Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 4 (41) ’ 2018

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2018, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 6 от 7 декабря 2018 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 517.958

MSC2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ „ВЯЗКОУПРУГАЯ ЖИДКОСТЬ – БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"[1]

© Н. Д. Копачевский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *kopachevsky@list.ru*

On Small Movements of a System "fluid – gas" in a Bounded Region.

Kopachevsky N. D.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic fluid and gas in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper is based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers.

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem on small motions of a system of viscoelastic fluid and gas in an immovable container.

This paper is organized as follows. Section 1 is an introduction. In section 2 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 3 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection we need to choose orthogonal decomposition on corresponding spaces. Section 4 is devoted to the method of orthogonal projection which allow us to get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 4 is formulation of auxiliary problems which help us to make transition to the Cauchy problem for a system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 5 we reduce this problem to a system of integro-differential equation. This system can be rewrite in section 6 as operator integro-differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 6 too. Transition to operator differential equation in the

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

sum of Hilbert spaces is realized in section 7. Section 8 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 9 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem.

Keywords: *viscoelastic fluid, gas, hydrodynamic system, orthogonal projector, Cauchy problem*

1. Введение

Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского [1–3]. В них для обобщенной модели Олдройта ($m \geqslant 1$) применен операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейном и его учениками (см. [4–6]) применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в монографии [7], гл. 8. Случай полного заполнения сосуда вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [8], а также в [7, п. 7.1]. Наконец, вариант, когда нижняя жидкость — обычная вязкая, а верхняя — идеальная сжимаемая жидкость, т. е. газ, изучен Б. М. Вронским и Н. Д. Копачевским [9–11].

Данная работа посвящена исследованию операторными методами начально-краевой задачи о малых движениях составной гидросистемы “вязкоупругая жидкость – баротропный газ”. Предполагается, что жидкость занимает в состоянии покоя нижнюю часть сосуда, а газ находится под ней. В процессе малых колебаний такой гидросистемы учитывается действие гравитационного поля с постоянным ускорением, а также малого поля внешних сил, наложенных на это поле.

Изложим кратко содержание работы. После введения (параграф 1) в параграфе 2 дается математическая постановка начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы. Затем выводится закон баланса полной энергии гидросистемы для классического решения задачи. Это дает возможность в параграфе 3 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств и их подпространств, в которых естественно проводить исследование задачи. Далее в параграфе 4 проводится применение метода ортогонального проектирования на выбранные подпространства и на его основе — изучение свойств операторов вспомогательных краевых задач, действующих в выбранных подпространствах. Затем в параграфе 5 осуществляется преобразование операторными методами уравнений движения вязкоупругой жидкости, а также кинематического условия на границе раздела “жидкость – газ” и уравнения движения газа. В параграфе 6 исходная начально-краевая задача переформулируется в векторно-матричной форме в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств. При этом изучаются свойства возникших операторных матриц, являющихся операторными коэффициентами уравнения. Далее в параграфе 7 с использованием формы модели Олдройта вязкоупругой жидкости проводится дальнейшее видоизменение задачи и ее переформулировка в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в расширенном гильбертовом пространстве. Выясняется, что основной оператор задачи (операторная матрица) является аккретивным и может быть расширен путем его замыкания до максимального аккретивного оператора. Это дает возможность в параграфе 8 использовать теорию сжимающих полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и на этой основе доказать теорему существования сильного (по времени) решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка, к исследованию которого была приведена исходная начально-краевая задача. В параграфе 9, являющимся последним в работе, дана постановка задачи о нормальных (собственных) колебаниях гидросистемы и сформулирована соответствующая спектральная задача для оператор-функции (операторного пучка), обобщающей как известный пучок С. Г. Крейна (вязкая жидкость в частично заполненном сосуде), так и операторный пучок, отвечающий проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде.

2. Математическая постановка задачи

Будем считать, что неподвижный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заполнен двумя средами: вязкоупругой жидкостью (обобщенная модель Олдройта, см. [1], [12]) и баротропным газом. Эта гидросистема находится в поле сил тяжести, и в состоянии покоя граница Γ раздела жидкости и газа горизонтальна, т. е. расположена перпендикулярно действию гравитационного поля. При этом жидкость занимает область Ω_1, ограниченную твердой стенкой S_1 и поверхностью Γ, а газ находится выше жидкости и ограничен твердой стенкой S_2 и снизу равновесной поверхностью Γ (см. рис.1). Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ее начало было на Γ, а ось Ox_3 была направлена вертикально вверх. Тогда ускорение силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

В состоянии покоя давление в жидкости $P_{1,0}(x)$ изменяется по закону Архимеда:

$$P_{1,0} = P_{1,0}(0) - \rho_1 g x_3,$$

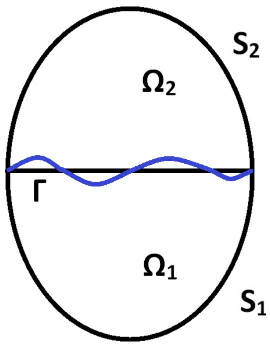

Рис. 1

где $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$ — плотность жидкости, а $P_{1,0}(0)$ — давление на границе Г. Далее, газ называют баротропным, если его давление $P_2(t,x)$ связано с полем плотности $\tilde{\rho}_2$ соотношением

$$P_2(t,x) = a^2\tilde{\rho}_2(t,x), \quad x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega_2, \tag{1}$$

a^2 — квадрат скорости звука. В состоянии покоя имеем связь

$$P_{2,0}(x) = a^2\rho_{2,0}(x), \quad \nabla P_{2,0} = -g\rho_{2,0}(x)\vec{e}_3, \tag{2}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered} \rho_{2,0} = \rho_{2,0}(x_3) = \rho_{2,0}(0)e^{\frac{-gx_3}{a^2}}, \quad \rho_{2,0}(0) > 0, \\ P_{2,0} = P_{2,0}(x_3) = P_{2,0}(0) + a^2\rho_{2,0}(0)e^{\frac{-gx_3}{a^2}}, \quad P_{2,0} = P_{1,0}(0). \end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим малые движения гидросистемы, близкие к состоянию покоя. В качестве искомых функций, описывающих движение системы, будем рассматривать: для жидкости — малое поле скоростей $\vec{u}(t,x)$, $x \in \Omega_1$, и функцию $x_3 = \zeta(t,\hat{x})$, $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$, — вертикальное отклонение границы раздела жидкости и газа; для газа соответственно считаем искомыми $p_2(t,x)$ — отклонение давления от равновесного (2), (3), $\vec{u}_2(t,x)$ — поле скоростей в газе, а также $\rho_2(t,x)$ — отклонение поля плотности от равновесного поля (3).

Заметим еще, что жидкость считаем вязкоупругой, подчиненной обобщенной модели Олдройта, когда напряжения в ней определяется не полем $\vec{u}_1(t,x)$, а полем

$$\vec{v}_1(t,x) = \vec{u}_1(t,x) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_1(s,x)\mathrm{d}s =: I_{01}(t)\vec{u}_1, \tag{4}$$

где $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1,m}$ (см. [1],[2]), — коэффициенты вязкоупругости. При $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1,m}$, получаем, в частности, модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а при $k = 1$ — модель Олдройта.

Выпишем теперь полную постановку начально-краевой задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы.

Линеаризованные уравнения Навье – Стокса имеют вид

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} - \mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}_1(t,x), \quad \mathrm{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{5}$$

где $\mu_1 > 0$ — коэффициент динамической вязкости, а $\vec{f}_1(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Линеаризованные уравнения движения газа и уравнение неразрывности таковы

$$\rho_{2,0} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \nabla p_2 + \rho_2 g \vec{e}_3 = \rho_{2,0} \vec{f}_2, \quad p_2 = a^2 \rho_2, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_{2,0} \vec{u}_2) = 0, \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{7}$$

где $\vec{f}_2(t,x)$ — заданное малое поле внешних сил в газе.

Выпишем теперь краевые условия в исследуемой проблеме. Для вязкой жидкости — это условия прилипания на твердой стенке:

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{8}$$

а для газа — условие непротекания:

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \tag{9}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S_2.

Далее, на границе раздела Γ должны выполняться кинематические условия

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{10}$$

а также динамические условия

$$\begin{gathered} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1,2, \quad \tau_{jk}(\vec{v}_1) := \frac{\partial v_{1,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{1,k}}{\partial x_j}, \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta. \end{gathered} \tag{11}$$

Кроме того, должно выполняться линеаризованное условие сохранения объема жидкости:

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta \mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{12}$$

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ следует задать начальные условия для полей скоростей, а также для отклонения границы раздела и поля давлений в газе:

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2,$$
$$p_2(0,x) = p_2^0(x), \quad x \in \Omega_2, \quad \zeta(0, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{13}$$

Таким образом, начально-краевая задача о малых совместных движениях вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих неподвижный сосуд Ω, состоит в нахождении искомых функций из уравнений движения (5)–(7), краевых условий (8), (9), кинематических условий (10), динамических условий (11), условий сохранения объема (12) и начальных условий (13).

Будем считать, что задача (5)–(13) имеет классическое решение, т. е. все слагаемые в уравнениях, краевых и начальных условиях являются непрерывными функциями своих переменных. Для вывода закона баланса полной энергии гидросистемы воспользуемся следующими тождествами.

Первое тождество следует из (1)–(3):

$$\nabla p_2 + \rho_2 g \vec{e}_3 = a^2 \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} \rho_2) = \rho_{2,0} \nabla(\rho_{2,0}^{-1} p_2). \tag{14}$$

Второе тождество — это формула Грина для соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию прилипания на твердой стенке:

$$\int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (-\mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \nabla p_1) \mathrm{d}\Omega_1 = \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) -$$
$$- \int_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^{3} u_{1j} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}) [\tau_{jk}(\vec{v}_1) - p_1 \delta_{jk}] \right) \mathrm{d}\Gamma, \tag{15}$$
$$\mathrm{div} \vec{u}_1 = \mathrm{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1, \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1).$$

Здесь

$$E_1(\vec{u}_1, \vec{u}_1) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{j,k=1}^{3} |\tau_{jk}(\vec{u}_1)|^2 \mathrm{d}\Omega_1,$$

а $E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ — соответствующее полуторалинейное выражение. Величина $\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ равна скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости, занимающей область Ω_1.

Из уравнения (5) получаем соотношение

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_1 + \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (-\mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \nabla p_1) \mathrm{d}\Omega_1 = \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot \vec{f}_1 \mathrm{d}\Omega_1. \tag{16}$$

Из (6) с учетом (14) имеем

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\vec{u}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_2 + \int\limits_{\Omega_2} \vec{u}_2 \cdot (\rho_{2,0}\nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2))\mathrm{d}\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\vec{u}_2 \cdot \vec{f}_2 \mathrm{d}\Omega_2. \tag{17}$$

Второе слагаемое слева в (16) с учетом (15) и граничных условий (10), (11), а также уравнения (7), преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (-\mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \nabla p_1)\mathrm{d}\Omega_1 = \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - \\
- \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{j,k=1}^{3} u_{1j} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k})[\tau_{jk}(\vec{v}_1) - p_1\delta_{jk}] \right) \mathrm{d}\Gamma = \\
= \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - \int\limits_{\Gamma} u_{1,3}p_2 \mathrm{d}\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_3)\zeta \mathrm{d}\Gamma = \\
= \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - \int\limits_{\Gamma} u_{1,3}p_2 \mathrm{d}\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_3)\zeta \mathrm{d}\Gamma = \\
= \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\zeta \mathrm{d}\Gamma + \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}_1 \cdot \vec{n})p_2 \mathrm{d}\Gamma = \\
\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - \frac{1}{2} g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \mathrm{d}\Gamma + \int\limits_{\Gamma} (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_3)p_2 \mathrm{d}\Gamma.
\end{gathered} \tag{18}$$

Второе слагаемое слева в (17) преобразуется с учетом (7), (10) и связи $p_2 = a^2\tilde{\rho}_2$ так:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_2} \vec{u}_2 \cdot (\rho_{2,0}\nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2))\mathrm{d}\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2} \mathrm{div}(p_2\vec{u}_2)\mathrm{d}\Omega_2 - \\
\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}p_2 \mathrm{div}(\rho_{2,0}\vec{u}_2)\mathrm{d}\Omega_2 = -\int\limits_{\Gamma} p_2\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_3 \mathrm{d}\Gamma + a^{-2} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}p_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} \mathrm{d}\Omega_2 = \\
= -\int\limits_{\Gamma} p_2\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1 \mathrm{d}\Gamma + a^{-2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}|p_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2.
\end{gathered} \tag{19}$$

Складывая левые и правые части (16) и (17) и учитывая (18), (19), приходим к тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{u}_1|^2 \mathrm{d}\Omega_1+\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(x)|\vec{u}_2|^2\mathrm{d}\Omega_2\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{a^{-2}\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}^{-1}(x)|p_2|^2\mathrm{d}\Omega_2+g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2\mathrm{d}\Gamma\right\}= \tag{20}$$
$$=-\mu_1 E_1(\vec{u}_1,\vec{v}_1)+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{u}_1\cdot\vec{f}_1\mathrm{d}\Omega_1+\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\vec{u}_2\cdot\vec{f}_2\mathrm{d}\Omega_2,$$

которое является законом баланса полной энергии исследуемой гидросистемы, записанным в дифференциальной форме. Здесь слева в фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия (первое слагаемое), отвечающая полю скоростей в жидкости и газе, а второе слагаемое — это потенциальная энергия, отвечающая отклонению ζ границы раздела Γ и изменению плотности в баротропном газе ($p_2 = a^2\tilde{\rho}_2$) в процессе малых колебаний. Справа в (20) стоит мощность сил, действующих на систему: это внутренние вязкоупругие силы (первое слагаемое) и внешние силы в областях Ω_1, Ω_2 (остальные слагаемые).

3. Выбор функциональных пространств

Из формулы (20) следует, что для описания движения гидросистемы следует привлечь к рассмотрению такие функциональные гильбертовы пространства, для которых поля скоростей и давлений должны приводить в любой момент времени к конечной кинетической и потенциальной энергиям системы, а также к конечной скорости диссипации энергии.

Перейдем к подробному рассмотрению этого вопроса и введем соответствующие пространства и их подпространства.

1. Прежде всего введем (комплексное) гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega_1)$ векторных полей $\{\vec{u}_1(x)\}$, $x\in\Omega_1$, с квадратом нормы

$$||\vec{u}_1||^2_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1}|\vec{u}_1(x)|^2\mathrm{d}\Omega_1$$

и соответствующим скалярным произведением. Как известно (см. [13],[14]), пространство $\vec{L}_2(\Omega_1)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), \tag{21}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \{\vec{w}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \mathrm{div}\vec{w}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \ \vec{w}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1)\},$$

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \{\vec{v}_1 = \nabla\Phi_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \triangle\Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} = 0 \text{ (на } S_1), \ \int\limits_{\Gamma}\Phi_1 \mathrm{d}\Gamma = 0\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \{\nabla\varphi_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) \ : \ \varphi_1 = 0 \text{ (на } \Gamma)\}. \tag{22}$$

Здесь $\vec{n}_1$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_1$, $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$ (на Γ), а операции div и $\dfrac{\partial}{\partial n_1}$ понимают в смысле обобщенных функций (распределений).

Будем считать, что части S_1 и Γ границы $\partial\Omega_1$ области Ω_1 являются липшицевыми, причем контур $\partial S_1 = \partial\Gamma$ также липшицев (см. [15]-[17]). Тогда для функций из

$$H^1_\Gamma(\Omega_1) := \{\Phi(x) \in H^1(\Omega_1) \ : \ \int\limits_{\Gamma}\Phi \mathrm{d}\Gamma = 0\}, \quad ||\Phi||^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\Omega_1,$$

имеет место обобщенная формула Грина для оператора Лапласа (см. [18]):

$$(\Psi, \Phi)_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1}\nabla\Psi \cdot \nabla\Phi \mathrm{d}\Omega_1 = \langle\Psi, -\triangle\Phi\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle\gamma\Psi, \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \ \forall\,\Psi, \Phi \in H^1_\Gamma(\Omega_1). \tag{23}$$

Здесь $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$ — подпространство пространства $L_2(\Gamma)$, ортогональное единичной функции $1_\Gamma := 1|_\Gamma$,

$$-\triangle\Phi \in \left(H^1_\Gamma(\Omega_1)\right)^*, \quad H^1_\Gamma(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(H^1_\Gamma(\Omega_1)\right)^*,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} \in (H^{1/2}_\Gamma)^*, \ H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow (H^{1/2}_\Gamma)^*, \ \vec{n}_1 = \vec{e}_3, \tag{24}$$

$$\gamma\Psi := \Psi|_\Gamma, \quad \gamma : \mathscr{L}(H_\Gamma(\Omega_1); H^{1/2}_\Gamma)$$

есть оператор следа на Γ. Косыми скобками в (23) обозначаются значения соответствующих функционалов, отвечающих оснащениям в (24).

Отметим, что в силу постановки задачи (см.(5), (8), (10)) поле скоростей $\vec{u}_1(t,x)$ должно принадлежать при любом $t \geqslant 0$ подпространству $\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а поле градиентов давлений — подпространству $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$.

2. Введем теперь пространство $\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$||\vec{u}_2||^2_{\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(x)|\vec{u}_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2,$$

отвечающее полю скоростей в газе. Его ортогональное разложение, которое далее понадобится, таково:

$$\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \tag{25}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \ \mathrm{div}(\rho_{2,0}\vec{v}) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \ \rho_{2,0}\vec{v} \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2)\}, \tag{26}$$

$$\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) := \{\nabla\varphi_2 \in \vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) : \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\varphi_2 \mathrm{d}\Omega_2 = 0\} = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}), \tag{27}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2;\rho_{2,0}) := \{\nabla\psi_2 \in \vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) : \ \psi_2 = 0 \text{ (на } \Gamma)\},$$

$$\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}):=\{\nabla\Phi_2\in\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) : \mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2)=0 \text{ (в } \Omega_2), \ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}=0 \text{ (на } S_2)\}.$$

Из (6), (7), (9) следует, что поле скоростей $\vec{u}_2(t,x)$, $x \in \Omega_2$, для газа следует считать (при любом $t \geqslant 0$) элементом подпространства $\vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$.

3. Для поля давлений $p_2(t,x)$ в газе введем, опираясь на (20), гильбертово пространство

$$L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1}) := \{p_2 \ : \ ||p_2||^2_{L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1})} := \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}^{-1}(x)|p_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2 < \infty\}$$

с нормой, эквивалентной норме $L_2(\Omega_2)$.

4. Далее, для конечности потенциальной энергии системы, отвечающей отклонению ζ движущейся границы раздела между жидкостью и газом, введем уже встретившееся выше (см. (24)) подпространство

$$L_{2,\Gamma} := \{\zeta \in L_2(\Gamma) \ : \ ||\zeta||^2_{L_{2,\Gamma}} := \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \mathrm{d}\Gamma < \infty, \ \int\limits_{\Gamma} \zeta \mathrm{d}\Gamma = 0\}$$

пространства $L_2(\Gamma)$.

5. Наконец, для конечности скорости диссипации энергии в вязкоупругой жидкости (снова см. (20)) введем пространство вектор-функций $\vec{H}^1(\Omega_1)$ и его подпространство

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1):=\{\vec{u}_1\in\vec{H}^1(\Omega_1) : E_1(\vec{u}_1;\vec{u}_1) < \infty, \ \vec{u}_1 = \vec{0} \text{ (на } S_1), \ \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1)\}.$$

Отметим, что норма в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega_1)$ при условии прилипания $\vec{u}_1 = \vec{0}$ (на S_1), так как в этом случае имеет место неравенство Корна (см. [4])

$$||\vec{u}_1||^2_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} := E_1(\vec{u}_1,\vec{u}_1) \geqslant c||\vec{u}_1||^2_{\vec{H}^1(\Omega_1)} := c\sum_{k=1}^{3} ||u_{1,k}||^2_{H^1(\Omega_1)}, \ c > 0. \tag{28}$$

Таким образом, далее в исследуемой проблеме искомые векторные и скалярные поля будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных выше пространствах и подпространствах.

4. Применение метода ортогонального проектирования для уравнений движения газа

Введем согласно разложениям (25)–(27), ортопроекторы

$$P_{0,2} \ : \ \vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) \to \vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0}), \quad P_{G,2} \ : \ \vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) \to \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}),$$

и перепишем уравнения движения газа (6), (7) с учетом (14) в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2) = \vec{f}_2, \quad a^{-2}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{u}_2) = 0 \tag{29}$$

Будем теперь считать, что поле скоростей в газе имеет вид

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \nabla\Phi_2, \quad \vec{w}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0}), \quad \nabla\Phi_2 \in \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})$$

(см. параграф 3, п.2). Применяя ортопроекторы $P_{0,2}$ и $P_{G,2}$ к левой и правой частям первого уравнения (29), получим два соотношения

$$\frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} = P_{0,2}\vec{f}_2, \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 + \nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2) = P_{G,2}\vec{f}_2 =: \nabla F_2. \tag{30}$$

Далее, в силу (26) второе уравнение (29) приобретает вид

$$a^{-2}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2) = 0. \tag{31}$$

Заметим теперь, что первое уравнение (30) тривиально разрешимо, если задано начальное условие $\vec{w}_2(0,x) = P_{0,2}\vec{u}_2^0(x)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать связи для p_2 и Φ_2, исходя из второго соотношения (30), уравнения (31) и с учетом краевых и начальных условий. В частности, из (9), определения (26) подпространства $\vec{J}_0(\Omega_2;\rho_{2,0})$ и из кинематического условия (10) имеем:

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial e_3} = -\vec{u}_1\cdot\vec{e}_3 = -\frac{\partial\zeta}{\partial t} \ (\text{на } \Gamma), \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2).$$

Отсюда получаем краевую задачу, описывающую связь функций Φ_2 и p_2:

$$\begin{gathered} -\triangle_0\Phi_2 := -\rho_{2,0}^{-1}\operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2) = a^{-2}\rho_{2,0}^{-1}\frac{\partial p_2}{\partial t} =: f \ (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = -\rho_{2,0}(0)\vec{u}_1\cdot\vec{e}_3 =: \varphi \ (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{32}$$

Будем исследовать задачу (32), используя теорию обобщенных и слабых решений краевых задач в негладких (липшицевых) областях. Заметим, что однородная задача (32), т. е. отвечающая случаю $f = 0$, $\varphi = 0$, имеет нетривиальное решение $\Phi_2 = c_2 = \text{const}$. Поэтому решение задачи (32) можно представить в виде

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2,$$

где Φ_{21} и Φ_{22} — решения задач при однородном краевом условии и однородном уравнении соответственно:

$$-\triangle_0\Phi_{21} = f \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2), \quad \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{21}\mathrm{d}\Omega_2 = 0, \tag{33}$$

$$-\triangle_0\Phi_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \varphi \text{ (на } \Gamma), \ \int\limits_{\Gamma}\Phi_{22}\mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{34}$$

а $c_2 = \mathrm{const}$.

При изучении этих задач понадобится обобщенная формула Грина, аналогичная формуле (23), применительно к оператору $\triangle_0$ из (32). Отметим сначала, что необходимым условием разрешимости задачи (33) является условие

$$(f, 1_{\Omega_2})_{L_2(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int\limits_{\Omega_2}|f|^2\mathrm{d}\Omega_2. \tag{35}$$

Обозначим соответствующее подпространство функций через $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Введем теперь пространство $H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$ с квадратом нормы

$$||\Phi||^2_{H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\Omega_2 + \Big|\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi\mathrm{d}\Omega_2\Big|^2,$$

эквивалентной норме $H^1(\Omega_2)$, и его подпространство $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ тех элементов которые удовлетворяют условию (35), т. е.

$$\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi\mathrm{d}\Omega_2 = 0. \tag{36}$$

Тогда нетрудно видеть, что $(H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$ — гильбертова пара пространств, причем $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ компактно вложено в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$. Для элементов Ψ_2, Φ_2 из $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ имеет место обобщенная формула Грина

$$\begin{gathered}(\Psi_2,\Phi_2)_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Psi_2\cdot\nabla\Phi_2\mathrm{d}\Omega_2 = \langle\Psi_2, -\triangle_0\Phi_2\rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \\ +\langle\gamma_{S_2}\Psi_2, \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\rangle_{L_2(S_2)} + \langle\gamma_\Gamma\Phi_2, \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\end{gathered} \tag{37}$$

где γ_{S_2} и γ_Γ — операторы следа на S_2 и Γ, а косыми скобками обозначены значения соответствующих функционалов.

Уточним некоторые факты, связанные с формулой (37) (см. [18]). Она справедлива для тех элементов из $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$, которые обладают следующими свойствами: для этих элементов производные по нормали на S_2 и Γ обладают тем свойством, что они продолжимы нулем с S_2 и Γ соответственно на оставшуюся часть границы $\partial\Omega_2$ в класссе функций из $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$. Соответствующую совокупность элементов из $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ обозначим через $\check{H}^1_{\Omega_2}$, так что формула (37) справедлива для элементов из $\check{H}^1_{\Omega_2}$. При этом класс таких продолжимых нулем производных по нормали обозначается через $\tilde{H}^{-1/2}(S_2)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ соответственно, причем эти подпространства являются сопряженными к $H^{1/2}(S_2)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [16],[17]).

Опираясь на формулу Грина (37), определим слабое решение задачи (33) как такой элемент Φ_{21} из $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2,\Phi_{21})_{H^1_{\Omega_2}(\Omega_2,\rho_{2,0})}=\langle\Psi_2,f\rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}},\quad \forall\,\Psi_2\in H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}). \tag{38}$$

Тогда из теории пар гильбертовых пространств следует, что задача (33) имеет слабое решение тогда и только тогда, когда

$$f\in(H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}))^*\supset L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}.$$

При $f\in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ эта задача имеет обобщенное решение, определяемое тождеством

$$(\Psi_2,\Phi_{21})_{H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})}=(\Psi_2,f)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}},\quad \forall\,\Psi_2\in H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}). \tag{39}$$

Оба решения задач (38), (39) выражаются одной формулой:

$$\Phi_{21}=A_2^{-1}f,$$

где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0});L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$. При этом для слабого решения $\Phi_{21}\in\mathscr{D}(A_2^{1/2})=H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$, а для обобщенного решения $\Phi_{21}\in\mathscr{D}(A_2)\subset\mathscr{D}(A_2^{1/2})$.

Таким образом, при $f\in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ задача (33) равносильна соотношению

$$A_2\Phi_{21}=f=a^{-2}\rho_{2,0}^{-1}\frac{\partial p_2}{\partial t}, \tag{40}$$

$$0\ll A_2=A_2^*:\ \mathscr{D}(A_2)\to L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}},\quad A_2^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (34). Опираясь формулу Грина (37), заметим сначала, что необходимым условием разрешимости этой задачи является условие

$$\langle 1_\Gamma,\varphi\rangle_{L_2(\Gamma)}=0. \tag{41}$$

Если $\varphi\in L_2(\Gamma)$, то получаем условие

$$\int\limits_\Gamma\varphi\,\mathrm{d}\Gamma=0,$$

т. е. условие ортогональности с $L_2(\Gamma)$ заданной функции φ к единичной функции 1_Γ, определенной на Γ. В связи с этим введем в $H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$ норму

$$||\Phi||^2_{H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \Big|\int\limits_{\Gamma} \Phi \mathrm{d}\Gamma\Big|^2,$$

эквивалентную стандартной норме пространства $H^1(\Omega_2)$, и подпространство $H^1_\Gamma(\Omega_2,\rho_{2,0})$ функций, для которых

$$\int\limits_{\Gamma} \Phi \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Снова опираясь на формулу Грина (37) определим слабое решение задачи (34) как такой элемент из Φ_{22} из $H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0})$, для которого выполнено тождество

$$(\Psi_2,\Phi_{22})_{H^1_{\Omega_2}(\Omega_2,\rho_{2,0})} = \langle\gamma_2\Psi_2,\varphi\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\,\Psi_2 \in H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0}), \tag{42}$$

$\gamma_2\Psi_2 := \Psi|_\Gamma$. Из (34) следует, что для слабого решения функция φ должна быть продолжима нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$, т. е. необходимым и достаточным условия разрешимости задачи (34) является условие

$$\varphi \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma = (H^{1/2}_\Gamma)^*, \quad H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}.$$

тогда эта задача имеет единственное слабое решение

$$\Phi_{22} =: V\varphi = V(-\rho_{2,0}(0)\vec{u}_1\cdot\vec{e}_3) = V(-\rho_{2,0}(0)\frac{\partial\zeta}{\partial t}),\ V \in \mathscr{L}(\tilde{H}^{-1/2}_\Gamma; H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2;\rho_{2,0})), \tag{43}$$

$$\begin{gathered} H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2;\rho_{2,0}) = \Big\{\Phi_{22} \in H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0})\ :\ -\triangle_0\Phi_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2),\ \int\limits_{\Gamma} \rho_{2,0}(0\Phi_{22}\mathrm{d}\Gamma = 0)\Big\} \subset H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0}). \end{gathered} \tag{44}$$

Заметим теперь, что для области Ω_2 с липшицевой границей $\partial\Omega_2$, разбитой на липшицевы куски S_2 и Γ, имеет место теорема Гальярдо (см. [19]), согласно которой оператор следа γ_2 обладает свойством

$$\gamma_2 \in \mathscr{L}(H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0}); H^{1/2}_\Gamma). \tag{45}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Операторы* $V\ :\ \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma \to H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \subset H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0})$ *и* $\gamma_2\ :\ H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0}) \to \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$ *являются взаимно сопряженными (ограниченными) операторами:*

$$V = \gamma_2^*.$$

Доказательство. Оно следует из тождества (42) и определения оператора V:

$$(\Psi_2, V\varphi)_{H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0})} = \langle \gamma_2\Psi_2, \varphi\rangle_{L_{2,\Gamma}}.$$

□

Итогом рассмотрения задачи (32) и вспомогательных задач (33), (34) является такой вывод: задача (32) имеет решение из пространства $H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$, которое выражается формулой

$$\Phi_2|_{\Omega_2} = \Phi_{21} + \Phi_{22} + c_2 = A_2^{-1}(a^{-2}\rho_{2,0}^{-1}\frac{\partial p_2}{\partial t}) + V(-\rho_{2,0}(0)\frac{\partial \zeta}{\partial t}) + c_2, \qquad (46)$$

где c_2 — произвольная функция t.

5. Преобразования операторными методами уравнений движения жидкости

Преобразуем теперь уравнения движения жидкости (5) в области Ω_1 с учетом граничных условий (8), (11). Опираясь на ортогональные разложения (21)–(22), будем считать при каждом t поле $\vec{u}_1(t,x)$ элементом $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, а ∇p_1 — элементом подпространства $\vec{G}(\Omega_1) = \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Введем далее ортопроектор

$$P_{0,S_1} \ : \ \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$$

и подействуем им на обе части уравнения (5). Будем иметь соотношения

$$\rho_1\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} - \mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \nabla\tilde{p}_1 = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1, \quad \nabla\tilde{p}_1 := P_{0,S_1}\nabla p_1, \qquad (47)$$

$$\triangle\tilde{p}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \frac{\partial\tilde{p}_1}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_1), \ \int\limits_\Gamma \tilde{p}_1 \mathrm{d}\Gamma = 0, \qquad (48)$$

$$\begin{gathered}\vec{v}_1 = \vec{0} \ (\text{на } S_1), \ \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \ j = 1,2 \ (\text{на } \Gamma), \\ [-\tilde{p}_1\mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta \ (\text{на } \Gamma).\end{gathered} \qquad (49)$$

Здесь уже учтено, что в силу (22) будет $p_1 = \tilde{p}_1$ (на Γ).

Представим теперь поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде

$$\nabla\tilde{p}_1 = \nabla p_{11} + \nabla p_{12}, \quad \nabla p_{1l} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \ l = 1,2,$$

и рассмотрим две вспомогательные краевые задачи, сумма решений которых дает решение задачи (47)–(49).

Первая вспомогательная задача (ее называют задачей С.Г. Крейна, см. [4, 20]):

$$
\begin{aligned}
-\mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \nabla p_{11} = \vec{F}_1 := -\nabla p_{12} - \rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1,\\
\mathrm{div}\vec{v}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \ (\text{на } S_1),\\
\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0 \ (\text{на } \Gamma), \ j = 1,2;\\
-p_{11} + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1) = 0 \ (\text{на } \Gamma).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Вторая вспомогательная задача (задача Зарембы):

$$
\triangle p_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \frac{\partial p_{12}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_1), \ p_{12} = p_2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta =: \eta \ (\text{на } \Gamma). \tag{51}
$$

Рассмотрим сначала задачу о слабых решениях проблемы (51). Заметим предварительно, что в силу условий

$$
\int_\Gamma p_{12}\mathrm{d}\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \zeta\mathrm{d}\Gamma = 0
$$

возникает требование нормировки для давления в газе:

$$
\int_\Gamma p_2\mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{52}
$$

Тогда задача Зарембы (51) имеет при $\eta \in H_\Gamma^{1/2}$ единственное решение p_{12}, для которого

$$
\nabla p_{12} =: Q\eta = Q(p_2|_\Gamma + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\zeta), \quad Q \in \mathscr{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)). \tag{53}
$$

Чтобы получить окончательное выражение для ∇p_{12}, найдем значение $p_2|_\Gamma$ с учетом нормировки (52). С этой целью воспользуемся следствием из второй формулы (30), которое называют интегралом Коши-Лагранжа:

$$
\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \rho_{2,0}^{-1}p_2 = F_2 + c(t) \quad (\text{в } \Omega_2),
$$

где $c(t)$ — произвольная функция t. Отсюда получаем, что

$$
p_2|_\Gamma = \rho_{2,0}(0)\gamma_2(-\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + F_2) + \rho_{2,0}(0)c(t),
$$

откуда с учетом (46) приходим к формуле

$$
p_2|_\Gamma = \rho_{2,0}(0)\gamma_2\{-\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{21} - \rho_{2,0}(0)V\gamma_{n,1}\vec{u}_1\} + \rho_{2,0}(0)(\gamma_2 F_2 + c(t)).
$$

Наконец, учитывая интегральное условие (52), окончательно имеем

$$
p_2|_\Gamma = -\rho_{2,0}(0)\frac{\partial}{\partial t}\{P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) - \rho_{2,0}(0)\gamma_2 V\gamma_{n,1}\vec{u}_1\} + \rho_{2,0}(0)P_\Gamma\gamma_2 F_2, \tag{54}
$$

где $P_\Gamma \,:\, L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$ — ортопроектор.

Рассмотрим теперь первую вспомогательную задачу (50), считая $\vec{F}_1$ заданным элементом. Здесь понадобится обобщенная формула Грина для соленоидальных полей и векторного оператора Лапласа. Для гладких полей она имеет вид (15), а для полей из $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ эта формула приобретает вид (см. [13],[18])

$$\mu_1 E_1(\vec{u}_1,\vec{v}_1)=\langle \vec{u}_1, -\mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1+\nabla p_1\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_1)}+\sum_{j,k=1}^{3}\langle u_{1j}\cos\widehat{(\vec{n},\vec{e}_3)}, [\tau_{jk}(\vec{v}_1)-p_1\delta_{jk}]\rangle_{L_2(\Gamma)}. \quad (55)$$

Используя формулу (55), определим слабое решение задачи (50) как такой элемент $\vec{v}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, для которого выполнено тождество

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1,\vec{v}_1) = \langle \vec{\eta}_1, \vec{F}_1\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_1)}, \quad \forall\, \vec{\eta}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Заметим теперь, что в силу неравенства Корна (28) пространство $J^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ компактно вложено в $J_{0,S_1}(\Omega_1)$. Поэтому эти пространства образуют гильбертову пару $(J^1_{0,S_1}(\Omega_1); J_{0,S_1}(\Omega_1))$, причем оператор этой гильбертовой пары

$$A_1 \,:\, \mathscr{D}(A_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \quad (56)$$

неограничен, положительно определен и имеет компактный обратный оператор A_1^{-1}. При этом

$$E_1(\vec{\eta}_1,\vec{v}_1) = (\vec{\eta}_1,\vec{v}_1)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} = (A^{1/2}\vec{\eta}_1, A_1^{1/2}\vec{v}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \langle \vec{\eta}_1, A_1\vec{v}_1\rangle_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)},$$

$$\forall\, \vec{\eta}_1, \vec{v}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Эти рассуждения показывают, что задача (50) имеет слабое решение $\vec{v}_1 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\vec{F}_1 \in (\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1))^*, \quad (57)$$

и это решение выражается формулой

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1}\vec{F}_1. \quad (58)$$

Если $\vec{F}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \subset (\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1))^*$, то формула (58) дает обобщенное решение задача (50), и при этом $\vec{v}_1 \in \mathscr{D}(A_1) \subset \mathscr{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Формула (58) позволяет с учетом определения $\vec{F}_1$ (см. (50)) выписать дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме и данными задачи. Как уже упоминалось выше, все эти функции считаем функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве и в соответствии с этим далее производные $\dfrac{\partial}{\partial t}$ заменим на $\dfrac{d}{dt}$.

Подставляя выражение для $\vec{F}_1$ в соотношение $\mu_1 A_1 \vec{v}_1 = \vec{F}_1$, следующее из (57), и используя формулы (53) и (54) для ∇p_{12} и $p_2|_\Gamma$, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt}\{[\rho_1\vec{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})\vec{u}_1] - \rho_{2,0}(0)(QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1})(\nabla\Phi_{21})\}+ \\ +\mu_1 A_1\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))Q\zeta = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2 F_2, \tag{59}$$

$$\gamma_{n,1}\vec{u}_1 := (\vec{u}_1\cdot\vec{n})_\Gamma, \quad \vec{v}_1 = \vec{u}_1(t,x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_1(s,x)\mathrm{d}s := I_{01}(t)\vec{u}_1.$$

Выпишем теперь дополнительно к (59) другие соотношения, связанные с изучаемой задачей. Перепишем кинематические условия (10) в эквивалентной форме:

$$g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\vec{u}_1 = 0, \tag{60}$$

приведем также выведенные ранее соответствующие связи (31), (40) для газа и учтем формулу (43). Будем иметь соотношения

$$\frac{d}{dt}(\nabla\Phi_{21} - \rho_{2,0}(0)\nabla(V\gamma_{n,1}\vec{u}_1)) + \nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1}p_2) = P_{G,2}\vec{f}_2 =: \nabla F_2, \tag{61}$$

$$a^{-2}\frac{dp_2}{dt} + \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) = 0. \tag{62}$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение. Исходная начально-краевая задача о малых движениях системы, состоящей из вязкоупругой жидкости и баротропного газа, заполняющих произвольный неподвижный сосуд, приводится, кроме тривиальной связи (30) (первое уравнение), к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений (59)–(62) с соответствующими начальными условиями. Искомыми функциями являются: поле скоростей $\vec{u}_1(t,x)$ со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, вертикальное отклонение $\zeta(t,x_1,x_2)$, $(x_1,x_2)\in\Gamma$, границы раздела со значениями в $L_{2,\Gamma}$, потенциальная компонента $\nabla\Phi_{21}(t,x)$, описывающая одно из полей скоростей газа, со значениями в $\vec{G}(\Omega_1;\rho_{2,0})$, а также поле давлений в газе $p_2(t,x)$ со значениями в $L_2(\Omega_1;\rho_{2,0}^{-1})$.

6. Формулировка задачи в векторно-матричной форме. Свойства операторных коэффициентов задачи

Перепишем задачу (59)–(62) в векторно-матричном виде, введя в качестве искомого объекта вектор-столбец

$$z(t) := (\vec{u}_1;\zeta;\nabla\Phi_{21};p_2)^\tau$$

со значениями в пространстве

$$\mathscr{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1}). \tag{63}$$

Введем также операторные матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 + (\rho_{2,0})^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}) & 0 & -\rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1} & 0 \\ 0 & g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))I_2 & 0 & 0 \\ -\rho_{2,0}(0)\nabla V\gamma_{n,1} & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2}I_4 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

где I_k — единичные операторы в пространствах (63),

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 I_{01}(t) & g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))Q & 0 & 0 \\ -g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{34} \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{34}p_2 := \nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2), \quad B_{43}(\nabla\Phi_{21}) := \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}),$$

а также вектор-столбец заданных функций:

$$f := (\rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2 F_2; 0; \nabla F_2; 0)^\tau.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (59)–(62) вместе с начальными условиями можно коротко записать в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $\mathscr{H}$:

$$C\frac{dz}{dt} + Bz = f, \quad z(0) = z^0. \tag{65}$$

Цель дальнейших рассмотрений — изучить свойства коэффициентов операторных матриц C и B и преобразовать задачу (65) таким образом, чтобы можно было доказать теорему существования ее решения на произвольном отрезке времени и на этой основе доказать теорему существования решения исходной начально-краевой задачи (5)–(13).

Напомним сначала, что по лемме 1 операторы $V \in \mathscr{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2;\rho_{2,0}))$ и $\gamma_2 \in \mathscr{L}(H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0}); H_\Gamma^{1/2})$ взаимно сопряжены. Докажем теперь аналогичное свойство для операторов Q и $\gamma_{n,1}$ (см. (53), (59), (60)).

Лемма 2. *Операторы*

$$Q \in \mathscr{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)) \quad \text{и } \gamma_{n,1} \in \mathscr{L}(\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}) \tag{66}$$

взаимно сопряжены.

Доказательство. Пусть η — произвольный элемент из $H_\Gamma^{1/2}$, а $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 + \nabla\Phi_1$ — гладкий элемент из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Тогда согласно (53), $Q\eta = \nabla p \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Опираясь на свойства элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$, будем иметь

$$(Q\eta, \vec{u}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int\limits_{\Omega_1} \nabla p \cdot \overline{\vec{u}_1} t d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \mathrm{div}(p\overline{\vec{u}_1})\mathrm{d}\Omega_1 - \int\limits_{\Omega_1} p\mathrm{div}\vec{u}_1 \mathrm{d}\Omega_1 =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} p(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\mathrm{d}\Gamma = \langle \eta, \gamma_{n,1}\vec{u}_1\rangle_{L_{2,\Gamma}}.$$

Замыкая это тождество с гладких $\vec{u}_1$ на произвольные элементы из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что $\gamma_{n,1} \in \mathscr{L}(\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2})$ и $Q^* = \gamma_{n,1}$. $\square$

Следствием лемм 1 и 2 является такой вывод.

Лемма 3. *Оператор $(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})$ является ограниченным неотрицательным оператором, действующем в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \supset \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.*

Доказательство. В самом деле, на подпространстве $\vec{J}_0(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \ominus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ этот оператор нулевой, а на $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ он положителен. Кроме того, в силу свойств Q, γ_2, V и $\gamma_{n,1}$ получаем, что

$$Q\gamma_2 V\gamma_{n,1} \in \mathscr{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)), \quad \mathscr{R}(Q\gamma_2 V\gamma_{n,1}) \subset \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

$\square$

Лемма 4. *Операторы*

$$QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1} : \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$$

и

$$\nabla V\gamma_{n,1} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \subset \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$$

взаимно сопряжены и ограничены:

$$QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1} \in \mathscr{L}(\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}); \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)),\ \nabla V\gamma_{n,1} \in \mathscr{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); G_{h,\Gamma}(\Omega_2; \rho_{2,0})). \qquad (67)$$

Доказательство. Проверим сначала, что эти операторы обладают свойствами (67). В самом деле, пусть $\nabla\Phi_{21}$ — элемент из $\vec{G}_0(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Тогда $\Phi_{21}|_{\Omega_2} = \nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21})$ — элемент из $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\gamma_2\nabla^{-1}(\triangle\Phi_{21}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ (теорема Гальярдо), $P_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in L_{2,\Gamma} \cap H^{1/2}(\Gamma) = H_\Gamma^{1/2}$, $QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21}) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, (см. (53)), причем каждый из операторов является непрерывным из одного пространства в другое.

Аналогично можно проверить второе свойство (67). Действительно, если $\vec{u}_1$ — произвольный элемент из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то $\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, $V\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \in H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2; \rho_{2,0})$

(см. (43), (44)), $\nabla(V\gamma_{n,1}\vec{u}_1) \in \vec{G}_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ и является градиентом слабого решения задачи (33). Здесь снова все переходы осуществляются с помощью операторов, ограниченных из одного пространства в другое.

Докажем теперь свойство взаимной сопряженности этих операторов. Пусть $\vec{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, $\nabla\Phi_{21} \in \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\nabla(V(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\vec{u}_1)\cdot\nabla\Phi_{21}d\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\nabla\Phi_{21}}d\Omega_2, \tag{68}$$

где $\Phi_{22} \in H^1_{\Gamma,h}(\Omega_2;\rho_{2,0})$ — слабое решение задачи (34) при $\varphi = -\rho_{2,0}(0)(\vec{u}_1\cdot\vec{e}_3)_\Gamma = -\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\vec{u}_1$ (см. (43)).

Далее, для другого оператора из (67) имеем для гладкого $\vec{u}_1 = \nabla\psi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$:

$$\int\limits_{\Omega_1}[(-\rho_{2,0}(0))QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1}(\nabla\Phi_{21})]\cdot\overline{\nabla\psi_1}d\Omega_1 = \int\limits_\Gamma(P_\Gamma\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\vec{u}_1}d\Gamma =$$

$$= \int\limits_\Gamma(\gamma_2\Phi_{21})(-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\vec{u}_1}d\Gamma = (\Phi_{21}, V((-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\overline{\vec{u}_1})_{H^1_\Gamma(\Omega_2;\rho_{2,0})} = \tag{69}$$

$$= \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}\cdot\overline{\nabla\Phi_{22}}d\Omega_2.$$

Здесь при выводе были использованы следующие свойства: взаимная сопряженность Q и $\gamma_{n,1}$, свойства $P_\Gamma = P_\Gamma^*$ и $P_\Gamma\gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1$, а также взаимная сопряженность γ_2 и V.

Переходя в (69) от гладких $\vec{u}_1 = \nabla\psi_1$ к произвольным элементам из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, убеждаемся, что тождество (69) справедливо и для произвольных $\nabla\psi_1$. Сравнивая тогда (68) и (69), получаем, что операторы (67) взаимно сопряжены. □

Опираясь на доказанные свойства элементов операторной матрицы C из (64), установим теперь общие свойства этой матрицы как оператора, действующего в пространстве $\mathscr{H}$ (см. (63)).

Лемма 5. *Операторная матрица $C : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ является ограниченным положительно определенным оператором, ее квадратичная форма равна удвоенной полной энергии исследуемой гидромеханической системы и отвечает потенциальным движениям баротропного газа и произвольным движениям вязкоупругой жидкости.*

Доказательство. Факт ограниченности операторной матрицы C следует из лемм 1, 2–4, и ее вида (64). Вычислим квадратичную форму матрицы C, учитывая свойства операторных коэффициентов, формулы (68), (69), а также связь (43), т. е.

$$\Phi_{22}|_{\Omega_2} = V(-\rho_{2,0}(0)\gamma_{n,1}\vec{u}_1), \tag{70}$$

из которой следует соотношение

$$(\rho_{2,0}(0))^2 \int\limits_{\Omega_1} (Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}\vec{u}_1) \cdot \overline{\vec{u}_1} \mathrm{d}\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2.$$

Отсюда получаем формулу

$$\begin{aligned}(Cz, z)_{\mathscr{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \\ + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)) \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \mathrm{d}\Gamma + a^{-2} \int\limits_{\Omega_2} |p_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2,\end{aligned} \tag{71}$$

в которой правая часть есть удвоенная полная энергия гидросистемы, отвечающая потенциальным движениям газа с полем скорости $\nabla\Phi_2 = \nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}$ (см. (20)).

Из (71) следует, что C — самосопряженный неотрицательный оператор.

Покажем, что он положительно определен. Из представления (70) и свойств операторов V и $\gamma_{n,1}$ (см. леммы 1 и 2) следует, что имеет место неравенство

$$||\Phi_{22}||_{H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})} = \left(\int\limits_{\Omega_2}]\rho_{2,0} \nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 \right)^{1/2} \leqslant c||\vec{u}_1||_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}, \ c > 0.$$

Отсюда при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$, получаем что

$$\begin{aligned}\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21} + \nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 \geqslant \rho_1\alpha ||\vec{u}_1||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ \rho_1\beta c^{-2} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{21}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 - \\ -\varepsilon \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 - \varepsilon^{-1} \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 \geqslant \rho_1\alpha ||\vec{u}_1||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\ + (\rho_1\beta c^{-2} + 1 - \varepsilon^{-1}) \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + (1 - \varepsilon) \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{21}|^2 \mathrm{d}\Omega_2, \quad \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{72}$$

Выбирая ε так, чтобы было выполнено условие

$$(1+\rho_1\beta c^{-2})^{-1} \leqslant \varepsilon < 1,$$

приходим к выводу, что квадратичная форма в левой части (72) положительно определена в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})$.

Отсюда и из (71) следует, что оператор C положительно определен в $\mathscr{H} = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1})$. □

7. Дальнейшие преобразования задачи

Изучив свойства оператора полной энергии C из (65), продолжим рассмотрение этой задачи и напомним, что оператор B из (65) содержит интегральный оператор Вольтерра $I_{01}(t)$ (см. (4)), отвечающий обобщенной модели Олдройта. Это позволяет перейти от (65) к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве, введя новые искомые функции в изучаемой задаче.

Проделаем соответствующие преобразования для простоты при $m=2$ (для других $m \in \mathbb{N}$ преобразования аналогичные). Именно, введем функции

$$\vec{w}_k(t,x) := \mu_1^{1/2}\alpha_k A_1^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_1(s,x)\mathrm{d}s, \quad \vec{w}_k(0,x)=\vec{0}, \quad k=1,2. \tag{73}$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\vec{w}_k}{dt} = \mu_1^{1/2}\alpha_k^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_k\vec{w}_k, \quad k=1,2. \tag{74}$$

Введем также новый искомый вектор-столбец

$$\tilde{z}(t) := (z_1^\tau; z^\tau)\tau, \quad z_1^\tau = (\vec{u}_1;\vec{w}_1;\vec{w}_2;\zeta), \quad z_2^\tau = (\nabla\Phi_{21};p_2). \tag{75}$$

Тогда задача (65) перейдет с учетом (74) в задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида

$$\tilde{C}\frac{d\tilde{z}}{dt} + \tilde{B}\tilde{z} = \tilde{f}, \quad \tilde{z}(0)=\tilde{z}^0, \tag{76}$$

$$\tilde{C} := \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f} = (\rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2F_2;\vec{0};\vec{0};0;\nabla F_2;0)^\tau \tag{77}$$

$$\tilde{C}_{11} := \mathrm{diag}(\rho_1\tilde{I}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1});\tilde{I}_2;\tilde{I}_3;g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\tilde{I}_4);$$

$$\tilde{C}_{22} := \mathrm{diag}(\tilde{I}_5;a^{-2}\tilde{I}_6),$$

где $\tilde{I}_k$ — единичные операторы в пространствах элементов из (75). Далее,

$$\tilde{C}_{12} := \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{21} := \begin{pmatrix} -\rho_{2,0}(0)\nabla V\gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{11} := \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & \mu_1^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_1^{1/2} & \mu_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}A_1^{1/2} & g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))Q \\ -\mu_1^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_1^{1/2} & \beta_1\tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\mu_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}A_1^{1/2} & 0 & \beta_2\tilde{I}_3 & 0 \\ -g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

$$B_{22} := \begin{pmatrix} 0 & B_{34} \\ B_{43} & 0 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Заметим, что искомые элементы $\tilde{z}(t)$ теперь считаются функциями переменной t со значениями в пространстве (см. (63))

$$\tilde{\mathscr{H}} = \Big(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}\Big) \oplus \Big(\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1})\Big) =:$$
$$=: \tilde{\mathscr{H}}_1 \oplus \tilde{\mathscr{H}}_2.$$

Дальнейший план исследований — изучить свойства операторных матриц $\tilde{C}$ и $\tilde{B}$ в (76) и доказать теорему существования сильного по переменной t решения этой задачи.

Отметим предварительно следующий факт.

Лемма 6. *Оператор $\tilde{C} : \tilde{\mathscr{H}} \to \tilde{\mathscr{H}}$ является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в $\tilde{\mathscr{H}}$.*

Доказательство. Оно непосредственно следует из леммы 5 с учетом вида операторной матрицы $\tilde{C}_{11}$, в частности, с учетом добавления единичных элементов $\tilde{I}_2$, $\tilde{I}_3$ на диагонали. □

Изучим теперь свойства операторных блоков B_{11} и B_{22} в операторной матрице $\tilde{B}$ (см. (78), (79)).

Лемма 7. *Операторная матрица B_{11} заданная на области определения*

$$\mathscr{D}(B_{11}) = \mathscr{D}(A_1) \oplus \mathscr{D}(A_1) \oplus \mathscr{D}(A_1) \oplus H_\Gamma^{1/2},$$

плотной в пространстве

$$\tilde{\mathscr{H}}_1 = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma},$$

допускает факторизацию с симметричными крайними множителями:

$$B_{11} = \mathrm{diag}(\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot E_0 \cdot \mathrm{diag}(\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \tag{80}$$

$$E_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2}\tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2}\tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2}\tilde{I}_1 & \beta_1\tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2}\tilde{I}_1 & 0 & \beta_2\tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

Эта операторная матрица является аккретивным оператором:

$$\mathrm{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathscr{H}}_1} \geqslant 0, \quad \forall\, z_1 \in \mathscr{D}(B_{11}). \tag{82}$$

При любом $b > 0$ операторная матрица

$$B_{11,b} := B_{11} + bP_4, \quad P_4 := \mathrm{diag}(0; 0; 0; \tilde{I}_4) \tag{83}$$

является равномерно аккретивным оператором:

$$\mathrm{Re}(B_{11,b}z_1, z_1)_{\tilde{\mathscr{H}}_1} \geqslant c||z_1||^2_{\tilde{\mathscr{H}}_1}, \quad c > 0, \quad \forall\, z_1 \in \mathscr{D}(B_{11,b}) = \mathscr{D}(B_{11}). \tag{84}$$

Доказательство. Факторизация (80) матрицы B_{11} проверяется непосредственно. Свойство аккретивности (82) следует из равенства

$$\mathrm{Re}(B_{11}z_1, z_1)_{\tilde{\mathscr{H}}_1} = \mu_1||A_1^{1/2}\vec{u}_1||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \sum_{k=1}^{2}\beta_k||\vec{w}_k||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}.$$

Отсюда получаем свойство равномерной аккретивности (84), если заметить, что

$$||A_1^{1/2}\vec{u}_1||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} \geqslant \lambda_1(A_1)||\vec{u}_1||^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)},$$

где $\lambda_1(A_1) > 0$ — первое собственное значение оператора A_1. Тогда в (84) имеем

$$c = \max\{\mu_1\lambda_1(A_1); \beta_1, \beta_2; b\} > 0. \tag{85}$$

□

Лемма 8. *Оператор $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to L_{2,\Gamma}$ компактен. Оператор $A_1^{-1/2}Q : \mathscr{D}(Q) \to \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ обладает следующими свойствами:*

$$A_1^{-1/2}Q = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*|_{\mathscr{D}(Q)},$$

а его замыкание

$$\overline{A_1^{-1/2}Q} = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*. \tag{86}$$

Доказательство. Оператор $A_1^{-1/2}$ переводит $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{H}^1(\Omega_1)$, а тогда (по теореме Гальярдо, см.[19]) $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в

$H_\Gamma^{1/2} = H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$. Так как $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, то $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}$ — компактный оператор.

Далее, пусть $\vec{u}_1$ — произвольный элемент из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\zeta \in \mathscr{D}(Q) \subset L_{2,\Gamma}$. Тогда

$$(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}\vec{u}_1, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (A_1^{-1/2}\vec{u}_1, Q\zeta)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = (\vec{u}_1, A_1^{-1/2}Q\zeta)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}.$$

Отсюда следует, что $A_1^{-1/2}Q = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*|_{\mathscr{D}(Q)}$, и так как $\mathscr{D}(Q) \subset H_\Gamma^{1/2}$ плотно в $L_{2,\Gamma}$, то имеет место свойство (86), причем $\overline{A_1^{-1/2}Q}$ — компактный оператор. $\square$

Заметим теперь, что оператор $B_{11,b}$ из (83) также допускает факторизацию вида (80) с теми же крайними множителями и со средним множителем

$$E_b := \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & \alpha_1^{1/2}\tilde{I}_2 & \alpha_2^{1/2}\tilde{I}_3 & g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}Q \\ -\alpha_1^{1/2}\tilde{I}_1 & \beta_1\tilde{I}_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^{1/2}\tilde{I}_1 & 0 & \beta_2\tilde{I}_3 & 0 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}A_1^{-1/2} & 0 & 0 & b\tilde{I}_4 \end{pmatrix}. \tag{87}$$

Следствием приведенных фактов является такое утверждение.

Лемма 9. *Оператор $B_{11,b}$ из* (83) *допускает расширение путем замыкания среднего множителя* (87) *на основе* (86). *При этом замыкание $\overline{B_{11,b}}$ имеет факторизацию*

$$\overline{B_{11,b}} = \operatorname{diag}(\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4) \cdot \overline{E_b} \cdot \operatorname{diag}(\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}; \tilde{I}_2; \tilde{I}_3; \tilde{I}_4), \tag{88}$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором в $\tilde{\mathscr{H}}_1$, заданным на области определения

$$\mathscr{D}(\overline{B_{11,b}}) = \Big\{ z_1 = (\vec{u}_1; \vec{w}_1; \vec{w}_2; \zeta)^\tau : \\ \mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k^{1/2}\vec{w}_k + g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}Q)^*\zeta \in \mathscr{D}(A_1^{1/2}) \Big\} \tag{89}$$

и действует по закону

$$\overline{B_{11,b}}z_1 = \begin{pmatrix} \mu_1^{1/2}A_1^{1/2}(\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{1/2}\vec{w}_k + g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))(\gamma_n, 1A^{-1/2})^*\zeta) \\ -\mu_1^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_1\vec{w}_1 \\ -\mu_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_2\vec{w}_2 \\ -g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + b\zeta \end{pmatrix}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь свойство максимальности оператора $\overline{B_{11,b}}$. Однако этот факт следует из того, что в представлении (88) каждая операторная матрица ограниченно обратима в $\tilde{\mathscr{H}}_1$, в частности, для $\overline{E_b}$ это следует из того, что неравенство (84) сохраняется и для $\overline{B_{11,b}}$ и потому область значений $\mathscr{R}(\overline{B_{11,b}})$ есть все пространство $\mathscr{H}_1$. $\square$

Из леммы 9 получаем такой важный вывод.

Лемма 10. *Оператор* $-\overline{B_{11,b}}$ *является генератором сжимающей полугруппы* $U_1(t)$, *причем* $||U_1(t)|| \leqslant e^{-ct}$, $c > 0$ *(см.* (84), (85)*). При этом оператор* $-\overline{B_{11}} := -(\overline{B_{11,b}} - bP_4)$ *также является генератором сжимающей полугруппы операторов.* $\square$

Перейдем теперь к изучению свойств оператора B_{22} из (79), отвечающего движению газа в исследуемой системе. Этот оператор действует в пространстве $\tilde{\mathscr{H}_2} = \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1})$ с элементами $z_2 = (\nabla\Phi_{21};p_2)^\tau$. Очевидно, это оператор неограничен и его область значений должна совпадать с $\tilde{\mathscr{H}_2}$. Поэтому далее будем считать, что

$$\begin{gathered}\mathscr{D}(B_{22}) = \Big\{\nabla\Phi_{21} \in \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}):\ \mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) \in L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1}),\\ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2)\Big\} \oplus \Big\{p_2 \in L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1}):\ \nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2) \in \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0})\Big\}.\end{gathered} \tag{90}$$

Лемма 11. *Оператор* $B_{22}:\ \mathscr{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathscr{H}_2} \to \tilde{\mathscr{H}_2}$ *является кососамосопряженным, то есть*

$$B_{22}^* = -B_{22}. \tag{91}$$

Доказательство. Пусть $z_2 = (\nabla\Phi_{21};p_2)^\tau \in \mathscr{D}(B_{22})$, $y_2 = (\nabla\Psi_{21};q_2)^\tau \in \mathscr{D}(B_{22})$. Тогда, используя формулу вида $\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\mathrm{div}\vec{A} + \nabla\varphi\cdot\vec{A}$, вычислим выражение

$$\begin{gathered}(B_{22}z_2,y_2)_{\tilde{\mathscr{H}_2}} = \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}\cdot\overline{\nabla\Psi_{21}}\mathrm{d}\Omega_2 + \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}^{-1}\mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21})\overline{q_2}\mathrm{d}\Omega_2 =\\ = \{\int_{\Omega_2}\mathrm{div}(\rho_{2,0}^{-1}p_2\rho_{2,0}\overline{\nabla\Psi_{21}})\mathrm{d}\Omega_2 - \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}^{-1}p_2\mathrm{div}(\rho_{2,0}\overline{\nabla\Psi_{21}})\mathrm{d}\Omega_2\} +\\ \{\int_{\Omega_2}\mathrm{div}(\rho_{2,0}^{-1}\overline{q_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21})\mathrm{d}\Omega_2 - \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}\cdot\nabla(\rho_{2,0}^{-1}\overline{q_2})\mathrm{d}\Omega_2\} =\\ = -[\int_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}\cdot\overline{\nabla(\rho_{2,0}^{-1}q_2)}\mathrm{d}\Omega_2 + \int_{\Omega_2}\rho_{2,0}^{-1}p_2\overline{\mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Psi_{21})}\mathrm{d}\Omega_2] =\\ = -(z_2,B_{22}y_2)_{\tilde{\mathscr{H}_2}}, \quad \forall\ z_2,y_2 \in \mathscr{D}(B_{22}).\end{gathered}$$

(Здесь при выводе использовано граничное условие на $\partial\Omega_2$ см. (90) и теорема Гаусса-Остроградского). Отсюда и следует свойство (91). $\square$

Рассмотрим подробней другие свойства оператора B_{22} и его связь с оператором задачи Неймана (33).

Лемма 12. *Оператор* $B_{22}: \mathscr{D}(B_{22}) \subset \tilde{\mathscr{H}_2} \to \tilde{\mathscr{H}_2}$ *обратим.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $B_{22}z_2 = y_2 \in \tilde{\mathscr{H}_2}$, $z_2 = (\nabla\Phi_{21}; p_2)^\tau$, причем y_2 представим в виде $y_2 = (\nabla(\rho_{2,0}^{-1}\psi_2); \rho_{2,0}q_2)^\tau$, с заданными произвольными функциями ψ_2 и q_2. Тогда будем иметь соотношения

$$\nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2) = \nabla(\rho_{2,0}^{-1}\psi_2),$$
$$\operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) = \rho_{2,0}q_2 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2). \tag{92}$$

Отсюда в силу нормировки $\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(\rho_{2,0}^{-1}\psi_2)\mathrm{d}\Omega_2 = 0$ (см. (27)) для элементов из $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ получаем $p_2 = \psi_2$, а в задаче (92) возникает проблема

$$-\triangle_0\Phi_{21} = -\rho_{2,0}^{-1}\operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) = -q_2 \text{ (в } \Omega_2),$$
$$\rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2), \quad \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_{21}\mathrm{d}\Omega_2 = 0,$$

(см. (36)), равносильная уравнению

$$A_2\Phi_{21} = -q_2 \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \tag{93}$$

(см. (35)), где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0}); L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$, изученный в параграфе 4. Отсюда следует, что задача (93) однозначно разрешима: $\Phi_{21} = -A_2^{-1}q_2 \in H^1_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и потому $\nabla\Phi_{21} \in \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (между элементами из $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ и $H^1_{\Omega_2}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ имеется изоморфизм, осуществляемый операторами ∇ и ∇^{-1}). $\square$

Лемма 13. *Спектр оператора* B_{22} *дискретен и расположен на мнимой оси. Его собственные значения образуют множество* $\{\lambda_k^\pm(B_{22})\}_{k=1}^\infty$ *с двумя ветвями:*

$$\lambda_k^\pm(B_{22}) = \pm i\lambda_k(A_2), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\lambda_k(A_2)\}_{k=1}^\infty$ *— собственные значения оператора* A_2 *(см. (93)):*

$$\begin{gathered} 0 < \lambda_1(A_2) \leqslant \lambda_2(A_2) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A_2) \leqslant \ldots, \\ \lambda_k(A_2) = \left(\frac{|\Omega_2|}{6\pi^2}\right)^{-2/3} k^{2/3}[1 + o(1)] \ (k \to \infty). \end{gathered} \tag{94}$$

Собственные элементы

$$\{z_k^\pm\}_{k=1}^\infty = \{(\nabla\Phi_{21,k}^\pm; p_{2,k}^\pm)^\tau\}_{k=1}^\infty$$

отвечающие собственным значениям оператора B_{22}, образуют ортогональный базис в $\tilde{\mathscr{H}}_2$ и выражаются через ортонормированные собственные элементы оператора A_2, т. е. решения спектральной задачи

$$-\triangle_0\Phi_{21} = \lambda\Phi_{21} \ (\textit{в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \ (\textit{на } \partial\Omega_2), \quad \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{21}d\Omega_2 = 0, \tag{95}$$

по формулам

$$z_k^{\pm} = (\nabla\Phi_{21,k}; \lambda_k^{\pm}\rho_{2,0}\Phi_{21,k})^{\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

При этом для ортонормированных в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ собственных элементов задачи (95) *выполнены следующие формулы ортогональности для ортонормированных элементов $\{z_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$:*

$$(z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\tilde{\mathscr{H}}_2} = ((1 + (\pm1)(\pm1))/2)^{1/2}\delta_{kl},$$

где учтены все четыре варианта знаков слева.

Доказательство. Оно проводится непосредственной проверкой всех связей возникающих задач для операторов B_{22} и A_2. Асимптотическая формула (94) — это известная асимптотика Вейля в спектральной задаче Неймана для оператора Лапласа при $\rho_{2,0} = \mathrm{const}$. □

Подводя итоги исследования свойств оператора $\tilde{B} = \mathrm{diag}(B_{11}, B_{22})$ в задаче Коши (76), отметим, что первый блок B_{11} характеризует диссипативную вязкоупругую часть исследуемой гидросистемы (жидкость), а второй блок B_{22} — консервативную часть (газ). В итоге приходим к следующему выводу.

Лемма 14. *После замыкания (оператора B_{11}) оператор $\overline{\tilde{B}}$ является максимальным аккретивным оператором, действующим в $\tilde{\mathscr{H}} = \tilde{\mathscr{H}}_1 \oplus \tilde{\mathscr{H}}_2$ и заданным на области определения*

$$\mathscr{D}(\overline{\tilde{B}}) = \mathscr{D}(\overline{\tilde{B}}_{11}) \oplus \mathscr{D}(B_{22}), \quad \mathscr{D}(\overline{B}_{11}) = \mathscr{D}(\overline{B}_{11,b}), \quad \mathscr{R}(\overline{\tilde{B}}) = \tilde{\mathscr{H}}.$$

Доказательство. Так как B_{22} кососамосопряжен в $\tilde{\mathscr{H}}_2$, то он является генератором группы унитарных операторов, действующих в $\tilde{\mathscr{H}}_2$. Поэтому вместе с утверждениями лемм 9 и 10 получаем утверждение данной леммы. □

8. О разрешимости исходной начально-краевой задачи

Опираясь на установленные факты, докажем утверждение о разрешимости задачи Коши (65), к которой была приведена исходная начально-краевая задача (5)–(13).

Определение 1. Будем говорить, что задача Коши (65) имеет сильное по переменной t решение $z(t) = (\vec{u}_1; \zeta; \nabla\Phi_{21}; p_2)^{\tau}$ на отрезке $[0, T]$, если все слагаемые в уравнении (65) являются непрерывными функциями t со значениями в пространстве $\mathscr{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma} \oplus \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}) \oplus L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1})$ и выполнено начальное условие $z(0) = z^0$. □

Согласно этому определению для сильного решения задачи все слагаемые в уравнении (59) должны быть элементами из $C([0,T];\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, в уравнении (60) — элементами из $C([0,T];L_{2,\Gamma})$, в уравнении (61) — элементами из $C([0,T];\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}))$, а в уравнении (62) — элементами из $C([0,T];L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}^{-1}))$.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (65) *выполнены условия*

$$\begin{gathered}\vec{u}_1^0 \in \mathscr{D}(A_1) \subset \mathscr{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \quad \zeta^0 \in \mathscr{D}(Q) = H_\Gamma^{1/2}, \\ \Phi_{21}^0 \in \mathscr{D}(A_2) \subset \mathscr{D}(A_2^{1/2}) = H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}), \quad \nabla(\rho_{2,0}^{-1}p_2^0) \in \vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}),\end{gathered} \tag{96}$$

а также условия

$$\vec{f}_1(t,x) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega_1)), \quad \vec{f}_2(t,x) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega_2)). \tag{97}$$

Тогда задача (65) *имеет сильнее по переменной* t *решение* $z(t)$ *на отрезке* $[0,T]$ *(в смысле определения 1).*

Доказательство. Оно состоит из нескольких этапов.

1. Рассмотрим задачу Коши вида (76), однако с оператором $\overline{\tilde{B}} = \operatorname{diag}(B_{11};B_{22})$, который, согласно леммам 9–11, 14, является максимальным аккретивным:

$$\tilde{C}\frac{d\tilde{z}}{dt} + \overline{\tilde{B}}\tilde{z} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0. \tag{98}$$

При этом начальные данные выберем в виде (96), т. е. из области определения оператора B из (65), и дополним их тривиальными начальными условиями

$$\vec{w}_k(0) = \vec{0}, \quad k = 1,2,$$

(см. (73), (74)). Тогда эти условия порождают начальный элемент

$$\tilde{z}^0 = (\vec{u}_1^0;\vec{0};\vec{0};\zeta^0;\nabla\Phi_{21}^0;p_2^0)^\tau \in \mathscr{D}(\tilde{B}) \subset \mathscr{D}(\overline{\tilde{B}}). \tag{99}$$

Аналогично проверяем, что если выполнено условие (97), то заданная функция $\tilde{f}(t)$ (см. (77)) обладает свойством

$$\tilde{f}(t) \in C^1([0,T];\tilde{\mathscr{H}}), \tag{100}$$

(см. (77)). Воспользуемся теперь тем фактом, что оператор $\tilde{C}$ в (98) положительно определен и ограничен в $\tilde{\mathscr{H}}$, и введем в $\tilde{\mathscr{H}}$ эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением

$$(\tilde{z},\tilde{y})_{\tilde{C}} := (\tilde{C}\tilde{z},\tilde{y})_{\tilde{\mathscr{H}}}. \tag{101}$$

Перепишем затем задачу (98) в виде

$$\frac{d\tilde z}{dt} = -\tilde C^{-1}\overline{\tilde B}\tilde z + \tilde C^{-1}\tilde f(t), \quad \tilde z(0) = \tilde z^0, \tag{102}$$

и заметим, что оператор $-\tilde{\mathrm{C}}^{-1}\overline{\tilde B}$ является максимальным диссипативным в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}_{\tilde C}$ со скалярным произведением (101). Поэтому (см., например, [21], с.166) при условиях (99), (100) задача (102) имеет единственное сильное решение $\tilde z(t)$, т. е. такое, что все слагаемые в (102) являются элементами из $C([0,T];\tilde{\mathscr{H}}_{\tilde C})$. Отсюда следует, что $\tilde z(t)$ является также сильным решением задачи Коши (98), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\tilde{\mathscr{H}}$.

2. Выпишем теперь эту систему уравнений построчно с учетом представления операторной матрицы $\overline{\tilde B}$ в факторизованном виде (см. (80), (81), (87)–(89)). Будем иметь задачу

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\{[\rho_1\vec u_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})\vec u_1] - \rho_{2,0}(0)(QP_\Gamma\gamma_2\nabla^{-1})(\nabla\Phi_{21})\}+\\
+\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\{\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec u_1 + \sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{1/2}\vec w_k + g\mu_1^{-1/2}(\rho_1-\rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta\} =\\
= \rho_1 P_{0,S_1}\vec f_1 - \rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2F_2, \quad \nabla F_2 = P_{G,2}\vec f_2, \quad \vec u_1(0) = \vec u_1^0,\\
\frac{\vec w_1}{dt} - \mu_1^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec u_1 + \beta_1\vec w_1 = \vec 0, \quad \vec w_1(0) = \vec 0,\\
\frac{\vec w_2}{dt} - \mu_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}A_1^{1/2}\vec u_1 + \beta_1\vec w_2 = \vec 0, \quad \vec w_2(0) = \vec 0,\\
g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\frac{d\zeta}{dt} - g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\vec u_1 = 0, \quad \zeta(0)=\zeta^0,\\
\frac{d}{dt}(\nabla\Phi_{21}-\rho_{2,0}(0)\nabla(V\gamma_{n,1}\vec u_1))+\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1}p_2)=P_{G,2}\vec f_2=:\nabla F_2,\ \nabla\Phi_{21}(0)=\nabla\Phi_{21}^0,\\
a^{-2}\frac{dp_2}{dt} + \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) = 0, \quad p_2(0) = p_2.
\end{gathered} \tag{103}$$

Заметим про этом, что система уравнений, отвечающая задаче (76) с незамкнутым оператором $\tilde B$, отличается от (103) лишь тем, что в первом уравнении (103) слева раскрыты вторые скобки, а также оператор $(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*$ заменен на $A_1^{-1}Q$ (см. лемму 8). Таким образом, теперь возникает проблема доказать, что при условиях данной теоремы (см. (96), (97)) можно раскрыть упомянутые скобки, и тогда все полученные слагаемые в первом уравнении (103) будут элементами из $C([0,T];\vec J_{0,S_1}(\Omega_1))$.

3. Переходя к доказательству этого факта, отметим, что для сильного решния задачи (98) функция переменной t в упомянутых скобках является элементом из

$C([0,T];\mathscr{D}(A_1^{1/2}))=C([0,T];\vec{J}^{1}_{0,S_1}(\Omega_1))$. Но тогда

$$\begin{gathered}\vec{v}_1:=\Big\{\vec{u}_1+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{1/2}\mu_1^{-1/2}A_1^{-1/2}\vec{w}_k+\\ +g\mu_1^{-1/2}(\rho_1-\rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta\Big\}\in C([0,T];\mathscr{D}(A_1)).\end{gathered}\tag{104}$$

Однако из второго, третьего и четвертого уравнений задачи (103) следует, что (см. (73), (74))

$$\vec{w}_k(t)=\mu_1^{1/2}\alpha_k^{1/2}A_1^{1/2}\int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_1(s)\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\quad \zeta(t)=\int\limits_0^t\gamma_{n,1}\vec{u}_1(s)\mathrm{d}s+\zeta^0.\tag{105}$$

Подставляя эти выражения в (104), приходим к соотношению

$$\begin{gathered}\vec{u}_1(t)+\sum_{k=1}^{2}\alpha_k^{1/2}\int\limits_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\vec{u}_1(s)\mathrm{d}s+\\ +g\mu_1^{-1}(\rho_1-\rho_{2,0}(0))A_1^{-1/2}(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\left(\int\limits_0^t\gamma_{n,1}\vec{u}_1(s)\mathrm{d}s+\zeta^0\right)=\\ =\vec{v}_1(t)\in C([0,T];\mathscr{D}(A_1)).\end{gathered}\tag{106}$$

Рассмотрим (106) как интегральное уравнение Вольтерра в пространстве $\mathscr{H}(A_1)$ с нормой графика оператора A_1. Тогда в силу леммы 8 имеем для $\vec{u}_1(t)\in C([0,T];\mathscr{H}(A_1))=C([0,T];\mathscr{D}(A_1))$ соотношение

$$\begin{gathered}A_1^{-1/2}(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*(\gamma_{n,1}\vec{u}_1)=A_1^{-1/2}(A_1^{-1/2}Q)(\gamma_{n,1}\vec{u}_1)=\\ =A_1^{-1}(Q\gamma_{n,1}\vec{u}_1)\in C([0,T];\mathscr{D}(A_1)).\end{gathered}$$

(см. лемму 2 и свойство (66)). Отсюда следует, что в интегральном уравнении Вольтерра (106) ядро является непрерывной по t,s оператор функцией в треугольнике $\triangle_T:=\{(t,s):\ \ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$, принимающей значения из $\mathscr{L}(\mathscr{H}(A_1))$. Поэтому уравнение (106) имеет единственное решение $\vec{u}_1(t)\in C([0,T];\mathscr{D}(A_1))$, причем все остальные слагаемые в (106) также принадлежат этому пространству.

4. Но тогда в первом уравнении (103) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева, а затем из системы исключить функции $\vec{w}_k(t)$, $k=1,2$ (см. (105)). В итоге возникает система уравнений (59)–(62), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в соответствующих пространствах. Значит, задача (59)–(62), т. е. задача (65), имеет единственное сильное решение в смысле определения 1. □

В качестве замечания к теореме 96 отметим, что для сильного решения задачи (65) при условиях (96), (97) имеют место свойства:

$$\vec{u}_1 \in C([0,T];\mathscr{D}(A_1)) \cap C^1([0,T];\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1));$$
$$\nabla\Phi_{21} \in C^1([0,T];\vec{G}(\Omega_2;\rho_{2,0}));$$
$$\zeta \in C^1([0,T];H_\Gamma^{1/2});$$
$$p_2 \in C^1([0,T];L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}^{-1}}) \cap C([0,T];H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0})).$$

Опираясь на теорему 96, можно получить утверждение об однозначной разрешимости исходной начально-краевой задачи (5)–(13) на произвольном отрезке времени $[0,T]$.

9. К проблеме нормальных колебаний системы “вязкоупругая жидкость–баротропный газ”

Рассмотрим решения однородной задачи (98), зависящие от времени по закону

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}e^{-\lambda t}.$$

Функции такого вида называют нормальными движениями исследуемой системы, числа λ — комплексными декрементами затухания нормальных движений, а $\tilde{z} \neq 0$ — амплитудными элементами.

Для нахождения амплитудных элементов и чисел λ возникает из (98) спектральная задача

$$\overline{\tilde{B}}\tilde{z} = \lambda\tilde{C}\tilde{z}, \quad \tilde{z} \in \mathscr{D}(\overline{\tilde{B}}) \subset \tilde{\mathscr{H}},$$

которая, в частности, следует из системы уравнений (103) и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\{\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \alpha_1^{1/2}\vec{w}_1 + \alpha_2^{1/2}\vec{w}_2 + g\mu_1^{-1/2}(\rho_1-\rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta\} = \\
= \lambda[\rho_1\vec{u}_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1})\vec{u}_1] - \rho_{2,0}(0)QP_\Gamma\gamma_2\Phi_{21}), \\
-\mu_1^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_1\vec{w}_1 = \lambda\vec{w}_1, \\
-\mu_1^{1/2}\alpha_2^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_2\vec{w}_2 = \lambda\vec{w}_2, \\
-g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\gamma_{n,1}\vec{u}_1 = \lambda g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))\zeta, \\
\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1}p_2) = \lambda(\nabla\Phi_{21} - \rho_{2,0}(0)\nabla(V\gamma_{n,1}\vec{u}_1)), \\
\mathrm{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21}) = \lambda a^{-2}p_2.
\end{aligned} \qquad (107)$$

Наша дальнейшая цель — исключить из системы уравнений (107) часть неизвестных, перейти к спектральной задаче для операторного пучка (оператор-функции от

λ) с ограниченными операторными коэффициентами (см., например, [20]) и исследовать ее методами спектральной теории.

Установим сначала следующий простой факт.

Лемма 15. *Числа $\lambda = 0$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, не являются собственными значениями спектральной задачи* (107).

Доказательство. 1. Положим в (107) $\lambda = 0$. Тогда из предпоследнего уравнения получаем, что $\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1}p_2) = \vec{0}$. Так как это элемент из $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$ (см. (27)), то $p_2 = 0$. Далее, из последнего уравнения и граничных условий для Φ_{21} возникает задача

$$-\triangle_0\Phi_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2), \quad \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{21}\mathrm{d}\Omega_2 = 0,$$

которая имеет лишь тривиальное решение: $\Phi_{21} = 0$.

Из второго-четвертого уравнений (107) имеем также связи

$$\beta_k\vec{w}_k = \mu_1^{1/2}\alpha_k\beta_k^{-1}A_1^{1/2}\vec{u}_1, \quad k = 1, 2, \quad \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = 0,$$

а тогда из первого уравнения получаем соотношение

$$\mu_1^{1/2}\left(1 + \sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)A_1^{1/2}\vec{u}_1 + g\mu_1^{-1/2}(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k}{\beta_k}\right)||\mu_1^{1/2}A_1^{1/2}\vec{u}_1||^2_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = 0,$$

так как

$$((\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta, A_1^{1/2}\vec{u}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = (\zeta, (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})A_1^{1/2}\vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma}} = (\zeta, \gamma_{n,1}\vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma}} = 0.$$

Значит, $\vec{u}_1 = \vec{0}$.

Наконец, из оставшейся связи $(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta = 0$ при любом $\vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ имеем

$$(\vec{\eta}, (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*\zeta)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = (\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}\vec{\eta}, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = 0,$$

и так как совокупность элементов вида $\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}\eta$ при $\vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ образует множество $H_\Gamma^{1/2}$, плотное в $L_{2,\gamma}$, то $\zeta = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы.

2. Положим теперь в (107) $\lambda = \beta_1$. Тогда из второго уравнения получаем $A_1^{1/2}\vec{u}_1 = \vec{0}$ и потому $\vec{u}_1 = \vec{0}$. Поэтому из третьего уравнения следует ($\beta_1 \neq \beta_2$), что $\vec{w}_2 = \vec{0}$, а из четвертого имеем $\zeta = 0$.

Далее, для функций Φ_{21} и p_2 возникает задача

$$\nabla(\rho_{2,0}(0)^{-1}p_2) = \beta_1\nabla\Phi_{21}, \quad \operatorname{div}(\operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_{21})) = \beta_1 a^{-2}p_2 \quad (\text{в } \Omega_2),$$
$$\rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_2), \quad \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{21}\mathrm{d}\Omega_2$$

которая приводится к задаче на собственные значения

$$A_2\Phi_{21} = -\beta_1^2\Phi_{21}, \quad \Phi_{21}\in H^1_{\Omega_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}),$$

(см. (32), (33), (40)). Поскольку оператор A_2 имеет дискретный положительный спектр, то эта задача имеет лишь нулевое решение, и потому $\nabla\Phi_{21} = 0$, $p_2 = 0$. Теперь из первого уравнения (107) получаем, что $\alpha_1^{1/2}\vec{w}_1 = \vec{0}$, т. е. $\vec{w}_1 = \vec{0}$.

Случай $\lambda = \beta_2$ рассматривается аналогично, что и доказывает полностью утверждения леммы. □

Опираясь на лемму 15, исключим при $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq\beta_k$, $k = 1,2$ в уравнениях (107) все искомые элементы, кроме $\vec{u}_1$ и $\nabla\Phi_{21}$. Из второго-четвертого соотношений будем иметь

$$\vec{w}_k = \frac{\mu_1^{1/2}\alpha_k^{1/2}}{\beta_k-\lambda}A_1^{1/2}\vec{u}_1, \quad k = 1,2, \quad \zeta = -\lambda^{-1}\gamma_{n,1}\vec{u}_1.$$

Подставляя их в первое уравнение и осуществляя замену

$$A_1^{1/2}\vec{u}_1 = \vec{\eta}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\mu_1 e_2(\lambda)\vec{\eta}_1 = \lambda\{A_1^{-1/2}(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}))A_1^{-1/2}\vec{\eta}_1 - \\ -\rho_{2,0}(0)A_1^{-1/2}QP_\Gamma\gamma_2\Phi_{21}\} + \\ +\lambda^{-1}g(\rho_1-\rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})\vec{\eta}_1, \quad e_2(\lambda) := 1+\sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k}{\beta_k-\lambda}.\end{aligned} \tag{108}$$

Последние два уравнения (107) приводят к связи

$$A_2\Phi_{21} = -\lambda^2 a^{-2}(\Phi_{21} - \rho_{2,0}V(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})\vec{\eta}_1). \tag{109}$$

Осуществляя еще здесь замену

$$A_2^{1/2}\Phi_{21} = \varphi_2 \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, \tag{110}$$

(см.(40), (41)), получим окончательно из (108)–(110) задачу на собственные значения

$$\mu_1 e_2(\lambda)\vec{\eta}_1 = \lambda(A_{11}\vec{\eta}_1 + A_{12}\varphi_2) + \lambda^{-1}B_1\vec{\eta}_1, \quad \varphi_2 = -\lambda^2 a^{-2}(A_{21}\vec{\eta}_1 + A_{22}\varphi_2), \tag{111}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &:= A_1^{-1/2}(\rho_1 I_1 + (\rho_{2,0}(0))^2(Q\gamma_2)(V\gamma_{n,1}))A_1^{-1/2}, \quad A_{22} := A_2^{-1}, \\ A_{12} &:= -\rho_{2,0}(0)A_1^{-1/2}QP_\Gamma\gamma_2 A_1^{-1/2}, \quad A_{21} := -\rho_{2,0}(0)(A_2^{-1/2}V)(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}), \\ B_1 &:= g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0))(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2})^*(\gamma_{n,1}A_1^{-1/2}). \end{aligned} \tag{112}$$

Перепишем задачу (111)–(112) в векторно-матричном виде в двух формах. Первая форма такова:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & a^2 I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{113}$$

Вторая форма выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \mu_1 e_2(\lambda) I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} - \\ -\lambda^2 a^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{114}$$

$$(\vec{\eta}_1; \varphi_2)^\tau \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}.$$

Лемма 16. *Операторные коэффициенты* A_{jk}, $j,k = 1,2$, *компактны, причем* $A_{jk} = A_{kj}^*$, $A_{kk} \geqslant 0$. *Кроме того, операторный коэффициент* B_1 *— компактный неотрицательный оператор, действующий в* $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Доказательство. Эти свойства следуют непосредственно из определений (112) операторов и лемм 1, 2–4, 8, 13, а также свойств, описанных в (41), (45), (56). □

Опираясь на эти факты, укажем на некоторые простые свойства спектра исследуемой задачи (111).

Первое свойство. Спектр задачи (111) симметричен относительно вещественной оси.

Доказательство. Перепишем коротко задачу (113) в виде

$$L_1(\lambda)\xi = 0, \quad \xi := (\vec{\eta}_1; \varphi_2)^\tau, \tag{115}$$

и заметим, что операторный пучок $L_1(\lambda)$ является самосопряженным (см. [22]), т. е.

$$(L_1(\lambda))^* = L_1(\lambda).$$

Отсюда и следует данное утверждение. □

Второе свойство. Спектр задачи (111) дискретен, т. е. состоит из счетного множества конечнократных собственных значений с возможными предельным точками

$\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = \beta_k$, $k = 1, 2$, а также точками $\lambda = \delta_k$, $e_2(\delta_k) = 0$, $k = 1, 2$, то есть нулями функции $e_2(\lambda)$.

Доказательство. Задачу (114) коротко перепишем в виде

$$L_2(\lambda)\xi = 0, \quad \xi = (\vec{\eta}_1; \varphi_2)^\tau,$$

и заметим, что она приводится к спектральной проблеме

$$(I + \Phi(\lambda))\xi = 0,$$

где I — единичный оператор в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, а $\Phi(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция, принимающая компактные значения. Заметим теперь, что оператор $(I + \Phi(\lambda))|_{\lambda=-1}$ обратим, так как

$$L_1(-1) = \begin{pmatrix} \mu_1 e_2(-1) I_1 & 0 \\ 0 & a^{-2} I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + a^{-2} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— положительно определенный оператор, поскольку операторная матрица $(A_{jk})_{jk=1}^2$ — компактный положительный оператор (факт положительности проверяется непосредственно), а $e_2(-1) > 0$. Поэтому по теореме Келдыша (см. [22]; иногда ее называют теоремой Гохберга, см. [23]) получаем доказываемое утверждение. $\square$

Третье свойство. Спектр задачи (111)–(112) расположен в правой комплексной полуплоскости.

Доказательство. Оно основано на неравенстве

$$\mathrm{Re}\lambda = \Big\{\mu_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k \beta_k}{|\beta_k - \lambda|^2}\right) ||\vec{\eta}_1||^2_{\vec{L}_2(\Omega_1)} + ||\varphi||^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}\Big\} /$$

$$/ \Big\{\sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_k}{|\beta_k - \lambda|^2} ||\vec{\eta}_1||^2_{\vec{L}_2(\Omega_1)} + (A\xi, \xi) + |\lambda|^{-2}(B_a\xi, \xi)\Big\} > 0,$$

которое можно вывести из уравнения (113) либо (115) и учесть, что квадратичные формы операторных матриц A и B_a справа в (113) — положительная и неотрицательная соответственно. $\square$

Дальнейшее подробное исследование свойств решений задачи (111)–(112) будет проведено в другой работе. Будут получены свойства полноты и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи, наличие шести ветвей собственных значений, их асимптотическое поведение и физический смысл. Будут рассмотрены также и другие близкие вопросы.

Список литературы

1. Милославский, А. И. Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев. — 1989. Деп. Рукопись № 1221.

   MILOSLAVSKII, A. I. (1989). Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container. Institute of mathematics NAS of Ukraine. Preprint No. 1221. Kiev.

2. MILOSLAVSKII, A. (1985) Stability of a viscoelastic isotropic medium. *Soviet Physics Doklady.* 33. p. 300.

3. MILOSLAVSKY, A. (1985) Stability of certain classes of evolution equations. *Siberian Math.Journal.* 26 (5). p. 723–735.

4. Крейн, С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.

   KREIN, S. (1964) O kolebaniyah vyazkoj zhidkosti v sosude. *Doklady AN SSSR.* 159 (2). p. 262–265.

5. Крейн, С. Г., Лаптев, Г. И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, № 1. — С. 40–50.

   KREIN, S., LAPTEV, G. (1968) Motion of a viscous liquid in an open vessel. *Functional Analysis and Its Applications.* 2 (1). p. 38–47.

6. Аскеров, Н. К., Крейн, С. Г., Лаптев, Г. И. Задача о колебаниях вязкой жидкости связанные с ней операторные уравнения // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, № 2. — С. 21–32.

   ASKEROV, N., KREIN, S., LAPTEV, G. (1968) Oscillations of a viscous liquid and the associated operational equations. *Functional Analysis and Its Applications.* 2 (2). p. 21–32.

7. KOPACHEVSKY, N., KREIN, S. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids.* Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 146. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

8. AZIZOV, T., KOPACHEVSKII, N., ORLOVA, L. (2000) Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.

Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2). 199. p. 1–24.

9. Вронский, Б. М. О малых движениях системы «жидкость–газ» в ограниченной области // Украинский математический журнал. — 2006. — Т. 58, № 10. — С. 1326–1334.

   WRONSKY, B. (2006) On small motions of a "liquid-gas" system in a bounded domain. *Ukrainian Mathematical Journal.* 58 (10). p. 1501–1511.

10. KOPACHEVSKY, N., PADULA, M., VRONSKY, B. (2007) Small movements and eigenoscillations of a system "fluid–gas" in a bounded region. *Scientific Notes of V. I. Vernadsky Taurida National University, seriya Matematika. Mechanika. Informatika i kibernetika.* 20(59) (1). p. 3–55.

11. Вронский, Б. М. Нормальные колебания частично диссипативной гидросистемы // Динамические системы. — 2012. — Т. 2 (30), № 1–2. — С. 53–56.

    WRONSKY, B. (2012) Normal oscillations in partially dissipative system. *Dynamical Systems.* 2 (30) (1–2). p. 53–56.

12. EIRICH, F. (1956) *Rheology. Theory and Applications.* New York: Academic Press.

13. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

    KOPACHEVSKY, N., KREIN, S., NGO ZUI KAN (1989) *Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems.* Moscow: Nauka.

14. KOPACHEVSKY, N., KREIN, S. (2001) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.* Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 128. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.

15. Агранович, М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // УМН. — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.

    AGRANOVICH, M. (2002) Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. *Russian Mathematical Surveys.* 57 (5 (347)). p. 3–78.

16. RYCHKOV, V. (1999) On Restrictions and Extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin Spaces with Respect to Lipschitz Domains. *Journal of London Math. Sor.* 60 (1). p. 237–257.

17. AGRANOVICH, M. (2008) Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 15 (2). p. 146–155.

18. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения: монография. — Симферополь: ООО «Форма», 2016. — 280 с.

    KOPACHEVSKY, N. (2016) *Abstract Green's Formula and Applications.* Simferopol: FLP OOO "FORMA".

19. GAGLIARDO, E. (1957) Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova.* 27. p. 284–305.

20. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

    MARCUS, A. (1986) *Introduction to the spectral theory of polinomial operator pencils.* Kishinyov: Shtiintsa.

21. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

    KREIN, S. (1967) *Linear differential equations in a Banach space.* Moscow: Nauka.

22. Келдыш, М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. — 1971. — Т. 26, вып. 4 (100). — С. 15–41.

    KELDISH, M. (1971) On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russian Mathematical Surveys.* 26 (4). p. 15–41.

23. Гохберг, Н. Ц., Крейн, М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М: Наука, 1965. — 448 с.

    GOHBERG, N., KREIN, M. (1965) *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space.* M: Nauka.

УДК: 517.9

MSC2010: 46B99; 47B38

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СУПЕРПОЗИЦИИ

© Н. М. Абасов

МАИ — Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
ул. Оршанская, 3, Москва, 121552, Российская Федерация
e-mail: *abasovn@mail.ru*

Order Properties of Nonlinear Superposition Operators.

Abasov N. M.

Abstract. This article is devoted to orthogonally additive operators in vector lattices. Orthogonally additive operators acting between vector lattices were introduced and studied in 1990 by Mazón and Segura de León. Today the theory of orthogonally additive operators is an active area of Functional Analysis. Let E be a vector lattice and F a real linear space. We say that an operator $T : E \to F$ is called orthogonally additive if $T(x + y) = T(x) + T(y)$ whenever $x, y \in E$ are disjoint. It follows from the definition that $T(0) = 0$. It is immediate that the set of all orthogonally additive operators is a real vector space with respect to the natural linear operations. Let E and F be vector lattices. We say that an orthogonally additive operator $T : E \to F$ is order bounded if T maps order bounded sets in E to order bounded sets in F. The aim of this notes is to continue this line of investigation. In this paper, we prove some new results for abstract Nemytskii operators, an important subclass of orthogonally additive operators. We say that an orthogonally additive operator $T : E \to E$ defined on a vector lattice E is called an abstract Nemytskii operator if the equality $T\pi = \pi T$ holds for any order projection on E. We've showws that any abstract Nemytskii operator $T : E \to E$ defined on a vector lattice with the principal projection property E has a module. We've proved that the set of all abstract Nemytskii operators defined on a Dedekind complete vector lattice E is a band in the vector lattice of all order bounded orthogonally additive operators acted on E. We've got the formula for the order projection onto this band.

Keywords: *Orthogonally additive operator, abstract Nemytskii operator, nonlinear superposition operator, disjointness preserving operator, order projection, vector lattice.*

Введение и предварительные сведения

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках были введены и исследованы в работах [8, 9]. В настоящее время теория ортогонально аддитивных операторов является активной областью функционального анализа (см. далеко не полный список [3–6, 10]). Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о векторных решетках можно найти в монографиях [1, 7]. Все векторные решетки, рассматриваемые ниже в тексте, являются архимедовыми.

Пусть E — векторная решетка. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset E$ называется *порядково сходящейся* к элементу $x \in E$ (используется обозначение $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$), если существует сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в E_+, такая что $u_\alpha \downarrow 0$ и $|x_\alpha - x| \leq u_\alpha$ для всех индексов $\alpha \in \Lambda$ удовлетворяющих неравенству $\alpha \geq \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in \Lambda$. Два элемента x, y векторной решетки E называются *дизъюнктными* (используется обозначение $x \bot y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Сумма $x + y$ двух дизъюнктных элементов x и y обозначается $x \sqcup y$. Запись $x = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} x_i$ означает, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $x_i \bot x_j$ if $i \neq j$. Элемент $y \in E$ называется *осколком* элемента $x \in E$, если $y \bot (x - y)$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y – осколок элемента x. Множество всех осколков элемента $x \in E$ обозначается $\mathscr{F}_x$. Положительный линейный оператор $\pi : E \to E$ называется *порядковым проектором*, если имеют место следующие условия:

- $\pi = \pi^2$;
- $0 \leq \pi \leq Id$, где Id — единичный оператор в E.

Множество всех порядковых проекторов в E обозначается $\mathfrak{B}(E)$. Множество $\mathfrak{B}(E)$ упорядоченное отношением $\pi \leq \rho \Leftrightarrow \pi \circ \rho = \pi$ является булевой алгеброй относительно булевых операций:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho;\ \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho;\ \overline{\pi} = Id - \pi.$$

Элемент x векторной решетки E называется *проекционным элементом*, если полоса, порожденная элементом x, допускает порядковое проектирование. Говорят, что векторная решетка E является решеткой *с проекциями на главные полосы*, если каждый элемент решетки E является проекционнным. Отметим, что каждая порядково σ-полная векторная решетка является решеткой с проекциями на главные полосы. Порядковый проектор на полосу $\{x\}^{\bot\bot}$ будем обозначать π_x.

Определение 1. Пусть E — векторная решетка и пусть F — действительное векторное пространство. Оператор $T : E \to F$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x + y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in E$.

Ясно, что $T(0) = 0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством относительно естественных линейных операций сложения векторов и умножения вектора на элемент поля.

Определение 2. Пусть E и F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется:

- *положительным*, если $Tx \geq 0$ для любого $x \in E$;
- *порядково ограниченным*, если T отображает порядково ограниченные множества в E в порядково ограниченные множества в F.

Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T\colon E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*. Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathscr{U}(E, F)$.

Векторное пространство $\mathscr{U}(E, F) : S \leq T$ наделено отношением частичного порядка — $S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0$. Отметим, что в случае порядковой полноты векторной решетки F для упорядоченного пространства $\mathscr{U}(E, F)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *([8],Theorem 3.2). Пусть E и F — векторные решетки, и решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}(E, F)$ является порядково полной векторной решеткой. Кроме того для любых $S, T \in \mathscr{U}(E, F)$ и $x \in E$ справедливы формулы:*

1. $(T \vee S)(x) := \sup\{Ty + Sz : \ x = y \sqcup z\}$.
2. $(T \wedge S)(x) := \inf\{Ty + Sz : \ x = y \sqcup z\}$.
3. $(T)^{+}(x) := \sup\{Ty : \ y \sqsubseteq x\}$.
4. $(T)^{-}(x) := -\inf\{Ty : \ y \sqsubseteq x\}$.
5. $|Tx| \leq |T|(x)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Каждый линейный оператор $T \in L_{+}(E, F)$ задает положительный абстрактный оператор Урысона $G : E \to F$, где $G(f) = T|f|$ для любого $f \in E$.

Пример 2. Напомним, что векторное пространство $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ является векторной решеткой с покоординатным порядком: для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$ имеем $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $e_i^*(x) \leq e_i^*(y)$ для любых $i = 1, \ldots, m$, где $(e_i^*)_{i=1}^m$ — координатные функционалы на $\mathbb{R}^m$. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда $T \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ если и только если существуют действительнозначные функции $T_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, отображающие ограниченные в $\mathbb{R}$ множества в ограниченные множества, такие, что $T_{i,j}(0) = 0$ и

$$e_i^*\big(T(x_1, \ldots, x_n)\big) = \sum_{j=1}^{n} T_{i,j}(x_j),$$

В этом случае пишут, что $T = (T_{i,j})$.

1. Основные результаты

В настоящем разделе мы покажем, что множество всех абстрактных операторов Немыцкого образуют полосу в векторной решетке всех абстрактных операторов Урысона и найдем формулу проектирования на эту полосу.

Определение 3. Пусть E, F — векторные решетки. Отображение $T : E \to E$ называется *абстрактным оператором Немыцкого*, если для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ имеет место равенство $T\pi = \pi T$.

Следующий пример поясняет используемую терминологию.

Пример 3. Пусть (A, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, $L_0(A, \Sigma, \mu)$ (или $L_0(\mu)$ для краткости) — пространство измеримых почти всюду конечных функций на A и пусть $N : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция удовлетворяющая следующим условиям:

(C_0) $N(t, 0) = 0$ для μ-п.в. $t \in A$;

(C_1) $N(\cdot, r)$ является μ-измеримой для всех $r \in \mathbb{R}$;

(C_2) $N(t, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для μ-почти всех $t \in A$.

Говорят, что функция $N : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям *Каратеодори*, если выполняются условия C_1 и C_2. Отметим, что для функции N, удовлетворяющей условию Каратеодори и для любой функции $f \in L_0(\mu)$ выполняется включение $N(\cdot, f(\cdot)) \in L_0(\mu)$ ([2], Глава 1.4). Тогда определен оператор $T : L_0(\mu) \to L_0(\mu)$, где

$$(Tf)(t) = N(t, f(t)); \ \ f \in L_0(\mu).$$

Хорошо известно, что булева алгебра $\mathfrak{B}(L_0(\mu))$ порядковых проекторов на $L_0(\mu)$ изоморфна булевой алгебре Σ — всех измеримых подмножеств A и каждый порядковый проектор $\rho : L_0(\mu) \to L_0(\mu)$ является оператором умножения $\rho(f) = f1_{D_\rho}$ на характеристическую функцию подходящего измеримого множества $D_\rho \in \Sigma$. Тогда для любой функции $f \in L_0(\mu)$ и $\rho \in \mathfrak{B}(L_0(\mu))$ имеем

$$T\rho(f) = T(f1_{D_\rho}) = N(t, f1_{D_\rho}(t)) =$$
$$N(t, f(t))1_{D_\rho}(t) = \rho T(f).$$

Таким образом оператор T коммутирует со всеми порядковыми проекторами на $L_0(\mu)$. Данный оператор называется *нелинейным оператором суперпозиции* или *оператором Немыцкого.* Теория операторов Немыцкого хорошо представлена в литературе (см. [2]).

При довольно общих предположениях каждый абстрактный оператор Немыцкого является ортогонально аддитивным.

Лемма 1. *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные полосы и T — абстрактный оператор Немыцкого на E. Тогда T — ортогонально аддитивный оператор.*

Доказательство. Пусть $x, y \in E$ и $x \perp y$. Тогда можем написать

$$T(x+y) = T(\pi_x + \pi_y)(x+y) =$$
$$T(\pi_x \vee \pi_y)(x+y) = (\pi_x \vee \pi_y)T(x+y) =$$
$$(\pi_x + \pi_y)T(x+y) = \pi_x T(x+y) + \pi_y T(x+y) =$$
$$T\pi_x(x+y) + T\pi_y(x+y) = Tx + Ty.$$

□

Множество всех порядково ограниченных абстрактных операторов Немыцкого на E обозначается $\mathscr{N}(E)$. Следующая теорема является первым основным результатом работы.

Теорема 2. *Пусть E — порядково полная векторная решетка. Тогда $\mathscr{N}(E)$ является полосой в векторной решетке $\mathscr{U}(E)$ и для любых $T, S \in \mathscr{N}(E)$ и $x \in E$ справедливы равенства:*

1. $(T \vee S)x = Tx \vee Sx$;
2. $(T \wedge S)x = Tx \wedge Sx$;
3. $(T)^+x = (Tx)^+$;
4. $(T)^-(x) = (Tx)^-$;
5. $|T|x = |Tx|$.

Доказательство. Пусть $T, S \in \mathscr{N}(E, F)$ и $x \in E$. Согласно теореме 1 имеем

$$(T \vee S)(x) = \sup\{Ty + Sz : \, x = y \sqcup z\} \geq Tx \vee Sx.$$

Отметим, что $y = \pi_y x = \pi_y y$, $z = \pi_z x = \pi_z z$, $\pi_y \perp \pi_z$, $\pi_x = \pi_y + \pi_z$ и $\pi_x(Tx \vee Sx) = Tx \vee Sx$. Далее можем написать

$$Ty + Sz = T\pi_y y + S\pi_z z = T\pi_y x + S\pi_z x = \pi_y Tx + \pi_z Sx \leq$$
$$\pi_y(Tx \vee Sx) + \pi_z(Tx \vee Sx) = \pi_x(Tx \vee Sx) = Tx \vee Sx.$$

Переходя в левой части части вышеприведенного неравенства к супремуму по всем $y, z \in \mathscr{F}_x$ таким, что $x = y \sqcup z$, получаем

$$(T \vee S)(x) \leq Tx \vee Sx$$

и таким образом равенство $(T \vee S)(x) = Tx \vee Sx$ установлено. Теперь, основываясь на доказанном равенстве для супремума операторов, выводим требуемые формулы для инфимума двух операторов, а также модуля, положительной и отрицательной части абстрактного оператора Немыцкого.

$$(T \wedge S)(x) = -\Big((-T) \vee (-S)(x)\Big) = -\Big((-Tx) \vee (-Sx)\Big) = Tx \wedge Sx;$$
$$T^{+}(x) = (T \vee 0)(x) = Tx \vee 0 = (Tx)^{+};$$
$$T^{-}(x) = (-T \vee 0)(x) = -Tx \vee 0 = (Tx)^{-};$$
$$|T|x = (T \vee (-T))(x) = Tx \vee (-Tx) = |Tx|.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $T, S \in \mathscr{N}(E)$, $x \in E$ и $\pi \in \mathfrak{B}(E)$. Тогда можем написать

$$\pi\lambda T(x) = \lambda\pi T(x) = \lambda T\pi(x);$$
$$\pi(T+S)(x) = \pi T(x) + \pi S(x) =$$
$$T\pi(x) + S\pi(x) = (T+S)\pi(x)$$

и отсюда выводим, что $\mathscr{N}(F)$ является векторным подпространством $\mathscr{U}(E)$. Напомним, что равенство $|\pi(x)| = \pi|x|$ справедливо для любого $x \in E$ $\pi \in \mathfrak{B}(E)$. Тогда

$$|T|\pi(x) = |T\pi(x)| = |\Phi(\pi)T(x)| =$$
$$\pi(|T(x)|) = \pi|T|(x)$$

и получаем, что $\mathscr{N}(E)$ — подрешетка векторной решетки $S \in \mathscr{U}(E)$. Пусть теперь $S \in \mathscr{U}(E)$, $0 \leq S \leq T$ и $T \in \mathscr{N}(E)$. Тогда $\leq S\pi(x) \leq T\pi(x)$ для любого $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ и $x \in E$. Так как $\pi T = T\pi$ и $\pi \perp \pi^{\perp} = 0$, то получаем, что

$$(\pi^{\perp}T\pi(x) = 0 \Rightarrow \pi^{\perp}S\pi(x) = \pi^{\perp}S(x) = 0.$$

Таким образом $S\pi(E) \subset \pi S(E)$ и следовательно $\pi S = S\pi$. В заключение установим, что $\mathscr{N}(E)$ — полоса в $\mathscr{U}(E)$. Пусть $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ и $T_\lambda \xrightarrow{(o)} T$, где $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{U}(E)$ и $T \in \mathscr{U}(E)$. Тогда можем написать

$$|T\pi - \pi T| = |T\pi - T_\lambda\pi + T_\lambda\pi - \pi T| \leq$$
$$|T\pi - T_\lambda\pi| + |\pi T - T_\lambda\pi| = |T\pi - T_\lambda\pi| + |\pi T - \Phi(\pi)T_\lambda|.$$

Так как сеть $\Big(|T\pi - T_\lambda\pi| + |\pi T - \pi T_\lambda|\Big)$ порядково сходится к 0 выводим, $T\pi = \pi T$ для любого $\pi \in \mathfrak{B}(E)$. Теорема полностью доказана. $\square$

Требуется отметить, что в случае произвольной векторной решетки E упорядоченное пространство $\mathscr{U}(E)$ не будет векторной решеткой. Тем не менее можно показать, что каждый порядково ограниченный абстрактный оператор Немыцкого на E обладает модулем.

Лемма 2. *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные полосы и $T \in \mathcal{N}(E)$. Тогда существует порядково ограниченный абстрактный оператор Немыцкого $R : E \to E$, такой что $R = T \vee (-T)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $R : E \to E$, заданной формулой

$$Rx := |Tx|,\ x \in E.$$

Покажем, что R — ортогонально аддитивный оператор. Для этого требуется установить, что T является оператором, сохраняющим дизъюнктность. Действительно, так как порядковые проекторы π_x и π_y являются дизъюнктными элементами булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$ для любой пары дизъюнктных элементов s x и y, то справедливы следующие формулы:

$$Tx = T\pi_x x = \pi_x Tx;\ Ty = T\pi_y y = \pi_y Ty \Rightarrow$$
$$Tx \perp Ty.$$

Теперь можем написать

$$R(x+y) = |T(x+y)| = |Tx + Ty| =$$
$$|Tx| + |Ty| = Rx + Ry.$$

Для любого $x \in E$ имеем

$$Tx \leq |Tx| = Rx;\ (-Tx) \leq |Tx| = Rx.$$

Таким образом $T \leq R$ и $(-T) \leq R$. Порядковая ограниченность оператора R очевидна. Предположим, что найдется порядково ограниченный ортогонально аддитивный оператор G на E такой, что $T \leq G$ и $(-T) \leq G$. Тогда для любого $x \in E$ можем написать

$$Tx \leq Gx;\ (-Tx) \leq Gx \Rightarrow$$
$$Tx \vee (-Tx) = |Tx| = Rx \leq Gx$$

и таким образом получаем, что $R = T \vee (-T)$. Наконец покажем, что R является абстрактным оператором Немыцкого. Возьмем произвольный порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ и $x \in E$. Тогда можем написать

$$R\pi(x) = |T\pi(x)| = |\pi Tx| = \pi|Tx| = \pi Rx$$

и лемма полностью доказана. □

Согласно теореме 2 каждый положительный абстрактный оператор Урысона $T : E \to E$ допускает единственное разложение $T = T_1 + T_2$, где $0 \leq T_1 \in \mathcal{N}(E)$

и $T_2 \in \mathscr{N}(E)^{\perp}$. Здесь через $\mathfrak{D}_0(E)$, или $\mathfrak{D}_0$ для краткости обозначено множество всех конечных разбиений единичного оператора Id

$$\mathfrak{D}_0 = \Big\{(\pi_i):\ \pi_k \wedge \pi_j = 0, k \neq j;\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = Id;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Следующая теорема является вторым основным результатом статьи.

Теорема 3. *Пусть E — порядково полная векторная решетка и $T \in \mathscr{U}_+(E)$. Тогда проекция $T_1 \in \mathscr{N}(E)$ оператора T на полосу $\mathscr{N}(E)$ задается формулой*

$$T_1 = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \pi_i T \pi_i :\ (\pi_i) \in \mathfrak{D}_0\Big\}.$$

Доказательство. Для любого $T \in \mathscr{U}_+(E)$ через $\mathfrak{A}(T)$ обозначим множество

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n} \pi_i T \pi_i :\ (\pi_i) \in \mathfrak{D}_0\Big\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{A}(T)$ является частично упорядоченным, направленным вверх множеством положительных ортогонально аддитивных операторов. Принимая во внимание порядковую полноту векторной решетки $\mathscr{U}(E)$, выводим существование оператора $R(T) := \inf \mathfrak{A}(T)$. Требуется установить. что для любого $T \in \mathscr{U}_+(E)$:

(1) $0 \leq R(T) \leq T$;
(2) $R(R(T)) = R(T)$;
(3) $R(T) = T \Leftrightarrow T \in \mathscr{N}(E)$;
(4) $R : \mathscr{U}(E) \to \mathscr{U}(E)$ — линейный оператор.

Справедливость неравенства (1) не вызывает сомнений. Формула (3) является следствием следующей цепочки эквивалентностей:

$$R(T) = T \Leftrightarrow \forall (\pi_i) \in \mathfrak{D}_0 \sum_i \pi_i T \pi_i = T = \sum_i T \pi_i.$$

Если $T_1, T_2 \geq 0$, тогда для произвольных $\pi_i), (\pi_k) \in \mathfrak{D}_0$ имеем

$$\sum_i \pi_i T_1 \pi_i + \sum_j \pi_j T_2 \pi_j \geq$$
$$\sum_k \pi_k (T_1 + T_2) \pi_k =$$
$$\sum_k \pi_k T_1 \pi_k + \sum_k \pi_k T_2 \pi_k,$$

где $(\pi_k) \in \mathfrak{D}_0$ более тонкое разбиение чем (π_i) и (π_j). Переходя к инфимуму, получаем

$$R(T_1) + R(T_2) = R(T_1 + T_2).$$

Осталось установить равенство (2). Положим $W = R(T)$, где $T \in \mathscr{U}_+(E)$. Для любого $\rho \in \mathfrak{B}(E)$ можем написать

$$W\rho = \inf\Big\{\sum_i \pi_i T \pi_i \rho : (\pi_i) \in \mathfrak{D}_0\Big\} =$$
$$\inf\Big\{\sum_i \pi_i' T \pi_i' \rho : \sum_i (\pi_i') = \rho\Big\} =$$
$$\inf\Big\{\sum_i \rho(\pi_i') T \pi_i' : \sum_i (\pi_i') = \rho\Big\}.$$

Отсюда выводим, что $W\rho = \rho W$ для любого $\rho \in \mathfrak{B}(E)$. Таким образом, эквивалентность (3) установлена и $W = R(W)$. Теорема полностью доказана. $\square$

Заключение

В работе установлено, что порядково ограниченные абстрактные операторы Немыцкого, действующие в порядково полной векторной решетке E, образуют полосу в пространстве всех абстрактных операторов Урысона на E. Показано, что решеточные операции в пространстве порядково ограниченных абстрактных операторов Немыцкого вычисляются поточечно. Доказано, что даже в случае неполной векторной решетки E, для каждого порядково ограниченного абстрактного оператора Немыцкго существует модуль. Найдено аналитическое представление оператора проектирования, действующего из пространства абстрактных операторов Урысона на полосу порядково ограниченных абстрактных операторов Немыцкого.

Список литературы

1. ALIPRANTIS C. D. and BURKINSHAW O. (2006) *Positive Operators.* Springer, Dordrecht.

2. APPEL J.A. and ZABREJKO P. P. (2008) *Nonlinear superposition operators.* Cambridge University Press.

3. N. ABASOV and M. PLIEV (2017) On extensions of some nonlinear maps in vector lattices. *J. Math. Anal. and Appl.* 455. p. 516–527.

4. N. ABASOV and M. PLIEV (2018) Disjointness preserving orthogonally additive operators in vector lattices. *Banach Journal of Math. Analysis.* 12 (3). p. 730–750.

5. N. ABASOV and M. PLIEV (2019) Dominated orthogonally additive operators in lattice-normed spaces. *Advances in Operator Theory.* 4 (1). p. 251–264.

6. X. FANG and M. PLIEV (2017) Narrow orthogonally additive operators in lattice-normed spaces. *Siberian Math. J.* 58 (1). p. 134–141.

7. KUSRAEV A. G. (2000) *Dominated Operators.* Kluwer Academic Publishers.

8. J. M. MAZÓN and S. SEGURA de LEÓN (1990) Order bounded orthogonally additive operators. *Rev. Roumane Math. Pures Appl.* 35 (3). p. 329–353.

9. J. M. MAZÓN and S. SEGURA de LEÓN (1990) Uryson operators. *Rev. Roumane Math. Pures Appl.* 35 (4). p. 431–449.

10. M. PLIEV (2017) Domination problem for narrow orthogonally additive operators. *Positivity.* 21 (1). p. 23–33.

УДК: 532.54

MSC2010: 35J57

ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В СЛОИСТОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

© Г. С. Балашова

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250, Российская Федерация
e-mail: *balashovags@mpei.ru*

Movement of Two Liquids in a Layer Porous Medium.

Balashova G. S.

Abstract. In this paper, we consider the problem of displacement of one incompressible fluid by another in a particular model of a linear layered bounded reservoir consisting of two layers separated by a small permeable bridge. This problem is extremely important both practical and theoretical.

In the two-dimensional formulation for the rectilinear case, the problem reduces to solving a system of two elliptic equations for the pressures in each of the media separated by an unknown moving boundary under given boundary conditions and satisfying the conditions of equality of pressures and normal components of the filtration rates of displaced and displacing liquids at the movable interface.

The process is considered to be isothermal, non-deformable porous medium, immiscible and chemically mixed not reacting with each other, phase permeability, capillary and gravitational forces are not taken into account. In this way the real picture of repression is idealized, and it is believed that injection fluid completely pushes back the previously filled reservoir fluid and between them there is a clear interface. In such In this case, the entire flow area D is divided into two zones: the D_1 zone, occupied by the invading fluid, and the D_2 is the area of the fluid being displaced, separated from one another by a clear moving border of section Γ, the law of motion of which is to be determined. Unfortunately, it is impossible to present a solution in analytical form.

To simplify the investigation of the system, its equations are averaged over the thickness of the upper layer. The main feature of this averaging is the specification of the vertical component of the filtration rate in the form of a linear function from the vertical coordinate so that the boundary conditions on the roof and the base of the formation are satisfied. Within the framework of these assumptions, the problem is reduced to solving a system of averaged equations in the upper layer containing functions that describe the interface between two liquids in the upper layer and in the bridge. Integration of the equations in the resulting system in a closed form is not possible without strong restrictions on the law of changing the interface of liquids in the interlayer. In connection with this, two limiting schemes for the displacement of liquids are proposed. The first scheme assumes that there is no overflow of the displacing liquid, which corresponds to the acceleration of the advance of the displacement front in the upper layer. The second scheme assumes a complete overflow of the displacing liquid, which corresponds to the slowing of the displacement front in the upper layer. With such a scheme of motion, the position of the interface in the bridge does not significantly affect the distribution of average pressures in the upper formation. To find the law of displacement of each of the required boundaries, we obtain the Cauchy problems for ordinary differential equations. Numerical calculations have shown that the limit schemes considered differ little from each other, and consequently from the true solution concluded between them. The difference in the times of the complete displacement of one liquid by another, corresponding to these limiting schemes, does not exceed 5 percent.

Keywords: *incompressible fluid, elliptic equations, filtration rate, averaging, overflow displacing, moving boundary, limiting schemes*

В работе рассмотрена двумерная задача вытеснения одной несжимаемой жидкости другой (например, вытеснение нефти водой) в неоднородной слоистой пористой среде с анализом перетоков жидкостей между слоями различной проницаемости. Эта задача представляет большой интерес как в теории многофазной фильтрации, так и в практике разработки нефтяных месторождений.

Итак, имеется пористая среда, насыщенная одной несжимаемой жидкостью. В некоторый момент времени в нее начинают нагнетать другую несжимаемую жидкость. Процесс считается изотермическим, пористая среда недеформируемой, жидкости несмешивающимися и химически не реагирующими друг с другом, фазовые проницаемости, капиллярные и гравитационные силы не учитываются. При этом считается, что нагнетаемая жидкость полностью оттесняет ранее заполнявшую пласт жидкость и между ними имеется четкая граница раздела. В таком случае вся область течения D разбивается на две зоны: D_1 — зона, занятая вторгшейся жидкостью, и D_2 — зона вытесняемой жидкости, отделенных одна от другой четкой подвижной границей раздела Γ, закон движения которой подлежит определению. Таким образом, реальная картина вытеснения идеализируется.

Давления жидкостей $P_1(x, y, t)$ и $P_2(x, y, t)$ в каждой из указанных зон D_1 и D_2 удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям

$$\operatorname{div}\left[k(x,y)\,\nabla P_i(x,y,t)\right] = 0, \quad i = 1, 2; \quad (x, y) \in D_i, \tag{1}$$

являющимися следствием уравнений неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{w}_i = 0 \tag{2}$$

и закона Дарси

$$\bar{w}_i = -\frac{k(x,y)}{\mu_i}\nabla P_i(x,y,t). \tag{3}$$

Здесь и далее индексом 1 отмечаются все параметры, характеризующие вытесняющую жидкость, а индексом 2 — вытесняемую; $\bar{w}_i$ — скорости фильтрации соответствующих жидкостей; $k(x,y)$ — абсолютная проницаемость среды; μ_i — вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей соответственно.

Рассматривается слоистая пористая среда, т.е. предполагается, что проницаемость меняется только по мощности пласта $k(x,y) = k(y)$ и является кусочно-постоянной функцией вертикальной координаты y. Причем проницаемость перемычки k_n значительно меньше проницаемости верхнего пласта k_0, т.е. $k_n \ll k_0$. Тогда уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial^2 P_i(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_i(x,y,t)}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

$$\text{при } i=1 \quad 0 < x < x_0(t); \quad \text{при } i=2 \quad x_0(t) < x < L;$$

$$0 < y < h_0, \quad (x,y) \in D_i.$$

На подвижной границе Γ во все время движения выполняются следующие условия сопряжения, являющиеся следствием непрерывности потока массы и импульса:

1) нормальная составляющая скорости фильтрации непрерывна при переходе через Γ

$$w_{1n} = w_{2n}$$

или с учетом закона Дарси (3)

$$\frac{1}{\mu_1}\left.\frac{\partial P_1}{\partial n}\right|_\Gamma = \frac{1}{\mu_2}\left.\frac{\partial P_2}{\partial n}\right|_\Gamma, \tag{5}$$

где $\bar{n}$ — нормаль к границе Γ, направленная (для определенности) внутрь области D_1;

2) давление при переходе через контур Γ изменяется непрерывно

$$P_1\big|_\Gamma = P_2\big|_\Gamma. \tag{6}$$

На внешних неподвижных границах области фильтрации заданы постоянные давления: p_{01} на левой границе, p_{02} — на правой.

Вытеснение рассматривается в частной модели линейного слоистого ограниченного пласта, имеющего длину L, состоящего из двух пластов, разделенных малопроницаемой перемычкой. Предполагается, что в пласте ниже перемычки поддерживается постоянное начальное давление $p_0 = \text{const}$.

В верхний пласт, имеющий мощность h_0, полностью насыщенный нефтью, в начальный момент времени через галерею, расположенную на линии $x = 0$, начинают нагнетать воду под давлением p_{01}. При этом его верхняя граница считается непроницаемой, т.е.

$$\left.\frac{\partial P_i}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Закон движения границы раздела нефть–вода в верхнем пласте ищется в виде $x = x_0(t)$. Предположение о прямолинейности фронта вытеснения в верхнем пласте представляется разумным, так как горизонтальный размер пласта L обычно существенно больше его мощности h_0 ($h_0 \ll L$).

Вследствие повышения давления в верхнем пласте будет происходить переток жидкости в перемычку, в результате чего в ней также образуется граница раздела Γ_n между водяной и нефтяной зонами, форма которой представляется выражением

$$y_n = h_0 + h(x,t); \quad 0 \le h(x,t) \le h_n. \tag{8}$$

Схема фильтрации представлена на рис. 1. Такая схема будучи простой учитывает характерные особенности процесса вытеснения в слоистых грунтах.

Задача состоит в нахождении распределения давлений в каждой из зон в верхнем пласте, удовлетворяющих соответственно уравнениям (4) и граничным условиям (5) и (6), а также в определении закона движения границ раздела нефть–вода в верхнем пласте $x = x_0(t)$ и в перемычке $h(x, y)$. Задача математически труднодоступна даже при использовании современной вычислительной техники.

Для упрощения исследований осредним точные уравнения движения (4) по мощности верхнего пласта, пользуясь схемой, описанной в работе [1]. Для этого проинтегрируем уравнения (4) по мощности верхнего пласта

$$\frac{1}{h_0}\int_0^{h_0} \frac{\partial^2 P_i(x,y,t)}{\partial x^2} dy + \frac{1}{h_0}\int_0^{h_0} \frac{\partial^2 P_i(x,y,t)}{\partial y^2} dy = 0, \tag{9}$$

откуда, вводя обозначение для средних давлений

$$p_i(x,t) = \frac{1}{h_0}\int_0^{h_0} P_i(x,y,t)dy, \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

получим

$$\frac{\partial^2 p_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{h_0}\left.\frac{\partial P_i}{\partial y}\right|_{y=0}^{y=h_0} = 0. \tag{11}$$

Используя условие (7) и закон Дарси (3), представим

$$\left.\frac{\partial P_i}{\partial y}\right|_{y=h_0} = -\frac{\mu_i}{k_0} v_i(x, h_0, t) = -\frac{\mu_i}{k_0} v_i(x, t), \quad i = 1, 2 \tag{12}$$

(здесь $v_i(x, y)$ — скорости перетока на границе $y = h_0$).

Подставив (12) в (11), получим систему для осредненных давлений

$$\frac{\partial^2 p_i(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu_i}{k_0 h_0} v_i(x,t) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

В качестве основной гипотезы примем допущение о том, что вертикальная составляющая скорости фильтрации в верхнем пласте от координаты y зависит линейно:

$$v_i(x, y, t) = \frac{v_i(x,t)}{h_0} y, \quad 0 \le y \le h_0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда закон Дарси (3) запишется в следующем виде:

$$\frac{v_i(x,t)}{h_0} y = -\frac{k_0}{\mu_i} \, \frac{\partial P_i}{\partial y}. \tag{14}$$

Проинтегрировав (14) по y, найдем выражения для давлений:

$$P_i(x, y, t) = -\frac{\mu_i}{k_0} \int \frac{v_i(x,t)}{h_0} y dy + C_i(x, t) =$$

$$= -\frac{\mu_i}{k_0} \, \frac{v_i(x,t)}{h_0} \, \frac{y^2}{2} + C_i(x,t), \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

где $C_i(x, y)$ — произвольные функции своих аргументов.

Производя осреднение соотношений (15) по мощности верхнего пласта, выразим указанные константы через соответствующие средние давления и скорости перетока

$$C_i(x,t) = p_i(x,t) + \frac{\mu_i h_0^2}{6k_0} v_i(x,t). \tag{16}$$

Формулы (15), (16) позволяют найти выражения для давлений в верхнем пласте через соответствующие им средние давления и скорости перетока

$$P_i(x,y,t) = -\frac{\mu_i}{k_0 h_0} v_i(x,t) \frac{y^2}{2} + p_i(x,t) + \frac{\mu_i h_0^2}{6k_0} v_i(x,t). \tag{17}$$

Для рассматриваемой модели пласта с малопроницаемой перемычкой вследствие условия $k_n \ll k_0$ горизонтальная фильтрация в перемычке пренебрежимо мала по сравнению с вертикальным движением.

В рамках этих допущений распределение давлений $P_n^{(i)}(x, y, t)$ в перемычке можно считать линейным по y, т.е.

$$P_n^{(i)}(x,y,t) = a_i(x,t) y + b_i(x,t), \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Используя далее условия равенства давлений верхнего пласта и перемычки на поверхности их раздела $y = h_0$, давлений в водяной и нефтяной зонах на движущейся границе в перемычке $y = h_0 + h(x, y)$, а также давлений в перемычке и в нижнем пласте на поверхности их раздела $y = h_0 + h_n$ в области $0 < x < x_0(t)$ и замечая, что из формулы (18) $a_i(x,t) = \dfrac{\mu_i}{k_n} v_i(x,t)$, получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $v_1(x,t)$, $b_1(x,t)$, $b_2(x,t)$:

$$\begin{cases} P_1(x,h_0,t) = P_n^{(1)}(x,y,t)\big|_{y=h_0}, \\ P_n^{(1)}(x,y,t)\big|_{y=h_0+h(x,t)} = P_n^{(2)}(x,y,t)\big|_{y=h_0+h(x,t)}, \\ P_n^{(2)}(x,y,t)\big|_{y=h_0+h_n} = p_0. \end{cases} \tag{19}$$

Из системы (19) для скорости перетока вторгшейся воды имеем

$$v_1(x,t) = \frac{3k_n k_0}{\mu_1\{3k_0[h(x,t) + \mu_{21}(h_n - h(x,t))] + k_n h_0\}}(p_1(x,t) - p_0). \tag{20}$$

(здесь введено обозначение $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1$). Аналогично решая систему, получающуюся из условий равенства давлений на границах $y = h_0$ и $y = h_0 + h_n$ в области $x_0(t) < x < L$

$$\begin{cases} P_2(x,h_0,t) = P_n^{(2)}(x,y,t)\big|_{y=h_0}, \\ P_n^{(2)}(x,y,t)\big|_{y=h_0+h_n} = p_0, \end{cases} \tag{21}$$

находим скорость перетока оттесняемой нефти

$$v_2(x,t) = \frac{3k_n k_0}{\mu_2(3k_0 h_n + k_n h_0)}(p_2(x,t) - p_0). \tag{22}$$

Со следующими обозначениями

$$\alpha_1^2(x,t) = \frac{3k_n k_0}{3k_0[h(x,t) + \mu_{21}(h_n - h(x,t))] + k_n h_0}, \tag{23}$$

$$\alpha_2^2(x,t) = \frac{3k_n k_0}{3k_0 h_n + k_n h_0} \tag{24}$$

для скоростей перетока получим

$$v_i(x,t) = v_i(x,h_0,t) = -\frac{1}{\mu_i}\frac{\partial P_i}{\partial y}(x,h_0,t) =$$

$$= \frac{\alpha_i^2}{\mu_i}(p_i(x,t) - p_0), \quad i = 1, 2. \tag{25}$$

С учетом (25) уравнения (13) примут вид

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_1^2(x,t)(p_1(x,t) - p_0) = 0 \quad (0 < x < x_0(t)), \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 p_2(x,t)}{\partial x^2} - \alpha_2^2(p_2(x,t) - p_0) = 0 \quad (x_0(t) < x < L). \tag{27}$$

Из известного кинематического соотношения Кельвина

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial n} v_n = 0$$

(здесь $F(x,y,t) = 0$ — уравнение границы раздела в неявном виде; v_n — истинная скорость ее перемещения по нормали к ней) с учетом прямолинейности, а также закона Дарси (3) получим задачи Коши для определения закона движения границ раздела $x = x_0(t)$ в верхнем пласте

$$m\frac{dx_0(t)}{dt} = -\frac{k_0}{\mu_2}\,\frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,t), \quad x(0) = 0 \tag{28}$$

и в перемычке

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = v_1(x,h_0,t) = -\frac{k_0}{\mu_1}\,\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,h_0,t), \quad h(x,0) = 0. \tag{29}$$

Задача (29) после использования равенства (25) запишется в виде

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\mu_1}\alpha_1^2(x,t)(p_1(x,t) - p_0), \quad h(x,0) = 0, \tag{30}$$

где x — параметр $(0 \le x \le x_0(t))$. Для решения уравнений (26) и (27) используются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &p_1(0,t) = p_{01}, \qquad p_2(L,t) = p_{02}, \\ &p_1(x_0(t),t) = p_2(x_0(t),t), \quad \mu_{21}\frac{\partial p_1(x_0,t)}{\partial x} = \frac{\partial p_1(x_0,t)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{31}$$

Однако, задача все еще остается сложной. В частности, не представляется возможным проинтегрировать уравнения (26), (27), не накладывая сильных ограничений на вид функции $h(x,t)$. Чтобы сделать дальнейшие упрощения, будем исходить из двух предельных схем течения, полагая в (23) и (26):

1) $h(x,t) = 0$, т.е. перемычка заполнена только вытесняемой жидкостью;

2) $h(x,t) = h_n$, т.е. перемычка насыщена только вытесняющей жидкостью.

Первая схема соответствует ускорению продвижения фронта вытеснения $x_0(t)$ по сравнению с истинным течением, а вторая — его замедлению. Сравнение решений позволило сделать вывод о разумности такого подхода. Оказалось, что при такой схематизации процесса положение границы раздела Γ_n в перемычке не влияет на распределение средних давлений в верхнем пласте. В этом случае удается найти распределение давлений в верхнем пласте и найти закон движения границы раздела в нем. После этого из уравнения (30) можно определить форму границы в перемычке.

Для иллюстрации результатов проведены численные расчеты при следующих значениях параметров: $L = 10^5$ см, $h_0 = 10^3$ см, $h_n = 5 \cdot 10^2$ см, $k_0 = 1$ дарси, $k_n = 5 \cdot 10^{-5}$ дарси, $p_{01} = 80$ ат, $p_0 = 50$ ат, $\mu_1 = 1$ спз, $\mu_2 = 3$ спз, $T = 1$ год. При расчетах значение давления p_{02} в одном случае полагалось равным p_0, в другом — $p_0/2$.

На рис. 2 изображены кривые, описывающие закон движения фронта вытеснения в верхнем пласте; кривые 1 соответствуют значению $p_{02} = p_0$, кривые 2 — значению $p_{02} = p_0/2$. При этом здесь и на рис. 3, 4 индексы a и b относятся к первой и второй предельным схемам соответственно.

На рис. 3 приведены кривые 1, 2, 3, 4 распределения давлений P_i в верхнем пласте для случая $p_{02} = p_0/2$ в различные моменты времени τ ($\tau_1 = 0,48$; $\tau_2 = 1,44$; $\tau_3 = 1,92$; $\tau_4 = 2,34$) и форма границы раздела Γ_n жидкостей в перемычке для тех же моментов времени.

На рис. 4 приведены кривые 1, 2, 3, 4 распределения давлений P_i в верхнем пласте для случая $p_{02} = p_0$ при $\tau_1 = 0,66$; $\tau_2 = 1,95$; $\tau_3 = 2,4$; $\tau_4 = 3,99$ соответственно и форма границы раздела жидкостей в перемычке для тех же моментов времени.

Все переменные на рис. 2, 3, 4 приведены в безразмерном виде, а именно:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad H(\xi, \eta) = \frac{h(x,t)}{h_0}, \quad \sigma_n = \frac{k_n}{k_0},$$

$$P_i(\xi, \tau) = \frac{p_i(x,t) - p_0}{p_0}, \quad P_{01} = \frac{p_{01} - p_0}{p_0}, \quad P_{02} = \frac{p_{02} - p_0}{p_0},$$

где T — некоторое характерное для задачи время.

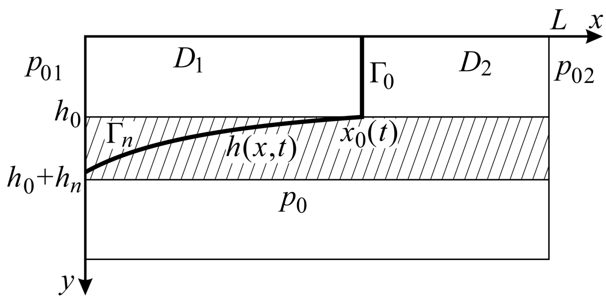

Рис. 1

Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что рассмотренные предельные схемы мало отличаются одна от другой, а следовательно, и от истинного процесса, которое заключено между ними. Различие во временах полного вытеснения нефти

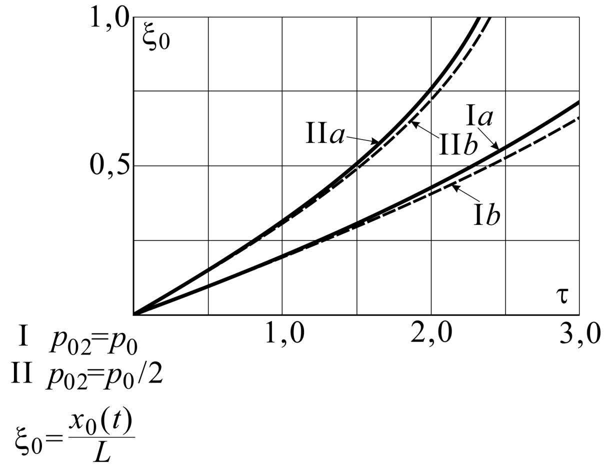

Рис. 2

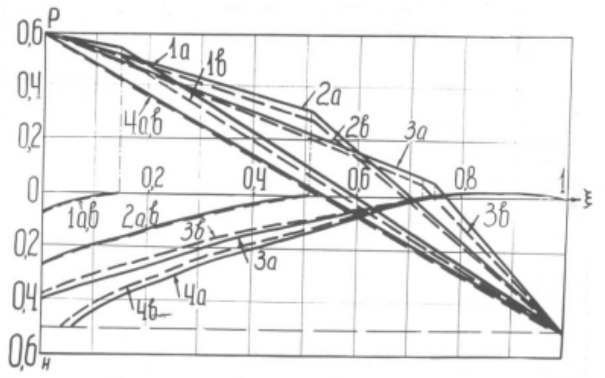

Рис. 3

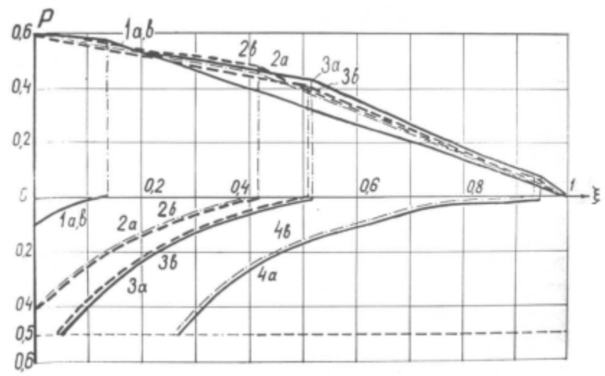

Рис. 4

водой (рис. 2), соответствующих этим предельным схемам, не превышает 5 %. Следовательно, при оценочных инженерных расчетах можно пользоваться одной из предложенных схем вытеснения в зависимости от свойств вытесняемой и вытесняющей жидкостей и геодезических характеристик рассматриваемых пластов.

Список литературы

1. Лурье, М. В., Максимов, В. М. Об одном способе осреднения уравнений многофазной фильтрации при наличии перетоков между пластами // Изв. АН СССР. — МЖГ, 1969. — №. 3. — С. 130–133.

   LURIE, M. and MAKSIMOV, V. (1969) On a method of averaging the equations of multiphase filtration in the presence of flows between layers. *Izv. USSR Academy of Sciences.* 3. p. 130–133.

УДК: 517.958

MSC2010: 35D99

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИССИПАТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА-МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА[1]

© А. В. Звягин, Д. М. Поляков

Воронежский государственный университет,
Научно-исследовательский институт математики
Университетская пл., 1, Воронеж, 394018, Российская Федерация
Владикавказский научный центр РАН,
Южный математический институт, отдел математического анализа
Маркуса, 22, Владикавказ, 362027, Российская Федерация
e-mail: *zvyagin.a@mail.ru* e-mail: *DmitryPolyakow@mail.ru*

Investigation of the Dissipative Solvability for Alpha-Maxwell Model.

Zvyagin A. V., Polyakov D. M.

Abstract. We study initial-boundary value problems for the Lagrangian averaged alpha model for the equations of motion for the corotational Maxwell and inviscid fluids in 2D and 3D. We show existence of (global in time) dissipative solutions to these problems.

The Maxwell model is one of the basic and classical models of a viscoelastic material. Its mechanical analogy is comprised of a spring and a dashpot connected in series. The multidimensional Maxwell models generate complicated systems of PDEs due the frame-indifference restrictions and consecutive involvement of objective derivatives. Very few mathematical results are known for the corotational Maxwell fluid equations. In particular, there is no global solvability theorem, even in 2D. Moreover, there is evidence of non-existence of smooth solutions. In these circumstances, if we want the problem to be solvable globally, a possible way out is to consider a kind of a generalized solution different from the standard hydrodynamical weak solution framework.

We are going to use the concept of dissipative solution due to Lions. It was suggested for the Euler equations of ideal fluid flow, which have only been proven to be globally weakly solvable on the torus (this is a very recent result, and that wild weak solutions are necessarily not dissipative solutions). Later, in addition to the Euler equation, the existence of such solutions was established for Boltzmann's equation, and for various models arising in magnetohydrodynamics, diffusion in polymers, and image restoration.

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант МК-2213.2018.1, соглашение 075-02-2018-339) и РФФИ (грант 16-01-00370). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

The objective of our paper is to introduce dissipative solutions for the corotational Maxwell-alpha problem, and to show their existence and basic properties. These solutions are always global in time.

Keywords: *alpha model of hydrodynamic, Maxwell model, dissipative solution, existence theorem, topological approximation method.*

Введение

В последние тридцать лет интенсивное развитие и популярность получили альфа-модели гидродинамики. По сравнению с исходными моделями, они представляют собой своего рода аппроксимации, которые зависят от параметра α. Альфа-модель отличается от исходной модели тем, что функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую u, связанную с v. Идея использовать для исследования исходных моделей такие аппроксимации впервые возникла в работе Ж. Лере [1]. Позднее на этой идее и была построена теория альфа-моделей, в которой функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую u, связанную с v именно эллиптической системой $v = u - \alpha^2 \Delta u$. Используемый при этом оператор сглаживания представляет из себя известный оператор Гельмгольца. Выбор такого оператора связан с его хорошими математическими свойствами. Пионерскими работами в этой теории были статьи по исследованию альфа-моделей Эйлера [2, 3] и Навье-Стокса [4].

Большая часть работ по исследованию разрешимости альфа-моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости (см. обзорную статью [5]). Это уже упомянутые нами альфа-модели Эйлера, Навье–Стокса [6] и ее различных модификаций: альфа-модели Лере [7, 9], альфа-модель Кларка [10], альфа-модель Бардина [11] и др. Рассмотренные альфа-модели разделяются на два класса, в зависимости от свойств ортогональности сглаженного нелинейного члена (согласно классификации, приведенной в [12]). Так, например, альфа-модель Лере принадлежит классу I, а альфа-модель Навье-Стокса — классу II. Причем со временем эти системы, как правило, стали рассматриваться как независимые корректно определенные системы уравнений.

Интерес к изучению альфа-моделей также связан с их применением к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости [13]. Также делались шаги по использованию альфа-моделей в исследованиях движения потоков воды в Атлантическом океане, циркуляции атмосферы для глобального моделирования климата [14].

В последние несколько лет появились работы, посвященные альфа-моделям для неньютоновской жидкости (см., например, [15, 17]). Данная работа на примере альфа-модели I класса для начально-краевой задачи, соответствующей альфа-модели Максвелла, продолжает исследования разрешимости альфа-моделей неньютоновских жидкостей.

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы будем исследовать разрешимость следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = \operatorname{Div} \sigma + f, \tag{1}$$

$$\sigma + \lambda\Big(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\Big) = 2\eta \mathscr{E}(v), \tag{2}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \tag{6}$$

Здесь, $u = (u_1(t,x), \dots, u_n(t,x))$ — вектор-функция скорости, $v = (v_1(t,x), \dots, v_n(t,x))$ — вектор-функция модифицированной скорости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — функция плотности внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij}(u))$ — девиатор тензора напряжений. Дивергения $\operatorname{Div}\sigma$ тензора σ является вектором с координатами $(\operatorname{Div}\sigma)_j = \sum_{i=1}^{n}(\partial\sigma_{ij}/\partial x_i)$. Через

$$\mathscr{E} = (\mathscr{E}_{ij}(v)), \quad \mathscr{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

обозначим тензор скоростей деформации, и через

$$W = (W_{ij}(v)), \quad W_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

обозначим тензор завихренности. Кроме того, символом $\alpha > 0$ обозначим скалярный параметр, отражающий ширину шкалы пространственной фильтрации для модифицированной скорости, $\eta > 0$ — вязкость среды, λ — время релаксации, u_0 и σ_0 — начальные значения. Здесь (2) — реологическое (определяющее) соотношение Максвелла. Далее, (3) — действие оператора Гельмгольца на вектор-функцию u, (4) — условие несжимаемости жидкости, (5) — граничное условие "прилипания" и (6) — начальные условия.

В настоящей работе мы установим существование диссипативного решения, которое впервые было введено П.-Л. Лионсом для уравнения Эйлера движения идеальной жидкости (см. [18, § 4.4], а также обзорную статью [19]). Отметим, что понятие диссипативного решения играет ключевую роль в задаче перемещения кинетической энергии в гидродинамике. В качестве основного метода исследования будет выступать аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики, разработанный В. Г. Звягиным (см. [20]).

Работа организована следующим образом. В § 2 введем необходимые обозначения и функциональные пространства, сформулируем определение диссипативного решения и основную теорему, посвященную существованию решения для альфа-модели Максвелла. В § 3 рассмотрим вспомогательную задачу с более хорошими свойствами и, используя теорию топологической степени, для этой задачи докажем существование слабого решения. Наконец, последний параграф посвящен предельному переходу и доказательству существования диссипативных решений у исходной альфа-модели.

1. Предварительные сведения и основной результат

Через $\mathbb{R}^{n\times n}$ мы обозначим пространство матриц размера $n \times n$ и через $\mathbb{R}^{n\times n}_S$ — его подпространство симметричных матриц. Всюду далее через E обозначается одно из следующих пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times n}_S$.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых функций $u : \Omega \to E$, суммируемых с p-ой степенью. Через $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, будем обозначать гильбертово пространство Соболева функций $u : \Omega \to E$, которые со своими производными до порядка m включительно принадлежат пространству $L_2(\Omega)$.

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ мы обозначим пространство бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω и через $\mathscr{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathscr{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — по норме $H^1(\Omega)$ и через V^2 пространство $V^2 = H^2(\Omega) \cap V^1$. Также будем использовать разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)$: $L_2(\Omega) = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$, где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$ (т. е. пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)$).

Введем шкалу пространств V^β, $\beta \in \mathbb{R}$ (см. [21, § 4.2]). Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы

Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N} \right\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j и определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение пространства E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \tag{7}$$

В [21, Лемма 4.5] показано, что на пространстве V^β, $\beta > -1/2$, норма (7) эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{H^\beta(\Omega)}$ пространства $H^\beta(\Omega)$. Кроме того, согласно [22, Следствие 4.2.1] нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 и V^5 могут быть заданы следующим образом:

$$\|v\|_{V^1} = \left(\int\limits_\Omega \nabla v(x) : \nabla v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int\limits_\Omega \Delta v(x) \Delta v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V^3} = \left(\int\limits_\Omega \nabla \Delta v(x) : \nabla \Delta v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^5} = \left(\int\limits_\Omega \nabla \Delta^2 v(x) : \nabla \Delta^2 v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь символ " : " обозначает покомпонентное матричное произведение, т. е. для $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $i, j = 1, \dots n$, имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij} d_{ij}$.

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, мы будем обозначать сопряженное пространство к V^β. Кроме того, из определения шкалы пространств V^β следует, что оператор $A : V^\beta \to V^{\beta-2}$ непрерывно обратим.

По теореме Рисса будем отождествлять гильбертово пространство V^0 с его сопряженным $(V^0)^*$. Следовательно, справедливы следующие вложения

$$V^5 \subset V^3 \subset V^1 \subset V^0 \equiv (V^0)^* \subset V^{-1} \subset V^{-3},$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны.

Через $C([0,T];F)$, $C_w([0,T];F)$, $L_p(0,T;F)$ мы обозначим банаховы пространства непрерывных, слабо непрерывных и суммируемых с p-степенью функций на $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве F. Через $\langle f, \phi \rangle$ будем обозначать действие функционала f из V^{-1} на элемент ϕ из V^1. Кроме того, согласно [23, Глава III, Лемма 1.1] имеет место равенство

$$\langle u, \phi \rangle = \frac{d}{dt}(u, \phi), \quad u, \phi \in V^1.$$

Наряду со скалярным произведением в пространстве V^1 мы рассмотрим скалярное произведение

$$(u,v)_V = (u,v) + (\alpha\nabla u, \alpha\nabla v), \quad u,v \in V^1.$$

Тогда согласно [24, Ch. II] имеет место равенство

$$\langle \Delta_\alpha u, \phi\rangle = \frac{d}{dt}(u,\phi)_V = \langle u', \phi\rangle, \quad u,\phi \in V^3.$$

Всюду далее символом C с индексами внизу мы будем обозначать положительные константы.

Теперь перейдем к определению диссипативного решения. Но прежде введем некоторые дополнительные понятия. Определим оператор Гельмгольца $\Delta_\alpha = I - \alpha^2\Delta$, где I — тождественный оператор. Кроме того, введем замену $\mu = \eta/\lambda$. Рассмотрим следующие выражения, где w и ρ векторно- и матрично-значные функции по времени:

$$E_1(w,\rho) = -\frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial t} - P\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i} + P\mathrm{Div}\,\rho + Pf,$$

$$E_2(w,\rho) = -\frac{\rho}{\lambda} - \frac{\partial\rho}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} w_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + 2\mu\mathscr{E}(\Delta_\alpha w).$$

Кроме того, для дальнейшего исследования потребуются аналогичные выражения, зависящие от скалярной величины $\xi > 0$:

$$E_1(w,\rho,\xi) = -\frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial t} - \xi P\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i} + \xi P\mathrm{Div}\,\rho + Pf,$$

$$E_2(w,\rho,\xi) = -\frac{\rho}{\lambda} - \frac{\partial\rho}{\partial t} - \xi\sum_{i=1}^{n} w_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + 2\xi\mu\mathscr{E}(\Delta_\alpha w).$$

Следуя [18, § 4.4], введем определение диссипативного решения для альфа-модели Максвелла.

Определение 1. Пусть $u_0 \in V^2$, $\sigma_0 \in V^0$. Пара (u,σ) из класса $u \in C_w([0,\infty);V^2)$, $\sigma \in C_w([0,\infty);V^0)$, называется *диссипативным решением* задачи (1) – (6), если для всех функций $k \in C^1([0,\infty);V^5)$, $\theta \in C^1([0,\infty);V^3)$, и почти всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$2\mu\|u(t)-k(t)\|^2_{V^0} + \|\sigma(t)-\theta(t)\|^2_{V^0} \leqslant \exp\Bigg(\int\limits_0^t \Gamma(s)\,ds\Bigg)\Bigg[2\mu\|\Delta_\alpha u_0 - \Delta_\alpha k(0)\|^2_{V^0} +$$

$$+ \|\sigma_0 - \theta(0)\|^2_{V^0} + \int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^0 \Gamma(\psi)\,d\psi\biggr)[4\mu(E_1(k,\theta)(s), \Delta_\alpha(u(s)-k(s)))+$$

$$+ 2(E_2(k,\theta)(s), \sigma(s) - \theta(s))]\,ds\Biggr], \tag{8}$$

где

$$\Gamma(t) = C_0(\|\Delta_\alpha k(t)\|_{V^3} + \|\theta(t)\|^2_{V^3}). \tag{9}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда:*

(a) Для $u_0 \in V^2$ и $\sigma_0 \in V^0$ существует диссипативное решение начально-краевой задачи (1) – (6).

(b) Если, для некоторых $u_0 \in V^2$, $\sigma_0 \in V^0$, существует сильное решение $(u_T, \sigma_T) \in C^1([0,T]; V^5) \times C^1([0,T]; V^3)$ начально-краевой задачи (1) – (6), то сужение любого диссипативного решения (с теми же начальными условиями) на $[0,T]$ совпадает с (u_T, σ_T).

(c) Каждое сильное решение $(u_T, \sigma_T) \in C^1([0,T]; V^5) \times C^1([0,T]; V^3)$ является единственным диссипативным решением.

2. Исследование семейства вспомогательных задач

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $u_0 \in V^2$, $\sigma_0 \in V^0$, $f \in L_2(0,T;V^0)$. Мы рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач:

$$\frac{\partial \Delta_\alpha u}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \Delta_\alpha u}{\partial x_i} + \nabla p + \varepsilon A_2 u = \xi \mathrm{Div}\,\sigma + f, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\lambda} + \xi \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \varepsilon A_3 \sigma = 2\mu\xi \mathscr{E}(\Delta_\alpha u), \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta^2 u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \tag{13}$$

Здесь $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ — константы. Операторы $A_2 : V^5 \to V^{-3}$ и $A_3 : V^3 \to V^{-3}$ задаются соответственно следующим образом

$$\langle A_2 u, \varphi\rangle = (\nabla\Delta\Delta_\alpha u, \nabla\Delta\varphi), \quad \varphi \in V^3, \quad \langle A_3\sigma, \Phi\rangle = (\nabla\Delta\sigma, \nabla\Delta\Phi), \quad \Phi \in V^3.$$

Эта задача будет рассматриваться в следующих функциональных пространствах:

$$W_1 = \{u \in L_2(0,T;V^5), u' \in L_2(0,T;V^{-3})\}$$

с нормой $\|u\|_{W_1} = \|u\|_{L_2(0,T;V^5)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$ и

$$W_2 = \{u \in L_2(0,T;V^3), u' \in L_2(0,T;V^{-3})\}$$

с нормой $\|u\|_{W_2} = \|u\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}$.

Определение 2. Пара функций $u \in W_1$ и $\sigma \in W_2$ называется слабым решением вспомогательной задачи (10) – (13), если выполнены начальные условия (13) и для всех $\varphi \in V^3$, $\Phi \in V^3$, и почти всех $t \in [0,T]$ имеют место равенства

$$\frac{d}{dt}(\Delta_\alpha u, \varphi) - \xi \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i \Delta_\alpha u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big) + \xi(\sigma, \nabla\varphi) + \varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha u, \nabla\Delta\varphi) = \langle f, \varphi\rangle, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma, \Phi) + \frac{1}{\lambda}(\sigma, \Phi) - \xi \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\Big) + 2\mu\xi(\Delta_\alpha u, \operatorname{Div}\Phi) + \varepsilon(\nabla\Delta\sigma, \nabla\Delta\Phi) = 0. \tag{15}$$

Замечание 1. Согласно [24, Lemma 2.2.7] справедливы вложения $W_1 \subset C([0,T];V^2)$, $W_2 \subset C([0,T];V^0)$. Таким образом, начальные условия (13) имеют смысл.

Перепишем вспомогательную задачу (10) – (13) в удобной операторной форме. Используя слагаемые в равенстве (14), для почти всех $t \in (0,T)$ мы введем операторы с помощью следующих равенств:

$$K_1 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle K_1(u), \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \big(u_i \Delta_\alpha u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\big), \quad u \in W_1, \quad \varphi \in V^3,$$

$$S_1 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle S_1(\sigma), \varphi\rangle = -(\sigma, \nabla\varphi), \quad \sigma \in W_2, \quad \varphi \in V^3,$$

$$A_2 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle A_2 u, \varphi\rangle = (\nabla\Delta\Delta_\alpha u, \nabla\Delta\varphi), \quad u \in W_1, \quad \varphi \in V^3.$$

Аналогичным образом мы зададим операторы для слагаемых из равенства (15):

$$K_2 : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}),$$

$$\langle K_2(u,\sigma), \Phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \Big(u_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\Big), \quad u \in W_1, \quad \sigma \in W_2, \quad \Phi \in V^3,$$

$$S_2 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle S_2(\sigma), \varphi\rangle = (\sigma, \Phi), \quad \sigma \in W_2, \quad \Phi \in V^3,$$

$$S_3 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle S_3(u), \Phi\rangle = -(\Delta_\alpha u, \operatorname{Div}\Phi), \quad u \in W_1, \quad \Phi \in V^3,$$

$$A_3 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}), \quad \langle A_3\sigma, \Phi\rangle = (\nabla\Delta\sigma, \nabla\Delta\Phi), \quad \sigma \in W_2, \quad \Phi \in V^3.$$

Также мы определим операторы следующими равенствами:

$$\widetilde{A} : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times L_2(0,T;V^{-3}) \times V^2 \times V^0,$$

$$\widetilde{A}(u,\sigma) = (u' + \varepsilon A_2 u, \sigma' + \varepsilon A_3\sigma + 1/\lambda S_2(\sigma), u|_{t=0}, \sigma|_{t=0}),$$

$$Q : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times L_2(0,T;V^{-3}) \times V^2 \times V^0,$$
$$Q(u,\sigma) = (K_1(u) + S_1(\sigma), K_2(u,\sigma) + 2\mu S_3(u), u_0, \sigma_0).$$

Таким образом, вспомогательная задача эквивалентна следующему операторному уравнению

$$\widetilde{A}(u,\sigma) = \xi Q(u,\sigma) + (f, 0, u_0, \sigma_0). \tag{16}$$

Исследуем свойства операторов, входящих в уравнение (16). Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одну и ту же букву для обозначений операторов, действующих в разных функциональных пространствах.

Лемма 1. *Операторы $A_2 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3})$, $A_3 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ и $S_2 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ являются непрерывными операторами.*

Доказательство. Сначала установим непрерывность оператора $A_2 : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-3})$. Для доказательства непрерывности линейного оператора A_2 необходимо установить его ограниченность. Используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^5 \subset V^3$ для любых $u \in L_2(0,T;V^5)$ и $\varphi \in V^3$ получим

$$|\langle A_2 u, \varphi\rangle| = |(\nabla\Delta\Delta_\alpha u, \nabla\Delta\varphi)| \leqslant \|u - \alpha^2\Delta u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^3} \leqslant C_1(1+\alpha^2)\|u\|_{V^5}\|\varphi\|_{V^3}.$$

Следовательно, $\|A_2 u\|_{V^{-3}} \leqslant C_1(1+\alpha^2)\|u\|_{V^5}$. Возведем в квадрат последнее неравенство и проинтегрируем его по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\|A_2 u\|^2_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_1^2(1+\alpha^2)^2\|u\|^2_{L_2(0,T;V^5)}.$$

Таким образом, оператор $A_2 : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-3})$ является непрерывным. Следовательно, имеет место следующая суперпозиция вложений:

$$W_1 \subset L_2(0,T;V^5) \xrightarrow{A_2} L_2(0,T;V^{-3}),$$

где вложение непрерывно и отображение A_2 также непрерывно. Таким образом, отображение $A_2 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3})$ — непрерывно. Непрерывность отображений $A_3 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ и $S_2 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ доказывается аналогичным образом. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Операторы $K_1 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3})$ и $K_2 : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ являются вполне непрерывными операторами.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение леммы для оператора K_1. Сначала установим непрерывность билинейного оператора

$K_1 : L_6(0,T;V^1) \times L_3(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-3})$ вида

$$\langle K_1(u,w),\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\Big(u_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big).$$

Используя неравенство Гельдера, для $\varphi \in V^3$ мы получим

$$|\langle K_1(u,w),\varphi\rangle| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\Big(u_i\Delta_\alpha w_j, \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big)\Big| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega u_i\Delta_\alpha w_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_\Omega\Big|u_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_\Omega|\Delta_\alpha w_j|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_2\|\nabla\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta_\alpha w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3(1+\alpha^2)\|u\|_{V^1}\|w\|_{V^2}\|\nabla\varphi\|_{V^2} = C_3(1+\alpha^2)\|u\|_{V^1}\|w\|_{V^2}\|\varphi\|_{V^3}.$$

Кроме того, здесь мы воспользовались тем фактом, что из непрерывного вложения $V^2 \subset L_\infty(\Omega)$ следует неравенство $\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C_4\|\varphi\|_{V^2}$, $\varphi \in V^2$. Следовательно, $\|K_1(u,w)\|_{V^{-3}} \leqslant C_3(1+\alpha^2)\|u\|_{V^1}\|w\|_{V^2}$. Возведем обе части последнего неравенства в квадрат и проинтегрируем его по t в пределах от 0 до T. Тогда, вновь используя неравенство Гельдера, получим

$$\|K_1(u,w)\|^2_{L_2(0,T;V^{-3})} = \int\limits_0^T\|K_1(u,w)\|^2_{V^{-3}}\,dt \leqslant C_3^2(1+\alpha^2)^2\int\limits_0^T\|u\|^2_{V^1}\|w\|^2_{V^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_3^2(1+\alpha^2)^2\Big(\int\limits_0^T\|u\|^6_{V^1}\,dt\Big)^{\frac{2}{6}}\Big(\int\limits_0^T\|w\|^3_{V^2}\,dt\Big)^{\frac{2}{3}} = C_3^2(1+\alpha^2)^2\|u\|^2_{L_6(0,T;V^1)}\|w\|^2_{L_3(0,T;V^2)}.$$

Таким образом, билинейный оператор K_1 является непрерывным.

По теореме Симона (см. [25, Corollary 8]) вложения

$$W_1 \subset L_p(0,T;V^1), \quad W_1 \subset L_q(0,T;V^2),$$

являются вполне непрерывными для любых $p < \infty$ и $q < 8$. Следовательно, имеем следующую суперпозицию вложений:

$$W_1 \times W_1 \subset L_6(0,T;V^1) \times L_3(0,T;V^2) \xrightarrow{K_1} L_2(0,T;V^{-3}),$$

где вложение является вполне непрерывным и оператор K_1 — непрерывен. Таким образом, билинейный оператор $K_1 : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ является вполне непрерывным. Следовательно, для $u = w$ оператор $K_1 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3})$ также является вполне непрерывным.

Теперь установим вполне непрерывность отображения K_2. Сначала докажем, что оператор $K_2 : L_4(0,T;V^1) \times L_4(0,T;V^0) \to L_2(0,T;V^{-3})$ является непрерывным. Используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$ для $\Phi \in V^3$ получим

$$|\langle K_2(u,\sigma),\Phi\rangle| = \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_i\sigma_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_{\Omega}\Big|u_i\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\Big|^2 dx\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_{\Omega}|\sigma_j|^2\,dx\Big)^{\frac12} \leqslant$$
$$\leqslant C_5\|u\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_4(\Omega)}\|\sigma\|_{V^0} \leqslant C_6\|u\|_{V^1}\|\sigma\|_{V^0}\|\Phi\|_{V^3}.$$

Следовательно, $\|K_2(u,\sigma)\|_{V^{-3}} \leqslant C_6\|u\|_{V^1}\|\sigma\|_{V^0}$. Возведем в квадрат и проинтегрируем по t в пределах от 0 до T обе части последнего неравенства. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\|K_2(u,\sigma)\|^2_{L_2(0,T;V^{-3})} = \int\limits_0^T \|K_2(u,\sigma)\|^2_{V^{-3}}\,dt \leqslant C_6^2\int\limits_0^T \|u\|^2_{V^1}\|\sigma\|^2_{V^0}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C_6^2\Big(\int\limits_0^T \|u\|^4_{V^1}\,dt\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_0^T \|\sigma\|^4_{V^0}\,dt\Big)^{\frac12} = C_6^2\|u\|^2_{L_4(0,T;V^1)}\|\sigma\|^2_{L_4(0,T;V^0)}.$$

Следовательно, оператор $K_2 : L_4(0,T;V^1) \times L_4(0,T;V^0) \to L_2(0,T;V^{-3})$.

По теореме Симона (см. [25, Corollary 8]) вложения

$$W_1 \subset L_p(0,T;V^1), \quad W_2 \subset L_p(0,T;V^0),$$

являются вполне непрерывными для любого $p < \infty$.

Таким образом, имеет место следующая суперпозиция вложений:

$$W_1 \times W_2 \subset L_4(0,T;V^1) \times L_4(0,T;V^0) \xrightarrow{K_2} L_2(0,T;V^{-3}),$$

где вложение является вполне непрерывным и оператор K_2 — непрерывен. Таким образом, отображение $K_2 : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$ является вполне непрерывным. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Операторы $S_1 : W_2 \to L_2(0,T;V^{-3})$, $S_3 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-3})$ являются вполне непрерывными операторами.*

Доказательство проводится аналогичным образом как и [26, Theorem 3.1].

Перейдем к получению основных оценок.

Лемма 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $u \in W_1$ и $\sigma \in W_2$, — слабое решение вспомогательной задачи (10) – (13). Тогда для любых $k \in C^1([0,\infty);V^5)$ и $\theta \in C^1([0,\infty);V^3)$ и почти всех*

$t \in [0,T]$ справедливо следующее неравенство

$$2\mu\|\Delta_\alpha u(t) - \Delta_\alpha k(t)\|^2_{V^0} + \|\sigma(t)-\theta(t)\|^2_{V^0} + 2\varepsilon\int\limits_0^t (2\mu\|\Delta_\alpha u(s) - \Delta_\alpha k(s)\|^2_{V^3} +$$

$$+ \|\sigma(s)-\theta(s)\|^2_{V^3})\,ds \leqslant \exp\biggl(\int\limits_0^t \Gamma(s)\,ds\biggr)\biggl\{2\mu\|\Delta_\alpha u_0 - \Delta_\alpha k(0)\|^2_{V^0} + \|\sigma_0 - \theta(0)\|^2_{V^0} +$$

$$+ \int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^0 \Gamma(\psi)\,d\psi\biggr)\biggl[4\mu(E_1(k,\theta,\xi), \Delta_\alpha(u(s)-k(s))) + 2(E_2(k,\theta,\xi), \sigma(s)-\theta(s)) -$$

$$- 4\mu\varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k(s), \nabla\Delta\Delta_\alpha(u(s)-k(s))) - 2\varepsilon(\nabla\Delta\theta(s), \nabla\Delta(\sigma(s)-\theta(s)))\biggr]\,ds\biggr\}, \qquad (17)$$

где Γ определяется формулой (9).

Доказательство. Рассмотрим равенства (14) и (15) от функций $k \in C^1([0,\infty); V^5)$ и $\theta \in C^1([0,\infty); V^3)$ с дополнительными слагаемыми:

$$\frac{d}{dt}(\Delta_\alpha k, \varphi) - \xi\sum_{i=1}^n \Bigl(k_i\Delta_\alpha k, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Bigr) + \xi(\theta, \nabla\varphi) + \varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\varphi) +$$

$$+ (E_1(k,\theta,\xi), \varphi) = \langle f, \varphi\rangle + \varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\varphi), \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta, \Phi) + \frac{1}{\lambda}(\theta,\Phi) - \xi\sum_{i=1}^n \Bigl(k_i\theta, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Bigr) + 2\mu\xi(\Delta_\alpha k, \operatorname{Div}\Phi) + \varepsilon(\nabla\Delta\theta, \nabla\Delta\Phi) +$$

$$+ (E_2(k,\theta,\xi), \Phi) = \varepsilon(\nabla\Delta\theta, \nabla\Delta\Phi), \qquad (19)$$

для $\varphi \in V^3$, $\Phi \in V^3$, и почти всех $t \in (0,T)$. Через w и ζ обозначим величины $w = u - k$ и $\zeta = \sigma - \theta$, соответственно. Для почти всех $t \in (0,T)$ положим $\varphi = \Delta_\alpha w(t)$ и $\Phi = \zeta(t)/(2\mu)$. Сложим разность между (14) и (18) вместе с разностью между (15) и (19). Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta_\alpha w, \Delta_\alpha w) + \frac{1}{4\mu}\frac{d}{dt}(\zeta,\zeta) - \xi\sum_{i=1}^n\Bigl(w_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Bigr) - \xi\sum_{i=1}^n\Bigl(k_i\Delta_\alpha w, \frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Bigr) -$$

$$- \xi\sum_{i=1}^n\Bigl(w_i\Delta_\alpha k, \frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Bigr) + \frac{1}{2\mu\lambda}(\zeta,\zeta) - \frac{\xi}{2\mu}\sum_{i=1}^n\Bigl(u_i\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\Bigr) -$$

$$- \frac{\xi}{2\mu}\sum_{i=1}^n\Bigl(w_i\theta, \frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\Bigr) + \frac{\varepsilon}{2\mu}(\nabla\Delta\zeta, \nabla\Delta\zeta) + \varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha w, \nabla\Delta\Delta_\alpha w) +$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2\mu}(\nabla\Delta\theta, \nabla\Delta\zeta) - \varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\Delta_\alpha w) - \xi(\zeta, \nabla\Delta_\alpha w) - \xi(\Delta_\alpha w, \operatorname{Div}\zeta) +$$

$$+ (E_1(k,\theta,\xi),\Delta_\alpha w) + \frac{1}{2\mu}(E_2(k,\theta,\xi),\zeta). \tag{20}$$

Приступим к оценке всех имеющихся слагаемых в последнем равенстве. Отметим очевидное равенство $-\xi(\zeta,\nabla\Delta_\alpha w)-\xi(\Delta_\alpha w,\operatorname{Div}\zeta)=0$. Рассмотрим одно из слагаемых в рассматриваемом равенстве. Для $u\in W_1$ имеем

$$-\frac{\xi}{2\mu}\sum_{i=1}^{n}\Big(u_i\zeta,\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\Big) = -\frac{\xi}{2\mu}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega u_i\zeta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}\,dx = -\frac{\xi}{4\mu}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega u_i\frac{\partial\zeta_j^2}{\partial x_i}\,dx =$$
$$= \frac{\xi}{4\mu}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega \zeta_j^2\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,dx = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим, что

$$\xi\sum_{i=1}^{n}\Big(w_i\Delta_\alpha w,\frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Big)=0,\quad \xi\sum_{i=1}^{n}\Big(k_i\Delta_\alpha w,\frac{\partial\Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Big)=0.$$

Перейдем к следующему слагаемому. Для этого мы воспользуемся известным неравенством (см. [24, Corollary 2.1.1]):

$$\|uv\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_7\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)},\quad u\in H^2(\Omega),\quad v\in L_2(\Omega). \tag{21}$$

Интегрируя по частям и используя равенство (4), мы получим

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(w_i\theta,\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\Big) \leqslant \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega w_i\theta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\theta_j\zeta_j\,dx\Big| + \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega w_i\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\zeta_j\,dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\int\limits_\Omega\Big|w_i\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\Big|^2dx\Big)^{\frac12}\Big(\int\limits_\Omega|\zeta_j|^2\,dx\Big)^{\frac12} = \sum_{i,j=1}^{n}\Big\|w_i\frac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\Big\|\|\zeta_j\| \leqslant$$
$$\leqslant C_8\|w\|_{V^0}\|\nabla\theta\|_{H^2(\Omega)}\|\zeta\|_{V^0} \leqslant C_9\|\Delta_\alpha w\|_{V^0}\|\nabla\theta\|_{V^2}\|\zeta\|_{V^0} = C_9\|\Delta_\alpha w\|_{V^0}\|\theta\|_{V^3}\|\zeta\|_{V^0}.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью вложения $V^2\subset H^2(\Omega)$, а также следующими соотношениями:

$$\|\Delta_\alpha w\|_{V^0} = \Big(\int\limits_\Omega(w-\alpha^2\Delta w)(w-\alpha^2\Delta w)\,dx\Big)^{1/2} =$$
$$= \big(\|w\|^2_{V^0}+2\alpha^2\|w\|^2_{V^1}+\alpha^4\|w\|^2_{V^2}\big)^{1/2} \geqslant \|w\|_{V^0}. \tag{22}$$

Далее рассмотрим следующее слагаемое в (20). Используя неравенство Гельдера, оценки (21) и (22), а также учитывая, что $w \in W_1$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(w_i\Delta_\alpha k, \frac{\partial \Delta_\alpha w}{\partial x_i}\Big) \leqslant \Big|\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega w_i(\Delta_\alpha k)_j\frac{\partial(\Delta_\alpha w)_j}{\partial x_i}\,dx\Big| =$$

$$= \Big| -\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(\Delta_\alpha k)_j(\Delta_\alpha w)_j\,dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_\Omega w_i\frac{\partial(\Delta_\alpha k)_j}{\partial x_i}(\Delta_\alpha w)_j\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha w)_j\|_{V^0}\Big\|w_i\frac{\partial(\Delta_\alpha k)_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\sum_{i,j=1}^{n}\|(\Delta_\alpha w)_j\|_{V^0}\|w_i\|_{V^0}\Big\|\frac{\partial(\Delta_\alpha k)_j}{\partial x_i}\Big\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C_{11}\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^0}\|\Delta_\alpha k\|_{V^3}.$$

Вернемся к равенству (20). Учитывая полученные выше неравенства, умножим обе части этого равенства на 4μ и оценим по модулю обе части этого равенства. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(2\mu\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^0} + \|\zeta\|^2_{V^0}) + 2\varepsilon\big(2\mu\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^3} + \|\zeta\|^2_{V^3}\big) \leqslant 4\mu\xi C_{11}\|\Delta_\alpha k\|_{V^3}\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^0} +\\
&+ 2C_9\xi\|\Delta_\alpha w\|_{V^0}\|\theta\|_{V^3}\|\zeta\|_{V^0} + \frac{2}{\lambda}\|\zeta\|^2_{V^0} + 4\mu(E_1(k,\theta,\xi),\Delta_\alpha w) +\\
&+ 2(E_2(k,\theta,\xi),\zeta) - 4\mu\varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\Delta_\alpha w) - 2\varepsilon(\nabla\Delta\theta,\nabla\Delta\zeta) \leqslant\\
&\leqslant \xi C_{12}\Big[2\mu\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^0}(\|\Delta_\alpha k\|_{V^3} + \|\theta\|^2_{V^3}) + \|\zeta\|^2_{V^0}\Big] + 4\mu(E_1(k,\theta,\xi),\Delta_\alpha w) +\\
&+ 2(E_2(k,\theta,\xi),\zeta) - 4\mu\varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\Delta_\alpha w) - 2\varepsilon(\nabla\Delta\theta,\nabla\Delta\zeta) \leqslant\\
&\leqslant \xi\Gamma(2\mu\|\Delta_\alpha w\|^2_{V^0} + \|\zeta\|^2_{V^0}) + 4\mu(E_1(k,\theta,\xi),\Delta_\alpha w) + 2(E_2(k,\theta,\xi),\zeta) -\\
&- 4\mu\varepsilon(\nabla\Delta\Delta_\alpha k, \nabla\Delta\Delta_\alpha w) - 2\varepsilon(\nabla\Delta\theta,\nabla\Delta\zeta), \qquad (23)
\end{aligned}$$

где Γ определено в (9).

Далее нам потребуется следующий результат.

Лемма 5. *[27, Лемма 3.1] Пусть f, χ, L, $M : [0,T] \to \mathbb{R}$ — скалярные функции, причем χ, L, $M \in L_1(0,1)$ и $f \in W_1^1(0,T)$. Если*

$$\chi(t) \geqslant 0, \quad L(t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f'(t) + \chi(t) \leqslant L(t)f(t) + M(t)$$

для почти всех $t \in (0,T)$, то

$$f(t) + \int\limits_0^t \chi(s)\,ds \leqslant \exp\Big(\int\limits_0^t L(s)\,ds\Big)\Big[f(0) + \int\limits_0^t \exp\Big(\int\limits_s^0 L(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)M(s)\,ds\Big]$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

Применяя эту лемму к последнему неравенству в (23), получим требуемую оценку (17). Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть* $u \in W_1$ *и* $\sigma \in W_2$ *— слабое решение вспомогательной задачи (10) – (13). Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|\Delta_\alpha u\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|\sigma\|_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant C_{13}(\|\Delta_\alpha u_0\|_{V^0} + \|\sigma_0\|_{V^0} + \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} + 1), \quad (24)$$

$$\|\Delta_\alpha u\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \frac{C_{14}}{\sqrt{\varepsilon}}(\|\Delta_\alpha u_0\|_{V^0} + \|\sigma_0\|_{V^0} + \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} + 1), \quad (25)$$

$$\|u'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} + \|\sigma'\|_{L_2(0,T;V^{-3})} \leqslant C_{15}(1+\varepsilon)(\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + 1), \quad (26)$$

где постоянные C_{13}*,* C_{14}*,* C_{15} *не зависят от* ε*.*

Доказательство. Для доказательства первых трех оценок рассмотрим неравенство (17) при $k = \theta = 0$. Тогда

$$2\mu\|\Delta_\alpha u(t)\|^2_{V^0} + \|\sigma(t)\|^2_{V^0} + 2\varepsilon\int_0^t (2\mu\|\Delta_\alpha u(s)\|^2_{V^3} + \|\sigma(s)\|^2_{V^3})\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu\int_0^t \langle f(s), \Delta_\alpha u(s)\rangle\,ds. \quad (27)$$

Интеграл в правой части можно оценить следующим образом. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$4\mu\int_0^t \langle f(s), \Delta_\alpha u(s)\rangle\,ds \leqslant 4\mu\Big|\int_0^t \langle f(s), \Delta_\alpha u(s)\rangle\,ds\Big| \leqslant 4\mu\int_0^t \|f(s)\|_{V^0}\|\Delta_\alpha u(s)\|_{V^0}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 4\mu\int_0^T \|f(t)\|_{V^0}\|\Delta_\alpha u(t)\|_{V^0}\,dt \leqslant 4\mu\Big(\int_0^T \|f(t)\|^2_{V^0}\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \|\Delta_\alpha u(t)\|^2_{V^0}\,dt\Big)^{1/2} =$$

$$= 4\mu\|f\|_{L_2(0,T;V^0)}\|\Delta_\alpha u\|_{L_\infty(0,T;V^0)}T^{1/2} \leqslant 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}$$

для $\delta = 2T^{1/2}$.

Следовательно, неравенство (27) перепишется в виде

$$2\mu\|\Delta_\alpha u(t)\|^2_{V^0} + \|\sigma(t)\|^2_{V^0} + 2\varepsilon\int\limits_0^t (2\mu\|\Delta_\alpha u(s)\|^2_{V^3} + \|\sigma(s)\|^2_{V^3})\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}.$$

Из неотрицательности величин $\|\sigma(t)\|^2_{V^0}$, $\|\Delta_\alpha u(s)\|^2_{V^0}$, $\|\Delta_\alpha u(s)\|^2_{V^3}$, $\|\sigma(s)\|^2_{V^3}$ следуют оценки:

$$2\mu\|\Delta_\alpha u(t)\|^2_{V^0} \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)},$$

$$\|\sigma(t)\|^2_{V^0} \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)},$$

$$2\varepsilon\int\limits_0^t (2\mu\|\Delta_\alpha u(s)\|^2_{V^3} + \|\sigma(s)\|^2_{V^3})\,ds \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} +$$

$$+ 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}.$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от t, то перейдем к максимуму по $t \in [0,T]$ в левой части. Тогда

$$\mu\|\Delta_\alpha u(t)\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)},$$

$$\|\sigma(t)\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)} \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} + 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)},$$

$$4\varepsilon\mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_2(0,T;V^3)} + 2\varepsilon\|\sigma\|^2_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant 2\mu\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0} + \|\sigma_0\|^2_{V^0} +$$

$$+ 4\mu T\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \mu\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}.$$

Складывая все указанные неравенства, получим (24) и (25).

Осталось установить оценку (26). Используя равенство (14), имеем

$$|\langle u', \varphi\rangle| \leqslant \left|\xi\sum_{i=1}^n \Big(u_i\Delta_\alpha u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)\right| + |\xi(\sigma, \nabla\varphi)| + \varepsilon|(\nabla\Delta\Delta_\alpha u, \nabla\Delta\varphi)| + |\langle f, \varphi\rangle|.$$

Оценим первое слагаемое в последнем неравенстве. С учетом неравенства Гельдера, оценки (22), а также непрерывных вложений $V^1 \subset L_4(\Omega)$ и $V^2 \subset L_\infty(\Omega)$ для $\varphi \in V^3$ будут справедливы соотношения:

$$\left|\xi\sum_{i=1}^n \Big(u_i\Delta_\alpha u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big)\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \Big(\int\limits_\Omega \left|u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega |\Delta_\alpha u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}\|\nabla u\|_{V^0}\|\nabla\varphi\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Delta_\alpha u\|_{V^0} \leqslant C_{17}\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}\|\nabla\varphi\|_{V^2} \leqslant C_{17}\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}\|\varphi\|_{V^3}.$$

Перейдем к оценке оставшихся слагаемых. Справедливы следующие неравенства:

$$|\xi(\sigma,\nabla\varphi)|+\varepsilon|(\nabla\Delta\Delta_\alpha u,\nabla\Delta\varphi)|+|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\|\sigma\|_{V^0}\|\nabla\varphi\|_{V^0}+\varepsilon\|\Delta_\alpha u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^3}+ \\ +\|f\|_{V^0}\|\varphi\|_{V^0}\leqslant C_{18}(\|\sigma\|_{V^0}+\varepsilon\|\Delta_\alpha u\|_{V^3}+\|f\|_{V^0})\|\varphi\|_{V^3}.$$

Таким образом, учитывая все полученные оценки, получим

$$|\langle u',\varphi\rangle|\leqslant C_{19}(\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}+\|\sigma\|_{V^0}+\varepsilon\|\Delta_\alpha u\|_{V^3}+\|f\|_{V^0})\|\varphi\|_{V^3}.$$

Следовательно, $\|u'\|_{V^{-3}}\leqslant C_{19}(\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}+\|\sigma\|_{V^0}+\varepsilon\|\Delta_\alpha u\|_{V^3}+\|f\|_{V^0})$. Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\|u'\|^2_{L_2(0,T;V^{-3})}=\int_0^T\|u'\|^2_{V^3}\,dt\leqslant C^2_{19}\Big(\int_0^T\|\Delta_\alpha u\|^4_{V^0}\,dt+\int_0^T\|\sigma\|^2_{V^0}\,dt+ \\ +\varepsilon^2\int_0^T\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^3}\,dt+\int_0^T\|f\|^2_{V^0}\,dt\Big)\leqslant C^2_{19}(\|\Delta_\alpha u\|^4_{L_\infty(0,T;V^0)}T+ \\ +\|\sigma\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}T+\varepsilon^2\|u\|^2_{L_2(0,T;V^3)}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}).$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства, а также применяя оценки (24) и (25), имеем

$$\|u'\|_{L_2(0,T;V^{-3})}\leqslant C_{20}(1+\varepsilon)(\|\Delta_\alpha u_0\|^2_{V^0}+\|\sigma_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+1),\tag{28}$$

где постоянная $C_{20}>0$ не зависит от ε.

Рассуждая аналогичным образом для (15), получим

$$|\langle\sigma',\Phi\rangle|\leqslant C_{21}(\|\sigma\|_{V^0}+\|\Delta_\alpha u\|_{V^0}\|\sigma\|_{V^0}+\|\Delta_\alpha u\|_{V^0}+\varepsilon\|\sigma\|_{V^3})\|\Phi\|_{V^3}.$$

Следовательно, $\|\sigma'\|_{V^{-3}}\leqslant C_{21}(\|\sigma\|_{V^0}+\|\Delta_\alpha u\|_{V^0}\|\sigma\|_{V^0}+\|\Delta_\alpha u\|_{V^0}+\varepsilon\|\sigma\|_{V^3})$. Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t в пределах от 0 до T. Тогда

$$\|\sigma'\|^2_{L_2(0,T;V^{-3})}=\int_0^T\|\sigma'\|^2_{V^{-3}}\,dt\leqslant C^2_{21}\Big(\int_0^T\|\sigma\|^2_{V^0}\,dt+\int_0^T\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}\|\sigma\|^2_{V^0}\,dt+ \\ +\int_0^T\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^0}\,dt+\varepsilon^2\int_0^T\|\sigma\|^2_{V^3}\,dt\Big)\leqslant C^2_{21}(\|\sigma\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}T+ \\ +\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}\|\sigma\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}T+\|\Delta_\alpha u\|^2_{L_\infty(0,T;V^0)}T+\varepsilon^2\|\sigma\|^2_{L_2(0,T;V^3)}).$$

Извлечем из обеих частей квадратный корень и применим оценки (24) и (25). Складывая полученную оценку с (28), мы имеем (26). Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть $u \in W_1$ и $\sigma \in W_2$ — слабое решение вспомогательной задачи (10) – (13). Тогда имеют место оценки:*

$$\|u\|_{W_1} + \|\sigma\|_{W_2} \leqslant C_{22}(\varepsilon), \tag{29}$$

$$\alpha^2 \|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} \leqslant C_{23}(\|\Delta_\alpha u_0\|_{V^0} + \|\sigma_0\|_{V^0} + \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} + 1), \tag{30}$$

где постоянная C_{22} зависит от ε и постоянная C_{23} не зависит от ε.

Доказательство. Имеют место следующие соотношения

$$\|\Delta_\alpha u\|^2_{V^3} = \|u\|^2_{V^3} + 2\alpha^2\|u\|^2_{V^4} + \alpha^4\|u\|^2_{V^5} \geqslant \alpha^4\|u\|^2_{V^5}.$$

Таким образом, из полученного соотношения и неравенства (25) имеем

$$\alpha^2\|u\|_{L_2(0,T;V^5)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \frac{C_{14}}{\sqrt{\varepsilon}}(\|\Delta_\alpha u_0\|_{V^0} + \|\sigma_0\|_{V^0} + \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} + 1).$$

Складывая это неравенство с оценкой (26), мы получим (29).

Оценка (30) непосредственно следует из неравенств (22) и (24). Следствие доказано. □

Лемма 7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $u_0 \in V^2$, $\sigma \in V^0$, $f \in L_2(0,T;V^0)$. Тогда существует слабое решение $u \in W_1$ и $\sigma \in W_2$ вспомогательной задачи (10) – (13).*

Доказательство. Для доказательства данной леммы воспользуемся теорией степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. Рассмотрим операторное уравнение (16), которое соответствует начально-краевой задаче (10) – (13):

$$\widetilde{A}(u,\sigma) - \xi Q(u,\sigma) = (f, 0, u_0, \sigma_0), \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1]. \tag{31}$$

Из оценки (29) следует, что все решения уравнения (31) лежат в шаре $B_R \subset W_1 \times W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{22} + 1$. По лемме 1 операторы S_2, A_2 и A_3 являются непрерывными. Тогда согласно [24, Lemma 3.1.3] оператор $\widetilde{A}$ является непрерывно обратимым. Следовательно, ни одно решение семейства уравнений

$$(u,\sigma) - \xi\widetilde{A}^{-1}Q(u,\sigma) = \widetilde{A}^{-1}(f, 0, u_0, \sigma_0), \quad \text{где} \quad \xi \in [0,1], \tag{32}$$

не принадлежит границе того же шара B_R.

Оператор $Q : W_1 \times W_2 \to L_2(0,T;V^{-3}) \times L_2(0,T;V^{-3}) \times V^2 \times V^0$ является вполне непрерывным как сумма вполне непрерывных операторов (см. леммы 2 и 3). Следовательно, оператор $\widetilde{A}^{-1}Q(u,\sigma) : W_1 \times W_2 \to W_1 \times W_2$ является вполне непрерывным, как произведение непрерывного и вполне непрерывного операторов.

Таким образом, вполне непрерывное векторное поле $(u,\sigma)-\xi\widetilde{A}^{-1}Q(u,\sigma)$ невырождено на границе шара B_R, а значит для этого векторного поля определена степень Лере-Шаудера $\deg_{LS}(I-\xi\widetilde{A}^{-1}Q, B_R, \widetilde{A}^{-1}(f,0,u_0,\sigma_0))$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg_{LS}(I-\xi\widetilde{A}^{-1}Q, B_R, \widetilde{A}^{-1}(f,0,u_0,\sigma_0)) = \deg_{LS}(I, B_R, \widetilde{A}^{-1}(f,0,u_0,\sigma_0)) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $u\in W_1$, $\sigma\in W_2$ уравнения (32), а следовательно, и вспомогательной задачи (10) – (13). Теорема доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $T_m\to\infty$ и убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_m\to 0$. По лемме 7 существует пара $u_m\in W_1$, $\sigma_m\in W_2$, которая является решением вспомогательной задачи, где $T=T_m$, $\varepsilon=\varepsilon_m$, $\xi=1$. Обозначим через $\widetilde{u}_m$ и $\widetilde{\sigma}_m$ функции, которые совпадают с u_m и σ_m на отрезке $[0,T_m]$ и равны нулю на (T_m,∞) соответственно.

По лемме 4 для любых $k\in C^1([0,\infty);V^5)$, $\theta\in C^1([0,\infty);V^3)$, и $0\leqslant t\leqslant T\leqslant T_m$, имеет место следующее неравенство

$$\begin{aligned}
&2\mu\|\Delta_\alpha\widetilde{u}_m(t)-\Delta_\alpha k(t)\|^2_{V^0}+\|\widetilde{\sigma}_m(t)-\theta(t)\|^2_{V^0}\leqslant \exp\biggl(\int_0^t\Gamma(s)\,ds\biggr)\cdot\\
&\cdot\biggl\{2\mu\|\Delta_\alpha u_0-\Delta_\alpha k(0)\|^2_{V^0}+\|\sigma_0-\theta(0)\|^2_{V^0}+\int_0^t\exp\biggl(\int_s^0\Gamma(\psi)\,d\psi\biggr)\cdot\\
&\cdot\biggl[4\mu(E_1(k,\theta),\Delta_\alpha(u_m(s)-k(s)))+2(E_2(k,\theta),\sigma_m(s)-\theta(s))-\\
&-4\mu\varepsilon_m(\nabla\Delta\Delta_\alpha k(s),\nabla\Delta\Delta_\alpha(u_m(s)-k(s)))-\\
&-2\varepsilon_m(\nabla\Delta\theta(s),\nabla\Delta(\sigma_m(s)-\theta(s)))\biggr]\,ds\biggr\},
\end{aligned}\tag{33}$$

где Γ определяется формулой (9).

Зафиксируем произвольный интервал $[0,T]$. Согласно априорным оценкам (24), без ограничения общности, мы предположим, что $\Delta_\alpha\widetilde{u}_m\to\Delta_\alpha u$ *-слабо в $L_\infty(0,\infty;V^0)$ и $\widetilde{\sigma}_m\to\sigma$ *-слабо в $L_\infty(0,\infty;V^0)$.

Кроме того, из (26) без ограничения общности, можно предположить, что $\widetilde{u}'_m\to u'$ слабо в $L_2(0,T;V^{-3})$, $\widetilde{\sigma}'_m\to\sigma'$ в $L_2(0,T;V^{-3})$. Следовательно, $u\in C([0,T];V^{-3})$,

$\sigma \in C([0,T]; V^{-3})$. Тогда с учетом оценки (30) по лемме Лионса-Мадженеса (см. [23, Глава III, Лемма 1.4]) получим, что $u \in C_w([0,T]; V^2)$, $\sigma \in C_w([0,T]; V^0)$.

Возьмем скалярное произведение в $L_2(0,T)$ в неравенстве (33) со скалярной функцией ψ с компактным носителем в $(0,T)$. Используя неравенство (25) и неравенство Коши-Буняковского-Шварца, мы получим:

$$\int\limits_0^T \left(2\mu\|\Delta_\alpha u_m(t) - \Delta_\alpha k(t)\|^2_{V^0} + \|\sigma_m(t) - \theta(t)\|^2_{V^0}\right)\psi(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \exp\biggl(\int\limits_0^t \Gamma(s)\,ds\biggr)\biggl\{2\mu\|\Delta_\alpha u_0 - \Delta_\alpha k(0)\|^2_{V^0} + \|\sigma_0 - \theta(0)\|^2_{V^0} +$$

$$+ \int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^0 \Gamma(\psi)\,d\psi\biggr)\biggl[4\mu(E_1(k,\theta), \Delta_\alpha(u_m(s) - k(s))) +$$

$$+ 2(E_2(k,\theta), \nabla\Delta(\sigma_m(s) - \theta(s))) + C_{24}(\sqrt{\varepsilon_m} + \varepsilon_m)\biggr]\,ds\biggr\}\psi(t)\,dt. \qquad (34)$$

Перейдем к пределу в (34) при $m \to \infty$. Принимая во внимание полученные сходимости, а также тот факт, что норма слабого предела последовательности не превосходит нижнего предела нормы последовательности, и учитывая неравенство (22) и произвольность выбора ψ и T, мы приходим к (8). Таким образом, доказано существование диссипативного решения задачи (1) – (6).

Докажем пункт (b). Предположим, что существует сильное решение u_T, σ_T с теми же начальными значениями, что и диссипативное решение u, σ. Положим $k = u_T$ и $\theta = \sigma_T$ в (8) для $t \in [0,T]$. Учитывая, что $E_1(u_T, \sigma_T) = E_2(u_T, \sigma_T) = 0$ на $[0,T]$, то мы получаем, что правая часть (8) равна нулю. Таким образом, и левая часть равна нулю, что и доказывает (b).

Пункт (c) прямо следует из (a) и (b). А именно, любое достаточно гладкое решение, если оно существует, будет совпадать со всеми диссипативными решениями. Теорема доказана.

Список литературы

1. LERAY, J. (1934) Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'space. *Acta Math.* 63. p. 193–248.

2. HOLM, D. D., MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (1998) The Euler-Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion. *Phys. Rev. Lett.* 349. p. 4173–4177.

3. HOLM, D. D., MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (1998) The Euler-Poincare Equations and semidirect products with applications to continuum theories. *Adv. Math.* 137. p. 1–81.

4. CHEN, S.,FOIAS, C., HOLM, D. D., OLSON, E., TITI, E. S., WYNNE, S. (1998) Camassa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* 81. p. 5338–5341.

5. Звягин, А. В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А. В. Звягин, В. Г. Звягин, Д. М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

6. FOIAS, C., HOLM, D. D., TITI, E. S. (2002) The three dimensional viscous Camassa-Holm equations and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory. *J. Dyn. Diff. Equat.* 14. p. 1–35.

7. CHESKIDOV, A., HOLM, D. D., OLSON, E., TITI, E. S. (2005) On Leray-α model of turbulence. *Proc. R. Soc. London. A.* 461. p. 629–649.

8. ILYIN, A. A., LUNASIN, E., TITI, E. S. (2006) A modified Leray-α subgrid scale model of turbulence. *Nonlinearity.* 19. p. 879–897.

9. Звягин, А. В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 10. — С. 70–75.

   ZVYAGIN, A. V. (2016) Solvability of Thermoviscoelastic Problem for Leray Alpha-Model. *Russian Mathematics.* 60 (10). p. 59–63.

10. CAO, C., HOLM, D. D., TITI, E. S. (2005) On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics. *J. Turbul.* 6. p. 1–11.

11. CAO, Y., LUNASIN, E. M., TITI, E. S. (2006) Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models. *Comm. Math. Sciences.* 4 (4). p. 823–884.

12. Чепыжов, В. В. Об аппроксимации траекторного аттрактора 3D системы Навье-Стокса различными α-моделями гидродинамики // Матем. сб. — 2016. — Т. 207(4). — С. 143–172.

    CHEPYZHOV, V. V. (2016) Approximating the trajectory attractor of the 3D Navier-Stokes system using various α-models of fluid dynamics. *Sb. Math.* 207 (4). p. 610–638.

13. HOLM, D. D., JEFFERY, C., KURIEN, S., LIVESCU, D., TAYLOR, M. A. and WINGATE, B. A. (2005) The LANS-α model for computing turbulence origins, results, and open problems. *Los Alamos Science.* 29. p. 152–172.

14. HECHT, M. W., HOLM, D. D., PETERSEN, M. R., WINGATE, B. A. (2008) Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model. *J. Comput. Phys.* 227 (11). p. 5691–5716.

15. Звягин, А. В., Поляков, Д. М. О разрешимости альфа-модели Джеффриса-Олдройда // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52(6). — С. 289–294.

    ZVYAGIN, A. V., POLYAKOV, D. M. (2016) On the solvability of the Jeffreys-Oldroyd-α model. *Differ. Equations.* 52 (6). p. 761–766.

16. POLYAKOV, D., ZVYAGIN, A. (2015) On dissipative solutions of the Jeffreys-Oldroyt-alpha equation. *AIP Conference Proceedings. Advancements in Mathematical Sciences.* 1676. p. 020089-1–020089-7.

17. Звягин, А. В., Звягин, В. Г., Поляков, Д. М. О разрешимости одной альфа-модели движения жидкости с памятью // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 6. — С. 78–84.

    ZVYAGIN, A. V., ZVYAGIN, V. G., POLYAKOV, D. M. (2018) On solvability of a fluid flow alpha-model with memory. *Russian Mathematics.* 62 (6). p. 69–74.

18. LIONS, P.-L. (1996) *Mathematical topics in fluid mechanics.* V. 1. New York: NY: Oxford University Press.

19. Бардос, К., Тити, Э. С. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // УМН. — 2007. — Т. 62(3-375). — С. 5–46.

    BARDOS, C., TITI, E. S. (2007) Euler equations for incompressible ideal fluids. *Russian Math. Surveys.* 62 (3). p. 409–451.

20. Звягин, В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // СМФН. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

    ZVYAGIN, V. G. (2014) Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 201. p. 830–858.

21. Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. — Новосибирск.: Научная книга, 1999. — 364 с.

    FURSIKOV, A. V. (1999) *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications.* Providence, Rhode Island: Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society.

22. Звягин, В. Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — М.: КРАСАНД УРСС, 2012. — 412 с.

ZVYAGIN, V. G. and TURBIN, M. V. (2012) *Mathematical problems of hydrodynamics of viscoelastic media.* Moscow: KRASAND URSS.

23. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

TEMAM, R. (1977) *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis.* Amsterdam: North-Holland.

24. ZVYAGIN, V. G., VOROTNIKOV, D. A. (2008) *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics (de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications vol. 12).* Berlin: NY: Walter de Gruyter & Co.

25. SIMON, J. (1987) Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.* 146 (4). p. 65–96.

26. ZVYAGIN, V. G., VOROTNIKOV, D. A. (2008) Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics. *J. Fixed Point Theory Appl.* 3. p. 23–49.

27. VOROTNIKOV, D. A. (2008) Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers. *J. Math. Anal. Appl.* 339. p. 876–888.

УДК: 517.927.25

MSC2010: Primary 34L10, Secondary 34B07, 47E05

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Механико-математический факультет

г. Саратов, Российская Федерация

e-mail: *RykhlovVS@yandex.ru*

On Multiple Completeness of the Root Functions of the Nonregular Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients and Splitting boundary Conditions.

Rykhlov V. S.

Abstract. In the space of square summable functions on the main segment [0,1], the class of polynomial pencils of ordinary differential operators of the n-th order is considered. The coefficients of the differential expression are assumed to be constants. The boundary conditions are assumed to be splitting and two-point at the ends 0 and 1 (l of boundary conditions are taken only at the point 0, and the remaining $n-l$ at point 1). The differential expression and the boundary forms are assumed to be homogeneous, that is, they contain only main parts. It is supposed that roots of the characteristic equation of the pencils of this class are simple, non-zero and lie on two rays emanating from the origin in quantities k and $n-k$. Sufficient conditions for m-fold completeness (with a possible finite defect) of the system of root functions of the pencils of this class in the space of square integrable functions on the main segment are formulated and proved. In the case of $l \leq \min\{k, n-k\}$ sufficient conditions of $2l$-fold completeness are proved, and in a case $l \geq \max\{k, n-k\}$ sufficient conditions of $2(n-l)$-fold completeness are proved. These sufficient conditions consist in difference from zero some quite concrete determinants, constructed on coefficients of boundary conditions and the roots of the characteristic polynomial. Upper bounds are given for possible finite defects. The proof is carried out according to a somewhat modernized "classical" scheme of the proof of completeness (going back to the works of M. B. Keldysh, A. P. Khromov, A. A. Shkalikov and others). In the remaining case, when $\min\{k, n-k\} < l < \max\{k, n-k\}$, the $(n-k)$-fold completeness of the root function system is established. In this case, the "method of generating functions" (proposed earlier by the author) is used. This method consists in use instead of "classical" generating functions for the system of root functions introduced by the author of the new "generalized generating

functions” depending on arbitrary vector of parameters, and in selection of these vectors of parameters so that classic proof scheme still works.

Keywords: *pencil of ordinary differential operators, polynomial pencil of differential operators, homogeneous differential expression, homogeneous boundary forms, multiple completeness, root functions, eigen- and associated functions, derived chains, splitting boundary conditions*

Введение

В $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным (присутствуют только главные члены) дифференциальным выражением (д.в.) n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)},\ p_{js}\in\mathbb{C},\ p_{n0}\neq 0,\ p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s\beta_{ijs}y^{(j)}(1) = 0, \quad i=\overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda,\alpha_{ijs},\beta_{ijs}\in\mathbb{C}$, $\varkappa_i,\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $1\le l\le n-1$.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к. ф.), m-кратной $(1\le m\le n)$ полноты к. ф. из [1–3].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота к. ф. этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [4], в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [5] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [6] в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в [7, 8]. Детальное исследование вопроса об m-кратной $(1\le m\le n)$ полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в [9]. Полураспадающиеся краевые условия — это такие краевые условия, когда

l $(2l \geq n)$ краевых условий берутся только в одном конце основного отрезка $[0,1]$ (например, в 0), а остальные $n-l$ краевых условий берутся и в 0 и в 1.

Более подробно история вопроса изложена в [10, 11].

В частности, в [11] рассмотрен случай, когда корни характеристического уравнения пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [11] получены достаточные условия кратной полноты в пространстве $L_2[0,1]$ системы к. ф. для более общего класса пучков вида (1)–(3), когда краевые условия полураспадающихся «в широком смысле» (то есть, когда возможно выполнения не только неравенства $2l \geq n$, но и неравенства $2l < n$ в случае $1 \leq l \leq n-1$). Но, несмотря на то, что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся «в широком смысле» краевых условий из [11], тем не менее, теорема 1 о полноте из [11] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий (2)–(3), так как не все параметры в формулировке теоремы 1 из [11] определены для распадающихся краевых условий (2)–(3).

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [11], удалось получить достаточные условия кратной полноты и для распадающихся краевых условий, но, к сожалению, не во всех случаях. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$ $(0 \leq k \leq n)$. Не нарушая общности можно считать, что корни ω_j расположены следующим образом:

$$\omega_n e^{i(\pi-\varphi)} < \omega_{n-1} e^{i(\pi-\varphi)} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i(\pi-\varphi)} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k, \tag{4}$$

где $0 < |\varphi| < \pi$ (см. рис. 1). То есть первые k корней ω_j лежат на положительном луче, а остальные $n-k$ корней — на луче, исходящем из начала под углом φ. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$), ради единообразия дальнейших выкладок, считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$, то есть формально тоже два луча, но один луч не содержит корней.

Обозначим $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$, $[p]_+ = [p,0]_+$ и положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^{\nu}, \ i = \overline{1,l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^{\nu}, \ i = \overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем следующие условия отличия от нуля главного члена асимптотики характеристического определителя пучка $L(\lambda)$ (то, что это так, будет видно из доказательства):

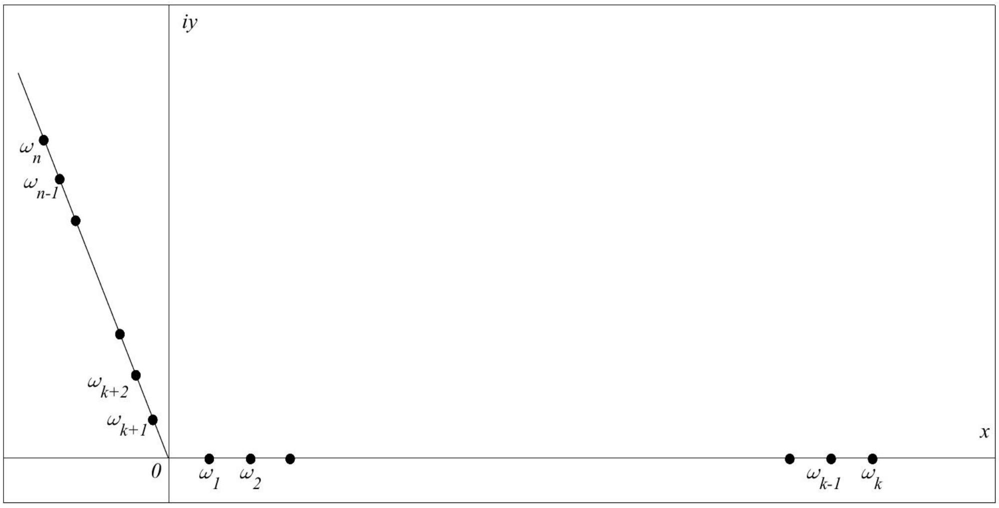

Рис. 1. Расположение характеристик

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \ \text{при} \ n-k \leq l; \tag{5}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \ \text{при} \ n-k \geq l; \tag{6}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0 \ \text{при} \ k \leq l; \tag{7}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \ \text{при} \ k \geq l. \tag{8}$$

Отметим, что в крайнем случае $n-k = l$ условия (5) и (6) совпадают. Аналогично, в крайнем случае $k = l$ совпадают условия (7) и (8).

Теорема 1. *Если* $[k, n-k]_+ \leq l$ *и выполняются условия* (5) *и* (7), *то при* $m = 2(n-l)$ *система к. ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема 2. *Если* $[k, n-k]_- \geq l$ *и выполняются условия* (6) *и* (8), *то при* $m = 2l$ *система к. ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Два крайних подслучая из теорем 1 и 2 объединим в отдельной теореме. Это соответствует случаю регулярного пучка.

Теорема 3. *Если* $[k, n-k]_- = [k, n-k]_+ = l$ *или, что эквивалентно,* $n = 2k = 2l$ *и выполняются условия* (5) *(или* (6)*) и* (7) *(или* (8)*), то система к. ф. пучка* (1)–(3) n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $[d_1, d_2]_-$*, в случае, если по-крайней мере для одного* $i = \overline{1,n}$ *выполняется неравенство* $\varkappa_i > n-1$*, и с нулевым дефектом в противном случае.*

В доказательстве теорем 1 и 2 отмечено, что в случае

$$[k, n-k]_- < l < [k, n-k]_+, \tag{9}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 1–3, используемый метод рассуждений не проходит из-за пока непреодолимых трудностей. Условие (9) — случай пучка $L(\lambda)$ с устойчивой сильной нерегулярностью, то есть такой сильной нерегулярностью (см. определение в [3]), которая имеет место при любых значениях коэффициентов краевых условий α_{ijs} и β_{ijs}.

Использование другого подхода, предложенного в [3], позволило получить достаточные условия кратной полноты к. ф. и в случае (9).

Пусть множество Ω состоит из 0, точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, всевозможных сумм этих точек, содержащих по два различных слагаемых (суммы $\omega_i + \omega_j$, $i \neq j$), по три различных слагаемых (суммы $\omega_i + \omega_j + \omega_k$, $i \neq j \neq k$)), и так далее, n различных слагаемых (сумму $\omega_1 + \omega_2 \cdots + \omega_n$). Обозначим $M = \operatorname{conv} \Omega$. На рис. 2 и 3 многоугольник M — это четырехугольник $A'B'C'D'$, граница которого обозначена тонкой сплошной линией. Здесь $A' = 0$ и $B' = \omega_1 + \cdots + \omega_k$ — крайние левая и правая точки, лежащие на вещественной оси, $C' = \omega_1 + \cdots + \omega_n$ и $D' = \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n$, причем, очевидно, прямая $C'D'$ параллельна вещественной прямой. Здесь и далее используются без подробного пояснения обозначения из [3]. Через M_Δ обозначим характеристический многоугольник пучка $L(\lambda)$. Этот многоугольник выглядит примерно так, как показано на рис. 2 и 3 — многоугольник $ABCD$, граница которого обозначена толстой сплошной линией. Выглядит примерно так потому, что некоторые вершины могут отсутствовать, ввиду специфики краевых условий и величин ω_j.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (9) *и характеристический многоугольник* M_Δ *пучка* (1)–(3) *касается сторон* $A'B'$ *и* $C'D'$ *многоугольника* M*. Тогда если* $m = [k, n-k]_-$*, то система его к. ф.* m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом.*

Сформулированные результаты частично анонсированы в статьях [12] и [13].

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству сформулированных теорем.

1. Случаи $k \le l$ и $n - k \ge l$

Схема доказательства соответствует схеме доказательства теоремы 1 в [11]. Центральную роль в доказательстве играет основная лемма об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем подразделе.

1.1. Предварительные утверждения и лемма об оценке.

В силу однородности д.в. (1), уравнение $\ell_(y, \lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ вида

$$y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Наряду с ф.с.р. (10) будет использоваться ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0,\lambda) = \delta_{js},\ j,s = \overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Будем далее обозначать объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Собственные значения λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, пучка (1)–(3) являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det\big(U_i(\tilde{y}_j(x,\lambda),\lambda)\big)_{i,j=1}^n$.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x,\lambda),\ldots,\tilde{y}_n(x,\lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что при фиксированном $m \in \{1,2,\ldots,n\}$ (этот параметр определяет кратность полноты к. ф. и будет выбран позже) столбцы

$$\left.\left(\frac{\partial^r \tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^r}, \ldots, \frac{\partial^r\big(\lambda^{m-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\big)}{\partial\lambda^r}\right)^T\right|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{11}$$

где $i = \overline{1,n}$, $r = \overline{0,s_\nu}$, являются производными по Келдышу m-цепочками для к. ф., соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s_\nu + 1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

где $h_j(x) \in L_2[0,1]$, $j = \overline{1,m}$, и обозначим $h(x) = \big(h_1(x),\ldots,h_m(x)\big)^T$.

Перепишем (12) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{13}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda), \dots, \tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx = \lambda^{m-1}\int\limits_0^1 h_m(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_m(x,\lambda) = \sum_{\nu=1}^m h_\nu(x)\lambda^{\nu-m}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Функции $\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$, ..., $\tilde{\Phi}_l(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющими последним $n-l$ краевым условиям (3), а функции $\tilde{\Phi}_{l+1}(x,\lambda)$, ..., $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями того же уравнения, удовлетворяющими первым l краевым условиям (2).*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения в [9, с. 48–49]. Там же сформулировано и доказано другое утверждение.

Утверждение 2. *Функции $\tilde{\Theta}_1(\lambda)$, ..., $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.*

Из утверждения 2 и формулы (13) получим

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \Theta_i(\lambda) \equiv \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+ = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \arg\lambda \in \Big[(-1)^\nu\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \varepsilon, (-1)^\nu\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \varepsilon\Big]\Big\},$$
$$\Pi_\varepsilon^- = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; \arg\lambda \in \Big[(-1)^\nu\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \varepsilon, (-1)^\nu\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \varepsilon\Big]\Big\};$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, $\nu = 0$ в случае $0 < \varphi < \pi$ и $\nu = 1$ в случае $-\pi < \varphi < 0$.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве сформулированных теорем.

Лемма 1 (основная лемма об оценке). *Предположим, что для пучка $L(\lambda)$ выполняются неравенства (4). Тогда при $|\lambda| \gg 1$ имеют место оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \tag{15}$$

где $C(\varepsilon)$ — константа, зависящая только от ε, при следующих предположениях:

1) *в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$*
   а) *при $n-k < l$, $i = \overline{l+1,n}$ и выполнении условия (5);*
   б) *при $n-k = l$, $i = \overline{1,n}$ и выполнении условия (5) или (6) (условия (5) и (6) в этом случае совпадают);*

в) *при $n-k>l$, $i=\overline{1,l}$ и выполнении условия* (6)*;*

2) *в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$*

а) *при $k<l$, $i=\overline{l+1,n}$ и выполнении условия* (7)*;*

б) *при $k=l$, $i=\overline{1,n}$ и выполнении условия* (7) *или* (8) *(условия* (7) *и* (8) *в этом случае совпадают);*

в) *при $k>l$, $i=\overline{1,l}$ и выполнении условия* (8)*.*

Доказательство. Справедливы следующие формулы:

(i) при $\sigma=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}=\lambda^{\varkappa_\sigma}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}a_{\sigma j}; \tag{16}$$

(ii) при $\sigma=\overline{l+1,n}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}b_{\sigma j}. \tag{17}$$

Для большей ясности разобъем доказательство основной леммы на ряд лемм.

1) Рассмотрим сначала случай $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$.

Так как справедливы соотношения (14), то чтобы оценить сверху $|\Theta_i(\lambda)|$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Лемма 2. *Если $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda|\gg 1$, то при $n-k\le l$ и выполнении условий* (5) *имеет место следующая оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)|\ge C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|, \tag{18}$$

а при $n-k\ge l$ и выполнении условий (6) *— оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)|\ge C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|, \tag{19}$$

где $C(\varepsilon)>0$ есть константа, зависящая только от ε и от параметров пучка $L(\lambda)$.

Доказательство. Подставляя (16)–(17) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители $\lambda^{\varkappa_i}$ из каждой строки, получим представление

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\sum_{i=1}^n\varkappa_i}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln}\\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn}\end{vmatrix}. \tag{20}$$

Рассмотрим два подслучая.

а) Пусть $n-k\le l$ или $n-l\le k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно, выполнения условий (5). Получим при $|\lambda|\gg 1$

$$\Delta(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=k-n+l+1}^{k}\omega_\nu}\det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}}\det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}}[1]_\varepsilon. \tag{21}$$

Таким образом, в случае выполнения условий (5) и $|\lambda|\gg 1$ получим оценку (18).

б) Пусть $n-k\ge l$ или $n-l\ge k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно, выполнения условий (6). Получим при $|\lambda|\gg 1$ аналогично (21)

$$\Delta(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}}\det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}}[1]_\varepsilon.$$

Таким образом, в случае выполнения условий (6) и $|\lambda|\gg 1$ получим оценку (19).

□

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. В соответствии с определением $\Delta_i(\lambda)$ после вынесения множителя λ^{m-1} из i-й строки и разложения оставшегося определителя по элементам этой строки получим формулу

$$\Delta_i(\lambda)=\lambda^{m-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi, \tag{22}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$. Учитывая формулу (20), получим представление

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln}\\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn}\end{matrix}\right|_{ij}, \tag{23}$$

где индекс "ij" у определителя здесь и далее означает, что в этом определителе отсутствует i-я строка и j-й столбец.

Лемма 3. *Если $|\lambda|\gg 1$, то в случае 1) из леммы 1, то есть когда $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$, имеют место следующие утверждения:*

а) *при $n-k<l$, $i=\overline{l+1,n}$ справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)|\le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|; \tag{24}$$

б) *при $n-k=l$, $i=\overline{1,n}$ справедлива та же оценка* (24)*;*

в) *при $n-k>l$, $i=\overline{1,l}$ справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|. \tag{25}$$

Отметим, что при $n-k=l$ оценки (24) *и* (25) *совпадают.*

Замечание 1. Отметим, что в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ при $n-k<l$, $i=\overline{1,l}$ вместо оценки (24) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ при $n-k>l$, $i=\overline{l+1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: $n-k<l$, $n-k=l$ и $n-k>l$.

а) Пусть $n-k<l$ или $n-l<k$. Предположим $i=\overline{l+1,n}$. Возможны два подслучая $1\le j\le k$ и $k+1\le j\le n$.

Пусть $1\le j\le k$. В этом подслучае разложим определитель в (23) по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1\le k-1$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $n-l-1$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k в случае $1\le j\le k+l+1-n$, и с номерами от $k+l+1-n$ до $j-1$ и от $j+1$ до k в случае $k+l+2-n\le j\le k$.

Следовательно, аналогично выводу формулы (21), получим формулы

(i) в подслучае $1\le j\le k+l+1-n$ при $|\lambda|\gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\times$$
$$\times\left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,k+l+1-n};\overline{k+1,n}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}}+O_\varepsilon(1/|\lambda|)\right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda|\gg 1$ получим следующую оценку сверху

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{26}$$

(ii) в подслучае $k+l+2-n\le j\le k$ при $|\lambda|\gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\times$$
$$\times\left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+1-n,j-1};\overline{j+1,k}}+O_\varepsilon(1/|\lambda|)\right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda|\gg 1$ получим следующую оценку сверху

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\right|. \tag{27}$$

Пусть теперь $k+1 \le j \le n$. В этом подслучае разложим определитель в (23) также по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1<k$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $n-l-1$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k.

Следовательно, аналогично случаю (i), получим следующие формулы:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm\lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\times$$
$$\times\left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l+1-n};\overline{k+1,j-1};\overline{j+1,n}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}}+O_\varepsilon(1/|\lambda|)\right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda|\gg 1$ получим следующую оценку сверху

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+2-n}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{28}$$

Подставим найденные оценки (26)–(28) в (22). Получим при $|\lambda|\gg 1$ и $i=\overline{l+1,n}$

$$\Delta_i(\lambda) = O_\varepsilon\Bigg(|\lambda|^{m-1+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|\times$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{k+l+1-n}\left|e^{\lambda(\omega_j-\omega_{k+l+1-n})}\right|\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right|+\sum_{j=k+l+2-n}^{k}\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right|+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=k+1}^{n}\left|e^{-\lambda\omega_{k+l+1-n}}\right|\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi\right|\right)\Bigg).$$

Оценивая теперь интегралы сверху аналогично тому, как это сделано в [10, с. 351–352], получим указанную в формулировке леммы 3 оценку сверху (24).

б) В случае $n-k=l$ предыдущие рассуждения полностью проходят с оценкой сверху (24) не только при $i=\overline{l+1,n}$, но и при $i=\overline{1,l}$.

в) Рассмотрим теперь оставшийся случай $n-k>l$. Здесь проходят практически дословно рассуждения, аналогичные случаю $n-k<l$, но при $i=\overline{1,l}$, если применять их к определителям $\Delta_{ij}(\lambda)$ (см. формулу (22)), представленным в виде:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\beta=1}^{n}\omega_\beta}\begin{vmatrix} e^{-\lambda\omega_1}a_{11} & \dots & e^{-\lambda\omega_k}a_{1k} & e^{-\lambda\omega_{k+1}}a_{1,k+1} & \dots & e^{-\lambda\omega_n}a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-\lambda\omega_1}a_{l1} & \dots & e^{-\lambda\omega_k}a_{lk} & e^{-\lambda\omega_{k+1}}a_{l,k+1} & \dots & e^{-\lambda\omega_n}a_{ln} \\ b_{l+1,1} & \dots & b_{l+1,k} & b_{l+1,k+1} & \dots & b_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & b_{n,k+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}_{ij}.$$

Применяя к определителю в этой формуле такие же рассуждения, что и в случае $n-k>l$, но предполагая $i=\overline{1,l}$, получим в итоге оценку сверху (25).

□

2) Рассмотрим теперь случай $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$.

Лемма 4. *Если $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda|\gg 1$, то при $k\le l$ и выполнении условий (7) имеет место следующая оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda)|\ge C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l+1}^n\omega_\nu}\right|, \tag{29}$$

а при $k\ge l$ и выполнении условий (8) — оценка снизу

$$|\Delta(\lambda)|\ge C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^{n-l}\omega_\nu+\sum_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|. \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим два подслучая:

Пусть $k\le l$ или $n-l\le n-k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно, выполнения условий (7). Получим при $|\lambda|\gg1$

$$\Delta(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}e^{\lambda\sum_{\nu=l+1}^n\omega_\nu}\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}}[1]_\varepsilon. \tag{31}$$

Таким образом, при выполнения условий (7) и $|\lambda|\gg1$ получим оценку снизу (29).

Пусть $k\ge l$ или $n-l\ge n-k$. Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно, выполнения условий (8). Получим при $|\lambda|\gg1$ по аналогии с (31)

$$\Delta(\lambda)=\pm\lambda^{\sum_{i=1}^n \varkappa_i}e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^{n}\omega_\nu+\sum_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}}[1]_\varepsilon.$$

Таким образом, при выполнения условий (8) и $|\lambda|\gg1$ получим оценку снизу (30).

□

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Если $|\lambda|\gg1$, то*

а) *при $k<l$, $i=\overline{l+1,n}$ справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)|\le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac32+\sum_{\sigma=1}^n\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l+1}^n\omega_\nu}\right|; \tag{32}$$

б) *при $k=l$, $i=\overline{1,n}$ справедлива та же оценка (32);*

в) *при $k>l$, $i=\overline{1,l}$ справедлива оценка сверху*

$$|\Delta_i(\lambda)|\le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac32+\sum_{\sigma=1}^n\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum_{\nu=k+1}^n\omega_\nu+\sum_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|. \tag{33}$$

Отметим, что при $k = l$ оценки (32) и (33) совпадают.

Замечание 2. Отметим, что в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k < l$, $i = \overline{1, l}$ вместо оценки (32) имеет место не улучшаемая оценка сверху

$$|\Delta_i(\lambda)| \le C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum_{\nu=l}^{n}\omega_\nu}\right|;$$

которая не позволяет получить в дальнейшем требуемый для доказательства основных теорем не более чем степенной рост функции $|\Theta_i(\lambda)|$. Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k > l$, $i = \overline{l+1, n}$.

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующей леммы 3. Поэтому не приводим подробности. □

На основании формул (14) и лемм 2–5 получаем утверждения доказываемой основной леммы. Таким образом, лемма 1 полностью доказана. □

1.2. **Доказательство теоремы 1.** Пусть выполняются предположения теоремы 1, то есть $[k, n-k]_+ \le l$, справедливы условия (5) и (7) и $m = 2(n-l)$.

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (11). Тогда, в силу (12)–(14), все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{l+1, n}$, устранимы и они являются, тем самым, целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена-Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \ge 0$, функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\left(\bar{h}, \zeta_{i0}\right) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\left(\bar{h}, \zeta_{i1}\right) + \dots + \left(\bar{h}, \zeta_{i,m-2-\varkappa_i}\right),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0,1]$ есть вполне определенные вектор-функции (в.-ф.), а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

Проводя, далее, рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям [11, с. 295–297], получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{k}\int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}h_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-l} \tag{34}$$

для множества решений $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$, $i = \overline{1, n-l}$, системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, l}, \tag{35}$$

для которых выполняется условие

$$G_1 = \begin{vmatrix} \gamma^1_{k-n+l+1} & \dots & \gamma^1_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{n-l}_{k-n+l+1} & \dots & \gamma^{n-l}_k \end{vmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

При получении последнего условия существенно использовалось первое неравенство в предположении (5).

Далее проводим рассуждения, которые немного отличаются от рассуждений [11, с. 297–298]. Переписываем систему (35) в виде

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\gamma_j = -\sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}\gamma_j, \quad i = \overline{1,l}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_n$ произвольно, то в силу первого неравенства в предположении (7) неизвестные $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ могут быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\gamma^i_1, \gamma^i_2, \dots, \gamma^i_n)$, $i = \overline{n-l+1, m}$ $(m = 2(n-l))$, системы (35), для которых выполняется условие

$$G_2 = \begin{vmatrix} \gamma^{n-l+1}_{l+1} & \dots & \gamma^{n-l+1}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{m}_{l+1} & \dots & \gamma^{m}_n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{37}$$

Для этого множества решений системы (35) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 \gamma^i_j e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1} h_\beta(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{n-l+1, m}. \tag{38}$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (34), (36)–(38), приходим к выводу, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1,m}$, для п.в. $x \in [0,1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 1 система к. ф. рассматриваемого пучка m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_1. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Замечание 3. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$, в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при $i = \overline{1,n}$ дефект системы к. ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линеаризован в пространстве $L^n_2[0,1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49].

1.3. **Доказательство теоремы 2.** Предположим, что выполняются предположения теоремы 2, то есть $[k, n-k]_- \geq l$, справедливы условия (6) и (8) и $m = 2l$.

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (11). Тогда, в силу (12)–(14), все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, l}$, устранимы и они являются, тем самым, целыми функциями. На основании оценок (15) и принципа Фрагмена-Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geq 0$, функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{i0}\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\bar{h}, \zeta_{i1}\big) + \cdots + \big(\bar{h}, \zeta_{i,m-2-\varkappa_i}\big)$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^m[0,1]$ есть вполне определенные в.-ф., а в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

Отсюда аналогично [11, с. 295], требуя дополнительную ортогональность к. ф. некоторому вполне конкретному набору в.-ф., состоящему из d_2 в.-ф., получим справедливость тождеств

$$\tilde{\Delta}_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} \tilde{\Phi}_i(x, \lambda) h_j(x)\, dx \equiv 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{39}$$

В соответствии с предложением 1 система функций $\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_l$ есть система линейно независимых решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющих последним $n-l$ краевым условиям (3) в точке 1. Тогда (39) влечет тождества

$$\int_0^1 y(x, \lambda) \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} h_j(x)\, dx \equiv 0 \tag{40}$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющего последним $n-l$ краевым условиям (3) в точке 1.

Ищем эти решения в виде (как раз в этом и состоит одно из главных отличий доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы 1)

$$y(x, \lambda) = \hat{\gamma}_1 e^{\lambda\omega_1(x-1)} + \hat{\gamma}_2 e^{\lambda\omega_2(x-1)} + \cdots + \hat{\gamma}_n e^{\lambda\omega_n(x-1)}. \tag{41}$$

Удовлетворяя краевые условия (3) в точке 1, получим следующую однородную систему $n - l$ линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $\hat{\gamma}_j$:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \hat{\gamma}_j = 0, \quad i = \overline{l+1, n}. \tag{42}$$

Проводим, далее, рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям при доказательстве теоремы 1, но только вместо системы (35) рассматриваем систему (42), а вместо первых неравенств в условиях (5) и (7) используем вторые неравенства в условиях (6) и (8).

Тогда из (40)–(42) получим, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n}\int\limits_0^1 \hat{\gamma}_j^i e^{\lambda\omega_j(x-1)}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}h_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{43}$$

для множества решений $(\hat{\gamma}_1^i, \hat{\gamma}_2^i, \ldots, \hat{\gamma}_n^i)$, $i=\overline{1,l}$, системы (42), для которых выполняется условие

$$\hat{G}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{n-l+1}^1 & \ldots & \hat{\gamma}_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{\gamma}_{n-l+1}^l & \ldots & \hat{\gamma}_n^l \end{vmatrix} \neq 0. \tag{44}$$

При получении последнего условия существенно использовалось второе неравенство в предположении (6).

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1, переписываем систему (42) в виде

$$\sum_{j=1}^{k-l} b_{ij}\hat{\gamma}_j + \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij}\hat{\gamma}_j = -\sum_{j=k-l+1}^{k} b_{ij}\hat{\gamma}_j, \quad i=\overline{l+1,n}.$$

Если в правой части этой системы возьмем неизвестные $\hat{\gamma}_{k-l+1}, \ldots, \hat{\gamma}_k$ произвольно, то в силу второго неравенства в предположении (8) оставшиеся неизвестные $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_{k-l}, \hat{\gamma}_{k+1}, \ldots, \hat{\gamma}_n$ могут быть однозначно определены. Следовательно, существует такое множество решений $(\hat{\gamma}_1^i, \hat{\gamma}_2^i, \ldots, \hat{\gamma}_n^i)$, $i=\overline{l+1,m}$ $(m=2l)$, системы (42), для которых выполняется условие

$$\hat{G}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_{k-l+1}^{l+1} & \ldots & \hat{\gamma}_k^{l+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{\gamma}_{k-l+1}^m & \ldots & \hat{\gamma}_k^m \end{vmatrix} \neq 0. \tag{45}$$

Для этого множества решений системы (42) аналогично [11, с. 297–298] можно установить, что справедливы тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n}\int\limits_0^1 \hat{\gamma}_j^i e^{\lambda\omega_j(x-1)}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}h_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{l+1,m}. \tag{46}$$

Завершая рассуждения совершенно аналогично [11, с. 298–299] и используя соотношения (43)–(46), приходим к выводу, что $h_j(x)=0$, $j=\overline{1,m}$, для п.в. $x\in[0,1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 2 система к. ф. рассматриваемого пучка m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_2. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Замечание 4. Отметим, что при $m = n$ или, что эквивалентно, при $n = 2k = 2l$ в случае, когда $\varkappa_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при $i = \overline{1,n}$, дефект системы к. ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок может быть линеаризован в пространстве $L_2^n[0,1]$ и справедливо предложение [9, лемма 2.1, с. 49].

1.4. **Доказательство теоремы 3.** Доказательство теоремы 3 вытекает из теорем 1 и 2 при $n = 2k = 2l$ и замечаний 3 и 4.

2. Случай $n - k < l < k$

2.1. **Доказательство теоремы 4.** Для простоты будем считать, что $[k, n-k]_+ = k$. Далее будем характеристический многоугольник вектор-столбца $\Gamma(\lambda)$ обозначать как $M(\Gamma)$ (см. подробности в [3]). В качестве $\Gamma(\lambda)$ будем брать вектор-столбцы $V_j(\lambda)$, $W_k(\lambda)$, $j,k = \overline{1,n}$, которые определяются соотношениями

$$V_j(\lambda) + e^{\lambda\omega_j} W_j(\lambda) := (U_1(y_j,\lambda), U_2(y_j,\lambda), \dots, U_n(y_j,\lambda))^T, \quad j = \overline{1,n}.$$

Так как краевые условия (2)–(3) полураспадающиеся, то вектор-столбцы $V_j(\lambda)$ и $W_k(\lambda)$ имеют следующие структуры

$$V_j(\lambda) = (\underbrace{*, \dots, *}_{l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-l})^T, \quad W_k(\lambda) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{l}, \underbrace{*, \dots, *}_{n-l})^T. \tag{47}$$

где звездочками обозначены компоненты, которые могут быть отличными от нуля.

Следовательно, с использованием этих обозначений характеристический определитель рассматриваемого пучка будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_i(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n =$$
$$= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1} W_1(\lambda), \dots, V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n} W_n(\lambda)\right| = \sum_{\omega\in\Omega} F^{\omega}(\lambda) e^{\lambda\omega}, \tag{48}$$

где $F^{\omega}(\lambda)$ есть определитель

$$|V_1(\lambda), \dots, V_{j_1-1}(\lambda), W_{j_1}(\lambda), V_{j_1+1}(\lambda), \dots, V_{j_k-1}(\lambda), W_{j_k}(\lambda), V_{j_k+1}(\lambda), \dots, V_n(\lambda)|, \tag{49}$$

если $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_k}$.

Ввиду (47), (49), получим, что в сумме (48) отличными от нуля будут только те слагаемые, которые соответствуют экспонентам с показателями $\lambda\omega$, где ω являются суммами ровно $n - l$ различных слагаемых из чисел ω_s, $s = \overline{1,n}$.

Отсюда следует, что характеристический многоугольник рассматриваемого пучка содержится в выпуклой оболочке всех точек множества Ω, являющихся суммами различных характеристик ω_s, $s = \overline{1,n}$, в количестве ровно $n-l$. Обозначим эту выпуклую оболочку через M_{n-l}. То есть, в рассматриваемом случае $M_\Delta \subset M_{n-l}$, причем в случае «общего положения» будет $M_\Delta = M_{n-l}$.

На рис. 2 и 3 множество M_{n-l} есть многоугольник $ABCD$, граница которого обозначена сплошной толстой линией. Здесь $A = \omega_1+\cdots+\omega_{n-l}$ — самая левая возможная угловая точка, лежащая на вещественной оси, а $B = \omega_{l-n+k+1}+\cdots+\omega_k$ — самая правая возможная угловая точка, лежащая на вещественной оси. По условию теоремы 4 точки D и C лежат на прямой $D'C'$, где $D = \omega_1+\cdots+\omega_{k-k}+\omega_{k+1}+\cdots+\omega_n$ — самая левая угловая точка многоугольника M_{n-l} на этой прямой, а $C = \omega_{l+1}+\cdots+\omega_n$ — самая правая угловая точка этого многоугольника, лежащая на этой прямой. Линии BC и AD являются ломаными. Кроме того, из условия (9) доказываемой теоремы следует, что многоугольник M_{n-l}, а значит и характеристический многоугольник M_Δ, не касается боковых сторон четырехугольника M, то есть сторон $A'D'$ и $B'C'$.

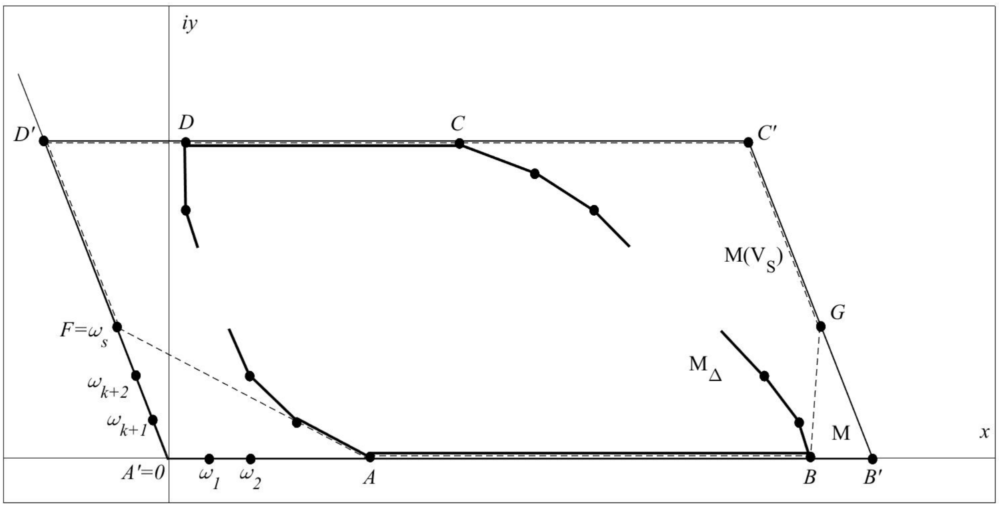

Рис. 2. Многоугольник $\operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\}$

Далее для проведения доказательства потребуются точки $F = \omega_s$ и $G = \omega_1+\cdots+\omega_s$ при любом фиксированном $s \in \{k+1,\ldots,n\}$.

По лемме 2 из [3] имеем

$$M(V_s) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\},$$

где Ω_s — множество всевозможных сумм различных характеристик ω_j, в которых обязательно есть слагаемое ω_s.

Построим многоугольник $\operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\}$. Очевидно, $A' = 0 \notin \Omega_s$. Ясно, что точка $F = \omega_s$ будет самой ближней к точке A' из точек множества Ω_s на отрезке $A'D'$, а точка $D' \in \Omega_s$ — самой дальней от точки A' точкой множества Ω_s на этом отрезке. Очевидно, что точка $B' \notin \Omega_s$. Ясно, что точка G' будет самой ближней к точке B' из точек множества Ω_s на отрезке $B'C'$, а точка $C' \in \Omega_s$ — самой дальней от точки B' точкой множества Ω_s на этом отрезке (см. рис. 2).

Таким образом, $\operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\}$ есть многоугольник $ABGC'D'FA$ (см. рис. 2), где линия BG — всегда отрезок, а FA может быть ломаной — это зависит от того, как расположены вершины M_Δ и каково значение ω_s.

Далее нам потребуется проверка условия (α) для вектора $V_s(\lambda)$. Определение условия (α), ввиду его громоздкости, не приводим, а отсылаем к соответствующему определению в работе [3]. Из рис. 2 видно, что $V_s(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) или кратко $V_s \in (\alpha)$, так как M_Δ касается сторон $A'B'$, $D'C'$, $D'F$ и BG, а углы между соседними перпендикулярами к этим сторонам из любой внутренней фиксированной точки многоугольника M_Δ, очевидно, меньше π.

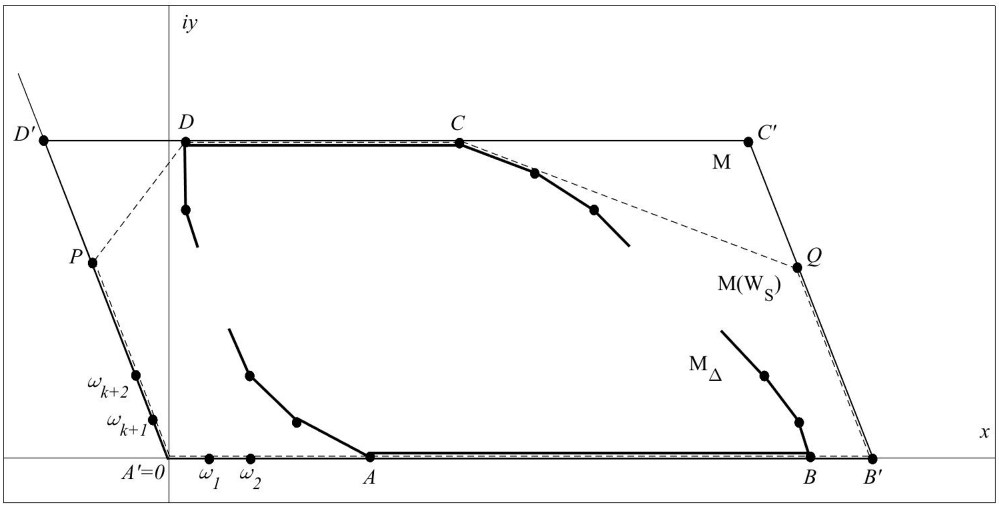

Рис. 3. Многоугольник $\operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega^s\}$

Далее, по лемме 2 из [3] имеем

$$M(W_s) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta, \Omega^s\},$$

где Ω^s — множество, содержащее точку 0 и всевозможные суммы различных ω_j, среди слагаемых которых нет точки ω_s.

Построим многоугольник $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^s\}$. Ясно, что $A' \in \Omega^s$. Пусть P есть самая дальняя от точки $A' = 0$ точка множества Ω^s на отрезке $A'D'$. Ясно, что точка P лежит ближе к A', чем точка D', так как $D' \notin \Omega^s$. Далее, очевидно, $B' \in \Omega^s$. Пусть Q есть самая дальняя от точки B' точка множества Ω^s на отрезке $B'C'$. Очевидно, что точка Q лежит ближе к B', чем точка C', так как $C' \notin \Omega^s$. Кроме того, ясно, что $PQ \parallel A'B'$ (см. рис. 3).

Таким образом, $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^s\}$ есть многоугольник $A'B'QCDPA'$ (см. рис. 3), где линия DP — всегда отрезок, а QC может быть ломаной — это зависит от того, как расположены вершины M_Δ и каково значение ω_s.

Из рис. 3 видно, что $W_s(\lambda) \in (\alpha)$, так как M_Δ касается сторон $A'B'$, $D'C'$, $B'Q$ и DP, а углы между соседними перпендикулярами к этим сторонам из любой внутренней фиксированной точки многоугольника M_Δ, очевидно, меньше π.

Так как имеются $n-k$ пар $\{V_s(\lambda), W_s(\lambda)\}$ таких, что $V_s(\lambda), W_s(\lambda) \in (\alpha)$, то по теореме 2 из [3] получаем, что имеет место $(n-k)$-кратная полнота к. ф. рассматриваемого пучка в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

Из-за того, что многоугольник M_{n-l} не касается сторон $A'D'$ и $C'D'$ многоугольника M (как уже было отмечено выше) следует, что других аналогичных пар $\{V_s(\lambda), W_s(\lambda)\}$, которые бы удовлетворяли условию (α) при $s = \overline{1,k}$, нет.

Заключение

В работе получены достаточные условия кратной полноты к. ф. в пространстве $L_2[0,1]$ для обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами, однородным относительно спектрального параметра дифференциальным выражением и однородными распадающимися двухточечными краевыми условиями.

Список литературы

1. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

   NAIMARK, M. (1969) *Linear differential operators.* Moscow: Nauka.

2. Келдыш, М. В. О полноте собственных функциях некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. — 1971. — Т. 26. — № 1. — С. 15–41.

KELDYSH, M. V. (1971) On completeness of the eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint linear operators. *UMN.* 26 (4). p. 15–41.

3. Рыхлов, В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

   RYKHLOV, V. S (2015) On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* (1 (26)). p. 69–86.

4. Келдыш, М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 1. — С. 11–14.

   KELDYSH, M. V. (1951) On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. AN SSSR.* 77 (1). p. 11–14.

5. Хромов, А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1973. — 242 с.

   KHROMOV, A. P. (1973) *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators: Dr. phys. and math. sci. diss.*. Novosibirsk.

6. Шкаликов, А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прил.. — 1976. — Т. 10. — № 4. — С. 69–80.

   SHKALIKOV, A. A. (1976) On completenes of the eigen- and associated functions of an ordinary differential operator with nonregular splitting boundary conditions. *Functional analysis and applications.* 10 (4). p. 69–80.

7. FREILING, G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. — 1984. — Bd. 188. — H. 1. — С. 55–68.

   FREILING, G. (1984) To completeness of the systems of the eigenfuncions and the main functions of irregular operator pencils. *Math. Z.*. 188 (1). p. 55–68.

8. Тихомиров, С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1987. — 126 с.

   TIKHOMIROV, S. A. (1987) *Finite-dimensional perturbations of integral Volterra operators in the space of vector-functions: Cand. phys. and math. sci. diss.*. Saratov.

9. Вагабов, А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994. — 160 с.

   VAGABOV, A. I (1994) *Introduction to the spectral theory of differential operators.* Rostov-na-Donu: Rostov University Publishing.

10. Рыхлов, В. С. О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2017. — Т. 63. — Вып. 2. — С. 340–361.

    RYKHLOV, V. S. (2017) On multiple completeness of the root functions of ordinary differential polynomial pencil with constant coefficient. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* 63 (2). p. 340–361.

11. Rykhlov, V. S. Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Mathematics. — 2017. — V. 72. — Iss. 1–2. — C. 281–301.

    RYKHLOV, V. S. (2017) Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators. *Results in Mathematics.* 72 (1–2). p. 281–301.

12. Рыхлов, В. С. О кратной полноте корневых функций пучка дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // Современые проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л Ульянова. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 275–276.

    RYKHLOV, V. S. (2018) On multiple completeness of the root functions jf a pencil of differential operators with constant coefficients and splitting boundary conditions. *Modern problems of the theory of functions and their applications: materials of the 19th International Saratov Winter School, dedicated to the 90th anniversary from the birthday of academician P. L Ulyanova.* Saratov: OOO Publishing House “Scientific book”. p. 275–276.

13. Рыхлов, В. С. Об однократной полноте корневых функций одного класса сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов // Сборник материалов международной конференции «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2018). Секции 1–3. — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 78–80.

RYKHLOV, V. S. (2018) On 1-fold completeness of the root functions of a class of strongly irregular pencils of differential operators. *Collecting materials International Conference "XXIX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on spectral and evolutionary problems" (CROMSH-2018). Sections 1–3.* Simferopol: Polyprint. p. 78–80.

УДК: 517.9

MSC2010: 46F05, 46B25

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ИЗ ГАРМОНИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

© В. Е. Струков

Воронежский государственный университет
факультет прикладной математики, информатики и механики
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394005, Российская Федерация
e-mail: *sv.post.of.chaos@gmail.com*

On Almost Periodic at Infinity Distributions from Harmonic Spaces.

Strukov V. E.

Abstract. The article under consideration is devoted to some problems of harmonic analysis of almost periodic at infinity functions from homogeneous spaces and distributions from harmonic spaces. We introduce the definition of an abstract homogeneous space $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ of functions defined on real axis $\mathbb{R}$ and with values in a complex Banach space X. The homogeneous function spaces under investigation are contained in Stepanov space $S^1(\mathbb{R}, X)$, convolutions with complex-valued functions from Banach algebra $L^1(\mathbb{R})$ and shifts do not take out any function from the corresponding homogeneous space. Thanks to the convolution with functions from $L^1(\mathbb{R})$ any homogeneous function space can be endowed with Banach module structure. We provide a number of examples of homogeneous function spaces including spaces $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, Stepanov spaces $S^1(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, Wiener amalgam spaces $(L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X)$, $p, q \in [1, \infty)$, continuous function spaces $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ and $C_0(\mathbb{R}, X)$, Hoelder spaces etc. Then we introduce the notions of the subspaces $\mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ and $AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ of slowly varying and almost periodic at infinity functions from $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$. For functions from $AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ we construct a notion of Fourier series, which is ambiguous, i.e., its coefficients can be chosen differently. We prove the Fourier coefficients to be slowly varying at infinity.

However, Borel measures on $\mathbb{R}$ with bounded variation and values in a Banach space X do not satisfy the definition of a homogeneous function space and force us to introduce an applicable extension. We consider the space $S'(\mathbb{R}, X)$ of distributions of slow growth. On the space $S'(\mathbb{R}, X)$ we define a group of shift operators and convolution with a function from a Banach algebra $L^1(\mathbb{R})$. For a homogeneous space $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ (denoted also as $\mathscr{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$) we introduce a countable set of spaces $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \,|\, x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)\}$, $n \in \mathbb{N}$, with the norm $\|f_n * x\|_{\mathscr{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathscr{F}} + \|x\|_{\mathscr{F}}$, where $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n = t^n e^{-t}/n!$ for $t > 0$ and $f(t) = 0$ for $t \le 0$. By the symbol $\mathscr{F}^{-n}(\mathbb{R}, X)$ for any $n \in \mathbb{N}$ we denote a harmonic distribution space defined as linear subspace of $S'(\mathbb{R}, X)$ of distributions $\Phi \in S'(\mathbb{R}, X)$ such that there is

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097

a function φ from corresponding homogeneous space $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ defined by $\Phi = (D+I)^n\varphi$ and $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. It should be noted that $\varphi = f_n * \Phi$. Further we consider all function and distribution spaces $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ with $n \in \mathbb{Z}$ as harmonic distribution spaces and prove that every such space is isometrically isomorphic to the corresponding homogeneous space $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$. Every harmonic space $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ with $n \in \mathbb{Z}$ is proved to be a Banach $L^1(\mathbb{R})$-module with shift operators group and a structure endowed by a convolution with a function from $L^1(\mathbb{R})$.

On the basis of definitions of slowly varying and almost periodic at infinity functions from $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ we design the concept of slowly varying and almost periodic at infinity distributions from harmonic spaces. By means of the methods of abstract harmonic analysis we study the properties of those distributions. For almost periodic at infinity distributions we construct Fourier series and study their properties. The results of the article are obtained with essential use of methods of isometric representations and Banach modules theories.

Keywords: *slowly varying at infinity function, almost periodic at infinity function, homogeneous space, Banach space, distribution of slow growth, Fourier series*

1. Однородные пространства функций

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\,X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty)$, будет обозначаться пространство Степанова, состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+t)\|^p_X dt \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, принимаемая за норму.

Определение 1. Банахово пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным,* если выполнены следующие условия:

(a) пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

(b) в $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа изометрий $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t),\ s, t \in \mathbb{R},\ x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X); \tag{1}$$

(c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

принадлежит $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и выполнено неравенство $\|f * x\| \le C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \ge 1$ (как правило, $C = 1$);

(d) $\varphi x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$, причем $\|\varphi x\| \le \|\varphi\|_1\|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Такое определение однородного пространства использовалось в [1, 2]. Примерами однородных пространств являются:

1) пространства $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ и $L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$;
2) пространства Степанова $S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$;
3) пространства амальгам Винера $(L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X))$, $p, q \in [1, \infty)$;
4) пространства $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $C_0(\mathbb{R}, X)$;
5) пространства Гельдера $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}, X)$

и другие (более подробно см. [1, 2]).

Банахово пространство $M(\mathbb{R}, X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ со сверткой мер в качестве умножения не является пространством функций, но его можно рассматривать как гармоничное пространство распределений (см. определение 7).

Далее символом $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство. Через $\mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathscr{F}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [2–5]). В частности, пространства $\mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. [2, 3]).

2. Почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств

В [2] были введены четыре эквивалентных определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$. Приведем два из них.

Определение 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется *ε-периодом на бесконечности* функции $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathscr{F}_0(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Множество ε-периодов на бесконечности функции $x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим тем же символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 3. Функция $x \in \mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности,* если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε-периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Для формулировки второго определения почти периодической на бесконечности функции нам потребуется определение медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства (см. [1, 2]).

Определение 4. Функция $x \in \mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $S(\alpha)x - x \in \mathscr{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. В работах [6–8] давалось определение медленно меняющейся на бесконечности функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и изучались свойства таких функций.

Определение 5. Функция $x \in \mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, ..., x_n \in \mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k\| < \varepsilon$, где функции e_k, $1 \le k \le n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что при $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ приведенные определения соотвествуют определениям, данным в статье [9].

Определение ряда Фурье функции из $AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ введем аналогично понятию ряда Фурье непрерывных почти периодических на бесконечности функций (см. [10]).

Пусть $x \in AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ и ряд $\widetilde{x} \sim \sum\limits_{n \ge 1} \widetilde{y_n}$, $\Lambda_B(\widetilde{x}) = \{\lambda_1, \ \lambda_2, ...\}$, $\Lambda(\widetilde{y_n}) = \lambda_n$, является рядом Фурье класса эквивалентности $\widetilde{x} \in AP(\mathscr{X})$, построенного по функции x, где символом $\Lambda_B(\widetilde{x})$ обозначен спектр Бора $\widetilde{x}$.

Определение 6. Ряд $x(t) \sim \sum\limits_{n \geq 1} x_n(t)e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, где функции z_n, $n \geq 1$, вида $z_n(t) = x_n(t)e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности $\widetilde{y}_n$, $n \geq 1$, называется *рядом Фурье* функции x. Функции x_n, $n \geq 1$, будем называть *коэффициентами Фурье* функции $x \in AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$.

Непосредственно из определений 5 и 6 следует

Теорема 1. *Коэффициенты любого ряда Фурье функции* $x \in AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ *принадлежат пространству* $\mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

3. Гармоничные пространства распределений и их свойства

Пусть X – комплексное банахово пространство. Символом $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство Шварца, т.е. линейное полинормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что для всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует $C > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|t^m \varphi^{(n)}(t)\|_X < C$. Такие функции называют *пробными.*

Будем говорить, что последовательность $(\varphi_k,\ k \in \mathbb{N})$, $\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$, *сходится* к функции $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$, если при всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $t \mapsto t^m \varphi_k^{(n)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $t \mapsto t^m \varphi^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ – линейный оператор. Будем обозначать значение оператора Φ на $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$ символом $\Phi(\varphi)$. Линейный оператор $\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ называют *непрерывным*, если $\Phi(\varphi_k)$ сходится к $\Phi(\varphi)$ всякий раз, когда $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$. Всякий непрерывный линейный оператор $\Phi : \mathscr{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ называют *распределением* (или *обобщенной функцией) медленного роста* на $\mathbb{R}$ со значениями в X. Обозначим символом $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ линейное пространство всех распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число (более подробно для скалярных распределений из $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ см. [11]).

Производной распределения $\Phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ будем называть распределение $D\Phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$, определенное формулой $(D\Phi)(\varphi) = -\Phi(\varphi')$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что оператор дифференцирования $D : \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ – линейный и непрерывный оператор. Из определения пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}, X)$ следует, что любое распределение $\Phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ дифференцируемо бесконечное число раз.

В пространстве распределений $\mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ действует группа $S : \mathbb{R} \to End\,\mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ операторов сдвига

$$(S(t)F)(\varphi) = F(S(-t)\varphi),\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Свертка распределения $F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(f * F)(\varphi) = F(\widetilde{f} * \varphi),\ F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X),\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, X),\ f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{4}$$

где функция $\widetilde{f}$ имеет вид $\widetilde{f}(\tau) = f(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Далее введем понятие гармоничного пространства распределений.

Рассмотрим последовательность $(f_n,\ n \in \mathbb{N})$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} e^{-t} & ,\ t > 0, \\ 0 & ,\ t \le 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что преобразование Фурье $\widehat{f_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $\widehat{f_n}(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda+1)^n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Каждому однородному пространству функций $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются как линейные пространства функций вида $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \mid x \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)\}$, $n \in \mathbb{N}$, с нормой $\|f_n * x\|_{\mathscr{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathscr{F}} + \|x\|_{\mathscr{F}}$, где функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой (5). Отметим, что все пространства $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, также являются однородными.

Определение 7. Линейное подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$ называется *гармоничным пространством распределений,* если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ найдется функция φ из однородного пространства $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\Phi = (D + I)^n \varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем использовать обозначение $\mathscr{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ и говорить, что пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *соответствует однородному пространству функций* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что в определении 7 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (5).

Под пространством $\mathscr{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество однородных пространств $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения 7 вытекает, что любое из этих пространств можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы $\mathbb{D}_n^m : D(\mathbb{D}_n^m) \subset \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathscr{F}^{(n-m)}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathbb{D}_n^m = (D + I)^m,\ m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

и операторы $\mathbb{D}_n^{-m} : D(\mathbb{D}_n^{-m}) \subset \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathscr{F}^{(n+m)}(\mathbb{R}, X)$, действующие по правилу

$$\mathbb{D}_n^{-m}\Phi = f_m * \Phi,\ \Phi \in \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X),\ m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (5).

Когда ясно, о каком именно пространстве идет речь, вместо обозначения $\mathbb{D}_n^m$ будем использовать более короткое обозначение $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом под оператором $\mathbb{D}^0$ будем понимать тождественный оператор I, действующий в соответствующем пространстве $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathbb{D}^{-m}\mathbb{D}^m = I$, $m \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, в каждом из пространств $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим оператор $\mathbb{S}_n(f) : \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ свертки распределения Φ из $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, задаваемый формулой $\mathbb{S}_n(f)\Phi = f * \Phi$. При $n = 0$ вместо $\mathbb{S}_0(f)$ будем писать просто $\mathbb{S}(f)$.

Далее символом $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будет обозначаться одно из пространств функций или распределений $\mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений.

Теорема 2. *Любое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ (т.е. $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$) изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$.*

Утверждение тоеремы 2 следует непосредственно из определения 7. При этом изоморфизм осуществляет оператор $\mathbb{D}^n$ вида (6) и обратный к нему оператор $\mathbb{D}^{-n}$ вида (7).

Из теоремы 2 и определения 7 следует

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ — гармоничное пространство распределений. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство;

2) $S(\tau)\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\|S(\tau)\Phi\| = \|\Phi\|$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и любого распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$;

3) $f * \Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $\|f * \Phi\| \le \|f\|_1\|\Phi\|$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$;

4) существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathbb{D}^{-m}\,\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$.

Условия 1)-3) теоремы 3 означают, что каждое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль (см. [3–5]), в котором действует группа S сдвигов вида (3) и модульная структура задается формулой (4), в которой распределение F принадлежит соответствующему гармоничному пространству распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

4. Почти периодические на бесконечности распределения из гармоничных пространств

В соответствии с определением 7 для произвольного распределения Φ из гармоничного пространства распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathscr{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, найдется функция y из однородного пространства $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\Phi = \mathbb{D}^n y$, где оператор $\mathbb{D}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, определяется одной из формул (6) или (7). При этом $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Введем понятия медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности распределений из пространств $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ определим следующим образом:

$\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathscr{F}_c(\mathbb{R}, X)\}$;

$\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathscr{F}_0(\mathbb{R}, X)\}$.

Определение 8. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющимся на бесконечности,* если $S(\alpha)\Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности распределений обозначим символом $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образует замкнутое линейное подпространство из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно группы сдвигов S.

Из теоремы 2 следует

Теорема 4. *Пространства* $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *и* $\mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *изоморфны, т.е. распределение* $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *является медленно меняющимся на бесконечности тогда и только тогда, когда функция* $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ *является медленно меняющейся на бесконечности.*

Из теоремы 4 следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathscr{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)\}$.

На основании определения 5 с использованием теоремы 2 дадим определение почти периодического на бесконечности гармоничного распределения и построим его ряд Фурье.

Определение 9. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности распределения $\Phi_1, ..., \Phi_m \in \mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что $\|\Phi - \sum\limits_{k=1}^{m} \Phi_k e_k\| < \varepsilon$, где функции e_k, $1 \le k \le m$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Множество почти периодических на бесконечности распределений $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ из гармоничного пространства распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образует замкнутое подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Из теоремы 2 следует

Теорема 5. *Пространства $AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, т.е. распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности.*

Из теоремы 5 следует, что

$$AP_\infty \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in AP_\infty \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)\}.$$

Таким образом, все результаты, справедливые для почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств, справедливы также и для почти периодических на бесконечности гармоничных распределений.

Другие определения почти периодических на бесконечности гармоничных распределений строятся аналогично соответствующим определениям для функций из однородных пространств. В частности, приведем определение, основанное на понятии ε-периода на бесконечности. Оно соотвествует определению 3 почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства.

Определение 10. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется *ε-периодом на бесконечности* распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$, если существует распределение $\Phi_0 \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ такое, что $\|S(\omega)\Phi - \Phi - \Phi_0\| < \varepsilon$.

Множество ε-периодов на бесконечности распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим тем же символом $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$.

Определение 11. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодическим на бесконечности,* если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, \Phi)$ ее ε-периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Из теоремы 5 следует, что так же, как и для функций из однородных пространств, приведенные определения почти периодических на бесконечности гармоничных распределений будут эквивалентны.

Рассмотрим функции e_k, $k \geq 1$, следующего вида $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 12. *Рядом Фурье* распределения $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида $\sum\limits_{k\geq 1} \Phi_k e_k$, где Φ_k, $k \geq 1$, — такие распределения из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, что функции $y_k = \mathbb{D}^{-n}\Phi_k \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ являются коэффициентами Фурье функции $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. определение 6). Такие распределения Φ_k, $k \geq 1$, будем называть *коэффициентами Фурье* распределения Φ.

Так же, как и для функций из $AP_\infty\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$, отметим неединственность ряда Фурье распределения $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$.

Из приведенных рассуждений и теоремы 1 следует

Теорема 6. *Коэффициенты любого ряда Фурье распределения* $\Phi \in AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *принадлежат пространству* $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Список литературы

1. Струкова, И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах // Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. — 2017. — Т. 39. — № 2. — С. 29–38.

   STRUKOVA, I. I. (2017) Harmonic analysis of periodic at infinity functions from homogeneous spaces. *Vestnik VolGU. Ser. 1. Matematika. Fizika.* 39 (2). p. 29–38.

2. Струков, В. Е., Струкова, И. И. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2018. — Т. 50. — № 3. — С. 254–264.

   STRUKOV, V. E. & STRUKOVA, I. I. (2018) About four definitions of an almost periodic at infinity function from a homogeneous space. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika.* 50 (3). p. 254–264.

3. Росс, К. Абстрактный гармонический анализ. Том 2 / К. Росс, Э. Хьюитт. — М.: Мир, 1975. — 899 с.

   ROSS, K. A., HEWITT, E. (1970) *Abstract Harmonic Analysis. Volume II.* Springer-Verlag, New York.

4. Баскаков, А. Г., Криштал, И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69 — № 3. — С. 3–54.

   BASKAKOV, A. G. & KRISHTAL, I. A. (2005) Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.* 69 (3). p. 439–486.

5. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

   BASKAKOV, A. G. (2006) Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.).* 137 (4). p. 4885–5036.

6. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.

   STRUKOVA, I. I. (2015) Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika.* (3). p. 186–198.

7. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функци // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57. — № 1. — С. 186–198.

   STRUKOVA, I. I. (2016) About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.* 57 (1). p. 145–154.

8. BASKAKOV, A., STRUKOVA, I. (2016) Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.* 7 (4). p. 9–29.

9. Баскаков, А. Г., Струкова, И. И., Тришина, И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59. — № 2. — С. 293–308.

   BASKAKOV, A. G. & STRUKOVA, I. I. & TRISHINA, I. A. (2018) Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. *Siberian Math. J.* 57 (1). p. 145–154.

10. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. — 2013. — Т. 68. — № 1 (409). — С. 77–128.

    BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys.* 68 (1). p. 69–116.

11. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 250 с.

    VLADIMIROV, V. S. (1981) *Uravneniya matematicheskoj fiziki.* M.: Nauka.

Копачевский Н. Д. О малых движениях гидросистемы “вязкоупругая жидкость – баротропный газ” / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 7 – 47.

УДК: 517.958

В работе изучается проблема малых движений гидросистемы, состоящей из вязкоупругой жидкости обобщенной модели Олдройта (см., например, [1], [12]) и баротропного газа, находящегося над жидкостью. Жидкость и газ целиком заполняют неподвижный сосуд и находятся в поле сил тяжести, так что граница раздела между ними горизонтальна. В процессе малых колебаний гидросистемы учитывается действие гравитационного поля с постоянным ускорением, а также малого поля внешних сил, наложенных на него. С помощью применения операторного подхода проблема приведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве. На этой основе доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном конечном отрезке времени. В случае нормальных колебаний гидросистемы сформулирована спектральная задача для оператор-функции, обобщающей как известный операторный пучок С. Г. Крейна (вязкая жидкость в частично заполненном сосуде), так и спектральную задачу о нормальных колебаниях вязкоупругой жидкости, полностью заполняющей неподвижный сосуд (см. [8]). Подробное исследование свойств решений спектральной задачи планируется провести в другой работе.

Ключевые слова: *вязкоупругая жидкость, баротропный газ, гидродинамическая система, задача Коши, ортопроектор.*

Абасов Н. М. Порядковые свойства нелинейных операторов суперпозиции / Н. М. Абасов // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 48 – 57.

УДК: 517.9

В статье представлены новые результаты для абстрактных операторов Немыцкого — важного для приложений подкласса ортогонально аддитивных операторов. Установлено, что абстрактный оператор Немыцкого $T : E \to E$, заданный на векторной решетке E с проекциями на главные полосы, обладает модулем. Также доказано, что множество всех абстрактных операторов Немыцкого, действующих в порядково полной векторной решетке E, является полосой в векторной решетке порядково ограниченных ортогонально аддитивных операторов на E. Найдена формула порядкового проектирования на эту полосу.

Ключевые слова: *ортогонально аддитивный оператор, абстрактный оператор Немыцкого, нелинейный оператор суперпозиции, оператор, сохраняющий дизъюнктность, порядковый проектор, векторная решетка.*

Балашова Г. С. Движение двух жидкостей в слоистом пористом пласте / Г. С. Балашова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 58 – 67.

УДК: 532.54

В данной работе рассмотрена задача вытеснения одной несжимаемой жидкости другой в частной модели линейного слоистого ограниченного пласта, состоящего из двух слоев, разделенных мало проницаемой перемычкой. Такая задача имеет чрезвычайно важное значение как практическое, так и теоретическое. В докладе обсуждается алгоритм решения этой задачи с помощью процедуры осреднения.

Ключевые слова: *несжимаемая жидкость, эллиптические уравнения, скорость фильтрации, осреднение, смещение переполнения, граница перемещения, предельные схемы.*

Звягин А. В., Поляков Д. М. Исследование диссипативной разрешимости альфа-модели Максвелла / А. В. Звягин, Д. М. Поляков // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 68 – 90.

УДК: 517.958

В статье исследуется разрешимость для альфа-модели Максвелла. На основе аппроксимационно-топологического метода доказывается существование диссипативного решения начально-краевой задачи для рассматриваемой модели. Кроме того, устанавливается связь между диссипативным решением и сильным решением альфа-модели Максвелла.

Ключевые слова: *альфа-модель гидродинамики, модель Максвелла, диссипативное решение, теорема существования, аппроксимационно-топологический метод.*

Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 91 – 113.

УДК: 517.927.25

В пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0,1]$ рассматривается класс полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка. Коэффициенты дифференциального выражения предполагаются постоянными. Краевые условия являются распадающимися и двухточечными в концах 0 и 1 (l краевых условий берутся только в точке 0 ($1 \le l \le n-1$), а остальные $n-l$ — в точке 1). Дифференциальное выражение и краевые формы предполагаются однородными, то есть содержат только главные части. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала координат, в количествах k и $n-k$. Формулируются достаточные условия m-кратной полноты с возможным конечным дефектом системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке. В случае $l \le \min\{k, n-k\}$ даются достаточные условия $2l$-кратной полноты, а в случае $l \ge \max\{k, n-k\}$ — $2(n-l)$-кратной полноты. Достаточные условия заключаются в отличии от нуля некоторых вполне конкретных определителей, построенных по коэффициентам краевых условий и корням характеристического многочлена. Даются оценки сверху возможны конечных дефектов. Доказательство проводится по несколько модернизированной «классической» схеме доказательства, восходящей к работам М. В. Келдыша, А. П. Хромова, А. А. Шкаликова и др.. В случае же, когда $\min\{k, n-k\} < l < \max\{k, n-k\}$, установлена $(n-k)$-кратная полнота системы корневых функций. При этом используется предложенный ранее автором «метод порождающих функций». Этот метод заключается в использовании вместо «классических» порождающих функций для системы корневых функций введенных автором новых «обобщенных порождающих функций», зависящих от произвольного вектора параметров, и в подборе этих векторов параметров так, чтобы классическая схема доказательства по-прежнему работала.

Ключевые слова: *пучок обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиальный пучок, распадающиеся краевые условия, однородное дифференциальное выражение, постоянные коэффициенты, собственные и присоединенные функции, корневые функции, однократная полнота системы корневых функций, однократная полнота системы собственных и присоединенных функций.*

Струков В. Е. О периодических на бесконечности функциях относительно подпространств / В. Е. Струков // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 4 (41). — С. 114 – 124.

УДК: 517.9

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и распределений из гармоничных пространств. В работе вводится определение однородного пространства функций, приводится ряд примеров однородных пространств. Вводится понятие гармоничного пространства распределений, которое строится по одному из однородных пространств функций. Изучаются свойства гармоничных пространств распределений, они наделяются структурой банаховых модулей. Доказывается, что каждое такое пространство изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций. На основе определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства вводится понятие почти периодического на бесконечности распределения из гармоничного пространства. Строятся ряды Фурье таких распределений и доказывается, что коэффициенты Фурье являются медленно меняющимися на бесконечности распределениями.

Ключевые слова: *медленно меняющаяся на бесконечности функция, почти периодическая на бесконечности функция, однородное пространство, банахово пространство, распределение медленного роста, ряд Фурье.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Абасов Нариман Магамедович	к. ф.-м. н, доцент кафедры высшей математики Московского авиационного института, г. Москва, Российская Федерация *e-mail: abasovn@mail.ru*
Балашова Галина Сергеевна	д. ф.-м. н, профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация *e-mail: balashovags@mpei.ru*
Звягин Андрей Викторович	к. ф.-м. н, доцент, заведующий лабораторией нелинейных методов анализа Научно-исследовательского института математики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация *e-mail: zvyagin.a@mail.ru*
Копачевский Николай Дмитриевич	д. ф.-м. н, заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: kopachevsky@list.ru*
Поляков Дмитрий Михайлович	к. ф.-м. н, научный сотрудник отдела математического анализа Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ, научный сотрудник лаборатории математической гидродинамики Научно-исследовательского института математики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация *e-mail: DmitryPolyakow@mail.ru*
Рыхлов Виктор Сергеевич	к. ф.-м. н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация *e-mail: RykhlovVS@yandex.ru*

Струков Виктор Евгеньевич

к. ф.-м. н, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com

Подписано к печати 7.12.2018. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13,7 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 31.01.2019.
Отпечатано: ИП Павлюков В. В.
295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, дом 44, литера «З», офис 6