

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (42) ' 2019

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.



T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2019, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТЯНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор): vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Nikolay KOPACHEVSKY	Vice Chief Editor , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoliy GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valeriy CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

SECRETARIAT

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V. Guaranteed Risks and Payoffs in a One-criterion Problem.....	7
Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С., Станкевич И. В. Решение задачи контакта двух упругих тел mortar-методом и методом Шварца на несогласованных сетках.....	24
Брук В. М. О самосопряженных расширениях линейных отношений, порожденных интегральными уравнениями.....	43
Жуковский В. И., Смирнова Л. В., Высокос М. И. Об одной нерешенной задаче в матричных обыкновенных дифференциальных уравнениях .	62
Кумакшев С. А. Модель колебаний полюсов Земли, основанная на гравитационных моментах.....	73
Эльсаев Я. В. Об одной проблеме дилатации.....	83
Рефераты.....	100
Список авторов номера.....	103

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V. Guaranteed Risks and Payoffs in a One-criterion Problem	7
Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S., Stankevich I. V. Solution of the Contact Problem Using Mortar-Method and Schwarz Alternating Method on Mismatched Grids	24
Bruk V. M. On Self-adjoint Extensions of Linear Relations Generated by Integral Equations	43
Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V., Vysokos M. I. About One Unsolved Problem in Matrix Ordinary Differential Equations	62
Kumakshev S. A. Model of Oscillations of Earth's Poles Based on Gravitational Tides	73
Elsaev Ya. V. On Some Dilation Problem	83
Abstracts	100
Authors	103

УДК: 517.958

MSC2010: 93C15, 49N30, 49N35

GUARANTEED RISKS AND PAYOFFS IN A ONE-CRITERION PROBLEM

© V. I. Zhukovskiy, M. V. Boldyrev

MOSCOW STATE M.V. LOMONOSOV UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL MANAGEMENT
LENIN'S MOUNTAINS, 1, BUILD. 52, MOSCOW, 119991, RUSSIAN FEDERATION
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru, m_boldyrev@list.ru

GUARANTEED RISKS AND PAYOFFS IN A ONE-CRITERION PROBLEM.

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V.

Abstract. The concept of a weakly guaranteed simultaneously under payoffs and risks solution of a one-criterion problem under uncertainty (OCPU) is proposed. Formalization is based on the concept of a vector saddle point from the theory of multicriteria problems with uncertainty.

Keywords: *strategy, uncertainty, criterion, Slater optimum, vector saddle point.*

INTRODUCTION

A one-criterion problem under uncertainty is defined by the following triplet:

- the set of possible decision maker's strategies; a strategy is a rule according to which each current decision maker's state of awareness is assigned some action that is permissible with the given information; in economic systems, these can be: choice of the price of a product, conclusion of supply contracts, introduction of new technologies, distribution of the wage fund, bonuses, and so on;
- the set of possible uncertainties; an uncertainty is the incompleteness or inaccuracy of information about conditions for the implementation of the chosen strategy; uncertainties arise in economic, mechanical controlled systems, during decision making (see more on this in [1–3] and numerous articles; even according to the French proverb “Entre bouche et cuiller, pour un petit de fait, vient souvent encombrer” — while you carry a spoon in your mouth, an obstacle often arises; by the way, an obstacle is a type of uncertainty; moreover, accounting for uncertainties during modeling real conflicts allows one to get more adequate results, which is confirmed, for example, by a large number of publications (over 1 million search results for Google Scholar query “mathematical modelling under uncertainty”));

- the criterion, called the payoff function, whose value (winnings) is determined by the decision maker's chosen strategy and the implemented uncertainty (regardless of the decision maker's actions).

Using these three components (the criterion, the set of strategies, and the set of uncertainties), the decision maker finds their risk. Economic literature emphasizes the possibility of the following *requirements* for decision making in a one-criterion problem under uncertainty [4, p. 32; 5, p. 21]: **optimal combination of values of the criterion (payoff, winnings) and risk value**. This requirement arised because in a majority of applied problems, the more “profitable” a strategy is, the higher the degree (magnitude) of risk. *What is risk?* Well-known Russian optimization theory expert Talgat Sirazetdinov believes that there is currently no rigorous mathematical definition of risk [7, p. 31]. In the monograph [8, c. 15], sixteen possible definitions of risk are considered. Most of them require statistical data on uncertainty. However, such information is often missing (for one reason or another). These are the cases that are considered in the present article.

By *risk*, we mean *the possibility of deviation of the implemented values from the desired ones*. Note that this definition echoes “ordinary” microeconomic risks, as described, for example, in [9].

The desire for an optimal combination of the payoff value and the magnitude of risk is manifested in the fact that the decision maker evaluates the expected values of gain and risk and chooses a strategy that allows them to get the greatest possible payoff and, at the same time, the lowest risk. From the point of view of the theory of multicriteria problems under uncertainty, [6] in this case, one should consider *two equally valid criteria*: the initial criterion (the payoff function) and an auxiliary one (the risk function). In such a problem, the decision maker chooses (from the possible ones) the strategy, in which the criterion itself would assume the *maximum* value, and the risk would assume the *minimum* value. At the same time, the decision maker has to take into account the fact any uncertainty (from the possible ones) could arise.

Accounting for uncertainties in decision making is not an easy task. The recently published series of articles [11–13] and the book [14] are devoted to possible approaches. While the so-called strong guarantees (oriented on “the worst”—minimum with respect to uncertainties—values of each individual criterion) were used to take account of the uncertainties in the article [10], in this paper, we focus on the so-called “vector guarantees” are made a focus on; these take into account both the value of the payoff function and the “negative” risk function (“in the spirit of” vector optimization [6, 13]). Then, as in [10], a transition is made to the two-criterion “problem of guarantees”, in which uncertainties are no longer present. For the latter, the entire arsenal of different vector maxima, “dictated”

by the theory of multicriteria problems [13]. The fact is that strong guarantees ultimately reduce the possible values of each criterion, and, after all, the goal of the decision maker in the problem of guarantees is to maximize values of both criteria at the same time.

So, the proposed article differs from [10] in that:

first, when choosing the “good for themselves” strategies, the decision maker focuses not only on their payoff, but also on the risk associated with this payoff, and not only when choosing solutions, but also during formalization of guarantees;

second, while an analog of the maximin from [12] is used in [10] for “combatting uncertainty”, here, an analog of the vector saddle point from [11] is used.

Finally, in publications on macroeconomics [2, p. 103; 9, p. 5] all decision makers are divided into three categories: risk-averse, risk-loving, and risk-neutral.

How would each of the three types of decision makers approach an OCPU? When making a decision, the concept of a guaranteed result (maximin) appeals the most to the risk-averse, and the principle of minimax regret appeals the most to the risk-loving. The similar question for risk-neutral remained open. [10] and the present work are devoted to attempts to resolve it. Generally speaking, we refer to the risk-averse as to pessimists (they expect “the worst” for themselves), to the risk-loving as to optimists (oppositely, they expect “the best”), and only the risk-neutral unite these two seemingly opposite trends.

So, in this article we will consider the one-criterion problem under uncertainty (OCPU):

$$\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle, \quad (1)$$

where the choice of the strategy x from the set $X \subseteq \mathbb{R}$ is made by the decision maker. *The goal of the decision maker* is the choice of $x \in X$, for which the scalar criterion $f(x, y)$ assumes the *maximum* value. In this case, the decision maker must take into account the effect of interference, errors, and other types of uncertainties y , which are only known to assume a value from the given set $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, the so-called interval uncertainties.

Presence of uncertainties in (1) leads to appearance of a set of results (payoffs, winnings)

$$f(x, Y) = \{f(x, y) \mid \forall y \in Y\},$$

“generated” by $x \in X$. The set $f(x, y)$ can be “narrowed down” using risks. As in [10], we confine ourselves to the Niehans–Savage risks. These risks are estimated by the value of the *Niehans–Savage risk function*

$$R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y), \quad (2)$$

proposed in the 1950s by American mathematician Leonard Savage and Swiss mathematician Jürg Niehans. They independently developed the principle of minimax regret (PMR), according to which the solution of (1) is the pair $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbb{R}$, defined by the following chain of equations:

$$R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y). \quad (3)$$

Requirement (3) characterizes the decision maker as an optimist, who strives for “the best” payoff.

Note that pessimists follow $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$, where

$$f^g = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y), \quad (4)$$

for they focus on “the worst” payoff.

Next, we propose the notion of a weakly guaranteed simultaneous payoffs and risks of a solution to a OCPU (formalization is based on the m vector saddle point from the theory of multicriteria problems with uncertainty [6]). Sufficient conditions of existence are established, with the help of which an explicit form of the introduced solution is found for a fairly general linear-quadratic version of OCPU with limited uncertainty.

1. DEFINITION

Concept of weakly guaranteed solution of a OCPU. As already mentioned in the introduction, economic literature repeatedly emphasizes the relevance of the following requirement for decision making in a one-criterion problem under uncertainty: *the solution should optimally combine payoff and risk*. That is, after evaluating the expected payoffs and risks, the decision maker chooses the strategy that allows them to get the greatest possible payoff and, at the same time, the smallest possible risk. In fact, this means a transition from a one-criterion OCPU (1) to a two-criterion

$$\langle X, Y, \{f(x, y), R_f(x, y)\} \rangle, \quad (5)$$

in which the two criteria are the payoff function $f(x, y)$ and the risk function $R_f(x, y)$. In problem (5), the decision maker chooses the strategy $x \in X$ for which their payoff (value of $f(x, y)$) would be *maximized* and at the same time their risk (value of $R_f(x, y)$) would be *minimized*. In this case, the decision maker has to take into account that any uncertainty $y \in Y$ could arise.

The following concept meets these requirements; in fact, it unites pessimists and optimists:

Definition 1. A *weakly guaranteed under payoffs and risks solution (WGPR)* of problem (1) is the triplet $(x^S, f^S, R_f^S) \in X \times \mathbb{R}^2$, for which there is an uncertainty $y_S \in Y$ such that $f^S = f(x^S, y_S)$, $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$, and

(1) for all strategies $x \in X$, the following system of inequalities is incompatible:

$$f(x, y_S) > f^S, \quad R_f(x, y_S) < R_f^S, \quad (6)$$

(2) for all uncertainties $y \in Y$, the following system of two inequalities is incompatible:

$$f(x^S, y) < f^S, \quad R_f(x^S, y) > R_f^S, \quad (7)$$

where the risk function $R_f(x, y)$ is defined in (2).

In this case, x^S is called a *weakly guaranteeing strategy*, and (x^S, y_S) is the pair that implements the WGPR.

According to the definition, for the construction of a WGPR—the weakly guaranteed under payoffs and risks solution (x^S, f^S, R_f^S) of problem (1)—it is sufficient to find the pair (x^S, y_S) from the conditions of incompatibility of two inequalities, both (6) and (7), and then build the numbers $f^S = f(x^S, y_S)$, $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$.

Let us turn to some meaningful explanations of this definition.

Reduction of (1) to a two-criterion problem. As before, for analytical construction of a WGPR, we must first consider the multicriteria problem under uncertainty

$$\langle X, Y, f(x, y) \rangle$$

and the risk function (2)

$$R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y).$$

Then we construct the two-criterion problem (5) under uncertainty. From the perspective of the theory of multicriteria problems under uncertainty (MCPU) [6], this is not quite an ordinary task, because in it the decision maker strives to *maximize* the value of the first criterion $f(x, y)$ and to *minimize* the value of the second criterion $R_f(x, y)$ by an appropriate choice of their strategy. At the same time, the decision maker has to take into account the fact any uncertainty $y \in Y$ could arise.

Analog of the saddle point. One way to formalize a solution of an MCPU is the “analog of the saddle point” proposed by the first author in the book [6]. It was based on the notion of the saddle point in the antagonistic game with the scalar payoff function $F(x, y)$:

$$\langle X, Y, F(x, y) \rangle. \quad (8)$$

In (8), the first player chooses their strategy $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ in order to maximize the scalar payoff function $F(x, y)$ (defined on the product $X \times Y$); on the contrary, the second player chooses their strategy $y \in Y$ in order to minimize $F(x, y)$. One of the possible solutions of the game (8) is the saddle point $(x^o, y^o) \in X \times Y$ defined by the following chain of equations:

$$\max_{x \in X} F(x, y^o) = F(x^o, y^o) = \min_{y \in Y} F(x^o, y). \quad (9)$$

In the case where $F(x, y)$ is a *vector* (not scalar!) payoff function, during the formalization of the solution, scalar optima (9) should be replaced with *vector* optima: the scalar maximum in the left equation of (9) should be replaced with a *vector maximum*, the minimum in the right equation of (9) should be replaced with a *vector minimum*. The obtained pair (x^o, y^o) is called in [6] a *vector saddle point*. In the theory of multicriteria problems, various concepts of vector optima have been proposed (according to Slater, Pareto, Borwaine, Geoffrion, as well as the A-optimum; for more details, see [6]). We will now provide one of them, which we just used in Definition 1 during formalization of a weakly guaranteed under payoffs and risks solution of problem (1). So, we consider the MCPU

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle, \quad (10)$$

where the strategies chosen by the decision maker are $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, uncertainties $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$, the components of the now vector criterion $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ defined on $X \times Y$. In problem (10), the decision maker seeks to simultaneously increase both criteria $F_1(x, y)$ and $F_2(x, y)$ by choosing their strategy $x \in X$, considering that “uncertainty maximally counteracts this” (minimizes $F_1(x, y)$ and $F_2(x, y)$). Problem (10) is assigned two auxiliary two-criterion problems

$$\Gamma(y^o) = \langle X, F(x, y^o) \rangle, \quad \Gamma(x^o) = \langle Y, F(x^o, y) \rangle,$$

which we obtain from (10) after fixing the uncertainty $y = y^o \in Y$ and the strategy $x = x^o \in X$, respectively.

The strategy $x^o \in X$ is *Slater maximal* (synonyms: weakly effective, weakly Pareto maximal) in problem $\Gamma(y^o)$, if for all $x \in X$ the following system of strict inequalities is incompatible:

$$F_i(x, y^o) < F_i(x^o, y^o) \quad (i = 1, 2).$$

The uncertainty $y^o \in Y$ is *Slater minimal* for problem $\Gamma(x^o)$ if the following system of strict inequalities is incompatible:

$$F_i(x^o, y) > F_i(x^o, y^o) \quad (i = 1, 2) \quad \forall y \in Y.$$

The pair (x^o, y^o) that satisfies both conditions (is both Slater maximal and minimal), is named in [6] *Slater saddle point* of problem (10).

Slater maximal strategy x^o of problem $\Gamma(y^o)$ has the following property: if the decision maker chooses any strategy $x \in X$, both components of the vector criterion from $F(x, y^o)$ cannot simultaneously become *greater* than the corresponding components of the vector $F(x^o, y^o)$. Similarly for problem $\Gamma(x^o)$: if any uncertainty $y \in Y$ is implemented, both components $F_i(x, y^o)$ ($i = 1, 2$) of the vector $F(x^o, y)$ cannot simultaneously become *less* than $F(x^o, y^o)$ (with respect to the corresponding components).

Let us clarify the “conceptual meaning” of the requirement for incompatibility of inequalities (7). In these, the decision maker uses strategy x^S (from the WGPR (x^S, f^S, R_f^S)) and any uncertainty (from the set Y). Inequalities (7) are incompatible if, for any implemented y , either they both or at least one of them is violated.

In the first case, there may be $f(x^S, y) \geq f^S$ and $R_f(x^S, y) \leq R_f^S$. Satisfaction of these two inequalities means that payoff $f(x^S, y)$ cannot become less than f^S and at the same time the corresponding risk $R_f(x^S, y)$ cannot become greater than R_f^S . Thus, the number f^S is the *lower* bound on the possible payoff $f(x^S, y)$, and R_f^S is the *upper* bound on the possible risk $R_f(x^S, y)$ (under same uncertainties). System (7) is incompatible if only the first inequality in (7) is violated (that is, for $f(x^S, y) \geq f^S$ and great risks $R_f(x^S, y) > R_f^S$). This case can be interpreted by “familiar” statements from the financial economics: “excessively large gains are associated with large risks” or “large risks can lead to large gains”.

Finally, the “conceptual meaning” of inconsistency of (7) is that the player’s use of the strategy x^S from the WGPR (x^S, f^S, R_f^S) and the implementation of any uncertainty $y \in Y$ result in that the payoff $f(x^S, y)$ cannot be *less* than the guaranteed payoff f^S and, at the same time, the corresponding risk $R_f(x^S, y)$ cannot become *greater* than the guaranteed risk R_f^S . That is why a triplet was chosen as a solution to problem (1): the strategy x^S and the guarantees on the payoffs f^S and on the risks R_f^S : using x^S , the decision maker guarantees themselves a payoff not less than f^S with a simultaneous risk not greater than R_f^S (no matter what uncertainty $y \in Y$ is implemented). Note that incompatibility of inequalities (6) means that it is possible to increase the payoff $f(x, y_S)$ and at the same time to reduce the risk $R_f(x, y_S)$ while expecting “maximum resistance” from the uncertainty y_S . Finding guarantees $f^S = f(x^S, y_S)$ and $R_f^S = R_f(x^S, y_S)$ can be (as shown below) reduced to building a situation of the Nash equilibrium of a special non-cooperative two-person game (effectively constructed using problem (1)) and is carried out by the decision maker independently from the uncertainties that are actually implemented in problem (1).

Remark 1. We emphasise once again that the system of inequalities (6) is built on the basis of the above-mentioned “analog of the saddle point” and corresponds to “the greatest opposition” to the aspirations of the decision maker on the part of uncertainty (analogous to the game with “nature”).

Remark 2. If, instead of the risk function $R_f(x, y)$, the criterion $-R_f(x, y)$ is used, then incompatibility of the system (7) is equivalent to incompatibility of the system of two inequalities

$$f(x^S, y) < f^S, \quad -R_f(x^S, y) < -R_f^S \quad \forall y \in Y, \quad (11)$$

and incompatibility of (6) is equivalent to incompatibility of

$$f(x, y_S) > f(x^S, y_S), \quad -R_f(x, y_S) > -R_f(x^S, y_S) \quad \forall x \in X. \quad (12)$$

But incompatibility of (11) for all $y \in Y$ means that $y_S \in Y$ is the Slater minimal uncertainty in $\langle Y, \{f(x^S, y), -R_f(x^S, y)\} \rangle$, and incompatibility of (12) for all $x \in X$ means that $x^S \in X$ is the Slater maximal strategy in the two-criterion problem $\langle X, \{f(x, y_S), -R_f(x, y_S)\} \rangle$.

Thus, the pair (x^S, y_S) is the Slater saddle point for a two-criterion problem under uncertainty

$$\langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle \quad (13)$$

(analog of (10), in which the decision maker seeks to maximize the value of each of the two criteria $f(x, y)$ and $-R_f(x, y)$ by making a suitable choice of strategy $x \in X$. At the same time, the the decision maker has to take into account the fact any uncertainty $y \in Y$ could arise.

A possible guaranteed solution is the Slater saddle point (x^S, y_S) , determined by incompatibility of the systems (11) and (12). Thus, finding the WGPR $(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S))$ is equivalent to constructing the Slater saddle point (13).

Remark 3. Pareto (and not Slater, as in Definition 1) optima could also be used as a basis for definition of the WGPR of problem (1). In this case, it would be necessary to apply a Pareto saddle point in problem (13).

Namely, the pair $(x^P, y_P) \in X \times Y$ is called a *Pareto saddle point* of problem (13) if

(a) x^P is the *Pareto maximal* strategy of problem $\langle X, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle$ under $y = y_P$, that is, for all $x \in X$, the following system of inequalities is incompatible:

$$f(x, y_P) \geq f(x^P, y_P), \quad -R_f(x, y_P) \geq -R_f(x^P, y_P),$$

where at least one of the inequalities is strict;

(b) y_P is the *Pareto minimal* uncertainty in problem $\langle Y, \{f(x^P, y), -R_f(x^P, y)\} \rangle$, that is, for all $y \in Y$, the following system of inequalities is incompatible:

$$f(x^P, y) \leq f(x^P, y_P), \quad -R_f(x^P, y) \leq -R_f(x^P, y_P),$$

where at least one of the two inequalities is strict.

Obviously, a Pareto saddle point is also a Slater saddle point; the opposite is, generally speaking, not true.

2. SUFFICIENT CONDITIONS

Method of constructing a weakly guaranteed solution. Suppose that for problem 1 we found

$$\max_{z \in X} f(z, y). \tag{14}$$

Note that function (14) is continuous on Y if $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$ and the set X is a non-empty compact in \mathbb{R}^n . Then the risk function $R_f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$ (as a difference of continuous functions).

Statement 1. *If there are constants $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and a pair $(x^S, y_S) \in X \times Y$ such that*

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} \left(f(x, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S) \right) = \\ = f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} \left(f(x^S, y) - \beta \max_{z \in X} f(z, y) \right) = \\ = f(x^S, y_S) - \beta \max_{z \in X} f(z, y_S), \end{aligned} \tag{16}$$

then the weakly guaranteed under payoffs solution of problem 1 takes form of $(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S))$.

Proof. Deductio ad absurdum. Suppose there are constant $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and the corresponding pair $(x^S, y_S) \in X \times Y$ such that equations (15) and (16) are valid, but this pair satisfies neither requirement of Definition 1. Consider two cases.

Case 1. (15) is valid, but the first requirement of Definition 1 is not. Then there is a strategy $\bar{x} \in X$, for which

$$f(\bar{x}, y_S) > f(x^S, y_S) = f^S, \quad R_f(\bar{x}, y_S) < R_f(x^S, y_S) = R_f^S,$$

or, equivalently,

$$f(\bar{x}, y_S) > f(x^S, y_S), \quad -R_f(\bar{x}, y_S) > -R_f(x^S, y_S). \quad (17)$$

After multiplying the first of these inequalities by the number $1 - \alpha$ (the constant $\alpha \in [0, 1]$ participates in (15)), the second by α and summing the left and right parts of (17), we have

$$(1 - \alpha)f(\bar{x}, y_S) - \alpha R_f(\bar{x}, y_S) > (1 - \alpha)f(x^S, y_S) - \alpha R_f(x^S, y_S) \quad (18)$$

where the strict inequality sign follows from the following condition: constants $\alpha \in [0, 1]$ and $1 - \alpha$ do not simultaneously vanish. Taking into account the explicit form of the risk function $R_f(x, y_S) = \max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y)$ (for all $x \in X$), we find from (18) the following:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)f(\bar{x}, y_S) - \alpha \left(\max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y) \right) &= \\ &= f(\bar{x}, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S) > \\ &> (1 - \alpha)f(x^S, y_S) - \alpha \left(\max_{z \in X} f(z, y_S) - f(x, y) \right) = \\ &= f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, x). \end{aligned}$$

This is why the following strict inequality is valid:

$$f(\bar{x}, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, x) > f(x^S, y_S) - \alpha \max_{z \in X} f(z, y_S)$$

which contradicts (15).

Case 2. (16) is valid, but the second requirement of Definition 1 is not. In this case, there is an uncertainty \bar{y} , for which

$$f(x^S, \bar{y}) < f(x^S, y_S), \quad R_f(x^S, \bar{y}) > R_f(x^S, y_S)$$

Again, multiplying the first of these inequalities by the number $1 - \beta \in [0, 1]$ from (16), and the second one by $-\beta$ and summing them, we find, as in case 1, that

$$f(\bar{x}^S, y) - \beta \max_{z \in X} f(z, \bar{y}) < f(x^S, y_S) - \beta \max_{z \in X} f(z, y_S).$$

This inequality contradicts (16).

□

Remark 4. From Statement 1 we have the following *method* of finding the WGPR (x^S, f^S, R_f^S) of problem 1:

(a) find the vector function $x(y) : Y \rightarrow X$, based on the equation

$$\max_{z \in X} f(z, y) = f(x(y), y) \quad \forall y \in Y;$$

(b) using the found $x(y)$, build two functions

$$F_\alpha(x, y) = f(x, y) - \alpha f(x(y), y),$$

$$F_\beta(x, y) = f(x, y) - \beta f(x(y), y),$$

where constants $\alpha \in [0, 1]$ and $\beta \in [0, 1]$;

(c) find constants $\alpha^*, \beta^* \in [0, 1]$ and pair $(x^S, y_S) \in X \times Y$ such that the following equations are satisfied:

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} F_{\alpha^*}(x, y_S) &= F_{\alpha^*}(x^S, y_S), \\ \min_{y \in Y} F_{\alpha^*}(x^S, y) &= F_{\alpha^*}(x^S, y_S); \end{aligned} \tag{19}$$

(d) using this pair (x^S, y_S) , write down the guaranteed under payoffs and risks solution as

$$(x^S, f^S, R_f^S) = (x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S)).$$

Reduction to finding a saddle point.

Remark 5. If in the method of finding a weakly guaranteed solution (from the remark 4) one required that the constants $\alpha = \beta \in [0, 1]$, then the equations (19) transform into

$$\max_{x \in X} F_{\alpha^*}(x, y_S) = F_{\alpha^*}(x^S, y_S) = \min_{y \in Y} F_{\alpha^*}(x^S, y). \tag{20}$$

Satisfaction of the chain of equations (20) means that the pair $(x^S, y_S) \in X \times Y$ is the saddle point of the antagonistic game

$$\langle X, Y, F_{\alpha^*}(x, y) \rangle. \tag{21}$$

In game (21), the first player, by choosing their strategy $x \in X$, seeks to *maximize* the value of the scalar payoff function $F_{\alpha^*}(x, y)$, and the second, on the contrary, seeks to *minimize* $F_{\alpha^*}(x, y)$ using their strategy $y \in Y$. The solution of game (21) is the saddle point (x^S, y_S) , defined by chain of equations (20). The algorithm for constructing a weakly guaranteed solution proposed in Remarks 4 and 5 will be applied later in obtaining its explicit form for one sufficiently general class of problems of the form (1).

Remark 6. Since

$$\max_{z \in X} f(z, y_S)$$

is not a function of $x \in X$, then the strategy $x^S \in X$, found from equation (15), coincides with the strategy x^S that satisfies the following equation:

$$\max_{x \in X} f(x, y_S) = f(x^S, y_S).$$

Therefore, Statement 1 can be represented in an equivalent form:

If there is a constant $\beta \in [0, 1]$ and a pair of $(x^S, y_S) \in X \times Y$ such that

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} f(x, y_S) &= f(x^S, y_S), \\ \min_{y \in Y} (f(x^S, y) - \beta \max_{x \in X} f(x, y)) &= f(x^S, y_S) - \beta \max_{x \in X} f(x, y_S), \end{aligned}$$

then the WGPR of problem (1) has the form $(x^S, f(x^S, y_S), R_f(x^S, y_S))$.

CONCLUSION

The simplest conflict problem under uncertainty was and remains “playing with nature” where one should choose an action (strategy) that optimizes a given criterion (for example, profit). In addition, each action is accompanied by incompleteness or inaccuracy of information (uncertainty) about the results of such an action. At the same time, the risk that accompanies the result achieved is also of interest. A particular kind of uncertainty, for which only the bounds of change are known but no statistical characteristics are available, stands out from such research.

An example of such uncertainties is the problem of diversification between the various currencies of a one-year deposit [19].

Uncertainties, of which only the bounds of change are known, were called in Russia “bad uncertainties” because of unpredictability of their implementations. For assessment of the “actions” of such uncertainties, the Niehans–Savage risk function is used, the value of which for a particular strategy is a measure of risk (the decision maker seeks to reduce the risk), and the best value for the decision maker is characterized by zero risk.

In addition, we recall that economists subdivide decision makers into three groups: risk-averse, risk-loving, and risk-neutral. In Definition 1, we restricted ourselves to *risk-neutral* decision makers, although it would be of undoubted interest to consider cases in games where different players fall into different categories. We hope to consider these questions in the future when transferring the approach to multicriteria problems under uncertainty.

The decision making process in OCPU $\Gamma^{(1)}$ proceeds as follows. The decision maker chooses and uses their strategy $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Independently of decision maker's actions in $\Gamma^{(1)}$, the uncertainty y is implemented (can be any from the set Y). The payoff function $f(x, y)$ is defined for all pairs $(x, y) \in X \times Y$. At the substantive level and before the article [10], the decision maker's task was to choose such a strategy (under the said $\Gamma^{(1)}$ procession rule) so that their gain becomes as large as possible. In this case, the decision maker must take into account the possibility of implementation of any uncertainty $y \in Y$. The latter requirement leads to the need for the decision maker to estimate the set

$$f(x, Y) = \bigcup_{y \in Y} f(x, y).$$

Such ambiguity of $f(x, y)$, in turn, necessitates choice of such a function $f[x]$ that would have the *guaranteeing property*. The most obvious and illustrative guarantee for the decision maker in $\Gamma^{(1)}$ is the so-called [12] *strong guarantee* implemented by the scalar function

$$f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y) \quad (22)$$

Indeed, from (22) immediately follows satisfaction of the following inequality for all situations $x \in X$:

$$f[x] \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

So, $f[x]$ is a guarantee because for all uncertainties $y \in Y$ and all situations $x \in X$, the value of $f(x, y)$ cannot become less than $f[x]$. As proposed in [10] to build another guarantee $\min_y R_f(x, y) = -R_f[x]$, where $R_f(x, y)$ is the Niehans–Savage risk function (2). Finally, the strongly guaranteeing strategy x^P , which is a part of the strongly guaranteeing solution $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ is the Pareto maximum in the two-criterion problem of “strong guarantees” $\Gamma_2 = \langle X, f[x], -R_f[x] \rangle$ and the problem is reduced to the problem of constructing the maximizer x^P in $\max_x (f[x] - R_f[x]) = f[x^P] - R_f[x^P]$, hereby implementing the analog of maximin proposed in [12] by the first author. In this approach, “in terms of maximin”, the internal minimum is replaced by two minima $\min_{y \in Y} f(x, y)$ and $\min_{y \in Y} -R_f(x, y)$, and the external maximum is replaced by the Pareto maximum in Γ_2 . In [12], existence of $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ given compactness of X and Y as well as continuity of $f(x, y)$ is established on $X \times Y$. We emphasize once again that in [12], we limited ourselves only to strong guarantees $f[x], -R_f[x]$. They are called “strong” because they are the “lowest” possible. One could also use the so-called “vector” guarantees, which was done in this article: the components $f[x], -R_f[x]$ form the *vector guarantee* for the vector $(f(x, y), -R_f(x, y))$, if for all $y \in Y$ and all $x \in X$, two strict inequalities cannot be

satisfied simultaneously:

$$f(x, y) < f[x], \quad -R_f(x, y) < -R_f[x],$$

in other words, all components of the vector guarantee $(f[x], -R_f[x])$ cannot be simultaneously reduced by choosing $y \in Y$ using the vector function $(f(x, y), -R_f(x, y))$. From the perspective of the vector optimization theory, for each situation $x \in X$, the vector $(f[x], -R_f[x])$ is the Slater minimum (weakly effective) in the two-criterion problem $\Gamma(x) = \langle Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle$.

Similarly, using other vector optima (more precisely, according to Pareto, Borwaine, Geoffrion minima, and the conical optimality), one can introduce a whole set of vector guarantees (respectively, according to Pareto, Borwaine, and so on). These guarantees have the following property: their value, *first*, is not less than the corresponding components of the strong guarantee vector $(f[x], -R_f[x])$, but *second* may also be large. But we are striving for a possible increase in the payoffs of each player (which is achieved, in particular, by increasing their guarantees!). In this regard, the listed vector guarantees are preferable to the strong ones. However, one should not forget: to make the transition from $\langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle$ under uncertainty to the problem of guarantees $\langle X, \{f[x], -R_f[x]\} \rangle$ and then use Remarks 4–6, it is necessary that the new guarantee criteria $f[x], -R_f[x]$ are continuous on X .

Finally, the “uncertainty combatting” method for OCPUs is the embodiment of the “analog of a saddle point” method from [11], where in the definition of the saddle point, the minimum is replaced by the Slater minimum, and the maximum is replaced by the Slater maximum.

Why is then the weakly guaranteed under payoffs and risks solution suggested as a “good” solution of an OCPU?

First, it answers the traditional Russian question: “What is to be done?”, when strong guarantees from [10] are “too bad”; in response, it is proposed to follow the triplet $(x^S, f[x^S], R_f[x^S])$, formalized by Definition 1.

Second, this strategy x^S “provides” the decision maker with the largest payoffs $f(x^S, y)$ not less than $f[x^S]$ with the risk of $R_f(x^S, y)$ not greater than $R_f[x^S]$ in case of implementation of any uncertainty $y \in Y$ (that is, x^S sets the lower bounds for the payoffs with $x = x^S$ and the upper bounds for the risks accompanying this implementation).

Third, the situation x^S implements the “greatest” (in the “vector sense”)—Slater maximal outcomes and the corresponding “negative” risks; in other words, there is no other strategy $x \neq x^S$ that would increase the guarantee on payoffs and at the same time decrease the guarantee $R_f[x^S]$ on risks.

Fourth, an increase in decision maker's guaranteed payoffs (as compared to $f[x^S]$) will inevitably cause an increase in guaranteed risks (again, as compared to $R_f[x^S]$); a decrease in such risks, again, automatically "provokes" a decrease in guaranteed profit.

Fifth, if we demand that X, Y are compacts and $f(x, y)$ is continuous on $X \times Y$, then guarantees $f[x]$ and $R_f[x]$ exist and are continuous on X . Therefore, the question of existence of a solution formalized by Definition 1, "rests" on the question of existence of a saddle point for the antagonistic game of "guarantees" (21); here the possibility of wide application of numerous theorems of existence of a saddle point, including from [18] and successors, already arises.

The authors thank participants of the seminar "Risks in complex control systems" of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Moscow State University for their discussion of the work and comments.

REFERENCES

1. Найт, Ф. Х. Риск, неопределенность и прибыль. — М.: Дело, 2003. — 360 с.
KNIGHT, F. (2003) *Risk, Uncertainty and Profit*. Moscow: Delo.
2. Череминов, Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: Инфо-М, 2008. — 842 с.
CHEREMINOV, Yu. (2008) *Microeconomics. Advanced level*. Moscow: Info-M.
3. Жуковский, В. И. Риски при неопределенных ситуациях. — М.: URSS, Ленанд, 2008. — 328 с.
ZHUKOVSKIY, V. (2008) *Risks in uncertain situations*. Moscow: URSS, Lenand.
4. Гранитулов, В. Н. Экономический риск. — М.: Дело и сервис, 1990. — 112 с.
GRANITULOV, V. (1990) *Economic risk*. Moscow: Delo i servis.
5. Уткин, Э. А. Риск-менеджмент. — М.: ЭКМОС, 1998. — 288 с.
UTKIN, E. (1998) *Risk management*. Moscow: EK MOS.
6. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin*. New York etc.: Academic Press, 1994. 403 p.
7. Сиразетдинов Т.К., Сиразетдинов Р.Т. Проблема риска и его моделирование // Проблемы человеческого риска. 2007. Вып. 1. С. 31–43.

8. Шахов, В. В. Введение в страхование. Экономический аспект. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 286 с.
SHAKHOV, V. (2001) *Introduction into insurance. Economic aspect*. Moscow: Finansy i statistika.
9. Цветкова Е. В., Арлюкова Н. О. Риск в экономической деятельности. — СПб: ИВЭСЭП, 2002. — 64 с.
TSVETSKOVA, Ye. and ARLYUKOVA, N. (2002) *Risks in economic activities*. Saint Petersburg: IVESEP.
10. ZHUKOVSKIY, V., SACHKOV, S., SACHKOVA, E. (2018) Niehans–Savage risk in solution of one-criterion problem. *East European Science Journal*. 37 (9). p. 42–51.
11. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности: I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 2004. — Т. 5 № 1. — С. 3–15.
ZHUKOVSKIY, V., KUDRYAVTSEV, K. (2004) Balancing conflicts under uncertainty: I. An analog of the saddle point. *Mathematical Theory and Its Applications*. 5 (1). p. 27–44.
12. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности: II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 2004. — Т. 5 № 1. — С. 3–15.
ZHUKOVSKIY, V., KUDRYAVTSEV, K. (2004) Balancing conflicts under uncertainty: II. An analog of the maximin. *Mathematical Game Theory and Its Applications*. 5 (1). p. 3–15.
13. ZHUKOVSKIY, V., CHIKRII, A., SOLDATOVA, N. (2013) Existence of Berge equilibrium in conflicts under uncertainty. *Automation and Remote Control*. 77 (4). p. 640–655.
14. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Смирнова Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: URSS, Красанд, 2002. — 368 с.
ZHUKOVSKIY, V., KUDRYAVTSEV, K. and SMIRNOVA, L. (2002) *Guaranteed solutions of conflicts and their applications*. Moscow: URSS, Krasand.

15. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.
PODYUNIVSKIY, V. and NOGIN, V. (2007) *Pareto-optimal solutions of multicriteria problems*. Moscow: Fizmatlist.
16. Васильев, Ф. П. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2003. — 824 с.
VASILYEV, F. (2003) *Optimization methods*. Moscow: Faktorial Press.
17. Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009. — 286 с.
MOROZOV, V., SUKHAREV, A. and FYODOROV, V. (2009) *Operational research in problems and excerices*. Moscow: Book house “Librokom” URSS.
18. Воробьев, Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 495 с.
VOROBYOV, N. (1984) *Basics of the game theory. Noncoalitional games*. Moscow: Nauka.
19. ZHUKOVSKIY, V., MOLOSTVOV, V., TOPCHISHVILI, A. (2014) Problem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. 20 (1). p. 1–14.

УДК: 519.6

MSC2010: 74M15

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНТАКТА ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ
МОРТАР-МЕТОДОМ И МЕТОДОМ ШВАРЦА НА
НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТКАХ**

© П. С. Аронов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Российская Федерация
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация
E-MAIL: *aronovps@mail.ru*

© М. П. Галанин

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Российская Федерация
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация
E-MAIL: *galan@keldysh.ru*

© А. С. Родин

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4, Москва, 125047, Российская Федерация
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация
E-MAIL: *ral@bk.ru*

© И. В. Станкевич

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация
E-MAIL: *aplmax@yandex.ru*

**SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM USING MORTAR-METHOD AND SCHWARZ
ALTERNATING METHOD ON MISMATCHED GRIDS.**

Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S., Stankevich I. V.

Abstract.

The article discusses the implementation of the algorithms based on mortar-method and Schwarz alternating method for solving contact problems of elasticity theory. Solving such problems is often associated with necessity of using mismatched grids. Their joining can be carried out both with the help of iterative procedures that form the so-called Schwarz alternating methods, and with the help of the Lagrange multipliers method or the penalty method. The algorithm constructed in the article uses the mortar method for matching the finite elements on the contact line. All these methods of joining the grids make it possible to ensure continuity

of displacements and stresses near the contact line. However, one of the main advantages of the mortar method is the possibility of independent choice of different types of finite elements and form functions on both boundaries of two bodies on the contact line, and when integrating along it. The application of this method in conjunction with the classical formulation of the finite element method based on the minimization of the Lagrange functional leads to a system of linear algebraic equations with a saddle point. The article discusses in detail its numerical solution based on the modified symmetric successive upper relaxation method.

One of the main advantages of the Schwarz method is the ability to reduce the solution of the general contact problem of several bodies to a sequence of solutions of standard problems of mechanics for each body separately. But the competitiveness of this method compared to the methods of penalty functions and Lagrange multipliers is largely determined by the convergence rate of the considered iterative process.

On the example of a test problem with various combinations of grid steps, some regularities are revealed. The influence of the master and slave bodies choice on the distribution of displacements and stresses on the contact line is investigated. In the case of matched grids, there are no oscillations in the graphs of the distribution of displacements and stresses, regardless of the choice of active and passive bodies. In the case of mismatched grids, the choice of a master body with a finer mesh leads to a significant decrease in oscillations of both displacements and stresses. When using the Schwarz method, fluctuations in the graphs of distributions of displacements and stresses are absent.

Keywords: *contact problem of the elasticity theory; finite element method; mortar-method; Schwarz alternating method; successive over-relaxation method*

ВВЕДЕНИЕ

Расчет прочности и надежности различных ответственных элементов конструкций, функциональных узлов оборудования является обязательным этапом проектирования. Многие из этих элементов контактируют между собой в пределах некоторой поверхности. Данные о напряженно-деформированном состоянии таких элементов и узлов можно получить, используя современный аппарат математического моделирования. Лишь для сравнительно малого количества контактных задач теории упругости получены аналитические решения, поэтому наиболее перспективным способом исследования контактного взаимодействия тел являются численные методы. Ведущее место среди численных методов, используемых для решения контактных задач, занимает метод конечных элементов. При контактном взаимодействии нескольких тел зачастую отсутствует возможность использовать согласованные сетки. Численное решение подобных задач на несогласованных сетках можно осуществлять с помощью итерационного метода Шварца, обеспечивающего поочередное выполнение

на контактной границе кинематических и силовых условий (см., например, [1, 2]). Также возможно использование прямых процедур, использующих метод множителей Лагранжа [3, 4], метода штрафа [5] и mortar-метода [6, 7].

В данной работе описана реализация алгоритмов решения контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода Шварца. Рассмотрены случаи согласованных и несогласованных сеток для двумерной тестовой задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00252 и № 18-31-20020).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в двумерном пространстве \mathbb{R}^2 группу тел, занимающих область

$$G = \cup_{\alpha} G_{\alpha}$$

(α — индекс, обозначающий номер тела) с кусочно-гладкой границей ∂G .

При решении контактной задачи на поверхностях контакта тел дополнительно должны быть выполнены условия контактного взаимодействия по перемещениям и напряжениям. Для построения алгоритма достаточно ограничиться случаем двух тел с одной парой контактных поверхностей. Рассмотрим два упругих контактирующих тела, занимающих в пространстве области G_1 и G_2 , ограниченные кусочно-гладкими границами ∂G_1 и ∂G_2 .

Математическая формулировка контактной задачи теории упругости для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя следующие соотношения [8] для каждого тела $G_{\alpha} \subset \mathbb{R}^2$, участвующего в контакте, $\alpha \in \{1, 2\}$:

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G_{\alpha}; \quad (1)$$

- кинематические граничные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{S_2} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \subset \partial G_1 \cup \partial G_2; \quad (2)$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j|_{S_1} = g_i(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_4 \subset \partial G_1; \quad (3)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G_{\alpha}; \quad (4)$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x})), \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (5)$$

- кинематическое контактное условие

$$u_n^1(\mathbf{x}) = -u_n^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_k; \quad (6)$$

- силовое контактное условие

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}) = \sigma_n^2(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in S_k, \quad (7)$$

где x_i — координаты вектора $x \in G_\alpha$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{kl} — компоненты тензора деформации; ε_{kl}^0 — компоненты тензора начальной деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; g_i — компоненты вектора поверхностных сил; n_j — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности S_i ; u_n^i — проекции векторов перемещений граничных точек на направление внешней нормали n_i к границе тела i ; σ_n^i — проекции векторов напряжений на направления внешних нормалей n_i ; S_k — контактная поверхность.

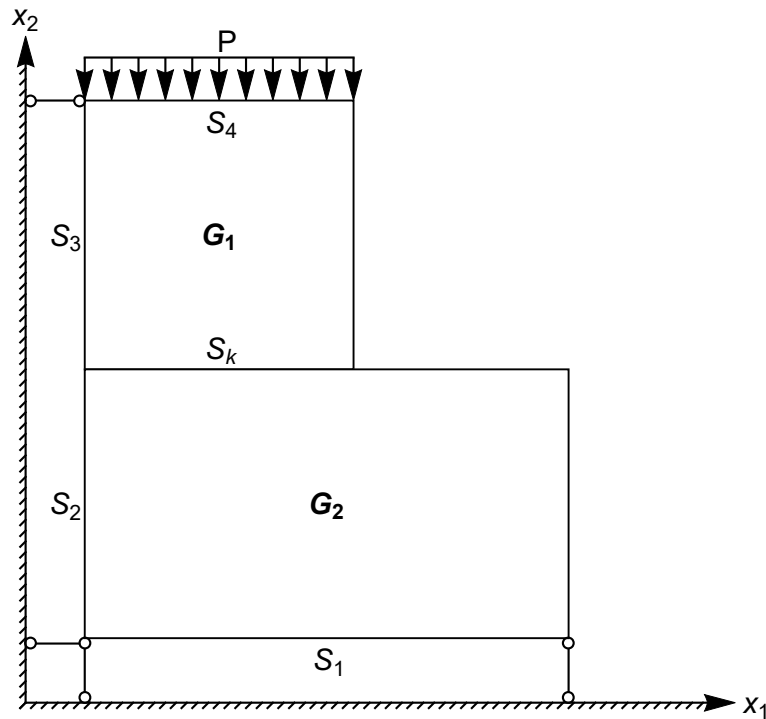


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух тел.

Для рассматриваемого двумерного случая векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и перемещений \mathbf{u} записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Решение задачи (1)–(7) эквивалентно [11] минимизации функционала:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dG - \int_{S^2} \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS + \int_{S_k} \boldsymbol{\lambda} (u_n^2(\mathbf{x}) - u_n^1(\mathbf{x})) dS \quad (9)$$

при выполнении кинематических граничных условий (2), где $G = G_1 \cup G_2$; $S^2 = S_1^2 \cup S_2^2$; $\boldsymbol{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа, состоящий из проекций векторов напряжений на направления внешних нормалей.

2. ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для численного решения задачи (1)–(7) будем использовать метод конечных элементов. Конечно-элементная сетка состоит из четырехугольных элементов. Применим функции формы либо первого порядка (метод Шварца), либо второго порядка (mortar-метод).

Компоненты $u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$ вектора перемещения \mathbf{u} внутри конечного элемента с номером e определяются с помощью зависимости

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = [N]^{(e)} \{u\}^{(e)}, \quad (10)$$

где $[N]^{(e)}$ — матрица функций форм конечного элемента [12] с номером e , а $\{u\}^{(e)}$ — объединенный вектор компонент во всех узлах конечного элемента с номером e .

Соотношения между деформациями и перемещениями в двумерном случае записываются следующим образом [13]:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{(e)} = [B]^{(e)} \{u\}^{(e)}, \quad (11)$$

где $[B]^{(e)}$ — матрица градиентов конечного элемента [12] с номером e .

Напряжения выражаются через деформации с помощью закона Гука:

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D_\alpha]^{(e)}\{\varepsilon\}^{(e)} \quad (12)$$

или, с учетом (11),

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D_\alpha]^{(e)}[B]^{(e)}\{u\}^{(e)}, \quad (13)$$

где $[D_\alpha]^{(e)}$ — локальные матрицы упругости конечного элемента с номером e для тела с номером α .

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОРТАР-МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости основан на независимой конечно-элементной дискретизации непересекающихся подобластей. Сетки на этих подобластях являются, вообще говоря, несогласованными на линии контакта, а непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа [14]. Среди основных преимуществ mortar-метода можно отметить возможность независимого выбора различных типов конечных элементов и функций формы как на границах контактирующих тел, так и при интегрировании вдоль линии контакта.

Пусть тело G_1 является активным (master), а тело G_2 — пассивным (slave). Линию контакта со стороны тела G_1 обозначим через Γ_m , а со стороны тела G_2 — Γ_s . Рассмотрим одномерные конечные элементы второго порядка на линиях контакта Γ_m и Γ_s . Из узлов этих элементов на линии контакта Γ_m проведем нормали на линию контакта Γ_s . По образованным при пересечении нормалей и Γ_s конечным элементам будем вести дальнейшее интегрирование, считая их также одномерными квадратичными элементами с аналогичными функциями формы. Деление тел на master/slave во многом является условным и неочевидным. Но в конечном счете в mortar-методе этот выбор определяет дискретизацию множителей Лагранжа.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_s) d\gamma = \sum_{i=1}^{k_m} \int_{\Gamma_{m_i}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_m d\gamma - \sum_{i=1}^{k_s} \int_{\Gamma_{s_i}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_s d\gamma, \quad (14)$$

где $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_s$, k_m и k_s — общее число конечных элементов, на которые разбиты линии контакта Γ_m и Γ_s соответственно, векторы \mathbf{u}_m и \mathbf{u}_s состоят из нормальных компонент векторов перемещений узлов конечного элемента на линиях контакта Γ_m и Γ_s , а вектор $\boldsymbol{\lambda}$ состоит из множителей Лагранжа, соответствующих проекциям векторов напряжений на направления внешних нормалей на линии контакта Γ_s .

Минимизация функционала (9) совместно с интегралом (14) приводит к формированию следующей системы линейных алгебраических уравнений [15]:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{13} \\ \mathbf{0} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$[A_{11}] = \sum_{e=1}^{k_1} [a_G]^{(e)T} \left(\int_{G_1} [B]^{(e)} [D_1]^{(e)} [B]^{(e)} dG \right) [a_G]^{(e)}, \quad (16)$$

$$[A_{13}] = \sum_{e=1}^{k_s} [a_S]^{(e)T} \left(\int_{\Gamma_s} [N]^{(e)T} [N]^{(e)} d\gamma \right) [a_S]^{(e)}, \quad (17)$$

$$[A_{22}] = \sum_{e=1}^{k_2} [a_G]^{(e)T} \left(\int_{G_2} [B]^{(e)} [D_2]^{(e)} [B]^{(e)} dG \right) [a_G]^{(e)}, \quad (18)$$

$$[A_{23}] = \sum_{e=1}^{k_m} [a_S]^{(e)T} \left(\int_{\Gamma_m} [N]^{(e)T} [N]^{(e)} d\gamma \right) [a_S]^{(e)}, \quad (19)$$

$$\{R_1\} = \sum_{e=1}^{k_1} [a_S]^{(e)T} \left(\int_S [N]^{(e)T} [g_1]^{(e)} dV \right), \quad (20)$$

$$\{R_2\} = \sum_{e=1}^{k_2} [a_S]^{(e)T} \left(\int_S [N]^{(e)T} [g_2]^{(e)} dV \right), \quad (21)$$

Здесь $[a_G]^{(e)}$, $[a_S]^{(e)}$, $[a_S]^{(e)}$ — матрицы геометрических связей конечного элемента e , $[D_\alpha]^{(e)}$ — локальные матрицы упругости конечного элемента, $\{\rho_\alpha\}^{(e)}$ и $\{g_\alpha\}^{(e)}$ — локальные векторы объемных и поверхностных сил соответственно, а k_1 и k_2 — количество конечных элементов, на которые разбиты тела G_1 и G_2 .

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных алгебраических уравнений (15) с седловой точкой является плохо обусловленной и имеет нулевой блок на главной диагонали, поэтому вместо

прямых или классических итерационных численных методов будем использовать модифицированный метод симметричной последовательной верхней релаксации [16]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} A_{11} \left(\mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_1^k \right) + A_{11} \mathbf{u}_1^k + A_{13} \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_1, \\ \frac{1}{\tau} A_{22} \left(\mathbf{u}_2^{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_2^k \right) + A_{22} \mathbf{u}_2^k + A_{23} \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{R}_2, \\ -\frac{\alpha}{2\tau} B \left(\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k \right) + A_{13}^T \mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} + A_{23}^T \mathbf{u}_2^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{0}, \\ \frac{1}{\tau} A_{11} \left(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} \right) + A_{11} \mathbf{u}_1^{k+\frac{1}{2}} + A_{13} \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \mathbf{R}_1, \\ \frac{1}{\tau} A_{22} \left(\mathbf{u}_2^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+\frac{1}{2}} \right) + A_{22} \mathbf{u}_2^{k+\frac{1}{2}} + A_{23} \boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \mathbf{R}_2, \end{cases} \quad (22)$$

где k — номер итерации, α и τ — итерационные параметры, B — матрица-предобуславливатель.

Перед первой итерацией необходимо задать начальное (нулевое) значение вектора множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ и затем вычислить глобальный вектор перемещений u_1 из первого уравнения системы (15).

Использование схемы (22) позволяет свести решение общей плохо обусловленной системы уравнений для всех контактирующих тел к последовательному решению систем уравнений отдельно для каждого тела. Причем матрица для каждой системы является стандартной для задач теории упругости: симметричной и положительно определенной.

В частности, для случая двух тел возникает необходимость решения на каждой итерации пяти систем линейных алгебраических уравнений. Все эти системы уравнений решаются с помощью метода сопряженных градиентов. Матрица-предобуславливатель выбрана в виде диагональной матрицы $B = \text{diag} \left\{ \frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}} \right\}$, а значения итерационных параметров заданы следующими: $\alpha = 0,75$, $\tau = 0,5$.

5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШВАРЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Одним из альтернативных численных методов решения контактной задачи является метод Шварца [17]. Суть метода состоит в следующем: на нулевом шаге на контактных поверхностях тел задается некоторое начальное приближение для компонент вектора перемещений (приближение выбирают из диапазона ожидаемых значений для зоны контактного взаимодействия). После решения данной задачи кинематическое условие (6) (условие непроникания одного тела в другое) на контактной

поверхности будет выполнено, но вычисленные контактные давления для взаимодействующих тел оказываются различными. На следующем шаге с помощью специальным образом выполненной коррекции [18] добиваются равенства контактных напряжений (7), но полученные перемещения не удовлетворяют условию непроникания. Далее, на очередной итерации снова используют скорректированные кинематические условия (6) (совмещают контактирующие поверхности). Чередование силовых и кинематических итераций выполняется до достижения сходимости, когда и кинематические и силовые условия на контакте выполнены с заданной точностью. В формулах, которые используются для коррекции перемещений и напряжений на контактных поверхностях, присутствуют итерационные параметры, которые можно задавать различными способами [18]. Одним из главных преимуществ метода Шварца является сведение решения общей задачи контактного взаимодействия нескольких тел к последовательности решений стандартных задач механики для каждого тела по отдельности. Конкурентоспособность данного метода по сравнению с методами штрафных функций и множителей Лагранжа во многом определяется скоростью сходимости используемого итерационного процесса.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве тестовой рассмотрим следующую задачу: две двумерные пластины шарнирно закреплены и нагружены так, как это показано на рис. 1. Обе пластины выполнены из одинакового материала с модулем упругости $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, давление $P(x_1) = p_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi x_1}{3}\right)$, $p_0 = 10$ МПа. Размер тела G_1 по x_1 равен 0,6 м, размер по x_2 — 0,2 м, размер тела G_2 по x_1 равен 0,9 м, размер по x_2 — 0,4 м; h_1 и h_2 — шаги конечно-элементной сетки в направлении x_1 для тел G_1 и G_2 соответственно. Ячейки сетки являются почти квадратными. Также будем рассматривать различные варианты выбора активного (master) и пассивного (slave) тел. Данный выбор влияет на структуру системы (15), так как вектор множителей Лагранжа λ состоит из проекций векторов напряжений на направления внешних нормалей на линии контакта пассивного тела, а, следовательно, в случае $h_1 \neq h_2$ размерность вектора λ зависит от того, какое тело является активным, а какое — пассивным.

Для начала рассмотрим согласованные сетки с $h_1 = h_2 = 0,025$. Для данной комбинации сеток выбор активного и пассивного тел не оказывает существенного влияния на распределение перемещений и напряжений на линии контакта.

Получаемые в mortar-методе результаты сильно зависят от точности решения системы линейных алгебраических уравнений (22). В качестве критерия остановки

итерационного процесса решения систем уравнений методом сопряженных градиентов выбрано условие достижения заданной относительной точности ε решения на двух последовательных итерациях в сеточной норме L_2 .

На рис. 2 показаны зависимости относительной точности от количества итераций (два графика соответствуют различным вариантам выбора master/slave). Из графиков видно, что после первых 6-10 итераций ошибка начинает убывать очень медленно. Для варианта, когда активным является нижнее тело, получаемая точность несколько больше, чем для случая, когда активным является верхнее тело.

Для сравнения приведем графики перемещений на контактной поверхности в случае, когда выполнено только 3 итерации ($\varepsilon = 10^{-3}$). На рис. 3 видно, что между графиками возникает существенный разрыв (максимальное относительное расхождение, вычисленное в C -норме, равно 0,0433).

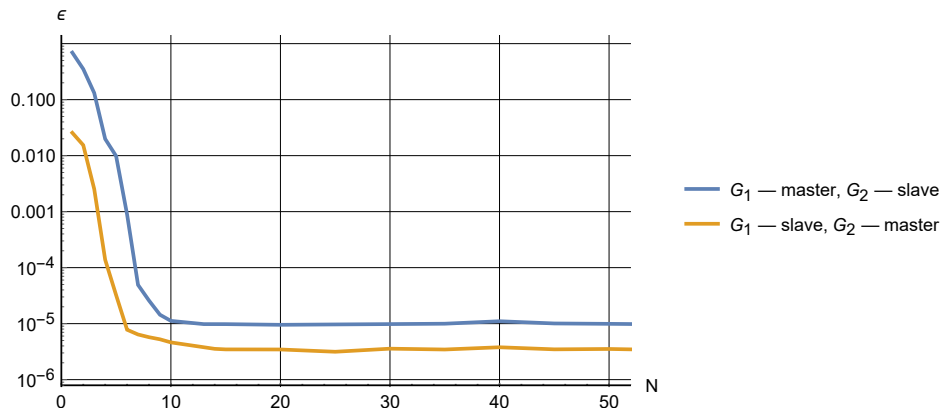


Рис. 2. Зависимости относительной точности от количества итераций

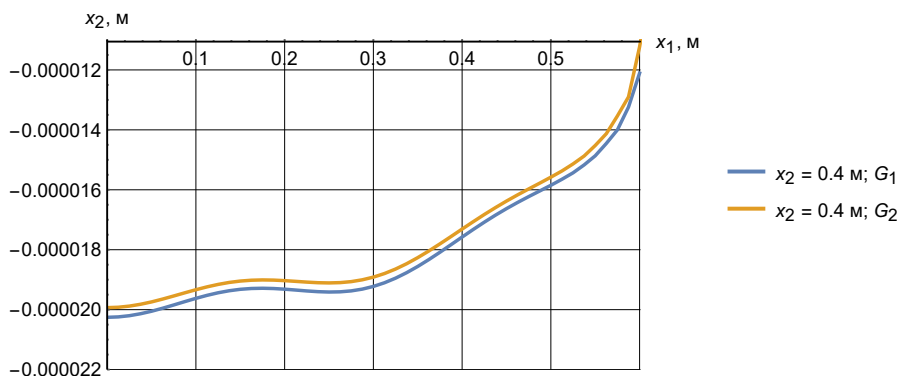


Рис. 3. Зависимости перемещения $u_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave, $\varepsilon = 10^{-3}$

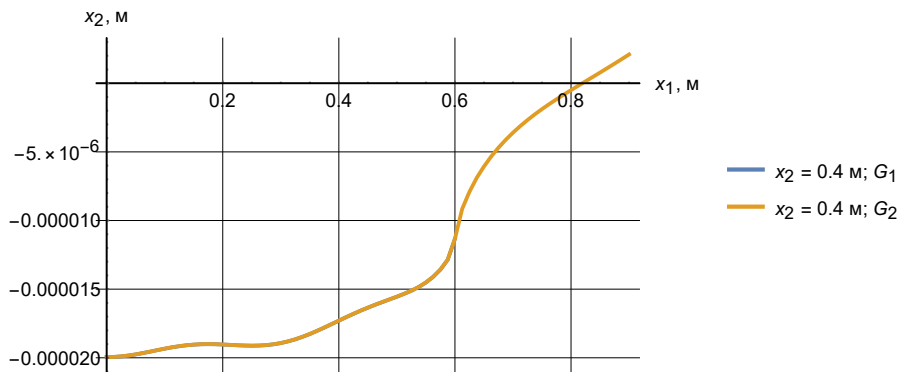


Рис. 4. Зависимости перемещения $u_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

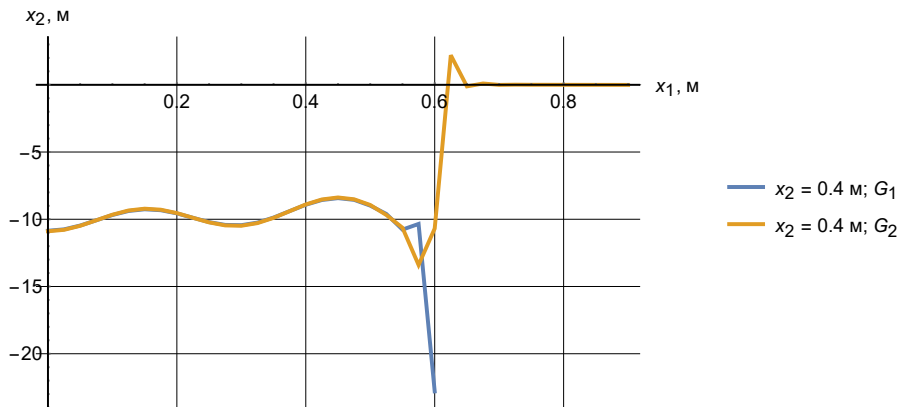


Рис. 5. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

Приведенные на рис. 4–6 результаты получены после 109 итераций ($\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$). На рис. 4 представлены два графика распределения перемещений в узлах конечно-элементной сетки двух тел на линии контакта. Графики визуально не отличимы, максимальное относительное расхождение составляет 0,0007. На рис. 5 показано распределение напряжений в узлах. Графики напряжений в узлах визуально совпадают всюду, кроме окрестности угловой точки, где имеются осцилляции. Больше осцилляций не наблюдается. В mortar-методе напряжение в узлах получается путем осреднения значений σ_2 , полученных в каждом конечном элементе, в который входит рассматриваемый узел. В методе Шварца приведенные значения контактных давлений в узлах являются независимыми величинами, которые вычисляются отдельно с помощью специальных процедур.

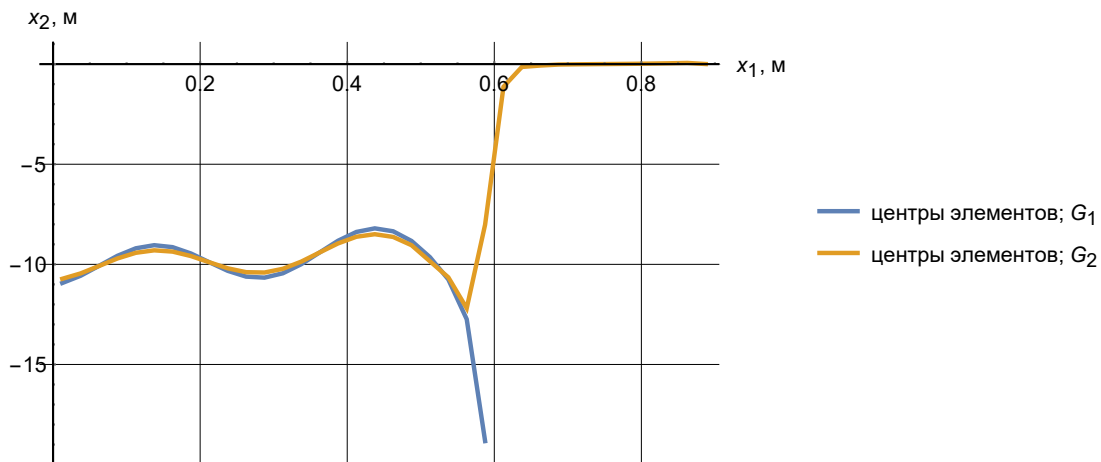


Рис. 6. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

Приведенные графики демонстрируют, что на контактной границе выполнены и кинематические (6), и силовые (7) условия, что может служить доказательством того, что задача решена корректно. На рис. 6 приведены распределения напряжений в центрах прилегающих к линии контакта элементов. Графики близки друг к другу, но не совпадают, так как относятся к разным сечениям.

Рассмотрим случай несогласованных сеток ($h_1 = 0,01875$, $h_2 = 0,01$). В этом варианте шаги h_1 и h_2 отличаются друг от друга почти в два раза. Характер сходимости итерационного процесса решения системы уравнений остается прежним (рис. 2), но различие между графиками по сравнению со случаем согласованных сеток для разных пар master/slave становится заметно больше. Приведенные на рис. 7–10 результаты получены после 108 итераций ($\varepsilon = 10^{-5}$) в случае, когда тело G_1 является активным, а G_2 — пассивным.

На рис. 7 показаны распределения перемещений. Они близки друг к другу, но на графике для нижнего тела появляются небольшие осцилляции (для наглядности этот график отдельно показан на рис. 8).

На графике распределения напряжений в узлах конечных элементов (рис. 9) осцилляции становятся еще более существенными. В то же время на графике распределения напряжений в центрах прилегающих к линии контакта элементов нижнего тела (рис. 10) колебания остаются, но их амплитуда значительно уменьшается.

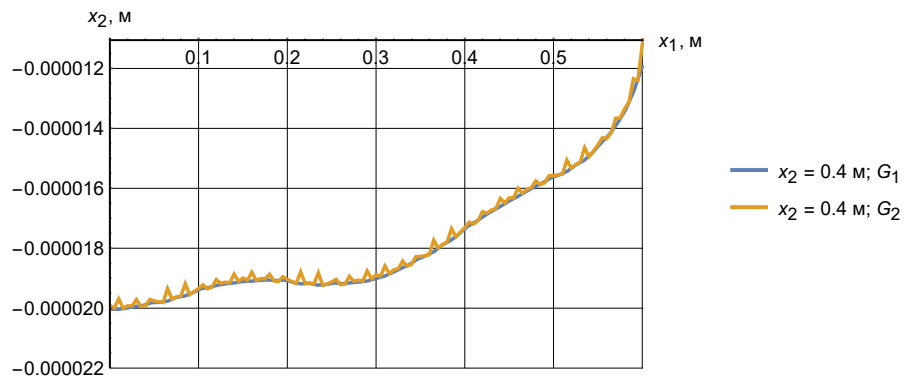


Рис. 7. Зависимости перемещения $u_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

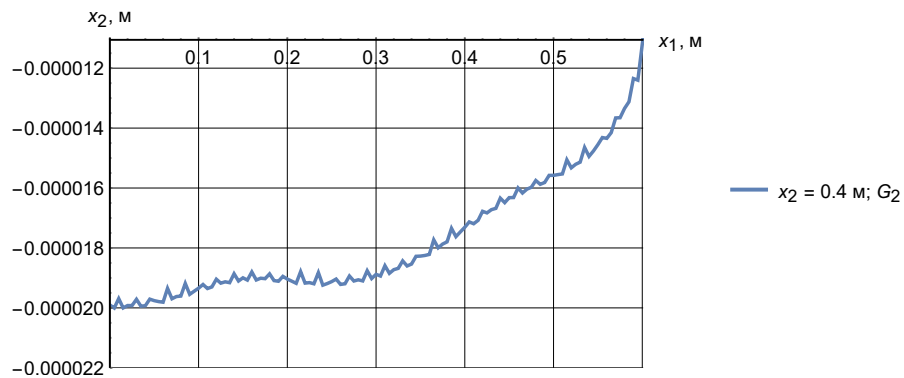


Рис. 8. Зависимость перемещения $u_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

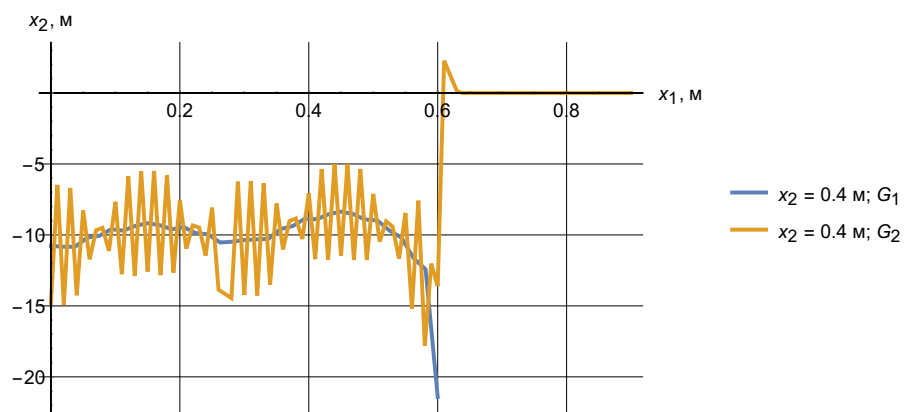


Рис. 9. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(x_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

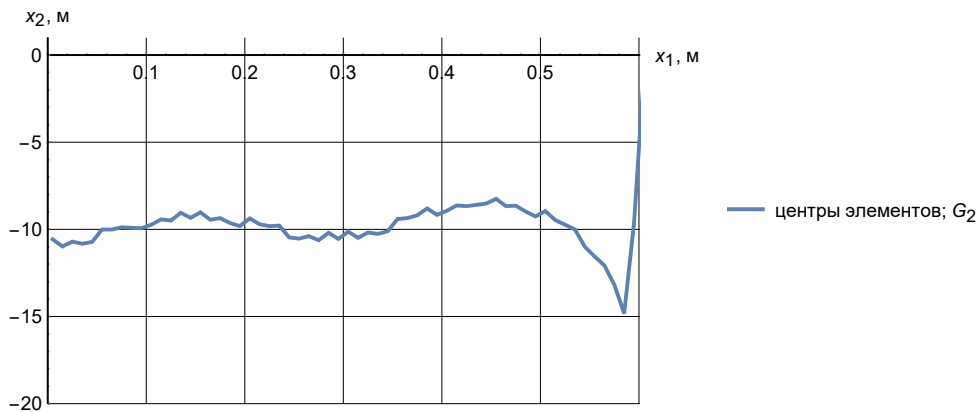


Рис. 10. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(\mathbf{x}_1)$, G_1 — master, G_2 — slave

Далее рассмотрим те же шаги сеток $h_1 = 0,01875$, $h_2 = 0,01$, но в качестве активного (master) выберем нижнее тело G_2 (с более мелкой сеткой), а в качестве пассивного (slave) — верхнее тело G_1 . Приведенные на рис. 11–12 результаты получены после проведения 125 итераций ($\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$).

График распределения перемещений в этом случае визуально совпадает с графиком на рис. 4.

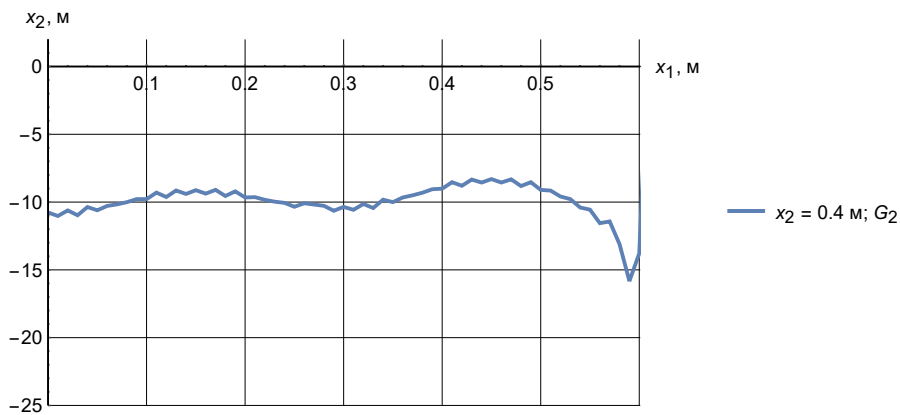


Рис. 11. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(\mathbf{x}_1)$, G_1 — slave, G_2 — master

Графики напряжений в узлах конечных элементов в среднем совпадают, но на нижнем теле сохраняются осцилляции. На рис. 11 отдельно показано распределение

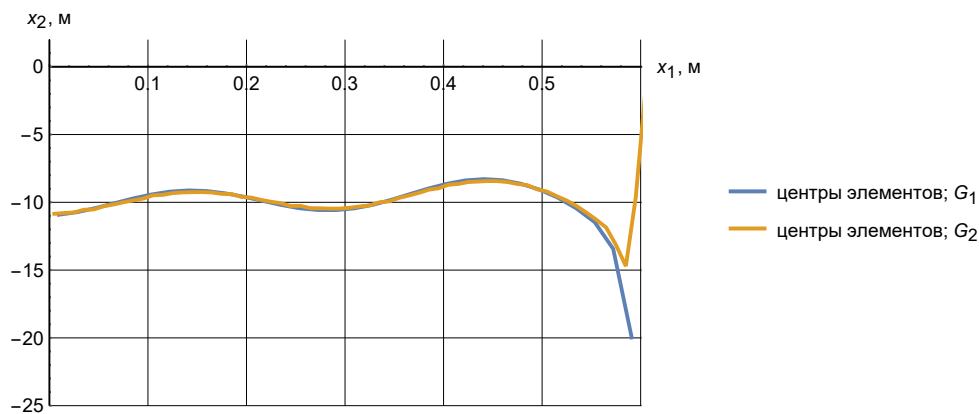


Рис. 12. Зависимости нормального напряжения $\sigma_2(x_1)$, G_1 — slave, G_2 — master

напряжений для нижнего тела. Осцилляции становятся существенно меньше по сравнению с графиком на рис. 9. В центрах прилегающих к линии элементов колебания почти исчезают (рис. 12).

Таким образом, выбор в качестве активного тела с меньшим шагом сетки приводит к уменьшению амплитуды колебаний в распределениях как перемещений, так и напряжений. Данную закономерность можно трактовать следующим образом: в реализованном варианте mortar-метода вводимые поверхностные элементы, на которых задаются множители Лагранжа, в качестве базовых используют поверхностные элементы пассивного тела, и на них дополнительно проецируются узлы активного тела. Поэтому если в пределах одного элемента контактное давление меняется существенным образом, то проецирование узлов с мелкой сетки на сетку с большим шагом является более устойчивым процессом.

Для обоих вариантов шагов сеток проведены аналогичные расчеты с помощью метода Шварца, но с использованием конечных элементов 1-го порядка. Полученные результаты визуально не отличимы друг от друга, на рис. 13 показаны два распределения перемещений, а на рис. 14 — распределения напряжений в узлах для расчета с несогласованными сетками $h_1 = 0,01875$, $h_2 = 0,01$. На приведенных графиках осцилляций не наблюдается.

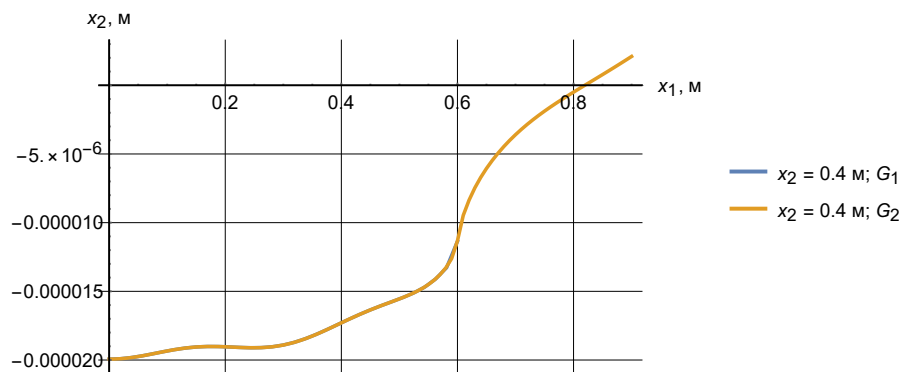


Рис. 13. Зависимости перемещения $u_2(x_1)$, метод Шварца

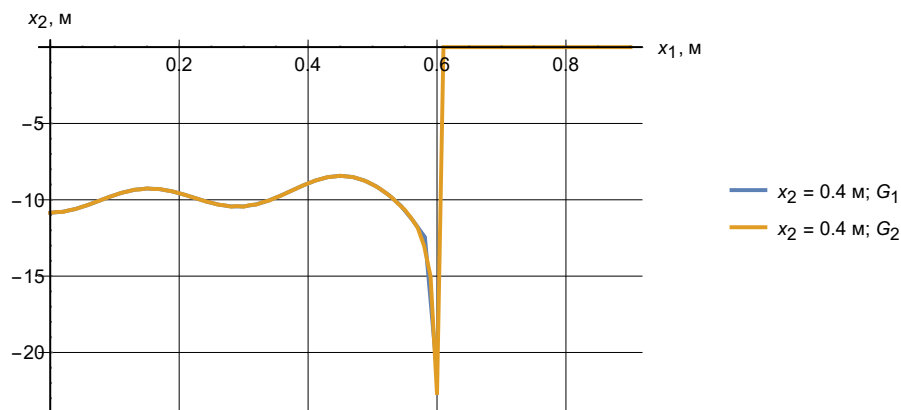


Рис. 14. Зависимости контактного давления в узлах, метод Шварца

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты реализации алгоритмов решения двумерных контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода Шварца. Исследовано влияние выбора активного (master) и пассивного (slave) тел на распределение перемещений и напряжений на линии контакта. Результаты представлены на примере тестовой задачи с различными комбинациями шагов сеток. В случае согласованных сеток колебания рассчитанных распределений и перемещений и напряжений отсутствуют вне зависимости от выбора активного и пассивного тел. Если сетки на линии контакта двух тел являются несогласованными, то выбор в качестве активного (master) тела с более мелкой сеткой приводит к существенному уменьшению осцилляций как перемещений, так и напряжений. При использовании метода Шварца колебания распределений перемещений и напряжений отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин, М. П., Крупкин, А. В., Кузнецов, В. И., Лукин, В. В., Новиков, В. В., Родин, А. С., Станкевич, И. В. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2016. — № 12. — С. 9–20.
GALANIN, M. P., KRUPKIN A. V., KUZNETSOV V. I., LUKIN V. V., NOVIKOV V. V., RODIN A. S., STANKEVICH I. V. (2016) Modeling of Contact Interaction of a Thermoelastic Body System using Schwarz Method for a Multidimensional Case. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*. No. 12. p. 9–20.
2. Станкевич, И. В., Яковлев, М. Е., Си Ту Хтет Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2011. — Спец. вып. Прикладная математика. — С. 134–141.
STANKEVICH, I. V., YAKOVLEV, M. E., SI TU KHTET (2011) Development of the algorithm of contact interaction based on the Schwarz alternative method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. spec. iss. Applied Mathematics*. p. 134–141.
3. LE TALLEC, P. & SASSI, T. (1995) Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach. *Mathematics of Computation*. Vol. 64. p. 1367–1396.
4. Галанин, М. П., Глизнуцина, П. В., Лукин, В. В., Родин А. С. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2015. — № 89. — С. 1–27.
GALANIN, M. P., GLIZNUTSINA, P. V., LUKIN, V. V., RODIN, A. S. (2015) Variants of realization of the Lagrange multipliers method for solving two-dimensional contact problems. *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics*. No. 89. p. 1–27.
5. BABUSKA, I. (1973) The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*. Vol 27. p. 221–228.
6. WRIGGERS, P. (2006) *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

7. LAMICHHANE, B. P. (2006) *Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Lagrange Multiplier Spaces and Applications*. Stuttgart: Universitat Stuttgart.
8. Зарубин, В. С., Кувыркин, Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. — 512 с.
ZARUBIN, V. S., KUVYRKIN, G. N. (2008) *Mathematical models of continuum mechanics and electrodynamics*. Moscow: BMSTU Publ..
9. Котович, А. В., Станкевич, И. В. Решение задач теории упругости методом конечных элементов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 112 с.
KOTOVICH, A. V., STANKEVICH, I. V. (2012) *Solution of the problems of the elasticity theory by the finite element method*. Moscow: BMSTU Publ..
10. Розин, Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977. — 129 с.
ROZIN, L. A. (1977) *The finite element method applied to elastic systems*. Moscow: Stroizdat Publ..
11. Розин, Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. — 222 с.
ROZIN, L. A. (1978) *Variational formulations of problems for elastic systems*. Leningrad: Leningrad University Publ..
12. Зенкевич, О., Морган, К. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ.. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
ZENKEVICH, O., MORGAN, K. (1986) *Finite elements and approximation: transl. from English*. Moscow: Mir Publ..
13. Гуреева, Н. А., Клочков, Ю. В., Николаев, А. П. Применение МКЭ в смешанной формулировке для прочностных расчетов инженерных сооружений АПК // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: наука и высшее профессиональное образование. — 2009. — № 2. — С. 123–129.
GUREEVA, N. A., KLOCHKOV, YU. V., NIKOLAEV, A. P. (2009) Application of FEM in a mixed formulation for strength calculations of engineering structures of the agroindustrial complex. *Proceedings of Nizhnevolzhskiy agrouniversity complex: science and higher vocational education*. No. 2. p. 123–129.
14. WOHLMUTH, B. I. (2000) A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 38 (No. 3). p. 989–1012.

15. Станкевич, И. В., Аронов, П. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода // Математика и математическое моделирование. — 2018. — № 3. — С. 26–44.
Stankevich, I. V., Aronov, P. S. (2018) Mathematical Modeling Mortar-method of Contact Interaction between Two Elastic Bodies. *Mathematics and Mathematical Modeling*. (No. 3). p. 26-44.
16. Быченков, Ю. В., Чижонков Е. В. Итерационные методы решения седловых задач. — М.: БИНОМ, 2010. — 349 с.
BYCHENKOV, YU. V., CHIZHONKOV, E. V. (2010) *Iterative methods for solving saddle problems*. Moscow: BINOM.
17. Цвик, Л. Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. — 1980. — Т. 16. № 1. — С. 13–18.
CVICK, L. B. (1980) The principle of alternation in problems of conjugation and contact of solid deformable bodies. *Applied Mechanics*. Vol. 16, No. 1. p. 13–18.
18. Галанин, М. П., Глизнуцина П. В., Лукин В. В., Родин А. С. Исследование сходимости метода Шварца при решении плоской контактной задачи. — М.: РАН, 2017. — 40 с.
GALANIN, M. P., GLIZNUTSINA, P. V., LUKIN, V. V., RODIN, A. S. (2017) *Investigation of the convergence of the Schwartz method for solving a flat contact problem*. Moscow: RAS.

УДК: 517.983

MSC2010: 47A06, 47A10, 34B27

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© В. М. Брук

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ГАГАРИНА Ю.А.
ПОЛИТЕХНИЧЕСКАЯ, 77, САРАТОВ, 410054, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: vladislavbruk@mail.ru

ON SELF-ADJOINT EXTENSIONS OF LINEAR RELATIONS GENERATED BY INTEGRAL EQUATIONS.

Bruk V. M.

Abstract. In the present work, we consider the integral equation

$$y(t) = x_0 - iJ \int_{[a,t]} d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ \int_{[a,t]} d\mathbf{m}(s)f(s),$$

where $t \in [a, b]$, $b > a$; y is a unknown function; \mathbf{p} , \mathbf{m} are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta \subset [a, b]$ and taking values in the set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space H ; J is a linear operator in H , $J = J^*$, $J^2 = E$. We assume that \mathbf{p} , \mathbf{m} are measures with bounded variations; \mathbf{p} is a self-adjoint measure; \mathbf{m} is a continuous measure; $x_0 \in H$; a function $f \in L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$. We define a minimal relation L_0 generated by this integral equation and give a description of the adjoint relation L_0^* . We construct a space of boundary values (a boundary triplet) under the condition that the measure \mathbf{p} has single-point atoms $\{t_k\}$ such that $t_k < t_{k+1}$ and $t_k \rightarrow b$ as $k \rightarrow \infty$. We use the obtained results to a description of self-adjoint extensions of the minimal relation L_0 .

Keywords: Hilbert space, integral equation, operator measure, linear relation, symmetric relation, self-adjoint extension, boundary value.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении расширений операторов, порожденных дифференциальными выражениями, часто возникает задача: выделить граничные условия, которые порождают расширения с некоторыми заданными свойствами; например, выделить граничные

условия, порождающие самосопряженные расширения минимального симметрического оператора. При решении этой задачи в статье Ф. С. Рофе–Бекетова [1] впервые были использованы линейные отношения. Эта работа стимулировала появление многочисленных статей, обобщающих результаты [1] в различных направлениях. Среди них отметим статьи [2, 3] (см. также [4]), где введены абстрактные пространства граничных значений.

В данной работе строится пространство граничных значений (граничная тройка в другой терминологии) для интегрального уравнения с операторными мерами. На отрезке $[a, b]$ рассматривается интегральное уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ \int_{[a,t]} d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ \int_{[a,t]} d\mathbf{m}(s)f(s), \quad (1)$$

где $t \in [a, b]$; y — неизвестная функция; \mathbf{p} , \mathbf{m} — операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ и принимающие значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H ; $x_0 \in H$; J — линейный оператор в H , $J = J^*$, $J^2 = E$. Предполагается, что меры \mathbf{p} , \mathbf{m} имеют ограниченные вариации; \mathbf{p} — самосопряженная мера; \mathbf{m} — непрерывная мера; функция $f \in L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$.

В случае, если меры \mathbf{p} , \mathbf{m} абсолютно непрерывны, уравнение (1) переходит в дифференциальное уравнение с неотрицательной весовой операторной функцией. Такие дифференциальные уравнения, вообще говоря, порождают линейные отношения (многозначные операторы). Эти линейные отношения изучались во многих работах (см. [5–7], дальнейшая библиография приведена, например, в [8]).

В данной работе определяется минимальное отношение, порожденное интегральным уравнением (1). Дается описание сопряженного отношения L_0^* в предположении, что мера \mathbf{p} имеет одноточечные атомы t_k , которые можно расположить в виде возрастающей последовательности $t_k < t_{k+1}$ и $t_k \rightarrow b$ при $k \rightarrow \infty$. Далее строится пространство граничных значений (граничная тройка) отношения L_0 и в терминах граничных значений дается описание самосопряженных расширений L_0 . В доказательствах существенно используется теорема о решении интегрального уравнения с операторной мерой из [9] и аналог формулы Лагранжа из [10], который учитывает наличие одноточечных атомов в операторных мерах. Если в уравнении (1) \mathbf{m} является “обычной”, мерой Лебега (т. е. $\mathbf{m}([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$ при всех $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$), то отношение L_0 является оператором. В этом случае при условии, что мера \mathbf{p} имеет конечное число одноточечных атомов, описание самосопряженных расширений оператора L_0 приведено в [10].

1. РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \rightarrow \mathbf{P}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H . Функция \mathbf{P} называется операторной мерой на $[a, b]$ (см., например, [11, гл. 5]), если \mathbf{P} равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру \mathbf{P} , определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a, b_0] \supset [a, b] \supset [a, b]$, полагая $\mathbf{P}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a, b_0] \setminus [a, b]$.

Положим $\mathbf{V}_{\Delta}(\mathbf{P}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_k \|\mathbf{P}(\Delta_k)\|$, где \sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_k \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_{\Delta}(\mathbf{P})$ называется вариацией меры \mathbf{P} на множестве Δ . Пусть \mathbf{P} имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Тогда для ρ -почти всех $\xi \in [a, b]$ существует такая операторная функция $\xi \rightarrow \Psi_{\mathbf{P}}(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H , $\|\Psi_{\mathbf{P}}(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(\Delta) = \int_{\Delta} \Psi_{\mathbf{P}}(\xi) d\rho. \quad (2)$$

Этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов, а функция $\Psi_{\mathbf{P}}$ определена однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ -меры [11, гл. 5].

Далее символ $\int_{t_0}^t$ обозначает $\int_{[t_0, t]}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t, t_0]}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Функция h интегрируема по мере \mathbf{P} на множестве Δ , если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int_{\Delta} \Psi_{\mathbf{P}}(t) h(t) d\rho = \int_{\Delta} (d\mathbf{P}) h(t)$. Если функция h интегрируема по мере \mathbf{P} на $[a, b_0]$, то функция $y(t) = \int_{t_0}^t (d\mathbf{P}) h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле.

Через $\mathcal{S}_{\mathbf{P}}$ обозначим множество одноточечных атомов меры \mathbf{P} (т.е. множество таких $t \in [a, b]$, что $\mathbf{P}(\{t\}) \neq 0$). Множество $\mathcal{S}_{\mathbf{P}}$ не более чем счетно. Мера \mathbf{P} непрерывная, если $\mathcal{S}_{\mathbf{P}} = \emptyset$; самосопряженная, если $(\mathbf{P}(\Delta))^* = \mathbf{P}(\Delta)$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$; неотрицательная, если для любого борелевского множества $\Delta \subset [a, b]$ и любого элемента $x \in H$ выполняется неравенство $(\mathbf{P}(\Delta)x, x) \geq 0$.

В следующей лемме $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}$ — операторные меры, имеющие ограниченные вариации на $[a, b]$, принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в H , причем мера \mathbf{q} самосопряженная. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}$ продолжены на отрезок $[a, b_0] \supset [a, b] \supset [a, b]$ описанным выше способом.

Лемма 1. [10] Пусть f, g — функции интегрируемые на $[a, b_0]$ по мере \mathbf{q} ; $y_0, z_0 \in H$. Тогда для любых функций y, z вида

$$y(t) = y_0 - iJ \int_{t_0}^t d\mathbf{p}_1(s)y(s) - iJ \int_{t_0}^t d\mathbf{q}(s)f(s),$$

$$z(t) = z_0 - iJ \int_{t_0}^t d\mathbf{p}_2(s)z(s) - iJ \int_{t_0}^t d\mathbf{q}(s)g(s) \quad (a \leq t_0 < b_0, \quad t_0 \leq t \leq b_0)$$

справедлива формула (аналог формулы Лагранжа):

$$\begin{aligned} & \int_{c_1}^{c_2} (d\mathbf{q}(t)f(t), z(t)) - \int_{c_1}^{c_2} (y(t), d\mathbf{q}(t)g(t)) = (iJy(c_2), z(c_2)) - (iJy(c_1), z(c_1)) + \\ & + \int_{c_1}^{c_2} (y(t), d\mathbf{p}_2(t)z(t)) - \int_{c_1}^{c_2} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), z(t)) - \sum_{t \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}_1} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{p}_2} \cap [c_1, c_2]} (iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t), \mathbf{p}_2(\{t\})z(t)) - \\ & - \sum_{t \in \mathcal{S}_{\mathbf{q}} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{p}_2} \cap [c_1, c_2]} (iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t), \mathbf{p}_2(\{t\})z(t)) - \sum_{t \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}_1} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{q}} \cap [c_1, c_2]} (iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t), \mathbf{q}(\{t\})g(t)) - \\ & - \sum_{t \in \mathcal{S}_{\mathbf{q}} \cap [c_1, c_2]} (iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t), \mathbf{q}(\{t\})g(t)), \quad t_0 \leq c_1 < c_2 \leq b_0. \quad (3) \end{aligned}$$

Пусть отрезок $[l_1, l_2] \subset [a, b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H , ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева на $(l_1, l_2]$ и постоянных на $[l_1, l_2] \cap (b, b_0]$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1, l_2]} = \sup_{t \in [l_1, l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\tilde{C}[l_1, l_2]$.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int_{t_0}^t d\mathbf{p}(\xi)y(\xi) + g(t), \quad a \leq t_0 \leq b_0, \quad (4)$$

где мера \mathbf{p} имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ (как и выше, полагаем $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b, b_0]$). Следующая теорема доказана в [9].

Теорема 1. Для любой функции $g \in \tilde{C}[a, b_0]$ существует единственное решение уравнения (4), принадлежащее пространству $\tilde{C}[t_0 - \delta, b_0]$, где $\delta = \delta(t_0) > 0$ достаточно мало и $\delta = 0$ при $t_0 = a$.

Следствие 1. Пусть $t_0 = a$. Тогда для любой функции $g \in \tilde{C}[a, b_0]$ уравнение (4) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\tilde{C}[a, b_0]$.

Замечание 1. При $t < t_0$ решение уравнения (4) может быть не единственным. Кроме того, решение может не продолжаться влево. Примеры приведены в [9].

Лемма 2. Пусть в уравнении (4) мера \mathbf{p} непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Тогда для любой функции $g \in \tilde{C}[a, b_0]$ уравнение (4) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\tilde{C}[a, b_0]$.

Доказательство. Обозначим $\mathcal{I}_{\delta, t_0} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, где $\delta > 0$, $t_0 - \delta \geq a$, $t_0 + \delta \leq b_0$ и $\mathcal{I}_{\delta, a} = [a, a + \delta]$, $\mathcal{I}_{\delta, b_0} = [b_0 - \delta, b_0]$. Из определения вариации $\mathbf{V}_{\Delta}(\mathbf{p}) = \rho(\Delta)$ следует, что меры \mathbf{p} и ρ одновременно непрерывны или нет. Обозначим через $\hat{\rho}$ непрерывную на $[a, b_0]$ функцию, порождающую меру ρ . В теореме 1 установлено существование и единственность решения уравнения (4) на отрезке $[t_0 - \delta(t_0), b_0]$. Докажем, что решение можно продолжить влево вплоть до точки a . Для этого достаточно установить, что если решение u существует на интервале $(c, t_0 + \delta(t_0))$, где $c > a$, то u можно расширить на интервал $[c_1, t_0 + \delta(t_0)]$, where $c_1 < c$.

Обозначим $t'_0 = c$. Из непрерывности функции $\hat{\rho}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(t'_0) > 0$, что выполняется неравенство $|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t'_0)| < \varepsilon$ при всех $t \in \mathcal{I}_{\delta, t'_0}$. Для $\varepsilon < 1/4$ выберем соответствующее $\delta > 0$ ($t'_0 - \delta \geq a$, если $t'_0 > a$) и зафиксируем $t_1 = t'_0 + \delta/8$. Тогда для всех t таких, что $|t - t_1| \leq \delta/2$, выполняется неравенство

$$|\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t_1)| \leq |\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t'_0)| + |\hat{\rho}(t'_0) - \hat{\rho}(t_1)| < 2\varepsilon < 1/2. \quad (5)$$

Введем оператор B в пространстве $\tilde{C}(\mathcal{I}_{\delta/2, t_1})$ равенством

$$(By)(t) = \int_{t_1}^t d\mathbf{p}(\xi)y(\xi) = \int_{t_1}^t \Psi_{\mathbf{p}}(\xi)y(\xi)d\hat{\rho}(\xi).$$

Из (5) следует, что $\sup_{t \in \mathcal{I}_{\delta/2, t_1}} \|(By)(t)\| \leq (1/2) \sup_{t \in \mathcal{I}_{\delta/2, t_1}} \|y(t)\|$. Поэтому оператор $E-B$ имеет всюду определенный обратный в пространстве $\tilde{C}(\mathcal{I}_{\delta/2, t_1})$. Обозначим $v = (E - B)^{-1}z_1$, где $z_1(t) = u(t_1) - g(t_1) + g(t)$. Тогда для всех $t \in [t_1 - \delta/2, t_1]$ выполняется равенство

$$v(t) = \int_{t_1}^t \Psi_{\mathbf{p}}(\xi)v(\xi)d\hat{\rho}(\xi) + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \quad (6)$$

Функция u является решением уравнения (4) на $(t'_0, t_0 + \delta(t_0))$. Следовательно,

$$u(t) = \int_{t_0}^t (d\mathbf{p})u(\xi) + g(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int_{t_1}^t (d\mathbf{p})u(\xi) + g(t), \quad (7)$$

где $t'_0 < t \leq t_0 + \delta$. Из (6), (7) и единственности решения интегрального уравнения в пространстве $\tilde{C}(\mathcal{I}_{\delta/2, t_1})$ вытекает что функции u, v совпадают на интервале $(t'_0, t_1]$. Таким образом, функция v является продолжением u на интервал $[t'_0 - (3/8)\delta(t'_0), t_0 + \delta(t_0)]$. Из приведенного доказательства следует единственность продолжения. Лемма доказана. \square

Далее предполагается, что меры \mathbf{p}, \mathbf{m} имеют ограниченные вариации, мера \mathbf{p} самосопряженная, а мера \mathbf{m} непрерывная и неотрицательная. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ \int_a^t d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s), \quad (8)$$

где J — линейный оператор в H , $J = J^*$, $J^2 = E$; f интегрируема по мере \mathbf{m} ; $x_0 \in H$.

По мере \mathbf{p} построим непрерывную меру \mathbf{p}_0 следующим образом. Для всех $t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ полагаем $\mathbf{p}_0(\{t_k\}) = 0$, а для всех борелевских множеств Δ таких, что $\Delta \cap \mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \emptyset$, полагаем $\mathbf{p}_0(\Delta) = \mathbf{p}(\Delta)$. Мера \mathbf{p}_0 самосопряженная.

Рассмотрим уравнение, которое получается из (8) заменой меры \mathbf{p} на \mathbf{p}_0 ,

$$y(t) = x_0 - iJ \int_a^t d\mathbf{p}_0(s)y(s) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s). \quad (9)$$

Согласно следствию 1 уравнения (8), (9) имеют единственные решения.

Обозначим через W операторное решение уравнения

$$W(t, \lambda)x_0 = x_0 - iJ \int_a^t d\mathbf{p}_0(\xi)W(\xi, \lambda)x_0 - i\lambda J \int_a^t d\mathbf{m}(\xi)W(\xi, \lambda)x_0, \quad (10)$$

где $x_0 \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. В лемме 1 возьмем $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \lambda\mathbf{m}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 + \bar{\lambda}\mathbf{m}$, $\mathbf{q} = \mathbf{m}$, $f = g = 0$, $y(t) = W(t, \lambda)x_0$, $z(t) = W(t, \bar{\lambda})z_0$, $z_0 \in H$. Учитывая самосопряженность и непрерывность мер \mathbf{p}_0 и \mathbf{m} , получим для всех c_1, c_2 ($a \leq c_1 \leq c_2 \leq b_0$) равенство

$$(iJW(c_2, \lambda)x_0, W(c_2, \bar{\lambda})z_0) - (iJW(c_1, \lambda)x_0, W(c_1, \bar{\lambda})z_0) = 0.$$

Полагая здесь $c_2 = t$, $c_1 = a$ и учитывая произвольность $x_0, z_0 \in H$, будем иметь

$$W^*(t, \bar{\lambda})JW(t, \lambda) = J. \quad (11)$$

Функция $(t, \lambda) \rightarrow W(t, \lambda)$ непрерывна по t в равномерной операторной топологии и голоморфна по λ .

Лемма 3. Функция y тогда и только тогда является решением уравнения

$$y(t) = x_0 - iJ \int_a^t d\mathbf{p}_0(s)y(s) - i\lambda J \int_a^t d\mathbf{m}(s)y(s) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s), \quad (12)$$

где $x_0 \in H$, $a \leq t \leq b_0$, когда y имеет вид

$$y(t) = W(t, \lambda)x_0 - W(t, \lambda)iJ \int_a^t W^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi). \quad (13)$$

Доказательство. Из следствия 1 следует, что решение уравнения (12) единственно. При $t = a$ правые части (12), (13) равны x_0 . Обозначим $\tilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0 + \lambda\mathbf{m}$. Для доказательства требуемого утверждения нужно убедиться в том, что при подстановке правой части равенства (13) вместо y в уравнение (12) получается тождество. При такой подстановке правая часть (12) примет вид

$$\begin{aligned} & x_0 - iJ \int_a^t d\tilde{\mathbf{p}}_0(s) \left(W(s, \lambda)x_0 - W(s, \lambda)iJ \int_a^s W^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) \right) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s) = \\ & = x_0 - iJ \int_a^t d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda)x_0 - J \int_a^t d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda)J \int_a^s W^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s). \end{aligned} \quad (14)$$

Сменим пределы интегрирования в третьем слагаемом в правой части (14). Получим

$$\begin{aligned} & J \int_a^t d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda)J \int_a^s W^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) = \\ & = J \int_{[a,t)} \left(\int_{(\xi,t)} d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda) \right) JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) = \\ & = J \int_{[a,t)} \left(\int_{[\xi,t)} d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda) \right) JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - \\ & \quad - J \int_{[a,t)} \left(\int_{\{\xi\}} d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda) \right) JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi). \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее слагаемое в (15) равно нулю, так как меры \mathbf{p}_0 , \mathbf{m} непрерывны. Отсюда, учитывая (10), продолжаем равенство (14)

$$W(t, \lambda)x_0 - \int_a^t J \left(\int_a^t d\tilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s, \lambda) \right) JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s).$$

Из (10) следует, что это выражение равно

$$\begin{aligned} W(t, \lambda)x_0 - \int_a^t i((W(t, \lambda) - E) - (W(\xi, \lambda) - E))JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s) = \\ = W(t, \lambda)x_0 - i \int_a^t W(t, \lambda)JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) + \\ + i \int_a^t W(\xi, \lambda)JW^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s). \end{aligned}$$

Учитывая (11), продолжим последнее равенство

$$W(t, \lambda)x_0 - iW(t, \lambda)J \int_a^t W^*(\xi, \bar{\lambda})d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) + iJ \int_a^t d\mathbf{m}(\xi)f(\xi) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s) = y(t).$$

Теорема доказана. \square

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Пусть \mathbf{H} — гильбертово пространство. Линейным отношением в \mathbf{H} называется любое линейное многообразие $T \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Терминологию, связанную с линейными отношениями, можно найти, например, в [12], [4]. Далее используются следующие обозначения: $\{\cdot, \cdot\}$ — упорядоченная пара; $\ker T$ — множество элементов $x \in \mathbf{H}$ таких, что $\{x, 0\} \in T$; $\mathcal{D}(T)$ — область определения T ; $\mathcal{R}(T)$ — область значений. Сопряженным к отношению T называется отношение T^* , состоящее из таких пар $\{y, y'\}$, для которых равенство $(x', y) = (x, y')$ выполняется при всех $\{x, x'\} \in T$. Отношение T называется симметрическим, если $T \subset T^*$, и самосопряженным, если $T = T^*$. Линейные операторы считаются линейными отношениями, поэтому обозначение $\{x_1, x_2\} \in T$ используется для оператора T . Поскольку все рассматриваемые отношения являются линейными, слово “линейное”, будет опускаться.

На множестве непрерывных на отрезке $[a, b_0]$ функций, принимающих значения в H , вводим квазискалярное произведение

$$(x, y)_{\mathbf{m}} = \int_a^{b_0} ((d\mathbf{m})x(t), y(t)).$$

Отождествляя с нулем функции y , для которых $(y, y)_{\mathbf{m}} = 0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство, обозначаемое $\mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$. Элементы \mathfrak{H} — это классы функций, отождествленных между собой по норме $\|y\|_{\mathbf{m}} = (y, y)_{\mathbf{m}}^{1/2}$. Класс функций с представителем y обозначаем тем же символом и пишем $y \in \mathfrak{H}$. Равенства между функциями из \mathfrak{H} понимаются как равенства соответствующих классов эквивалентности. Описание пространства \mathfrak{H} имеется в [13] (см. библиографию там).

Определим минимальное отношение L_0 следующим образом. Отношение L_0 состоит из пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, для каждой из которых существует пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, удовлетворяющая уравнению (8) и граничным условиям

$$y(a) = y(b_0) = y(t_k) = 0, \quad t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}. \quad (16)$$

Отношение L_0 , вообще говоря, не будет оператором, так как может случиться, что функция y отождествлена с нулем в \mathfrak{H} , а f отлична от нуля. Из леммы 1 следует, что отношение L_0 симметрическое.

Лемма 4. Для любой пары $\{y, f\} \in L_0$ равенства (8), (9) выполняются одновременно.

Доказательство. Положим $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$. Тогда $\mathbf{p}_1(\{t_k\}) = \mathbf{p}(\{t_k\})$, $t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{p}_1(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества Δ такого, что $\Delta \cap \mathcal{S}_{\mathbf{p}} = \emptyset$. Из (8) следует

$$y(t) = x_0 - iJ \int_a^t (d\mathbf{p}_0)y(s) - iJ \int_a^t (d\mathbf{p}_1)y(s) - iJ \int_a^t d\mathbf{m}(s)f(s).$$

Теперь равенства (16) влекут требуемое утверждение. □

Из леммы 4 и равенств $\mathbf{m}(\{a\}) = \mathbf{m}([b, b_0]) = 0$ следует, что отношение L_0 не зависит от того, имеет ли мера \mathbf{p} в точках a, b одноточечные атомы. Поэтому, без ограничения общности, при изучении отношений L_0, L_0^* можно считать, что $b_0 = b$.

Лемма 5. Отношение L_0 замкнуто. Отношение $L_0 - \lambda E$ состоит из тех и только тех пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, для каждой из которых существует такая пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, что выполняются равенства

$$y(t) = -W(t, \lambda) iJ \int_a^t W^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s), \quad y(t_k) = W(t_k, \lambda) iJ \int_a^{t_k} W^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s) = 0, \quad (17)$$

где $t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b\}$.

Доказательство. Равенства (17) следуют из лемм 3, 4 и (16). Докажем, что отношение L_0 замкнуто. Пусть последовательности $\{y_n\}, \{f_n\}$ сходятся в \mathfrak{H} к y, f соответственно и $\{y_n, f_n\} \in L_0$. Тогда

$$y_n(t) = -W(t, 0) iJ \int_a^t W^*(s, 0) d\mathbf{m}(s) f_n(s), \quad y_n(t_k) = W(t_k, 0) iJ \int_a^{t_k} W^*(s, 0) d\mathbf{m}(s) f_n(s) = 0,$$

где $t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b\}$. Переходя в последних равенствах к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим, что $\{y, f\} \in L_0$. Лемма доказана. \square

Следствие 2. Область значений отношения $L_0 - \lambda E$ состоит из функций $f \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих при всех $t_k \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b\}$ условию

$$\int_a^{t_k} W^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s) = 0. \quad (18)$$

Замечание 2. Равенства (18) эквивалентны следующим

$$\int_{t_j}^{t_k} W^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s) = 0, \quad t_k, t_j \in \mathcal{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b\}. \quad (19)$$

Далее предположим, что множество $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ одноточечных атомов $\{t_k\}$ может быть упорядочено в виде $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ и предельной точкой является b . Символом χ_k обозначаем характеристическую функцию интервала $[t_{k-1}, t_k)$.

Обозначим $w_k(t, \lambda) = \chi_k(t) W(t, \lambda) W^{-1}(t_{k-1}, \lambda)$, $t_0 = a$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $Q_{k,0}$ множество таких $x \in H$, для которых функция $t \rightarrow w_k(t, 0)$ отождествлена с нулем в \mathfrak{H} . Из равенства

$$\chi_k(t) W(t, 0) x = \chi_k(t) W(t, \lambda) x + \chi_k(t) \lambda W(t, \lambda) iJ \int_{t_{k-1}}^t W^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) W(s, 0) x, \quad (20)$$

которое следует из леммы 3, получим, что множество $Q_{k,0}$ не изменится, если в его определении $w_k(t, 0)$ заменить на $w_k(t, \lambda)$.

Положим $Q_k = H \ominus Q_{k,0}$. На линейном многообразии Q_k введем норму равенством

$$\|\xi_k\|_- = \|w_k(\cdot, 0) \xi_k\|_{\mathfrak{H}} = \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} ((d\mathbf{m}) w_k(s, 0) \xi_k, w_k(s, 0) \xi_k) \right)^{1/2}, \quad \xi_k \in Q_k. \quad (21)$$

Пополнение Q_k по норме (21) обозначим Q_k^- . Из (20) вытекает, что замена в (21) $w(t, 0)$ на $w(t, \lambda)$ приводит к тому же множеству Q_k^- с эквивалентной нормой. Норма

(21) порождается скалярным произведением $(\xi_k, \eta_k)_- = (w_k(\cdot, 0)\xi_k, w_k(\cdot, 0)\eta_k)_{\mathfrak{H}}$. Из формулы (2), в которой мера \mathbf{P} заменена на \mathbf{m} , получим

$$\|\xi_k\|_- \leq \gamma \|\xi_k\|, \quad \gamma > 0, \quad \xi_k \in Q_k. \quad (22)$$

Из (22) следует, что пространство Q_k^- можно рассматривать как пространство с негативной нормой относительно Q_k ([11, гл. 1], [4, гл. 2]). Соответствующее пространство с позитивной нормой обозначим Q_k^+ . Из определения пространств с позитивной и негативной нормами следует, что $Q_k^+ \subset Q_k$. Скалярное произведение и норму в Q_k^+ обозначаем $(\cdot, \cdot)_+$ и $\|\cdot\|_+$ соответственно.

Предположим, что последовательность $\{x_{kn}\}$ сходится в пространстве Q_k^- к элементу $x_0 \in Q_k^-$. Тогда последовательность $\{w(\cdot, \lambda)x_{kn}\}$ фундаментальна в \mathfrak{H} и, следовательно, сходится к некоторому элементу из \mathfrak{H} . Через $w_k(\cdot, \lambda)x_0$ обозначим этот элемент. Пусть $\tilde{Q}_n^- = Q_1^- \times \dots \times Q_n^-$ ($\tilde{Q}_n^+ = Q_1^+ \times \dots \times Q_n^+$) — декартово произведение первых n множеств Q_k^- (Q_k^+ соответственно); $W_n(t, \lambda) = (w_1(t, \lambda), \dots, w_n(t, \lambda))$ — операторная однострочная матрица. При фиксированных λ и \mathbf{m} -почти всех t оператор $W_n(t, \lambda)$ отображает \tilde{Q}_n^- в H . Удобно рассматривать элементы из \tilde{Q}_n^- как одностолбцовые матрицы, при этом $W_n(t, \lambda)\tilde{\xi}_n = \sum_{k=1}^n w_k(t, \lambda)\xi_k$, где $\tilde{\xi}_n = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \tilde{Q}_n^-$, $\xi_k \in Q_k^-$.

Пусть $\ker_k(\lambda)$ — линейное пространство функций вида $t \rightarrow w_k(t, \lambda)\xi_k$, $\xi_k \in Q_k^-$. Пространство $\ker_k(\lambda)$ замкнуто в \mathfrak{H} и $\ker_k(\lambda)$, $\ker_j(\lambda)$ ортогональны при $k \neq j$. Обозначим $\mathcal{K}_n(\lambda) = \ker_1(\lambda) \oplus \dots \oplus \ker_n(\lambda)$. Очевидно, $\mathcal{K}_n(\lambda) \subset \mathcal{K}_m(\lambda)$, если $n < m$.

Лемма 6. Множество $\cup_n \mathcal{K}_n(\lambda)$ плотно в $\ker(L_0^* - \lambda E)$.

Доказательство. Из следствия 2 и (19) вытекает, что область значений $\mathcal{R}(L_0 - \bar{\lambda}E)$ состоит из функций $f \in \mathfrak{H}$, ортогональных функциям вида $w_k(\cdot, \lambda)\xi_k$, где $\xi_k \in H$, $k \in \mathbb{N}$. Равенство $\ker(L_0^* - \lambda E) \oplus \mathcal{R}(L_0 - \bar{\lambda}E) = \mathfrak{H}$ влечет требуемое утверждение. Лемма доказана. \square

Оператор $\tilde{\xi}_n \rightarrow W_n(\cdot, \lambda)\tilde{\xi}_n$ ($\tilde{\xi}_n \in \tilde{Q}_n^-$) обозначим $\mathcal{W}_n(\lambda)$. Этот оператор непрерывно и взаимно однозначно отображает \tilde{Q}_n^- на $\mathcal{K}_n(\lambda) \subset \mathfrak{H}$. Поэтому сопряженный оператор $\mathcal{W}_n^*(\lambda)$ непрерывно отображает \mathfrak{H} на \tilde{Q}_n^+ . Найдем вид $\mathcal{W}_n^*(\lambda)$. Для всех $\tilde{\xi}_n \in H^n$, $f \in \mathfrak{H}$ имеем

$$(f, \mathcal{W}_n(\lambda)\tilde{\xi}_n)_{\mathfrak{H}} = \int_a^b (d\mathbf{m}(s)f(s), W_n(s, \lambda)\tilde{\xi}_n) = \int_a^b (W_n^*(s, \lambda)d\mathbf{m}(s)f(s), \tilde{\xi}_n) = (\mathcal{W}_n^*(\lambda)f, \tilde{\xi}_n).$$

Учитывая, что H^n плотно в \tilde{Q}_n^- , получим

$$\mathscr{W}_n^*(\lambda)f = \int_a^b W_n^*(s, \lambda) d\mathbf{m}(s) f(s). \quad (23)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 7. *Оператор $\mathscr{W}_n(\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает \tilde{Q}_n^- на $\mathscr{K}_n(\lambda)$. Сопряженный оператор $\mathscr{W}_n^*(\lambda)$ непрерывно отображает \mathfrak{H} на \tilde{Q}_n^+ и действует по формуле (23). Кроме того, $\mathscr{W}_n^*(\lambda)$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_n(\lambda)$ на \tilde{Q}_n^+ .*

Пусть $\mathscr{Q}_-, \mathscr{Q}_+, \mathscr{Q}$ — линейные пространства последовательностей $\tilde{\tau} = \{\tau_k\}$, $\tilde{\varphi} = \{\varphi_k\}$, $\tilde{\xi} = \{\xi_k\}$, соответственно, для которых сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \|\tau_k\|_-^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_+^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2$, где $\tau_k \in Q_k^-, \varphi_k \in Q_k^+, \xi_k \in Q_k$. Эти пространства являются гильбертовыми относительно скалярных произведений

$$(\tilde{\tau}, \tilde{\eta})_- = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \eta_k)_-, \quad \tilde{\tau}, \tilde{\eta} \in \mathscr{Q}_-, \quad (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})_+ = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, \psi_k)_+, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathscr{Q}_+,$$

$$(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k, \zeta_k), \quad \tilde{\xi}, \tilde{\zeta} \in \mathscr{Q}.$$

Нормы в этих пространствах определяются равенствами

$$\|\tilde{\tau}\|_-^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\tau_k\|_-^2, \quad \|\tilde{\varphi}\|_+^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_+^2, \quad \|\tilde{\xi}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2.$$

Пространства $\mathscr{Q}_+, \mathscr{Q}_-$ можно рассматривать как пространства с положительной и отрицательной нормами относительно \mathscr{Q} ([11, гл.1], [4, гл.2]). Таким образом, $\mathscr{Q}_+ \subset \mathscr{Q} \subset \mathscr{Q}_-$ и $\alpha \|\tilde{\varphi}\|_- \leq \|\tilde{\varphi}\| \leq \beta \|\tilde{\varphi}\|_+$, где $\tilde{\varphi} \in \mathscr{Q}_+, \alpha, \beta > 0$. Для всех $\tilde{\varphi} \in \mathscr{Q}_+, \tilde{\tau} \in \mathscr{Q}_-$ определено “скалярное произведение”, $(\tilde{\tau}, \tilde{\varphi})$. Если $\tilde{\tau} \in \mathscr{Q}$, то $(\tilde{\tau}, \tilde{\varphi})$ совпадает со скалярным произведением в Q .

Пусть $\mathscr{T} \subset \mathscr{Q}_-$ — множество последовательностей, обращающихся в нуль, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности). Это множество плотно в \mathscr{Q}_- . Оператор $\mathscr{W}_n(\lambda)$ является сужением $\mathscr{W}_{n+1}(\lambda)$ на \tilde{Q}_n^- . Символом $\mathscr{W}'(\lambda)$ обозначим оператор в \mathscr{T} такой, что $\mathscr{W}'(\lambda)\tilde{\tau} = \mathscr{W}_n(\lambda)\tilde{\tau}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_n, 0, \dots)$. Из (21) следует, что $\mathscr{W}'(\lambda)$ допускает расширение по непрерывности на все пространство \mathscr{Q}_- . Расширенный оператор обозначаем $\mathscr{W}(\lambda)$. Этот оператор взаимно однозначно отображает \mathscr{Q}_- на $\ker(L_0^* - \lambda E) \subset \mathfrak{H}$. Кроме того, обозначим $\tilde{W}(t, \lambda)\tilde{\tau} = (\mathscr{W}(\lambda)\tilde{\tau})(t)$, где $\tilde{\tau} = \{\tau_k\} \in \mathscr{Q}_-$.

Сопряженный оператор $\mathscr{W}^*(\lambda)$ отображает непрерывно \mathfrak{H} на \mathscr{Q}_+ . Найдем вид оператора $\mathscr{W}^*(\lambda)$. Пусть $f \in \mathfrak{H}, \tilde{\xi} \in \mathscr{T}, \tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_n, 0, \dots\}$. Тогда

$$(\tilde{\xi}, \mathcal{W}^*(\lambda)f) = (\mathcal{W}(\lambda)\tilde{\xi}, f)_{\mathfrak{H}} = \int_a^b (d\mathbf{m}(t)\tilde{W}(t, \lambda)\tilde{\xi}, f(t)) = \int_a^b (\tilde{\xi}, \tilde{W}^*(t, \lambda)d\mathbf{m}(t)f(t)).$$

Учитывая плотность множества \mathcal{T} в \mathcal{Q}_- , получим

$$\mathcal{W}^*(\lambda)f = \int_a^b \tilde{W}^*(t, \lambda)d\mathbf{m}(t)f(t). \tag{24}$$

Отсюда и лемм 6, 7 вытекает следующее утверждение.

Лемма 8. *Оператор $\mathcal{W}(\lambda)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает \mathcal{Q}_- на $\ker(L_0^* - \lambda E)$. Функция z тогда и только тогда принадлежит $\ker(L_0^* - \lambda E)$, когда существует такой элемент $\tilde{\tau} = \{\tau_k\} \in \mathcal{Q}_-$, что $z(t) = (\mathcal{W}(\lambda)\tilde{\tau})(t) = \tilde{W}(t, \lambda)\tilde{\tau}$. Оператор $\mathcal{W}^*(\lambda)$ непрерывно отображает \mathfrak{H} на \mathcal{Q}_+ , действует по формуле (24) и $\ker \mathcal{W}^*(\lambda) = \mathcal{R}(L_0 - \bar{\lambda}E)$. Кроме того, $\mathcal{W}^*(\lambda)$ взаимно однозначно отображает $\ker(L_0^* - \lambda E)$ на \mathcal{Q}_+ .*

Далее обозначаем $\tilde{W}(t, 0) = \tilde{W}(t)$, $w(t, \lambda) = w(t)$, $\mathcal{W}(0) = \mathcal{W}$.

Лемма 9. *Пусть $f \in \mathfrak{H}$ и функция \tilde{F}_{an} определена равенством*

$$\tilde{F}_{an}(t) = -W_n(t)i\tilde{J}_n \int_a^t W_n^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s). \tag{25}$$

Если функция f обращается в нуль на $(t_n, b]$, то $\{\tilde{F}_{an}, f\} \in L_0^$. Здесь \tilde{J}_n – оператор в H^n , действующий по формуле $\tilde{J}_n\tilde{\xi}_n = (J\xi_1, \dots, J\xi_n)$.*

Доказательство. Из (25) следует

$$\tilde{F}_{an}(t) = \sum_{k=1}^n F_k(t), \quad F_k(t) = -w_k(t)iJ \int_{t_{k-1}}^t w_k^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s).$$

Функция F_k непрерывна на интервале $[t_{k-1}, t_k)$ и обращается в нуль вне этого интервала. Мера \mathbf{m} непрерывна. Поэтому функция F_k не изменится в пространстве \mathfrak{H} , если ее изменить в одной точке. Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что функция F_k непрерывна слева в точке t_k . Тогда из леммы 3 получим, что F_k является на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ решением уравнения (9) (в котором $a = t_{k-1}$). Из леммы 4 следует, что всякая функция $y \in \mathcal{D}(L_0)$ является решением уравнения (9), в котором функция f заменена на $g = L_0y$. Поэтому можно применить формулу Лагранжа (3) к функциям y, g, F_k, f при $c_1 = t_{k-1}, c_2 = t_k, \mathbf{q} = \mathbf{m}, \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0$. Учитывая непрерывность и самосопряженность мер \mathbf{p}_0, \mathbf{m} , равенство $y(t_{k-1}) = y(t_k) = 0$,

получим

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(s), d\mathbf{m}(s)y(s)) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F_k(s), d\mathbf{m}(s)g(s)).$$

Отсюда следует, что $\{\tilde{F}_{an}, f\} \in L_0^*$, если $f(t) = 0$ при $t > t_n$. Лемма доказана. \square

Теорема 2. Пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению L_0^* , когда существует такая пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, что выполняется равенство

$$y(t) = \tilde{W}(t)\tilde{\tau} - \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) iJ \int_a^t w_k^*(s) d\mathbf{m}(s) f(s), \quad \tilde{\tau} = \{\tau_k\} \in \mathcal{Q}_-, \quad (26)$$

где ряд в (26) сходится в \mathfrak{H} .

Доказательство. Сначала докажем, что если функции y, f связаны равенством (26), то пара $\{y, f\} \in L_0^*$. Из леммы 8 следует, что $\mathscr{W}(\lambda)\tilde{\tau} \in \ker(L_0^* - \lambda E)$. Функция

$$z_k(t) = -w_k(t, \lambda) iJ \int_a^t w_k^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s) = -w_k(t, \lambda) iJ \int_{t_{k-1}}^t w_k^*(s, \bar{\lambda}) \Psi_{\mathbf{m}}(s) f(s) d\rho_{\mathbf{m}}(s) \quad (27)$$

обращается в нуль вне интервала $[t_{k-1}, t_k]$. (Здесь $\Psi_{\mathbf{m}}, \rho_{\mathbf{m}}$ — функции из формулы (2), в которой мера \mathbf{P} заменена на \mathbf{m} .) Обозначим $f_k(t) = \chi_k(t)f(t)$. Из (27) и (2) следует

$$\begin{aligned} \|z_k(t)\| &\leq \alpha \|w_k(t, \lambda)\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|w_k^*(s, \bar{\lambda})\| \|\Psi_{\mathbf{m}}^{1/2}(s) f_k(s)\| d\rho_{\mathbf{m}}(s) \leq \\ &\leq \beta \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\Psi_{\mathbf{m}}^{1/2}(s) f_k(s)\|^2 d\rho_{\mathbf{m}}(s) \right)^{1/2} = \beta \|f_k\|_{\mathfrak{H}}, \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|z_k\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\Psi_{\mathbf{m}}(t) z_k(t), z_k(t)) d\rho_{\mathbf{m}}(t) \leq \beta^2 \rho_{\mathbf{m}}([t_{k-1}, t_k]) \|f_k\|_{\mathfrak{H}}^2. \quad (28)$$

Обозначим $u_n(t) = \sum_{k=1}^n z_k(t)$ и докажем, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в \mathfrak{H} . Из (28) имеем

$$\|u_n\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_{k=1}^n \|z_k\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \beta^2 \sum_{k=1}^n \rho_{\mathbf{m}}([t_{k-1}, t_k]) \|f_k\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \beta^2 \rho_{\mathbf{m}}([a, b]) \|f\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ сходится к некоторой функции $u \in \mathfrak{H}$ и

$$u(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t, \lambda) iJ \int_a^t w_k^*(s, \bar{\lambda}) d\mathbf{m}(s) f(s), \quad \|u\|_{\mathfrak{H}} \leq \beta_1 \|f\|_{\mathfrak{H}}, \quad \beta_1 > 0. \quad (29)$$

Из леммы 9 вытекает, что пара $\{u_n, \sum_{k=1}^n f_k\} \in L_0^*$. Отношение L_0^* замкнуто. Поэтому $\{u, f\} \in L_0^*$.

Предположим теперь, что пара $\{\hat{y}, f\} \in L_0^*$. Для функции f находим функцию u по формуле (29). Тогда пара $\{u, f\} \in L_0^*$. Следовательно, $\hat{y} - u \in \ker L_0^*$. Лемма 8 влечет существование такого элемента $\tilde{\tau} \in \mathcal{Q}_-$, что $\hat{y} - u = \mathcal{W}\tilde{\tau}$. Поэтому \hat{y} имеет вид (26). Теорема доказана. \square

Эта теорема позволяет устранить ошибку, допущенную в [13] при доказательстве аналогичной теоремы.

Замечание 3. Равенство (26) можно записать в сокращенной форме

$$y(t) = \tilde{W}(t)\tilde{\tau} - \tilde{W}(t)i\tilde{J} \int_a^t \tilde{W}^*(s) d\mathbf{m}(s) f(s), \quad \tilde{\tau} \in \mathcal{Q}_- \quad f \in \mathfrak{H}, \quad (30)$$

где \tilde{J} — оператор в \mathcal{Q} , действующий по формуле $\tilde{J}\tilde{\xi} = \{J\xi_k\}$, $\tilde{\xi} = \{\xi_k\} \in \mathcal{Q}$.

3. ОПИСАНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОТНОШЕНИЯ L_0

Пусть пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L_0^*$. Тогда согласно теореме 2 существует такая пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, что справедливы равенства (26), (30). Поставим в соответствие каждой такой паре $\{y, f\}$ пару граничных значений $\{Y, Y'\} \in \mathcal{Q}_- \times \mathcal{Q}_+$ по формулам

$$Y = \tilde{\tau} - 2^{-1}i\tilde{J} \int_a^b \tilde{W}^*(s) d\mathbf{m}(s) f(s) = \tilde{\tau} - 2^{-1}i\tilde{J}\mathcal{W}^* f, \quad Y' = \int_a^b \tilde{W}^*(s) d\mathbf{m}(s) f(s) = \mathcal{W}^* f.$$

Обозначим через Γ оператор, сопоставляющий каждой паре $\{y, f\} \in L_0^*$ пару граничных значений $\{Y, Y'\}$, т. е. $\Gamma\{y, f\} = \{Y, Y'\}$. Положим $\Gamma_1\{y, f\} = Y$, $\Gamma_2\{y, f\} = Y'$.

Теорема 3. Область значений $\mathcal{R}(\Gamma)$ оператора Γ совпадает с $\mathcal{Q}_- \times \mathcal{Q}_+$ и “справедлива формула Грина”

$$(f, z)_{\mathfrak{H}} - (y, g)_{\mathfrak{H}} = (Y', Z) - (Y, Z'), \quad (31)$$

где $\{y, f\}, \{z, g\} \in L_0^*$, $\Gamma\{y, f\} = \{Y, Y'\}$, $\Gamma\{z, g\} = \{Z, Z'\}$.

Доказательство. Лемма 8 влечет равенство $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{Q}_- \times \mathcal{Q}_+$. Докажем (31). Предположим, что функция y имеет вид (30) и

$$z(t) = \widetilde{W}(t)\tilde{\eta} - \widetilde{W}(t)iJ \int_a^t \widetilde{W}^*(s)d\mathbf{m}(s)g(s), \quad (32)$$

где $\tilde{\eta} \in \mathcal{Q}_-$, $g \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$(f, \mathcal{W}\tilde{\eta}) = (\mathcal{W}^*f, \tilde{\eta}) = (Y', Z + 2^{-1}iJZ'); \quad (\mathcal{W}\tilde{\tau}, g) = (\tilde{\tau}, \mathcal{W}^*g) = (Y + 2^{-1}iJY', Z'). \quad (33)$$

В (30), (32) обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{F}_a(t) &= -\widetilde{W}(t)iJ \int_a^t \widetilde{W}^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-1}w_k(t)iJ \int_a^t w_k^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s), \\ \tilde{G}_a(t) &= -\widetilde{W}(t)iJ \int_a^t \widetilde{W}^*(s)d\mathbf{m}(s)g(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-1}w_k(t)iJ \int_a^t w_k^*(s)d\mathbf{m}(s)g(s). \end{aligned}$$

Определим функции F_k, G_k равенствами

$$F_k(t) = -w_k(t)iJ \int_{t_{k-1}}^t w_k^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s), \quad G_k(t) = -w_k(t)iJ \int_{t_{k-1}}^t w_k^*(s)d\mathbf{m}(s)g(s).$$

Так же, как в доказательстве леммы 9, можно считать без ограничения общности, что функции F_k, G_k непрерывны слева в точке t_k . Используя такую же аргументацию, как в доказательстве леммы 9, применим формулу Лагранжа (3) к функциям F_k, f и G_k, g на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Тогда, учитывая (11), получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(s), d\mathbf{m}(s)G_k(s)) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F_k(s), d\mathbf{m}(s)g(s)) = \\ &= \left(iJw(t_k)iJ \int_{t_{k-1}}^{t_k} w^*(s)d\mathbf{m}(s)f(s), w(t_k)iJ \int_{t_{k-1}}^{t_k} w^*(s)d\mathbf{m}(s)g(s) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(iJ \int_{t_{k-1}}^{t_k} w^*(s) d\mathbf{m}(s) f(s), \int_{t_{k-1}}^{t_k} w^*(s) d\mathbf{m}(s) g(s) \right).$$

Поэтому $(f, \tilde{G}_a)_{\mathfrak{H}} - (\tilde{F}_a, g)_{\mathfrak{H}} = (i\tilde{J}\mathcal{W}^*f, \mathcal{W}^*g) = (i\tilde{J}Y', Z')$. Отсюда и из (30), (32), (33) получим

$$\begin{aligned} (f, z)_{\mathfrak{H}} - (y, g)_{\mathfrak{H}} &= (Y', Z + 2^{-1}i\tilde{J}Z') - (Y + 2^{-1}i\tilde{J}Y', Z') + (i\tilde{J}Y', Z') = \\ &= (Y', Z) - (Y, Z') + 2^{-1}(Y', i\tilde{J}Z') - 2^{-1}(i\tilde{J}Y', Z') + (i\tilde{J}Y', Z') = (Y', Z) - (Y, Z'). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Из теории пространств с негативной и позитивной нормами ([11, гл. 1], [4, гл.2]) следует существование таких изометрических операторов $\delta_- : \mathcal{Q}_- \rightarrow \mathcal{Q}$, $\delta_+ : \mathcal{Q}_+ \rightarrow \mathcal{Q}$, что для всех $\tilde{\tau} \in \mathcal{Q}_-$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{Q}_+$ выполняется равенство $(\tilde{\tau}, \tilde{\varphi}) = (\delta_- \tilde{\tau}, \delta_+ \tilde{\varphi})$. Пусть $\{y, f\} \in L_0^*$. Положим $\mathcal{Y} = \gamma_1\{y, f\} = \delta_- \Gamma_1\{y, f\}$; $\mathcal{Y}' = \gamma_2\{y, f\} = \delta_+ \Gamma_2\{y, f\}$ и $\gamma y = \{\gamma_1 y, \gamma_2 y\}$. Тогда $\mathcal{R}(\gamma) = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$. Из (31) получаем

$$(L_0^* y, z)_{\mathfrak{H}} - (y, L_0^* z)_{\mathfrak{H}} = (\mathcal{Y}', \mathcal{Z}) - (\mathcal{Y}, \mathcal{Z}'), \quad (34)$$

где $\{y, f\}, \{z, g\} \in L_0^*$, $\gamma\{y, f\} = \{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'\}$, $\gamma\{z, g\} = \{\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'\}$.

Отсюда следует, что тройка $(\mathcal{Q}, \gamma_1, \gamma_2)$ является пространством граничных значений (или граничной тройкой в другой терминологии) в смысле работ [2, 3], [14] (см. также [4, гл. 3]). В [2, 3] рассматривался случай, когда L_0^* является оператором, а в [14] — линейным отношением.

Из [1, 4], [14] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Всякое самосопряженное расширение отношения L_0 состоит из тех и только тех пар $\{y, f\} \in L_0^*$, которые удовлетворяют условию*

$$(U - E)\gamma_2\{y, f\} + i(U + E)\gamma_1\{y, f\} = 0, \quad (35)$$

где U — унитарный оператор в \mathcal{Q} , определяемый по расширению однозначно.

Аналогичным образом могут быть описаны диссипативные и аккумулятивные расширения оператора L_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рофе–Бекетов, Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Доклады АН СССР. — М.: Наука, 1969. — Т. 184, № 5. — С. 1034–1037.

- ROFE-BEKETOV, F. S. (1969) Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector functions. *Soviet Math. Dokl.* 10, No 1. p. 188–192.
2. Кочубей, А. Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Математические заметки. — М.: Наука, 1975. — Т. 17, № 1. — С. 41–48.
- KOCHUBEI, A. N. (1975) Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. *Mathematical Notes.* 17 (No 1). p. 25–28.
3. Брук, В. М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Математический сборник. — М.: Наука, 1976. — Т. 100, № 2. — С. 210–216.
- BRUK, V. M. (1976) On a class of boundary value problems with spectral parameter in the boundary condition. *Sbornik: Mathematics.* 29 (No 2). p. 186–192.
4. Горбачук, В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. — Киев: Наукова Думка, 1984. — 284 с.
- GORBACHUK, V. I. and GORBACHUK, M. L. (1991) *Boundary value problems for differential-operator equations.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ.
5. Orcutt, B. C. (1969) *Canonical differential equations.* Dissertation, University of Virginia, 1969.
6. Брук, В. М. О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений // Функциональный анализ. — Ульяновск: Изд-во Ульяновского пединститута, 1975. — Т. 5. — С. 25–33.
- BRUK, V. M. (1975) On a number of linearly independent square-integrable solutions of systems of differential equations. *Functional analysis.* 5. p. 25–33.
7. Брук, В. М. О линейных отношениях в пространстве вектор-функций // Математические заметки. — М.: Наука, 1978. — Т. 24, № 4. — С. 499–511.
- BRUK, V. M. (1978) Linear relations in a space of vector functions. *Mathematical Notes.* 24 (No 4). p. 767–773.
8. Behrndt, Jussi and Hassi, Seppo and Snoo, Henk and Wietsma, Rudi. (2011) Square-integrable solutions and Weil functions for singular canonical systems. *Math. Nachr.* 284 (No 11–12). p. 1334–1384.
9. BRUK, V. M. (2017) Boundary value problems for integral equations with operator measures. *Probl. Anal. Issues Anal.* 6(24) (No 1). p. 19–40.

10. Брук, В. М. О самосопряженных расширениях операторов, порожденных интегральными уравнениями // Таврический Вестник Информатики и Математики. — Симферополь, 2017. — № 1 (34). — С. 17–31.
BRUK, V.M. (2017) On self-adjoint extensions of operators generated by integral equations. *Taurida Journal of Computer science theory and Mathematics*. No 1 (34). p. 17–31.
11. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова Думка, 1965. — 798 с.
BEREZANSKI, Yu.M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
12. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи матем. наук. — М., 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.
BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys*. 68 (No 1). p. 69–116.
13. BRUK, V.M. (2014) On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the infinite-dimensional case. *Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry*. 10 (No 2). p. 163–188.
14. Брук, В. М. О расширениях симметрических отношений // Математические заметки. — М.: Наука, 1977. — Т. 22, № 6. — С. 825–834.
BRUK, V.M. (1977) Extensions of symmetric relations. *Mathematical Notes*. 22 (No 6). p. 953–958.

УДК: 517.833

MSC2010: 91A10

ОБ ОДНОЙ НЕРЕШЕННОЙ ЗАДАЧЕ В МАТРИЧНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, МГУ, ВМК, ГСП-1, МОСКВА, 119991, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru

© Л. В. Смирнова

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ
УЛ. ЗЕЛЕНАЯ, 22, ОРЕХОВО-ЗУЕВО, 142611, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: smirnovaidiya@rambler.ru

© М. И. Высокос

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ
УЛ. ЗЕЛЕНАЯ, 22, ОРЕХОВО-ЗУЕВО, 142611, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: mvysokos@mail.ru

ABOUT ONE UNSOLVED PROBLEM IN MATRIX ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V., Vysokos M. I.

Abstract. Finding the Nash equilibrium situation in linear-quadratic differential game of three persons reduces to construction of explicit form solving of matrix system of Riccati model differential equations. The question is that the existence of such solution, its properties is the unsolved problem. In proposed article this problem is solved only for the game of one player. We tried to apply the Poincare method of small parameter (from the theory of oscillation) but only for special form model of controlled system where two of three players affect in a small way on the rate of change of phase vector. But the question about solving of matrix system of Riccati model equations is open. In cases where Nash equilibrium situation doesn't exist we recommend to apply other equilibrium concepts (active equilibrium, equilibrium of objections and counterobjections, Berge equilibrium). We note that in the present article we *singled out* the case (the section 3) when in differential game the Nash equilibrium situation is absent.

Keywords: *differential noncooperative games, Nash equilibrium, situation, strategy.*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейно-квадратичная дифференциальная позиционная игра трех лиц

$$\Gamma = \langle \{1, 2, 3\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2,3}, \{\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle,$$

где управляемая динамическая система $\Sigma \div x = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3$, $x(t_0) = x_0$, фазовый вектор x и управляющее воздействие i -го игрока u_i — вектора из \mathbb{R}^n ; момент окончания игры $\vartheta = const > 0$; позиция игры $\Gamma(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и время $t \in [t_0, \vartheta]$; $n \times n$ матрица $A(\cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n}[0, \vartheta]$; множество стратегий i -го игрока

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n}[0, \vartheta]\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Множество ситуаций $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^3 \mathfrak{A}_i$, $U \div u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) = (Q_1(t)x, Q_2(t)x, Q_3(t)x)$.

Партия игры происходит следующим образом: каждый игрок выбирает свою стратегию $U_i \div u_i(t, x) = Q_i(t)x$ ($i = 1, 2, 3$), затем строится решение векторного уравнения $\dot{x}(t) = [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)]x(t)$, $x(t_0) = x_0$, с помощью $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, находятся реализации выбранных игроками стратегий $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ ($i = 1, 2, 3$), т. е. $x(t) \rightarrow u[t] = (u_1[t] = Q_1(t)x(t), u_2[t] = Q_2(t)x(t), u_3[t] = Q_3(t)x(t))$.

На непрерывных четверках $(x(t), u_1[t], u_2[t], u_3[t] \mid t \in [t_0, \vartheta])$ определена функция выигрыша i -го игрока

$$\mathcal{J}_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u_j'[t]D_{ij}u_j[t] dt \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $n \times n$ -матрицы C_i, D_{ij} постоянны и симметричны.

Каждый игрок стремится за счет выбора и использования своей стратегии увеличить свой выигрыш (значение своей функции выигрыша).

Определение 1. Ситуация $U = (U_1^e, U_2^e, U_3^e) \in \mathfrak{A}$ называется *равновесной по Нэшу* в игре Γ , если при $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ имеют место три равенства

$$\begin{aligned} \max_{U_1 \in \mathfrak{A}_1} \mathcal{J}_1(U_1, U_2^e, U_3^e, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_1(U^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_1^e[t_0, x_0], \\ \max_{U_2 \in \mathfrak{A}_2} \mathcal{J}_2(U_1^e, U_2, U_3^e, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_2(U^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_2^e[t_0, x_0], \\ \max_{U_3 \in \mathfrak{A}_3} \mathcal{J}_3(U_1^e, U_2^e, U_3, t_0, x_0) &= \mathcal{J}_3(U^e, t_0, x_0) = \mathcal{J}_3^e[t_0, x_0]. \end{aligned}$$

Тройка $(\mathcal{J}_1^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_2^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_3^e[t_0, x_0])$ составляет *равновесные выигрыши*.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Применение метода динамического программирования к задаче построения равновесия по Нэшу ($U^e, \mathcal{J}_1^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_2^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_3^e[t_0, x_0]$) приводит к следующему утверждению, где $V = (V_1, V_2, V_3) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial V_i}{\partial x} = \text{grad}_x V_i(t, x)$, для симметричной постоянной $n \times n$ -матрицы $D < 0$ ($>$) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определено отрицательна (положительна), штрих сверху означает операцию транспонирования.

Теорема 1. Если в игре Γ матрицы $D_{ii} < 0$ ($i = 1, 2, 3$) и система матричных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1 + \Theta_1[A(t) - D_{22}^{-1}\Theta_2 - D_{33}^{-1}\Theta_3] + [A'(t) - \Theta_2 D_{22}^{-1} - \Theta_3 D_{33}^{-1}]\Theta_1 - \\ - \Theta_1 D_{11}^{-1}\Theta_1 + \Theta_2 D_{22}^{-1}D_{12}D_{22}^{-1}\Theta_2 + \Theta_3 D_{33}^{-1}D_{13}D_{33}^{-1}\Theta_3 = 0_{n \times n} \\ \dot{\Theta}_2 + \Theta_2[A(t) - D_{11}^{-1}\Theta_1 - D_{33}^{-1}\Theta_3] + [A'(t) - \Theta_1 D_{11}^{-1} - \Theta_3 D_{33}^{-1}]\Theta_2 - \\ - \Theta_2 D_{22}^{-1}\Theta_2 + \Theta_1 D_{11}^{-1}D_{21}D_{11}^{-1}\Theta_1 + \Theta_3 D_{33}^{-1}D_{23}D_{33}^{-1}\Theta_3 = 0_{n \times n} \\ \dot{\Theta}_3 + \Theta_3[A(t) - D_{22}^{-1}\Theta_2 - D_{33}^{-1}\Theta_3] + [A'(t) - \Theta_2 D_{22}^{-1} - \Theta_3 D_{33}^{-1}]\Theta_3 - \\ - \Theta_3 D_{33}^{-1}\Theta_3 + \Theta_1 D_{11}^{-1}D_{31}D_{11}^{-1}\Theta_1 + \Theta_2 D_{22}^{-1}D_{32}D_{22}^{-1}\Theta_2 = 0_{n \times n} \end{cases} \quad (1)$$

имеет продолжимое на $[0, \vartheta]$ решение в виде симметричных $n \times n$ -матриц $\Theta_1(t), \Theta_2(t), \Theta_3(t)$, то ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e, U_3^e)$, $U_i^e \div -D_{ii}^{-1}\Theta_i(t)x$ ($i = 1, 2, 3$) является равновесной по Нэшу, а равновесные выигрыши $\mathcal{J}_1^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_2^e[t_0, x_0], \mathcal{J}_3^e[t_0, x_0]$ будут $\mathcal{J}_i^e[t_0, x_0] = x_0' \Theta_i(t_0) x_0$ ($i = 1, 2, 3$).

Доказательство. Согласно методу динамического программирования, достаточными условиями выполнения всех трех равенств из определения 1 является существование единственных непрерывно-дифференцируемых скалярных функций Беллмана $V_i(t, x)$ и n -вектор-функций $u_i(t, x, V)$ ($i = 1, 2, 3$), при которых для $\forall (t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и

$$W_i(t, x, u_1, u_2, u_3, V) = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x} \right]' [A(t)x + u_1 + u_2 + u_3] + \sum_{j=1}^3 u_j' D_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

1⁰. выполнены тождества ($Idem\{u_i \rightarrow u_i(t, x, V)\}$ означает замену в фигурных скобках u_i на $u_i(t, x, V)$):

$$\begin{aligned} \max_{u_1} \{W_1(t, x, u_1, u_2(t, x, V), u_3(t, x, V), V)\} &= Idem\{u_1 \rightarrow u_1(t, x, V)\}, \\ \max_{u_2} \{W_2(t, x, u_1(t, x, V), u_2, u_3(t, x, V), V)\} &= Idem\{u_2 \rightarrow u_2(t, x, V)\}, \\ \max_{u_3} \{W_3(t, x, u_1(t, x, V), u_2(t, x, V), u_3, V)\} &= Idem\{u_3 \rightarrow u_3(t, x, V)\}; \end{aligned}$$

2⁰. система уравнений в частных производных

$$W_i[t, x] = W_i(t, x, u_1(t, x, V), u_2(t, x, V), u_3(t, x, V), V) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями $V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (i = 1, 2, 3)$ имеет единственное решение $V(t, x) = (V_1(t, x), V_2(t, x), V_3(t, x))$ вида $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x$, $(i = 1, 2, 3)$, элементы симметричных $n \times n$ -матриц $\Theta_i(t) = \Theta_i'(t) \ (i = 1, 2, 3)$ непрерывно дифференцируемы (по t);

3⁰. n -вектор-функции $u_i(t, x, V_i(t, x)) = x' \Theta_i(t) x = Q_i^e(t) x$, $Q_i^e(\cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n}[t_0, \vartheta]$.

Требования 1⁰ имеют место, если

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial u_i} \Big|_{u_i(t,x,V)} &= \frac{\partial V_i}{\partial x} + 2D_{ii} u_i(t, x, V) = 0_n, \\ \frac{\partial^2 W_i}{\partial u_i^2} \Big|_{u_i(t,x,V)} &= 2D_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует

$$u_i(t, x, V) = -\frac{1}{2} D_{ii}^{-1} \frac{\partial V_i}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

а при $V_i(t, x) = x' \Theta_i(t) x \rightarrow \frac{\partial V_i(t, x)}{\partial x} = 2\Theta_i(t) x$ будет

$$u_i(t, x, V_i = x' \Theta_i(t) x) = -D_{ii}^{-1} \Theta_i(t) x \quad (i = 1, 2, 3)$$

(тем самым выполнено требование 3⁰, если $\Theta_i(\cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n}[0, \vartheta]$).

Наконец тогда с учетом $W_i[t, x] = \frac{\partial V_i}{\partial t} + (\frac{\partial V_i}{\partial x})' [A(t)x - \frac{1}{2}(D_{11}^{-1} \frac{\partial V_1}{\partial x} + D_{22}^{-1} \frac{\partial V_2}{\partial x} + D_{33}^{-1} \frac{\partial V_3}{\partial x})] + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 (\frac{\partial V_j}{\partial x})' D_{jj}^{-1} D_{ij} D_{jj}^{-1} \frac{\partial V_j}{\partial x}$, подставляя $V_i = x' \Theta_i(t) x$ в (4) получаем, что тождества $W_i[t, x] \equiv 0$ и $V_i(\vartheta, x) = x' C_i x$ при $\forall x \in [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$ выполняются, если система из трех матричных дифференциальных уравнений типа Риккати (1) имеет продолжимое на $[t_0, \vartheta]$ решение $\Theta_1(t), \Theta_2(t), \Theta_3(t)$. По требованию теоремы 1 такие $\Theta_i(t) \ (i = 1, 2, 3)$ существуют, что завершает доказательство. □

Замечание 1. Итак, построение равновесного по Нэшу решения свелось к построению $n \times n$ -матриц $\Theta_1(t), \Theta_2(t), \Theta_3(t)$, удовлетворяющих системе (1). Это как раз и является нерешенной задачей. Однако в случае, когда в дифференциальной игре Γ участвует лишь один игрок (пусть под номером 1), то такое решение удастся построить [2]. В этом случае система (1) превращается в

$$\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 A(t) + A' \Theta_1 - \Theta_1 D_{11}^{-1} \Theta_1 = 0_{n \times n}, \quad \Theta_1(\vartheta) = C_1. \quad (5)$$

Покажем, что решение (5) при $D_{11} < 0$, $C_1 < 0$ существует и имеет вид

$$\Theta_1(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C_1^{-1} + \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau) D_{11}^{-1} [X^{-1}(\tau)]' d\tau \right\}^{-1} X^{-1}(t), \quad (6)$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решения $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ — единичная $n \times n$ -матрица. Заметим, что для $X(t)$ справедливо $\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t)$, $X(\vartheta) = E_n$. Но тогда, так как $[det X(t) \neq 0] \Rightarrow [\exists X^{-1}(t) \forall t \in [0, \vartheta]]$, а $X(t)X^{-1}(t) = E_n \Rightarrow \dot{X}(t)X^{-1}(t) + X(t)\dot{X}^{-1}(t) = 0_{n \times n} \Rightarrow \frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t) \Rightarrow [\dot{X}^{-1}(t)]' = -A'(t)X^{-1}(t)$, $X^{-1}(\vartheta) = [X^{-1}(t)]' = E_n$.

Затем, подставляя $\Theta_1(t)$ из (6), с учетом $\dot{X}^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t)$ и $[X^{-1}(t)]' = -A'(t)[X^{-1}(t)]'$, $\dot{Y}^{-1} = -Y^{-1}\dot{Y}Y^{-1}$ для $det Y(t) \neq 0$, нетрудно проверить, что (6) является решением (5), а $\Theta_1(\vartheta) = C_1$.

Было бы интересно найти явный вид решения (1) в игре двух, трех и более игроков. Авторам это сделать не удалось. Однако, если в системе Σ рассматривается случай малого влияния второго и третьего игроков на скорость изменения $\dot{x}(t)$, т. е.

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t) + u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon u_3, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, то применяя метод малого параметра Пуанкаре можно строить последовательность (по степеням ε), равномерно (по t) сходящуюся к решению системы (1). Этому варианту игры двух лиц посвящена статья [1].

Наконец, как показал случай одного игрока в игре Γ , здесь следует ограничиться условиями $D_{ii} < 0$, $C_i < 0$.

Переход на случай $D_{ii} > 0$ хотя бы для одного игрока уже приводит к отсутствию равновесия по Нэшу. Доказательству этого факта и будет посвящена следующая теорема 2.

3. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Теорема 2. *Если в Γ для хотя бы одного игрока i будет $D_{ii} > 0$ (т. е. квадратичная форма $x'D_{ii}x_i$ определено положительно), то при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ в дифференциальной игре Γ не существует равновесной по Нэшу ситуации.*

Доказательство. Согласно определению 1 в игре Γ не существует ситуации равновесия по Нэшу, если невозможен хотя бы один из трех максимумов в определении 1. Покажем, что при $D_{11} > 0$ не существует первый максимум. Он не существует, если для каждой ситуации $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathfrak{A}$ найдется стратегия $\bar{U}_1 \in \mathfrak{A}_1$ и начальная

позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ такие, что

$$\mathcal{J}_1(\bar{U}_1, U_2, U_3, t_0, x_0) > \mathcal{J}_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0). \tag{7}$$

Докажем это неравенство в два этапа.

Этап 1. На этом этапе по ситуации $U = (U_1, U_2, U_3) \div (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)) = (Q_1(t)x, Q_2(t)x, Q_3(t)x)$ найдем функцию Беллмана $V(t, x)$ такую, что $\mathcal{J}_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = V(t_0, x_0) \forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$ (нулевой n -вектор). Для этого составим функцию

$$W(t, x, u_1, u_2, u_3, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' [A(t)x + u_1 + u_2 + u_3] + u_1' D_{11} u_1 + u_2' D_{12} u_2 + u_3' D_{13} u_3. \tag{8}$$

Для заданной ситуации $U = (U_1, U_2, U_3) \div (Q_1(t)x, Q_2(t)x, Q_3(t)x)$, где $Q_i(\cdot) \in \mathbf{C}_{n \times n}[0, \vartheta]$, найдем функцию Беллмана $V(t, x) = x' \Theta(t)x$, $\Theta'(t) = \Theta(t) \forall t \in [0, \vartheta]$, и такую, что

$$W[t, x] = W(t, x, u_1 = Q_1(t)x, u_2 = Q_2(t)x, u_3 = Q_3(t)x, V = V(t, x)) = 0, \tag{9}$$

$$V(\vartheta, x) = x' C_1 x. \tag{10}$$

Первые два слагаемых функции $W[t, x]$ из (8) представляют собой полную производную (по t) от функции Беллмана $V(t, x)$ взятую вдоль решения $x(t)$ векторного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3$, где $u_i = Q_i(t)x$ есть реализация стратегии i -го игрока $U_i \div Q_i(t)x$ ($i = 1, 2, 3$), т. е. $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$. Поэтому $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u_1[t] + u_2[t] + u_3[t]$. Кроме того, последние три слагаемых из (8) есть подинтегральные слагаемые в функции выигрыша первого игрока, т. е. $u_1'[t]D_{11}u_1[t] + u_2'[t]D_{12}u_2[t] + u_3'[t]D_{13}u_3[t]$. Проинтегрируем теперь обе части равенства (9) в пределах от t_0 до ϑ . Тогда, с учетом (9) и (10)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{\vartheta} W[t, x(t)] dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV(t, x(t))}{dt} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{11}u_1[t] + u_2'[t]D_{12}u_2[t] + u_3'[t]D_{13}u_3[t]) dt = \\ &= V(\vartheta, x(\vartheta)) - V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u_j'[t]D_{1j}u_j[t] dt = \end{aligned}$$

$$= x'(\vartheta)C_1x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u'_j[t]D_{ij}u_j[t] dt - V(t_0, x_0).$$

Отсюда сразу следует справедливость равенства

$$\mathcal{J}_1(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = V(t_0, x_0). \quad (11)$$

Найдем из (9) и (10) явный вид функции Беллмана $V(t, x)$. Именно, будем строить решение $V(t, x)$ равенств (9) и (10) в виде $V(t, x) = x'\Theta(t)x$, $\Theta'(t) = \Theta(t)$ при $\forall t \in [0, \vartheta]$. Тогда для $V(t, x)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)' [A(t) + Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)]x + \\ & + x' [Q'_1(t)D_{11}Q'_1(t) + Q'_2(t)D_{12}Q'_2(t) + Q'_3(t)D_{13}Q'_3(t)]x = 0, \quad V(\vartheta, x) = x'C_1x. \end{aligned}$$

Эти два тождества (по $x \in \mathbb{R}^n$) имеют место, если

$$\begin{aligned} x' \left[\dot{\Theta} + \Theta \left(A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t) \right) + \left(A'(t) + \sum_{i=1}^3 Q'_i(t) \right) \Theta + \sum_{j=1}^3 Q'_j(t)D_{1j}Q_j(t) \right] x = 0, \\ \Theta(\vartheta) = C_1. \end{aligned} \quad (12)$$

В свою очередь (12) выполнено, если симметричная $n \times n$ -матрица $\Theta(t)$ удовлетворяет линейному неоднородному матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Theta} + \Theta \left(A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t) \right) + \left(A'(t) + \sum_{i=1}^3 Q'_i(t) \right) \Theta + \sum_{j=1}^3 Q'_j(t)D_{1j}Q_j(t) = 0_{n \times n},$$

с граничным условием $\Theta(\vartheta) = C_1$. Можно простой подстановкой проверить, что этому уравнению удовлетворяет

$$\Theta(t) = [X^{-1}(t)]' \left\{ C + \int_t^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 X'(\tau)Q'_j(\tau)D_{1j}Q_j(\tau)X(\tau)d\tau \right\} X^{-1}(t), \quad (13)$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решения системы $\frac{dx}{dt} = [A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t)]x$, $X(\vartheta) = E_n$. Как было показано в замечании 1

$$\begin{aligned} & \frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt} = - \left[A'(t) + \sum_{i=1}^3 Q'_i(t) \right] [X^{-1}(t)]', \\ & \frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t) \left[A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t) \right], \quad X^{-1}(\vartheta) = [X^{-1}(\vartheta)]' = E_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Действительно, если через $\{\dots\}$ обозначить выражение в фигурных скобках из (13), то, согласно (13) и (14) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(t)}{dt} &= \frac{d[X^{-1}(t)]'}{dt} \left\{ C + \int_t^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 X'(\tau) Q_j'(\tau) D_{1j} Q_j(\tau) X(\tau) d\tau \right\} X^{-1}(t) + \\ &\quad + [X^{-1}(t)]' \frac{d\{\dots\}}{dt} X^{-1}(t) + [X^{-1}(t)]' \{\dots\} \frac{dX^{-1}(t)}{dt} = \\ &= - \left[A'(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i'(t) \right] [X^{-1}(t)]' \{\dots\} X^{-1}(t) - \sum_{j=1}^3 Q_j'(t) D_{1j} Q_j(t) - \\ &\quad - [X^{-1}(t)]' \{\dots\} X^{-1}(t) \left[A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t) \right] = \\ &= - \left[A'(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i'(t) \right] \Theta(t) - \Theta(t) \left[A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t) \right] - \sum_{j=1}^3 Q_j'(t) D_{1j} Q_j(t), \\ \Theta(\vartheta) &= E_n C_1 E_n = C_1. \end{aligned}$$

Итак, далее на этапе 2 будем использовать функцию Беллмана $V(t, x) = x' \Theta(t) x$, где симметричная $n \times n$ -матрица $\Theta(t)$ непрерывна и имеет явный вид (13), применяем также ту же, что и на первом этапе, начальную позицию (t_0, x_0) , стратегии $U_2 \div Q_2(t)x$, $U_3 \div Q_3(t)x$ второго и третьего игроков соответственно.

Этап 2. Перейдем непосредственно к доказательству строгого неравенства (7). Здесь учтем импликацию $[D_{11} > 0] \Rightarrow [\exists \lambda = const > 0$ такая, что при $\forall u_1 \in \mathbb{R}^n$ будет

$$u_1' D_{11} u_1 \geq \lambda u_1' u_1 = \lambda \|u_1\|^2, \tag{15}$$

здесь $\lambda > 0$ — наименьший корень характеристического уравнения $det[D_{11} - \lambda E_n] = 0$, E_n — единичная матрица, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. С учетом (8), (11), (15), при $u_1 = \beta x$, где постоянную β определим ниже, получаем

$$\begin{aligned} W(t, x, u_1 = \beta x, u_2 = Q_2(t)x, u_3 = Q_3(t)x, V = V(t, x) = x' \Theta(t) x) &\geq \\ &\geq \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right]' [A(t)x + \beta E_n x + Q_2(t)x + Q_3(t)x] x + \\ &\quad + \lambda \beta^2 E_n x' x + x' [Q_2'(t) D_{12} Q_2(t) + Q_3'(t) D_{13} Q_3(t)] x = \\ &= x' \left\{ \frac{d\Theta(t)}{dt} + \Theta(t) [A(t) + Q_2(t) + Q_3(t)] + [A'(t) + Q_2'(t) + Q_3'(t)] \Theta(t) + \right. \\ &\quad \left. + Q_2'(t) D_{12} Q_2(t) + Q_3'(t) D_{13} Q_3(t) \right\} x + x' \lambda \beta^2 E_n x + 2x' \beta \Theta(t) x = x' M_1(t, \beta) x, \end{aligned}$$

где $M_1(t, \beta) = \lambda \beta^2 E_n + 2\beta \Theta(t) + K_1(t)$, причем $n \times n$ -матрица $K_1(t)$ не зависит от β .

Перейдем к доказательству существования постоянной $\alpha^* = \alpha(U_2, U_3, t_0, x_0) > 0$ такой, что при всех $\alpha \geq \alpha^*$ квадратичная форма $x'M(t, \alpha)x$ будет определено положительной для $\forall t \in [0, \vartheta]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что $n \times n$ -матрица $M(t, \alpha)$ симметрична. По критерию Сильвестра [3, с. 88] квадратичная форма $x'M(t, \alpha)x$ определено положительна, если положительны все ведущие (угловые) миноры Δ_r ($r = 1, \dots, n$) матрицы $M(t, \alpha)$, т. е. миноры, расположенные в первых r строках и первых r столбцах матрицы $M(t, \alpha)$, именно,

$$\Delta_r(t, \alpha) = \begin{vmatrix} \lambda\alpha^2 + \alpha l_{11}(t) + k_{11}(t) & \alpha l_{12}(t) + k_{12}(t) & \dots & \alpha l_{1r}(t) + k_{1r}(t) \\ \alpha l_{21}(t) + k_{21}(t) & \lambda\alpha^2 + \alpha l_{22}(t) + k_{22}(t) & \dots & \alpha l_{2r}(t) + k_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{r1}(t) + k_{r1}(t) & \alpha l_{r2}(t) + k_{r2}(t) & \dots & \lambda\alpha^2 + \alpha l_{rr}(t) + k_{rr}(t) \end{vmatrix} \\ (r = 1, \dots, n).$$

Здесь скалярные функции $l_{ij}(t)$, $k_{ij}(t)$ непрерывны на $[0, \vartheta]$. Раскрывая определитель $\Delta_r(t, \alpha)$ по убывающей степени параметра α , получаем

$$\Delta_r(t, \alpha) = a_0\alpha^{2r} + a_1(t)\alpha^{2r-1} + \dots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t),$$

причем постоянная $a_0 = \lambda^r = \Delta$, а коэффициенты $a_1(t), \dots, a_{2r}(t)$ непрерывны на компакте $[0, \vartheta]$ и поэтому равномерно ограничены. Заметим, что равномерная ограниченность приводит к существованию $\gamma_r = \text{const} > 0$ такой, что $\max_{0 \leq t \leq \vartheta} |a_p(t)| \leq \gamma_r$ при $\forall p = 1, \dots, 2r$. Покажем, что при $\alpha > \frac{\gamma_r}{a_0} + 1 = \alpha(U_2, U_3, t_0, x_0) = \alpha^*$ знак многочлена при достаточно больших α определяется знаком его старшего члена, именно

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| < a_0\alpha^{2r}.$$

Действительно

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| \leq |a_1(t)|\alpha^{2r-1} + |a_2(t)|\alpha^{2r-2} + \dots + |a_{2r}(t)| \leq \\ \leq \gamma_r(\alpha^{2r-1} + \dots + 1) = \gamma_r \frac{\alpha^{2r} - 1}{\alpha - 1}.$$

Кроме того, $[\alpha > \frac{\gamma_r}{a_0} + 1] \Rightarrow [\gamma_r < a_0(\alpha - 1)]$. Поэтому, подставляя в предыдущее неравенство вместо γ_r заведомо большую величину $a_0(\alpha - 1)$, получаем

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| < a_0(\alpha - 1) \frac{\alpha^{2r} - 1}{\alpha - 1} = a_0(\alpha^{2r} - 1) < a_0\alpha^{2r}.$$

Итак, при $\forall \alpha \geq \gamma_r = \text{const} > 0$ и $\forall t \in [0, \vartheta]$ имеет место

$$|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \dots + a_{2r}(t)| < a_0\alpha^{2r}$$

и поэтому, напомним, знак многочлена $\Delta_r(t, \alpha)$ определяется при достаточно большом α знаком его старшего члена.

Аналогично для всех ведущих (угловых) миноров, выбрав $\forall \alpha > \max_{r=1, \dots, n} \gamma_r = \alpha^*$ мы с помощью стратегии первого игрока $U_1 \div \alpha x$ обеспечиваем положительность всех Δ_r ($r = 1, \dots, n$) и значит (по критерию Сильвестра) положительную определенность квадратичной формы $x'M(t, \alpha)x$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n, t \in [0, \vartheta]$.

Перейдем, наконец, к доказательству существования стратегии первого игрока $\bar{U}_1 \in \mathfrak{A}_1$ такой, что выполнено неравенство (7). Для этого снова составим скалярную функцию (8):

$$W_t[t, x] = W(t, x, u_1 = \alpha x, u_2 = Q_2(t)x, u_3 = Q_3(t)x, V(t, x) = x'\Theta(t)x) = x'M_1(t, \alpha)x.$$

В стратегии первого игрока $\bar{U}_1 \div \alpha x$ используем те α , при которых

$$x'M_1(t, \alpha)x > 0 \quad \forall t \in [0, \vartheta], x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n.$$

Пусть теперь $\bar{x}(t), t \in [t_0, \vartheta]$ — решение системы

$$\dot{x}(t) = [A(t) + \beta E_n + Q_1(t) + Q_2(t)]x, \quad x(t_0) = x_0 \neq 0_n.$$

Это решение, в силу $x_0 \neq 0_n$ будет $\bar{x}(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]$. В самом деле, если бы $\exists t_1 \in (t_0, \vartheta]$ такой момент времени, что $\bar{x}(t_1) = 0_n$, то тогда бы в момент t_1 через точку 0_n «проходили» бы два решения: тривиальное $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, \vartheta]$ и $\bar{x}(t)$, что противоречит теореме о единственности решения однородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Итак, по импликации $x_0 \neq 0_n \Rightarrow \bar{x}(t) \neq 0_n \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]$ получаем (с учетом определенной положительности квадратичной формы $x'M(t, \alpha)x$)

$$\bar{x}'(t)M(t, \alpha)\bar{x}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta].$$

Возвращаясь к (8), приходим к

$$\begin{aligned} W[t] &= W(t, x, u_1 = \beta x, u_2 = Q_2(t)x, u_3 = Q_3(t)x, V(t, x) = x'\Theta(t)x) \Big|_{x=\bar{x}(t)} = \\ &= \bar{x}'(t)M(t, \alpha)\bar{x}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned}$$

Интегрируя обе части полученного неравенства в пределах от t_0 до ϑ

$$0 < \int_{t_0}^{\vartheta} \bar{W}[t]dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV(t, \bar{x}(t))}{dt} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^{\vartheta} (\bar{u}'_1[t]D_{11}\bar{u}_1[t] + \bar{u}'_2[t]D_{12}\bar{u}_2[t] + u'_3[t]D_{13}u_3[t]) dt = \\
& = V(\vartheta, \bar{x}(\vartheta)) - V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u'_j[t]D_{1j}u_j[t] dt = \\
& = \bar{x}'(\vartheta)C_1\bar{x}(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^3 u'_j[t]D_{1j}u_j[t] dt - V(t_0, x_0),
\end{aligned}$$

здесь $u_1[t] = \beta\bar{x}(t)$, $u_2[t] = Q_2(t)\bar{x}(t)$, $u_3[t] = Q_3(t)\bar{x}(t)$.

С учетом (11) отсюда сразу следует строгое неравенство (7). Как уже упомянуто в начале доказательства, получаем, что при $D_{11} > 0$ в игре Γ не существует ситуации равновесия по Нэшу. \square

Замечание 2. Так как если $D_{ij} > 0$ при хотя бы одном $i \in \{1, 2, 3\}$, то в этом случае использовать концепцию равновесия по Нэшу в качестве решения игры Γ не имеет смысла. В дальнейшем будет показано, что при $D_{ii} > 0$ и $C_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) в игре Γ могут существовать равновесие возражений и контрвозражений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ZHUKOVSKIY, V. I., SMIRNOVA, L. V. & GORBATOV, A. S. (2018) Mathematical Foundations of the Golden Rule. II. Dynamic Case. *Autom Remote Control*. 79 (10). p. 1929–1952. DOI 10.1134/S0005117918100156
2. Жуковский, В. И., Чикрий, А., А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — М.: Юрайт, 2018. — 332 с. ISBN 978-5-534-05016-5
ZHUKOVSKIY, V. I., CHIKRII, A. A. (2018) *Differential equation. Linear-quadratic differential games*. Moscow: Yurait.
3. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
VOEVODIN, V. V., KUZNETSOV, Yu. A. (1984) *Matrices and calculations*. Moscow: Nauka.

УДК: 521.93:531.35

MSC2010: 70F15

МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ, ОСНОВАННАЯ НА ГРАВИТАЦИОННЫХ МОМЕНТАХ

© С. А. Кумакшев

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А. Ю. ИШЛИНСКОГО РАН
ПРОСП. ВЕРНАДСКОГО, 101, КОРПУС 1, МОСКВА, 119526, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
E-MAIL: *kumak@ipmnet.ru*

MODEL OF OSCILLATIONS OF EARTH'S POLES BASED ON GRAVITATIONAL TIDES.

Kumakshev S. A.

Abstract.

A model of oscillations of Earth's poles is constructed on the basis of the analysis of the gravitational torques from Sun and Moon. The model reflects physical processes and does not imply using curve fitting techniques, based, for example, on the polynomial approximation. Within the framework of this model, the Chandler frequency is interpreted as the fundamental frequency of oscillations of the mechanical system and the annual frequency as the frequency of the excitation force. A fine mechanism of excitation of the oscillations based on the combination of natural and forced frequencies is revealed. The model has only six parameters that can be identified by applying the least squares technique to the experimental data of the International Earth Rotation and Reference Systems Service. The prediction provided by the proposed model has high degree of accuracy for an interval of several years.

Keywords: *Earth's Pole Oscillations, Gravitational Torques*

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИ

Если бы Земля представляла собой идеальный твердый шар и ее движение было бы невозмущенным, то точки пересечения оси вращения с поверхностью Земли (полюса) были бы неподвижны. В конце XVIII в. Эйлер, строя теорию вращательного движения твердого тела с закрепленной точкой в отсутствие внешних сил, показал, что если учесть эллипсоидальную форму Земли, то ось вращения будет совершать круговые (прецессионные) движения с периодом 305 суток. Это означает периодические изменения широт наземных пунктов, так как они измеряются относительно “неподвижных” звезд. Астроном Чандлер, наблюдая за движением звезд, в 1891 году открыл, что на самом деле периодичность имеет две основных компоненты: годовая и с плавающим периодом 410–435 суток (чандлеровская). Сейчас это явление называют движением полюсов Земли. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 1. Размах

колебаний полюса в течении года может достигать несколько десятков метров [1, 2]. Из-за этой неравномерности вращения Земли помимо оперативного внесения поправок в современные системы навигации ГЛОНАСС/GPS также нужно вносить поправку в длину суток [3]. Построение простой модели с ясным физическим смыслом является актуальной задачей.

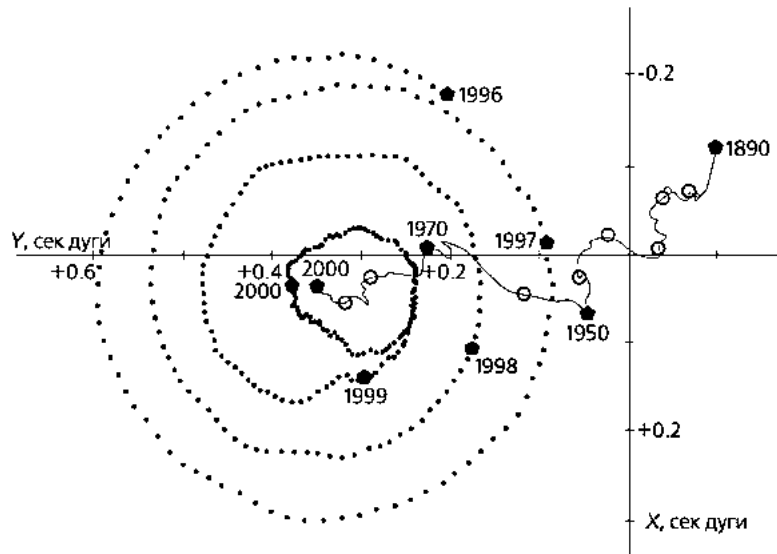


Рис. 1. Движение полюса Земли с 1996 г. по 2000 г. (пунктир) и эволюция условного центра спиралевидного движения с 1890 г. по 2000 г. (сплошная линия).

В соответствии с классической теорией колебаний процесс движения полюсов Земли состоит из колебаний на собственных частотах и колебаний с частотами вынуждающих сил.

В рамках предложенной модели, вынуждающие силы — это силы гравитационной природы, действующие от других тел в солнечной системе. Земля испытывает не только океанические приливы, но и ежесуточные поднятия и опускания поверхности материков с размахом примерно 1 м. Такой “горб”, бегущий по поверхности Земли и созданный каким-либо массивным небесным телом, создает “плечо” для возникновения гравитационных моментов от воздействия других небесных тел. Эти моменты (наиболее заметны два из них — солнечный и лунный) и играют роль вынуждающих сил. Наиболее сильное воздействие Земля испытывает от Солнца (примерно в 200 раз больше, чем от Луны), поэтому наиболее заметная вынуждающая сила имеет период обращения Земли вокруг Солнца — 1 год.

Колебания на собственных частотах должны со временем затухать, но для Земли этого не происходит. Дело в резонансе (совпадении) первой собственной частоты Земли (известной как чандлеровской частоты) и комбинации частот вынуждающих сил. Этот резонанс обеспечивает поступление энергии и продолжение колебаний с собственной частотой. Комбинационный резонанс возникает при совпадении собственной частоты Земли с комбинацией частот внешних воздействий — от Солнца и Луны. Движение Луны является довольно сложным по сравнению с движением Земли вокруг Солнца. Выделим четыре основные особенности.

Орбита Луны вокруг Земли имеет форму эллипса, в одном из фокусов которого находится Земля. Эксцентриситет орбиты меняется почти в два раза (от 0,04 до 0,07) с периодом 8,85 лет. Ближе всего к нашей планете спутник оказывается в точке перигея; дальше всего — в апогее. Прямая, соединяющая две эти точки, проходит через центр Земли и называется линией апсид (совпадает с большой осью эллипса). Линия апсид вращается и делает полный оборот за 8,85 лет.

Плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики (плоскости вращения Земли вокруг Солнца). Угол между плоскостями испытывает колебания в диапазоне от $4^{\circ}59'$ до $5^{\circ}19'$ с периодом 18,6 лет. Точки пересечения лунной орбиты плоскости эклиптики названы восходящим и нисходящим узлами. Воображаемая прямая, которая соединяет две эти точки, называется линией узлов. Линия узлов совершает полный оборот за 18,6 лет.

Таким образом, комбинационный резонанс возникает при совпадении собственной частоты Земли (чандлеровская частота 0,84) с разностью частот внешних воздействий — вращения Земли вокруг Солнца (с периодом 1 год и частотой 1) и периодическими возмущениями орбиты Луны (с периодом 8,85 и 18,6 лет и частотами соответственно 0,11 и 0,05): $1 - 0,11 - 0,05 = 0,84$, см. [4].

Фурье анализ колебаний полюса, приведенный на рис. 2, подтверждает наличие двух основных гармоник с периодом год и 14 месяцев. При этом годичная гармоника имеет острый пик, а пик на чандлеровской частоте (в районе 0,84) является размытым и более мощным за счет резонанса.

Некоторые исследователи полагают, что годичная частота имеет “сезонный” характер и обусловлена перемещением масс в атмосфере и океане. Однако такие перемещения не регулярны от года к году и имеют довольно хаотичный характер. Уже в силу только этого они не могут обеспечить остроту годичного пика — в отличие от регулярного обращения Земли вокруг Солнца.

В силу физического смысла предложенной модели естественным и принципиальным следствием будет размытость чандлеровского пика, поскольку собственная

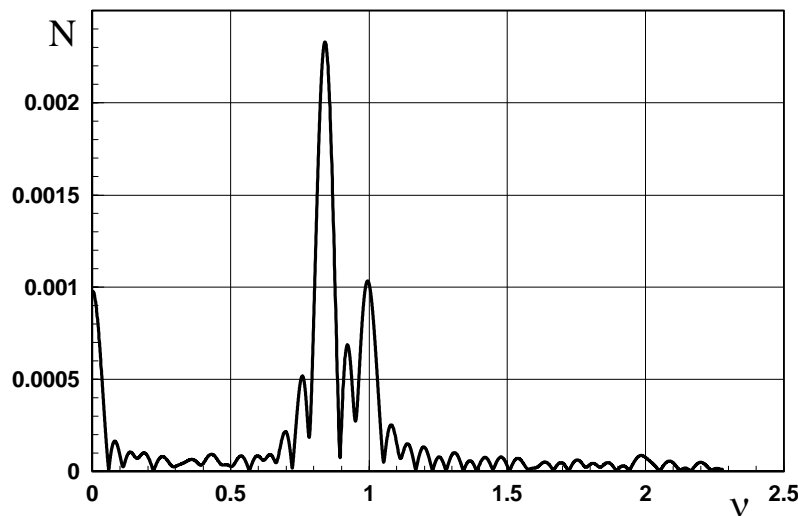


Рис. 2. Частотный анализ движения полюса Земли.

частота Земли зависит от формы и меняется при гравитационных приливах в ее мантии. Очевидно, что и нерегулярные (даже хаотические) перемещения в атмосфере и океанах вносят свой вклад именно в размытость чандлеровской гармоник.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Введем связанную с Землей декартову систему координат, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции A , B и C . Предположим, что малые деформации Земли происходят, главным образом, в радиальном направлении. Для построения модели вращательного движения относительно центра масс представим уравнения вращения Земли в форме классических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции J [1], [2], [9], [10]:

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = \mathbf{M}, \quad \omega = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const} \quad (1)$$

$$J^* = \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|.$$

Здесь ω — вектор угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе [5]), которая приближенно совпадает с главными центральными осями инерции J^* “замороженной” Земли [1]-[5], [8]. Дополнительные возмущающие члены, получающиеся при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли [7], отнесены к вектору M . Считается, что малые вариации тензора инерции δJ могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно,

другие (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные и более короткопериодические). В качестве основных возмущающих внешних моментов сил M , вызывающих нутационные колебания, принимаются гравитационные воздействия. Возможное наличие слагаемого типа $\dot{J}\omega$ не приводит к уточнению модели первого приближения.

Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат, имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi - \omega_0(\nu) \sin \psi, & \dot{\nu} &= \omega_0(\nu) = \omega_*(1 + e \cos \nu)^2 \\ \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} - \omega_0(\nu) \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, & e &= 0.0167 \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_0(\nu) \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\nu(t)$ — истинная аномалия, e — эксцентриситет орбиты, ω_* — постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. При исследовании системы (1), (2) в ситуации, отвечающей движению полюса, пропорциональные ω_0 члены уравнений (2) оказываются существенно большими по сравнению с p, q (приблизительно в 300 раз) и определяющими для $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$. В научной литературе это важное свойство не отмечено, а указанные выше члены необоснованно отбрасывались [1]-[5].

Структура выражений для компонент момента сил гравитации от Солнца имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} M_q &= 3\omega^2 [(A^* + \delta A - (C^* + \delta C))\gamma_r\gamma_p + \delta J_{pq}\gamma_r\gamma_q + \\ &+ \delta J_{pr}(\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rq}\gamma_p\gamma_q], & \omega &= \omega_*(1 + e \cos \nu)^{3/2} \\ \gamma_p &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_q &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_r &= \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Для вычисления $M_{p,r}$ в (3) делается циклическая перестановка индексов p, q, r . Из анализа (3) следует, что годовая компонента колебаний полюса может быть обусловлена слагаемым, содержащим произведения направляющих косинусов $\gamma_p\gamma_r$ и $\gamma_q\gamma_r$. Для их вычисления в первом приближении интегрируются уравнения (3):

$$\begin{aligned} r &= r^0, \quad \varphi \approx rt + \varphi^0, \quad \nu \approx \omega_*t + \nu^0, \quad \cos \theta(\nu) = a(\theta^0, \psi^0) \cos \nu \\ \theta(0) &= \theta^0 = 66^\circ 33', & 0.4 &\leq a \leq 1, & 0 &\leq \psi^0 \leq 2\pi \\ \cos \theta \sin \theta &= b(\theta^0, \psi^0) \cos \nu + d \cos 3\nu + \dots, & 0.4 &\leq b \leq \frac{4}{3\pi}, & |d| &\ll 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Вторая и более высокие гармоники по ν приводят к величинам, меньшим основных в $10^2 - 10^3$ раз, и поэтому не учитываются. Величина $B^* - A^*$ также существенно меньше, чем $C^* - A^*$ (приблизительно в 160 раз). Оценка членов уравнений (1) для

p, q приводит с учетом выражений (4) после усреднения по быстрой фазе φ к упрощенной аналитической модели вида

$$\begin{aligned} \dot{p} + N_p q &= \kappa_q r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos \nu, & N_{p,q} &\approx N = \frac{2\pi}{T_1} \approx 0.84\omega_* \\ \dot{q} - N_q p &= -\kappa_p r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos \nu, & p(0) &= p^0, \quad q(0) = q^0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь κ_p, κ_q — средние значения $\delta J_{pr}/B^*$, $\delta J_{qr}/A^*$, которые могут быть медленными функциями. Величины χ_p, χ_q получаются в результате усреднения по φ коэффициентов при $\cos \nu$ в компонентах момента гравитационных сил Солнца. Они обусловлены, как отмечалось, суточными приливами. Моменты сил гравитации Луны не учитываются из-за относительной малости их влияния на нутационные колебания вследствие значительного различия частот. Правые части уравнений (5) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясняющее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ. Хотя чувствительность коэффициентов $\kappa_{p,q}$ на 5 порядков выше, чем $\chi_{p,q}$, явный регулярный механизм годичного (силомоментного) воздействия с требуемой согласно оценкам амплитудой $M_h \sim 10^{20} \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$ посредством внутренних геофизических факторов (атмосферных, океанических, сезонных и т. п.) представляется несостоятельным в механическом аспекте. Частотный анализ годичной компоненты колебаний также свидетельствует о несостоятельности геофизической интерпретации [1].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Величины коэффициентов $\kappa_{p,q}, \chi_{p,q}$ и начальные значения p^0, q^0 в (5) неизвестны. Они подлежат определению на основе данных наблюдений МСВЗ [3]. Вводя переменные $x(\tau) = p(t), y(\tau) = q(t)$, где $\tau = t/T_h$ — время, измеряемое годами, получим структуру решения системы (5) вида [10]:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= c_x^0 + c_x^1 \tau - a_x^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_x^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &\quad - \frac{\Omega}{1-\Omega^2} d_x^c \cos 2\pi\tau - \frac{1}{1-\Omega^2} d_x^s \sin 2\pi\tau; \\ y(\tau) &= c_y^0 + c_y^1 \tau + a_y^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_y^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &\quad - \frac{\Omega}{1-\Omega^2} d_y^c \cos 2\pi\tau + \frac{1}{1-\Omega^2} d_y^s \sin 2\pi\tau; \\ \Omega &= 0.845. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $a_{x,y}^{c,s}$, $c_{x,y}^{0,1}$, $d_{x,y}^{c,s}$ величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов [11] по данным измерений МСВЗ [3]. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными, содержащимися в системе (5). При этом следует иметь в виду равенства

$$-a_x^c = a_y^s, \quad a_x^s = a_y^c; \quad -\Omega d_x^c = d_y^s, \quad d_x^s = \Omega d_y^c, \quad (7)$$

являющиеся структурным свойством модели.

Далее излагаются результаты расчетов на основе метода наименьших квадратов [11], который применялся независимо к переменным $x(\tau)$, $y(\tau)$ в виде шестимерной аппроксимации согласно модели (6):

$$\begin{aligned} x(\tau) &= 0.0839 + 0.0033\tau - 0.0027 \cos(2\pi\Omega\tau) - 0.0464 \sin(2\pi\Omega\tau) - \\ &\quad - 0.0221 \cos(2\pi\tau) - 0.0946 \sin(2\pi\tau), \\ y(\tau) &= 0.3266 + 0.0062\tau - 0.0482 \cos(2\pi\Omega\tau) + 0.0027 \sin(2\pi\Omega\tau) - \\ &\quad - 0.0862 \cos(2\pi\tau) + 0.0170 \sin(2\pi\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

$\Omega = 0,845.$

Сравнение коэффициентов (в соответствии со структурным свойством (7)) определяющих чандлеровские составляющие колебаний, а также коэффициентов (с учетом множителя $\Omega = 0,845$), отвечающих годичной компоненте подтверждает указанное выше структурное свойство модели.

На фиг. 3 и 4 приводятся экспериментальные данные и теоретические кривые соответственно $x(\tau)$ и $y(\tau)$, состоящие из интерполяции ежедневных измерений на 7-летнем промежутке времени, начиная с 2010 г. по конец 2016 г., и прогноза до конца 2018 г. Максимальные отклонения интерполяционной кривой от экспериментальных данных равны $\Delta_x = 0,0472$, $\Delta_y = 0,0318$, что свидетельствует об удовлетворительной точности построенной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Надежный прогноз движения полюса весьма важен при решении задач инерциальной навигации [6] на достаточно длительных для практических целей интервалах времени и при исследованиях ряда астрометрических и геофизических проблем [1, 5].

Данная модель участвовала в международном конкурсе [12], где были представлены другие модели, построенные на использовании разного рода математических подгонок и аппроксимаций и содержащие большое количество подгоночных коэффициентов. Несмотря на простоту и малое количество параметров (всего 6), данная модель по предсказанию положения полюса вошла в число лидеров.

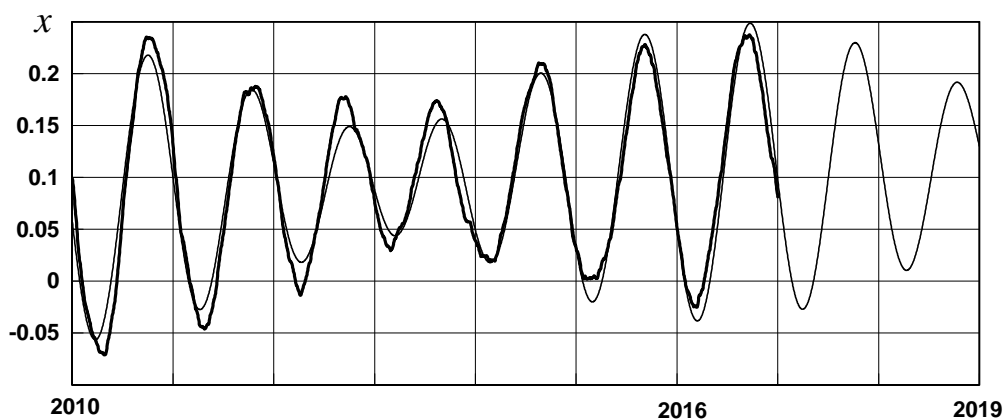


Рис. 3. Компонента x : экспериментальные данные и теоретическая кривая, состоящая из интерполяции на 7-летнем промежутке времени, начиная с 2010 г. по конец 2016 г., и прогноза на два года.

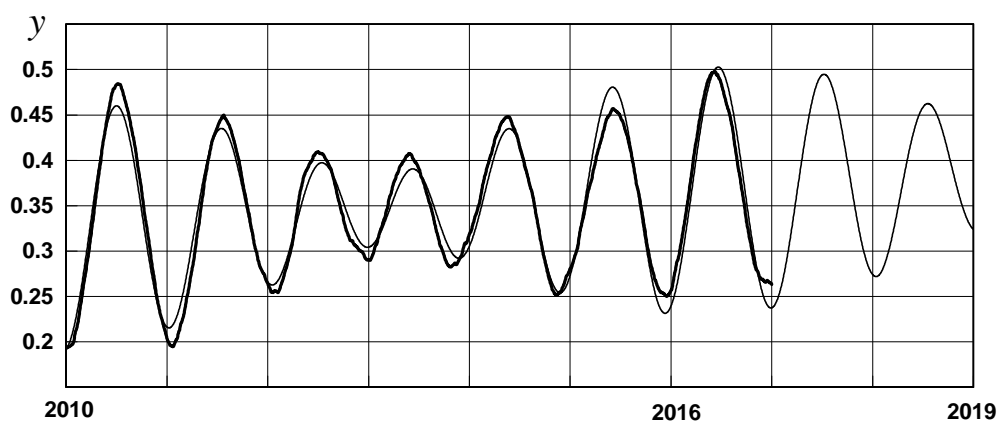


Рис. 4. Компонента y : экспериментальные данные и теоретическая кривая, состоящая из интерполяции на 7-летнем промежутке времени, начиная с 2010 г. по конец 2016 г., и прогноза на два года.

Работа выполнена в рамках государственного задания АААА-А17-117021310387-0, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00538, 17-08-00742 и 18-01-00812).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манк, У., Макдональд, Г. Вращение Земли. — М.: Мир, 1964. — 384 с.
MUNK, W. H. & MACDONALD G. T. F. (1960) *The Rotation of the Earth*. Cambridge Univ. Press.

2. Мориц, Г., Мюллер, А. Вращение Земли: Теория и наблюдения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 512 с.
MORITZ, H. & MUELLER, I. I. (1987) *Earth Rotation: Theory and Observation*. N.-Y.: Ungar.
3. *IERS Annual Reports, 1990 July 1991 bis 2000 July 2001*. (2000). Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris.
4. Кумакшев, С. А. Гравитационно-приливная модель колебаний полюсов Земли // Изв. РАН. МТТ. — М.: Наука, 2018. — № 2. — С. 48–53.
KUMAKSHEV, S. A. (2018) Gravitational-Tidal Model of Oscillations of Earth's Poles. *Mechanics of Solids*. 53 (2). p. 159–163.
5. Авсюк, Ю. Н. Приливные силы и природные процессы. — М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. — 188 с.
AVSYUK, Yu. N. (1996) *Tidal Forces and Natural Processes*. Inst. Physics of the Earth RAS, Moscow.
6. Ишлинский, А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976. — 670 с.
ISHLINSKIY, A. Yu. (1976) *Orientation, gyroscopes and inertial navigation*. Moscow: Nauka.
7. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 310 с.
ILYUSHIN, A. A. (1990) *Continuum mechanics*. Moscow: Moscow University Press.
8. AKULENKO, L. D., KUMAKSHEV, S. A., MARKOV, Yu. G. & RYKHLOVA, L. V. (2005) A gravitational-tidal mechanism for the earth's polar oscillations. *Astronomy Reports*. 49 (10). p. 847–857.
9. Белецкий, В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во МГУ, 1975. — 308 с.
BELETSKII, V. V. (1975) *Satellite Motion about the Center of Mass in Gravitational Field*. Moscow: Izdat. MGU.
10. KLIMOV, D. M., AKULENKO, L. D. & KUMAKSHEV, S. A. (2013) Mechanical model of the perturbed motion of the earth with respect to the barycenter. *Doklady Physics*. 58 (11). p. 505–509.

11. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1962. — 352 с.
LINNIK, J. W. (1961) *Method of least squares and principles of the theory of observations*. Pergamon Press, New York-Oxford-London-Paris.
12. KALARUS, M., SCHUH, H., KOSEK, W., AKYILMAZ, O., BIZOUARD, Ch., GAMBIS, D., GROSS, R., JOVANOVIĆ, B., KUMAKSHEV, S., KUTTERER, H., MENDES CERVEIRA, P. J., PASYNOK, S. & ZOTOV, L. (2010) Achievements of the Earth orientation parameters prediction comparison campaign. *Journal of Geodesy*. 84. p. 587–596.

УДК: 517.98; 519.46

MSC2010: 46L08, 46L05

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДИЛАТАЦИИ

© Я. В. Эльсаев

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РАН
УЛ.МАРКУСА, 22, 362027, ВЛАДИКАВКАЗ, РОССИЯ.
E-MAIL: plimarat@yandex.ru

ON SOME DILATION PROBLEM.

Elsaev Ya. V.

Abstract. The study of completely positive linear maps is motivated by applications of the theory of completely positive linear maps to quantum information theory, where operator valued completely positive linear maps on C^* -algebras are used as a mathematical model for quantum operations and quantum probability. Stinespring in the first part of 20 century showed that a completely positive linear map φ from \mathcal{A} to the C^* -algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ of all bounded linear operators acting on a Hilbert space \mathcal{H} is of the form $\varphi(\cdot) = S^*\pi(\cdot)S$, where π is a $*$ -representation of \mathcal{A} on a Hilbert space \mathcal{K} and S is a bounded linear operator from \mathcal{H} to \mathcal{K} . The aim of this article is to consider some dilation problem for completely positive maps defined on an abstract Hilbert C^* -module and taking value in a Hilbert C^* -module of linear continuous operators from a Hilbert space H to a Hilbert space K . We prove an analogue of Stinespring theorem for these maps and show that any two minimal Stinespring representations are unitarily equivalent.

Keywords: *Completely positive maps, $*$ -representation, locally compact group, Stinespring representation, Hilbert C^* -module, locally C^* -algebra.*

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теория модулей над инволютивными топологическими алгебрами является активно развивающейся областью современной математики, находящейся на стыке многих высокоразвитых дисциплин, что нашло отражение и в монографической литературе [3, 15]. В последние годы в поле зрения исследователей оказались вполне положительные отображения, действующие в таких модулях ([1, 2, 4, 5, 9, 13, 14]). Известная конструкция Стайнспринга ([16]), позволяющая рассматривать вполне положительное отображение на C^* -алгебре со значением в гильбертовом пространстве H , как $*$ -представление этой же алгебры, но в некотором другом гильбертовом пространстве K , в некотором смысле имеет место и для гильбертовых C^* -модулей. Цель настоящей заметки — продолжить этот круг исследований и получить обобщенную

конструкцию Стайнспринга для конечных наборов ковариантных относительно действия локально компактной группы, вполне положительных отображений, заданных на гильбертовом модуле над локальной C^* -алгеброй.

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего раздела — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о локальных C^* -алгебрах и гильбертовых модулях над ними можно найти в [6, 12]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

Алгебра с инволюцией A называется инволютивной *ЛМС-алгеброй*, если A — это локально выпуклое топологическое векторное пространство, где топология задается семейством полуноrm $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ для любых $x, y \in A$ и любого $\lambda \in \Lambda$;
- б) $p_\lambda(x) = p_\lambda(x^*)$ для любых $x \in A, \lambda \in \Lambda$.

Если инволютивная ЛМС-алгебра полна, то она называется локальной C^* -алгеброй, если справедливо равенство

- с) $p_\lambda(xx^*) = p_\lambda(x)^2$ для любых $x, y \in A, \lambda \in \Lambda$.

Полунорма, обладающее указанными свойствами называется C^* -полунормами. Множество всех C^* -полунорм алгебры A обозначим через $S(A)$. На множестве $S(A)$ можно ввести частичный порядок $p \leq q$ если $p(x) \leq q(x)$ для любого $x \in A$. Если в локальной C^* -алгебре существует единица, то алгебра называется *унитальной*. Рассмотрим некоторые примеры локальных C^* -алгебр.

Пример 1. Каждая C^* -алгебра является локальной C^* -алгеброй.

Пример 2. Каждая замкнутая \star -подалгебра локальной C^* -алгебры также является локальной C^* -алгеброй.

Пример 3. Пусть Δ — направленное вверх множество индексов, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ — семейство гильбертовых пространств, таких что $H_\lambda \subset H_\mu$ и

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda = \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu|_{H_\lambda}, \lambda \leq \mu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ — скалярное произведение в пространстве H_λ , $\lambda \in \Delta$. Рассмотрим теперь локально выпуклое пространство

$$H := \lim_{\rightarrow} H_\lambda = \bigcup_{\lambda} H_\lambda.$$

Это пространство с топологией индуктивного предела называется *локальным гильбертовым пространством*. Обозначим через $L(H)$ пространство линейных операторов $T : H \rightarrow H$, таких что

$$T = \lim_{\rightarrow} T_{\lambda}, T_{\lambda} \in L(H_{\lambda}),$$

где $L(H_{\lambda})$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H_{λ} и $(T_{\lambda})_{\lambda \in \Delta}$ — семейство операторов $T_{\lambda} \in L(H_{\lambda})$ для любого $\lambda \in \Delta$. Тогда $L(H)$ будет алгеброй и кроме того с каждым семейством $(T_{\lambda})_{\lambda \in \Delta}$ можно связать семейство $(T_{\lambda})_{\lambda \in \Delta}^*$, где $T_{\lambda}^* \in L(H_{\lambda})$. Тогда отображение

$$\star : L(H) \rightarrow L(H); T \mapsto T^* = \lim_{\rightarrow} T_{\lambda}^*$$

будет инволюцией, заданной на $L(H)$. Если $\|\cdot\|_{\lambda}$ — операторная норма, заданная на $L(H_{\lambda})$, то функция

$$p_{\lambda}(T) := \|T_{\lambda}\|_{\lambda}; T \in L(H)$$

будет C^* -полунормой на $L(H)$ для каждого $\lambda \in \Delta$ и $L(H)$ — это локальная C^* -алгебра относительно семейства полунорм $\{p_{\lambda}\}_{\lambda \in \Delta}$.

Пусть $H = \lim_{\rightarrow} H_{\lambda}$ и $K = \lim_{\rightarrow} K_{\lambda}$ — локальные гильбертовы пространства. Линейный оператор $T : H \rightarrow K$ называется *унитарным (изометрическим)*, если для любого $\lambda \in \Delta$, $T_{\lambda} : H_{\lambda} \rightarrow K_{\lambda}$ — унитарный (изометрический) оператор, действующий в гильбертовых пространствах H_{λ} и K_{λ} и $T = \lim_{\rightarrow} T_{\lambda}$. Аналогично определяется частичная изометрия $T : H \rightarrow K$. Линейный оператор $T : H \rightarrow K$ называется *частичной коизометрией*, если $T^* : K \rightarrow H$ — частичная изометрия.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. ([7], Теорема 5.1). *Каждая локальная C^* -алгебра A изоморфна замкнутой \star -подалгебре $L(H)$, где H — некоторое локальное гильбертово пространство.*

Пусть A и B локальные C^* -алгебры. Линейное отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется *(\star)-гомоморфизмом* алгебр A и B , если для любых $x, y \in A$ выполняются равенства:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y); \varphi(x^*) = \varphi(x)^*.$$

Пусть A — локальная C^* -алгебра, а H — локальное гильбертово пространство. *Представлением* алгебры A в H называется непрерывный \star -гомоморфизм из A в $L(H)$.

Напомним, что для локальной C^* -алгебры A элемент $x \in A$ называется *положительным*, если $x = x^*$ и $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(x)$ — это спектр элемента x .

Через $M_n(A)$ обозначим \star -алгебру всех матриц над алгеброй A , где сложение и умножение матриц, а также умножение на элемент основного поля задаются как и в

случае скалярных матриц. Линейное отображение $\varphi : A \rightarrow B$ локальных C^* -алгебр называется *вполне положительным*, если линейное отображение $\varphi^n : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$, заданное формулой

$$\varphi^n([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n,$$

является положительным для всех $n \in \mathbb{N}$.

Квадратную $n \times n$ матрицу линейных отображений $(\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ из A в B можно рассматривать как линейное отображение $[\varphi] : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$ матричных алгебр, заданное формулой

$$[\varphi]((a_{ij})_{i,j=1}^n) = (\varphi_{ij}(a_{ij}))_{i,j=1}^n.$$

Будем говорить, что матрица $(\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ — это *n -вполне положительное* отображение из A в B , если $[\varphi]$ — вполне положительное отображение из $M_n(A)$ в $M_n(B)$.

Предгильбертовым A -модулем называется комплексное векторное пространство E , которое также является правым A -модулем, снабженное полуторалинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow A$, удовлетворяющее свойствам

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ для любого } x \in E; \quad (1)$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ для любого } x \in E; \quad (2)$$

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \text{ для любых } x, y \in E; \quad (3)$$

$$\langle x, ya \rangle = \langle y, x \rangle a \text{ для любых } x, y \in E; a \in A. \quad (4)$$

Будем говорить, что E — это *гильбертов A -модуль*, если E полон как топологическое векторное пространство относительно топологии, задаваемой системой полунорм:

$$\{\bar{p}\}_{p \in S(A)}, \text{ где } \bar{p} := \sqrt{p\langle x, x \rangle}, x \in E.$$

Гильбертов модуль E над локальной C^* -алгеброй A называется *полным*, если A совпадает с подалгеброй, порожденной элементами $\{\langle x, y \rangle : x, y \in E\}$. Пусть E и F — гильбертовы модули над локальной C^* -алгеброй A . \mathbb{C} -линейное и A -линейное отображение $T : E \rightarrow F$ называется *ограниченным* оператором из E в F , если для каждой полунормы $p \in S(A)$ найдется такое число $M_p > 0$, что справедливо неравенство $\bar{p}_F(Tx) \leq M_p \bar{p}_E(x)$ для любых $x \in E$. Будем говорить, что ограниченный оператор $T : E \rightarrow F$ *допускает сопряженный*, если существует ограниченный оператор $T^* : F \rightarrow E$, такой что для любых $x \in E, y \in F$ справедливо равенство

$$\langle y, Tx \rangle = \langle T^*y, x \rangle.$$

Множество всех операторов, допускающих сопряженный, действующих в гильбертовых A -модулях E в F , обозначается через $L_A(E, F)$. Множество $L_A(E, F)$ является

локальной C^* -алгеброй с топологией, задаваемой семейством C^* -полунорм $(\bar{p})_{p \in S(A)}$ и инволюцией $T \mapsto T^*$.

Следующая конструкция доставляет важный пример гильбертовых A -модулей. Пусть H и K — локальные гильбертовы пространства. Тогда $L(H, K)$ будет гильбертовым $L(H)$ -модулем со следующими операциями:

модульное отображение — $(T, S) \mapsto TS : L(H, K) \times L(H) \rightarrow L(H, K)$, для любых $T \in L(H, K)$, $S \in L(H)$;

внутреннее произведение — $(T, S) \mapsto T^*S : L(H, K) \times L(H, K) \rightarrow L(H)$, для любых $T, S \in L(H, K)$.

Пусть A, B — локальные C^* -алгебры, E, F — гильбертовы модули над алгебрами A и B соответственно. Отображение u называется φ -морфизмом (φ -отображением) гильбертовых модулей, если найдется непрерывный \star -гомоморфизм (отображение) $\varphi : A \rightarrow B$, такой что $\langle u(x), u(y) \rangle = \varphi(\langle x, y \rangle)$ для любых $x, y \in E$. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — непрерывный \star -гомоморфизм. Отметим, что для φ -морфизма $u : E \rightarrow F$ справедливы следующие свойства ([10], Замечание 3.2):

1) u — линейное, непрерывное отображение;

2) $u(xa) = u(x)\varphi(a)$ для любых $x \in E$, $a \in A$. Можно показать, что непрерывность отображения $\varphi : A \rightarrow B$ влечет непрерывность φ -отображения $u : E \rightarrow F$. Изоморфизмом гильбертовых модулей E и F называется биективное отображение $u : E \rightarrow F$, такое что u и u^{-1} — морфизмы гильбертовых модулей. Если E и F полные гильбертовы модули, а $u : E \rightarrow F$ — изоморфизм, то $\varphi : A \rightarrow B$ — изоморфизм локальных C^* -алгебр ([10], Утверждение 3.4). Пусть A — локальная C^* -алгебра, H и K — локальные гильбертовы пространства. Представлением гильбертова A -модуля E в пространствах H и K называется непрерывный морфизм $\pi_E : E \rightarrow L(H, K)$.

Пусть X — топологическое векторное пространство и $A \subset X$. Через $[A]$ обозначим замкнутое линейное подпространство в X , порожденное множеством A .

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим гильбертов A -модуль E над локальной C^* -алгеброй A . Пусть H, K — локальные гильбертовы пространства и $\Phi_i, i \in \{1, \dots, n\}$ — отображения $\Phi_i : E \rightarrow L(H, K)$.

Набор n отображений $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ называется *вполне положительным*, если существует n -вполне положительное отображение $[\varphi]$ из A в $L(H)$, такое что

$$[\langle \Phi_i(x), \Phi_j(y) \rangle]_{i,j=1}^n = [\varphi_{ij} \langle x, y \rangle]_{i,j=1}^n, \quad \forall x, y \in E.$$

Пусть G — локально компактная группа и E — полный гильбертов A -модуль. Непрерывным действием G на E называется унитарный гомоморфизм групп $t \mapsto \eta_t$, из G в $\text{Aut}(E)$ — группу всех изоморфизмов гильбертова A -модуля, такой что отображение $t \mapsto \eta_t(x)$ из G в E непрерывно для любого $x \in E$. Тройка (G, η, E) называется *динамической системой* на гильбертовом A -модуле E . Пусть $t \mapsto u_t$ и $t \mapsto u'_t$ — унитарные представления G на локальных гильбертовых пространствах H и K . Конечный набор $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ вполне положительных, непрерывных отображений $\Phi_i : E \rightarrow L(H, K)$ называется (u', u) -ковариантным относительно (G, η, E) , если для любых $x \in E$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \in G$ выполняется равенство

$$\Phi_i(\eta_t(x)) = u'_t \Phi_i(x) u_t^*.$$

Отметим, что непрерывное действие $t \mapsto \eta_t$ группы G на E индуцирует однозначно определенное непрерывное действие α_t^η группы G на алгебре A ([10], Утверждение 3.8). Пусть (G, η, E) динамическая система на гильбертовом A -модуле E . Ковариантным представлением динамической системы (G, η, E) называется пятерка (w, π_E, v, H, K) , где H и K — локальные гильбертовы пространства, $\pi_E : E \rightarrow L(H, K)$ представление гильбертова A -модуля E , $v : G \rightarrow U(H)$ и $w : G \rightarrow U(K)$ — унитарные \star -представления G в H и K соответственно, такие, что

$$\pi_E(\eta_t(x)) = w_t \pi_E(x) v_t^*$$

для любых $t \in G$ и $x \in E$.

Следующая теорема является обобщенной, ковариантной версией конструкции Стайнспринга для $[\varphi]$ -отображений, где $[\varphi]$ — n -вполне положительное, непрерывное отображение.

Теорема 2. Пусть A — унитарная локальная C^* -алгебра относительно семейства полунорм $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, E — полный гильбертов A -модуль, $H = \varinjlim H_\lambda$ и $K = \varinjlim K_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ — локальные гильбертовы пространства, $[\varphi] : A \rightarrow L(H)$ — непрерывное, n -вполне положительное отображение, $\Phi_i : E \rightarrow L(H, K)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ — $[\varphi]$ -вполне положительный, (u', u) -ковариантный относительно (G, η, E) набор отображений. Тогда существуют локальные гильбертовы пространства — H^Φ, K^Φ , ковариантное представление гильбертова модуля E — $(w^\Phi, \pi^\Phi, v^\Phi, H^\Phi, K^\Phi)$, семейства изометрий $S_i^\Phi : H \rightarrow H^\Phi$ и частичных коизометрий $W_i^\Phi : K \rightarrow K^\Phi$, $i \in \{1, \dots, n\}$, такие что:

1. $\Phi_i(x) = W_i^* \pi^\Phi(x) S_i$ для любого $x \in E$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$;

2. $w_t^\Phi S_i^\Phi = S_i^\Phi u_t$ для любого $t \in G$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$;
3. $w_t^\Phi W_i^\Phi = W_i^\Phi u_t'$ для любого $t \in G$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$;
4. $\{\{\pi^\Phi(E)S_i^\Phi(H)\}; 1 \leq i \leq n\} = K_\Phi$;
5. $\{\{\pi^{[\varphi]}(A)S_i^\Phi(H)\}; 1 \leq i \leq n\} = H_\Phi$, где $\pi^{[\varphi]} : L(H_\Phi) \rightarrow L(H_\Phi)$ — непрерывный \star -гомоморфизм, ассоциированный с π^Φ .

Доказательство. Докажем существование π^Φ , H^Φ и $S_1^\Phi, \dots, S_n^\Phi$. Мы обозначим через $(A \otimes H)^n$ прямую сумму n -копий алгебраического тензорного произведения $A \otimes H$. Отметим, что произвольный элемент векторного пространства $(A \otimes H)^n$ имеет вид

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1} a_{1s} \otimes \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^{m_n} a_{ns} \otimes \xi_{ns}\right) \text{ и } m = \max\{m_1, \dots, m_n\}.$$

Дополнив суммы при необходимости нулями, можем полагать, что произвольный элемент пространства $(A \otimes H)^n$ можно представить как $\sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n$. Рассмотрим теперь на векторном пространстве $(A \otimes H)^n$ семейство отображений $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda : (A \otimes H)^n \times (A \otimes H)^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda$, заданных следующим образом:

$$\left\langle \sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n, \sum_{t=1}^l (b_{jt} \otimes \eta_{jt})_{j=1}^n \right\rangle_\lambda = \sum_{s,t=1}^{m,l} \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, \varphi_{ij}(a_{is}^* b_{jt}) \eta_{jt} \rangle_\lambda.$$

При каждом $\lambda \in \Lambda$ отображение является \mathbb{C} -линейным по второй переменной и сопряженно-линейным по первой. Кроме того, справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \left(\left\langle \sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n, \sum_{t=1}^l (b_{jt} \otimes \eta_{jt})_{j=1}^n \right\rangle_\lambda \right)^* &= \sum_{s,t=1}^{m,l} \sum_{i,j=1}^n \left(\langle \xi_{is}, \varphi_{ij}(a_{is}^* b_{jt}) \eta_{jt} \rangle_\lambda \right)^* = \\ &= \sum_{s,t=1}^{m,l} \sum_{i,j=1}^n \langle \eta_{jt}, (\varphi_{ij}(a_{is}^* b_{jt}))^* \xi_{is} \rangle = \left\langle \sum_{t=1}^l (b_{jt} \otimes \eta_{jt})_{j=1}^n, \sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n \right\rangle_\lambda \end{aligned}$$

для любых $(a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n, (b_{jt} \otimes \eta_{jt})_{j=1}^n \in (A \otimes H_1)^n$, $\lambda \in \Lambda$. Наконец, имеет место еще одно свойство отображения $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$, позволяющее задать на подходящем факторпространстве $(A \otimes H)^n$ скалярное произведение

$$\left\langle \sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n, \sum_{s=1}^m (a_{is} \otimes \xi_{is})_{i=1}^n \right\rangle_\lambda \geq 0.$$

Неотрицательность в последнем неравенстве обеспечивается тем, что $[\varphi]$ является вполне положительным отображением из $M_n(A)$ в $M_n(L(H))$. Пусть теперь

$$M_\lambda := \{\zeta : (A \otimes H)^n; \langle \zeta, \zeta \rangle_\lambda = 0\}.$$

Используя неравенство Коши–Шварца, получаем что M_λ — подпространство в $(A \otimes H)^n$. Тогда на факторпространстве $(A \otimes H)^n/M_\lambda$ можно задать скалярное произведение следующей формулой

$$\langle \zeta_1 + M_\lambda, \zeta_2 + M_\lambda \rangle := \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_\lambda.$$

Оставим для такого скалярного произведения то же обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$. Пополнение $(A \otimes H)^n/M_\lambda$ относительно нормы, заданной скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ обозначим через H_λ^Φ . Пусть кроме того $M = \lim_{\rightarrow} M_\lambda$. Имеет место вложения гильбертовых пространств $H_\lambda^\Phi \hookrightarrow H_\mu^\Phi$, $\lambda \leq \mu$ и $H^\Phi = \lim_{\rightarrow} H_\lambda^\Phi$ — локальное гильбертово пространство. Отметим, что H^Φ совпадает с пополнением $(A \otimes H)^n/M$ относительно топологии, индуцированной семейством полунорм, ассоциированных с $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через ξ_i элемент в $(A \otimes H)^n$, где i -компонента имеет вид $1 \otimes \xi$ и на остальных позициях стоят нули. Теперь мы можем задать отображения $S_i^\Phi : H \rightarrow H^\Phi$ формулой

$$S_i^\Phi(\xi) = \xi_i + M.$$

Обозначим через $\xi_{a,i}$ такой элемент пространства $(A \otimes H)^n/M$, что i -компонента имеет вид $a \otimes \xi$ и на остальных позициях находятся нули. Пусть $a \in A$. Рассмотрим линейное отображение $\pi^{[\varphi]}(a) : (A \otimes H)^n \rightarrow (A \otimes H)^n$, заданное формулой

$$\pi^{[\varphi]}(a)(a_i \otimes \xi_i)_{i=1}^n = (aa_i \otimes \xi_i)_{i=1}^n.$$

Оператор $\pi^{[\varphi]}(a)$ можно продолжить по непрерывности до линейного отображения из H^Φ в H^Φ . При этом мы сохраним то же обозначение — $\pi^{[\varphi]}(a)$. Доказательство того факта, что $\pi^{[\varphi]}$ является представлением алгебры A в локальном гильбертовом пространстве H^Φ , проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.3.2 из [8]. Непосредственно проверяется, что $\pi^{[\varphi]}(a_i)S_i^\Phi \xi_i = \xi_{i,a} + M$. Таким образом, подпространство, порожденное элементами $\pi^{[\varphi]}(a_i)S_i^\Phi \xi_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i \in H$, $a_i \in A$, есть в точности $(A \otimes H)^n/M$. Отсюда получаем равенство (5).

Введем пространство $K^\Phi := [\{\Phi_i(E)(H)\}]$, ($i = 1, \dots, n$). Теперь мы можем задать оператор $\pi^\Phi : E \rightarrow L(H^\Phi, K^\Phi)$ формулой

$$\pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s})S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns})S_n^\Phi \xi_{ns} \right) :=$$

$$\sum_{s=1}^m \Phi_1(xa_{1s})\xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \Phi_n(xa_{ns})\xi_{ns} = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \Phi_i(xa_{is})\xi_{is},$$

где $x \in E$, $a_{is} \in A$, $\xi_{is} \in H$, $1 \leq s \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что линейное отображение $\pi^\Phi(x)$ непрерывно. Действительно, для любого $\lambda \in \Lambda$ имеют место формулы:

$$\begin{aligned} & \left\| \pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s})S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns})S_n^\Phi \xi_{ns} \right) \right\|_\lambda^2 = \\ & \left\| \sum_{s=1}^m \Phi_1(xa_{1s})\xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \Phi_n(xa_{ns})\xi_{ns} \right\|_\lambda^2 = \\ & \left\langle \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \Phi_i(xa_{is})\xi_{is}, \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n \Phi_j(xa_{jr})\xi_{jr} \right\rangle_\lambda = \\ & \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, \Phi_i(xa_{is})^* \Phi_j(xa_{jr})\xi_{jr} \rangle_\lambda = \\ & \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, \varphi_{ij}(\langle xa_{is}, xa_{jr} \rangle) \xi_{jr} \rangle_\lambda = \\ & \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, (S_i^\Phi)^* \pi^{[\varphi]}(a_{is}^* \langle x, x \rangle a_{jr}) S_j^\Phi \xi_{jr} \rangle_\lambda = \\ & \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \pi^{[\varphi]}(a_{is})S_i^\Phi(\xi_{is}), \pi^{[\varphi]}(\langle x, x \rangle) \pi^{[\varphi]}(a_{jr})S_j^\Phi \xi_{jr} \rangle_\lambda = \\ & \left\langle \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{is})S_i^\Phi(\xi_{is}), \pi^{[\varphi]}(\langle x, x \rangle) \left(\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{jr})S_j^\Phi \xi_{jr} \right) \right\rangle_\lambda \leq \\ & \left\| \pi^{[\varphi]}(\langle x, x \rangle) \right\|_\lambda \left\| \left(\sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{i,r})S_i^\Phi \xi_{i,r} \right) \right\|_\lambda^2 \leq \\ & \|x\|_\lambda^2 \left\| \left(\sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{i,r})S_i^\Phi \xi_{i,r} \right) \right\|_\lambda^2. \end{aligned}$$

Таким образом оператор $\pi^\Phi(x)$ непрерывен на плотном подпространстве H^Φ и может быть продолжен на все пространство H^Φ . Для продолженного оператора сохраним то же обозначение. Покажем, что отображение π^Φ является представлением гильбертового A -модуля. Рассмотрим $x, y \in E$; $a_{is}, b_{jr} \in A$; $\xi_{is}, \eta_{jr} \in H$; $1 \leq i, j \leq n$; $1 \leq s \leq l$, $1 \leq r \leq m$; $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда можем написать —

$$\left\langle (\pi^\Phi(x))^* \pi^\Phi(y) \left(\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n \pi^{[\varphi]}(b_{j,r})S_j^\Phi \eta_{j,r} \right), \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{i,s})S_i^\Phi \xi_{i,s} \right\rangle_\lambda =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n \Phi_j(yb_{jr})\eta_{jr}, \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^n \Phi_i(xa_{is})\xi_{is} \right\rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi_i(xa_{is})^* \Phi_j(yb_{jr})\eta_{jr}, \xi_{is} \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_{ij}(\langle xa_{is}, yb_{jr} \rangle) \eta_{jr}, \xi_{is} \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle (S_i^\Phi)^* \pi^{[\varphi]}(a_{is}^* \langle x, y \rangle a_{jr}) S_j^\Phi \eta_{jr}, \xi_{is} \rangle_\lambda = \\
&= \left\langle \pi^{[\varphi]}(\langle x, y \rangle) \left(\sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^n \pi^{[\varphi]}(b_{j,r}) S_j^\Phi \eta_{j,r} \right), \sum_{s=1}^l \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{i,s}) S_i^\Phi \xi_{i,s} \right\rangle_\lambda
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство

$$\pi^\Phi(x)^* \pi^\Phi(y) = \langle \pi^\Phi(x), \pi^\Phi(y) \rangle = \pi^{[\varphi]}(\langle x, y \rangle)$$

выполняется на плотном подпространстве пространства H^Φ . Отсюда, в силу непрерывности, получаем, что операторы $\langle \pi^\Phi(x), \pi^\Phi(y) \rangle$ и $\pi^{[\varphi]}(\langle x, y \rangle)$ совпадают на всем пространстве H^Φ . Заметим, что $K^\Phi \subset K$. Обозначим замкнутое подпространство $[\Phi_i(E)(H)]$ пространства K через K_i^Φ . Пусть $W_i^\Phi := P_{K_i^\Phi}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ — ортогональный проектор на подпространство K_i^Φ . Тогда получаем, что оператор $(W_i^\Phi)^* : K_i^\Phi \rightarrow K$ является оператором включения. Следовательно $W_i^\Phi(W_i^\Phi)^* = I_{K_i^\Phi}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Для любых $x \in E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\xi \in H$, имеем

$$\Phi_i(x)(\xi) = (W_i^\Phi)^* \pi^\Phi(x) S_i^\Phi(\xi).$$

Также выше нами установлено равенство (4). Зададим теперь $v^\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(H^\Phi) = U(H^\Phi)$ -действие группы G в локальном гильбертовом пространстве H^Φ . На первом этапе определим v^Φ на плотном подпространстве $(A \otimes H)^n / M$ формулой

$$\begin{aligned}
v^\Phi(t) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) &= \\
v^\Phi(t) \left(\sum_{s=1}^m a_{1s} \otimes \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m a_{ns} \otimes \xi_{ns} \right) &= \\
\left(\sum_{s=1}^m \alpha_t^\eta a_{1s} \otimes u_t \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \alpha_t^\eta a_{ns} \otimes u_t \xi_{ns} \right) &=
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_t^\eta a_{1s}) S_1^\Phi(u_t \xi_{1s}), \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_t^\eta a_{ns}) S_n^\Phi(u_t \xi_{ns}) \right).$$

Ясно, что это действие непрерывно. На втором этапе продолжим унитарный оператор $v^\Phi(t)$ по непрерывности до унитарного оператора, заданного на всем пространстве H^Φ . Для продолженного оператора оставим то же обозначение. Пусть $\xi \in H$, $1 \leq i \leq n$. Тогда имеем

$$S_i^\Phi u_t(\xi) = \left(0, \dots, 1 \otimes u_t(\xi), \dots, 0 \right) = v^\Phi(t) S_i^\Phi(\xi),$$

где элемент $1 \otimes u_t(\xi)$ стоит на i -позиции. Таким образом равенство (2) доказано. Так как для любого $1 \leq i \leq n$ отображение $\Phi_i(u', u)$ -ковариантно, то

$$u'_t \left(\sum_{s=1}^m \Phi_i(x_s) \xi_s \right) = \sum_{s=1}^m \Phi_i(\eta_t(x_s)) u_t \xi_s$$

для любых $t \in G$, $x_{is} \in E$, $\xi_{is} \in H$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq s \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Таким образом, пространство $[\Phi_i(E)H]$ инвариантно относительно операторов u'_t , $t \in G$. Отсюда получаем, что $w_t^\Phi W_i^\Phi = W_i^\Phi u'_t$ для любого $t \in G$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, и равенство (3) доказано. Осталось показать, что $(w^\Phi, \pi^\Phi, v^\Phi, H^\Phi, K^\Phi)$ – ковариантное представление динамической системы (G, η, E) . Действительно

$$\begin{aligned} \pi^\Phi(\eta_t(x)) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \Phi_i(\eta_t(x) a_{is}) \xi_{is} = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \Phi_i(\eta_t(x \alpha_{t-1}^\eta(a_{is}))) \xi_{is} = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m u'_t \Phi_i(x \alpha_{t-1}^\eta(a_{is})) u_t^* \xi_{is}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} w_t^\Phi \pi^\Phi(x) v_{t-1}^\Phi \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) = \\ w_t^\Phi \pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m v_{t-1}^\Phi \pi^{[\varphi]}(a_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m v_{t-1}^\Phi \pi^{[\varphi]}(a_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) = \\ w_t^\Phi \pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_{t-1}^\eta(a_{1s})) v_{t-1}^\Phi S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_{t-1}^\eta(a_{ns})) v_{t-1}^\Phi S_n^\Phi \xi_{ns} \right) = \\ w_t^\Phi \pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_{t-1}^\eta(a_{1s})) S_1^\Phi u_t^* \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(\alpha_{t-1}^\eta(a_{ns})) S_n^\Phi u_t^* \xi_{ns} \right) = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m u'_t \Phi_i(x \alpha_{t-1}^\eta(a_{is})) u_t^* \xi_{is}.$$

Так как операторы $w_t^\Phi \pi_\Phi(x) v_{t-1}^\Phi$ и $\pi_\Phi(\eta_t(x))$ совпадают на плотном подпространстве локального гильбертова пространства H^Φ для любых $x \in E$, $t \in G$, получаем, что $(w^\Phi, \pi^\Phi, v^\Phi, H^\Phi, K^\Phi)$ — ковариантное представление. \square

Ниже мы покажем, что локальные гильбертовы пространства H^Φ и K^Φ , фигурирующие в теореме 2, являются каноническими. Установим необходимую для дальнейшего техническую лемму.

Лемма 1. Пусть H, K — локальные гильбертовы пространства, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) : E \rightarrow L(H, K)$ — $[\varphi]$ -вполне положительный набор непрерывных отображений, (u', u) -ковариантных относительно динамической системы (G, η, E) . Тогда n -вполне положительное, непрерывное отображение $[\varphi]$, ассоциированное с Φ , является u -ковариантным относительно динамической системы (G, α^η, A) .

Доказательство. Имеет место следующее равенство

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\alpha_t^\eta(\langle x, y \rangle)) &= \varphi_{ij}(\langle \eta_t(x), \eta_t(y) \rangle) = \\ &= (\langle \Phi_i(\eta_t(x)), \Phi_j(\eta_t(y)) \rangle) = (\langle u'_t \Phi_i(x) u_t^*, u'_t \Phi_j(y) u_t^* \rangle) = \\ &= (u'_t \Phi_i(x) u_t^*)^* u'_t \Phi_j(y) u_t^* = u_t \varphi_{ij}(\langle x, y \rangle) u_t^*. \end{aligned}$$

Доказанное равенство выполняется для всех $x, y \in E$, $t \in G$. В силу полноты гильбертова $L(H)$ -модуля $L(H, K)$, получаем, что $[\varphi]$ является u -ковариантным отображением. \square

Пусть $[\varphi]$, Φ , G и (u', u) такие же, как в теореме 2. Семерку $(w, \pi, v, H', K', (S'_i)_{i=1}^n, (W'_i)_{i=1}^n)$ будем называть *ковариантным представлением Стайнспринга* для $([\varphi], \Phi)$, если выполняются условия (1) — (3) теоремы 2. Такое представление называется *минимальным*, если выполняются следующие условия:

1. $\{\{\pi(E)S'_i(H)\}; 1 \leq i \leq n\} = K'$;
2. $\{\{\rho(A)S'_i(H)\}; 1 \leq i \leq n\} = H'$, где $\rho : L(H') \rightarrow L(H')$ — непрерывный \star -гомоморфизм, ассоциированный с π .

Ясно, что ковариантное представление Стайнспринга, представленное в теореме 2, является минимальным. Следующее утверждение показывает, что минимальное ковариантное представление Стайнспринга единственно с точностью до унитарной эквивалентности.

Теорема 3. Пусть $H, K, [\varphi], u, u', \Phi$ такие же, как в теореме 2.1, и (w, π, v, H', K') — минимальное ковариантное представление Стайнспринга. Тогда существуют унитарные операторы $U_1 : H^\Phi \rightarrow H', U_2 : K^\Phi \rightarrow K'$, такие что:

1. $U_2 \pi^\Phi(x) = \pi(x)U_1; S'_i = U_1 S_i^\Phi; W'_i = U_2 W_i^\Phi, 1 \leq i \leq n;$
2. $v_t U_1 = v_t^\Phi U_1; w_t U_2 = w_t^\Phi U_2$ для любых $x \in E, t \in G.$

Доказательство. Докажем существование унитарного оператора $U_1 : H^\Phi \rightarrow H'.$ Зададим линейный оператор U_1 на плотном подпространстве $(A \otimes H)^n/M$ формулой

$$U_1 \left(\sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \pi^{[\varphi]}(a_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) := \left(\sum_{s=1}^m \rho(a_{1s}) S'_1 \xi_{1s}, \dots, \sum_{s=1}^m \rho(a_{ns}) S'_n \xi_{ns} \right),$$

где $\rho : A \rightarrow L(H')$ — непрерывный \star -гомоморфизм, ассоциированный с $\pi.$ Прямым вычислением показывается, что данное отображение является изометрией на плотном подпространстве. Распространим оператор по непрерывности на все пространство, оставив для него прежнее обозначение. Зададим теперь оператор U_2 на плотном подпространстве — линейном пространстве, порожденном множеством $\{\pi^\Phi(E) S_i^\Phi(H); 1 \leq i \leq n\}.$

$$U_2 \left(\sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right) := \left(\sum_{s=1}^m \pi(x_{1s}) S'_1 \xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \pi(x_{ns}) S'_n \xi_{ns} \right),$$

где $x_{is} \in V, \xi_{is} \in H, m \in \mathbb{N}.$ Используя тот факт, что S_i^Φ, S'_i — изометрические операторы для любого $i \in \{1, \dots, n\},$ имеем

$$U_2 \left(\sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{is}) S_i^\Phi \xi_{ns} \right) = \sum_{s=1}^m \pi(x_{is}) S'_i \xi_{ns},$$

и, следовательно, $U_2(K_i^\Phi) = K'_i.$ Теперь для любого $\lambda \in \Lambda$ можем написать

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sum_{s=1}^m \pi(x_{1s}) S'_1 \xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \pi(x_{ns}) S'_n \xi_{ns} \right) \right\|_\lambda^2 = \\ & = \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \pi(x_{is}) S'_i \xi_{is}, \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m \pi(x_{jr}) S'_j \xi_{jr} \right\rangle_\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \pi(x_{is}) S'_i \xi_{is}, \pi(x_{jr}) S'_j \xi_{jr} \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, S_i'^* \rho(\langle x_{is}, x_{jr} \rangle) S'_j(\xi_{jr}) \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, \varphi_{ij}(\langle xa_{is}, xa_{jr} \rangle)(\xi_{jr}) \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_{is}, (S_i^\Phi)^* \pi^{[\varphi]}(\langle x_{is}, x_{jr} \rangle) S_j^\Phi(\xi_{jr}) \rangle_\lambda = \\
&= \sum_{s,r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \langle \pi^\Phi(x_{is}) S_i^\Phi \xi_{is}, \pi^\Phi(x_{jr}) S_j^\Phi \xi_{jr} \rangle_\lambda = \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{is}) S_i^\Phi \xi_{is}, \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m \pi^\Phi(x_{jr}) S_j^\Phi \xi_{jr} \right\rangle_\lambda = \\
&\quad \left\| \sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{1s}) S_1^\Phi \xi_{1s} + \dots + \sum_{s=1}^m \pi^\Phi(x_{ns}) S_n^\Phi \xi_{ns} \right\|_\lambda^2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что U_2 — это изометрия, и оператор U_2 может быть продолжен на все пространство K^Φ и $U_2(K^\Phi) = K'$. Сохраним для продолженного оператора то же обозначение. Оператор U_2 является унитарным. В силу того, что $(w, \pi, v, H', K', (S'_i)_{i=1}^n, (W'_i)_{i=1}^n)$ и $(w^\Phi, \pi^\Phi, v^\Phi, H^\Phi, K^\Phi, (S_i^\Phi)_{i=1}^n, (W_i^\Phi)_{i=1}^n)$ — представления Стайнспринга для $([\varphi], \Phi)$, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_i(x) &= (W_i^\Phi)^* \pi^\Phi(x) S_i^\Phi = W_i'^* \pi(x) S_i' = \\
&= W_i'^* U_2 \pi^\Phi(x) S_i^\Phi.
\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}
&((W_i^\Phi)^* - W_i'^* U_2) \pi^\Phi(x) S_i^\Phi = 0 \Rightarrow \\
&((W_i^\Phi)^* - W_i'^* U_2) \pi^\Phi(x) S_i^\Phi(\xi) = 0, \forall x \in E, \xi \in H, i \in \{1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $U_2 W_i = W_i'$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Наконец, установим, что $U_2 \pi^\Phi(x) = \pi(x) U_1$ на плотном подпространстве

$$\left\{ \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}); a_{is} \in A, \xi_{is} \in H, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Напомним, что каждое представление $\pi : E \rightarrow L(K_1, K_2)$ гильбертовых A -модулей A -линейно в следующем смысле: $\pi(xa) = \pi(x)\pi(a)$ для любых $x \in E$ и $a \in A$. Используя тот факт, что π и π^Φ это представления гильбертовых A -модулей, ассоциированные

с ρ и $\pi^{[\varphi]}$ соответственно, получаем

$$\begin{aligned} U_2 \pi^\Phi(x) \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right) &= U_2 \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^\Phi(x a_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi(x a_{is}) S_i'(\xi_{is}) = \pi(x) \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \rho(a_{is}) S_i'(\xi_{is}) \right) = \\ &= \pi(x) U_1 \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right). \end{aligned}$$

В силу непрерывности, равенство $U_2 \pi^\Phi(x) = \pi(x) U_1$ выполняется на всем пространстве K^Φ для любого $x \in E$. Докажем (2). Согласно лемме 1 n - вполне положительное отображение $[\varphi] : M_n(A) \rightarrow M_n(L(H))$ является (u, u') -ковариантным и $(\pi^{[\varphi]}, v^\Phi, H^\Phi, (S_i^\Phi)_{i=1}^n)$ будет его ковариантным представлением Стайнспринга. Согласно теореме 6.1.3 из [8], любое другое ковариантное представление Стайнспринга $(\rho, v, H', (S_i')_{i=1}^n)$ унитарно эквивалентно $(\pi^{[\varphi]}, v^\Phi, H^\Phi, (S_i^\Phi)_{i=1}^n)$ и кроме того $S_i' = U_1' S_i^\Phi$, $v_t U_1' = U_1' v_t^\Phi$ для любых $t \in G$, $1 \leq i \leq n$, где $U_1' : H^\Phi \rightarrow H'$ — унитарный оператор, реализующий унитарную эквивалентность между H^Φ и H' . При этом

$$U_1' \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^{[\varphi]}(a_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right) = \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \rho(a_{is}) S_i'(\xi_{is}) \right),$$

Отсюда выводим, что $U_1 = U_1'$. Далее имеем

$$\begin{aligned} w_t U_2 \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^\Phi(x_{is}) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right) &= w_t \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi(x_{is}) S_i'(\xi_{is}) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi(\eta_t(x_{is})) v_t S_i'(\xi_{is}) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi(\eta_t(x_{is})) S_i' v_t(\xi_{is}) = \\ U_2 \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^\Phi(\eta_t(x_{is})) S_i^\Phi v_t(\xi_{is}) \right) &= U_2 \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n w_t^\Phi \pi^\Phi((x_{is})) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right) = \\ &= U_2 w_t^\Phi \left(\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n \pi^\Phi((x_{is})) S_i^\Phi(\xi_{is}) \right), \end{aligned}$$

и таким образом $w_t U_2 = U_2 w_t^\Phi$ для любого $t \in G$. □

Заметим, что частный случай теорем 2 и 3, когда A является унитарной C^* -алгеброй, а H и K — гильбертовыми пространствами, был установлен в работе [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена ковариантная версия теоремы Стайнспринга для конечных наборов вполне положительных отображений в гильбертовых модулей над локальными C^* -алгебрами. Показано, что любые минимальные представления Стайнспринга являются унитарно эквивалентными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиниченко, А. В., Малиев, И. Н., Плиев, М. А. Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга // Изв. Вузов. Математика. — 2018. — 12. — С. 50–59.
KALINICHENKO, A. V., MALIEV, I N. & PLIEV, M. A. (2018) Module sesquilinear forms and generalized Stinspring representation. *Iz. Vuz. Mathematics.* (12). p. 50–59.
2. Малиев, И. Н., Плиев, М. А. О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^* -алгебрами // Изв. Вузов. Математика. — 2012. — 12. — С. 51–58.
MALIEV, I N. & PLIEV, M. A. (2012) On Stinspring representation for operators in Hilbert module under local C^* -algebras. *Iz. Vuz. Mathematics.* (12). p. 51–58.
3. Мануйлов, В. Н., Троицкий, Е. В. C^* -гильбертовы модули / В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий. — М.: Факториал, 2001. — 224 с.
MANUILOV, V. N., TROITSKIY, E. V. (2001) *C^* -Hilber modules.* Moscow: Factorial.
4. Плиев, М. А., Цопанов, В. Д. О представлении типа Стайнспринга для n -наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^* -модулях // Изв. Вузов. Математика. — 2014. — 11. — С. 1–8.
PLIEV, M. A. & TSOPANOV, V. D. (2014) On Stainspring representation for n -set quite positive mappings in Hilbert C^* -modules. *Iz. Vuz. Mathematics.* (11). p. 1–8.
5. ASADI, M. D. (2009) Stinspring's theorem for Hilbert C^* -modules. *J. Operator Theory.* 65 (2). p. 235–238.
6. FRAGOULOPOULOU, M. (Topological algebras with involution) . Elsevier. 2005.425
7. INOUE, I. (1971) Locally C^* -algebras. *Mem. Faculty. Sci. Kyushu. Univ. Ser.A..* 25. p. 197–235.
8. JOITA, M. (2008) *Completely positive linear on pro- C^* -algebra.* University of Bucharest Press.

9. JOITA, M. (2011) Covariant version of the Stinespring for Hilbert C^* -modules. *Centr. Eur. J. Math.*. 9 (4). p. 803–811.
10. JOITA, M. (2011) Crossed-product of pro- C^* -algebras and Morita-equivalence. *Mediterr. J. Math.*. 4 (5). p. 467–492.
11. JOITA, M. (2010) Covariant version of Stinespring type theorem for n -tuples of completely positive maps on Hilbert C^* -modules. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 72 (1). p. 11–19.
12. JOITA, M. (2006) *Hilbert modules over locally C^* -algebras*. University of Bucharest Press.
13. MASAEV, H. M., PLIEV, M. A. & ELSAEV, Y. V. (2015) Radon-Nikodym type theorem for a covariant completely positive maps on Hilbert C^* -modules. *Int. Journal of Math. Analysis*. 9 (35). p. 1723–1331.
14. MOSLEHIAN, M. S., KUSRAEV, A. & PLIEV, M. (2017) Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem. *Indagationes Mathematicae*. 28 (5). p. 938–952.
15. LANCE, E. (1995) *Hilbert C^* -modules. A toolkit for operator algebraists*. Cambridge University Press.
16. STINESPRING, F. (1956) Positive functions on C^* -algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*. (2). p. 211–216.

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V. Guaranteed Risks and Payoffs in a One-criterion Problem / V. I. Zhukovskiy, M. V. Boldyrev // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 7–23.

УДК: 517.958

Предлагается понятие слабо гарантированного одновременно по выигрышам и рискам решения однокритериальной задачи при неопределенности (ОЗН). Формализация основана на понятии векторной седловой точки из теории многокритериальных задач при неопределенности.

Ключевые слова: стратегия, неопределенность, критерий, оптимум по Слейтеру, векторная седловая точка.

Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С., Станкевич И. В. Решение задачи контакта двух упругих тел mortar-методом и методом Шварца на несогласованных сетках / П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин, И. В. Станкевич // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 24–42.

УДК: 519.6

В статье рассмотрены алгоритмы решения двумерных контактных задач теории упругости с помощью mortar-метода и метода Шварца. Для mortar-метода исследовано влияние выбора активного (master) и пассивного (slave) тел на распределение перемещений и напряжений на линии контакта на примере тестовой задачи с разными комбинациями шагов конечно-элементной сетки и обсуждается вопрос численного решения возникающей при дискретизации задачи системы линейных алгебраических уравнений с седловой точкой с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, метод Шварца, метод верхней релаксации.

Брук В. М. О самосопряженных расширениях линейных отношений, порожденных интегральными уравнениями / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 43–61.

УДК: 517.983

В статье определяется минимальное отношение, порожденное интегральным уравнением с операторными мерами, и дается описание отношения, сопряженного к минимальному. Строится пространство граничных значений (граничная тройка) и в терминах граничных значений описываются самосопряженные расширения минимального отношения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, интегральное уравнение, операторная мера, линейное отношение, симметрическое отношение, самосопряженное расширение, граничное значение.

Жуковский В. И., Смирнова Л. В., Высокос М. И. Об одной нерешенной задаче в матричных обыкновенных дифференциальных уравнениях / В. И. Жуковский, Л. В. Смирнова, М. И. Высокос // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 62–72.

УДК: 517.833

Нахождение ситуации равновесия по Нэшу в линейно-квадратичной дифференциальной игре трех лиц сводится к построению явного вида решения матричной системы уравнений типа Риккати. Вопрос о существовании такого решения, его свойствах и есть нерешенная задача. В предлагаемой статье эта задача решена только для игры с одним участником. Ранее была предпринята попытка применить к этой задаче метод малого параметра Пуанкаре (из теории колебаний), но только для специального вида модели управляемой системы, где двое из трех игроков мало влияют на скорость изменения фазового вектора. Однако вопрос о решении матричной системы уравнений типа Риккати все же остался открытым. Предлагается в случаях, где не существует ситуации равновесия по Нэшу применять другие концепции равновесия (активное равновесие, равновесие возражений и контрвозражений, равновесие по Бержу). Заметим, что в настоящей статье выделен случай, когда в дифференциальной игре ситуация равновесия по Нэшу отсутствует.

Ключевые слова: дифференциальные бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, ситуация, стратегия.

Кумакшев С. А. Модель колебаний полюсов Земли, основанная на гравитационных моментах / С. А. Кумакшев // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 73–82.

УДК: 521.93:531.35

Построена модель первого приближения колебаний полюсов Земли. В основу модели положен анализ гравитационных моментов со стороны Солнца и Луны, приводящих к деформации формы планеты (гравитационные приливы). Эволюция оси вращения Земли рассматривается с точки зрения теории колебаний. Выяснен смысл двух основных гармоник этого движения: годовая частота трактуется как частота вынуждающей силы, а чандлеровская частота имеет смысл основной собственной частоты колебаний механической системы. В рамках такой модели, диссипация энергии, приводящая к затуханию собственных колебаний, нивелируется комбинационным резонансом, основанным на комбинации собственной (чандлеровской) и вынужденной (годовой) частот. Модель весьма проста для понимания: она имеет всего шесть параметров, находимых методом наименьших квадратов по экспериментальным данным МСВЗ. Полученный прогноз имеет высокую точность на интервале нескольких лет.

Ключевые слова: колебания полюса Земли, гравитационные моменты.

Эльсаев Я. В. Об одной проблеме дилатации / Я. В. Эльсаев // Таврический вестник информатики и математики. — 2019. — № 1 (42). — С. 83–99.

УДК: 517.98; 519.46

В статье представлена ковариантная версия теоремы Стайнспринга для конечных наборов вполне положительных отображений в гильбертовых модулях над локальными C^* -алгебрами. Доказывается, что любые минимальные представления Стайнспринга являются унитарно эквивалентными.

Ключевые слова: вполне положительное отображение, $*$ -представление, локально компактная группа, представление Стайнспринга, гильбертов C^* -модуль, локальная C^* -алгебра.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Аронов Павел
Сергеевич*

аспирант кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: aronovps@mail.ru

*Болдырев Михаил
Владиславович*

студент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: m_boldyrev@list.ru

*Брук Владислав
Моисеевич*

д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и моделирования Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Российская Федерация
e-mail: vladislavbruk@mail.ru

*Высокос Мария
Ивановна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: mvysokos@mail.ru

*Галанин Михаил
Павлович*

д. ф.-м. н., главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН; профессор кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: galan@keldysh.ru

*Жуковский Владислав
Иосифович*

д. ф.-м. н., профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

**Кумакшев Сергей
Анатольевич**

к. ф.-м. н., с. н. с, Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская
Федерация
e-mail: kumak@iptmnet.ru

**Родин Александр
Сергеевич**

к. ф.-м. н., старший научный сотрудник Института
прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН; до-
цент кафедры «Прикладная математика» Москов-
ского государственного технического университета
им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: rals@bk.ru

**Смирнова Лидия
Викторовна**

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики физико-
математического факультета Государственно-
го гуманитарно-технологического университета,
г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

**Станкевич Игорь
Васильевич**

д. т. н., профессор кафедры «Прикладная математика»
Московского государственного технического универси-
тета им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Российская Федера-
ция
e-mail: aplmex@yandex.ru

**Эльсаев Якуб
Витальевич**

аспирант Владикавказского научного центра РАН,
г. Владикавказ, Российская Федерация
e-mail: zelimus-951@mail.ru

Подписано к печати 15.04.2019. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 17.06.2019.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7