-t)^2 A^2 + B^2 + 2(2-t)AB - (tq_0C + F + E)^2 - 4}{(2-t)A + B - \sqrt{(tq_0C + F + E)^2 + 4}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2C} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2(A^2 - q_0^2 C^2) - (4A^2 + 2AB + 2q_0 C(F + E))t + 4A(A + B) + B^2 - F^2 - E^2 - 4}{(t - 2)A + B + \sqrt{(tq_0 C + F + E)^2 + 4}} = \\
&= -\frac{(4A^2 + 2AB + 2q_0 C(F + E))}{2C(A + q_0 C)} = \frac{(4A^2 + 2AB + 2q_0 C(F + E))}{2C(A + q_0 C)}.
\end{aligned}$$

Сформулируем то, что получилось в пунктах 1) и 2) в виде следующего предложения:

Теорема 10. 1) ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ убывают по t для любых h_1, h_2 и n ;
 2) для ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = \frac{(4A^2 + 2AB + 2q_0 C(F + E))}{2C(A + q_0 C)}$.

Следствие 6. 1) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}] = o(t)$;
 2) $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}] \sim \frac{(4A^2 + 2AB + 2q_0 C(F + E))}{2C(A + q_0 C)}$, при $t \rightarrow +\infty$ для любых h_1, h_2 .

Следствие 7. Для ЦД вида $[q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$ наклонная асимптота задается уравнением $y = \frac{F(h)q_0 + G(h)}{F(h)}$, где $F(h) = \mu^2(h) + P_{n-1}^2$, $G(h) = \beta(h)\mu(h) + P_{n-1}Q_{n-1}$ (формулы для $\beta(h)$, $\mu(h)$ смотреть в доказательстве теоремы 9).

В случае, когда $h_1 = h_2$, приходим к следствию 3.

Рассмотрим периодические ЦД вида $\alpha(t) = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h_1, h_2, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, когда $h_1 = h_2 = 1$, $t \geq 2$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 6.

$$\begin{aligned}
\alpha(2) &= [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 4}] = \frac{\sqrt{38573}}{85} \approx 2,310589433\dots \\
\alpha(3) &= [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 6}] = \frac{\sqrt{274} - 5}{5} \approx 2,310589071\dots \\
\alpha(4) &= [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 8}] = \frac{\sqrt{134249} - 170}{85} \approx 2,310588877\dots \\
\alpha(5) &= [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 10}] = \frac{\sqrt{203762} - 225}{85} \approx 2,310588756\dots \\
\alpha(6) &= [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 12}] = \frac{\sqrt{11509} - 68}{17} \approx 2,310588673\dots
\end{aligned}$$

$$\alpha(7) = [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 14}] = \frac{\sqrt{386138} - 425}{85} \approx 2, 310588613 \dots$$

$$\alpha(8) = [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 16}] = \frac{\sqrt{499001} - 510}{85} \approx 2, 310588568 \dots$$

$$\alpha(9) = [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 18}] = \frac{13\sqrt{3706} - 595}{85} \approx 2, 310588532 \dots$$

$$\alpha(10) = [2, \overline{3, 4, 1, 1, 4, 3, 20}] = \frac{\sqrt{768077} - 680}{85} \approx 2, 310588503 \dots$$

Рассмотрим периодические ЦД вида $\alpha(t) = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_n, h, h, q_n, \dots, q_1, tq_0}]$, когда $h = 1, \dots, 8$, $t = 5$ и $t = 6$, при постоянных q_0, q_1, \dots, q_n .

Пример 7. При четном n , $t=5$.

$$\alpha(1) = [2, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{818} - 15}{5} \approx 2, 7201 \dots$$

$$\alpha(2) = [2, \overline{1, 2, 2, 2, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{109562} - 174}{58} \approx 2, 7069 \dots$$

$$\alpha(3) = [2, \overline{1, 2, 3, 3, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{385642} - 327}{109} \approx 2, 6972 \dots$$

$$\alpha(4) = [2, \overline{1, 2, 4, 4, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{1026170} - 534}{178} \approx 2, 6910 \dots$$

$$\alpha(5) = [2, \overline{1, 2, 5, 5, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{90842} - 159}{53} \approx 2, 6867 \dots$$

$$\alpha(6) = [2, \overline{1, 2, 6, 6, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{4422610} - 1110}{370} \approx 2, 6837 \dots$$

$$\alpha(7) = [2, \overline{1, 2, 7, 7, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{7845602} - 1479}{493} \approx 2, 6815 \dots$$

$$\alpha(8) = [2, \overline{1, 2, 8, 8, 2, 1, 10}] = \frac{\sqrt{12967202} - 1902}{634} \approx 2, 6798 \dots$$

Пример 8. При нечетном n , $t=6$.

$$\alpha(1) = [1, \overline{2, 3, 5, 1, 1, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{5146546} - 1322}{661} \approx 1, 4320 \dots$$

$$\alpha(2) = [1, \overline{2, 3, 5, 2, 2, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{740765090} - 15860}{7930} \approx 1, 4321 \dots$$

$$\alpha(3) = [1, \overline{2, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 2, 6}] = \frac{13\sqrt{9698} - 746}{373} \approx 1, 4322 \dots$$

$$\alpha(4) = [1, \overline{2, 3, 5, 4, 4, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{7596691282} - 50788}{25394} \approx 1, 43226 \dots$$

$$\alpha(5) = [1, \overline{2, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{17220525530} - 76466}{38233} \approx 1,43229\dots$$

$$\alpha(6) = [1, \overline{2, 3, 5, 6, 6, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{1364460170} - 21524}{10762} \approx 1,43231\dots$$

$$\alpha(7) = [1, \overline{2, 3, 5, 7, 7, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{2451378730} - 28850}{14425} \approx 1,43233\dots$$

$$\alpha(8) = [1, \overline{2, 3, 5, 8, 8, 5, 3, 2, 6}] = \frac{\sqrt{102284192762} - 186356}{93178} \approx 1,43234\dots$$

Таким образом, рассматриваемые дроби возрастают при нечетном n , а при четном n — убывают.

Пример 9. Построим график (см. рис. 1) функции

$$\alpha(h_1, h_2) = [1, \overline{2, 1, 2, h_1, h_2, 2, 1, 2, 2}], \quad n = 3, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_2}{Q_2} = [2, 1, 2] = \frac{8}{3},$$

на котором можно наблюдать возрастание данной функции по h_2 и убывание по h_1 .

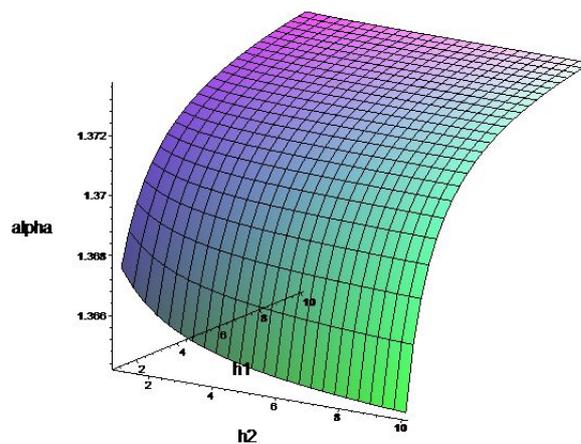


Рис. 1

Пример 10. Аналогично строится график функции в случае четного n (см. рис. 2).

$$\alpha(h_1, h_2) = [1, \overline{2, 1, h_1, h_2, 1, 2, 2}], \quad n = 2, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = [2, 1] = \frac{3}{1}.$$

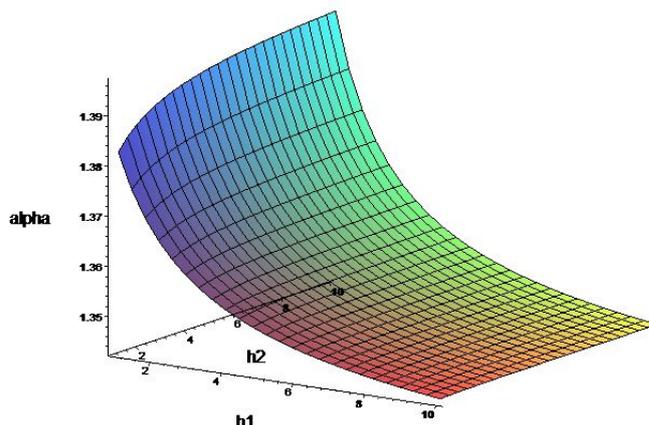


Рис. 2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрены свойства монотонности t - дискриминантов, а также ЦД более общего вида, при различном количестве параметров по каждому из них. Полученные результаты являются обобщением работы [5].

Основными результатами данной работы являются теоремы 2 — 4, 6 — 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В. И. Цепные дроби. — М.:Изд-во МЦНМО, 2009. — 40 с.
ARNOLD, V. I. (2009) *Continued fractions*. Moscow: Publishing house ICNMO. 40 p.
2. Бухштаб, А. А. Теория чисел. — М.:Просвещение, 1966. — 384 с.
ВУКНСНТАВ, А. А. (1966) *Number theory*. Moscow: Prosveshenie. 384 p.
3. Пискунова, В. В. Об асимптотических свойствах бесконечных периодических цепных дробей с параметрами // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной

школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко, А. А., 2018. — № 2. — С. 41–51.

PISKUNOVA, V. V. (2018) On the asymptotic properties of infinite periodic continued fractions with parameters. *Mathematics, informatics, computer science, modeling, education: a collection of scientific papers of the All-Russian Scientific and Practical Conference MIKMO-2018 and the Taurida Scientific School-Conference of Students and Young Specialists in Mathematics and Informatics*. (2). p. 41–51.

4. Пискунова, В. В. Монотонность бесконечных периодических цепных дробей по параметрам // Теория и практика приоритетных научных исследований. Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции. — Смоленск: МНИЦ Наукосфера, 2018. — С. 82–88.

PISKUNOVA, V. V. (2018) Monotonicity of infinite periodical continued fractions by parameters. *Theory and practice of priority research. Collection of scientific papers based on the IV International Scientific Practical Conference*. p. 82–88.

5. Пискунова, В. В. Об одном классе бесконечных периодических цепных дробей / Пискунова, В. В., Третьяков, Д. В. // В книге: ДНИ НАУКИ КФУ им. В.И.ВЕРНАДСКОГО. Сборник тезисов участников III научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых. — Симферополь, 2017. — Т. 7. — С. 1109–1111.

PISKUNOVA, V. V., TRETYAKOV, D. V. (2017) On a class of infinite periodic continued fractions. *In the book: THE DAYS OF SCIENCE KFU them. VIVERADSKOGO. The collection of theses of the participants of the III scientific-practical conference of the teaching staff, post-graduate students, students and young scientists*. Vol. 7. p. 1109–1111.

6. Пискунова, В. В. О монотонности t -дискриминантов с параметрами / Пискунова, В. В., Третьяков, Д. В. // В книге: ДНИ НАУКИ КФУ им. В.И.ВЕРНАДСКОГО. Сборник тезисов участников IV научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых. — Симферополь, 2018. — Т. 2. — С. 159–160.

PISKUNOVA, V. V., TRETYAKOV, D. V. (2018) On the monotony of t -discriminants with parameters. *In the book: THE DAYS OF SCIENCE KFU named after V.I.VERNADSKY. The collection of theses of the participants of the IV scientific-practical conference of the teaching staff, post-graduate students, students and young scientists*. Vol. 2. p. 159–160.

-
7. Третьяков, Д. В. Об одном обобщении уравнения Пелля // Spectral and Evolution problems. International scientific journal.. — 2008. — Vol. 18. — С. 141–147.
TRETYAKOV, D. V. (2008) On some generalization of Pell equation. *Spectral and Evolution problems. International scientific journal..* Vol.18. p. 141–147.
 8. TRIGNAN, J. L. (1994) *Introduction aux problèmes d'approximation: fractions continues, différences finies*. Éditions du Choix. Rue de médicis, Paris: Albert Blanchard. 101 p.

Андреищева Е. Н. Трансформация Шура для обобщенной функции Каратеодори на окружности / Е. Н. Андреищева // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 2 (43). — С. 7–25.

УДК: 517.58

В данной работе приведена схема построения преобразования Шура на окружности для обобщенной функции Каратеодори. Преобразованием Шура функции $f(z)$ называется дробно-линейное преобразование вида $\hat{f}(z) = \chi_{\Theta^{-1}}(f(z))$, где Θ – матричная функция, $\hat{f}(z)$ также является обобщенной функцией Каратеодори. Получена формула представления матрицы Θ для случая, когда функция $f(z)$ имеет асимптотическое разложение в некоторой точке на окружности. Также в статье доказывается теорема о факторизации рациональных матричных функций и исследуется основная граничная интерполяционная задача для функций Каратеодори.

Ключевые слова: индефинитная метрика, пространство Понтрягина, преобразование Шура, обобщенная функция Каратеодори, основная интерполяционная задача, факторизация рациональных матричных функций.

Дубровская В. А., Переварюха А. Ю. Модели специфических форм биологических вспышек в модификациях уравнений Базыкина и Ферхюльста–Пирла / В. А. Дубровская, А. Ю. Переварюха // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 2 (43). — С. 26–38.

УДК: 519.688, 573.7

В статье рассматриваются экологически обоснованные модификации двух популярных популяционных моделей Базыкина и Ферхюльста–Пирла для задачи описания особых нетривиальных изменений в популяционных процессах. Моделируется разновидность экстремального характера динамики численности инвазионного вида насекомых — вспышечной активности. Проблема прикладного вычислительного моделирования переходных режимов осциллирующих и разрушительных вспышек актуальна для многих случаев спорадического массового размножения насекомых-вредителей без биологического контроля. В результате анализа свойств известных экологических моделей нами предлагается модификация, объединяющая наиболее актуальные варианты поведения траектории после бифуркации рождения

цикла. В новом уравнении динамики численности с отклоняющимся аргументом $\dot{x} = rx(t-h)f(x^k(t-\tau))$ предлагается альтернативная унимодальная функция-регулятор $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > \epsilon$ вместо традиционного $r(x/K)^k$ и $rx\sqrt[3]{(x-L)}$ — для порогового варианта. При возрастании запаздывания в подобных уравнениях усложняется поведение траектории. Удалось преодолеть недостаток нереалистично низких минимумов в уравнении Хатчинсона при возникновении релаксационного цикла значительной амплитуды. Предложено уравнение, описывающее эффект критического минимума на основе модификации модели Базыкина с функцией-регулятором $\ln K/N(t-h)$. В экстремальном расширении уравнения Ферхюльста-Пирла с запаздыванием описано разрушение релаксационных колебаний как переходного режима специфической вспышки численности насекомых, воздействующих на агроценоз.

Ключевые слова: уравнение с отклоняющимся аргументом, циклы, бифуркация Андронова–Хопфа, функции-регуляторы, формы запаздывания в биосистемах, вспышки и инвазии насекомых.

Жуковский В. И., Смирнова Л. В., Житенева Ю. Н., Бельских Ю. А. Дифференциальная игра трех лиц, в которой не существует равновесия по Нэшу, но имеется равновесие угроз и контругроз / В. И. Жуковский, Л. В. Смирнова, Ю. Н. Житенева, Ю. А. Бельских // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 2 (43). — С. 39–66.

УДК: 519.833.2:519.837

Рассматривается линейно-квадратичная позиционная дифференциальная игра трех лиц. Установлены коэффициентные критерии, при выполнении которых в игре не существует ситуации равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз.

Ключевые слова: бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, активное равновесие, равновесие угроз и контругроз.

Новиков В. В., Худошина А. О. О состоятельности оценок ортогонального разложения по системе многочленов Якоби / В. В. Новиков, А. О. Худошина // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 2 (43). — С. 67–76.

УДК: 519.23

Рассматривается непараметрическая регрессионная модель $Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, где $m(x)$ — неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — случайные ошибки. Предполагается, что X неслучайна, $m(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1, $E\varepsilon_i = 0$, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, и $E\varepsilon_i^2 < C$, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, считаем, что наблюдения $\{Y_i\}_{i=1}^n$ проведены в равноотстоящих точках $\{X_i\}_{i=1}^n$ интервала $[-1, 1]$. В статье получено условие состоятельности оценки ортогонального разложения вида $\hat{m}_{N(n)}(x) = \sum_{j=0}^{N(n)} \hat{\beta}_j \varphi_j(x)$, $\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^n Y_i \int_{A_i} \varphi_j(x) \rho(x) dx$, где $\{A_i\}_{i=1}^n$ — множество неналегающих интервалов таких, что $\cup_{i=1}^n A_i = [-1, 1]$, $X_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$, $N(n)$ — подходящим образом подобранный номер и $\varphi_j(x) = P_j^{(\alpha, \beta)}(x)$, $j = 0, 1, \dots$, — многочлены Якоби, ортонормированные на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Показано, что если в дополнение к перечисленным выше ограничениям выполнены условия $(N(n))^2 = o(n)$, $\min\{\alpha; \beta\} > -1/2$ и $(N(n))^2 = o(n/\log n)$, $\min\{\alpha; \beta\} = -1/2$, то при $N(n) \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $\hat{m}_{N(n)}(x) \xrightarrow{p} m(x)$, $x \in (-1, 1)$. Если к тому же $q = \max\{\alpha; \beta\} < 1/2$ и указанным выше ограничениям на рост удовлетворяет последовательность $(N(n))^{2q+3}$, то $\hat{m}_{N(n)}(x) \xrightarrow{p} m(x)$ для всех x из отрезка $[-1, 1]$.

Ключевые слова: непараметрическая регрессия, состоятельность, оценка, ортогональные ряды, многочлены Якоби.

Пискунова В. В., Третьяков Д. В. *t*-дискриминанты с параметрами / В. В. Пискунова, Д. В. Третьяков // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 2 (43). — С. 77–99.

УДК: 511.41

Решена задача о монотонности цепных периодических дробей с параметрами. Доказано, что монотонность непрерывных дробей по параметрам зависит только от длины их периода, независимо от поведения параметра t .

Ключевые слова: *t*-дискриминанты, бесконечные периодические дроби с параметрами, монотонность.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Андреищева Елена
Николаевна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и начертательной геометрии Черноморского высшего военно-морского училища им. П. С. Нахимова, г. Севастополь , Российская Федерация.

e-mail: anda_el@mail.ru

*Бельских Юлия
Анатольевна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация.

e-mail: fozbelskih@rambler.ru

*Дубровская Виктория
Андреевна*

аспирант, лаборатория Прикладной информатики, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

e-mail: torry_2902@mail.ru

*Житенева Юлия
Николаевна*

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация.

e-mail: unzh2011@mail.ru

*Жуковский Владислав
Иосифович*

д.ф.-м.н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация.

e-mail: zhkvlad@yandex.ru

*Новиков Владимир
Васильевич*

к. ф.-м. н, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа механико-математического факультета Саратовского государственного университета, г. Саратов, Российская Федерация.

e-mail: vvnovikov@yandex.ru

**Худошина Анастасия
Олеговна**

магистрант, кафедра математической экономики механико-математического факультета Саратовского государственного университета, г. Саратов, Российская Федерация.

e-mail: hudoshina.an@mail.ru

**Переварюха Андрей
Юрьевич**

к.т.н., с.н.с., лаборатория Прикладной информатики, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

e-mail: madelf@rambler.ru

**Пискунова Виктория
Владимировна**

обучающаяся II курса магистратуры факультета математики и информатики Крымского Федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация.

e-mail: viktoryapiskunova@yandex.ru

**Смирнова Лидия
Викторовна**

к.ф.-м.н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация.

e-mail: smirnovvalidiya@rambler.ru

**Третьяков Дмитрий
Вадимович**

к. ф.-м. н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Крымского Федерального университета им. В. И. Вернадского, г Симферополь, Российская Федерация.

e-mail: dottvd@mail.ru

Подписано к печати 25.06.2019. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7