

ТАВРИЧЕСКИЙ  
ВЕСТНИК  
ИНФОРМАТИКИ И  
МАТЕМАТИКИ

№ 3 (40) ' 2018

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

**ISSN 1729-3901**

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ ([https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=48863](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863)).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

**T** AURIDA  
**J** OURNAL OF  
**C** OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
**M** ATHEMATICS

**2018, No. 3**

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

**ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ**

<b>В. И. ДОНСКОЙ</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ</b>	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. М. ГУПАЛ</b>	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
<b>Ю. И. ЖУРАВЛЕВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. Н. КАРАПЕТАНЦ</b>	доцент, доктор физико-математических наук
<b>В. В. КРАСНОПРОШИН</b>	профессор, доктор технических наук
<b>М. А. МУРАТОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>К. В. РУДАКОВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. А. САПОЖЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. В. СТАРОСТЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. Н. ЧЕХОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДКОЛЛЕГИИ:**

к. ф.-м. н., доцент <b>А. С. АНАФИЕВ</b>	— ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент <b>В. И. ВОЙТИЦКИЙ</b>	— ответственный редактор (раздел «Математика и механика»)
к. ф.-м. н., доцент <b>В. Ф. БЛЫЩИК</b>	— редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент <b>М. Г. КОЗЛОВА</b>	— ученый секретарь журнала

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи  
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

#### EDITORIAL BOARD

<b>Vladimir DONSKOY</b>	<b>Editor-in-Chief</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Nikolay KOPACHEVSKY</b>	<b>Vice Chief Editor</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Anatoliy GUPAL</b>	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Yuri ZHURAVLEV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexey KARAPETYANTS</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor KRASNOPROSHIN</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Mustafa MURATOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Olexander NAKONECHNY</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Konstantin RUDAKOV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexander SAPOJENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir STAROSTENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Valeriy CHEKHOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

#### SECRETARIAT

<b>Ayder ANAFIYEV</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor VOYTITSKY</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir BLYSCHIK</b>	<b>The Editor of the Cite</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Margarita KOZLOVA</b>	<b>Scientific Secretary of the Journal</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

#### OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

#### JOURNAL SITE: [www.tvim.info](http://www.tvim.info)

#### FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel.** +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

**Email:** vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

#### THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Бардин А. Е., Житенева Ю. Н.</b> Гарантированное по рискам и сожалениям решение для иерархической модели .....	7
<b>Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.</b> О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей .....	22
<b>Жуковский В. И., Сачков С. Н., Сачкова Е. Н.</b> Гарантированное решение для рисконейтрала: аналог максимина в однокритериальных задачах	46
<b>Калитвин А. С., Калитвин В. А., Трусова Н. И.</b> О системах линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами ....	71
<b>Морозов А. И., Починка О. В.</b> О новых инвариантах диффеоморфизмов Купки–Смейла на сфере без источников и стоков .....	82
<b>Москалёва Ю. П., Сейдаметова З. С.</b> Вычисление адреса блокчейн кошелька средствами iOS Swift 4 .....	93
<b>Плиев М. А.</b> О латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторах .....	104
<b>Струкова И. И.</b> О периодических на бесконечности функциях относительно подпространств исчезающих на бесконечности функций .....	112
Рефераты .....	128
Список авторов номера .....	133

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Bardin A. E., Zhiteneva Ju. N.</b> The Guaranteed on Risks and Regrets Solution for a Hierarchical Model with Informed Uncertainty.....	7
<b>Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.</b> On Small Motions of a Physical Pendulum with Cavity Filled with a System of Three Homogeneous Immiscible Viscous Fluids.....	22
<b>Zhukovskiy V. I., Sachkov S. N., Sachkova E. N.</b> Guaranteed Decision for Risk-neutrality: the Analogue of Maximin in One-criterion Problem.....	46
<b>Kalitvin A. S., Kalitvin V. A., Trusova N. I.</b> On the Systems of Romanovskij Type Linear Integral Equations with Partial Integrals.....	71
<b>Morozov A. I. Pochinka O. V.</b> About new invariants of Kupka–Smale diffeomorphisms on the sphere without sources and sinks.....	82
<b>Moskaleva Y. P., Seidametova Z. S.</b> Blockchain Wallet Address Calculation Using iOS Swift 4.....	93
<b>Pliev M. A.</b> On Laterally Continuous Orthogonally Additive Operators.....	104
<b>Strukova I. I.</b> On Periodic at Infinity Functions with Respect to Subspaces of Vanishing at Infinity Functions.....	112
Abstracts.....	128
Authors.....	133

УДК: 519.83

MSC2010: 91A65

## ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО РИСКАМ И СОЖАЛЕНИЯМ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© А. Е. Бардин, Ю. Н. Житенева

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УЛ. ЗЕЛЕНАЯ, 22, Г. ОРЕХОВО-ЗУЕВО, МОСКОВСКАЯ ОБЛ., 142611, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *inth2006@rambler.ru, ulya\_zhiteneva@mail.ru*

### THE GUARANTEED ON RISKS AND REGRETS SOLUTION FOR A HIERARCHICAL MODEL WITH INFORMED UNCERTAINTY.

**Bardin A. E., Zhiteneva Ju. N.**

#### **Abstract.**

The paper formalizes a new model of solution-making under the conditions of uncontrolled (uncertain) factors in the form of a hierarchical game.

The problem of solution-making under uncertainty in the form of a hierarchical game with nature is considered

$$\Gamma = \langle U, \{Y[u] \mid u \in U\}, f_0(u, y(u)) \rangle.$$

In this game  $U$  is a set of top-level player strategies (center). Not an empty set  $Y[u]$  is a set of uncertainties (lower level player strategies, that is, nature). It that can be realized as a result of the chosen center strategy  $u \in U$ . The basic difference between the game and the known models [3]–[5] is that nature «reacts» to the choice of the solution maker, changing the area of possible uncertainties.

Solution-making in the game  $\Gamma$  is as follows. The first move is made by the top-level player using a certain strategy  $u \in U$ . The second move is made by nature, which realizes an any informed uncertainty  $y(u) \in Y[u]$ . As a result of this procedure in the game  $\Gamma$  there is a situation  $(u, y(u))$ . In this situation the payoff function value of the center for equal to  $f_0(u, y(u))$ .

In the game  $\Gamma$  center, choosing a strategy  $u \in U$  that seeks to maximize its payoff function  $f_0(u, y(u))$ . A top-level player should consider the possibility of realization of any uncertainty  $y(u) \in Y[u]$ . In this case, it can use different concepts of solution-making in problems under uncertainty.

The article discusses the approach to solution-making in this model, based on the concept of optimality Pareto and the principles of Wald and Savage.

A two-criterion problem is considered

$$P = \langle U, \{R^V(u), R^S(u)\} \rangle.$$

In this problem the function

$$R^V(u) = \max_u \min_{y(u)} f_0(u, y(u)) - \min_{y(u)} f_0(u, y(u))$$

is a risk on Wald for the center, the function

$$R^S(u) = \max_{y(u)} \Phi_0(u, y(u)) - \min_u \max_{y(u)} \Phi_0(u, y(u))$$

is a strategic regret of the center. The regret function is defined by the following equality

$$\Phi_0(u, y(u)) = \max_{u \in U} f_0(u, y(u)) - f_0(u, y(u)).$$

The strategy of the center  $u^* \in U$  will be called a guaranteed risk and regret solution for the game  $\Gamma$ , if it is the minimum Pareto solution to the problem  $P$ .

The article describes an algorithm for constructing a formalized optimal solution. The «performance» of the specified algorithm for finding the regret function and constructing a guaranteed risk and regret solution for the game on the example of a linear-quadratic optimization problem in terms of possible supply of imported products to the market is investigated.

**Keywords:** *hierarchical game under uncertainty, Pareto minimum, risk function, regret function, informed uncertainty*

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[5] исследуются конфликты в условиях действия неконтролируемых факторов. Там же формализованы различные понятия решения, которые базируются на принципах оптимального поведения из теории задач при неопределенности. В данной работе формализуется новая игровая модель принятия решений в подобных задачах. Принципиальное отличие от известных моделей [3]–[5] состоит в том, что природа «реагирует» на выбор лица, принимающего решение (ЛПР), изменяя область возможных неопределенностей.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Согласно максиминному критерию Вальда игра с природой рассматривается как конфликт с разумным и агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать лицу, принимающему решение, достигнуть успеха. Таким образом, осторожная (максиминная) стратегия ЛПР является оптимальной согласно этому критерию. Этот критерий олицетворяет «позицию пессимизма». Он ориентируется на самую неблагоприятную для ЛПР реализацию неопределенности.

Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа при выборе оптимальной стратегии ориентируется не на выигрыш, а на сожаления. В качестве оптимальной стратегии выбирается та стратегия, при которой величина сожаления в наихудших условиях



минимальна. Такая стратегия поведения часто соответствует принципам азартного игрока.

Очевидно, разумный игрок должен учитывать как возникающие риски при принятии решения, так и возможность получения большего выигрыша. Возникает идея формализации нового подхода к принятию решений в игре с природой, который мог бы соединить позитивные особенности обоих принципов и ослабить их негативные свойства.

В данной работе формализуется понятие гарантированного по рискам и сожалениям решения иерархической игры с природой и указан алгоритм построения оптимального решения. Исследована «работа» указанного алгоритма для нахождения функции сожаления и построения гарантированного по рискам и сожалениям решения для игры на примере линейно-квадратичной задачи оптимизации производства в условиях возможной поставки импортной продукции на рынок.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача принятия решений при неопределенности в форме иерархической игры

$$\Gamma = \langle U, \{Y[u] \mid u \in U\}, f_0(u, y(u)) \rangle,$$

где множество  $U$  – совокупность стратегий игрока верхнего уровня (центра). Непустое множество  $Y[u]$  есть совокупность неопределенностей  $y$  (стратегий игрока нижнего уровня, то есть природы), которые могут реализоваться в результате выбранной центром стратегии  $u \in U$ .

В игре  $\Gamma$  центр, выбирая стратегию  $u \in U$ , стремится максимизировать свою функцию выигрыша  $f_0(u, y(u))$ . Игрок верхнего уровня при выборе своей стратегии должен учитывать возможность реализации любой неопределенности  $y \in Y[u]$ , при этом он может использовать различные концепции принятия решений в задачах при неопределенности, например, принципы Вальда и Сэвиджа.

Перейдем к иерархической «процедуре» принятия решений в игре  $\Gamma$ .

Первый ход делает игрок верхнего уровня, используя конкретную стратегию  $u \in U$ . Второй ход делает природа, которая реализует произвольную информированную неопределенность  $y(u) \in Y[u]$ . В результате указанной процедуры в игре  $\Gamma$  возникает ситуация  $(u, y(u))$ , при этом выигрыш центра равен  $f_0(u, y(u))$ .

Аналогично подходу в работах [1]–[2], определим стратегический риск по Вальду для центра

$$R^V(u) = \max_u \min_{y(u)} f_0(u, y(u)) - \min_{y(u)} f_0(u, y(u)), \quad (1)$$

а также его стратегическое сожаление

$$R^S(u) = \max_{y(u)} \Phi_0(u, y(u)) - \min_u \max_{y(u)} \Phi_0(u, y(u)), \quad (2)$$

где функция сожалений

$$\Phi_0(u, y(u)) = \max_{u \in U} f_0(u, y(u)) - f_0(u, y(u)).$$

Здесь предполагается существование экстремальных значений соответствующих функций. Будем также полагать, что центр, выбирая стратегию  $u \in U$ , стремится получить возможно меньшие значения как функции риска  $R^V(u)$ , так и функции сожаления  $R^S(u)$ .

**Определение 1.** Стратегию центра  $u^* \in U$  будем называть *гарантированным по рискам и сожалениям решением* для игры  $\Gamma$ , если  $u^*$  является минимальным по Парето решением для двухкритериальной задачи

$$P = \langle U, \{R^V(u), R^S(u)\} \rangle, \quad (3)$$

т.е. для всех значений  $u \in U$  несовместна система неравенств

$$\begin{cases} R^V(u) \leq R^V(u^*), \\ R^S(u) \leq R^S(u^*), \end{cases}$$

причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

Рассмотрим пошаговый алгоритм вычисления функции сожалений  $\Phi_0(u, y(u))$ .

Первый шаг состоит в выборе центром определенного решения  $u \in U$ .

Второй шаг совершает природа, применяя стратегию  $y(u) \in Y[u]$ .

Третий шаг снова выполняет центр, решая оптимизационную задачу

$$P(u, y(u)) : \begin{cases} f_0(z, y(u)) \rightarrow \max, \\ z \in U^*, \end{cases} \quad (4)$$

где зафиксирована неопределенность  $y \in Y[u]$ . Множество  $U^*$  состоит из всех допустимых стратегий центра  $z \in U$ , для которых фиксированное значение неопределенности  $y(u)$  принадлежит множеству  $Y[u]$ , именно,

$$U^* = \{z \in U \mid y(u) \in Y[u]\}. \quad (5)$$

Предположим, что оптимальное решение  $z^*(y(u))$  задачи  $P(u, y(u))$  существует для всех стратегий  $u \in U$  и фиксированных неопределенностей  $y \in Y[u]$ . Окончательно имеем:

$$\Phi_0(u, y(u)) = f_0(z^*(y(u)), y(u)) - f_0(u, y(u)). \quad (6)$$

Отметим, что в задаче  $P(u, y(u))$  фиксирована стратегия  $u \in U$  и неопределенность  $y(u) \in Y[u]$ .

Далее рассмотрим «работу» указанного алгоритма нахождения функции сожаления и построения гарантированного по рискам и сожалениям решения игры  $\Gamma$  на примере линейно-квадратичной задачи оптимизации производства в условиях возможной поставки импортной продукции на рынок.

## 2. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ ИМПОРТА

Пусть фирма производит и поставляет на рынок определенный вид продукции. Объем этого продукта обозначим  $u \in U = [0, c_0]$ . После принятия решения о количестве произведенной продукции появляется новый игрок (компания-импортер). Причем о действиях импортера имеется неполная информация. Далее будем считать, что объем поставляемой импортной продукции зависит от величины  $u \in [0, c_0]$  и равен  $y(u) \in Y[u]$ , где множество

$$Y[u] = \{y(u) \in [0, d] \mid 0 \leq y(u) \leq d - lu\}. \quad (7)$$

Суммарный объем указанного вида продукции на рынке равен  $u + y(u)$ . Будем считать, что издержки производства для данной фирмы являются линейными функциями от выпуска  $u$ , именно, затраты равны величине  $k_0u$ , где константа  $k_0 > 0$ .

Предположим, что на рынке в зависимости от спроса устанавливается цена, определяемая следующей формулой:

$$p(u, y(u)) = a - b(u + y(u)), \quad (8)$$

где число  $a > 0$  – начальная цена товара, а константа  $b > 0$  – коэффициент, который показывает, как уменьшается цена продукта при поступлении на рынок единицы продукции. Тогда выручка фирмы равна

$$f_0(u, y(u)) = p(u, y(u))u - k_0u$$

или, с учетом (8),

$$f_0(u, y(u)) = b \left( -u^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y}{2} \right) u \right), \quad (9)$$

где параметр

$$h_0 = \frac{a - k_0}{2b}.$$

Далее предполагаем выполнение условия  $a > k_0$ , тогда параметр  $h_0 > 0$ . Предполагаем также, что выполнено неравенство  $d - lc_0 > 0$  и справедливы условия  $h_0 \leq c_0$ ,

$h_0 - \frac{d}{2} > 0$ , где параметры  $d > 0$ ,  $0 < l < 1$ . Тогда для любого  $y \in [0, d]$  получаем неравенство

$$0 < h_0 - \frac{y}{2} \leq c_0.$$

Формализуем задачу оптимизации производства в форме иерархической игры с природой

$$\Gamma = \langle U, \{Y[u] \mid u \in U\}, f_0(u, y(u)) \rangle. \quad (10)$$

В игре (10) фирма-производитель является игроком верхнего уровня (центром). Совокупность ее стратегий описывается множеством  $U = [0, c_0]$ . Фирма-импортер рассматривается в качестве игрока нижнего уровня (природы, неопределенности). Множество  $Y[u]$ , заданное в (7), есть совокупность возможных действий компании-импортера (неопределенности)  $y(u)$ , которые могут реализоваться в результате выбранной центром стратегии  $u \in U$ .

В игре (10) центр стремится максимизировать свою функцию выигрыша  $f_0(u, y(u))$ , определенную в (9). При этом он должен учитывать возможность реализации любой неопределенности  $y(u) \in Y[u]$  при выборе собственной стратегии  $u \in U$ .

Будем считать, что центр при выборе оптимального решения в игре  $\Gamma$ , руководствуется принципом Сэвиджа.

Перейдем к пошаговому построению функции сожалений центра  $\Phi_0(u, y(u))$ , заданной равенством (6).

**ПЕРВЫЙ ШАГ.** Игрок верхнего уровня рассматривает возможность использования производственной стратегии  $u \in U$ .

**ВТОРОЙ ШАГ.** Предполагаем, что в этом случае природа реализует информированную неопределенность  $y(u) \in Y[u]$ , то есть количество импортной продукции поставленной на рынок равно  $y(u)$ .

**ТРЕТИЙ ШАГ.** Если данная фирма имела бы точную информацию о количестве импортной продукции  $y(u)$ , то она изменила бы свою исходную стратегию  $u \in [0, c_0]$  на новую стратегию  $z^*(y(u))$ , на которой достигался бы максимум функции

$$f_0(z, y(u)) = b \left( -z^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(u)}{2} \right) z \right), \quad z \in U^*. \quad (11)$$

В равенстве (11) задана стратегия  $u \in U$  и зафиксирована неопределенность  $y(u) \in Y[u]$ , множество  $U^*$  определено в (5).

Для решения оптимизационной задачи  $P(u, y(u))$ , описанной в (4), необходимо описать множество  $U^*$ . Рассмотрим несколько возможных случаев.

*Первый случай.* Пусть объем импорта  $y(u) \in [0, d - lc_0]$ , тогда множество  $U^* = U$  (рис. 1). Поэтому получаем задачу максимизации функции  $f_0(z, y(u))$  по переменной  $z \in [0, c_0]$ , где фиксирована неопределенность  $y(u)$ .

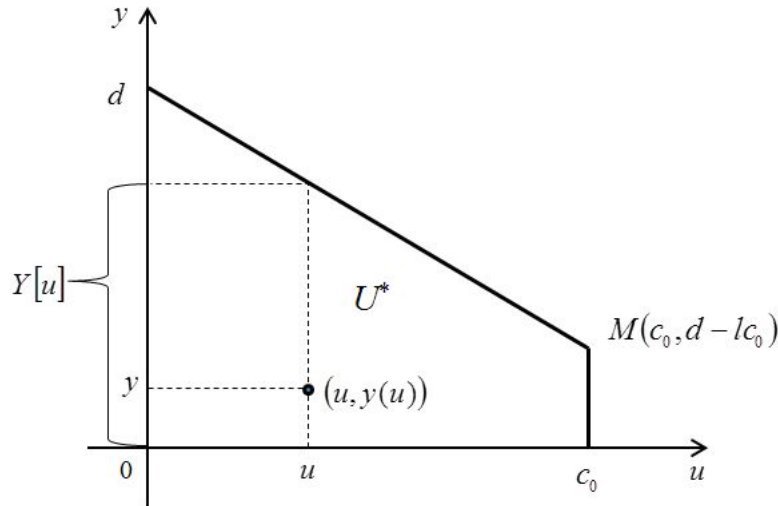


Рис. 1. Первый случай

Используя свойства квадратичной функции, получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть в игре с природой (10) выполнено условие

$$(\forall y \in [0, d]) \left( 0 < h_0 - \frac{y}{2} \leq c_0 \right), \quad (12)$$

при этом центр выбрал произвольную стратегию  $u \in [0, c_0]$ . Тогда при фиксированном значении  $y(u) \in [0, d - lc_0]$  наибольшее значение функции  $f_0(z, y(u))$ , заданной равенством (11), на отрезке  $[0, c_0]$  достигается в точке

$$z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2}.$$

Если при заданной стратегии  $u \in [0, c_0]$  реализовалась неопределенность  $y(u) \in [d - lc_0, d - lu]$ , то максимальное значение функции  $f_0(z, y(u))$  ищется на отрезке  $\left[0, \frac{d - y(u)}{l}\right]$  при фиксированном значении  $y(u)$ .

*Второй случай.* Максимальное значение функции  $f_0(z, y(u))$  достигается во внутренней точке отрезка  $\left[0, \frac{d - y(u)}{l}\right]$  (рис. 2).

Введем обозначение:

$$\tilde{y} = \frac{2}{2 - l}(d - lh_0). \quad (13)$$

**Лемма 2.** Пусть в игре с природой (10) выполнено условие (12), а также центр выбрал произвольную стратегию  $u \in [0, c_0]$ . Тогда при фиксированном значении  $y(u) \in [d - lc_0, d - lu]$ , которое удовлетворяет условию  $y(u) \leq \tilde{y}$ , наибольшее значение функции  $f_0(z, y(u))$  на отрезке  $[0, c_0]$  достигается в точке

$$z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2}.$$

При этом справедливы неравенства  $d - lc_0 < \tilde{y} < d$ .

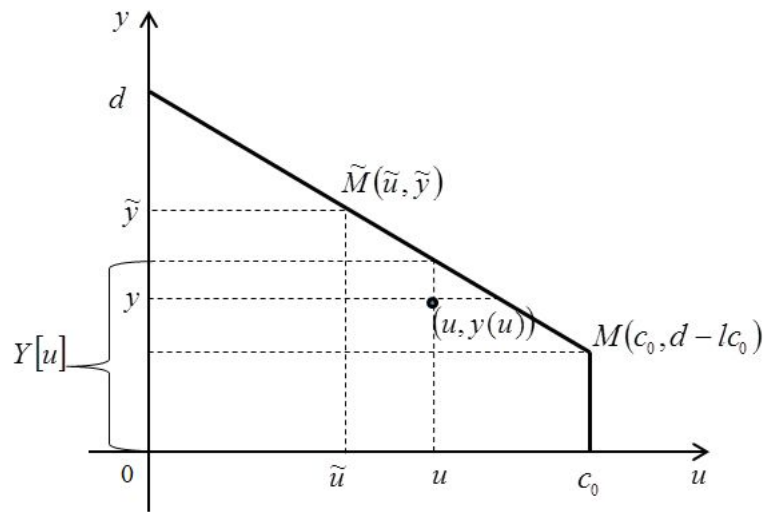


Рис. 2. Второй случай

*Доказательство.* Пусть при заданной стратегии  $u \in [0, c_0]$  реализовалась неопределенность  $y(u) \in [d - lc_0, d - lu]$ . Тогда наибольшее значение функции  $f_0(z, y(u))$  на отрезке  $\left[0, \frac{d - y(u)}{l}\right]$  достигается в точке  $z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2}$  только тогда, когда выполнено условие

$$h_0 - \frac{y(u)}{2} \leq \frac{d - y(u)}{l}.$$

Решая полученное неравенство, имеем  $y(u) \leq \tilde{y}$ , где  $\tilde{y}$  определено в (13).

Покажем, что  $\tilde{y} > d - lc_0$ .

Действительно, справедлива следующая цепочка импликаций

$$\begin{cases} c_0 \geq h_0, \\ d - lc_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2(c_0 - h_0) + d - lc_0 > 0 \Rightarrow 2d - 2lh_0 > 2d - 2lc_0 - ld + l^2c_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(d - lh_0) > (2 - l)(d - lc_0) \Rightarrow \frac{2}{2-l}(d - lh_0) > d - lc_0 \Rightarrow \tilde{y} > d - lc_0.$$

Аналогично можно показать, что  $\tilde{y} < d$ .

□

Введем обозначение:

$$\tilde{u} = \frac{d - \tilde{y}}{l} = \frac{2}{2-l} \left( h_0 - \frac{d}{2} \right). \quad (14)$$

Рассмотрим свойства стратегии  $\tilde{u}$ . Покажем, что центру невыгодно использовать стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$ , если он желает максимизировать свою функцию выигрыша.

**Лемма 3.** Пусть при заданной стратегии  $u \in [0, c_0]$  реализовалась неопределенность  $y(u) \in [0, d - lu]$ , при этом  $y(u) \leq \tilde{y}$ . Тогда согласно предыдущим утверждениям центр выбирает новую стратегию

$$z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2},$$

причем выполнено неравенство  $z^*(y(u)) \geq \tilde{u}$ .

*Доказательство.* Если в данных условиях реализовалась неопределенность  $y = \tilde{y}$ , то

$$z^*(y(u)) = h_0 - \frac{\tilde{y}}{2} = \tilde{u}.$$

В этом случае точка локального экстремума квадратичной функции  $f_0(u, y(u))$  совпадает с граничной точкой  $z_b = \frac{d-y(u)}{l}$ .

Если  $y < \tilde{y}$ , то

$$z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2} > \frac{d - \tilde{y}}{l} = \frac{2}{2-l} \left( h_0 - \frac{d}{2} \right) = \tilde{u}.$$

□

Отметим, что при выборе центром стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$  соответствующая стратегия природы (неопределенность)  $y(u)$  принимает значения от нуля до числа  $d - lu > \tilde{y}$ .

**Лемма 4.** Пусть при заданной стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$  реализовалась неопределенность  $y(u) \leq \tilde{y}$ , где стратегия природы  $\tilde{y}$  определена в (13). Тогда, используя стратегию  $\tilde{u}$ , центр гарантирует себе больший выигрыш, чем при выборе произвольной стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$ , для любой допустимой неопределенности  $y(u) \in [0, \tilde{y}]$ .

*Доказательство.* Согласно предыдущей лемме, при фиксированной неопределенности  $y(u) \in [0, \tilde{y}]$  квадратичная функция  $f_0(u, y(u))$ , заданная равенством (9), строго

возрастает на промежутке  $u \in [0, \tilde{u}]$ . Поэтому выполнено неравенство

$$f_0(\tilde{u}, y(u)) = b \left( -\tilde{u}^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y}{2} \right) \tilde{u} \right) > b \left( -u^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y}{2} \right) u \right) = f_0(u, y(u)),$$

где  $y(u) \in [0, \tilde{y}]$ .

□

*Третий случай.* Осталось рассмотреть случай, когда при заданной стратегии  $u \in [0, \tilde{u}]$  реализуется неопределенность  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$  (рис. 3). Здесь при фиксированной неопределенности  $y(u)$  максимальное значение функции  $f_0(z, y(u))$ , заданной в (11), на промежутке  $[0, \tilde{u}]$  достигается в граничной точке  $z_b = \frac{d-y(u)}{l}$ .

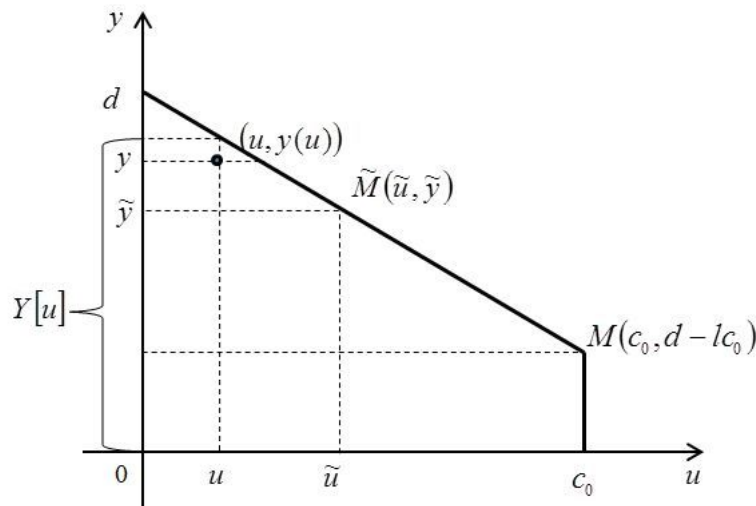


Рис. 3. Третий случай

**Лемма 5.** Пусть при заданной стратегии  $u \in [0, \tilde{u}]$  реализовалась неопределенность  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$ , где стратегия природы  $\tilde{y}$  определена в (13). Тогда, используя стратегию  $\tilde{u}$ , центр гарантирует себе больший выигрыш, чем при выборе произвольной стратегии  $u \in [0, \tilde{u}]$ , для любой допустимой неопределенности  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$ .



*Доказательство.* Из предыдущих рассуждений следует, что для любой стратегии  $u \in [0, \tilde{u}]$  и любой неопределенности  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$  оптимальное решение задачи

$$P(u, y(u)) : \begin{cases} b \left( -z^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(u)}{2} \right) z \right) \rightarrow \max, \\ z \in \{z \in U \mid y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]\} \end{cases}$$

достигается в граничной точке

$$z_b(y(u)) = \frac{d - y(u)}{l}, \quad z_b(y(u)) \in [0, \tilde{u}].$$

Следовательно, для всех стратегий  $u \in [0, \tilde{u})$  и произвольной неопределенности  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$  выполнено неравенство

$$f_0(u, y(u)) \leq f_0(z_b, y(u)).$$

Так как

$$h_0 - \frac{y(\tilde{u})}{2} > h_0 - \frac{y(u)}{2}$$

для всех стратегий  $u \in [0, \tilde{u})$ , неопределенностей  $y(\tilde{u}) \in Y[\tilde{u}]$  и  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$ , то с учетом предыдущей леммы имеем

$$\begin{aligned} f_0(u, y(u)) &\leq b \left( -z_b^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(u)}{2} \right) z_b \right) < b \left( -z_b^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(\tilde{u})}{2} \right) z_b \right) < \\ &< b \left( -\tilde{u}^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(\tilde{u})}{2} \right) \tilde{u} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$f_0(u, y(u)) < f_0(\tilde{u}, y(\tilde{u})), \quad u \in [0, \tilde{u}), \quad y(\tilde{u}) \in Y[\tilde{u}], \quad y(u) \in (\tilde{y}, d - lu].$$

□

Обобщая результаты, полученные в приведенных выше утверждениях, вместе со случаем, когда параметр  $l = 0$ , получаем основной вывод.

**Теорема.** *Рассматривается задача принятия решений при неопределенности в форме иерархической игры (10):*

$$\Gamma = \langle U, \{Y[u] \mid u \in U\}, f_0(u, y(u)) \rangle,$$

где множество  $U = [0, c_0]$  – совокупность стратегий игрока верхнего уровня (центра). Непустое множество  $Y[u] = [0, d - lu]$  есть совокупность неопределенностей  $y(u)$  (стратегий игрока нижнего уровня, то есть природы), которые могут реализоваться в результате выбранной центром стратегии  $u \in U$ . Предполагаем,

что выполнено условие  $d - lc_0 > 0$  и для любого  $y \in [0, d]$  справедливо неравенство  $0 < h_0 - \frac{y}{2} \leq c_0$ , где параметры  $d > 0$ ,  $0 \leq l < 1$ .

Тогда

1) при любом фиксированном значении  $y(u) \in [0, d - lc_0]$  наибольшее значение функции

$$f_0(z, y(u)) = b \left( -z^2 + 2 \left( h_0 - \frac{y(u)}{2} \right) z \right)$$

на отрезке  $[0, c_0]$  достигается в точке  $z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2}$ ;

2) при любом фиксированном значении  $y(u) \in [d - lc_0, d - lu]$ , которое удовлетворяет условию  $y(u) \leq \tilde{y} = \frac{2}{2-l}(d - lh_0)$ , наибольшее значение функции  $f_0(z, y(u))$  на отрезке  $[0, c_0]$  достигается в точке  $z^*(y(u)) = h_0 - \frac{y(u)}{2}$  и при этом справедливы неравенства  $d - lc_0 < \tilde{y} < d$ ;

3) если при заданной стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$  реализовалась неопределенность  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$ , то используя стратегию  $\tilde{u} = h_0 - \frac{\tilde{y}}{2}$ , центр гарантирует себе больший выигрыш, чем при выборе произвольной стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$ , для любой допустимой неопределенности  $y(u) \in (\tilde{y}, d - lu]$ .

**Замечание.** На содержательном уровне данное утверждение означает, что в формализованной выше иерархической игре (10) существует «пограничная» стратегия  $\tilde{u} = \frac{2}{2-l} \left( h_0 - \frac{d}{2} \right)$ , которая зависит только от параметров исходной задачи и при этом центру невыгодно использовать стратегии  $u \in [0, \tilde{u})$ , если он желает максимизировать свою функцию выигрыша.

Отметим, что для классической задачи принятия решений при неопределенности, которая соответствует параметру  $l = 0$ , «пограничная» стратегия  $\tilde{u} = h_0 - \frac{d}{2}$  соответствует осторожному (оптимальному по Вальду) поведению в игре.

Окончательно получаем, что функция сожаления, заданная в (6), принимает вид

$$\Phi_0(u, y(u)) = b \left( h_0 - \frac{y(u)}{2} - u \right)^2.$$

Имеем:

$$\max_{y(u) \in Y[u]} \Phi_0(u, y(u)) = \begin{cases} b(h_0 - u)^2, & 0 \leq u \leq h_0 - \frac{d}{4}, \\ b \left( h_0 - u - \frac{d}{2} \right)^2, & h_0 - \frac{d}{4} \leq u \leq c_0. \end{cases}$$

Тогда гарантированное сожаление центра равно

$$\min_{u \in U} \max_{y \in Y} \Phi_0(u, y) = \frac{bd^2}{16},$$

соответственно, решение

$$u^S = h_0 - \frac{d}{4}$$

является гарантированным по Сэвиджу, именно,

$$(\forall y \in Y)(\Phi_0(u^S, y) \leq \Phi_0(u^S, y^S)),$$

где неопределенность

$$y^S(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u \leq h_0 - \frac{d}{4}, \\ d, & h_0 - \frac{d}{4} \leq u \leq c_0. \end{cases}$$

Тогда стратегическое сожаление по Сэвиджу (2) имеет вид

$$R^S(u) = \begin{cases} b \left[ (h_0 - u)^2 - \frac{d^2}{16} \right], & 0 \leq u \leq h_0 - \frac{d}{4}, \\ b \left[ \left( h_0 - u - \frac{d}{2} \right)^2 - \frac{d^2}{16} \right], & h_0 - \frac{d}{4} \leq u \leq c_0. \end{cases}$$

Для нахождения стратегического риска по Вальду (1) предположим, что центр ориентируется на возможность реализации самой неблагоприятной для него неопределенности  $y^V(u) = d - lu$ . Тогда

$$\min_{y(u)} f_0(u, y(u)) = f_0(u, y^V(u)) = b_1 \left( -u^2 + 2 \left( h_1 - \frac{d_1}{2} \right) u \right),$$

где параметры

$$b_1 = (1 - l)b, \quad h_1 = \frac{a - k_0}{2b_1}, \quad d_1 = \frac{d}{1 - l}, \quad 0 \leq l < 1.$$

Далее предполагаем выполнение условия  $a > k_0$ , тогда параметр  $h_1 > 0$ . Пусть также справедливы условия  $0 < h_1 - \frac{d_1}{2} \leq c_0$ . Тогда гарантированное по Вальду решение центра:

$$u^V = h_1 - \frac{d_1}{2}.$$

Стратегический риск по Вальду (1) для центра есть

$$R^V(u) = b_1(u - u^V)^2.$$

Выполняя построение гарантированного по рискам и сожалениям решения игры (10), необходимо получить минимальное по Парето решение двухкритериальной задачи  $P$ , определенной в (3).

Для выделения единственного гарантированного по рискам и сожалениям решения центра получаем классическую оптимизационную задачу

$$\begin{cases} \left( R^V(u) \right)^2 + \left( R^S(u) \right)^2 \rightarrow \min, \\ u \in U = [0, d]. \end{cases}$$

Решение последней задачи для допустимого набора параметров находим, используя численные методы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследуется иерархическая структура принятия решений в конфликтной ситуации, когда действуют неконтролируемые лицом, принимающим решение, факторы. При этом в рассматриваемой математической модели конфликта учитываются как ожидаемые потери при принятии рискованных решений, так и возможность благоприятных для ЛПР (игрока) действий внешних факторов. Именно, наличие риска в процессе принятия решений не всегда является негативной особенностью реальной проблемы. Конкретные задачи, связанные с экономическими, социальными, политическими и военными конфликтами, свидетельствуют о возникающей часто необходимости принятия рискованного выбора.

Для конкретного класса линейно-квадратичных моделей иерархических систем конфликтов с двумя уровнями иерархии сформулирована и решена задача формализации оптимального решения. Также исследована проблема построения эффективного алгоритма нахождения оптимальных решений для поставленных задач.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардин, А. Е., Житенева, Ю. Н., Макаркина, Т. В. *U*-оптимальное по рискам и сожалениям решение игры с природой // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов X Международной школы-симпозиума АМУР-2016. — Симферополь: ТНУ, 2016. — С. 29–35.

BARDIN, A. & ZHITENEVA, J. & MAKARKINA, T. (2016) The *U*-optimal on risks and regrets solution game with nature. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the Eighth International School-Symposium AMUR-2016*. p. 29–35.

2. Бардин, А. Е., Солдатова, Н. Г. Сильно гарантированное равновесие в одной иерархической двухуровневой игре при неопределенности // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2014. — Т. 1. — С. 17–23.

BARDIN, A. & SOLDATOVA, N. (2014) The strongly guaranteed equilibrium in one hierarchical two-level game under uncertainty. *Bulletin of the South Ural state University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*. 1. p. 17–23.

3. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов и их приложения. — М.: ЛЕНАНД, 2012. — 304 с.  
ZHUKOVSKIY, V. and CUDRYAVCEV, K. (2012) *Balancing conflicts and their applications*. Moscow: LENAND.
4. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Смирнова, Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: КРАСАНД, 2013. — 324 с.  
ZHUKOVSKIY, V. and CUDRYAVCEV, K. and SMIRNOVA, L. (2013) *Guaranteed conflict solutions and their applications*. Moscow: KRASAND.
5. Жуковский, В. И., Салуквадзе, М. Е. Математические основы золотого правила. — Москва - Тбилиси: Национальная Академия Наук Грузии, 2016. — 263 с.  
ZHUKOVSKIY, V. and SALUKVADZE, M. (2016) *The mathematical foundations of the Golden rule*. Moscow-Tbilisi: The National Academy Of Sciences Of Georgia.
6. SAVAGE, L. Y. (1951) The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association*. 46. p. 55–67.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

MSC2010: 70E55, 35M33

## О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ<sup>1</sup>

© В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАД. ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [victor.voytitsky@gmail.com](mailto:victor.voytitsky@gmail.com), [kopachevsky@list.ru](mailto:kopachevsky@list.ru)

ON SMALL MOTIONS OF A PHYSICAL PENDULUM WITH CAVITY FILLED WITH A SYSTEM OF THREE HOMOGENEOUS IMMISCIBLE VISCOUS FLUIDS.

Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.

**Abstract.** Let  $G$  be a physical pendulum of mass  $m$ . Suppose that it has a cavity filled with a system of three homogeneous immiscible viscous fluids situated in domains  $\Omega_1, \Omega_2$  and  $\Omega_3$  with free boundaries  $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)$  and rigid parts  $S_1, S_2, S_3$ . Let  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  be densities of fluids, and  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  be dynamical viscosities. We suppose that the system oscillates (with friction) near the fixed point  $O$  of spherical hinge.

We use the vector of small angular displacement  $\vec{\delta}(t) = \sum_{j=1}^3 \delta^j(t) \vec{e}_1^j$  to determine motion of the removable coordinate system  $Ox_1^1 x_1^2 x_1^3$  (connected with pendulum) relative to stable coordinate system  $Ox^1 x^2 x^3$ . Then angular velocity  $\vec{\omega}(t)$  of body  $G$  is equal to  $d\vec{\delta}/dt$ .

Let  $\vec{u}_k(x, t)$  and  $p_k(x, t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) be fields of fluids velocities and dynamical pressures in  $\Omega_k$  (in removable coordinate systems),  $\zeta_j(x, t)$  ( $j = 1, 2$ ) are functions of normal deviation of  $\Gamma_j(t)$  from equilibrium plane surfaces  $\Gamma_j(0) = \Gamma_j$ . Then we consider linearized initial boundary value problem (2)–(4).

We formulate the law of full energy balance. Using the method of orthogonal projections to the necessary Hilbert spaces and studying auxiliary boundary value problems initial problem can be reduced to the Cauchy problem for the differential-operator equation (19)–(20)

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g B_{12} z_2 &= f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ g C_2 \frac{dz_2}{dt} + g B_{21} z_1 &= 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Данная работа выполнена при частичной поддержке первого соавтора грантом для молодых учёных из средств программы развития Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского на 2015–2024 гг., и второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

in Hilbert space  $H := H_1 \oplus H_2 := (\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2)$ . Here operator of kinetic energy  $C_1$  is bounded and positive definite, operator of potential energy  $C_2$  is bounded and selfadjoint,  $A_1$  is unbounded positive definite,  $B_{12}$  and  $B_{21}$  are unbounded skew self-adjoint operators. General properties of such problem are studied earlier in paper [4]. It has a unique strong solution for  $t \in [0; T]$  if the natural conditions for initial data and function  $f_1(t)$  are satisfied. As a corollary we obtain theorem on solvability of initial boundary value problem.

Corresponding spectral problem reduces to the operator pencil of S. Krein. The spectrum consists of  $\lambda = 0$ , two branches of positive eigenvalues with limit points  $+0$  and  $+\infty$ , and probably finite number of negative and complex eigenvalues. The systems of eigenelements corresponding to each of positive branches of eigenvalues form so called  $p$ -basis in Hilbert space  $H_1$  (probably with finite defect). The number of negative eigenvalues in problem is equal to number of negative eigenvalues of the operator of potential energy  $C_2$ .

This work was partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant 14.Z50.31.0037), and by the V.I. Vernadsky Crimean Federal University development program for 2015 – 2024 within the framework of grant support for young scientists.

Key words: physical pendulum, viscous fluid, auxiliary boundary value problems, strong solution, self-adjoint operator, operator pencil of S. Krein.

## ВВЕДЕНИЕ

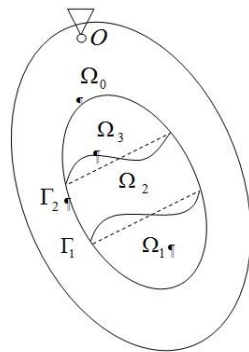
Данная работа посвящена изучению проблемы малых движений и нормальных колебаний физического маятника с полостью, целиком заполненной системой трёх несмешивающихся однородных вязких жидкостей. Данная линеаризованная постановка задачи является новой и осуществляется на основе предыдущих работ соавторов [1]–[6], где изучались задачи для сочленённых физических маятников, частично заполненных однородной несжимаемой жидкостью, а также сопутствующие дифференциально-операторные уравнения. Данные исследования являются продолжением работ Н. Д. Копачевского и Э. И. Батыра, см. [7]–[9], посвящённых проблемам малых движений сочлененных тел-гиростатов, целиком заполненных идеальной либо вязкой жидкостью. Отметим, что важные результаты в теории колебаний тел, соединенных сферическими или цилиндрическими шарнирами в произвольном порядке, получил П. В. Харламов. Близкие задачи исследовал в докторской диссертации Ю. Н. Кононов.

Исследованию малых колебаний маятника с полостью, полностью либо частично заполненной идеальной или вязкой жидкостью либо системой из несмешивающихся жидкостей, посвящено большое количество работ. В качестве основных можно отметить работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева, Г. А. Моисеева, Н. Д. Копачевского,

О. Б. Иевлевой, П. С. Краснощекова, Ф. Л. Черноусько, И. А. Луковского, М. Я. Барняка и др. Операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики вязкой жидкости изложен в монографиях Н. Д. Копачевского с соавторами [10], [11].

## 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ЗАКОН БАЛАНСА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Пусть имеется тело  $G$  массы  $m$ . Внутри этого тела имеется одна полость, полностью заполненная системой трёх несмешивающихся однородных несжимаемых вязких жидкостей. Пусть в состоянии равновесия жидкости с плотностями  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > 0$  занимают соответственно области  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , разделённые плоскими горизонтальными поверхностями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , перпендикулярными ускорению свободного падения  $\vec{g}$  и ограниченными твёрдыми стенками  $S_1, S_2, S_3$ . А в процессе малых колебаний жидкости относительно неподвижной точки закрепления  $O$  (сферический шарнир) занимают области  $\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)$ , см. рисунок.



Будем считать, что на данную гидромеханическую систему в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле  $\vec{g}$ , а в процессе малых движений — силовое поле  $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x)$ , где  $\vec{f}(t, x)$  — малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы введём неподвижную систему координат  $Ox^1x^2x^3$  с ортами  $\vec{e}^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), так, чтобы  $\vec{g} = -g\vec{e}^3$ . Кроме того, введём подвижную систему координат  $Ox_1^1x_1^2x_1^3$ , жёстко связанную с телом. Единичные векторы вдоль осей  $Ox_1^j$  обозначим через  $\vec{e}_1^j$ . Из условия равновесия следует, что в состоянии покоя центр масс маятника находится на оси  $Ox_1^3 = Ox^3$ .



Положение подвижной системы координат  $Ox_1^1x_1^2x_1^3$  относительно неподвижной системы  $Ox^1x^2x^3$  в процессе малых движений будем задавать малым вектором углового перемещения (см. [10], с. 130)  $\vec{\delta}(t) = \sum_{j=1}^3 \delta^j(t)\vec{e}_1^j$ . Тогда угловая скорость  $\vec{\omega}(t)$  тела будет равна  $d\vec{\delta}/dt$ , а угловое ускорение этого тела — величине  $d^2\vec{\delta}/dt^2 = d\vec{\omega}/dt$ .

Введем обозначение

$$\int_G (\dots) dm := \int_{\Omega_0} (\dots) \rho_0 d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} (\dots) \rho_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (\dots) \rho_2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} (\dots) \rho_3 d\Omega_3, \quad (1)$$

где  $\Omega_0 \subset G$  — область, занятая твердым телом плотности  $\rho_0$ . Обозначим через  $\vec{r}_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) — радиус-вектор, идущий из полюса  $O$  в любую точку области  $\Omega_k$ . Тогда векторы абсолютных скоростей  $\vec{v}$  произвольной точки тела связаны с малыми векторами относительных скоростей  $\vec{u}$  по формуле  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u}$ .

Будем считать, что момент силы трения в шарнире пропорционален угловой скорости  $\vec{\omega}$  с коэффициентом  $\alpha > 0$ . Вычисляя кинетический момент гидромеханической системы и сумму моментов всех сил, приложенных к телу  $G$ , после линеаризации в подвижной системе координат получаем уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O$ :

$$\left[ \rho_0 \int_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_0 \right) d\Omega_0 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{r}_k \times \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k \right) d\Omega_k \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{r}_k \times \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k + \alpha \vec{\omega} + gmlP_2\vec{\delta} - g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 -$$

$$- g(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 = \sum_{k=0}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{r}_k \times \vec{f}_k d\Omega_k =: \vec{M}(t), \quad (2)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках (обозначаемое далее  $\vec{J}\vec{\omega}$ ) является тензором инерции тела с жидкостями относительно точки  $O$ .

Здесь и далее через  $\zeta_j(x, t)$  ( $x \in \Gamma_k$ ) обозначены функции, описывающие малые отклонения свободных поверхностей  $\Gamma_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) вдоль нормалей, относительно плоских равновесных поверхностей  $\Gamma_j$ . Из условия сохранения объёмов жидкостей во время колебаний следует, что  $\int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0$ . Также использованы обозначения:

$l := |\vec{OC}|$  — расстояние от точки подвеса  $O$  до центра масс  $C$  тела  $G$ ,  $P_2\vec{\delta} := \sum_{j=1}^2 \delta^j \vec{e}_1^j$ ,  $\vec{f}_k := \vec{f}|_{\Omega_k}$ .

С учетом вращения около неподвижной точки, малые движения жидкостей описываются линеаризованными уравнениями Навье-Стокса в подвижной системе координат  $Ox_1^1x_1^2x_1^3$ :

$$\rho_k \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right) = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{u}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где  $p_k$  — малое поле динамических давлений,  $\mu_k > 0$  — заданные динамические вязкости жидкостей.

На твердых стенках считаем выполненными условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k).$$

На свободных границах раздела  $\Gamma_j$  выполнены кинематические условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_1^3; \quad \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 = 0; \quad \gamma_{11} \vec{u}_1 = \gamma_{12} \vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2, \quad \vec{n}_2 = \vec{e}_1^3; \quad \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 = 0; \quad \gamma_{22} \vec{u}_2 = \gamma_{23} \vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned}$$

Здесь и далее через  $\gamma_{jk} \vec{u}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ ) обозначен след поля скорости  $\vec{u}_k$  на  $\Gamma_j$ . Кроме того выполнены условия связи

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta} = P_2 \vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}^3 = \vec{\omega}^3.$$

Также на свободных границах выполнены динамические условия

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3 \tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned}$$

где  $\tau_{jk}(\vec{u}_{2l}) := \frac{\partial u_{2l}^k}{\partial x_{2l}^j} + \frac{\partial u_{2l}^j}{\partial x_{2l}^k}$ ,

$$\begin{aligned} [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2) \left[ \zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \right] \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] - [-p_3 + \mu_3 \tau_{33}(\vec{u}_3)] = -g(\rho_2 - \rho_3) \left[ \zeta_2 + \theta_2((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \right] \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned}$$

Отметим, что в данных граничных условиях все слагаемые являются элементами соответствующих подпространств

$$L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \operatorname{sp} \{1_{\Gamma_j}\}.$$

Через  $\theta_j$  обозначены ортопроекторы из  $L_2(\Gamma_j)$  на  $L_{2,\Gamma_j}$ . С учётом сохранения объёмов жидкостей  $\zeta_j \in L_{2,\Gamma_j}$ , отсюда возникает естественное нормировочное условие для давлений  $p_j \in H^1(\Omega_j) \cap L_{2,\Gamma_j} := H_{\Gamma_j}^1(\Omega_j)$ .

Для полной постановки задачи необходимо также задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \\ \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать, что поставленная задача имеет классическое решение, т. е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Выведем закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

Для этого обе части уравнения (2) умножим скалярно на  $\vec{\omega}$ , а обе части уравнений (3) умножим скалярно соответственно на  $\vec{u}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), а затем проинтегрируем по областям  $\Omega_k$ . Левые и правые части полученных четырех соотношений сложим.

С учётом первой формулы Грина для векторного оператора Лапласа и соленоидальных векторных полей в областях  $\Omega_k$  с липшицевыми границами  $\partial\Omega_k = \Gamma_k \cup S_k$  (см. [10], с. 115, а также [12], с. 62):

$$\int_{\Omega_k} \vec{v}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k = \mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) - \int_{\Gamma_k} \sum_{j=1}^3 v_k^j |_{\Gamma_k} (\tau_{j3}(\mu_k \vec{u}_k) - p_k \delta_{j3}) d\Gamma_k, \\ \vec{v}_k, \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k), \quad (5)$$

где билинейная форма

$$E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \left[ \sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\vec{v}_k) \tau_{jk}(\vec{u}_k) \right] d\Omega_k, \quad \tau_{jl}(\vec{v}_k) := \frac{\partial v_k^j}{\partial x^l} + \frac{\partial v_k^l}{\partial x^j}, \quad (6)$$

определяет скорость диссипации энергии в жидкости  $\Omega_k$  и задаёт скалярное произведение в пространстве

$$\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) := \{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0, \vec{u}_k = \vec{0} \text{ (на } S_k) \},$$

после преобразований получаем закон баланса полной энергии в дифференциальной форме

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega} \times \vec{r}_0|^2 d\Omega_0 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{\omega} \times \vec{r}_k + \vec{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\left\{(\rho_1 - \rho_2)\left[\int_{\Gamma_1} |\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} |\theta_1((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_1\right] + \right. \\ & \left. + (\rho_2 - \rho_3)\left[\int_{\Gamma_2} |\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} |\theta_2((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_2\right] + ml|P_2\vec{\delta}|^2\right\} = \\ & = -\left\{\alpha|\vec{\omega}|^2 + \mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + \mu_2 E_1(\vec{u}_2, \vec{u}_2) + \mu_3 E_1(\vec{u}_3, \vec{u}_3)\right\} + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k d\Omega_k + \vec{M}(t) \cdot \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в левой части, стоящее в фигурных скобках, есть удвоенная кинетическая энергия системы. Второе слагаемое слева в фигурных скобках — потенциальная энергия гидромеханической системы, отсчитываемая от состояния покоя. Справа в фигурных скобках имеем мощность сил трения, остальными слагаемыми являются мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным силам  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  соответственно, а также мощность момента  $\vec{M}$ , который выражается через эти силы.

## 2. ВЫБОР ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть  $\vec{u} := \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3$  — набор полей скоростей в жидкостях  $\Omega_k$ . Будем считать, что

$$\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k d\Omega_k.$$

Введём обозначение

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k := \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k.$$

С учётом условий прилипания и соленоидальности полей скоростей жидкостей имеем

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 (\Omega_k), \gamma_{n,k}\vec{u}_k = 0 (S_k) \right\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Имеет место разложение (см. [10], с. 106)

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k),$$

где  $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k) := \{\nabla\psi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \varphi_k = 0 \text{ (на } \Gamma)\}$  (при этом считаем, что  $\Gamma = \Gamma_1$  ( $k = 1$ )),  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  ( $k = 2$ )),  $\Gamma = \Gamma_2$  ( $k = 3$ )).

Введём вспомогательные гильбертовы пространства

$$\begin{aligned} \vec{J}_{0,S}(\Omega) &:= \left\{ \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 : \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \right\}, \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) &:= \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_2}(\Omega_3), \end{aligned}$$

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k), \quad (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k).$$

В силу неравенства Корна билинейная форма  $E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k)$  определяет в пространстве  $\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$  квадрат нормы, эквивалентной стандартной норме пространства  $\vec{H}_0^1(\Omega)$ . Отсюда из теорем вложения С. Л. Соболева следует (см. [10], с. 113) компактное вложение  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \subset \rightarrow \subset \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ . Данное вложение позволяет ввести шкалу гильбертовых пространств с порождающим оператором  $A_k : \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \rightarrow (\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k))^*$ , для которого выполнены тождества

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)} = (A_k^{1/2} \vec{u}_k, A_k^{1/2} \vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \vec{u}_k, A_k \vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}.$$

Здесь последнее выражение является значением функционала, определяемого элементом  $A_k \vec{v}_k \in (\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k))^*$ , на элементе  $\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ .

Из вышесказанного несложно заключить, что гильбертовы пространства  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  и  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  также образуют гильбертову пару с порождающим оператором  $A := \text{diag}(\mu_k A_k)_{k=1}^3$ , для которого выполнены тождества

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)} &= (A^{1/2} \vec{u}, A^{1/2} \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^3 \mu_k (A_k^{1/2} \vec{u}_k, A_k^{1/2} \vec{v}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \\ &= \langle \vec{u}, A \vec{v} \rangle_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{u}_k, \mu_k A_k \vec{v}_k \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Введём теперь основные гильбертовы пространства:

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \left\{ \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = \gamma_{n,1} \vec{u}_2 \ (\Gamma_1), \ \gamma_{n,2} \vec{u}_2 = \gamma_{n,2} \vec{u}_3 \ (\Gamma_2) \right\}.$$

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) := \left\{ \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_{11} \vec{u}_1 = \gamma_{12} \vec{u}_2 \ (\Gamma_1), \ \gamma_{22} \vec{u}_2 = \gamma_{23} \vec{u}_3 \ (\Gamma_2) \right\}.$$

Будем искать обобщенные решения начально-краевой задачи среди троек полей-скоростей  $\vec{u} := \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ . Можно доказать, что пара пространств  $(\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$  является гильбертовой, с порождающим оператором  $\tilde{A}$ , который является сужением оператора  $A = \text{diag}(\mu A_k)_{k=1}^3$  с пространства  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  на подпространство  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ , при этом выполнены тождества

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} &= (\tilde{A}^{1/2} \vec{u}, \tilde{A}^{1/2} \vec{v})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) = \langle \vec{u}, \tilde{A} \vec{v} \rangle_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \\ &\quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (7) \end{aligned}$$

В работе [13] применительно к проблеме малых движений трёх вязкоупругих жидкостей в замкнутом сосуде использованы аналогичные гильбертовы пространства и выведены явные формулы, описывающие действия ортопроекторов

$$P_0 : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad P_1 : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega).$$

Будем считать их далее заданными.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Перепишем уравнения движения жидкостей (3) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k + \rho_k^{-1} \nabla p_k - \mu_k \rho_k^{-1} \Delta \vec{u}_k = \vec{f}_k \quad (\text{в } \Omega_k).$$

Подействуем на обе части данных уравнений соответствующими ортопроекторами  $P_{0,S_k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \rightarrow \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Получаем соотношение для троек

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right\}_{k=1}^3 + \left\{ P_{0,S_k} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k \right) \right\}_{k=1}^3 + \left\{ P_{0,S_k} \rho_k^{-1} \nabla p_k \right\}_{k=1}^3 - \left\{ \mu_k \rho_k^{-1} P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k \right\}_{k=1}^3 = \\ = \left\{ P_{0,S_k} \vec{f}_k \right\}_{k=1}^3. \end{aligned}$$

Обозначим  $P_{0,S_k} \rho_k^{-1} \nabla p_k =: \rho_k^{-1} \nabla \tilde{p}_k$ . Действуя на обе части полученного соотношения ортопроектором  $P_0$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} + P_0 \left\{ P_{0,S_k} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k \right) \right\}_{k=1}^3 + P_0 \left\{ \rho_k^{-1} \nabla \tilde{p}_k \right\}_{k=1}^3 - P_0 \left\{ \mu_k \rho_k^{-1} P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k \right\}_{k=1}^3 = \\ = P_0 \left\{ P_{0,S_k} \vec{f}_k \right\}_{k=1}^3 =: P_0 \left\{ \vec{f}_k \right\}_{k=1}^3. \end{aligned}$$

Будем считать, что  $P_0 \left\{ \rho_k^{-1} \nabla \tilde{p}_k \right\}_{k=1}^3 = \left\{ \rho_k^{-1} \nabla p_{1k} \right\}_{k=1}^3 + \left\{ \rho_k^{-1} \nabla p_{2k} \right\}_{k=1}^3$ , где наборы  $\left\{ \vec{u}_k \right\}_{k=1}^3$ ,  $\left\{ \rho_k^{-1} \nabla p_{1k} \right\}_{k=1}^3$  являются решениями *первой вспомогательной задачи*

$$\begin{aligned} - P_0 \left\{ \mu_k \rho_k^{-1} P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k \right\}_{k=1}^3 + \left\{ \rho_k^{-1} \nabla p_{1k} \right\}_{k=1}^3 = \\ = - \frac{d\vec{u}}{dt} - P_0 \left\{ P_{0,S_k} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k \right) \right\}_{k=1}^3 - \left\{ \rho_k^{-1} \nabla p_{2k} \right\}_{k=1}^3 + P_0 \left\{ \vec{f}_k \right\}_{k=1}^3, \quad (8) \\ \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \end{aligned}$$

$$\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3 \tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\begin{aligned} [-p_{11} + \mu_1 \tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_{12} + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [-p_{12} + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] - [-p_{13} + \mu_3 \tau_{33}(\vec{u}_3)] &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned}$$

а второй набор  $\{\rho_k^{-1} \nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$  является решением второй вспомогательной задачи для потенциалов (задачи Стеклова):

$$-\Delta p_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$\rho_1^{-1} \frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \rho_1^{-1} \frac{\partial p_{22}}{\partial n} =: \xi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \rho_2^{-1} \frac{\partial p_{22}}{\partial n} = \rho_2^{-1} \frac{\partial p_{23}}{\partial n} =: \xi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad (10)$$

$$p_{21} - p_{22} = (\rho_1 - \rho_2) \hat{\zeta}_1 := g(\rho_1 - \rho_2) \left[ \zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \right] \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad (11)$$

$$p_{22} - p_{23} = (\rho_2 - \rho_3) \hat{\zeta}_2 := g(\rho_2 - \rho_3) \left[ \zeta_2 + \theta_2((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \right] \quad (\text{на } \Gamma_2). \quad (12)$$

**3.1. Преобразование кинематических граничных условий.** Рассмотрим сначала вторую вспомогательную задачу. Пусть элементы  $\xi_k$  известны, тогда согласно постановке они должны принадлежать классам (см., например [14], с. 95)

$$\tilde{H}_{\Gamma_j}^{-1/2} := (H_{\Gamma_j}^{1/2})^* := (H^{1/2}(\Gamma_j) \cap L_{2,\Gamma_j})^*, \quad j = 1, 2.$$

Тогда, рассматривая три задачи Неймана относительно неизвестных  $p_{ij}$ , с учетом обобщённой формулы Грина для оператора Лапласа (см., например, [15], с. 78) получаем, что каждая из этих задач имеет слабое решение, которое имеет вид

$$p_{21}|_{\Omega_1} = \rho_1 V_{11} \xi_1 + c_1, \quad p_{23}|_{\Omega_3} = -\rho_3 V_{32} \xi_2 + c_2, \quad p_{22}|_{\Omega_2} = \rho_2 V_{22} \xi_2 - \rho_2 V_{21} \xi_1. \quad (13)$$

Здесь операторы  $V_{ij} : \tilde{H}_{\Gamma_j}^{-1/2} \rightarrow H^1(\Omega_i)$  являются ограниченными, сопряжёнными к операторам следа  $\gamma_{ij}$ , а  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные.

Отсюда граничные условия (11)–(12) можно переписать в виде операторного соотношения

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \gamma_{11} V_{11} + \rho_2 \gamma_{12} V_{21} & -\rho_2 \theta_1 \gamma_{12} V_{22} \\ -\rho_2 \theta_2 \gamma_{22} V_{21} & \rho_2 \gamma_{22} V_{22} + \rho_3 \gamma_{23} V_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2) \hat{\zeta}_1 \\ (\rho_2 - \rho_3) \hat{\zeta}_2 \end{pmatrix}.$$

Операторная матрица слева является положительным оператором (оператором Стеклова), действующим из  $\tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$  на сопряжённое пространство  $H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$ . Отсюда получаем, что существует ограниченная обратная к ней операторная матрица, зная которую, неизвестные поля давлений  $p_{2k}$  можно найти по формулам (13).

Опираясь на вышесказанное, существует корректно заданный линейный ограниченный оператор  $G$ , который ставит в соответствие паре функций  $\hat{\zeta} := \{\hat{\zeta}_j\}_{j=1}^2$

решение второй вспомогательной задачи  $\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$  :

$$G\hat{\zeta} := \{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 : H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2} \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega).$$

Это решение имеет вид

$$\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 = gG\{[\zeta_j + \theta_j((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)]\}_{j=1}^2. \quad (14)$$

Введём ещё оператор

$$\hat{\gamma}_n \vec{u} := \{\gamma_{n,1}\vec{u}_1; \gamma_{n,2}\vec{u}_2\}, \quad \hat{\gamma}_n : \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \rightarrow \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}.$$

**Лемма 1.** *Имеет место соотношение  $G^* = \{(\rho_j - \rho_{j+1})\}_{j=1}^2 \hat{\gamma}_n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\hat{\zeta} = \{\hat{\zeta}_j\}_{j=1}^2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$ ,  $G\hat{\zeta} := \{\rho_k^{-1}\nabla \phi_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ ,  $\vec{\eta} = \{\vec{\eta}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ . Тогда с учётом обобщённой формулы Гаусса-Остроградского для негладких полей (см, например, [12], с. 13)

$$(\nabla \phi_k, \vec{\eta}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} + \langle \phi_k, \operatorname{div} \vec{\eta}_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} = \langle \gamma \phi_k, \vec{\eta}_k \cdot \vec{n} \rangle_{L_2(\partial\Omega_k)}, \quad \forall \vec{\eta}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k), \quad \phi_k \in H^1(\Omega_k),$$

где  $\gamma$  — это след элемента  $\phi_k$  на всю границу  $\partial\Omega_k$  области  $\Omega_k$ , получаем, что для элементов  $\vec{\eta}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  выполнено равенство

$$\begin{aligned} (G\hat{\zeta}, \vec{\eta})_{\vec{L}_2(\Omega)} &= \rho_1 \int_{\Omega_1} \rho_1^{-1} \nabla \phi_1 \cdot \vec{\eta}_1 \, d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \rho_2^{-1} \nabla \phi_2 \cdot \vec{\eta}_2 \, d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} \rho_3^{-1} \nabla \phi_3 \cdot \vec{\eta}_3 \, d\Omega_3 = \\ &= [\langle \gamma_{11}\phi_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 \rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle \gamma_{12}\phi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma_1)}] + [\langle \gamma_{22}\phi_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} - \langle \gamma_{23}\phi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_3 \rangle_{L_2(\Gamma_2)}] = \\ &= \langle \gamma_{11}\phi_1 - \gamma_{12}\phi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + \langle \gamma_{22}\phi_2 - \gamma_{23}\phi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \langle \hat{\zeta}_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + (\rho_2 - \rho_3) \langle \hat{\zeta}_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \\ &= \langle \hat{\zeta}, (\rho_1 - \rho_2)\gamma_{n,1}\vec{\eta}_1 + (\rho_2 - \rho_3)\gamma_{n,2}\vec{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma)} =: \langle \hat{\zeta}, G^*\vec{\eta} \rangle_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

□

Введём оператор потенциальной энергии

$$C_2 z_2 = \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2)[\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)] \\ (\rho_2 - \rho_3)[\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)] \\ -(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 \, d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 \, d\Gamma_2 + mlP_2\vec{\delta} \end{pmatrix} \quad (15)$$

действующий в гильбертовом пространстве  $H_2 := L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2$  на элементы  $z_2 = (\zeta_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta})^\tau$ .

**Лемма 2.** *При выполнении условия*

$$\Delta_2 := \det \begin{pmatrix} ml - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{22}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{22}^{(2)}] & (\rho_1 - \rho_2)\beta_{21}^1 + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{21}^{(2)} \\ (\rho_1 - \rho_2)\beta_{12}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{12}^{(2)} & ml - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{11}^{(2)}] \end{pmatrix} \neq 0,$$



где  $\beta_{jl}^{(k)} := \int_{\Gamma_k} x_k^j \theta_k x_k^l d\Gamma_k$  ( $j, l = 1, 2; k = 1, 2$ ), система граничных условий

$$\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}P_2\delta - P_2\vec{\omega} = \vec{0}$$

эквивалентна системе условий

$$\begin{aligned} &(\rho_1 - \rho_2) \left\{ \left[ \frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1 \right] + \left[ \frac{d}{dt}\theta_1[(P_2\delta \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3] - \theta_1[(P_2\omega \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3] \right] \right\} = 0, \\ &(\rho_2 - \rho_3) \left\{ \left[ \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \right] + \left[ \frac{d}{dt}\theta_2[(P_2\delta \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3] - \theta_2[(P_2\omega \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3] \right] \right\} = 0, \\ &-(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \left[ \frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1 \right] d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \left[ \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \right] d\Gamma_2 + \\ &\quad + ml \left( \frac{d}{dt}P_2\delta - P_2\vec{\omega} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* В правую сторону импликация является очевидной, проверим её в левую сторону. Для этого обозначим

$$\varphi_1 := \frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1, \quad \varphi_2 := \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{\psi} := \frac{d}{dt}P_2\delta - P_2\vec{\omega},$$

тогда получаем

$$\begin{aligned} &\varphi_1 + \theta_1[(\vec{\psi} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3] = 0, \quad \varphi_2 + \theta_2[(\vec{\psi} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3] = 0, \\ &-(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \varphi_1 d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \varphi_2 d\Gamma_2 + ml\vec{\psi} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &ml\vec{\psi} + (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \left[ \theta_1[(\vec{\psi} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3] \right] d\Gamma_1 + \\ &\quad + (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \left[ \theta_2[(\vec{\psi} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3] \right] d\Gamma_2 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Если  $\vec{\psi} = \sum_{j=1}^2 \psi_j \vec{e}_j$ , то с учетом равенств  $\vec{r}_j \times \vec{e}_1^3 = x_j^2 \vec{e}_1 - x_j^1 \vec{e}_2$ , получаем

$$\theta_1[(\vec{\psi} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3] = \psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1), \quad \theta_2[(\vec{\psi} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3] = \psi_1(\theta_2 x_2^2) - \psi_2(\theta_2 x_2^1).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &ml\psi_1 - (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} x_1^2 [\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1)] d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} x_2^2 [\psi_1(\theta_2 x_2^2) - \psi_2(\theta_2 x_2^1)] d\Gamma_2 = \\ &= ml\psi_1 - (\rho_1 - \rho_2) [\psi_1 \beta_{22}^{(1)} - \psi_2 \beta_{21}^{(1)}] - (\rho_2 - \rho_3) [\psi_1 \beta_{22}^{(2)} - \psi_2 \beta_{21}^{(2)}] = \end{aligned}$$

$$= \psi_1 \left[ ml - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{22}^{(1)} - (\rho_2 - \rho_3)\beta_{22}^{(2)} \right] + \psi_2 \left[ (\rho_1 - \rho_2)\beta_{21}^{(1)} - (\rho_2 - \rho_3)\beta_{21}^{(2)} \right] = 0.$$

Аналогично из соотношения

$$ml\psi_2 + (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} x_1^1 [\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1)] d\Gamma_1 +$$

$$+ (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} x_2^1 [\psi_1(\theta_2 x_2^2) - \psi_2(\theta_2 x_2^1)] d\Gamma_2 = 0$$

получаем второе уравнение для  $\psi_1, \psi_2$  :

$$\psi_1 \left[ (\rho_1 - \rho_2)\beta_{12}^{(1)} + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{12}^{(2)} \right] + \psi_2 \left[ ml - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^{(1)} - (\rho_2 - \rho_3)\beta_{11}^{(2)} \right] = 0.$$

Система будет иметь лишь нулевые решения, если ее определитель  $\Delta_2 \neq 0$ . В этом случае, очевидно,  $\vec{\psi} = \vec{0}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .  $\square$

**Лемма 3.** Оператор потенциальной энергии (15) обладает свойством:  $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ .

*Доказательство.*

$$(C_2 z_2, z_2)_{H_2} =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} [\zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)] \bar{\zeta}_1 d\Gamma_1 + (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} [\zeta_2 + \theta_2((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)] \bar{\zeta}_2 d\Gamma_2 -$$

$$- (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2 \vec{\delta}} - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 \cdot \overline{P_2 \vec{\delta}} + ml |P_2 \vec{\delta}|^2 =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} \left[ |\zeta_1|^2 + 2\operatorname{Re} \left( \bar{\zeta}_1 \theta_1 ((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \right) \right] d\Gamma_1 +$$

$$+ (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} \left[ |\zeta_2|^2 + 2\operatorname{Re} \left( \bar{\zeta}_2 \theta_2 ((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \right) \right] d\Gamma_2 + ml |P_2 \vec{\delta}|^2 =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \left[ \int_{\Gamma_1} |\zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} |\theta_1((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_1 \right] +$$

$$(\rho_2 - \rho_3) \left[ \int_{\Gamma_2} |\zeta_2 + \theta_2((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} |\theta_2((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_2 \right] + ml |P_2 \vec{\delta}|^2.$$

$\square$

Таким образом эквивалентные кинематические условия приводят к операторному соотношению

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \tag{16}$$

где оператор обмена энергиями

$$B_{21}z_1 := \begin{pmatrix} -(\rho_1 - \rho_2)[\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + \theta_1((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)] \\ -(\rho_2 - \rho_3)[\gamma_{n,2}\vec{u}_2 + \theta_2((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3)] \\ \sum_{j=1}^2 (\rho_j - \rho_{j+1}) \int_{\Gamma_j} (\vec{e}_j^3 \times \vec{r}_j) \gamma_{n,j} \vec{u}_j d\Gamma_j - mlP_2\vec{\omega} \end{pmatrix} \tag{17}$$

является линейным оператором, действующим на элементы  $z_1 = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3; \vec{\omega})^T$  из пространства  $H_1 := \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$  в  $H_2$ .

**3.2. Постановка задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения.** Перейдём теперь к рассмотрению первой вспомогательной задачи. Считая, что правая часть (8) является элементом пространства  $C([0; T]; \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ , найдём оператор, соответствующий действию левой части уравнения (8) на неизвестные элементы  $\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  с соответствующими краевыми условиями. Обозначим его  $\mathbf{A}$ . С помощью абстрактной формулы Грина для оператора Стокса (см., например, [16], с. 81) для любого элемента  $\vec{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ , используя граничные условия для  $\vec{u}_k$  и  $\vec{v}_k$ , можно установить, что

$$\langle \vec{v}, \mathbf{A}\vec{u} \rangle_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{v}_k, \mu_k P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k + \nabla p_{1k} \rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega)} = \sum_{k=1}^3 E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = (\vec{v}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)},$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega).$$

С другой стороны, согласно формуле (7) аналогичное тождество справедливо для оператора  $\tilde{A}$  гильбертовой пары  $(\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ . Отсюда  $\mathbf{A} = \tilde{A}$ . Отметим, что действие оператора аналогичной гильбертовой пары в случае двух примыкающих областей установлено в статье [17], с. 37.

Заменяя левую часть (8) на  $\tilde{A}\vec{u}$ , и используя формулу для решений второй вспомогательной задачи (14), первую вспомогательную задачу можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \tilde{A}\vec{u} + P_0 \left\{ P_{0,S_k} \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_k \right) \right\}_{k=1}^3 + gG \{ [\zeta_j + \theta_j((P_2\vec{\delta} \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)] \}_{j=1}^2 = P_0 \{ \vec{f}_k \}_{k=1}^3.$$

Вместе с уравнением движения маятника (см. (2))

$$\vec{J} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{r}_k \times \frac{d\vec{u}_k}{dt} d\Omega_k + \alpha\vec{\omega} + gmlP_2\vec{\delta} - \sum_{j=1}^2 (\rho_j - \rho_{j+1}) g \int_{\Gamma_j} (\vec{e}_j^3 \times \vec{r}_j) \zeta_j d\Gamma_j = \vec{M}(t),$$

оба соотношения можно кратко записать в виде операторного уравнения

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g B_{12} z_2 = f_1(t),$$

где  $f_1(t) := \{P_0 \{f_k\}_{k=1}^3, \vec{M}(t)\}^\tau \in H_1$ ,

$$C_1 z_1 := \begin{pmatrix} \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 + P_0 \{P_{0,S_k}(\omega \times \vec{r}_k)\}_{k=1}^3 \\ \vec{J}\vec{\omega} + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{r}_k \times \vec{u}_k d\Omega_k \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$B_{12} z_2 := \begin{pmatrix} G\{[\zeta_j + \theta_j((P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)]\}_{j=1}^2 \\ -\sum_{j=1}^2 (\rho_j - \rho_{j+1}) \int_{\Gamma_j} (\vec{e}_j^3 \times \vec{r}_j) \zeta_j d\Gamma_j + ml P_2 \vec{\delta} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

**Лемма 4.** *Оператор кинетической энергии обладает свойствами:  $0 \ll C_1 = C_1^* \in \mathcal{L}(H_1)$ .*

*Доказательство.* Очевидно,  $C_1$  является ограниченным оператором в  $H_1$ . В силу равенства  $(\vec{J}\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = \sum_{k=0}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{\omega} \times \vec{r}_k|^2 d\Omega_k$  получаем

$$\begin{aligned} (C_1 z_1, z_1) &= \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} (P_{0,S_k}(\vec{\omega} \times \vec{r}_k)) \cdot \vec{u}_k d\Omega_k + \\ &\quad + (\vec{J}\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times \vec{u}_k) d\Omega_k \cdot \vec{\omega} = \\ &= \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega} \times \vec{r}_0|^2 d\Omega_0 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} [|\vec{u}_k|^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \cdot \vec{u}_k + (\vec{r}_k \times \vec{u}_k) \cdot \vec{\omega} + |\vec{\omega} \times \vec{r}_k|^2] d\Omega_k = \\ &= \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega} \times \vec{r}_0|^2 d\Omega_0 + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{\omega} \times \vec{r}_k + \vec{u}_k|^2 d\Omega_k \geq 0. \end{aligned}$$

Так как  $(C_1 z_1; z_1) = 0$  только лишь при  $\vec{\omega} = \vec{0}$ ,  $\vec{u}_k = \vec{0}$  ( $k = 1, 2, 3$ ), то  $C_1 > 0$ . В силу разложения  $C_1 = C_{10} + C_{11}$ , где  $C_{12} = \text{diag}(\{I_k\}_{k=1}^3; \vec{J}) \gg 0$  получаем, что  $C_1 \gg 0$ .  $\square$

В силу того, что оператор  $\alpha I$  действует в конечномерном пространстве  $\mathbb{C}^3$ , а оператор  $\tilde{A}$  гильбертовой пары  $(\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$  является положительно определённым в  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ , справедливо следующее утверждение.

**Лемма 5.** *Оператор диссипации энергии  $A_1$  является неограниченным положительно определённым оператором в  $H_1$ , при этом  $A_1^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ .*

**Лемма 6.** *Операторы обмена энергиями (17) и (18) являются неограниченными кососамосопряжёнными, т. е.  $B_{21}^* = -B_{12}$ .*

*Доказательство.* Проведём доказательство поэлементно.

1. Для элементов  $z_1 = (\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; 0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21})$ ,  $z_2 = (\{\zeta_j\}_{j=1}^2; 0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12})$  в силу определения оператора  $G$ , определяющего решения  $\{\rho_k^{-1} \nabla \phi_k\}_{k=1}^3$  второй вспомогательной задачи (9)–(12) на элементах  $\{\zeta_j\}_{j=1}^2$ , получаем

$$\begin{aligned} (z_1, B_{12}z_2)_{H_1} &= (\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, G\{\zeta_j\}_{j=1}^2)_{\bar{L}_2(\Omega)} = \\ &= \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot \rho_1^{-1} \overline{\nabla \phi_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{u}_2 \cdot \rho_2^{-1} \overline{\nabla \phi_2} d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} \vec{u}_3 \cdot \rho_3^{-1} \overline{\nabla \phi_3} d\Omega_3 = \\ &= [\langle \gamma_{n,1} \vec{u}_1, \gamma_{11} \phi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle \gamma_{n,1} \vec{u}_2, \gamma_{12} \phi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_1)}] + [\langle \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \gamma_{22} \phi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} - \langle \gamma_{n,2} \vec{u}_3, \gamma_{23} \phi_3 \rangle_{L_2(\Gamma_2)}] = \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \langle \gamma_{n,1} \vec{u}_1, \zeta_1 \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + (\rho_2 - \rho_3) \langle \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \zeta_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = (-B_{21}z_1, z_2)_{H_2}. \end{aligned}$$

2. Для элементов  $z_1 = (\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; 0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21})$ ,  $z_2 = (0; P_2\delta)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12})$  решения  $\{\rho_k^{-1} \nabla \psi_k\}_{k=1}^3$  второй вспомогательной задачи (9)–(12) на элементах  $\{\theta_j((P_2\delta \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)\}_{j=1}^2$  аналогично предыдущему пункту приводят к тождеству

$$\begin{aligned} (z_1, B_{12}z_2)_{H_1} &= (\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, G\{\theta_j((P_2\delta \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)\}_{j=1}^2)_{\bar{L}_2(\Omega)} = \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \langle \gamma_{n,1} \vec{u}_1, \theta_1((P_2\delta \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \rangle_{L_2(\Gamma_1)} + (\rho_2 - \rho_3) \langle \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \theta_2((P_2\delta \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \\ &= -(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \gamma_{n,1} \vec{u}_1 d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2\delta} - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \gamma_{n,2} \vec{u}_2 d\Gamma_2 \cdot \overline{P_2\delta} = (-B_{21}z_1, z_2)_{H_2}. \end{aligned}$$

3. Для элементов  $z_1 = (\vec{0}; \vec{\omega})^\tau \in \mathcal{D}(B_{21})$ ,  $z_2 = (\{\zeta_j\}_{j=1}^2; 0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12})$  имеем

$$\begin{aligned} B_{21}z_1 &= \begin{pmatrix} -(\rho_1 - \rho_2)\theta_1((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \\ -(\rho_2 - \rho_3)\theta_2((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \\ -mlP_2\vec{\omega} \end{pmatrix}, \\ B_{12}z_2 &= \begin{pmatrix} G\{\zeta_j\}_{j=1}^2 \\ -(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} (z_1, B_{12}z_2)_{H_1} &= \vec{\omega} \cdot [ -(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 ] = \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} ((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \zeta_1 d\Gamma_1 + (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} ((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \zeta_2 d\Gamma_2. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$(-B_{21}z_1, z_2)_{H_2} = (\{(\rho_j - \rho_{j+1})\theta_j((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_1^3)\}_{j=1}^2, \{\zeta_j\}_{j=1}^2)_{L_2, \Gamma_1 \oplus L_2, \Gamma_2} =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} \theta_1((P_2\omega \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \overline{\zeta_1} d\Gamma_1 + (\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} \theta_2((P_2\omega \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \overline{\zeta_2} d\Gamma_2 = (z_1, B_{12}z_2)_{H_1}.$$

4. Для элементов  $z_1 = (\vec{0}; \vec{\omega})^\tau \in \mathcal{D}(B_{21})$ ,  $z_2 = (0; P_2\vec{\delta})^\tau \in \mathcal{D}(B_{12})$  имеем

$$B_{21}z_1 = \begin{pmatrix} -(\rho_1 - \rho_2)\theta_1((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \\ -(\rho_2 - \rho_3)\theta_2((P_2\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_1^3) \\ -mlP_2\vec{\omega} \end{pmatrix}, \quad B_{12}z_2 = \begin{pmatrix} G\{\zeta_j\}_{j=1}^2 \\ mlP_2\vec{\delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$(z_1, B_{12}z_2)_{H_1} = \vec{\omega} \cdot \overline{mlP_2\vec{\delta}} = mlP_2\vec{\omega} \cdot \overline{P_2\vec{\delta}} = (-B_{21}z_1, z_2)_{H_2}.$$

□

Итогом проделанных выше рассуждений является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Исходная начально-краевая задача (2)–(4) равносильна задаче Коши*

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \quad (19)$$

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \quad (20)$$

в гильбертовом пространстве  $H = H_1 \oplus H_2$ , где  $z_1 = (\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; \vec{\omega})^\tau$ ,  $z_2 = (\{\zeta_j\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta})^\tau$ ,  $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ ,  $\vec{\omega} \in \mathbb{C}^3$ ,  $\{\zeta_j\}_{j=1}^2 \in L_{2,\Gamma} := L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$ ,  $P_2\vec{\delta} \in \mathbb{C}^2$ ,  $H_1 = J_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$ ,  $H_2 = L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2$ .

При этом оператор кинетической энергии  $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ , оператор потенциальной энергии  $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ , оператор диссипации энергии  $0 \ll A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset H_1 \rightarrow H_1$ , оператор обмена энергиями  $B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = -B^*$ .

#### 4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Перепишем задачу Коши (19)–(20) в виде одного уравнения

$$C \frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) := (f_1(t); 0)^\tau, \quad (21)$$

в гильбертовом пространстве  $H = H_1 \oplus H_2$ , где

$$C = \text{diag}(C_1; gC_2), \quad A = \text{diag}(A_1; 0), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}). \quad (22)$$

**Определение 1.** Будем говорить, что задача (21) имеет сильное решение  $z(t) = \{z_1(t), z_2(t)\}^\tau$  на отрезке  $[0, T]$ , если выполнены следующие условия.

1°. Функция

$$z(t) \in C([0, T]); \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \cap C^1([0, T]; \mathcal{H}),$$

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}).$$

2°. При любом  $t \in [0, T]$  выполнено уравнение (21), где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; \mathcal{H})$ .

3°. Выполнено начальное условие (21).

Отметим, что задача Коши (19)–(20) с аналогичными свойствами операторных коэффициентов изучалась ранее в работе [4], где рассматривалась задача о малых движениях системы двух сочленённых тел с полостями, частично заполненными вязкими жидкостями. В частности, на с. 763 доказано следующее утверждение

**Теорема 2.** Пусть в задаче (19)–(20) выполнены следующие условия

$$f(t) = (f_1(t); 0)^\tau \in C^\beta([0, T]; \mathcal{H}) \quad (0 < \beta \leq 1),$$

$$z^0 = (z_1^0; z_2^0), \quad z_1^0 \in \mathcal{D}(A_1), \quad z_2^0 \in \mathcal{D}(B_{12}). \quad (23)$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное (в смысле определения 1) решение на отрезке  $[0, T]$ .

Опираясь на теорему 2 можно доказать утверждение о корректной разрешимости исходной начально-краевой задачи (2)–(4).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2, т. е.

$$f_1(t) := \{P_0\{\vec{f}_k\}_{k=1}^3; \vec{M}(t)\}^\tau \in C^\beta([0, T]; \mathcal{H}_1), \quad 0 < \beta \leq 1,$$

$$z_1^0 = (\vec{u}_1^0; \vec{u}_2^0; \vec{u}_3^0; \vec{\omega}^0)^\tau \in \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathbb{C}^3, \quad (24)$$

$$z_2^0 = (\zeta_1^0; \zeta_2^0; P_2\vec{\delta}^0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) = (H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2. \quad (25)$$

Тогда исходная начально-краевая задача (2)–(4) имеет единственное решение на отрезке  $[0, T]$ , которое обладает следующими свойствами.

1°. Функции

$$z_1(t) = (\vec{u}_1(t, x); \vec{u}_2(t, x); \vec{u}_3(t, x); \vec{\omega}(t))^\tau \in$$

$$C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3) \cap C([0, T]; \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathbb{C}^3), \quad (26)$$

$$z_2(t) = (\zeta_1(t, x); \zeta_2(t, x); P_2\vec{\delta}(t))^\tau \in$$

$$C^1([0, T]; L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2) \cap C([0, T]; (H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2). \quad (27)$$

2°. При любом  $t \in [0, T]$  выполнены уравнения (3) движения вязких жидкостей в полостях, где все слагаемые являются элементами  $C([0, T]; \vec{J}_{0, S_k}(\Omega_k))$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

3°. При любом  $t \in [0, T]$  выполнено уравнение (2) движения маятника, где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; \mathbb{C}^3)$ .

4°. При любом  $t \in [0, T]$  выполнены кинематические и динамические граничные условия, где слагаемые — элементы из  $C([0, T]; H_{\Gamma_k}^{1/2})$ , а также кинематические условия для угловых скоростей и угловых перемещений.

5°. Выполнены начальные условия (4).

## 5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ

Сформулируем еще без доказательства спектральные свойства задачи (19)–(20), полученные ранее в работе [4], см. также [1] и [5].

Рассмотрим решения однородной задачи (19)–(20), зависящие от  $t$  по закону

$$z_k(t) = \exp(-\lambda t) z_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \quad (28)$$

где  $\lambda$  — комплексный декремент затухания, а  $z_k \in H_k$  — амплитудный элемент. Приходим к спектральной проблеме

$$A_1 z_1 + g B_{12} z_2 = \lambda C_1 z_1, \quad B_{21} z_1 = \lambda C_2 z_2. \quad (29)$$

Можно доказать (см. [4], с. 672), что число  $\lambda = 0$  является собственным значением задачи, которому отвечает новое состояние покоя гидромеханической системы, получаемое из исходного состояния покоя поворотом маятника на произвольный угол  $\delta^3 \vec{e}_1^3$ .

Для ненулевых чисел  $\lambda$  в силу обратимости оператора  $C_2$  получаем, что  $z_2 = \lambda^{-1} C_2^{-1} B_{21} z_1$ . Подставляя  $z_2$  в первое уравнение (29), приходим к задаче

$$A_1 z_1 = \lambda C_1 z_1 + g \lambda^{-1} B_{21}^* C_2^{-1} B_{21} z_1, \quad (30)$$

где уже учтено, что  $B_{12} = -B_{21}^*$ .

Осуществляя еще в (30) замену

$$A_1^{1/2} z_1 = \varphi_1$$

и действуя слева оператором  $A_1^{-1/2}$ , получаем спектральную задачу

$$L_1(\lambda) \varphi_1 = (I_1 - \lambda A_1^{-1/2} C_1 A_1^{-1/2} - g \lambda^{-1} A_1^{-1/2} B_{21}^* C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2}) \varphi_1 = 0. \quad (31)$$

В этой задаче оператор

$$\tilde{A}_1 := A_1^{-1/2} C_1 A_1^{-1/2} : H_1 \rightarrow H_1 \quad (32)$$



является компактным положительным оператором, а оператор

$$\tilde{B}_1 := A_1^{-1/2} B_{21}^* C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} : H_1 \rightarrow H_1 \quad (33)$$

при условии  $C_2 \gg 0$  (система статически устойчива по линейному приближению) является компактным неотрицательным оператором. Таким образом при этом условии пучок  $L_1(\lambda)$  является хорошо изученным пучком С. Крейна (см., например, [10], главу 7, параграфы 1–3).

Напомним, что спектр пучка С. Крейна состоит из двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками  $+0$  и  $+\infty$ , а также, возможно, из конечного числа комплексно сопряжённых пар не вещественных собственных значений в правой полуплоскости. Каждой ветви можно поставить в соответствие систему корневых элементов, которая образует базис Рисса (а также так называемый  $p$ -базис) в пространстве  $H_1$  либо в его подпространстве (возможно с конечным дефектом).

В случае статической неустойчивости оператор  $C_2$  является лишь ограниченным снизу. В этом случае на основании вариационного принципа Пуанкаре-Ритца (см. [18]) в [4] доказаны следующие утверждения.

**Лемма 7.** *Если квадратичная форма оператора потенциальной энергии  $C_2$  индефинитна и имеет  $k$  отрицательных квадратов, тогда оператор  $\tilde{B}_1$  имеет бесконечномерное ядро, а квадратичная форма оператора  $\tilde{B}_1$  также индефинитна и имеет ровно  $k$  отрицательных квадратов.*

**Теорема 4.** *В случае статической неустойчивости по линейному приближению спектральная задача кроме собственных значений в правой комплексной полуплоскости имеет конечное число отрицательных собственных значений, равное числу отрицательных собственных значений оператора потенциальной энергии  $C_2$ . При этом выполнено обращение теоремы Лагранжа об устойчивости, а именно гидромеханическая система является также динамически неустойчивой, причем неустойчивость системы теряется на экспоненциально возрастающих по времени нормальных движениях (см. (28) при  $\lambda < 0$ ), т. е. неколебательным образом ( $\text{Im } \lambda = 0$ ).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Войтицкий, В. И. О малых движениях системы двух сочлененных тел с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 7–32.

VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2017) On small motions of a system of two joined bodies with cavities filled with a heavy viscous fluid. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. No. 2 (35). p. 7–32.

2. Войтицкий, В. И. О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные идеальной несжимаемой жидкостью / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 3 (36). — С. 28–54.

VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D., SITSHAIEVA, Z. Z. (2017) On oscillations of two joined pendulums with cavities partially filled with an ideal incompressible fluid. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. No. 3 (36). p. 28–54.

3. Войтицкий, В. И. О двух гидромеханических проблемах, порожденных исследованиями С.Г. Крейна / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Сборник научных трудов по материалам II Международной открытой конференции “Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях” (18-20 сентября 2017 г., Воронеж). — 2017. — № 8, ч.1 (34-1). — С. 95–100.

VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D., SITSHAIEVA, Z. Z. (2017) On two hydromechanics problems generated studies of S. Krein. *Proceedings of the international conference “Modern problems of dynamical systems analysis. Applications in technics and tehnology.”*. No. 3, part 1 (34-1). p. 95–100.

4. Войтицкий, В. И. О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2017. — Том 63, № 4. — С. 627–677.

VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D., SITSHAIEVA, Z. Z. (2017) On oscillations of two joined pendulums with cavities partially filled with an incompressible fluid. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. Vol. 63, No. 4. p. 627–677.

5. Войтицкий, В. И. О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченном снизу оператором потенциальной энергии / В. И. Войтицкий // Динамические системы. — 2017. — Т. 7 (35), № 3. — С. 285–294.

- VOYTITSKY, V. I. (2017) On full linear differential equations of second order in Hilbert space with main operator of the energy dissipation and bounded below operator of potential energy. *Dynamical systems*. Vol. 7 (35), No. 3. p. 285–294.
6. Войтицкий, В. И. О малых колебаниях системы из трех сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Материалы международной научной конференции “Современные методы и проблемы математической гидродинамики — 2018” (3–8 мая 2018 г., Воронеж). — 2018. — С. 84–91.
- VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2017) On small oscillations of three joined pendulums with cavities filled with an immiscible incompressible fluids. *Proceedings of the international conference “Modern methods and problems of mathematical hydrodynamics — 2018”*. p. 84–91.
7. Батыр, Э. И. Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость / Э. И. Батыр // Динамические системы. — 2001. — вып. 17. — С. 120–125.
- BATYR, E. I. (2013) Small motions of a system of joined bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Dynamic systems*. Vol. 17. p. 120–125.
8. Батыр, Э. И. Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью / Э. И. Батыр, О. А. Дудик, Н. Д. Копачевский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. — 2009. — Т. 49. — С. 15–29.
- BATYR, E. I., DUDIK, O. A., KOPACHEVSKY, N. D. (2009) Small oscillations of bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Izv. vuzov. North-Caucasus region. Actual problems of mathematical hydrodynamics*. Vol. 49. p. 15–29.
9. Батыр, Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гироскопов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундамент. направления. — 2013. — Т. 49. — С. 5–88.
- BATYR, E. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2009) Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. Vol. 49. p. 5–88.
10. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — Москва: Наука, 1989. — 416 с.

- KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G., NGO Zyi Kan (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems*. Moscow: Nauka. 416 p.
11. KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146)*. Birkhäuser Verlag. — Basel. — Boston. — Berlin. 444 p.
12. Азизов, Т. Я. Абстрактная формула Грина и её приложения / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ТНУ, 2011. — 136 с.
- AZIZOV, T. Ya., KOPACHEVSKY, N. D. (2011) *Abstract Green's formula and its applications*. Simferopol: TNU. 136 p.
13. Копачевский, Н. Д. Формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трёх вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 48-61.
- KOPACHEVSKY, N. D., SEMKINA, E. V. (2017) Formulas for the orthoprojections connected with problem of small motions of three visco-elastic fluids filling fixed vessel. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. No. 2 (35). p. 48-61.
14. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм / Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундам. направления. — 2015. — Том 57. — С. 71–107.
- KOPACHEVSKY, N. D. (2015) On abstract Green's formula for the triple of Hilbert spaces and sesquilinear forms. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. Vol. 57. p. 71–107.
15. Копачевский, Н. Д. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Современная математика. Фундам. направления. — 2016. — Том 61. — С. 67–102.
- KOPACHEVSKY, N. D., RADOMIRSKAYA, K. A. (2016) Abstract mixed boundary value and spoectral problems of transmission and its applications. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. Vol. 61. p. 67–102.
16. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2004. — № 2. — С. 52–82..

КОРАЧЕВСКИЙ, N. D. (2004) On abstract Green's formula for the triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. No. 2. p. 52–82.

17. Копачевский, Н. Д. О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд / Н. Д. Копачевский // *Динамические системы*. — 2017. — том 7 (35), № 1. — С. 17–51.

КОРАЧЕВСКИЙ, N. D. (2017) On small motions of the system of two visco-elastic fluids filling a fixed vessel. *Dynamical systems*. Vol. 7 (35), No. 1. p. 17–51.

18. Абрамов, Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация / Ю. Ш. Абрамов. — Л.: Издательство ЛГУ, 1983. — 180 с.  
АБРАМОВ, Yu. Sh. (1983) *Variational methods in theory of operator pencils. Spectral optimizations*. Leningrad: LSU. 180 p.

УДК: 519.853.53:519.816

MSC2010: 90C47

## ГАРАНТИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ РИСКОНЕЙТРАЛА: АНАЛОГ МАКСИМИНА В ОДНОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

© В. И. Жуковский

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ  
ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, МОСКВА, ГСП-1, 119991, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: zhkvlad@yandex.ru, istina.imec.msu.ru/profile/Zhukovskii\_VI

© С. Н. Сачков, Е. Н. Сачкова

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
УЛ. ЗЕЛЕНАЯ, Д.22, Г.ОРЕХОВО-ЗУЕВО, МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ, 142600, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: snsachkov@yandex.ru, ensachkova@mail.ru

GUARANTEED DECISION FOR RISK-NEUTRALITY: THE ANALOGUE OF MAXIMIN  
IN ONE-CRITERION PROBLEM.

Zhukovskiy V. I., Sachkov S. N., Sachkova E. N.

### Abstract.

In the middle of the last century, the American mathematician and statistician Professor of the University of Michigan Leonard Savage (1917–1971) and the famous Swiss economist, Professor of the University of Zurich Jurg Niehans (1919–2007) independently proposed an approach to the choice of the solution in the one-criterion problem under uncertainty (OPU), called the principle of minimax regret (according to Niehans–Savage). This principle, along with the Wald’s principle of guaranteed result (maximin), plays a crucial role in making a guaranteed decision in OPU. The main role in the principle of minimax regret is the function of regret, which determines the risk according to the Niehans–Savage in the OPU. This risk has been widely used in practical management tasks in recent years. In this article, one of the possible approaches to finding a solution in OPU «from the position» of risk-neutrality — the person making the decision, who simultaneously tries to improve its gain (outcome) and reduce the risk («to kill two birds with one stone with one shot») is proposed. As an application, the explicit form of such solution is found for a linear-quadratic variant of the OPU in general form.

**Keywords:** *strategy, uncertainty, gain, function of risk, risk according to the Niehans–Savage, the principle of minimax regret.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Интервальные неопределенности.** Математическая модель принятия решения в конфликте в настоящей статье представлена в виде ОЗН — однокритериальной задачи при неопределенных факторах (интервальных неопределенностях). Считаем, что о неопределенностях ЛПП (лицу, принимающему решение) известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют (по тем или иным причинам). Сами неопределенности возникают за счет неполноты (неточности) знаний о реализациях выбранных ЛПП стратегий. Например, экономическая система, как правило, подвергается неожиданным трудно прогнозируемым возмущениям как *извне* (изменение количества и номенклатуры поставок, скачки спроса на товары, выпускаемые данным производством), так и *изнутри* (появление новых технологий, поломка и замена оборудования, несовпадение реальных сроков пуска нового оборудования с планируемыми и так далее). Естественно возникает вопрос: как при выборе стратегий учитывать наличие неопределенностей? Наконец, в публикациях по экономике отмечается, что

*во-первых*, современные экономические системы отличаются большим количеством элементов и связей между ними, высокой степенью динамичности, наличием нефункциональных связей между элементами, а также действием субъективных факторов, обусловленных участием человека или коалиции в процессах функционирования экономических систем; иначе говоря, экономическая система обычно функционирует в условиях неопределенности внешней и внутренней среды;

*во-вторых*, как уже упоминалось, источниками неопределенностей в экономических системах являются: отсутствие достаточных сведений об экономических процессах и условиях их протекания, случайное или преднамеренное противодействие со стороны других субъектов, действие случайных факторов, которые нельзя предугадать, предсказать в силу неожиданности их возникновения;

*в-третьих*, для оценки неопределенности используют детерминированные, вероятностно-статистические подходы, а также подходы, основанные на понятии лингвистической переменной и нечеткого множества.

В экономической литературе, вообще говоря, складывается следующая *классификация неопределенностей*:

- по степени неопределенности: вероятностная, лингвистическая, интервальная, полная неопределенность;
- по характеру неопределенности: параметрическая, структурная, ситуационная, стратегическая;

– по использованию получаемой в ходе управления информации: устранимая и неустраняемая.

Заметим, что у Диева В. С. в [1] приводится более подробная классификация неопределенностей в современных экономических системах.

Обзор интервальных неопределенностей можно найти так же в книгах [2, 3] и других публикациях.

Каждый из видов неопределенностей требует (для ее учета) своего подхода. В настоящей статье мы ограничимся только интервальными неопределенностями (о них известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам), а учет самих неопределенностей будет осуществляться способом, предложенным В. И. Жуковским в [4–6], который дает возможность перехода от исходной задачи принятия решения в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН) к однокритериальной задаче, но уже без неопределенности.

**1.2. Принцип минимаксного сожаления.** Одной из важнейших задач математической теории ОЗН традиционно считается выработка принципов оптимальности, т. е. ответ на вопрос: какое поведение ЛПР следует считать оптимальным (разумным, целесообразным), а также исследование вопросов существования и способов построения гарантированного решения. Как раз возможному ответу на эти вопросы для ОЗН и посвящена настоящая статья.

Во главу понятия оптимальности математическая теория игр рекомендует ставить *концепцию устойчивости*: отклонение ЛПР от рекомендованной в настоящей статье оптимальной стратегии не может улучшить, но может и ухудшить выигрыш и связанный с его получением риск.

Перейдем к постановке задачи. Рассматривается однокритериальная задача при неопределенности  $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ . В  $\Gamma^{(1)}$  ЛПР выбирает свою стратегию  $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ , стараясь максимизировать значение скалярного критерия  $f(x, y)$ , ориентируясь на всевозможные реализации неопределенности  $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$ . Напомним, что о неопределенности известны только границы, внутри которых она принимает значения.

Присутствие неопределенностей приводит к появлению множества результатов

$$f(x, Y) = \{f(x, y) \mid \forall y \in Y\},$$

«порожденных»  $x \in X$ . Множество  $f(x, Y)$  можно «сузить», используя риски.

Учет рисков является актуальной задачей в экономике, что подтверждает Нобелевская премия 1990 года, присужденная Гарри Максиму Марковицу [7] за новый



подход к исследованию риска инвестиционных доходов. Что же такое риск? Известный российский специалист по теории оптимизации Талгат Касимович Сиразетдинов считает, что в настоящее время не существует строгого математического определения риска [8, с. 31]. В монографии [9, с. 15] рассматривается шестнадцать различных определений риска. Большинство из них требуют статистических данных о неопределенности. Однако зачастую исследователь операций (ИО) не обладает подобной информацией (по тем или иным причинам). Именно такие ситуации и рассматриваются в настоящей статье.

Под *риском* будем понимать *возможность отклонения реализующихся значений критерия от желаемых*. Заметим, что это определение перекликается с «обычными» микроэкономическими рисками, подробно описанными, например, в [10, с. 40–50].

Напомним, что в 1939 году румынский математик, эмигрировавший в 1938 году в Америку, Абрахам Вальд (1902–1950) ввел [11, 12] принцип максимина (гарантированного результата), позволяющего находить гарантированный исход в частности и для однокритериальной задачи при неопределенности (ОЗН). Почти через 10 лет известный швейцарский экономист Юрг Ниханс в 1948 году и американский математик, экономист и статистик Леонард Сэвидж (1917–1971) в 1951 году независимо предложили в [13, 14] принцип минимаксного сожаления, позволяющий для ОЗН строить гарантированный риск, получивший в литературе название «риск по Сэвиджу» (позднее назван «критерием Ниханса–Сэвиджа»). Заметим, что Леонард Сэвидж во время Второй мировой войны работал ассистентом по статистике у самого Джона фон Неймана, что несомненно сказалось на появлении принципа минимаксного сожаления, а с 1997 года в США утверждена премия Сэвиджа, которая ежегодно присуждается авторам двух самых выдающихся диссертаций в области экономики и статистики.

Для однокритериальной задачи  $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$  принцип минимаксного сожаления заключается в построении пары  $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$ , удовлетворяющей цепочке равенств

$$R_f^r = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y), \quad (1)$$

где *функция риска* (по Нихансу–Сэвиджу)

$$R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y). \quad (2)$$

Само значение  $R_f^r$  из (1) называют *риском* (по Нихансу–Сэвиджу) в задаче  $\Gamma^{(1)}$ . Функция риска  $R_f(x, y)$  оценивает насколько реализовавшееся значение критерия  $f(x, y)$  «не достаёт до самого лучшего» (для ЛПР в задаче  $\Gamma^{(1)}$ ) значения  $\max_{z \in X} f(z, y)$ . Очевидно, что ЛПР стремится (за счет выбора своей стратегии  $x \in X$ )

возможно уменьшить  $R_f(x, y)$ , естественно рассчитывая (по принципу гарантированного результата) на наибольшее противодействие со стороны неопределенности (см. (1)). Поэтому следуя (1) и (2), ЛПР является *оптимистом* (стремится к «самому хорошему для себя» значению  $\max_{x \in X} f(x, y)$ , в отличие от ЛПР-*пессимиста* (ориентированного на «самый плохой для него» случай: на вальдовское максиминное решение  $(x^0, f^0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^0, y))$ ).

Далее будем считать, что ЛПР в задаче  $\Gamma^{(1)}$  выступает как оптимист: он при принятии решения формирует для  $f(x, y)$  функцию риска (по Нихансу–Сэвиджу) (2), значение которой принято называть *риском* (по Нихансу–Сэвиджу). Отметим два обстоятельства: *во-первых*, критерию  $f(x, y)$  из  $\Gamma^{(1)}$  будет отвечать «свой» риск  $R_f(x, y)$  (см. (2)), *во-вторых*, ЛПР стремится выбрать стратегии  $x \in X$  таким образом, чтобы возможно уменьшить риск  $R_f(x, y)$ , одновременно ориентируясь на реализацию любой *стратегической неопределенности*  $y(\cdot) \in Y^X, y(x) : X \rightarrow Y$ .

**Замечание 1.** Модели вида  $\Gamma^{(1)}$  появляются, например, на рынке, когда продавец в условиях непредвиденного импорта пытается максимизировать свою прибыль и уменьшить связанный с этим свой риск.

Учет рисков является актуальной задачей в экономике, что, как упоминалось выше, подтверждает Нобелевская премия 1990 года, присужденная Гарри Максиму Марковицу [7] за новый подход к исследованию риска инвестиционных доходов. Также во многих публикациях по макроэкономике [2, 10] всех ЛПР делят на три категории. К первой относятся те, кто не любит рисковать (*рискофобы* - греч. «*phobos*» означает «*боязнь*» чего-либо), вторые - любители риска (*рискофилы* - греч. «*philia*» означает «*любовь*» к чему-либо) и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать как исходы, так и риски (*рисконейтралы*). В этой статье будем считать ЛПР рисконейтралом (и, конечно, как упомянуто выше, оптимистом).

### 1.3. Иерархическая интерпретация принципа минимаксного сожаления.

Перейдем к двум иерархическим интерпретациям: первая возникает при самом формировании функции риска по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ , вторая — при нахождении решения  $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$  задачи  $\Gamma^{(1)}$  с точки зрения рискофила.

**Иерархическая интерпретация процесса построения функции риска по Нихансу–Сэвиджу.** Иерархические игры представляют собой математическую модель конфликта с фиксированной последовательностью ходов и обменов информацией между его участниками [19, с. 477]. Активное развитие иерархических игр в России началось во второй половине прошлого века, возглавлялось Юрием Борисовичем Гермейером [15] (создателем кафедры исследования операций на факультете

вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова) и продолжается сейчас его учениками. Для игр двух лиц такие игры описывают взаимодействие между верхним (ведущим) и нижним (ведомым) уровнями иерархии. Задается последовательность ходов игроков, т. е. очередность выбора стратегий и (возможно) сообщение об этом выборе партнеру.

Важной частью иерархических игр является выбор класса используемых стратегий в зависимости от доступной игрокам информации. В теории иерархических игр четко сформулировано [16] математическое определение *информационного расширения игры*, которое, например, в частном случае, приводит к использованию в  $\Gamma^{(1)}$  наряду с чистыми неопределенностями  $y \in Y$  и так называемых *информированных (стратегических) неопределенностей* —  $m$ -вектор-функций  $y(x) : X \rightarrow Y, y(\cdot) \in Y^X$ .

Перейдем непосредственно к иерархической интерпретации построения функции риска для ОЗН  $\Gamma^{(1)}$ . Будем предполагать, что ведомый игрок может применять только свою чистую стратегию  $y \in Y$ , а ведущий имеет возможность использовать «любую мыслимую информацию» [17, с. 353]. Итак, ограничимся чистыми стратегиями ведомого  $y \in Y$  и контрстратегиями ведущего  $x(y) : Y \rightarrow X, x(\cdot) \in X^Y$  (множество функций  $x(y)$ , определенных на  $Y$  со значениями в  $X$ ). При формировании функции риска будем рассматривать следующую двухуровневую двухшаговую иерархическую игру

$$\Gamma_R = \langle X^Y, Y, f(x, y) \rangle.$$

В ней первый ход за ведомым (игроком нижнего уровня иерархии): он сообщает на верхний уровень свои возможные чистые стратегии  $y \in Y$ .

Второй ход за ведущим (игроком верхнего уровня): он, *во-первых*, аналитически конструирует свою контрстратегию  $x(y) : Y \rightarrow X$ :

$$x(y) \in Y(x) = \text{Arg} \max_{x \in X} f(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

т. е. находит скалярную функцию  $f[y] = f(x(y), y) = \max_{x \in X} f(x, y)$ ; *во-вторых*, формулирует затем саму функцию риска по Нихансу–Сэвиджу

$$R_f(x, y) = f[y] - f(x, y).$$

**Построение решения игры  $\Gamma^{(1)}$  для рискофила.** Здесь считаем, что уже найден явный вид функции риска Ниханса–Сэвиджа  $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ , а задача сводится к построению пары  $(x^r, R_f^r) \in X \times \mathbf{R}$ , определяемой как решение ОЗН  $\Gamma^{(1)}$  «с позиции» рискофила (любителя рисков):

$$R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} R_f(x, y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y).$$

Рассматривая задачу  $\Gamma^{(1)}$ , предполагаем, что ведущий ограничился только выбором чистой стратегии  $x \in X$ , а другой игрок (ведомый) может использовать любую мыслимую информацию [17, с. 353], в том числе и знание стратегии  $x \in X$  (*информационная дискриминация ведущего*); затем формирует свою стратегию (неопределенность) как функцию  $y(x) : X \rightarrow Y, y(\cdot) \in Y^X$ . В таком случае критерий в  $\Gamma^{(1)}$  определяется скалярной функцией  $f(x, y(x))$ .

Напомним, что функции вида  $y(\cdot) \in Y^X$  (множество  $m$ -вектор-функций, определенных на  $X$  со значениями в  $Y$ ) в теории дифференциальных игр называются *контрстратегиями*, а задача вида  $\Gamma^{(1)}$ , где контрстратегии используются для представления неопределенности, названа в [17] *минимаксной игрой*.

Итак здесь рассматриваем иерархическую двухуровневую трехшаговую игру двух лиц (ведущего и ведомого), но в отличие от  $\Gamma_R$  ведущий использует чистую стратегию  $x \in X$ , а ведомый — контрстратегию  $y(x) : X \rightarrow Y, y(\cdot) \in Y^X$ .

**Первый ход** за ведущим: он передает на нижний уровень свои возможные стратегии  $x \in X$ .

**Второй ход** за ведомым: он аналитически конструирует  $y(x)$ , согласно

$$\max_{y(\cdot) \in Y^X} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x] \quad \forall x \in X,$$

предполагая, что вектор-функция  $y(x)$  единственна (например, для строго вогнутой по  $y$  при каждом  $x \in X$  скалярной функции  $R_f(x, y)$ ), передает  $R_f[x]$  на верхний уровень.

**Третий ход** за ведущим: он строит стратегию  $x^r \in X$  такую, что  $\min_{x \in X} R_f[x] = R_f[x^r] = R_f^r$ .

Приведенное «трехходовое понятие» укладывается *полностью* в определение гарантированного результата первого (ведущего) игрока в игре  $\Gamma^{(1)}$  (по Гермейеру), если в работе [5, с. 104] заменить функцию выигрыша ведомого на  $-R_f(x, y)$ . Не трудно видеть также, что находясь в рамках игры  $\Gamma_R$ , ведущий игрок, *если знает правило поведения ведомого*, может сам вычислить реакцию ведомого и сразу реализовать третий ход. Еще раз подчеркнем, что аналог и модификацию такого «трехходового понятия» удобно применять к построению гарантированного решения для рискофила с учетом исходов и рисков для бескоалиционного и кооперативного вариантов конфликта.

**Замечание 2.** Минимаксное решение для рискофила определяется парой  $(x^r, R_f^r = \min_{x \in X} \max_{y(\cdot) \in Y^X} R_f(x, y) = \max_{y \in Y} R_f(x^r, y))$  по двум причинам:

а) каждой стратегии  $x \in X$  (в результате операции внутреннего максимума из второго хода  $\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x]$ ) ставится в соответствие «самый

большой» из возникающих при стратегии  $x$  риск по Нихансу–Сэвиджу

$$R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y) \geq R_f(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

т.е.  $R_f(x, y)$  не может при  $\forall y \in Y$  стать больше  $R_f[x]$  и поэтому  $R_f[x]$  можно считать гарантией, обеспеченной рискофилу при выборе им стратегии  $x$ ; заметим, что согласно (2), всегда  $R_f(x, y) \geq 0$ , поэтому возможные значения функции риска по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y) \in [0, R_f[x]]$  при всех  $(x, y) \in X \times Y$ ;

б) рискофил, как любой ЛПП, хотел бы реализовать свои решения (выбор  $x \in X$ ) с наименьшим риском (лучше с нулевым!); этим обстоятельством как раз и вызван третий ход — при принятии решения рискофилом.

Таким образом, рискофилу предлагается применить в задаче  $\Gamma^{(1)}$  стратегию  $x^r$ , тем самым «обеспечивая себе» наименьшую (минимальную) гарантию  $R_f[x^r] = R_f(x^r, y(x^r)) \geq R(x^r, y) \quad \forall y \in Y$ . Этот же прием применим при формализации сильно гарантированного по исходам и рискам решения задачи  $\Gamma^{(1)}$ .

Приведем результат из теории исследования операций, касающийся информированных неопределенностей и стратегий.

**Лемма 1.** Если в  $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$  множества  $X, Y$  суть компакты, а функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ , то функция максимума (минимума)  $\max_{x \in X} f(x, y)$  ( $\min_{y \in Y} f(x, y)$ ) непрерывна на  $Y(X)$ .

Лемма 1 — известный факт, имеющийся в почти всех учебных пособиях по исследованию операций, например [18, с. 54,187].

**Замечание 3.** Из леммы 1 следует непрерывность функции риска (2) на  $X \times Y$  (только если в  $\Gamma^{(1)}$  множества  $X$  и  $Y$  компактны и  $f(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ ).

**Замечание 4.** Пусть в  $\Gamma^{(1)}$  множества  $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n$  (множество компактов из  $\mathbf{R}^n$ ),  $Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$  и  $f(\cdot) \in C(X \times Y)$  (непрерывна на  $X \times Y$ ), тогда гарантированное по риску решение  $(x^r, R_f^r)$  существует.

Действительно, функция риска по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y)$  из (2) непрерывна на  $X \times Y$  (замечание 2). Но тогда, согласно лемме 1, непрерывной на  $X$  будет и функция  $\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f[x]$  (существует измеримая по Борелю контрстратегия — селектор  $y(x) : X \rightarrow Y$  такая, что

$$\max_{y \in Y} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x] \quad \forall x \in X,$$

и  $R_f[x]$  непрерывна на  $X$ ). По теореме Вейерштрасса непрерывная на компакте  $X$  функция  $R_f[x]$  достигает минимума в точке  $x^r \in X$ . Тогда, если оба множества  $X$  и  $Y$  компактны и функция  $f(x, y)$  непрерывна, гарантированное по рискам решение  $(x^r, R_f^r)$ , определенное в (1), существует.

Таким образом, следуя  $x^r$ , рискофил «обеспечивает» себе гарантию по риску  $R_f^r \geq R_f(x^r, y) \forall y \in Y$  и эта гарантия  $\forall x \in X$  будет наименьшей по сравнению с остальными гарантиями  $R_f[x] \geq R_f(x, y)$  для всех стратегий  $x \in X$ . Подчеркнем еще раз, что такая процедура характерна для рискофила (любителя рисковать). Мы же дальше в данной статье обсудим аналогичную процедуру для рисконейтрала.

## 2. НОВЫЙ ПОДХОД К ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЯ В ОЗН ДЛЯ РИСКОНЕЙТРАЛА

**2.1. Предварительные замечания.** Здесь используем подход, предложенный для бескоалиционных игр в [21]. Для этого от ОЗН  $\Gamma^{(1)}$  (при неопределенности) перейдем к «задаче гарантий», но уже без неопределенностей.

На содержательном уровне задачей ЛПР до сих пор было выбор им стратегии таким образом, чтобы добиться возможно большего своего выигрыша. Но рисконейтралу этого мало! Он стремится выбрать стратегию таким образом, чтобы не только его выигрыш стал бы *возможно большим*, но и одновременно возникший при этом риск возможно меньшим. Именно, напомним, что ЛПР формирует функцию риска по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y)$  (2), значение которой называется риском ЛПР, а сам риск по Нихансу–Сэвиджу  $R_f^r$  определяется цепочкой равенств (1). Пара  $(x^r, R_f^r)$  образует решение задачи  $\Gamma^{(1)}$  для рискофила (любителя рисковать), ибо число  $R_f(x, y)$  характеризует риск ЛПР при выборе и реализации стратегии  $x \in X$ . Причем считаем, что именно такой риск ЛПР стремится по возможности уменьшить. Здесь естественно возникают два вопроса:

1. Как совместить для ЛПР указанные два желания (увеличение выигрыша и одновременно уменьшение риска) с помощью *только одного критерия*?
2. Как ЛПР осуществить оба желания *единой ситуацией* и при этом дополнительно учесть «действия» неопределенностей?

### 2.2. Как объединить желание ЛПР увеличить выигрыш и одновременно уменьшить риск?

**Построение функции риска по Нихансу–Сэвиджу.** Напомним, что, согласно принципу минимаксного сожаления (по Нихансу–Сэвиджу) и разделу 1.3 из настоящей статьи, риск у ЛПР определяется значением функции риска (сожаления)  $R_f(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  — платежная функция ЛПР в задаче  $\Gamma^{(1)}$ . Итак, чтобы построить функцию риска  $R_f(x, y)$  для ЛПР следует, в первую очередь, определить «зависимый» максимум  $f[y] = \max_{x \in X} f(x, y)$  при  $\forall y \in Y$ . Для нахождения  $f[y]$  приходится в свою очередь предполагать (в соответствии с приведенной в разделе 1.3 теории двухуровневых иерархических игр) *дискриминацию* игрока нижнего уровня, формирующего неопределенность  $y \in Y$  и передающего эту

информацию на верхний уровень при построении контрстратегии  $x(y) : Y \rightarrow X$  такой, что

$$\max_{x \in X} f(x, y) = f(x(y), y) = f[y] \quad \forall y \in Y.$$

Множество таких контрстратегий обозначается через  $X^Y$  (множество  $n$ -вектор-функций  $x(y) : Y \rightarrow X$ , определенных на  $Y$  со значениями в  $X$ ). Итак, при нахождении первого слагаемого в (2) на верхнем уровне иерархии следует для каждой неопределенности  $y \in Y$  решить однокритериальную задачу  $\langle X^Y, Y, f(x, y) \rangle$ , где напомним  $X^Y$  — множество контрстратегий  $x(y) : Y \rightarrow X$ . Задача состоит в построении скалярной функции  $f[y]$ , которая определяется формулой

$$f[y] = \max_{x(\cdot) \in X^Y} f(x, y) \quad \forall y \in Y. \quad (3)$$

А уже затем строятся функции риска (по Нихансу–Сэвиджу) по формуле (2).

**Непрерывность функции риска, сильно гарантированные выигрыши и сильно гарантированные риски.** Здесь и ранее множество компактов евклидова пространства  $\mathbf{R}^k$  обозначались *compr*  $\mathbf{R}^k$ , факт непрерывности скалярной функции  $\psi(x)$  на множестве  $X$  обозначаем  $\psi(\cdot) \in C(X)$ .

Основную роль в этом подразделе будет играть (см. лемму 1)

**Утверждение 1.** Если  $X \in \text{compr } \mathbf{R}^n$ ,  $Y \in \text{compr } \mathbf{R}^m$  и функция  $f(\cdot) \in C(X \times Y)$ , то

- a) функция максимума  $\max_{x \in X} f(x, y)$  также будет непрерывной на  $Y$ ;
- b) функция минимума  $\min_{y \in Y} f(x, y)$  непрерывна на  $X$ .

**Следствие 1.** Если в задаче  $\Gamma^{(1)}$  множество  $X \in \text{compr } \mathbf{R}^n$ ,  $Y \in \text{compr } \mathbf{R}^m$  и  $f(\cdot) \in C(X \times Y)$ , то функция риска по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y)$  будет непрерывной на  $X \times Y$  (см. замечание 3).

Перейдем к *сильно гарантированным выигрышам и риску* в ОЗН  $\Gamma^{(1)}$ . В серии статей [4, 5] предложено три разных способа учета неопределенностей для принятия решения в конфликтных задачах при неопределенности. Ограничимся здесь одним из трех. Он заключается в том, что платежной функции  $f(x, y)$  в задаче  $\Gamma^{(1)}$  ставится в соответствие ее *сильная гарантия*  $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$ . Отсюда же следует, что ЛПР, выбирая свои стратегии  $x \in X$ , обеспечивает себе выигрыш  $f[x] \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y$  (при реализации любой неопределенности  $y \in Y$ ). Такой *сильно*

гарантированный выигрыш (исход)  $f[x]$  достаточно естественен при рассматриваемых в этой статье *интервальных неопределенностях*  $y \in Y$ , ибо о  $y$  кроме информации о множестве возможных значений  $Y \subseteq \mathbf{R}^m$  никаких дополнительных вероятностных характеристик у ЛПР не имеется. Наконец, утверждение 1, следствие 1, а также непрерывность  $f(x, y)$  и  $R_f(x, y)$  на  $X \times Y$  позволяет сразу установить

**Утверждение 2.** *Если в ОЗН  $\Gamma^{(1)}$  множества  $X$  и  $Y$  суть компакты, а платежная функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ , то сильно гарантированный выигрыш*

$$f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y) \quad (4)$$

*и сильно гарантированный риск*

$$R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y) \quad (5)$$

*будут непрерывными на  $X$  скалярными функциями.*

**Замечание 5.** *Во-первых*, смысл гарантированного выигрыша  $f[x]$  из (4) в том, что для любых  $y \in Y$  реализовавшийся выигрыш  $f(x, y)$  будет не меньше, чем  $f[x]$ , то есть используя в  $\Gamma^{(1)}$  свою стратегию  $x \in X$ , ЛПР «обеспечит» себе выигрыш  $f(x, y)$  не меньший, чем  $f[x]$  при любой неопределенности  $y \in Y$ . Таким образом, сильно гарантированный выигрыш (исход)  $f[x]$  ограничивает *снизу* возможные выигрыши  $f(x, y)$ , которые только возникают, когда неопределенность  $y$  «пробегает» все значения из  $Y$ . *Во-вторых*, сильно гарантированный риск  $R_f[x]$ , наоборот, ограничивает *сверху* все риски (по Нихансу–Сэвиджу  $R_f(x, y)$ ), которые только могут реализоваться при любых неопределенностях  $y \in Y$ . Действительно, из (5) сразу следует неравенство

$$R_f[x] \geq R_f(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Итак, применяя свою стратегию  $x \in X$ , ЛПР, с одной стороны «обеспечивает себе» сильную гарантию по выигрышу  $f[x]$ , и, с другой стороны, одновременно сильную гарантию по риску  $R_f[x]$ .

**Переход от ОЗН  $\Gamma^{(1)}$  к двухкритериальной задаче векторной оптимизации.** Отвечает желанию ЛПР увеличить свой выигрыш и одновременно уменьшить риск новая математическая модель *двухкритериальной задачи при неопределенности и двухкомпонентным векторным критерием*

$$\Gamma_2 = \langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle.$$

Здесь  $X$  и  $Y$  те же, что и в  $\Gamma^{(1)}$ , новым является лишь переход от однокомпонентного  $f(x, y)$  к двухкомпонентному критерию  $\{f(x, y), -R_f(x, y)\}$ , причем  $R_f(x, y)$  является функцией риска (по Нихансу–Сэвиджу) для ЛПР. Заметим, что  $R_f(x, y)$  в задаче



$\Gamma_2$  взято со знаком «минус», ибо в этом случае ЛПП выбором своей стратегии  $x \in X$  стремится возможно увеличить оба критерия одновременно. При этом предполагается реальность появления любой неопределенности  $y \in Y$ . Заметим, что в силу  $R_f(x, y) \geq 0$  при  $\forall(x, y) \in X \times Y$ , увеличение  $-R_f(x, y)$  эквивалентно уменьшению  $R_f(x, y)$ .

Использование в задаче  $\Gamma_2$  лишь интервальных неопределенностей  $y \in Y$  (о них известны лишь границы изменения), обосновывает для ЛПП возможность ориентироваться на сильно гарантированный выигрыш  $f[x]$  из (4) и сильно гарантированный риск  $R_f[x]$  из (5). Такой подход приводит к переходу от  $\Gamma^{(1)}$  к двухкомпонентной задаче векторной оптимизации, но уже без неопределенности

$$\Gamma_2^g = \langle X, \{f[x], -R_f[x]\} \rangle,$$

в которой ЛПП следует выбрать свою стратегию  $x \in X$  таким образом, чтобы достичь возможно больших значений обоих критериев  $f[x]$  и  $-R_f[x]$  одновременно.

Затем для практического построения сильно гарантированных выигрыша и риска в  $\Gamma_2^g$  следует привлечь многочисленные результаты математической теории векторной оптимизации, например, из [22] с ее различными подходами и результатами. Остановимся здесь на решении многокритериальной задачи, предложенной в 1909 году итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето [23]. Для  $\Gamma_2^g$  максимальность по Парето (эффективность) стратегии  $x^P$  сводится к несовместности, для любых  $x \in X$ , системы из двух неравенств  $f[x] \geq f[x^P]$ ,  $-R_f[x] \geq -R_f[x^P]$ , из которых хотя бы одно строгое. В результате приходим к следующему понятию

**Определение 1.** Тройку  $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$  назовем *сильно гарантированным паретовским решением по исходам и рискам* (СГИР) задачи  $\Gamma_2^g$ , если

- а)  $x^P$  — максимально по Парето в задаче  $\Gamma_2^g$ ;
- б)  $f[x^P]$  — значение сильно гарантированного выигрыша  $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$  в  $\Gamma_2^g$  при  $x = x^P$ ;
- в)  $R_f[x^P]$  — значение сильно гарантированного риска  $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$  также при  $x = x^P$ .

**Замечание 6.** В определение 1 можно было бы привлечь и другие концепции оптимальности из теории многокритериальных задач: максимальность по Слейтеру, по Борвейну, по Джоффриону,  $\Lambda$ -максимальность, конусную оптимальность. Все эти концепции можно найти в книге [24], там также охвачена и связь между различными векторными оптимальными стратегиями.

Согласно определению максимальности по Парето

а) если  $x^P$  — максимальна по Парето, то увеличение одного из критериев при  $\bar{x} \neq x^P$  и  $\bar{x} \in X$ , неизбежно приведет к уменьшению одного из оставшихся;

б) не существует такой стратегии  $x \in X$ , при которой значения всех критериев увеличатся по сравнению со значениями  $x = x^P$ .

Отметим, что впервые термин «максимальность по Слейтеру» появился в России, повидимому, в книге [25] в статье Гурвица Л.

Если вместо оптимальности по Парето в определении 1 применить максимальность по Слейтеру (слабая эффективность), то определение 1 примет вид

**Определение 2.** Тройку  $(x^S, f[x^S], R_f[x^S])$  назовем *сильно гарантированным слейтеровским решением* задачи  $\Gamma_2^g$ , если

а) стратегия  $x^S \in X$  — максимальна по Слейтеру в задаче  $\Gamma_2^g$ , т. е. при любых  $x \in X$  несовместна система из двух строгих неравенств

$$f[x] > f[x^S], \quad -R_f[x] > -R_f[x^S];$$

б)  $f[x^S]$  — значение сильно гарантированного выигрыша при  $x = x^S$  в игре  $\Gamma_2^g$ ;

с)  $R_f[x^S]$  — значение сильно гарантированного риска при  $x = x^S$  в игре  $\Gamma_2^g$ .

Любая эффективная (максимальная по Парето) стратегия является одновременно слабо эффективной, что сразу следует из определений 1 и 2, обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, также свойство б) из замечания 6 справедливо и для сильно гарантированного слейтеровского решения задачи  $\Gamma^{(1)}$ . Очевидно следующее

**Утверждение 3.** Если в задаче  $\Gamma_2^g$  существует  $x^P \in X$  и числа  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  такие, что  $x^P$  является максимизатором скалярной функции  $\Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x]$ , то есть

$$\Phi[x^P] = \max_{x \in X} (\alpha f[x] - \beta R_f[x]), \quad (6)$$

то  $x^P$  будет максимальной по Парето в задаче  $\Gamma_2^g$ , то есть при любых  $x \in X$  несовместна систем из двух неравенств

$$f[x] \geq f[x^P], \quad R_f[x] \leq R_f[x^P], \quad (7)$$

из которых хотя бы одно строгое (будем использовать  $\alpha = \beta = 1$ ).

**Замечание 7.** Свертка критериев (4) и (5) в виде  $\Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x]$  представляет интерес. Действительно, если даже при  $\bar{x} \neq x^P$  получим увеличение гарантированного исхода  $f[\bar{x}] > f[x^P]$ , то, в силу максимальной по Парето стратегии  $x^P$  и  $R_f[\bar{x}] \geq 0$ , такое улучшение гарантированного выигрыша  $f[\bar{x}] > f[x^P]$  неизбежно приведет к увеличению гарантированного риска  $R_f[\bar{x}] > R_f[x^P]$  и, наоборот,

уменьшение гарантированного риска  $R_f[\bar{x}] < R_f[x^P]$  по тем же причинам приведет к уменьшению исхода  $f[\bar{x}] < f[x^P]$  (оба случая для ЛПР нежелательны). Таким образом, *во-первых*, замена двухкритериальной задачи  $\Gamma_2^g$  на однокритериальную  $\langle X, \Phi[x] = \alpha f[x] - \beta R_f[x] \rangle$  отвечает желанию ЛПР увеличить  $f[x]$  и одновременно уменьшить  $R_f[x]$ . *Во-вторых*, увеличение разности  $\alpha f[x] - \beta R_f[x]$ , в силу  $R_f[x] \geq 0$  и  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ , отвечает также желанию ЛПР увеличить гарантированный выигрыш  $f[x]$  и одновременно уменьшить гарантированный риск  $R_f[x]$ .

Перейдем к ответу на второй вопрос из раздела 2.1: как осуществить оба желания ЛПР единой стратегией и учесть при этом наличие именно интервальной неопределенности? Для этого от задачи  $\Gamma^{(1)}$  последовательно перейдем к задачам  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , где

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \langle X, Y, \{f(x, y), -R_f(x, y)\} \rangle, \\ \Gamma_2 &= \langle X, \{f[x], -R_f[x]\} \rangle, \\ \Gamma_3 &= \langle X, \{\Phi[x] = f[x] - R_f[x]\} \rangle.\end{aligned}\tag{8}$$

Во всех трех задачах стратегии  $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ , неопределенности  $y \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$ , на парах  $(x, y) \in X \times Y$  определена платежная функция  $f(x, y)$ , а в (2) — функция риска (по Нихансу–Сэвиджу)  $R_f(x, y)$ .

В игре  $\Gamma_1$  платежная функция становится двухкомпонентной: к платежной функции  $f(x, y)$  в задаче  $\Gamma^{(1)}$  добавлена «минус» функция риска  $R_f(x, y)$  из (2).

В игре  $\Gamma_2$  функции выигрыша  $f(x, y)$  и риска  $R_f(x, y)$  заменены их гарантиями  $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$  и  $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$ . Наконец, в игре  $\Gamma_3$  вместо двухкомпонентной платежной функции использована линейная свертка гарантий  $f[x]$  и  $-R_f[x]$ , диктуемая утверждением 3.

**Замечание 8.** Перечислим достоинства приведенного в определениях 1 и 2 решения.

*Во-первых*, снова напомним, что экономисты подразделяют ЛПР (лиц, принимающих решение) на три группы. К первой относятся те, кто не любит рисковать (*рискофобы*), вторые — любители риска (*рискофилы*) и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать выигрыши и уменьшать риски (*рисконейтралы*). В определениях 1 и 2 считаем ЛПР *рисконейтралом*, т. е. учитывающим одновременно как выигрыш (исход), так и риск.

*Во-вторых*, для выигрышей определены границы снизу  $f[x^P] \leq f(x^P, y) \forall y \in Y$ , а для рисков — границы сверху  $R_f[x^P] \geq R_f(x^P, y) \forall y \in Y$ ; заметим, что существование и непрерывность гарантий  $f[x]$  и  $R_f[x]$  есть следствие  $X \in \text{comp } \mathbf{R}^n, Y \in \text{comp } \mathbf{R}^m$  и  $f(\cdot) \in C(X \times Y)$  (утверждение 1).

*В-третьих*, улучшение гарантированного паретовского выигрыша (по сравнению с  $f[x^P]$ ) неизбежно вызовет увеличение гарантированного риска (по сравнению с  $R_f[x^P]$ ), а уменьшение риска автоматически «спровоцирует» уменьшение гарантированного выигрыша.

**Замечание 9.** Определения 1 и 2 позволяют предложить следующий *конструктивный* способ построения СГИР. Он сводится к четырем этапам.

Этап I. По  $f(x, y)$  найти  $f[y] = \max_{x \in X} f(x, y)$  и построить функцию риска (по Нихансу–Сэвиджу) для критерия  $f(x, y)$ , именно  $R_f(x, y) = f[y] - f(x, y)$ .

Этап II. Определить сильные гарантии исхода  $f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y)$  и риска  $R_f[x] = \max_{y \in Y} R_f(x, y)$ .

Этап III. Для двухкритериальной вспомогательной задачи  $\Gamma_2$  вычислить максимальную по Парето стратегию  $x^P$ . Здесь можно применить утверждение 3.

Тогда нахождение максимальной по Парето стратегии в задаче  $\Gamma_3$  сведется к построению максимизатора  $x^P$  для

$$\max_{x \in X} (f[x] - R_f[x]) = f[x^P] - R_f[x^P]. \quad (9)$$

Этап IV. По  $x^P$  определить значения сильных гарантий  $f[x^P]$  и  $R_f[x^P]$ .

Полученная в результате тройка  $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$  как раз и образует искомое СГИР — решение, удовлетворяющее определению 1, то есть в результате применения стратегии  $x^P$  порождается для платежной функции  $f(x, y)$  гарантированный исход  $f[x^P]$  с гарантированным риском (по Нихансу–Сэвиджу)  $R_f[x^P]$ .

Предложенный здесь способ построения СГИР в следующем разделе настоящей статьи будет реализован для линейно-квадратичной ОЗН самого общего вида.

### 3. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИИ РИСКА ПО СЭВИДЖУ–НИХАНСУ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО ВАРИАНТА ОЗН

**3.1. Постановка задачи.** Рассматриваем однокритериальную линейно-квадратичную задачу при неопределенности

$$\Gamma_{lq} = \langle \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, f(x, y) \rangle.$$

Здесь множество стратегий  $x$  совпадает с  $n$ -мерным евклидовым пространством  $\mathbf{R}^n$ , множество неопределенностей  $y$  есть  $\mathbf{R}^m$ , платежная функция задана следующей линейно-квадратичной формой

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d,$$

где  $n \times n$ -матрица  $A$  и  $m \times m$ -матрица  $C$  постоянны и симметричны, прямоугольная  $n \times m$ -матрица  $B$  постоянна,  $n$ -вектор  $a$ ,  $m$ -вектор  $c$ , число  $d$  постоянны, штрих

сверху означает операцию транспонирования. В  $\Gamma_{lq}$  за счет выбора стратегии  $x \in \mathbf{R}^n$  ЛПР стремится достичь возможно больших значений платежной функции и возможно меньших значений функции риска, учитывая допустимость реализации любой неопределенности  $y \in \mathbf{R}^m$ .

Задача состоит в построении в соответствии с замечанием 9 явного вида функции риска по Нихансу–Сэвиджу для  $\Gamma_{lq}$ , а затем и СГИР.

Далее используем обозначения:

для квадратной постоянной матрицы  $A > 0$  ( $A < 0$ )  $\iff$  квадратичная форма с матрицей  $A$  определено положительна (соответственно, отрицательна);

$0_n$  — нулевой  $n$ -вектор;

$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$  — градиент скалярной функции  $f(x, y)$  по  $x$  при фиксированном  $y$ ;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$  — гессиан функции  $f(x, y)$  по  $x$  при фиксированном  $y$ ;

$\det A$  — означает определитель матрицы  $A$ ;

$E_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица.

Непосредственно можно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(x'Ax) = 2Ax, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x'By) = 2By, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2a'x) = 2a, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x'Ax) = 2A.$$

**3.2. Явный вид функции риска по Сэвиджу–Нихансу.** Итак, приступим к построению явного вида функции риска  $R_f(x, y)$  для задачи  $\Gamma_{lq}$  (в соответствии с этапом I из замечания 9).

Этап I. Построение явного вида функции риска  $R_f(x, y)$  по Сэвиджу–Нихансу для  $\Gamma_{lq}$ .

**Утверждение 4.** Если в задаче  $\Gamma_{lq}$  матрица  $A < 0$ , то функция риска по Сэвиджу–Нихансу имеет вид:

$$R_f(x, y) = -(x'A + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a).$$

*Доказательство.* Достаточными условиями существования  $n$ -вектор-функции  $x(y)$ , определенной на  $\mathbf{R}^m$  со значениями в  $\mathbf{R}^n$  и удовлетворяющей условию

$$\max_{z \in \mathbf{R}^n} f(z, y) = f(x(y), y) \quad \forall y \in \mathbf{R}^m,$$

будут ограничения

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x(y)} = 2Ax(y) + 2By + 2a = 0_n \quad \forall y \in \mathbf{R}^m,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{x=x(y)} = 2A < 0.$$

Второе требование выполнено в силу  $A < 0$ , а из первого тождества получаем

$$x(y) = -A^{-1}(By + a).$$

Подставим  $x = x(y)$  в  $f(x, y)$

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathbf{R}^n} f(z, y) &= f(x(y), y) = (y'B' + a')A^{-1}(By + a) - 2(y'B' + a')A^{-1}By + \\ &+ y'Cy - 2a'A^{-1}(By + a) + 2c'y + d = -(y'B' + a')A^{-1}(By + a) + y'Cy + 2c'y + d = \\ &= y'[C - B'A^{-1}B]y + 2(c' - a'A^{-1}B)y + (d - a'A^{-1}a). \end{aligned}$$

Тогда функция риска по Нихансу–Сэвиджу

$$\begin{aligned} R_f(x, y) &= f(x(y), y) - f(x, y) = -x'Ax - 2x'By - 2a'x - y'B'A^{-1}By - \\ &- 2a'A^{-1}By - a'A^{-1}a = -(x'A + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

### 3.3. Построение сильной гарантии для функции риска.

Этап II. Построим функцию  $R_f[x] = \max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y)$ .

**Утверждение 5.** Пусть в задаче  $\Gamma_{lq}$

$$A < 0, \det B \neq 0.$$

Тогда

$$R_f[x] = \max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что из условия  $\det B \neq 0$  следует, что  $B$  — квадратная матрица, т. е.  $n = m$ . Для нахождения  $R_f[x]$  определим  $n$ -вектор-функцию  $y(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  такую, что

$$\max_{y \in \mathbf{R}^m} R_f(x, y) = R_f(x, y(x)) = R_f[x] \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

При этом воспользуемся достаточными условиями достижения максимума при  $y = y(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ :

$$\frac{\partial R_f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y(x)} = -2B'x - 2B'A^{-1}By(x) - 2B'A^{-1}a = 0_m \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

$$\frac{\partial^2 R_f(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=y(x)} = -2B'A^{-1}B > 0. \quad (10)$$

Так как матрица  $A < 0$ , и  $\det B \neq 0$ , то справедлива цепочка импликаций

$$A^{-1} < 0 \implies B'A^{-1}B < 0 \implies -B'A^{-1}B > 0 \implies -2B'A^{-1}B > 0$$

(т. е. имеет место второе требование из (10)).

Из первого тождества в (10) получаем, с учетом

$$(B'A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A(B')^{-1},$$

$$y(x) = -(B'A^{-1}B)^{-1}(B'x + B'A^{-1}a) = -B^{-1}A(x + A^{-1}a) = -B^{-1}(Ax + a).$$

Подставляя найденное  $y = y(x)$  в  $R_f[x]$  имеем

$$\begin{aligned} R_f[x] &= R_f(x, y(x)) = \\ &= -(x'A - x'A - a' + a')A^{-1}(Ax - Ax - a + a) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

таким образом, справедливо тождество  $R_f[x] \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

Продолжая этап II (из замечания 9), найдем сильную гарантию выигрыша (исхода)  $\min_{y \in Y} f(x, y)$ , с учетом

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d.$$

Перейдем к построению сильной гарантии исхода  $f[x] = \min_{y \in \mathbf{R}^m} f(x, y)$  при  $A < 0$  и  $C > 0$ .

**Лемма 2.** [26, с. 89]. Для любой положительно определенной  $n \times n$ -матрицы  $C$  существует и причем единственная положительно определенная  $n \times n$ -матрица  $S$  такая, что  $S^2 = C$ . Матрица  $S$  называется квадратным корнем из матрицы  $C$  и обозначается  $C^{\frac{1}{2}}$ . Причем собственные числа матрицы  $C$  равны квадратам собственных чисел матрицы  $C^{\frac{1}{2}}$ .

**Лемма 3.** Если симметричная  $n \times n$ -матрица  $C > 0$ , то  $C^{-1} = [S^2]^{-1} = [S^{-1}]^2$ .

*Доказательство.* Действительно, для  $S = C^{\frac{1}{2}}$  будет

$$C = S \cdot S = S^2 \implies C^{-1} = [S \cdot S]^{-1} = S^{-1} \cdot S^{-1} = [S^{-1}]^2.$$

$\square$

**Лемма 4.** *Имеет место импликация*

$$A < 0 \wedge C > 0 \implies (A - BCB') < 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m},$$

где  $\mathbf{R}^{n \times m}$  – множество постоянных  $n \times m$ -матриц.

*Доказательство.* В самом деле, справедлива цепочка импликаций

$$\begin{aligned} C > 0 &\implies C^{-1} > 0 \implies BC^{-1}B' \geq 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m} \implies \\ &\implies -BC^{-1}B' \leq 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m} \implies A - BC^{-1}B' < 0 \forall B \in \mathbf{R}^{n \times m}. \end{aligned}$$

□

**Утверждение 6.** *Если матрицы  $A < 0$  и  $C > 0$ , то*

$$f[x] = \min_{y \in \mathbf{R}^m} f(x, y) = x'[A - BC^{-1}B']x + 2x'[a - BC^{-1}c] + d - c'C^{-1}c. \quad (11)$$

*Доказательство.* Согласно лемме 2 существует матрица  $S$  такая, что  $C = S^2$ , причем  $C > 0 \implies S > 0 \wedge S = S'$ . Тогда, с учетом  $S^{-1}S^{-1} = C^{-1}$  (лемма 3),  $SS = C$  и  $S^{-1}S = E_n$  получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d = \\ &= \|S^{-1}B'x + Sy + S^{-1}c\|^2 - x'BC^{-1}B'x - 2x'BC^{-1}c - c'C^{-1}c - y'Cy - \\ &\quad - 2x'By - 2c'y + x'Ax + 2x'By + 2a'x + d \geq \\ &\geq x'[A - BC^{-1}B']x + 2x'[a - BC^{-1}c] + d - c'C^{-1}c = f[x] \end{aligned}$$

при  $\forall x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$ , ибо евклидова норма  $\|\cdot\| \geq 0$ . Тогда, по определению сильной гарантии исхода

$$f(x, y) \geq f[x] \forall x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$$

приходим к справедливости (11). □

Этапы III-IV (построение максимальной по Парето стратегии  $x^P$  в задаче  $\Gamma_2$  из (8) и нахождение  $f[x^P]$ ).

Как было установлено утверждением 5, если в  $\Gamma_{lq}$

$$A < 0, \quad m = n, \quad \det B \neq 0, \quad (12)$$

то сильно гарантированный риск  $R_f[x] = 0$  при всех  $x \in \mathbf{R}^n$ , а значит и для максимальной по Парето стратегии  $x^P$  в задаче  $\Gamma_3$  из (8). Поэтому построение максимальной по Парето стратегии в задаче  $\Gamma_{lq}$  при ограничениях (12) и  $C < 0$  сведется к нахождению максимизатора для  $f[x]$ , именно, к

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} f[x] = f[x^P]. \quad (13)$$



### 3.4. Явный вид сильно гарантированного паретовского решения задачи $\Gamma_{lq}$

**Утверждение 7.** Пусть в задаче  $\Gamma_{lq}$

$$A < 0, C > 0, m = n, \det B \neq 0.$$

Тогда

$$x^P = -[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c), \quad (14)$$

$$f[x^P] = -(a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c. \quad (15)$$

*Доказательство.* Достаточные условия существования стратегии  $x^P$  из (13) сводятся к

$$\frac{\partial f[x]}{\partial x} \Big|_{x=x^P} = 2[A - BC^{-1}B']x^P + 2(a - BC^{-1}c) = 0_n, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 f[x]}{\partial x^2} \Big|_{x=x^P} = 2[A - BC^{-1}B']^{-1} < 0. \quad (17)$$

Но (17) имеет место согласно лемме 4 и  $A < 0, C > 0$ , а из равенства (16) получаем, с учетом  $A - BC^{-1}B' < 0$ ,

$$x^P = -[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c).$$

Подставляя найденное здесь  $x^P$  в (11), приходим к

$$\begin{aligned} f[x^P] &= (a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}[A - BC^{-1}B'] \cdot [A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) - \\ &\quad - 2(a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c = \\ &= -(a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c. \end{aligned}$$

□

**Замечание 10.** Итак для ОЗН  $\Gamma_{lq}$  получен следующий результат: если в линейно-квадратичной задаче

$$\Gamma_{lq} = \langle \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d \rangle$$

выполнены ограничения  $A < 0, C > 0, \det B \neq 0$ , то тройка  $(x^P, f[x^P], R_f[x^P])$ , где

$$x^P = -[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c),$$

$$f[x^P] = -(a' - c'C^{-1}B')[A - BC^{-1}B']^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c, \quad (18)$$

$$R_f[x^P] = 0$$

является сильно гарантированным паретовским решением  $\Gamma_{lq}$ .

Этот результат, с точки зрения математической теории игр означает: если ЛПР будет в  $\Gamma_q$  использовать стратегию  $x^P$  из (18), то обеспечит себе сильно гарантированный исход  $f[x^P]$  (см.(18)) с «самым хорошим» для ЛПР нулевым риском  $R_f[x^P] = 0$  (т.е. «наверняка!»). Причем, согласно лемме 4 «существенная» часть этого исхода

$$-(a' - c' C^{-1} B') [A - B C^{-1} B']^{-1} (a - B C^{-1} c) > 0.$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Простейшей конфликтной задачей при неопределенности была и остается «игра с природой», где следует выбрать действие (стратегию), оптимизирующее заданный критерий (например, прибыль). При этом каждое действие сопровождается неполнотой или неточностью информации (неопределенностью) о результатах такого действия.

Здесь возникает вопрос о риске, сопровождающем достигнутый результат. Целое направление исследований такого плана выделяется специальным видом неопределенностей (интервальных), о которых известны лишь границы изменения, но отсутствуют статистические характеристики.

Примером таких неопределенностей может служить задача о диверсификации между различными валютами годового вклада [27].

Неопределенности, о которых известны лишь границы изменения, в России получили [28] название «дурные неопределенности» из-за непредсказуемости их реализаций. Именно для оценки «действий» таких неопределенностей и используется функция риска по Сэвиджу–Нихансу, значение которой при конкретной стратегии и является мерой риска.

В статье решается задача выбора стратегии в ОЗН (однокритериальной задаче при неопределенности), которая бы учитывала, *во-первых*, «действия» неопределенности, *во-вторых*, стремление улучшить (увеличить) исход с одновременным уменьшением связанного с этим риска. Применяя концепцию сильной гарантии из [4, 5], в работе предложен новый подход, учитывающий все три указанных фактора (неопределенность, исход и риск) и сводящийся к построению «игры гарантий», в которой уже не содержится неопределенностей. А уже для игры гарантий решается задача двухкритериальной оптимизации. Заметим, что авторы в дальнейшем надеются применить другой подход из [4, 5], связанный с векторными гарантиями. Но уже предложенный здесь позволил найти явный вид гарантированного по риску и исходу решения в достаточно общем линейно-квадратичном варианте ОЗН и установить,

что гарантированный риск, а значит и любой риск по Нихансу–Сэвиджу, при этом будет нулевым.

Авторы благодарят участников семинара факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова «Риски в сложных системах управления» за обсуждение работы и замечания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-00-90408 Укр\_а и НАН Украины проект №03-01-14.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диев, В. С. Управленческие решения: неопределенность, модели, интуиция. — Новосибирский государственный университет, 2001. — 195 с.

DIEV, V. S. (2001) *Managerial decisions: uncertainty, models, intuition*. Novosibirsk state University. 195 p.

2. Черемных, Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: ИНФРА-М, 2008. — 843 с.

CHEREMNYKH, Yu. N. (2008) *Microeconomics. Advanced level*. М.: INFRA-M.

3. Жуковский, В. И. Риски в конфликтных ситуациях. — М.: URSS, 2011. — 330 с.

ZHUKOVSKIY, V. I. (2011) *Risks in conflict situations*. М.: URSS.

4. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложение. — 2013. — II-Т.5, № 2. — С. 3–45.

ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Balancing conflicts under uncertainty. The Analogue of Maximinus. *Mathematical game theory and its application*. II-V.5, N. 2. p. 3–45.

5. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложение. — 2013. — I-Т.5, № 1. — С. 27–44.

ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Balancing conflicts under uncertainty. The Analogue of a saddle point. *Mathematical game theory and its application*. I-V.5, N. 1. p. 27–44.

6. Жуковский, В. И., Кудрявцев, К. Н., Смирнова, Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: КРАСАНД/URSS, 2013. — 368 с.  
ZHUKOVSKY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N., SMIRNOVA, L. V. (2013) .  
Guaranteed solutions to conflicts and their applications. M: KRASAND/URSS.
7. MARKOVITS, N. P. (1952) Portfolio selection. *Journal of Finance*. Vol. 7. N. 1. p. 77–89.
8. Сиразетдинов, Т. К., Сиразетдинов, Р. Т. Проблема риска и его моделирование // Проблемы человеческого риска. — 2007. — № 1. — С. 31–43.  
SIRAZETDINOV, T. K., SIRAZETDINOV, R. T. (2007) The Problem of risk and its modeling. *Problems of human risk*. V.1. p. 31–43.
9. Шахов, В. В. Введение в страхование. Экономический аспект. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 286 с.  
SHAKHOV, V. V. (2001) *Introduction to insurance. Economic aspect*. M.: Finance and statistics. 286 p.
10. Цветкова, Е. В., Арлюкова, Н. О. Риск в экономической деятельности. — СПб.: ИВЭСЭП, 2002. — 64 с.  
TSVETKOVA, E. V., ARLYKOVA, N. O. (2002) *Risk in economic activities*. SPb.: IVESEP. 64 p.
11. WALD, A. (1939) Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis. *Annals Math. Statist.* V. 10. p. 299–326.
12. WALD, A. (1950) *Statistical Decision Functions*. N.Y.: Wiley. .192 p
13. SAVAGE, L. J. (1951) The theory of statistical decision. *J. American Statistical Association*. N. 46. p. 55–67.
14. NIEHANS, J. (1948) Zur Preisbildungen bei ungewissen Erwartungen. *Schweizerische Gesellschaft fur Volkswirtschaft und Statistik*. V. 84, N. 5. p. 433–456.
15. Гермейер, Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1978. — 327 с.  
GERMEYER, Yu. B. (1978) *Games with neprotivlenie interests*. Moscow: Nauka. 327 p.

16. Кукушкин, И. С., Морозов, В. В. Теория неантагонистических игр. — М: МГУ им. М.В.Ломоносова, 1984. — 156 с.  
KUKUSHKIN, I. S., MOROZOV, V. V. (1984) *Theory of non-antagonistic games*. M.: MGU im. M. V. Lomonosov. 156 p.
17. Красовский, Н. Н., Субботин, А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.  
KRASOVSKII, N. N., SUBBOTIN, A. I. (1974) *Positional differential games*. Moscow: Nauka. 456 p.
18. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1986. — 286 с.  
MOROZOV, V., SUHAREV, A. and FEDOROV, V. (1986) *Operations research in problems and exercises*. Moscow: Nauka. 286 p.
19. Ватель, И. А., Ерешко, Ф. И. Игра с иерархической структурой // Математическая энциклопедия. — М, 1979. — Т.2. — С. 477–481.  
VATEL ' I. A. and ERESHKO F. I. (1979) A Game with a hierarchical structure. *Mathematical encyclopedia*. M. V.2. p. 477–481.
20. Ватель, И. А., Ерешко, Ф. И. Математика конфликта и сотрудничества. — М.: Знание, 1974. — 64 с.  
VATEL ' I. A. and ERESHKO F. I. (1974) *Mathematics of conflict and cooperation*. Moscow: Znanie. 64 p.
21. ZHUKOVSKIY, V. I., MAKARKINA, T. V. and VYSOKOS, M. I. (2007) A New Approach to Noncooperative Game Under Uncertainty. *International Game Theory Review*. V. 2, N. 19. p. 1750024-1–1750024-19. DOI 10. 1142/s0219198917500244
22. Подиновский, В. В., Ногин, В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с.  
PODINOVSKI, V. V., NOGIN, V. D. (2007) *Pareto optimal solutions of multicriteria problems*. M.: FIZMATLIT. 256 p.
23. PARETO, V. (1909) *Manuel d'economie politique*. Paris: Geard.
24. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. (1994) *The Vector-Valued Maximin*. N.Y. etc.: Academic Press. .396 p.

25. Эрроу, К. Дж., Гурвиц, Л., Удзава, Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. — М.: ИНЛ, 1962. — 336 с.  
ARROW, K. J., GURVITS, L., UZAWA, H. (1962) *Studies in linear and nonlinear programming*. M: INL. 336 p.
26. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.  
VOEVODIN, V. V., KUZNETSOV, Yu. A. (1984) *Matrices and calculations*. Moscow: Nauka. 318 p.
27. ZHUKOVSKIY, V. I., MOLOSTVOV, V. S. and TOPCHISHVILI, A. L. (2014) Problem of multicurrency deposit diversification - three possible approaches to risk accounting. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. V. 20, N. 1. p. 1–14.
28. Вентцель, Е. С. Исследование операций. — М.: Наука, 1988. — 208 с.  
VENTZEL, E. S. (1988) *Operations Research*. Moscow: Nauka. 208 p.

УДК: 517.968

MSC2010: 45A05, 45F05

## О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

© А. С. Калитвин, В. А. Калитвин, Н. И. Трусова

ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. П. СЕМЕНОВА-ТЯН-ШАНСКОГО  
ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ, МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК  
УЛ. ЛЕНИНА, 42, ЛИПЕЦК, 398020, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: kalitvinas@mail.ru, kalitvin@gmail.com, trusova.nat@gmail.com

ON THE SYSTEMS OF ROMANOVSKIJ TYPE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS.

Kalitvin A. S., Kalitvin V. A., Trusova N. I.

**Abstract.** Systems of linear integral equations are studied in spaces of continuous and continuously differentiable on the square of vector functions.

The systems considered in the paper contain matrix partially integral operators and Romanovsky matrix operators. Systems of equations with such operators are not Fredholm in any of the spaces mentioned, even in the general case of given smooth kernels. The paper considers systems of equations with kernels from the space of vector functions continuous on a square with values in the space of functions summable on an interval.

Theorem 2 contains conditions under which the Fredholm property of a system of linear integral equations of Romanovskii type with partial integrals in the space of continuous vector functions is equivalent to the invertibility of a simpler system of linear integral equations with partial integrals. In obtaining these conditions, the S.M. Nikol'skii theorem on the representation of the Fredholm operator as a sum of reversible and compact operators was used. Specific classes of kernels for which the statement of Theorem 2 is true are given, a special case of a system of linear integral Romanovski type equations with partial integrals is considered, for which the Fredholm system is equivalent to the invertibility of linear integral equations with a parameter for each parameter value. Theorem 5 contains the Fredholm conditions for a system of integral equations of the Romanovsky type with partial integrals and continuously differentiable kernels in the space of continuously differentiable vector functions.

**Keywords:** *systems of Romanovskij type linear integral equations, partial integrals, fredholmness of systems, invertibility of systems, matrix operators and equations, kernels of potential type.*

## ВВЕДЕНИЕ

В 1932 году известный советский математик В. И. Романовский, описал задачу теории марковских цепей с двухсторонней связью, которая приводится к интегральному уравнению

$$x(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(\sigma, t)d\sigma + f(t, s) \equiv (Rx)(t, s) + f(t, s). \quad (1)$$

Уравнение (1) с непрерывным по совокупности переменных ядром  $m(t, s, \sigma)$  было исследовано В. И. Романовским в [1] методом, аналогичным методу определителей Фредгольма. Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно содержит частный интеграл, в котором у неизвестной функции сначала переставляются переменные и лишь затем производится интегрирование по одной из переменных. Поэтому линейный оператор  $R$  из уравнения (1) не является компактным оператором в пространстве непрерывных функций. В силу критерия А. В. Бухвалова об интегральном представлении линейного непрерывного оператора [2] оператор  $R$  не является интегральным оператором в этом же пространстве.

Отметим, что более общие классы линейных интегральных уравнений типа Романовского при более общих предположениях относительно ядер изучались в [3].

Системы линейных интегральных уравнений Романовского

$$x_i(t, s) = \sum_{j=1}^n \int_a^b m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(\sigma, t)d\sigma + f_i(t, s), i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

с операторами типа оператора  $R$  исследовались в [4].

В данной работе изучаются системы линейных интегральных уравнений, содержащие линейные операторы с частными интегралами и линейные операторы типа оператора  $R$ .

Через  $L_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $L$  и  $M$  будем обозначать операторы, определяемые равенствами

$$(L_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau, i, j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$(M_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^b m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(t, \sigma)d\sigma, i, j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$L = (L_{ij})_{i,j=1}^n, M = (M_{ij})_{i,j=1}^n, \quad (5)$$



где  $t, s, \tau, \sigma \in [a, b]$ , функции  $l_{ij}(t, s, \tau), m_{ij}(t, s, \sigma)$  измеримы по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть  $D = [a, b] \times [a, b]$ ,  $C(D)$  — пространство непрерывных на  $D$  функций,  $C^{(1)}(D)$  — пространство непрерывно дифференцируемых на  $D$  функций,  $C_n(D)$  и  $C_n^{(1)}(D)$  — пространства вектор-функций

$$x(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s)), \quad (6)$$

где  $x_j \in C(D)$  и  $x_j \in C^{(1)}(D)$  соответственно,  $j = 1, \dots, n$ . Нормы в пространствах  $C_n(D)$  и  $C_n^{(1)}(D)$  определяются равенствами

$$\|x\|_{C_n(D)} = \max(\|x_1\|_{C(D)}, \dots, \|x_n\|_{C(D)}), \text{ где } \|x_k\|_{C(D)} = \max_{(t,s) \in D} |x_k(t, s)|, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\|x\|_{C_n^{(1)}(D)} = \max(\|x_1\|_{C^{(1)}(D)}, \dots, \|x_n\|_{C^{(1)}(D)}),$$

где  $\|x_k\|_{C^{(1)}(D)}$  — норма функции  $x_k$  в пространстве  $C^{(1)}(D)$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Через  $\Pi$  обозначим оператор перестановки переменных у функции  $x(t, s)$ , т. е.  $\Pi : x(t, s) \rightarrow x(s, t)$ . Очевидны следующие свойства оператора  $\Pi$ :

1.  $\Pi$  — линейный непрерывный оператор в  $C(D)$  и в  $C^{(1)}(D)$ ;
2.  $\|\Pi\| = 1$ ;
3.  $\Pi \circ \Pi = I$ , где  $I$  — единичный оператор;

Будем рассматривать в пространствах  $C_n(D)$  и  $C_n^{(1)}(D)$  системы интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами следующего вида:

$$x_i(t, s) = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau, s) d\tau + \int_a^b m_{ij}(t, s, \sigma) x_j(\sigma, t) d\sigma \right) + f_i(t, s), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Отметим, что система (2) есть частный случай системы (7).

Систему уравнений (7) запишем в виде

$$x(t, s) = ((L + M\Pi)x)(t, s) + f(t, s), \quad (8)$$

где  $x(t, s)$  — вектор-функция (6),  $f(t, s) = (f_1(t, s), \dots, f_n(t, s))$ , а  $L, M$  — матричные операторы (5).

### 1. УСЛОВИЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $C_n(D)$

Действие в  $C_n(D)$  оператора  $L + M\Pi$ , очевидно, равносильно действию в  $C(D)$  оператора  $L_{ij} + M_{ij}\Pi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). В [3] показано, что действующий в пространстве  $C(D)$  оператор  $L_{ij} + M_{ij}\Pi$  непрерывен. Отсюда вытекает

**Теорема 1.** *Равносильны утверждения:*

1. В  $C_n(D)$  действует оператор  $L + M\Pi$ ;
  2. В  $C(D)$  действуют операторы  $L_{ij} + M_{ij}\Pi$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .
- При этом оператор  $L + M\Pi$  непрерывен.

Отметим, что критерии действия и достаточные условия действия операторов  $L_{ij} + M_{ij}\Pi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) в  $C(D)$  приведены в [3].

Через  $C(L^1)$  обозначим пространство непрерывных на  $D$  вектор-функций со значениями в  $L^1 = L^1([a, b])$ . Пространство  $C(L^1)$  состоит из функций  $a(t, s, \sigma)$  со следующими свойствами:

$$\int_a^b |a(t, s, \sigma)| d\sigma \leq \text{const} < \infty; \quad (9)$$

для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $|t_1 - t_2| < \delta$ ,  $|s_1 - s_2| < \delta$

$$\int_a^b |a(t_1, s_1, \sigma) - a(t_2, s_2, \sigma)| d\sigma < \varepsilon. \quad (10)$$

$C(L^1)$  — банахово пространство относительно нормы

$$\|a\|_{C(L^1)} = \sup_D \int_a^b |a(t, s, \sigma)| d\sigma.$$

Аналогично определяется пространство  $C(L^1(D))$  и пространство  $C_{[a,b]}(L^1)$ , состоящее из измеримых функций  $b(t, s, \sigma, \sigma_1)$  и  $u(t, \tau)$  соответственно.

Будем называть линейное уравнение  $x = Ax + f$ , где  $A$  — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве  $X$  и  $f \in X$ , обратимым (фредгольмовым) уравнением в банаховом пространстве  $X$ , если оператор  $I - A$  обратим (фредгольмов, т. е. имеет замкнутое множество значений и нулевой индекс).

**Теорема 2.** Пусть  $l_{ij}, m_{ij} \in C(L^1)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) и пусть  $f \in C_n(D)$ . Тогда в  $C_n(D)$  фредгольмовость системы (7) равносильна фредгольмовости уравнения  $x = Lx + f$ .

*Доказательство.* Система (7) эквивалентна уравнению (8). Запишем это уравнение в виде

$$(I - L)(I - M\Pi)x = LM\Pi x + f. \quad (11)$$

В силу теоремы Фубини оператор  $LM\Pi$  допускает представление

$$(LM\Pi x)(t, s) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_a^b l_{ik}(t, s, \tau) m_{kj}(\tau, s, \sigma) x_j(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Так же, как в [3, 5], показывается, что при  $i, j = 1, \dots, n$  ядро интегрального оператора

$$(A_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^b \int_a^b l_{ik}(t, s, \tau) m_{kj}(\tau, s, \sigma) x_j(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$$

принадлежит  $C(L^1(D))$ . Тогда оператор  $A_{ij}$  компактен в  $C(D)$ . Следовательно, оператор (12) компактен в  $C_n(D)$ .

В силу устойчивости фредгольмовости уравнений относительно компактных возмущений [6] фредгольмовость уравнения (11) равносильна фредгольмовости уравнения

$$(I - L)(I - МП)x = f. \quad (13)$$

С применением теоремы Фубини показывается, что оператор  $(МП)^2$  допускает представление

$$((МП)^2x)(t, s) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_a^b m_{ik}(t, s, \sigma_1) m_{kj}(\sigma_1, t, \sigma) x_j(\sigma, \sigma_1) d\sigma d\sigma_1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому оператор  $(МП)^2$  компактен в пространстве  $C_n(D)$ . Следовательно [2], оператор  $I - МП$  фредгольмов в  $C_n(D)$ . По теореме С. М. Никольского [2]  $I - МП = G + Q$ , где  $G$  — обратимый, а  $Q$  — компактный в  $C_n(D)$  операторы. Тогда уравнение (13) можно записать в виде

$$(I - L)Gx + (I - L)Qx = f. \quad (14)$$

Так как  $(I - L)Q$  — компактный в  $C_n(D)$  оператор, то отсюда следует, что фредгольмовость уравнения (14) равносильна фредгольмовости уравнения

$$(I - L)Gx = f. \quad (15)$$

В силу обратимости оператора  $G$  фредгольмовость в  $C_n(D)$  уравнения (15), очевидно, равносильна фредгольмовости в  $C_n(D)$  уравнения  $(I - L)x = f$ .  $\square$

Так как непрерывные функции  $l_{ij}, m_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) принадлежат  $C(L^1)$ , то из теоремы 2 вытекает, что в пространстве  $C_n(D)$  фредгольмовость системы (7) интегральных уравнений Романовского с непрерывными ядрами равносильна фредгольмовости уравнения  $(I - L)x = f$ .

Утверждение теоремы 2 справедливо, если ядра  $l_{ij}, m_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) — ограниченные измеримые функции, имеющие разрывы только вдоль конечного числа поверхностей  $\tau = \varphi_{ij}(t, s)$ ,  $\sigma = \psi_{ij}(t, s)$  с непрерывными функциями  $\varphi_{ij}$  и  $\psi_{ij}$ , более того, оно справедливо, если ограниченность функций заменить неравенствами

$\|\varphi_{ij}(t, s, \cdot)\|_{L^p} \leq c < \infty$ ,  $\|\varphi_{ij}(t, s, \cdot)\|_{L^p} \leq c < \infty$  ( $1 < p < \infty$ ), так как при этих условиях  $l_{ij}, m_{ij} \in C(L^1)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) [3].

Утверждение теоремы 2 справедливо для системы (7) с ядрами типа потенциала, т. е. с ядрами вида

$$l_{ij}(t, s, \tau) = \frac{\bar{l}_{ij}(t, s, \tau)}{|t - \tau|^{\alpha_{ij}}}, m_{ij}(t, s, \sigma) = \frac{\bar{m}_{ij}(t, s, \sigma)}{|s - \sigma|^{\beta_{ij}}},$$

где  $0 < \alpha_{ij}, \beta_{ij} < 1$ , а  $\bar{l}_{ij}, \bar{m}_{ij}$  — непрерывные функции,  $i, j = 1, \dots, n$ , так как ядра типа потенциала принадлежат  $C(L^1)$  [3].

Частным случаем системы (7) является система

$$x_i(t, s) = \int_a^b l_i(t, s, \tau)x_i(\tau, s)d\tau + \sum_{j=1}^n \int_a^b m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(\sigma, t)d\sigma + f_i(t, s), i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

В условии теоремы 2 уравнение  $(I - L)x = f$  принимает вид

$$x_i(t, s) = \int_a^b l_i(t, s, \tau)x_i(\tau, s)d\tau + f_i(t, s), i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

В этом случае фредгольмовость системы (17) в пространстве  $C_n(D)$  равносильна фредгольмовости в  $C(D)$  каждого из уравнений системы (17). В силу [7, 8] фредгольмовость уравнений системы (17) с ядрами из  $C(L^1)$  в  $C(D)$  равносильна их обратимости в  $C(D)$ , которая равносильна обратимости в  $C([a, b])$  уравнений

$$x_i(t) = \int_a^b l_i(t, s, \tau)x_i(\tau)d\tau + f_i(t), i = 1, \dots, n, s \in [a, b], f_i \in C([a, b]). \quad (18)$$

Поэтому справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $l_i, m_{ij} \in C(L^1)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) и пусть  $f \in C_n(D)$ . Тогда в  $C_n(D)$  фредгольмовость системы (16) равносильна обратимости уравнений (17), которая равносильна обратимости в  $C([a, b])$  уравнений (18).

Уравнение  $x = Lx + f$  запишем в виде системы

$$x_i(t, s) = \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau + f_i(t, s), i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Систему уравнений (19) с частными интегралами можно рассматривать как систему интегральных уравнений с параметром  $s$ . Так как при каждом фиксированном

$s \in [a, b]$  интегральные операторы

$$L_{ij}(s)x_j(t) = \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau)d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \quad (20)$$

имеют ядра из  $C_{[a,b]}(L^1)$ , то эти операторы компактны в пространстве  $C([a, b])$ . Тогда при каждом фиксированном  $s \in [a, b]$  для системы (18), рассматриваемой в пространстве  $C_n([a, b])$ , справедливы теоремы Фредгольма.

Покажем, что в условии теоремы 2 фредгольмовость системы (19) в  $C_n(D)$  равносильна обратимости в  $C_n([a, b])$  этой же системы при любом фиксированном  $s \in [a, b]$ .

Пусть система (19) фредгольмова в  $C_n(D)$ . Докажем, что эта система обратима в  $C_n([a, b])$  при любом  $s \in [a, b]$ .

Предположим противное. Тогда при некоторых  $s_0 \in [a, b]$  и  $i_0$  оператор  $I - L_{i_0}(s_0)$ , где

$$L_{i_0}(s_0)x(t) = \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{i_0j}(t, s_0, \tau)x_j(\tau)d\tau,$$

не имеет обратного оператора, определенного на  $C_n([a, b])$ . Так как  $L_{i_0}(s_0)$  — компактный в  $C_n([a, b])$  оператор, то 1 — собственное число оператора  $L_{i_0}(s_0)$ , которому соответствует нормированная собственная вектор-функция  $x_0(t) = (x_{01}(t), \dots, x_{0n}(t))$  из  $C_n([a, b])$ . Тогда

$$x_0(t) = L_{i_0}(s_0)x_0(t). \quad (21)$$

Выберем в  $C_n([a, b])$  некомпатную последовательность нормированных вектор-функций  $\bar{y}_k(s) = (y_{k1}(s), \dots, y_{kn}(s))$ , где  $y_{k1}(s) = \dots = y_{kn}(s) = y_k(s)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда  $x_0(t) \otimes \bar{y}_k(s) = (x_{01}(t)y_k(s), \dots, x_{0n}(t)y_k(s))$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — некомпатная последовательность нормированных собственных вектор-функций в  $C_n(D)$ . При  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} |(I - L)x_0(t)\bar{y}_k(s)| &= \left| y_k(s) \left( x_{0i}(t) - \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau)x_{0j}(\tau)d\tau \right) \right| \leq \\ &\leq |y_k(s)| \left| x_{0i}(t) - \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s_0, \tau)x_{0j}(\tau)d\tau \right| + \\ &+ |y_k(s)| \sum_{j=1}^n \int_a^b |l_{ij}(t, s_0, \tau) - l_{ij}(t, s, \tau)| |x_{0j}(\tau)| d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |y_k(s)| \sum_{j=1}^n \int_a^b |l_{ij}(t, s_0, \tau) - l_{ij}(t, s, \tau)| |x_{0j}(\tau)| d\tau \leq \\
&\leq |y_k(s)| \sum_{j=1}^n \int_a^b |l_{ij}(t, s_0, \tau) - l_{ij}(t, s, \tau)| d\tau \|x_0\|_{C_n([a,b])}. \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_a^b |l_{ij}(t, s_0, \tau) - l_{ij}(t, s, \tau)| d\tau \|x_0\|_{C_n([a,b])}. \tag{22}
\end{aligned}$$

В силу (10) для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $|s - s_0| < \delta$  выполняется неравенство

$$\int_a^b |l_{ij}(t, s_0, \tau) - l_{ij}(t, s, \tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{n \|x_0\|_{C_n([a,b])}}.$$

Отсюда и (22) следует, что  $\|(I - L)x_0(t)\bar{y}_k(s)\| < \varepsilon$ .

Таким образом, некомпактную последовательность нормированных функций  $x_0 \otimes y_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) оператор  $I - L$  переводит в сходящуюся к нулю последовательность. В силу теоремы Вольфа [9, с. 294] оператор  $I - L$  не является фредгольмовым. Это противоречит предположению о фредгольмовости оператора  $I - L$ , следовательно, и системы (19). Поэтому из фредгольмовости системы (19) вытекает обратимость системы (19) в  $C_n([a, b])$  при любом  $s \in [a, b]$ .

Предположим теперь, что операторы семейства  $I - L_i(s)$ , где

$$L_i(s)x(t) = \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau) d\tau, i = 1, \dots, n, s \in [a, b],$$

обратимы в  $C_n([a, b])$ .

Покажем, что оператор  $I - L$  обратим в  $C_n(D)$ . Для этого достаточно показать, что система (19) однозначно разрешима в  $C_n(D)$  при любых непрерывных функциях  $f_1, \dots, f_n$ .

Предположим противное. Тогда либо однородное уравнение  $x(t, s) = (Lx)(t, s)$  имеет в  $C_n(D)$  различные решения, либо неоднородная система (19) не имеет в  $C_n(D)$  решений при некоторых непрерывных функциях  $f_1, \dots, f_n$ .

Если уравнение  $x(t, s) = (Lx)(t, s)$  имеет в  $C_n(D)$  различные решения  $x_1(t, s)$  и  $x_2(t, s)$ , то при некотором фиксированном  $s_0 \in [a, b]$   $x_1(t, s_0) \neq x_2(t, s_0)$ . Следовательно, уравнение  $x(t) = L(s_0)x(t)$  имеет в  $C_n([a, b])$  различные решения, что противоречит обратимости оператора  $I - L(s_0)$ , рассматриваемого в  $C_n([a, b])$ .

Если уравнение  $x(t, s) = (Lx)(t, s) + f(t, s)$  не имеет решений при некоторых функциях  $f_1, \dots, f_n \in C(D)$ , то на некотором множестве  $D_f \subset D$  ненулевой меры не выполняются равенство (19) при  $x \in C_n(D)$ . Тогда на некотором множестве  $\{(t, s_1) | (t, s_1) \in D_f\}$  ненулевой меры по  $t$  не выполняются равенства

$$x_i(t, s_1) = \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s_1, \tau) x_j(\tau, s_1) d\tau + f_i(t, s_1), i = 1, \dots, n,$$

что противоречит обратимости оператора  $I - L(s_1)$ , рассматриваемого в  $C_n([a, b])$ .

Следовательно, оператор  $I - L$  обратим на  $C_n(D)$ .

Так как обратимый оператор является фредгольмовым, то из приведенных рассуждений видно, что в  $C_n(D)$  фредгольмовость оператора  $I - L$  равносильна его обратимости и равносильна обратимости в  $C_n([a, b])$  операторов  $I - L_i(s)$  ( $s \in [a, b]$ ).

Из проведенных рассуждений и теоремы 2 вытекает

**Теорема 4.** Пусть  $l_{ij}, m_{ij} \in C(L^1)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) и пусть  $f \in C_n(D)$ . Тогда фредгольмовость системы (7) в  $C_n(D)$  равносильна обратимости в  $C_n([a, b])$  при каждом  $s \in [a, b]$  системы

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau) x_j(\tau) d\tau + f_i(t), i = 1, \dots, n, \tag{23}$$

где  $f_i \in C([a, b])$ .

Методом, предложенным Фредгольмом для системы интегральных уравнений, система (19) линейных уравнений с частными интегралами может быть записана в виде уравнения

$$y(t, s) = \int_T k(t, s, \tau) y(\tau, s) d\tau + g(t, s), \tag{24}$$

где для простоты обозначений положено  $a = 0, b = 1, T = [0, n]$ ,

$$k(t, s, \tau) = l_{ij}(t - i + 1, s, \tau - j + 1) \text{ для } i - 1 < t < i, j - 1 < \tau < j, i, j = 1, \dots, n,$$

$$g(t, s) = f_i(t - i + 1, s), y(t, s) = x_i(t - i + 1, s) \text{ для } i - 1 < t < i, i = 1, \dots, n.$$

В [7] показано, что уравнение (24) с  $T = [a, b]$  и с ядром из  $C(L^1)$  фредгольмово в  $C(T \times T)$  точно тогда, когда оно обратимо в  $C(T \times T)$ . Однако, даже в случае

непрерывных функций  $l_{ij}$  ядро  $k(t, s, \tau)$  этого уравнения может иметь разрывы на прямых  $t = 1, \dots, n-1$  и  $\tau = 1, \dots, n-1$ . Поэтому уравнение (24) целесообразно рассматривать в  $L^\infty(T \times T)$  при условии, что  $l_{ij} \in C(L^1)$  и  $t, \tau \in [0, 1]$ .

## 2. УСЛОВИЯ ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $C_n^{(1)}(D)$

Так же, как и в предыдущем разделе, операторы  $L_{ij}, M_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) не являются компактными в  $C^{(1)}(D)$  даже в случае непрерывно дифференцируемых ненулевых ядер. Тогда и оператор МП с такими же ядрами не является компактным оператором в  $C_n^{(1)}(D)$ . Однако операторы ЛМП, (МП)<sup>2</sup> при естественных условиях на ядра являются компактными в  $C_n^{(1)}(D)$ . Данное обстоятельство позволяет получить условия фредгольмовости системы (7) в  $C_n^{(1)}(D)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $f \in C_n^{(1)}(D)$  и пусть  $l_{ij}, m_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда фредгольмовость системы (7) в  $C_n^{(1)}(D)$  равносильна обратимости в  $C_n^{(1)}([a, b])$  при каждом  $s \in [a, b]$  системы (23).

Доказательство теоремы проводится по тем же схемам, что и доказательства теорем 2 и 4.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты:

1. Установлены условия, при которых в пространстве непрерывных на квадрате вектор-функций фредгольмовость системы линейных интегральных уравнения типа Романовского с частными интегралами равносильна обратимости более простой системы линейных интегральных уравнений с частными интегралами.

2. Установлена теорема о равносильности фредгольмовости частного случая системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами обратимости в пространстве непрерывных функций при каждом значении параметра интегральных уравнений, зависящих от параметра.

3. Получены условия фредгольмовости системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывно дифференцируемых на квадрате вектор-функций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ROMANOVSKIJ, V. I. Sur une classe d'equations integrales lineares / V. I. Romanovskij. — Acta Math., 1932. — Vol. 59. с. 99–208.



2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.  
KANTOROVICH, L. V. & AKILOV, G. P. (1984) *Functional analysis*. Moscow: Nauka.
3. Калитвин, А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2014. — 196 с.  
KALITVIN, A. S. (2014) *Integral equations of Romanovskij type with partial integrals*. Lipetsk: LGPU.
4. Калитвин, А. С. Системы интегральных уравнений Романовского с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин, Н. И. Трусова // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика / 2016. — № 6 (227), вып. 42. — С. 45–49.  
KALITVIN, A. S. & KALITVIN, V. A. & TRUSOVA, N. I (2016) The systems of Romanovskij integral equations with partial integrals. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. № 6 (227). p. 45–49.
5. APPELL, J. M. A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type / J. M. Appell, & I. A. Eletsikh, & A. S. Kalitvin. — Journal of integral equations and applications, 2004. — Vol. 16. с. 25–32.
6. Крейн, С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1971. — 104 с.  
KREIN, S. G. (1971) *Linear equations in a Banach space*. Moscow: Nauka.
7. KALITVIN, A. S. On a Class of Integral Equations in the Space of Continuous Functions / A. S. Kalitvin. — Differential Equations, 2006. — Vol. 42. с. 1262–1268.
8. Калитвин, А. С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2013. — 177 с.  
KALITVIN, A. S. & KALITVIN, V. A. (2013) *Integral equations of Volterra and Volterra-Fredholm with partial integrals*. Lipetsk: LGPU.
9. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.  
КАТО, Т. (1972) *Perturbation Theory for Linear Operators*. Moscow: Mir.

УДК: 517.9

MSC2010: 37C05

## О НОВЫХ ИНВАРИАНТАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КУПКИ–СМЕЙЛА НА СФЕРЕ БЕЗ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

© А. И. Морозов, О. В. Починка

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ, МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

ул. Большая Печерская, д. 25/12, Нижний Новгород, 603155, Российская Федерация.

E-MAIL: [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

**ABOUT NEW INVARIANTS OF KUPKA–SMALE DIFFEOMORPHISMS ON THE SPHERE  
WITHOUT SOURCES AND SINKS.**

**Morozov A. I. Pochinka O. V.**

### **Abstract.**

We know a lot of cases, when topological entropy of continuous map determine by structure of periodic orbits. The classical result in this field is the Sharkovskiy ordering. Sharkovskiy [6] enter mapping, that turn manifold of natural numbers in to ordered set as follows:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \\ \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

It is valid for continuous interval maps. The existence of a periodic orbit of period three implies the existence of periodic points of any period and topological entropy is positive. We have different situation for orientation-preserving homeomorphism functioning on twodimensional disk  $\mathbb{D}^2$ : the rotation of the disk have topological entropy zero, but such mapping can have point of any period. In J. M. Gambaudo, S. Van Strien and C. Tresser work [1] they determine hereditary rotation compatible of periodic orbit and proven, that any periodic orbit of orientation-preserving homeomorphism  $f$  on  $\mathbb{D}^2$  with topological entropy zero are hereditary rotation compatible. Moreover, if  $f$  have the smoothness class  $C^{1+\epsilon}$ , than the condition on periodic orbit are necessary and sufficient to conclude that topological entropy of  $f$  equal zero.

It means, that any diffeomorphism with topological entropy zero on the disk have very simple structure of periodic orbits. Around fixed point located periodic orbit of some period, wich is turning around fixed point and then, around every point of periodic orbit turning another periodic orbit. According that, depending on your choice superstructure, appropriate periodic orbit superstructures flow regular have (fig.1) engagement. Thus, irregular engagement of orbit will be a  $C^1$  - barrier.

Cascade periodic orbits of orientation-preserving map on disk can be matched with signature, consisting of a sequence  $l_n, n > 0$  rational numbers, that every  $l_n$  describe, how orbits of period  $q_{n+1}$  associated with orbits of period  $q_n$ . Moreover, with any sequence of signature and periods we

can build orientation-preserving homeomorphism of twodimensional disk with specified signature of cascade periodic orbits. However, exist topological barrier for realisation this cascade with orientation-preserving diffeomorphism of twodimensional disk. Thus, in J. M. Gambaudo, D. Sullivan, C. Tresser [3] work we can see, that sequence  $\lambda_n = \frac{l_n}{q_n}$  is converge for  $C^1$ -map. Limit of this sequence call asymptotic number of rotation.

Classic cascade period doubling on disk have sequence  $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$  and realize by infinitely smooth diffeomorphism [3]. In R. Bowen and J. Franks works ([4] и [5]) built diffeomorfisms, realize sequence  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  in smoothness class  $C^1$  and  $C^2$  respectively. Also in work [4] there is a hypothesis about unachievable sequence  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  for map in smoothness class more than two.

In this work we introduce another invariant, that distinguish diffeomorphisms, wich built using different sequence of signature. We build diffeomorphisms  $f_+, f_- : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , which are double applied period doubling bifurcation to diffeomorphism source-sink with turning in one direction at  $f_+$  and turning in different directions at  $f_-$ . Resultant diffeomorphisms have only one sink point  $\omega_+, \omega_-$ , one source orbit  $\mathcal{O}_{\alpha_+}, \mathcal{O}_{\alpha_-}$  and two saddle orbit  $\mathcal{O}_{\sigma_+^1}, \mathcal{O}_{\sigma_+^2}, \mathcal{O}_{\sigma_-^1}, \mathcal{O}_{\sigma_-^2}$  respectively. Then we consider orbit spaces of the sink basin

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

and natural projection

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow \hat{V}_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow \hat{V}_-.$$

Since saddle points are hyperbolic, them orbits have invariant neighbourhoods  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Let

$$\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2).$$

Threes

$$S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$$

we call scheme of diffeomorphisms  $f_+, f_-$ , respectively.

The main result of this paper is the theorem below.

**Theorem 1.** *Scheme  $S_+, S_-$  are not equivalent, that is not exist homeomorphism  $\varphi : \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$ , such that  $\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1, \varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2$ .*

**Keywords:** *Kupka–Smale diffeomorphism, cascade of periodic orbits, unstable manifold, stable manifold, orientation-preserving diffeomorphism, topological entropy*

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Хорошо известны случаи, когда топологическая энтропия непрерывного отображения определяется структурой периодических орбит. Классическим результатом в

этом направлении является порядок А. Н. Шарковского. Отношение, введенное Шарковским [6], превращает множество натуральных чисел в упорядоченное множество и притом упорядоченное следующим образом:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \dots \\ \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Оно действительно для непрерывных отображений интервалов. Согласно этому порядку, существование периодической орбиты периода три влечет наличие периодических точек любого периода и, следовательно, положительное значение топологической энтропии. Для сохраняющего ориентацию гомеоморфизма, действующего на двумерном диске  $\mathbb{D}^2$ , ситуация иная: поворот диска имеет нулевую топологическую энтропию, при этом может иметь точки любого наперед заданного периода. В работе Ж. Гамбадо, С. Ван Стрина и С. Триссера [1] введено понятие *наследственно согласованной по вращению* периодической орбиты и доказано, что все периодические орбиты сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов  $f$  диска  $\mathbb{D}^2$  с нулевой топологической энтропией являются наследственно согласованными по вращению. Более того, если  $f$  имеет класс гладкости  $C^{1+\varepsilon}$ , то описанное условие на периодические орбиты является необходимым и достаточным для того, чтобы топологическая энтропия отображения  $f$  равнялась нулю.

То есть любой диффеоморфизм с нулевой топологической энтропией на диске имеет очень простую структуру периодических орбит. Вокруг неподвижной точки расположена периодическая орбита некоторого периода, которая вращается вокруг неподвижной точки, а затем вокруг каждой точки периодической орбиты вращается другая периодическая орбита. При этом, с точки зрения рассмотрения надстройки, соответствующие периодические орбиты надстроечного потока (см. рисунок 1) имеют регулярные зацепления. Таким образом, не регулярная зацепленность орбит является  $C^1$ -препятствием.

Каскаду периодических орбит сохраняющего ориентацию отображения диска можно сопоставить сигнатуру, состоящую из последовательности  $l_n, n \geq 0$  рациональных чисел таких, что каждое  $l_n$  описывает, как орбиты периода  $q_{n+1}$  связаны с орбитами периода  $q_n$ . Более того, по любой последовательности сигнатур и периодов можно построить сохраняющий ориентацию гомеоморфизм 2-диска с заданной сигнатурой каскада периодических орбит. Однако существуют топологические препятствия для реализации такого каскада сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом 2-диска. А именно, из работы Ж. Гамбадо, Д. Салливана и С. Триссера [3] следует,

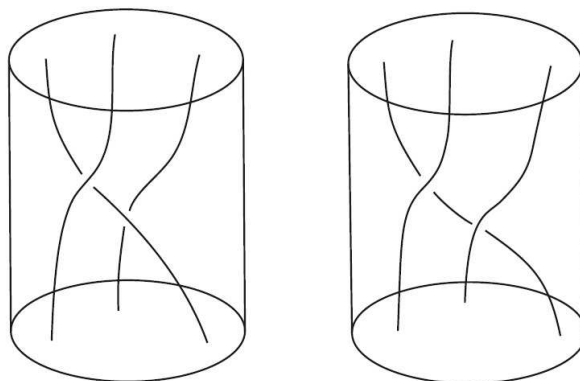


Рис. 1. Отображение слева имеет положительную топологическую энтропию. Изображение справа не дает никакой информации о топологической энтропии отображения.

что последовательность  $\lambda_n = \frac{l_n}{q_n}$  является сходящейся для  $C^1$ -отображений. Предел этой последовательности называется *асимптотическим числом вращения*.

Классический каскад удвоения периодов на диске имеет последовательность  $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$  и реализуется бесконечно гладким диффеоморфизмом (см. [3]). В работах Р. Боуэна, Дж. Френкса, [4] и [5] построены диффеоморфизмы, реализующие последовательность  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  в классах гладкости  $C^1$  и  $C^2$ , соответственно. Также в работе [4] высказана гипотеза о нереализуемости последовательности  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$  отображением класса гладкости большего двух.

В данной работе мы вводим еще один инвариант, различающий диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы строим диффеоморфизмы  $f_+, f_- : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону в случае  $f_+$  и в разные стороны, в случае  $f_-$ . Результирующие диффеоморфизмы имеют единственную стоковую точку  $\omega_+, \omega_-$ , одну источниковую орбиту  $\mathcal{O}_{\alpha_+}, \mathcal{O}_{\alpha_-}$  и две седловые орбиты  $\mathcal{O}_{\sigma_+^1}, \mathcal{O}_{\sigma_+^2}, \mathcal{O}_{\sigma_-^1}, \mathcal{O}_{\sigma_-^2}$ , соответственно. Далее мы рассматриваем пространства орбит бассейнов стока

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

и естественные проекции

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow \hat{V}_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow \hat{V}_-.$$

В силу гиперболичности седловых точек, их орбиты обладают инвариантными окрестностями  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Положим

$$\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2).$$

Тройки

$$S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$$

назовем *схемами диффеоморфизмов*  $f_+, f_-$ , соответственно.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Схемы  $S_+, S_-$  являются неэквивалентными, то есть не существует гомеоморфизма  $\varphi: \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$  такого, что*

$$\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1, \varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2.$$

## 2. КАСКАДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

Пусть  $g$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм на двумерном диске  $\mathbb{D}^2$ . Каскад периодических орбит отображения  $g$  — это последовательность периодических орбит  $\{O_n\}_{n \leq 0}$  периода  $\{q_n\}_{n \leq 0}$  такого, что для каждого  $n \leq 1$  выполняются условия:

1.  $q_n = a_n \cdot q_{n-1}$  с условием  $q_0 = 1$  и  $a_n > 1$ ,
2. Существует набор простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых  $C_n^0, \dots, C_n^{q_n-1}$ , которые ограничивают попарно не пересекающиеся диски  $D_n^0, \dots, D_n^{q_n-1}$  со следующими свойствами:
  - а) каждый диск  $D_n^i$  содержит одну точку орбиты  $O_{n-1}$  и  $p_n$  точек орбиты  $O_n$ ,
  - б) кривая  $g(C_n^i)$  изотопна кривой  $C_n^{i+1 \sim \text{mod } q_n}$  в проколоте диске  $\mathbb{D}^2 \setminus \bigcup_{i \leq n} O_i$ ,
  - в)  $\bigcup_{0 \leq i \leq q_n-1} D_n^{i+1} \subset \bigcup_{0 \leq i \leq q_{n-1}-1} D_n^i$ .
  - г) диаметр диска  $D_n^i$  стремится к нулю с увеличением  $n$ .

Пусть  $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$  — дуга, соединяющая тождественное отображение  $f_0$  с отображением  $g = f_1$ , и  $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  — ее продолжение, соединяющее тождественное отображение со всеми итерациями отображения  $g$ , определенное формулой

$$g_t = f^{[t]} \circ f_{\{t\}},$$

где  $[t]$  и  $\{t\}$  — целая и дробная части  $t$ , соответственно. Обозначим через  $l_n$  алгебраическое число оборотов, которые совершает вектор

$$\frac{f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})}{\|f_t(x_n) - f_t(x_{n-1})\|}$$

в то время, как  $t$  изменяется от 0 до  $q_n$  (здесь  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^2$ ). Положим

$$\lambda_n = \left\{ \frac{l_n}{q_n} \right\}.$$

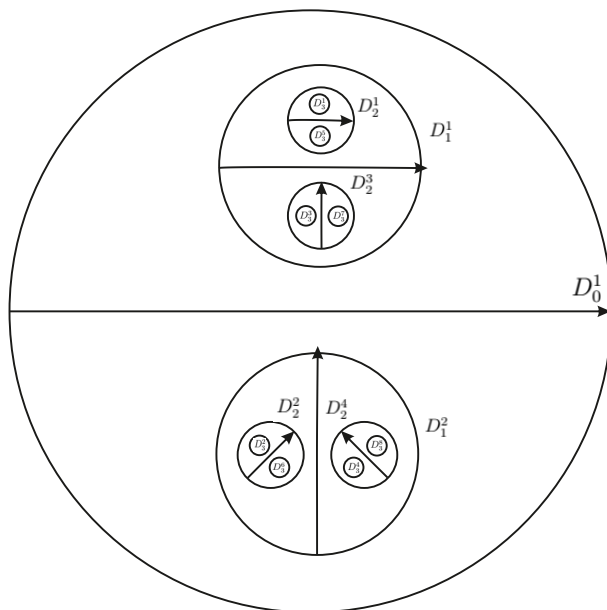


Рис. 2. Индуктивно определенное расположение дисков  $\{D_{n+1}^i\}$  с поворотом оси на угол  $(i - 1)\pi/2^{n+1}$

Согласно [2], число  $\lambda_n$  не зависит от выбора шара  $D_n^i$ , от выбора точки  $x_n$  в шаре  $D_n^i$ , от выбора изотопии  $f_t$  и является топологическим инвариантом гомеоморфизма с точностью до сохраняющего ориентацию сопрягающего гомеоморфизма. Более того, для любого каскада периодических орбит сохраняющего ориентацию  $C^1$ -диффеоморфизма на двумерном диске, последовательность  $\lambda_n$  имеет предел, который называется *асимптотическим числом вращения*.

На рисунке 2 изображены две итерации отображения, построенного в работе [4] и реализующего монотонную последовательность  $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ .

### 3. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Чтобы лучше представить конструкцию примеров построенных в работах [4] и [5], мы опишем другой подход к пониманию динамики удвоения периодов. А именно, рассмотрим сдвиг на единицу времени градиентного потока на сфере (см. рисунок 3). Это отображение  $g$  имеет восемь неподвижных точек: сток  $\omega_+$ , седла  $\sigma_+^1, \sigma_+^2, f_+(\sigma_+^2)$  и источники  $\alpha_+, f_+(\alpha_+), f_+^2(\alpha_+), f_+^3(\alpha_+)$ . Если сделать композицию этого отображения с поворотом в кольце  $A_1$  на  $180^\circ$  относительно центральной вертикальной оси (постепенно поворачивая окружности от верхнего края кольца на  $0^\circ$  до нижнего на  $180^\circ$ , сохраняя поворот на  $180^\circ$  во всех слоях ниже кольца  $A_1$ ) и аналогичным поворотом в

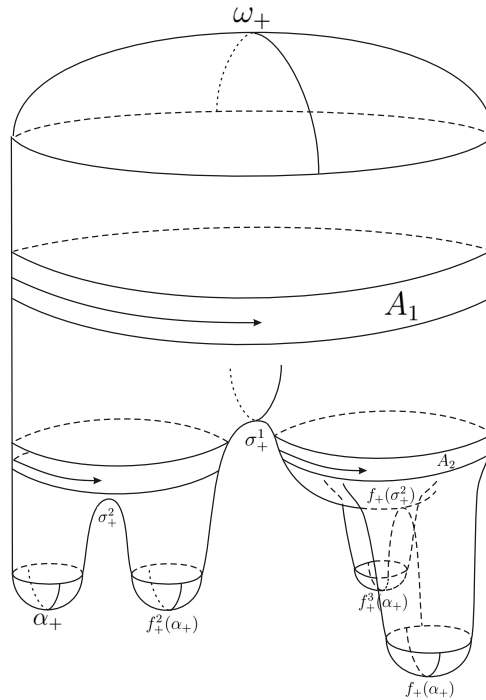


Рис. 3. Градиентный поток на сфере

кольцах  $A_2$  на  $90^\circ$ , результирующее отображение  $f_+$  будет иметь неподвижные точки  $\omega_+, \sigma_+^1$ , точки  $\sigma_+^2, f_+(\sigma_+^2)$  периода 2 и точки  $\alpha_+, f_+(\alpha_+), f_+^2(\alpha_+), f_+^3(\alpha_+)$  периода 4. Динамика диффеоморфизма  $f_-$  отличается только тем, что вращение в кольце  $A_1$  происходит в противоположную вращению в  $A_2$  сторону.

В этом разделе мы введем понятие схемы  $S_\pm$  диффеоморфизмов  $f_\pm$  и установим, что эти схемы не эквивалентны.

Опишем общую идею факторизации, достаточно часто используемую для установления топологических инвариантов диффеоморфизмов поверхности.

Пусть  $\omega$  — неподвижный гиперболический сток поверхностного диффеоморфизма  $f$ . Согласно [8], диффеоморфизм  $f$  в некоторой окрестности точки  $\omega$  топологически сопряжен линейному диффеоморфизму пространства  $\mathbb{R}^2$ , заданному формулой:

$$L(x, y) = \left( \frac{x}{2}; \frac{y}{2} \right).$$

$V_\omega = W_\omega^s \setminus \omega$ . Мы определим  $\hat{V}_\omega = V_\omega / f$ , как пространство орбит действия группы  $F = \{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$  на  $V_\omega$  и зададим естественную проекцию  $p_\omega : V_\omega \rightarrow \hat{V}_\omega$ .

Согласно [7], пространство  $\hat{V}_\omega$  диффеоморфно двумерному тору, проекция  $p_\omega$  является накрытием и индуцирует эпиморфизмом  $\eta_\omega : \pi_1(\hat{V}_\omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ , определяемый следующим образом. Пусть  $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_\omega)$ . Любое поднятие  $c$  из петли  $\hat{c}$  с началом в



$x \in V_\omega$  имеет конечную точку в  $f^n(x)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  не зависит от выбора поднятия. Тогда  $\eta_\omega([\hat{c}]) = n$ .

Пусть  $\sigma$  — гиперболическое седло периода  $m_\sigma$  диффеоморфизма  $f$ . Определим линейный диффеоморфизм  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой:

$$A(x, y) = \left(-\frac{x}{2}, 2y\right).$$

Положим  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$ . Заметим, что множество  $U$  инвариантно относительно диффеоморфизма  $A$ . Окрестность  $U_\sigma$  точки  $\sigma$  диффеоморфизма  $f$  называется *линеаризацией*, если существует гомоморфизм  $\mu_\sigma : U_\sigma \rightarrow U$  сопрягающий диффеоморфизм  $f^{m_\sigma}|_{U_\sigma}$  с диффеоморфизмом  $A|_U$ . Окрестность  $U_{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(U_\sigma)$  орбиты  $\mathcal{O}_\sigma = \bigcup_{j=0}^{m_\sigma-1} f^j(\sigma)$  с отображением  $\mu_{\mathcal{O}_\sigma}$ , полученным посредством гомеоморфизма  $\mu_\sigma f^{-j} : f^j(U_\sigma) \rightarrow U, j = 0, \dots, m_\sigma - 1$ , называется *линеаризирующей окрестностью* орбиты  $\mathcal{O}_\sigma$ . Существование линеаризирующей окрестности у любой гиперболической седловой орбиты следует, например, из [7].

#### 4. НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СХЕМ

Рассмотрим пространства орбит бассейнов стока

$$\hat{V}_+ = (W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+)/f_+, \hat{V}_- = (W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-)/f_-$$

и естественные проекции

$$p_+ : W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+ \rightarrow V_+, p_- : W_{\omega_-}^s \setminus \omega_- \rightarrow V_-.$$

В силу гиперболичности седловых точек  $\sigma_+^1, \sigma_+^2, \sigma_-^1, \sigma_-^2$ , их орбиты обладают инвариантными линеаризирующими окрестностями, которые мы обозначим через  $U_+^1, U_+^2, U_-^1, U_-^2$ . Положим  $\hat{U}_+^1 = p_+(U_+^1), \hat{U}_+^2 = p_+(U_+^2), \hat{U}_-^1 = p_-(U_-^1), \hat{U}_-^2 = p_-(U_-^2)$ .

Чтобы понять, что схемы  $S_+ = (\hat{V}_+, \hat{U}_+^1, \hat{U}_+^2), S_- = (\hat{V}_-, \hat{U}_-^1, \hat{U}_-^2)$  диффеоморфизмов  $f_+, f_-$  не эквивалентны, на рисунках 4, 5 изображены двумерные кольца, являющиеся фундаментальными областями ограничений диффеоморфизмов  $f_+, f_-$  на  $W_{\omega_+}^s \setminus \omega_+, W_{\omega_-}^s \setminus \omega_-$  соответственно. В этих кольцах нарисованы проекции линеаризирующих окрестностей после осуществления соответствующих поворотов в нижних кольцах (см. рисунок 3).

Для получения искомого схем, достаточно склеить границы колец. Результатом такой склейки в обоих случаях являются двумерные торы. При этом проекция каждой из окрестностей  $U_+^1, U_-^1$  является кольцом, а проекция каждой из окрестностей  $U_+^2, U_-^2$  является трубчатой окрестностью дуги (см. рисунки 6 и 7). В силу того, что

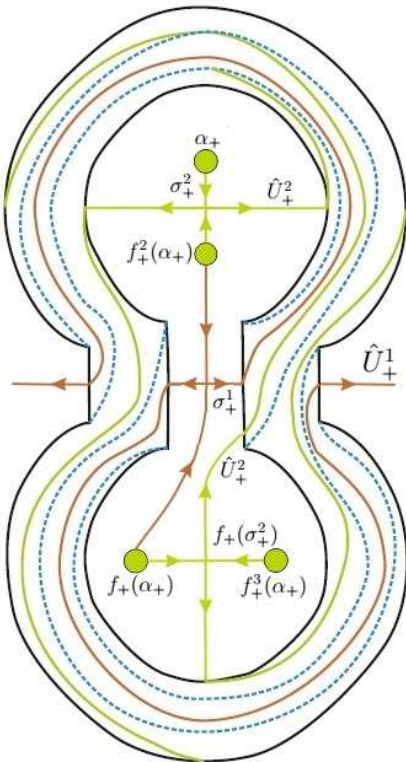


Рис. 4. Проекция  
линеаризующих  
окрестностей по-  
сле поворота на  
 $\pi$  против часовой  
стрелки

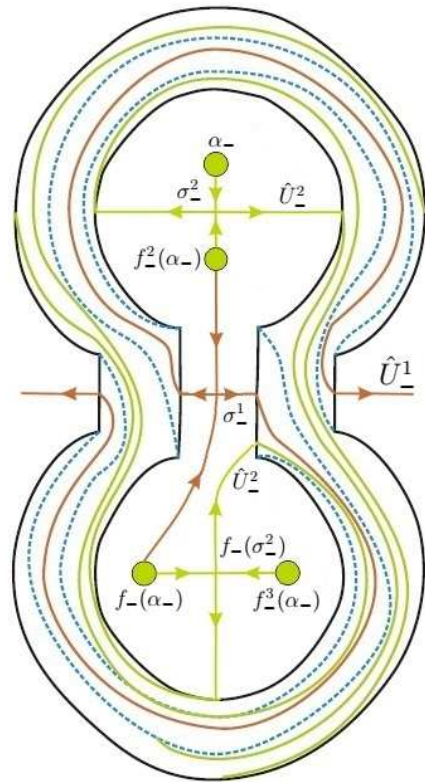


Рис. 5. Проекция  
линеаризующих  
окрестностей после  
поворота на  $\pi$   
по часовой стрелке

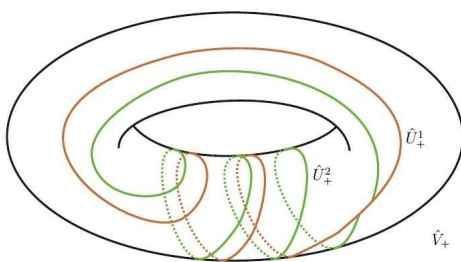


Рис. 6. Схема диф-  
феоморфизма  $f_+$

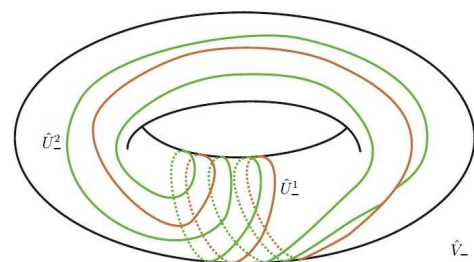


Рис. 7. Схема диф-  
феоморфизма  $f_-$

объединения  $\hat{U}_+^1 \cup \hat{U}_+^2$  и  $\hat{U}_-^1 \cup \hat{U}_-^2$  имеют разные гомотопические типы на двумерном торе, не существует гомеоморфизма  $\varphi : \hat{V}_+ \rightarrow \hat{V}_-$  такого, что  $\varphi(\hat{U}_+^1) = \hat{U}_-^1$ ,  $\varphi(\hat{U}_+^2) = \hat{U}_-^2$ , что и завершает доказательство теоремы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: введен новый инвариант гомеоморфизмов диска с каскадом периодических орбит — схема отображения. Показано, что этот инвариант различает диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы построили диффеоморфизмы двумерной сферы, являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону и в разные стороны. Основным результатом работы является доказательство не эквивалентности схем этих диффеоморфизмов, то есть отсутствия гомеоморфизма, переводящего компоненты одной схемы в компоненты другой. С 1980х годов стоит вопрос о возможности построения  $C^3$  диффеоморфизма Купки–Смейла на сфере без источников и стоков, но точный ответ так и не был получен. Результаты, полученные в этой статье, приближают нас к этому ответу.

**Благодарности:** Результаты получены при финансовой поддержке гранта РНФ 17-11-01041, за исключением исследований, связанных с методом факторизации, выполненных в рамках проекта ЦФИ в 2018 году.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. GAMBAUDO, J. M., VAN STREEN, S. and TRESSER, C. (1989) The periodic orbit structure of orientation preserving diffeomorphisms on  $\mathbb{D}^2$  with topological entropy zero. *Annales de l'I.H.P. Physique theorique*. [Online] Numdam section A, tome 50, n<sup>o</sup> 3. p. 335–356. Available from: <http://www.numdam.org>. [Accessed: 12th Septembre 1989].
2. MOREIRA, F. J. (2003) Topological Obstructions to smoothness for infinitely renormalizable maps of the disk. *IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society*. [Online] Nonlinearity Volume 17, Number 15. p. 1547-1570. Available from: <http://arXiv:math/0307240> . [Accessed: 17th Jul 2003].
3. GAMBAUDO, J. M., SULLIVAN, D., TRESSER, C. (1994) Infinite cascades of braids and smooth dynamical systems. *Elsevier science ltd*. [Online] Topology Volume 33, No 1. p. 85-94. Available from: <http://www.math.stonybrook.edu>. [Accessed: 20th April 1992].
4. BOWEN, R. and FRANKS, J. (1975) The periodic points of maps of the disk and the interval.. *Topology*. [Online] Elsevier Limited Volume 15, Issue 4. p. 337-342. Available

from:

<https://www.sciencedirect.com>. [Accessed: 20th November 1975].

5. FRANKS, J. and LAI-SANG YOUNG (1981) A  $C^2$  Kupka–Smale Diffeomorphism of the Disk With No Sources or Sinks.. *Dynamical Systems and Turbulence*. [Online] Lecture Notes in Mathematics Volume 898. p. 90-98. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 07 October 2006].
6. Шарковский, А. Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя / Украинский математический журнал . — Volume 5, Issue 16, №1, 1964. — 61-71. с.  
SHARCOVSKII, A. N (1964) Co-existence of cycles of continuous transformation of the line into itself. *Mathematical Problems of Cybernetics*. Ukrainian mathematical journal (Volume 5, Issue 16, №1). p. 61-71..<http://umj.imath.kiev.ua>
7. GRINES, V., MEDVEDEV, T., POCHINKA O. (2016) Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. *Developments in mathematics*. [Online] Springer Volume 46. p. 364. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 28th February 2017].
8. PALIS, J. di MELO, W. (1982) Geometric theory of dynamical systems. An introduction.. *Springer-Verlag*. [Online] Internet archive book. p. 198. Available from: <https://archive.org>. [Accessed: 18th August 1982].
9. SMALE, S. (1967) Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. *Proc. Int. Congr. Mathematicians*. [Online] Matematika Volume 11, Issue 4. p. 490–496. Available from: <http://www.mathnet.ru>. [Accessed: 1963].
10. LI, T. and YORKE, J. (1975) Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*. [Online] Jstor Volume 82, No 10. p. 985-992. Available from: <http://www.its.caltech.edu>. [Accessed: December 1975].
11. FRANKS, J. (1977) Some smooth maps with infinitely many hyperbolic periodic points. *Transactions of the American Mathematical Society*. [Online] Springer Volume 226. p. 175–179. Available from: <https://link.springer.com>. [Accessed: 02 October 2006].

УДК: 004.056 : 510.51

MSC2010: 68P25, 94A60

## ВЫЧИСЛЕНИЕ АДРЕСА БЛОКЧЕЙН КОШЕЛЬКА СРЕДСТВАМИ iOS Swift 4

© Ю. П. Москалёва, З. С. Сейдаметова

ГБОУВО РК «КРЫМСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ ЭКОНОМИКИ, МЕНЕДЖМЕНТА И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
ПЕР. УЧЕБНЫЙ, 8, СИМФЕРОПОЛЬ, 295015, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: [yulmosk@mail.ru](mailto:yulmosk@mail.ru), [z.seydametova@gmail.com](mailto:z.seydametova@gmail.com)

### BLOCKCHAIN WALLET ADDRESS CALCULATION USING IOS SWIFT 4.

Moskaleva Y. P., Seidametova Z. S.

**Abstract.** Blockchain technology implemented using digital currencies such as bitcoin. Bitcoin is an online virtual cryptographic currency based on public key that is represented by communication protocol. Bitcoin was proposed in 2008 by an anonymous group of developers named as Satoshi Nakamoto. Bitcoin became functional and widely using as a cryptocurrency allowing conversion with traditional currencies. Today bitcoin is used where needed "hot payment" scenarios (in the scale of minutes).

Bitcoin is a virtual cryptographic currency based on accounts. It is not correct to consider bitcoins as digital tokens. Bitcoin is represented as a balance in a bitcoin account defined by an Elliptic Curve Cryptography key pair. In the paper the Elliptic Curve is  $y^2 = x^3 + 7$  in the prime field  $F_p$ , where  $p = 2^{256} - 2^{32} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^4 - 1$ . The public key is the point on the elliptic curve  $(X[32], Y[32])$ , where  $X[32]$  is the  $X$  coordinate, occupying 32 bytes;  $Y[32]$  is the  $Y$  coordinate, occupying 32 bytes;  $0 \times 04$  is the marker of the uncompressed public key representation. Markers  $0 \times 02$ ,  $0 \times 03$  are used to indicate the sign.

In this paper, using the basic cryptography libraries and the tools of the programming language Swift 4 we presented the problem of the forming the Blockchain Wallet Address.

The analog of the categories of classical iOS programming language Objective C is the technique of extensions in the modern programming language Swift. Extensions add new functionality to existing types of classes, structures, enumerations and even protocols. The most used scope of extensions is the addition of calculated data type properties.

The extension method adds methods to support bitcoin transformations.

To ensure the algorithmic solution of the problem of obtaining the Address we used methods of classical cryptography. It is considered the problem of connecting the CommonCrypto cryptographic library wired in iOS with Swift.

**Keywords:** *NFC, NDEF, secp256k1 public key, Bitcoin Address, Swift, cryptocurrency, blockchain wallet address*

## ВВЕДЕНИЕ

Биткоин представляет собой цифровую систему, основанную на эллиптической криптографии  $secp256k1$ . Биткоин впервые был предложен в 2008 году С. Накамото [1] и стал полностью функциональным в январе 2009 года, получив широкое распространение, вплоть до возможности конвертации в другие инструменты. Сегодня биткоин используется там, где необходимы быстрые операции (в шкале минуты) [2].

Биткоин — это система, основанная на учетных записях, потому что неправильно интерпретировать биткоины как цифровые токены, поскольку они представляются как баланс в биткоин-счетах. Биткоин-счет определяется парой криптографических переменных на эллиптической кривой [3], [4].

Обзоры исследований по ключевым проблемам биткоин-систем, таких как логические, экономические аспекты, а также вопросы безопасности при проведении транзакций, представлены в работах [5], [6], [7], [8], [9].

Вопросы приватности, учета, адаптации общепринятых нотаций в контексте использования биткоинов, а также реализация биткоин-систем и моделирования транзакций посвящены работы [10], [11], [12], [13], [14], [15].

Практическая реализация биткоин-счетов и биткоин-кошельков отображена во множестве патентов. Например, в патентной заявке [16] компании Coinbase, Inc. предлагаются система и метод безопасной транзакции на некоторый биткоин-адрес. В патентной заявке [17] рассматривается пользовательская система транзакции криптовалюты с помощью токенов. В патенте [18] предложена система сервиса «горячего» кошелька, включающая сервер управления и серверы аутентификации, которые конфигурируются независимо друг от друга.

Для осуществления биткоин-транзакция активно используется технология NFC (Near Field Communication) [19], которая на сегодняшний день является востребованной и активно развивающейся. Технология NFC поддерживается большинством современных мобильных устройств. Основа технологии NFC — это радиочастотная идентификация RFID (Radio Frequency Identification) [19], посредством которой RFID-метки автоматически передают, записывают и считывают сигналы. Зона приема зашифрованного сигнала до 10 сантиметров, поэтому NFC технология считается более защищенным способом передачи информации по сравнению с другими технологиями. Появление NFC-технологий расширило диапазон применения мобильных телефонов, в частности, телефоны начали использовать [19]:

- для эмуляции банковских карт, которыми можно расплатиться в общественном транспорте или супермаркете,
- для обмена визитками при соприкосновении телефонов,

- для получения контекстной рекламы при прикосновении к смарт-плакату,
- для передачи фотографий, непосредственно с телефона на принтер,
- вместо билетов на различные виды мероприятий,
- для настройки WiFi-сетей прикосновением смартфона,
- для обслуживания смарт-карт блокчейн-кошельков.

Развитие технологий беспроводной оплаты открыло доступ на рынок карт, оснащенных независимой антенной, таких как: Visa Pay Wave, Master Card PayPass, Google Wallet, и др.

Хотя чипы NFC встроены в iPhones, начиная с модели iPhone 6, функционал поддержки чтения NFC-меток добавлен в Core NFC только в операционную систему iOS 11, начиная с модели iPhone 7.

Смарт-карты поддерживают чтение данных в формате NDEF, в соответствии со следующими стандартами NFC Forum [20], [21], [22]:

- NFC Forum Type 4 Tag Operation Specification [NFCForum-TS-Type-4-Tag\_ 2.0],
- NFC Data Exchange Format (NDEF) Technical Specification [NFCForum-TS-NDEF\_ 1.0].

Открывшиеся технические возможности и добавленный в Core NFC функционал чтения NFC ставит перед продвинутыми пользователями iOS задачи обслуживания блокчейн математики. Настоящая работа посвящена решению задачи формирования Адреса блокчейн-кошелька по открытому ключу для запроса баланса Bitcoin Main или Ethereum MainNet в зависимости от типа криптовалюты. Правильным и традиционным iOS-решением является установка и использование надежных и проверенных библиотек. Однако стремительный прогресс технологии блокчейн и переход iOS-разработки с традиционного языка разработки Objective C на Swift (последние стабильные версии Swift 4.x) ставят задачи, нуждающиеся в алгоритмической поддержке.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть формат исходных данных задан в следующем виде:

$$[0 \times 04, X[32], Y[32]].$$

Это открытый ключ криптографии на эллиптической кривой secp256k1 в несжатом (uncompressed) формате. Кривая secp256k1 представляет собой кривую

$$y^2 = x^3 + 7,$$

над полем простых чисел  $F_p$  ( $p > 3$ ), где  $p = 2^{256} - 2^{32} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^4 - 1$ .

Таким образом, открытый ключ – это точка эллиптической кривой  $(X[32], Y[32])$ , где  $X[32]$  – координата  $X$ , занимающая 32 байта,  $Y[32]$  – координата  $Y$ , занимающая 32 байта,  $0 \times 04$  – это маркер несжатого (uncompressed) представления открытого ключа.

Эллиптические кривые симметричны относительно оси  $OX$ , что позволяет определить естественный сжатый (compressed) формат, при котором достаточно задать координату  $X$  и знак (координата  $Y$  вычисляется из уравнения кривой с точностью до знака). Для указания знака используются маркеры  $0 \times 02$ ,  $0 \times 03$ .

Необходимо используя библиотеки базовой криптографии CommonCrypto и средства языка программирования Swift 4 предложить расширения и утилиты для реализации алгоритма вычисления биткоин Адреса из несжатого (uncompressed) открытого ключа.

Для понимания алгоритма приведем пример несжатого (uncompressed) открытого ключа.

**Пример 1.** Дан несжатый (uncompressed) открытый ключ

```
04C20B28FE822F16D83233C57F90CFEED64B41082A83F16347026177B33F6D9F0C052
48F85AA99145336022D583DABD8F46F85271E093939B3AE6765F854977802
```

Определить биткоин Адрес.

В Примере 1 открытый ключ записан шестнадцатеричной строкой, где 2 цифры определяют 1 байт.  $0 \times 04$  – это 1 байт и по 64 шестнадцатеричных цифры на каждую координату, дают в результате 65 байтов.

Сформулируем *алгоритм* формирования Адреса с промежуточными контрольными результатами для открытого ключа из Примера 1:

1. Взять открытый ключ в формате шестнадцатеричной строки длины 130 шестнадцатеричных цифр (65 байт)

*Входные данные:*

```
04C20B28FE822F16D83233C57F90CFEED64B41082A83F16347026177
B33F6D9F0C05248F85AA99145336022D583DABD8F46F85271E093939
B3AE6765F854977802
```

2. Применить к открытому ключу хеш функцию SHA-256

*Результат:*

```
05E565044A1BAFB00A7CD460083DC4BE10EBC9D26D77A43C4D47F5E
48F2C12F1
```

3. К результату шага 2 применить хеширование RIPEMD-160

*Результат:*

```
1F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648
```



4. Добавить версионный байт Main Network 0x00 к началу строки предыдущего шага  
*Результат:*  
001F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648
5. К расширенному результату RIPEMD-160 применить SHA-256  
*Результат:*  
239164C4AD4AB7DA4EDD32A7CAECE3F3DD22DFCC3017FABA2959B302  
A63DB317
6. Применить SHA-256 еще раз к результату шага 5  
*Результат:*  
A3E1FAF166543E65FED2FC3D3FAD5C5155DE99A85151C16150E0A10E  
D79FFE38
7. Взять первых 4 байта после второго применения SHA-256 (эти 4 байта называются проверочной суммой адреса)  
*Результат:*  
A3E1FAF1
8. Проверочную сумму адреса добавить к расширенному результату RIPEMD-160 шага 4.  
*Результат* шага 8 называют 25-байтным бинарным Адресом  
001F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648A3E1FAF1
9. Перевести бинарный адрес в кодировку Base58.  
*Результатом* этого шага является наиболее распространенный формат биткойн Адреса  
13seuMnL53QwZBfYpvk61CgqmnfnWc4ahv

## 2. БАЗОВАЯ КРИПТОГРАФИЯ АДРЕСА

В алгоритме вычисления Адреса используются хеш функции SHA-256, RIPEMD-160 и кодировка Base58.

Первая версия алгоритма хеширования SHA появилась в 1993 году, модификация SHA-256 в 2003. Префикс 256 это размер результата хеширования в битах. Наиболее естественным для iOS способом выглядит использование CommonCrypto библиотеки. CommonCrypto – это Apple’s Open Source библиотека криптографических методов, которая вшита в iOS. Для разработки на Objective C методы библиотеки становятся доступными после добавления заголовка библиотеки. В случае Swift подключение CommonCrypto перестает быть тривиальным. Рассмотрим следующую последовательность шагов в интегрированной среде разработки Xcode:

1. Создаем в проекте новый .h файл с именем [ИмяПриложения]-Bridging-Header.h
2. В Build Settings находим Objective-C Bridging Header и добавляем имя созданного файла [ИмяПриложения]-Bridging-Header.h
3. В созданный файл добавляем заголовочный файл библиотеки CommonCrypto

**Листинг.** [ИмяПриложения]-Bridging-Header.h

```
#ifndef [ИмяПриложения]_Bridging_Header_h
#define [ИмяПриложения]_Bridging_Header_h
    #import <CommonCrypto/CommonHMAC.h>
#endif
```

После чего SHA-256 легко обеспечивается следующей утилитой

```
func sha256($\_data: Data) -> Data? {
    guard let res=NSMutableData(length:Int(CC_SHA256_DIGEST_LENGTH))
    else {return nil}
    CC_SHA256((data as NSData).bytes, CC_LONG(data.count),
    res.mutableBytes.assumingMemoryBound(to: UInt8.self))
    return res as Data
}
```

RIPEND-160 – это криптографическая хеш-функция, распространенная в 1990-х годах. Самым простым вариантом использования этой функции является подключение библиотеки.

Последней базовой криптографией алгоритма вычисления Адреса является кодировка Base58. Base58 отличается от Base64 тем, что из обращения убраны символы 0, O, l, I, так как их легко перепутать.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАБОТЫ С БИНАРНЫМИ ДАННЫМИ

Для сопровождения алгоритма Адреса расширим тип данных Data.

```
extension Data {
    func hexEncodedString() -> String {
        return map { String(format: "%02hhx", $0) }.joined()
    }
}
```

Расширение обеспечивает перевод бинарных данных в шестнадцатеричную строку.

А метод для обратной трансформации – из шестнадцатеричной строки в бинарные данные может быть реализован следующим образом.

```
public func dataWithHexString(hex: String) -> Data {
    var hex = hex
    var data = Data()
    while(hex.count > 0) {
        let c: String = hex.substring(to: hex.index(hex.startIndex,
            offsetBy: 2))
        hex = hex.substring(from: hex.index(hex.startIndex, offsetBy: 2))
        var ch: UInt32 = 0
        Scanner(string: c).scanHexInt32(&ch)
        var char = UInt8(ch)
        data.append(&char, count: 1)
    }
    return data
}
```

#### 4. ПОШАГОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ АДРЕСА

**Шаг 1.** Возьмем открытый ключ в формате шестнадцатеричной строки длины 130 шестнадцатеричных цифр (65 байт)

```
let hexPublicKey = "0450863AD64A87AE8A2FE83C1AF1A8403CB53F53E486D8511DAD8
A04887E5B23522CD470243453A299FA9E77237716103ABC11A1DF38855ED6F2EE187E9C5
82BA6"
```

**Шаг 2.** Применим к открытому ключу утилиту sha256

```
guard let binaryHash = sha256(binaryPublicKey) else {
    return
}
```

```
let binaryHashToHex = binaryHash.hexEncodedString()
//Шаг 2 05E565044A1BAFB00A7CD460083DC4BE10EBC9D26D77A43C4D47F5E48F2C12F1
print("Шаг 2 \(binaryHashToHex.uppercased())")
```

**Шаг 3.** Применим хеширование RIPEMD-160

```
let binaryRipemd160 = RIPEMD160.hash(message: binaryHash)
```

```
let binaryRipemd160ToHex = binaryRipemd160.hexEncodedString()
//Шаг 3 1F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648
print("Шаг 3 \ (binaryRipemd160ToHex.uppercased())")
```

**Шаг 4.** Добавим версионный байт Main Network  $0 \times 00$  к началу строки предыдущего шага

```
let hexExtendedRipemd160 = "00" + binaryRipemd160.hexEncodedString()

//Шаг 4 001F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648
print("Шаг 4 \ ( hexExtendedRipemd160.uppercased())")
```

**Шаг 5.** К расширенному результату RIPEMD-160 снова применим утилиту SHA256

```
let binaryExtendedRipemd = dataWithHexString(hex: hexExtendedRipemd160)
guard let binaryOneSha = sha256(binaryExtendedRipemd) else {
    return
}
let binaryOneShaToHex = binaryOneSha.hexEncodedString()
//Шаг 5 239164C4AD4AB7DA4EDD32A7CAECE3F3DD22DFCC3017FABA2959B302A63DB317
print("Шаг 5 \ (binaryOneShaToHex.uppercased())")
```

**Шаг 6.** Еще одно применение утилиты SHA256

```
guard let binaryTwoSha = sha256(binaryOneSha) else {
    return
}
let binaryTwoShaToHex = binaryTwoSha.hexEncodedString()
//Шаг 6 A3E1FAF166543E65FED2FC3D3FAD5C5155DE99A85151C16150
EOA10ED79FFE38
print("Шаг 6 \ (binaryTwoShaToHex.uppercased())")
```

**Шаг 7.** Выделение проверочной суммы

```
let checkHex = binaryTwoShaToHex.substring(to:
binaryTwoShaToHex.index(binaryTwoShaToHex.startIndex, offsetBy: 8))
//Шаг 7 A3E1FAF1
print("Шаг 7 \ (checkHex)")
```

**Шаг 8.** Конструирование 25-байтного бинарного Адреса

```
let addCheckToRipemd = hexRipemd160 + checkHex

//Шаг 8    001F84B0737B783BEE4E93627C9E0D1931F753D648A3E1FAF1
print("Шаг 8 \(addCheckToRipemd)")
```

**Шаг 9.** Запись бинарного Адреса в кодировке Base58

```
let binaryForBase58 = dataWithHexString(hex: addCheckToRipemd)
let address = String(base58Encoding: binaryForBase58)

//Шаг 9    13seuMnL53QwZBfYpvk61CgqmnfnWc4ahv
print("Address \(address)")
```

Представленные фрагменты кода пошаговой инструкции позволяют преобразовать открытый несжатый (uncompressed) ключ (в качестве примера задавался ключ в формате шестнадцатеричной строки длины 130 шестнадцатеричных цифр – 65 байт) в Адрес Блокчейн Кошелька.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье, используя библиотеки базовой криптографии и средства языка программирования Swift 4, решается задача формирования Адреса Блокчейн Кошелька.

Аналогом категорий классического iOS языка программирования Objective C в современном языке Swift является техника расширений. Расширения добавляют новые функциональности к существующим типам классов, структур, перечислений и даже протоколов. Наиболее используемой областью применения расширений является добавление вычисляемых свойств типов данных.

Методом расширения добавлены методы поддержки биткоин преобразований.

Для обеспечения алгоритмического решения задачи получения Адреса методами классической криптографии в работе рассмотрена задача подключения в Swift вшитой в iOS криптографической библиотеки CommonCrypto.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NAKAMOTO, S. (2008) *Bitcoin: a peer-to-peer electronic cash system*. [Online] Available from: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>. [Accessed: 30th March 2018].
2. DZIEMBOWSKI, S. (2015) Introduction to cryptocurrencies. *Proceedings of the 22nd ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security*. ACM, NY. p. 1700–1701.
3. BOS, J.W., HALDERMAN, J.A., HENINGER, N., MOORE, J., NAEHRIG, M., & WUSTROW, E. (2014) Elliptic curve cryptography in practice. *International Conference on Financial Cryptography and Data Security*. vol 8437. p. 157–175.
4. BOS, J.M., COSTELLO, C., LONGA, P., & NAEHRIG, M. (2016) Selecting elliptic curves for cryptography: An efficiency and security analysis. *Journal of Cryptographic Engineering*. 6 (4). p. 259–286.
5. HERRERA-JOANCOMARTI, J. (2015) Research and Challenges on Bitcoin Anonymity. *Data Privacy Management, Autonomous Spontaneous Security, and Security Assurance*. vol 8872. p. 3–16.
6. BOHME, R., CHRISTIN, N., EDELMAN, B., & MOORE, T. (2015) Bitcoin: Economics, Technology, and Governance. *Journal of Economic Perspectives*. 29 (2). p. 213–238.
7. YLI-HUUMO, J., KO, D., CHOI, S., & SMOLANDER, K. (2016) Where is current research on blockchain technology? – A systematic review. *PloS one*. 11 (10). p. 1–27.
8. ESKANDARI, S., CLARK, J., BARRERA, D., & STOBERT, E. (2018) A first look at the usability of bitcoin key management. *arXiv preprint*. arXiv:1802.04351. p. 1–10.
9. OBER, M., KATZENBEISSER, S., & HAMACHER, K. (2013) Structure and anonymity of the bitcoin transaction graph. *Future Internet*. 5 (2). p. 233–250.
10. TSCHORSCH, F., & SCHEUERMANN, B. (2016) Bitcoin and Beyond: A Technical Survey on Decentralized Digital Currencies. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*. 18 (3). p. 2084–2123.
11. MIERS, I., GARMAN, C., GREEN, M., & RUBIN, A.D. (2013) Zerocoin: Anonymous Distributed E-Cash from Bitcoin. *IEEE Symposium on Security and Privacy, Berkeley, CA*. p. 397–411.
12. KOSHY, P., KOSHY, D., & McDANIEL, P. (2014) An Analysis of Anonymity in Bitcoin Using P2P Network Traffic. *Financial Cryptography and Data Security*. vol. 8437. p. 469–485.

13. KARAME, G.O., ANDROULAKI, E., ROESCHLIN, M., GERVAIS, A., & CAPKUN, S. (2015) Misbehavior in bitcoin: A study of double-spending and accountability. *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)*. 18 (1). p. 2:1–2:32.
14. BIRYUKOV, A., KHOVRATOVICH, D., & PUSTOGAROV, I. (2014) Deanonymisation of clients in Bitcoin P2P network. *Proceedings of the 2014 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security*. ACM, NY. p. 15–29.
15. VENKATAKRISHNAN, S., FANTI, G., & VISWANATH, P. (2017) Dandelion: Redesigning the bitcoin network for anonymity. *Proceedings of the ACM on Measurement and Analysis of Computing Systems*. 1 (1). p. 21:1–21:34.
16. LANGSCHAEDL, J., ARMSTRONG, B. D., & EHRSAM, F. E., Coinbase, Inc., 2015. Hot wallet for holding bitcoin. U.S. Patent Application 14/660,418.
17. FEENEY, P. J., Filing Cabinet LLC, 2016. System and method for user authentication using crypto-currency transactions as access tokens. U.S. Patent Application 14/958,427.
18. YANG, D., KOU, L., & LIU, A., Modernity Financial Holdings, Ltd., 2017. Data analytic and security mechanism for implementing a hot wallet service. U.S. Patent 9,672,499.
19. JARA, A.J., ALCOLEA, A.F., ZAMORA, M.A., & SKARMETA, A.F. (2010) Analysis of different techniques to define metadata structure in NFC/RFID cards to reduce access latency, optimize capacity, and guarantee integrity. *IFAC Proceedings Volumes*. 43 (4). p. 192–197.
20. Type 2 Tag Operation Specification Technical Specification. (2011) *apps4android.org*. [Online] Available from: <https://goo.gl/4RCiJ6>. [Accessed: 30th March 2018].
21. Bitcoin in a nutshell – Cryptography. (2017) *habrahabr.ru*. [Online] Available from: <https://goo.gl/nGuqWa>. [Accessed: 30th March 2018].
22. Technical background of version 1 Bitcoin addresses. (2017) *en.bitcoin.it*. [Online] Available from: <https://goo.gl/bx2Knh>. [Accessed: 30th March 2018].

УДК: 517.9

MSC2010: 46B99; 47B38

## О ЛАТЕРАЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРАХ

© М. А. Плиев

ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ВНЦ РАН  
ул.МАРКУСА, 22, 362027, Владикавказ, Россия.

E-MAIL: *plimarat@yandex.ru*

ON LATERALLY CONTINUOUS ORTHOGONALLY ADDITIVE OPERATORS.

Pliev Marat Amurhanovich.

**Abstract.** The aim of this article is to consider some problems of the theory of orthogonally additive operators in vector lattices. Order bounded orthogonally additive operators acting between vector lattices were introduced and studied in 1990 by Mazón and Segura de León. Recently, a new class of orthogonally additive operators in vector lattices where the condition of order boundness of an operator is replaced with a much weaker property was investigated by the author of these notes and Ramdane. It is worth to note that today the theory of orthogonally additive operators is an area of the intense study. Let  $E$  be a vector lattice and  $F$  a real linear space. An operator  $T : E \rightarrow F$  is said to be orthogonally additive if  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  whenever  $x, y \in E$  are disjoint. Evidently from the definition that  $T(0) = 0$ . It is clear that the set of all orthogonally additive operators is a real vector space with respect to the natural linear operations. Let  $E$  and  $F$  be vector lattices. We say that an orthogonally additive operator  $T : E \rightarrow F$  is positive if  $T(E) \subset F_+$  and we say that an orthogonally additive operator  $T : E \rightarrow F$  is regular if  $T = S_1 - S_2$  for some positive orthogonally additive operators  $S_i : E \rightarrow F$ ,  $i \in 1, 2$ . In this paper we investigate the band of laterally continuous operators in the vector lattice of all regular orthogonally additive operators between vector lattices  $E$  and  $F$ . We show that the band which is disjoint to the band generated by all singular orthogonally additive operators coincides with the band of all laterally continuous orthogonally additive operators.

**Keywords:** *Orthogonally additive operator, regular operator, laterally continuous operator, singular operator, orthogonally additive map, vector lattice, lateral ideal.*

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках попали в поле зрения исследователей в начале 90-х годов прошлого столетия [8]. В последние годы эти операторы стали областью интенсивных исследований ([2–6, 12, 13]). В данном разделе мы приведем предварительные сведения, необходимые для дальнейшего, а также зафиксируем терминологию и обозначения. Стандартным источником ссылок



по теории векторных решетках являются монографией [1, 7]. Все векторные решетки, рассматриваемые ниже в тексте, являются архимедовыми.

Пусть  $E$  — векторная решетка. Сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset E$  называется *порядково сходящейся* к элементу  $x \in E$  (используется обозначение  $x_\alpha \xrightarrow{(\circ)} x$ ), если существует сеть  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  в  $E_+$ , такая что  $u_\alpha \downarrow 0$  и  $|x_\alpha - x| \leq u_\alpha$  для всех индексов  $\alpha \in \Lambda$  удовлетворяющих неравенству  $\alpha \geq \alpha_0$  для некоторого  $\alpha_0 \in \Lambda$ . Два элемента  $x, y$  векторной решетки  $E$  называются *дизъюнктными* (используется обозначение  $x \perp y$ ), если  $|x| \wedge |y| = 0$ . Сумма  $x + y$  двух дизъюнктивных элементов  $x$  и  $y$  обозначается  $x \sqcup y$ . Запись  $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$  означает, что  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  и  $x_i \perp x_j$  if  $i \neq j$ . Элемент  $y \in E$  называется *осколком* элемента  $x \in E$ , если  $y \perp (x - y)$ . Запись  $y \sqsubseteq x$  выражает тот факт, что  $y$  — осколок элемента  $x$ . Множество всех осколков элемента  $x \in E$  обозначается  $\mathcal{F}_x$ . Линейное подпространство  $E_0$  векторной решетки  $E$  называется *порядковым идеалом*, если для любых  $x, y$  таких, что  $x \in E_0, y \in E$  из условия  $|y| \leq |x|$  вытекает, что  $y \in E_0$ . Порядковый замкнутый идеал называется *полосой*.

**Определение 1.** Пусть  $E$  — векторная решетка и пусть  $F$  — действительное векторное пространство. Оператор  $T : E \rightarrow F$  называется *ортогонально аддитивным*, если  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  для любых дизъюнктивных элементов  $x, y \in E$ .

Ясно, что  $T(0) = 0$ . Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством относительно естественных линейных операций сложения векторов и умножения вектора на элемент поля.

**Определение 2.** Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор  $T : E \rightarrow F$  называется:

- *положительным*, если  $Tx \geq 0$  для любого  $x \in E$ ;
- *регулярным*, если имеет место представление  $T = S_1 - S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — положительные ортогонально аддитивные операторы из  $E$  в  $F$ ;
- *латерально-порядково ограниченным*, если для любого  $x \in E$  множество  $T(\mathcal{F}_x)$  порядково ограничено в  $F$ .

Множества всех положительных, регулярных и латерально-порядково ограниченных ортогонально аддитивных операторов из  $E$  в  $F$  обозначается  $\mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ ,  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  и  $\mathcal{P}(E, F)$  соответственно.

Векторное пространство  $\mathcal{P}(E, F)$  наделено отношением частичного порядка —  $S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0$ . Отметим, что в случае порядковой полноты векторной решетки  $F$  для упорядоченного пространства  $\mathcal{P}(E, F)$  справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** ([12], Theorem 3.6). Пусть  $E$  и  $F$  – векторные решетки, и решетка  $F$  порядково полна. Тогда  $\mathcal{P}(E, F)$  является порядково полной векторной решеткой и  $\mathcal{P}(E, F) = \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$ . Кроме того для любых  $S, T \in \mathcal{P}(E, F)$  и  $x \in E$  справедливы формулы:

1.  $(T \vee S)(x) := \sup\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$ .
2.  $(T \wedge S)(x) := \inf\{Ty + Sz : x = y \sqcup z\}$ .
3.  $(T)^+(x) := \sup\{Ty : y \sqsubseteq x\}$ .
4.  $(T)^-(x) := -\inf\{Ty : y \sqsubseteq x\}$ .
5.  $|Tx| \leq |T|(x)$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

**Пример 1.** Каждый линейный оператор  $T \in L_+(E, F)$  задает положительный ортогонально аддитивный оператор  $R : E \rightarrow F$ , где  $R(f) = T(f^+)$  для любого  $f \in E$ .

**Пример 2.** Напомним, что векторное пространство  $\mathbb{R}$  является одномерной векторной решеткой с естественным порядком. Тогда множество  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  совпадает с множеством всех функций  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $f(0) = 0$ .

Одним из самых важных примеров является нелинейный интегральный оператор Урысона.

**Пример 3.** Пусть  $(A, \Sigma, \mu)$  и  $(B, \Xi, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами, и  $(A \times B, \mu \times \nu)$  – их пополненное произведение. Пусть  $K : A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  функция, удовлетворяющая следующим условиям<sup>1</sup>:

- (C<sub>0</sub>)  $K(s, t, 0) = 0$  для  $\mu \times \nu$ -почти всех  $(s, t) \in A \times B$ ;
- (C<sub>1</sub>)  $K(\cdot, \cdot, r)$  является  $\mu \times \nu$ -измеримой для всех  $r \in \mathbb{R}$ ;
- (C<sub>2</sub>)  $K(s, t, \cdot)$  является непрерывной на  $\mathbb{R}$  для  $\mu \times \nu$ -почти всех  $(s, t) \in A \times B$ .

Обозначим через  $L_0(B, \Xi, \nu)$  или  $L_0(\nu)$  упорядоченное пространство классов эквивалентности  $\nu$ -измеримых почти всюду конечных действительных функций, заданных на  $B$ , где частичный порядок  $f \leq g$  задан как  $f(t) \leq g(t)$   $\nu$ -почти всюду на  $B$ . Тогда  $L_0(\nu)$  – векторная решетка.

Для заданной функции  $f \in L_0(\nu)$  функция  $|K(s, \cdot, f(\cdot))|$  является  $\nu$ -измеримой для  $\mu$ -почти всех  $s \in A$  и  $h_f(s) := \int_B |K(s, t, f(t))| d\nu(t)$  также является  $\mu$ -измеримой функцией. Введем следующее обозначение

$$\text{Dom}_B(K) := \{f \in L_0(\nu) : h_f \in L_0(\mu)\}.$$

<sup>1</sup>(C<sub>1</sub>) и (C<sub>2</sub>) называются условиями Каратеодори.

Тогда определен оператор  $T : \text{Dom}_B(K) \rightarrow L_0(\mu)$ ,

$$(Tf)(s) := \int_B K(s, t, f(t)) d\nu(t) \quad \mu - \text{п.в.}$$

Пусть  $E$  и  $F$  – порядковые идеалы в  $L_0(\nu)$  и  $L_0(\mu)$ , соответственно и  $K$  удовлетворяет условиям  $(C_0)$ - $(C_2)$ . Тогда, если  $E \subseteq \text{Dom}_B(K)$  и  $T(E) \subseteq F$ , определен ортогонально аддитивный оператор, действующий из  $T : E \rightarrow F$ , называемый *интегральным оператором Урысона*.

Частным случаем интегрального оператора Урысона является оператор Гаммерштейна, заданный формулой

$$(Tf)(s) := \int_B K(s, t)u(t, f(t)) d\nu(t) \quad \mu - \text{п.в.},$$

где  $K(\cdot, \cdot)$  –  $\mu \times \nu$ -измеримая функция на  $A \times B$  и  $u : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – такая функция, что  $u(t, \cdot)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  для  $\nu$ -почти всех  $t \in B$ ,  $u(\cdot, r)$   $\nu$ -измерима для любого  $r \in \mathbb{R}$  и  $u(t, 0) = 0$  для  $\nu$ -почти всех  $t \in B$  (для соблюдения условия  $C_0$ ).

### 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В настоящем разделе мы получим характеризацию полосы латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов, как полосы дизъюнктивной полосы, порожденной сингулярными операторами.

Пусть  $E$  – векторная решетка. Сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset D$  называется *латерально сходящейся* к  $x \in D$ , если  $x_\alpha \sqsubseteq x_\beta \sqsubseteq x$  для любых индексов  $\alpha < \beta$  и  $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ . В этом случае будем писать  $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$  или  $x = (l) - \lim_\alpha x_\alpha$ .

Пусть  $F$  также векторная решетка. Ортогонально аддитивный оператор  $T : U \rightarrow F$  называется *латерально непрерывным* ( $\sigma$ -латерально непрерывным), если из соотношения  $x_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} x$  ( $x_n \xrightarrow{\text{lat}} x$ ) следует, что  $Tx_\alpha \xrightarrow{(o)} Tx$  ( $Tx_n \xrightarrow{(o)} Tx$ ). Векторное пространство всех латерально непрерывных ( $\sigma$ -латерально непрерывных) ортогонально аддитивных операторов из  $E$  в  $F$  обозначается через  $\mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$  ( $\mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma c}(E, F)$ ).

Каждый интегральный оператор Урысона  $T : E \rightarrow F$  является  $\sigma$ -латерально непрерывным ([9], Предложение 2.9).

Если  $E$  и  $F$  – векторные решетки, и решетка  $F$  порядково полна, то пространства  $\mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$  и  $\mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma c}(E, F)$  являются полосами в  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  ([12], Теорема 3.13). Для

векторной решетки  $E$  множество  $M \subset E$  называется *латерально замкнутым* ( $\sigma$ -латерально замкнутым), если оно содержит пределы всех латерально сходящихся сетей (последовательностей), составленных из элементов  $M$ .

В пространстве  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  латерально непрерывные операторы играют роль аналогичную порядково непрерывным операторам в линейном случае. Поэтому вызывает интерес изучение полосы  $\mathcal{O}\mathcal{A}_c^\perp(E, F)$ , дизъюнктивной полосы латерально непрерывных операторов. Пусть  $E$  — векторная решетка. Напомним, что подмножество  $M \subset E$  называется *латерально плотным* ( $\sigma$ -латерально плотным), если для любого  $e \in E$  найдется сеть  $(e_\alpha) \subset M$  (найдется последовательность  $(e_n) \subset M$ ) такая, что  $e_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} e$  ( $e_n \xrightarrow{\text{lat}} e$ ). Для дальнейшего важно отметить, что любого латерально плотного ( $\sigma$ -латерально плотного) множества его латеральное замыкание (латеральное  $\sigma$ -замыкание) совпадает с  $E$ .

Подмножество  $D$  векторной решетки  $E$  называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия:

- если  $x \in D$ , тогда  $y \in D$  для любого  $y \in \mathcal{F}_x$ ;
- если  $x, y \in D$ ,  $x \perp y$ , тогда  $x + y \in D$ .

Приведем некоторые примеры.

**Пример 4.** Пусть  $E$  — векторная решетка. Каждый порядковый идеал в  $E$  является латеральным идеалом.

**Пример 5.** Пусть  $E$  — векторная решетка и  $e \in E$ . Тогда  $\mathcal{F}_e$  — латеральный идеал.

**Пример 6.** Пусть  $E, F$  — векторные решетки и  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ . Тогда  $\mathcal{K}_T := \{x \in E : Tx = 0\}$  — латеральный идеал в  $E$ .

Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки и  $D$  — латеральный идеал векторной решетки  $E$ . отображение  $T : D \rightarrow F$  называется:

- *ортгонално аддитивным*, если  $T(x + y) = Tx + Ty$  для любых дизъюнктивных элементов  $x, y \in D$ ;
- *положительным*, если  $Tx \geq 0$  для любого  $x \in D$ .

**Лемма 1.** ([12], Теорема 4.4). Пусть  $E, F$  — векторные решетки, где решетка  $F$  порядково полна,  $D \subset E$  — латеральный идеал и  $T : D \rightarrow F$  положительное ортгонално аддитивное отображение. Тогда существует  $\tilde{T}_D \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$ , такой что  $\tilde{T}_D e = T e$  для любого  $e \in D$ .

Заметим, что оператор  $\tilde{T}_D \in \mathcal{O}\mathcal{A}_+(E, F)$  задается формулой

$$\tilde{T}_D e = \sup\{Tf : f \sqsubseteq e, f \in D\}.$$

Оператор  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  называется *сингулярным* ( $\sigma$ -сингулярным), если он равен нулю на некотором латерально плотном ( $\sigma$ -латерально плотном) латеральном идеале. Множество всех сингулярных ( $\sigma$ -сингулярных) ортогонально аддитивных операторов обозначим через  $\mathcal{O}\mathcal{A}_s(E, F)$  ( $\mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma s}(E, F)$ ).

**Теорема 2.** Пусть  $E$  и  $F$  — порядково полные векторные решетки. Тогда  $\mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F) = \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$  ( $\mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma c}(E, F) = \mathcal{O}\mathcal{A}_{\sigma s}^\perp(E, F)$ ), т.е. полосы латерально непрерывных ( $\sigma$ -латерально непрерывных) операторов и операторов, дизъюнктивных сингулярным ( $\sigma$ -сингулярным) совпадают.

*Доказательство.* Доказательство представим для латерально непрерывных операторов. В  $\sigma$ -непрерывном случае доказательство аналогично. Рассуждения достаточно провести для положительных операторов. Пусть положительный ортогонально аддитивный оператор  $T$  латерально непрерывен. Допустим, что  $T \notin \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$ . Тогда существует положительный ортогонально аддитивный оператор  $S \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s(E, F)$  для которого  $G := T \wedge S > 0$ . Так как  $0 \leq G \leq S$ , то  $G$  равен нулю на некотором латерально плотном латеральном идеале. Но с другой стороны  $G \in \mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$ . В силу того, что латерально непрерывные операторы образуют полосу в пространстве  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  (см. [12], Теорема 3.13) получаем, что  $G \in \mathcal{O}\mathcal{A}_c(E, F)$  в силу чего  $G$  тождественно равен нулю. Обратно, пусть  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$  и  $T \geq 0$ . Покажем, что  $T$  — латерально непрерывный оператор. Предположим, что существует сеть  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ , латерально сходящаяся к  $x$  и удовлетворяющая неравенству  $y = (o) - \lim_\alpha Tx_\alpha < Tx$ . Через  $E_\alpha$  обозначим латеральный идеал  $\mathcal{F}_{x-x_\alpha}$ . Каждому элементу  $\alpha \in \Lambda$  сопоставим положительное ортогонально аддитивное отображение  $G_\alpha : E_\alpha \rightarrow F$ , заданное правилом

$$G_\alpha e = Te, e \in E_\alpha.$$

Тогда согласно лемме 1 существуют положительные ортогонально аддитивные операторы  $\tilde{T}_{E_\alpha} : E \rightarrow F$ , значения которых на соответствующих латеральных идеалах  $E_\alpha$  совпадают со значением оператора  $T$ . Положим  $G = (o) - \lim G_\alpha$ . Так как векторная решетка  $\mathcal{O}\mathcal{A}_r(E, F)$  порядково полна, а сеть  $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  убывает и ограничена снизу, то указанный предел существует. Таким образом определен положительный ортогонально аддитивный оператор  $0 \leq G \leq T$  и кроме того  $G \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s^\perp(E, F)$ . Оператор  $G$  ненулевой, так как

$$\begin{aligned} (x - x_\alpha) \perp x_\alpha; Tx = T(x - x_\alpha + x_\alpha) &= T(x - x_\alpha) + Tx_\alpha \Rightarrow \\ Tx - Tx_\alpha &= T(x - x_\alpha); \\ Gx = (o) - \lim_\alpha G_\alpha x &= (o) - \lim_\alpha T(x - x_\alpha)x = \end{aligned}$$

$$Tx - \left( (o) - \lim_{\alpha} Tx_{\alpha} \right) = Tx - y > 0.$$

Теперь покажем, что оператор  $G$  одновременно и сингулярный. Обозначим через  $E'$  множество всех  $e \in E$ , таких что  $\mathcal{F}_e \cap E_{\alpha_0} = 0$  для некоторого индекса  $\alpha_0 \in \Lambda$ . Ясно, что  $E'$  — латеральный идеал в  $E$ . Докажем, что идеал  $E'$  латерально плотен. Пусть  $e$  такой элемент решетки  $E$ , что множества  $E_{\alpha} \cap \mathcal{F}_e$  содержат ненулевые элементы для любого индекса  $\alpha \in \Lambda$ . Тогда согласно ([11], лемма 3) существуют осколки  $e_{\alpha}$  элемента  $e$ , такие что  $e_{\alpha} \in E_{\alpha} \cap \mathcal{F}_e$  и  $\mathcal{F}_{e-e_{\alpha}} \cap E_{\alpha} = 0$ . Положим  $f_{\alpha} := e - e_{\alpha}$ . Ясно, что  $f_{\alpha} \in E'$  и сеть  $(f_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$  латерально сходится к  $e$  и таким образом установлено, что  $E'$  — латерально плотный латеральный идеал. Одако в силу того, что Кроме того из определения ясно, что оператор  $G$  обращается в нуль на  $E'$ . Однако в силу того, что  $T \in \mathcal{O}\mathcal{A}_s^{\perp}(E, F)$  и  $0 \leq G \leq T$  следует, что оператор  $G$  нулевой. Полученное противоречие доказывает, что оператор  $T$  латерально непрерывен. Теорема полностью доказана.  $\square$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе установлено, что полоса латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов, действующих из порядково полной векторной решетки  $E$  в порядково полную векторную решетку  $F$ , совпадает с полосой ортогонально аддитивных операторов, дизъюнктивной полосе, порожденной сингулярными ортогонально аддитивными операторами.

Исследование поддержано грантом РФФИ 17-51-12064.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ALIPRANTIS C. D., BURKINSHAW O. Positive Operators / Aliprantis C. D., Burkinshaw O.. — Springer, Dordrecht, 2006. — 376 с.
2. N. ABASOV, M. PLIEV (2017) On extensions of some nonlinear maps in vector lattices. *J. Math. Anal. and Appl.* 455. p. 516–527.
3. N. ABASOV, M. PLIEV (2018) Disjointness preserving orthogonally additive operators in vector lattices. *Banach Journal of Math. Anal.* 12 (3). p. 730–750.
4. X. FANG, M. PLIEV (2017) Narrow orthogonally additive operators in lattice-normed spaces. *Siberian Math. J.* 58 (1). p. 134–141.
5. W. FELDMAN (2017) A characterization of non-linear maps satisfying orthogonality properties. *Positivity*. 21 (1). p. 85–97.

6. H. GUMENCHUK (2016) On the sum of narrow and finite-rank orthogonally additive operators. *Ukrainian Math. J.* 67 (12). p. 1831–1837.
7. KUSRAEV A. G. Dominated Operators / Kusraev A. G.. — Kluwer Academic Publishers, 2000. — 453 с.
8. J. M. MAZÓN, S. SEGURA DE LEÓN (1990) Order bounded orthogonally additive operators. *Rev. Roumane Math. Pures Appl.* 35 (3). p. 329–353.
9. J. M. MAZÓN, S. SEGURA DE LEÓN (1990) Uryson operators. *Rev. Roumane Math. Pures Appl.* 35 (4). p. 431–449.
10. M. PLIEV (2017) Domination problem for narrow orthogonally additive operators. *Positivity.* 21 (1). p. 23–33.
11. M. POPOV, M. PLIEV (2017) On extension of abstract Urysohn operators. *Siberian Math. J.* 57 (3). p. 552–557.
12. M. PLIEV, K. RAMDANE (2018) Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices. *Mediterranean Journal of Math.* 15 (2). p. 50–69.
13. M. PLIEV, M. WEBER (2018) Finite elements in some vector lattices of nonlinear operators. *Positivity.* 22 (1). p. 245–260.

УДК: 517.9

MSC2010: 46B25

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЯХ  
ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВ  
ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>

© И. И. Струкова

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ПЛ. УНИВЕРСИТЕТСКАЯ, 1, ВОРОНЕЖ, 394005, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: *irina.k.post@yandex.ru*

ON PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS WITH RESPECT TO SUBSPACES OF  
VANISHING AT INFINITY FUNCTIONS.

Strukova I. I.

**Abstract.** In the article under consideration we study periodic at infinity functions from  $C_b(\mathbb{J}, X)$ , i. e. bounded continuous functions defined on an interval  $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+; \mathbb{R}\}$  with their values in a complex Banach space  $X$ . Together with an ordinary subspace  $C_0 \subset C_b$  of functions vanishing at infinity we define a subspace  $(L^1C)_0 \subset C_b$  of functions vanishing at infinity upon the average. Then we introduce a range of different subspaces of functions such that  $C_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset (L^1C)_0$  and call them vanishing at infinity. So, by choosing one of those subspaces  $\mathcal{C}_0$  we introduce different types of slowly varying and periodic at infinity functions (with respect to the chosen subspace).

A function  $x \in C_{b,u}$  is called slowly varying at infinity with respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  if  $(S(t)x - x) \in \mathcal{C}_0$  for all  $t \in \mathbb{J}$ . Respectively, for some  $\omega > 0$  a function  $x \in C_{b,u}$  is called  $\omega$ -periodic at infinity with respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  if  $(S(\omega)x - x) \in \mathcal{C}_0$ .

Those functions are an extension of the class of periodic at infinity functions, which appear naturally as bounded solutions of certain classes of differential and difference equations. Our main focus is to develop the basic harmonic analysis for periodic at infinity functions (with respect to the chosen subspace  $\mathcal{C}_0$ ) and an analogue of the celebrated Wiener's Lemma that deals with the absolutely convergent Fourier series.

For a periodic at infinity function (with respect to the chosen subspace) we introduce the concepts of canonical and generalized Fourier series with coefficients slowly varying at infinity (not necessarily constant and not necessarily having a limit at infinity) and study their properties. Besides, we prove the summability of the Fourier series by the method of Chesaro.

We also introduce a notion of  $\mathcal{C}_0$ -invertibility of a continuous function, in terms of which the analogue of Wiener's Lemma is derived: if a  $\mathcal{C}_0$ -invertible periodic at infinity function with

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097



respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  has an absolutely convergent Fourier series then each of its  $\mathcal{C}_0$ -inverse functions also has an absolutely convergent Fourier series.

Moreover, derive a spectral criterium of periodicity at infinity and a criterium of representability of periodic at infinity function with respect to the subspace  $\mathcal{C}_0$  as a sum of pure periodic and vanishing at infinity (with respect to  $\mathcal{C}_0$ ) functions.

The results were received with essential use of isometric representations and Banach modules theories.

**Keywords:** *vanishing at infinity function, slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, Banach space, Fourier series, Banach module*

### 1. ПОДПРОСТРАНСТВА ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть  $X$  — комплексное банахово пространство,  $End X$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в  $X$ . Пусть  $\mathbb{J}$  — один из промежутков  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

Рассматривается банахово пространство  $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$  непрерывных и ограниченных на  $\mathbb{J}$  функций со значениями в  $X$  и нормой  $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|$ ,  $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из  $C_b(\mathbb{J}, X)$ ,  $C_0(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{J}, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0\}$  — подпространство исчезающих на бесконечности функций из  $C_b(\mathbb{J}, X)$ .

В банаховом пространстве  $C_b(\mathbb{J}, X)$  рассмотрим (полу-)группу  $S : \mathbb{J} \rightarrow End C_b(\mathbb{J}, X)$  операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{J}. \tag{1}$$

В статье систематически используется следующее понятие исчезающей на бесконечности в среднем функции:

**Определение 1.** Функция  $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$  называется *исчезающей на бесконечности в среднем*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1)  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t) ds\| = 0$  равномерно относительно  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любой функции  $f$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ .

Множество функций из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ , исчезающих на бесконечности в среднем, обозначим символом  $(L^1C)_0 = (L^1C)_0(\mathbb{R}, X)$ .

**Лемма 1.** *Оба условия из определения 1 эквивалентны.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество функций  $(f_\alpha, \alpha > 0)$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$  вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \notin [0, \alpha], \end{cases}$$

каждая из которых имеет преобразование Фурье вида

$$\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{i\lambda\alpha}(1 - e^{-i\lambda\alpha}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Первое условие определения 1 можно записать в виде  $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Отметим, что преобразования Фурье  $\widehat{f}_\alpha$  функций  $f_\alpha, \alpha > 0$ , разделяют точки из  $\mathbb{R}$ , и потому по теореме Винера (см. [1]) их линейные комбинации плотны в алгебре  $L^1(\mathbb{R})$ . Следовательно, условие 2) определения 1 выполнено для любой функции  $f$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ . Из отмеченного следует, что условие 1) выполнено для любого  $\alpha > 0$ .

Если выполнено свойство 2), то  $f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$  для любой направленности  $(f_\alpha, \alpha > 0)$  из алгебры  $L^1(\mathbb{R})$ , т.е. выполнено свойство 1).  $\square$

Непосредственно из определения следует, что множество функций  $(L^1C)_0(\mathbb{R}, X)$  образует замкнутый подмодуль из  $C_b(\mathbb{R}, X)$ .

**Определение 2.** Функция  $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$  называется *исчезающей на бесконечности в среднем*, если существует ее продолжение  $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$  со следующими свойствами:

- 1)  $y(t) = x(t)$  для всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ;
- 2)  $\|y\| \leq C\|x\|$ ,  $C > 0$ ;
- 3)  $y \in C_0(\mathbb{R}_-, X)$ ;
- 4)  $S(t)x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$  для всех  $t \geq 0$ ,  $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ ;
- 5) для любого другого продолжения  $z \in C_b(\mathbb{R}, X)$ , обладающего свойствами 1)–4),

выполняется условие  $y - z \in C_0(\mathbb{R}, X)$ .

**Пример 1.** Следующие функции принадлежат пространству  $(L^1C)_0(\mathbb{J}, \mathbb{C})$ :

- 1)  $x_1 : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{C}$  вида  $x_1(t) = e^{it^2}$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ;
- 2)  $x_2 : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $x_2(t) = \sin at^2$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $a > 0$ ;
- 3)  $x_3 : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $x_3(t) = \cos at^2$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $a > 0$ .

**Определение 3.** Далее символом  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  обозначим замкнутое (с нормой из  $C_{b,u}$ ) подпространство функций из  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , обладающих свойствами:

- 1)  $S(t)x \in \mathcal{C}_0$  для любого  $t \in \mathbb{J}$  и любой функции  $x \in \mathcal{C}_0$ ;
- 2)  $C_0(\mathbb{J}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) \subset (L^1C)_0(\mathbb{J}, X)$ ;
- 3)  $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$  для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ , где  $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций*.

Примерами таких подпространств являются определенные ниже подпространства  $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$  и  $C_{0,p}(\mathbb{J}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ .

Функцию  $x$  из  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  назовем *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Множество интегрально исчезающих на бесконечности функций будем обозначать символом  $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ . Отметим, что  $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$  является замкнутым подпространством из  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ . В [2] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , удовлетворяющего условию  $C_0(\mathbb{J}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ .

Рассмотрим также семейство замкнутых в  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(s+t)\|^p ds = 0\},$$

где  $p \in [1, \infty)$ . Таким образом,  $C_{0,1}(\mathbb{J}, X) = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$  — подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций.

Во всех рассматриваемых подпространствах из  $C_b(\mathbb{J}, X)$  символ  $X$  опускается, если  $X = \mathbb{C}$  (например,  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, \mathbb{C}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{J})$ ).

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ И ИХ РЯДЫ ФУРЬЕ

Напомним, что символом  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  обозначено произвольное подпространство исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 3.

**Определение 4.** Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$* , если  $S(\alpha)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{J}$ .

Отметим, что в работах [3, 4] давалось определение медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства  $C_0(\mathbb{R}, X)$  и изучались их свойства.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  обозначим символом  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ .

Непосредственно из определения следует

**Лемма 2.** Любое пространство  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  медленно меняющихся на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  функций является замкнутым подпространством в  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ .

Например, функция  $x : \mathbb{J} \rightarrow X$  вида  $x(t) = c + x_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $c \in X$ ,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , принадлежит пространству  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ .

При  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}) = C_0(\mathbb{J})$  примерами медленно меняющихся на бесконечности функций из  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; C_0)$  являются:

1)  $x_1(t) = \sin \ln(1 + |t|)$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ;

2)  $x_3(t) = \operatorname{arctg} t$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ;

3) любая непрерывно дифференцируемая функция  $x \in C_b(\mathbb{J})$  со свойством  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$ .

**Определение 5.** Пусть  $\omega > 0$ . Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  называется  $\omega$ -периодической на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , если  $(S(\omega)x - x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ .

Таким образом, каждая  $\omega$ -периодическая на бесконечности (относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ) функция  $x$  является решением разностного уравнения вида  $x(t + \omega) - x(t) = y(t)$ ,  $t \in \mathbb{J}$ , где  $y \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , а каждая медленно меняющаяся на бесконечности (относительно  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ) функция является периодической на бесконечности (относительно  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ) любого периода. Периодические на бесконечности функции относительно подпространства  $C_0(\mathbb{R}, X)$  изучались в [3–5]. Множество  $\omega$ -периодических на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X) = \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  обозначим символом  $\mathcal{C}_{\omega,\infty} = \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ .

Пусть  $\omega > 0$ . Символом  $C_\omega(\mathbb{J}, X)$  обозначим подпространство банахова пространства  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , состоящее из  $\omega$ -периодических функций, т.е. функций  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , для которых выполнено условие  $S(\omega)x = x$ .

Отметим, что оба множества  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  и  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ . Банахово пространство  $C_\omega(\mathbb{J}, X)$  образует замкнутое подпространство в  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ . Таким образом, имеют место включения  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , при этом все они инвариантны относительно операторов  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{J}$ .

Примерами периодических на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции  $x : \mathbb{J} \rightarrow X$ , представимые в виде  $x = y + y_0$ , где  $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ ,  $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ;

2) функция  $\bar{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$  такая, что она совпадает с  $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$  на  $\mathbb{R}_+$  и  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\bar{x}(t)\|_X = 0$ ;

3) любая функция из  $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ;

4) любая функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , представимая в виде  $x = \sum_{k=-n}^n x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $x_k \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 6.** Каноническим рядом Фурье функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  будем называть ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{J},$$

где функции  $x_n : \mathbb{J} \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t + \tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau, \quad t \in \mathbb{J}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

и называются каноническими коэффициентами Фурье функции  $x$ .

Ясно, что если  $x \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ , то  $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(\tau) e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau} d\tau$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции  $x$ .

**Определение 7.** Обобщенным рядом Фурье функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  называется любой ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{J}, \quad (3)$$

где  $y_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — такие функции из  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ , для которых  $y_n - x_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , а функции  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , определяются формулой (2).

**Лемма 2.** Канонические коэффициенты Фурье  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , (определенные формулой (2)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ), т.е.  $x_n \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Утверждение леммы следует из равенств  $x_n(t + \omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega (S(\omega)x - x)(t + \tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau$ ,  $t \in \mathbb{J}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Непосредственно из определения 7 и леммы 2 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством:  $y_n \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Этом пункте приведены полученные результаты о свойствах рядов Фурье периодических на бесконечности функций относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , аналог

теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, критерий представимости такой функции в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций и спектральный критерий периодичности функции на бесконечности. Доказательства всех результатов приводятся в конце статьи.

**Теорема 1.** Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  принадлежат пространству  $\mathcal{C}_{sl, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  и удовлетворяют условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ .

Рассмотрим функции  $e_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , следующего вида  $e_k(t) = e^{i \frac{2\pi k}{\omega} t}$ ,  $t \in \mathbb{J}$ .

**Определение 8.** Будем говорить, что ряд Фурье (3) периодической на бесконечности функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  суммируем на бесконечности методом Чезаро, если существует последовательность  $(y_n^0, n \in \mathbb{N})$  функций из  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=-n}^n \left( 1 - \frac{|k|}{n+1} \right) y_k e_k + y_n^0 \right\| = 0.$$

При этом каждая из функций  $y_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , эквивалентна функции  $x_k$ , определяемой формулой (2), (т.е.  $y_k - x_k \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа.

**Теорема 2.** Ряд Фурье любой функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  суммируем на бесконечности методом Чезаро.

Отметим, что выбор обобщенных коэффициентов Фурье в этой теореме не имеет значения.

**Определение 9.** Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье (3) периодической на бесконечности функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  сходится к  $x$  относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , если существует последовательность  $(x_n^0, n \in \mathbb{N})$  функций из  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=-n}^n y_k e_k + x_n^0 \right\| = 0$ .

Важно отметить, что данное определение корректно, т.е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции  $x$ . Это объясняется тем, что  $y_n - x_n \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , где  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — канонические коэффициенты Фурье функции  $x$ , определяемые по формуле (2).

Символом  $\|y\|_{\sim}$  обозначим норму класса эквивалентности, построенного по функции  $y \in \mathcal{C}(\mathbb{J}, X)$ , т.е. величину  $\|y\|_{\sim} = \inf_{y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)} \|y - y_0\|$ .

**Определение 10.** Будем говорить, что функция  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье*, если существует обобщенный ряд Фурье (3) этой функции такой, что  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_{\sim} < \infty$ .

Отметим также, что если функция  $x$  имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ее канонический ряд Фурье сходится к  $x$  относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ . Однако канонический ряд Фурье функции  $x$  может не быть абсолютно сходящимся, хотя функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье в смысле определения 10.

Если  $X$  — банахова алгебра, то функции из  $\mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ , имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в  $\mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ , обозначаемую символом  $\mathcal{A}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  (символом  $\mathcal{A}_{\omega, \infty}(\mathbb{J})$ , если  $X = \mathbb{C}$  и  $\mathcal{C}_0 = C_0$ ).

Одним из результатов статьи является теорема 4, в которой следующая знаменитая теорема Н. Винера (см. [6]) распространяется на функции из  $\mathcal{A}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X)$ .

**Теорема 3.** *Если функция  $f \in \mathcal{A}_{\omega}(\mathbb{R})$  обладает свойством  $f(t) \neq 0$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , то функция  $1/f$  также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Пусть  $X$  — банахова алгебра с единицей  $e$ .

**Определение 11.** Функцию  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  назовем *обратимой относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$*  (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция  $y \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  такая, что  $xy - e, yx - e \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , где  $e(t) \equiv e, t \in \mathbb{J}$ . Функцию  $y$  будем называть *обратной к  $x$  относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$* .

Если  $y_1, y_2$  — обратные к  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  функции, то  $y_1 - y_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ .

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 4.** *Пусть  $X$  — банахова алгебра с единицей. Если функция  $a \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  обратима относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Рассмотрим последовательность  $(A_N, N \in \mathbb{N})$  операторов из  $End C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  следующего вида  $A_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)$ ,  $N \geq 1$ , причем  $\|A_N\| = 1, N \geq 1$ .

В данной статье получен критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций.

**Теорема 5.** *Для того, чтобы функция  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  была представима в виде  $x = x_1 + x_0$ , где  $x_1 \in C_{\omega}(\mathbb{J}, X)$ ,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  существовал  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N x$ .*

Также получен следующий спектральный критерий периодичности на бесконечности функции:

**Теорема 6.** Для того, чтобы функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  принадлежала пространству  $\mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы имело место включение  $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ .

Символом  $\Lambda_{ess}(x)$  обозначен существенный спектр функции  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  (см. [5]). Аналогичные результаты для случая  $\mathcal{C}_0 = C_0$  были получены в [4, 5].

#### 4. БАНАХОВЫ $L^1(\mathbb{R})$ -МОДУЛИ И СПЕКТР БЕРЛИНГА

В данном разделе будут приведены некоторые определения и факты из теории банаховых модулей, существенно используемые в дальнейшем.

Пусть  $\mathcal{X}$  — комплексное банахово пространство и  $End \mathcal{X}$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathcal{X}$ . Пусть  $L^1(\mathbb{R})$  — банахова алгебра определенных на  $\mathbb{R}$  измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой  $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , в качестве умножения.

Будем считать, что  $\mathcal{X}$  является невырожденным банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем (см. [7, 8]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$ . Это означает, что выполняются два свойства следующего предложения:

**Предложение 1.** Для банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  выполняются следующие условия:

- 1) из равенства  $fx = 0$ , справедливого для любой функции  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , следует, что вектор  $x \in \mathcal{X}$  — нулевой (свойство невырожденности банахова модуля  $\mathcal{X}$ );
- 2) для всех  $x \in \mathcal{X}$  имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на  $\mathcal{X}$  с представлением  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$ ):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Если  $T : \mathbb{R} \rightarrow End \mathcal{X}$  — сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (4)$$

определяет на  $\mathcal{X}$  структуру банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением  $T$ .



**Замечание 1.** С каждым невырожденным банаховым  $L^1(\mathbb{R})$ -модулем  $\mathcal{X}$  ассоциировано единственное представление  $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$  (см. [7]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение  $(\mathcal{X}, T)$ .

Теория банаховых  $L^1(\mathbb{R})$ -модулей изложена в [7–9].

**Определение 12.** Вектор из банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  назовем *непрерывным* (относительно представления  $T$ ) или  *$T$ -непрерывным*, если функция  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\varphi_x(t) = T(t)x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на  $\mathbb{R}$ ).

Совокупность всех  $T$ -непрерывных векторов из банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $\mathcal{X}$  обозначим через  $\mathcal{X}_c$  или  $(\mathcal{X}, T)_c$ . Оно образует замкнутый *подмодуль* из  $\mathcal{X}$ , т.е.  $\mathcal{X}_c$  — замкнутое линейное подпространство из  $\mathcal{X}$ , инвариантное относительно всех операторов  $T(f)$ ,  $T(t)$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Далее через  $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  обозначается преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt, \lambda \in \mathbb{R},$$

функции  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Определение 13.** *Спектром Берлинга* вектора  $x \in \mathcal{X}$  называется множество чисел  $\Lambda(x)$  из  $\mathbb{R}$  вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что  $\Lambda(x) = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R} : \text{существует функция } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \widehat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0\}$ .

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства  $X$  (см. [7, 9]):

**Лемма 3.** *Для любых  $f \in L^1(\mathbb{R})$  и  $x \in \mathcal{X}$  справедливы свойства:*

1) *из условия  $fx = 0$  для любой функции  $f \in L^1(\mathbb{R})$  следует, что  $x = 0$  (т.е.  $L^1(\mathbb{R})$ -модуль  $\mathcal{X}$  невырожден);*

2)  *$\Lambda(x)$  — замкнутое подмножество из  $\mathbb{R}$ , причем  $\Lambda(x) = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;*

3)  *$\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$ ;*

4)  *$fx = 0$ , если  $(\text{supp } \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$ , и  $fx = x$ , если множество  $\Lambda(x)$  компактно и  $\widehat{f} = 1$  в некоторой его окрестности;*

5)  $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$  — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор  $x \neq 0$  удовлетворяет равенству  $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , т.е.  $x$  — собственный вектор банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $(\mathcal{X}, T)$ ;

6) если вектор  $x \in \mathcal{X}$  имеет компактный спектр Берлинга  $\Lambda(x)$  со спектральным радиусом  $r(x) = \max_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$ , то функция  $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$  вида  $\varphi_x(t) = T(t)x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , допускает расширение на  $\mathbb{C}$  до целой функции экспоненциального типа, равного  $r(x)$  (т.е.  $\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\varphi_x(z)\|}{|z|} = r(x)$ ).

## 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ И ОПЕРАТОРЫ И ИХ РЯДЫ ФУРЬЕ

**Определение 14.** Пусть  $\omega > 0$ . Вектор  $x_0 \in (\mathcal{X}, T)$  называется  $\omega$ -периодическим (относительно представления  $T$ ), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1)  $x_0 \in \mathcal{X}_c$  и  $T(\omega)x_0 = x_0$ ;
- 2)  $x_0 \in AP(\mathcal{X})$  и  $T(\omega)x_0 = x_0$ .

Множество  $\omega$ -периодических векторов обозначим через  $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$ . Оно образует замкнутое подпространство в  $\mathcal{X}$ , инвариантное относительно операторов  $T(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Ряд Фурье любого вектора  $x \in \mathcal{X}_\omega$  имеет вид

$$x \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n, \quad (5)$$

где

$$x_n = \widehat{x}\left(\frac{2\pi n}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(\tau)x e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если ряд Фурье вектора  $x \in \mathcal{X}_\omega$  абсолютно сходится, т.е. выполнено условие  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$ , то справедливо равенство  $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x_n$ .

В [5] были получены следующие результаты:

**Теорема 7.** Для того, чтобы вектор  $x_0 \in \mathcal{X}$  был  $\omega$ -периодическим (т.е.  $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$ ), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение  $\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ .

**Теорема 8.** Для любого вектора  $x \in \mathcal{X}_\omega$  с рядом Фурье вида (5) выполняются условия:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k \right\| = 0$ .

Наряду с изометрическим (не обязательно периодическим) представлением  $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$  рассмотрим представление  $\tilde{T} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\text{End } \mathcal{X})$ ,  $\tilde{T}(t)B = T(t)BT(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \text{End } \mathcal{X}$ .

**Определение 15.** Пусть  $\omega > 0$ . Оператор  $B \in \text{End } \mathcal{X}$  назовем  $\omega$ -периодическим (относительно представления  $\tilde{T}$ ), если

$$\tilde{T}(\omega)B = T(-\omega)BT(\omega) = B,$$

(т.е. оператор  $B$  перестановочен с оператором  $T(\omega)$ ) и функция  $t \mapsto T(t)BT(-t) : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$  непрерывна в равномерной операторной топологии.

Множество  $\omega$ -периодических операторов образует замкнутую подалгебру  $\text{End}_\omega \mathcal{X} = (\text{End } \mathcal{X})_\omega$  из алгебры  $\text{End } \mathcal{X}$ .

В соответствии с определением 14 рассмотрим ряд Фурье

$$B \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \tag{6}$$

оператора  $A$  относительно представления  $\tilde{T}$ , т.е.  $B_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega T(\tau)BT(-\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Концепция рядов Фурье периодических операторов рассматривалась, например, в [9, 10].

В [10] была установлена

**Теорема 9.** Пусть  $B \in \text{End}_\omega \mathcal{X}$  —  $\omega$ -периодический непрерывно обратимый оператор с абсолютно сходящимся рядом Фурье (6). Тогда ряд Фурье  $C \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n$  обратного оператора  $C = B^{-1}$  также абсолютно сходится.

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2, 4, 5 И 6

Далее через  $X$  обозначается банахова алгебра с единицей.

Рассмотрим фактор-пространство  $\mathcal{X}(\mathbb{J}) = C_b(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ,  $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ , которое является банаховым пространством с нормой  $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)} \|y\|$ , где  $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  — класс эквивалентности, содержащий функцию  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ . Символом  $\mathcal{X}_c(\mathbb{J})$  обозначим подпространство  $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  фактор-пространства  $\mathcal{X}(\mathbb{J})$ , а символом  $\mathcal{X}_\omega(\mathbb{J})$  — подпространство  $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)/\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ .

Отметим, что банахово пространство  $\mathcal{X}(\mathbb{J})$  становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{X}(\mathbb{J}).$$

В пространстве  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  действует сильно непрерывная изометрическая группа операторов  $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}(\mathbb{R})$ , действующая по правилу

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, \quad x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Фактор-пространство  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  наделяется структурой банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля с помощью формулы

$$f\tilde{x} = \widetilde{f * x}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad x \in C_b(\mathbb{R}, X).$$

Ясно, что подпространства  $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ ,  $\mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$  являются замкнутыми подмодулями из  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля  $C_b(\mathbb{R}, X)$ , в которых действует группа  $S$  сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (4). Однако, формула (4) не позволяет корректно задать структуру  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля в  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ . Тем не менее, такой структурой наделяются фактор-пространства  $\mathcal{X}(\mathbb{J})$ ,  $\mathcal{X}_c(\mathbb{J})$  и  $\mathcal{X}_\omega(\mathbb{J})$ . Случай  $\mathbb{J} = \mathbb{R}$  очевиден: в этом случае  $\mathcal{X}_c(\mathbb{R})$  и  $\mathcal{X}_\omega(\mathbb{R})$  являются замкнутыми подмодулями фактор-модуля  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$ .

Пусть  $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ . В фактор-пространстве  $\mathcal{X}(\mathbb{R}_+)$  корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий  $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}(\mathbb{R}_+)$ , действующая по правилу

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_+),$$

где  $\widetilde{S(t)x}$  — сдвиг функции  $x$  влево (см. формулу (1)) для  $t \geq 0$ , а для  $t < 0$  символ  $\widetilde{S(t)x}$  обозначает класс эквивалентности, содержащий непрерывную функцию  $x_t \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$  вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t) & , \quad s+t > 0, \\ -t^{-1}x(0)s & , \quad s+t \leq 0, \quad s \geq 0. \end{cases}$$

Структура банахова  $L^1(\mathbb{R})$ -модуля на  $\mathcal{X}(\mathbb{J})$  ( $\mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ ,  $\mathcal{X}_{\omega, \infty}(\mathbb{J})$  в частности) наделяется формулой

$$f\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x}d\tau, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X),$$

где  $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ .

Непосредственно из определения представления  $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$  следует, что  $\tilde{S}(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \in \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ . Таким образом, функция  $t \mapsto \tilde{S}(t)\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}_{\omega, \infty}(\mathbb{J})$  является непрерывной  $\omega$ -периодической функцией, т.е. она принадлежит банахову пространству  $C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}))$ . Следовательно, имеет место

**Лемма 4.** *Функция  $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$  является  $\omega$ -периодической на бесконечности относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  ( $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ) тогда и только тогда,*

когда класс эквивалентности  $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$  является  $\omega$ -периодическим вектором относительно представления  $\tilde{S} \in \text{End } \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ .

Доказательства теорем 1, 2 и 6 следуют из леммы 4 и теоремы 8, где в качестве пространства  $\mathcal{X}_\omega$  взято пространство  $\mathcal{X}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}) = \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0) / \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ .

Доказательство теоремы 4. Пусть функция  $a \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  обратима на бесконечности и  $b \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  — одна из обратных к  $a$  (относительно подпространства  $\mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ ) функций. Следовательно,  $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a} = \tilde{e}$  — единица алгебры  $\mathcal{X}_c(\mathbb{J}) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X) / \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ . Рассмотрим оператор  $A \in \text{End } \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$  вида  $A\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \in \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ . Этот оператор является  $\omega$ -периодическим относительно представления  $\tilde{S} \in \text{End } \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ , и коэффициенты  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , его ряда Фурье  $A \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n$  относительно представления  $\tilde{S}$  имеют вид  $A_n\tilde{x} = \tilde{a}_n\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \in \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ , где  $a_n \in \mathcal{C}_{sl, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — канонические коэффициенты Фурье функции  $a$ . Поскольку  $\|\tilde{a}_n\| = \inf_{x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)} \|a_n + x_0\|$ , то ряд  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|A_n\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\tilde{a}_n\|$  абсолютно сходится.

Оператор  $A$  непрерывно обратим, и обратный к нему оператор  $B = A^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$  имеет вид  $B\tilde{x} = \tilde{b}\tilde{x}$ . В силу теоремы 9 оператор  $B$  является  $\omega$ -периодическим относительно представления  $\tilde{S}$  и его ряд Фурье  $B \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n$  также абсолютно сходится.

Поскольку  $B_n\tilde{x} = \tilde{b}_n\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \in \mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ , где  $\tilde{b}_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — коэффициенты Фурье класса  $\tilde{b}$ , и  $\|B_n\| = \|\tilde{b}_n\|$ , то  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|B_n\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\tilde{b}_n\| < \infty$ . Откуда получаем абсолютную сходимость ряда Фурье функции  $b$ . Теорема доказана.

□

Доказательство теоремы 5. Необходимость. Пусть функция  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  представима в виде  $x = x_1 + x_0$ , где  $x_1 \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ ,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ . Тогда  $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_Nx_0$ ,  $N \geq 1$ . Поскольку  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , то  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_Nx_0 = 0$ , и, следовательно,  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_Nx = x_1$ .

Достаточность. Пусть для некоторой функции  $x \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$  существует предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} A_Nx = y$ . Покажем, что  $x$  представима в виде  $x = x_1 + x_0$ , где  $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ ,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ . В силу равенств

$$\begin{aligned} S(\omega)y - y &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} (S(N\omega)x - x) \right) = 0 \end{aligned}$$

функция  $y$  является периодической, т.е.  $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ , откуда вытекает, что  $A_N y = y$  для любого  $N \geq 1$ . Обозначив  $x - y = x_0 \in \mathcal{C}_{\omega, \infty}(\mathbb{J}, X; \mathcal{C}_0)$ , получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N x_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(x - y) = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N x - y) = y - y = 0. \quad (7)$$

По функции  $x_0$  построим класс  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{X}_{\omega, \infty}(\mathbb{J})$ , который в силу леммы 4 является  $\omega$ -периодическим вектором в пространстве  $\mathcal{X}_c(\mathbb{J})$ . Наряду с операторами  $A_N$ ,  $N \geq 1$ , рассмотрим последовательность операторов  $(\tilde{A}_N)$ ,  $N \geq 1$ , из  $End \mathcal{X}(\mathbb{J})$  следующего вида  $\tilde{A}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}(k\omega)$ . Тогда  $\tilde{A}_N \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$  для любого  $N \geq 1$ . С другой стороны, из (7) следует справедливость равенства  $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{A}_N \tilde{x}_0 = \tilde{0}$ , откуда непосредственно получаем, что  $\tilde{x}_0 = \tilde{0}$ . А значит,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ , т.е. функция  $x$  представима в виде  $x = y + x_0$ , где  $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ ,  $x_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{J}, X)$ . Теорема доказана. □

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов, Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // УМН. — 1946. — Т. 1 — № 2(12). — С. 48–146.  
GELFAND, I. M., RAYKOV, D. A., SHILOV, G. E. (1997) Commutative rated rings. *UMN*. 1 (2). p. 48–146.
2. Баскаков, А. Г., Струкова, И. И., Тришина, И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59 — № 2. — С. 293–308.  
BASKAKOV, A. G., STRUKOVA, I. I., TRISHINA, I. A. (2018) Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. *Siberian Math. J.* 57 (1). p. 145–154.
3. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.  
STRUKOVA, I. I. (2015) Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. *Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika*. 3. p. 186–198.
4. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функции // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57 — № 1. — С. 186–198.  
STRUKOVA, I. I. (2016) About Wiener theorem for periodic at infinity functions. *Siberian Math. J.* 57 (1). p. 145–154.

5. BASKAKOV, A., STRUKOVA, I. (2016) Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Math. J.* 7 (4). p. 9–29.
6. Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер. — М.: Физматлит, 1963. — 256 с.  
WIENER, N. (1988) *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Cambridge Univ. Press, reprint by Dover, CUP Archive.
7. Баскаков, А. Г., Криштал, И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69 — № 3.. — С. 3–54.  
BASKAKOV, A. G., KRISHTAL, I. A. (2005) Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.* 69 (3). p. 439–486.
8. Росс, К. Абстрактный гармонический анализ. Том 2 / К. Росс, Э. Хьюитт. — М.: Мир, 1975. — 899 с.  
ROSS, K. A., HEWITT, E. (1970) *Abstract Harmonic Analysis. Volume II*. Springer-Verlag, New York.
9. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.  
BASKAKOV, A. G. (2006) Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 137 (4). p. 4885–5036.
10. Баскаков, А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38 — № 1. — С. 14–28.  
BASKAKOV, A. G. (1997) Asymptotic estimates of inverse operators matrix elements and harmonic analysis. *Siberian Math. J.* 38 (1). p. 10–22.

---

Бардин А. Е., Житенева Ю. Н. Гарантированное по рискам и сожалениям решение для иерархической модели с информированной неопределенностью / А. Е. Бардин, Ю. Н. Житенева // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 7–21.

УДК: 519.83

Формализуется новая модель принятия решений в условиях действия неконтролируемых (неопределенных) факторов в форме иерархической игры. В этой игре «природа» реагирует на выбор лица, принимающего решения, своих стратегий, изменяя область возможных значений. Предложен подход к принятию решения в указанной модели, основанный на использовании концепции оптимальности по Парето и принципах Вальда и Сэвиджа. Получены коэффициентные условия существования формализованного оптимального решения для линейно-квадратичного случая.

*Ключевые слова:* иерархическая игра при неопределенности, минимум по Парето, риск по Вальду, сожаление по Сэвиджу, информированная неопределенность

---

Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д. О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 22–45.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

Рассматривается задача о малых колебаниях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей. Приводится полная постановка начально-краевой задачи, получен закон баланса полной энергии. С помощью рассмотрения двух вспомогательных краевых задач и отвечающих им операторов исходная задача сводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве, которое изучалось авторами ранее. В работе приведены теоремы о существовании и единственности сильного решения, кратко описаны общие спектральные свойства.

*Ключевые слова:* физический маятник, вязкая жидкость, вспомогательные краевые задачи, сильное решение, самосопряженный оператор, пучок  $S$ . Крейна.



---

**Жуковский В. И., Сачков С. Н., Сачкова Е. Н. Гарантированное решение для рисконейтрала: аналог максимина в однокритериальных задачах / В. И. Жуковский, С. Н. Сачков, Е. Н. Сачкова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 46–70.**

**УДК: 519.853.53:519.816**

В середине прошлого столетия американский математик и статистик профессор Мичиганского университета Леонард Сэвидж (1917–1971) и известный швейцарский экономист, профессор Цюрихского университета Юрг Ниханс (1919–2007) независимо друг от друга предложили подход к выбору решения в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН), названный впоследствии принципом минимаксного сожаления (по Нихансу–Сэвиджу). Этот принцип, наравне с вальдовским принципом гарантированного результата (максимина) играет важнейшее значение при принятии гарантированного решения в ОЗН. Основную роль в принципе минимаксного сожаления выполняет функция сожаления, определяющая риск по Нихансу–Сэвиджу в ОЗН. Такой риск получил в последние годы широкое применение в практических задачах микроэкономики. В настоящей статье предложен один из возможных подходов к нахождению решения в ОЗН «с позиции» рисконейтрала — лица, принимающего решение (ЛПР), который стремится одновременно улучшить свой выигрыш (исход) и уменьшить риск («убить сразу двух зайцев одним выстрелом»). В качестве приложения явный вид такого решения найден для линейно-квадратичного варианта ОЗН достаточно общего вида.

***Ключевые слова:** стратегия, неопределенность, выигрыши, функция риска, риск по Нихансу–Сэвиджу, принцип минимаксного сожаления*

---

---

**Калитвин А. С., Калитвин В. А., Трусова Н. И. О системах линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин, Н. И. Трусова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 71–81.**

**УДК: 517.968**

Изучаются системы линейных интегральных уравнений в пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых на квадрате вектор-функций. Рассматриваемые в работе системы содержат матричные частично интегральные операторы и матричные операторы Романовского. Системы уравнений с такими операторами не

являются фредгольмовыми ни в одном из названных пространств даже в общем случае заданных гладких функций. В работе рассматриваются системы уравнений с ядрами из пространства непрерывных на квадрате вектор-функций со значениями в пространстве суммируемых на отрезке функций. Теорема 2 содержит условия, при которых фредгольмовость системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных вектор-функций эквивалентна обратимости более простой системы линейных интегральных уравнений с частными интегралами. При получении этих условий использована теорема С. М. Никольского о представлении фредгольмова оператора в виде суммы обратимого и компактного операторов. Приведены конкретные классы ядер, для которых справедливо утверждение теоремы 2, рассмотрен частный случай системы линейных интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами, для которой фредгольмовость системы равносильна обратимости линейных интегральных уравнений с параметром при каждом значении параметра. Теорема 5 содержит условия фредгольмовости системы интегральных уравнений типа Романовского с частными интегралами и непрерывно дифференцируемыми ядрами в пространстве непрерывно дифференцируемых вектор-функций.

**Ключевые слова:** системы линейных интегральных уравнений типа Романовского, частные интегралы, фредгольмовость систем, обратимость систем, матричные операторы и уравнения, ядра типа потенциала

---

---

Морозов А. И., Починка О. В. О новых инвариантах диффеоморфизмов Купки–Смейла на сфере без источников и стоков / А. И. Морозов О. В. Починка // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 82–92.

УДК: 517.9

В настоящей работе введен новый инвариант гомеоморфизмов диска с каскадом периодических орбит — схема отображения. Показано, что этот инвариант различает диффеоморфизмы, построенные по разным последовательностям сигнатур. Именно, мы строим диффеоморфизмы двумерной сферы, являющиеся результатами дважды примененной бифуркации удвоения периода к диффеоморфизму источник-сток, с вращением в одну сторону и в разные стороны. Основным результатом работы является доказательство не эквивалентности схем этих диффеоморфизмов, то есть отсутствия гомеоморфизма, переводящего компоненты одной схемы в компоненты другой.

---

**Ключевые слова:** диффеоморфизм Купки смейла, каскады периодических орбит, неустойчивое многообразие, устойчивое многообразие, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, топологическая энтропия.

---

---

Москалёва Ю. П., Сейдаметова З. С. Вычисление адреса блокчейн кошелька средствами iOS Swift 4 / Ю. П. Москалёва, З. С. Сейдаметова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 93 – 103.

УДК: 004.056: 510.51

В настоящей статье, используя библиотеки базовой криптографии и средства языка программирования Swift 4, решается задача формирования Адреса Блокчейн Кошелька. Предлагаются расширения и утилиты для реализации алгоритма вычисления биткоин Адреса из uncompressed открытого ключа, а также решается задача подключения в Swift вшитой в операционную систему iOS криптографической библиотеки CommonCrypto.

**Ключевые слова:** NFC, NDEF, secp256k1 открытый ключ, Биткоин Адрес, Swift, криптовалюта, адрес блокчейн кошелька

---

---

Плиев М. А. О латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторах / М. А. Плиев // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 104 – 111.

УДК: 517.9

В статье исследуется полоса латерально непрерывных ортогонально аддитивных операторов в векторной решетке регулярных ортогонально аддитивных операторов, действующих из векторной решетки  $E$  в векторную решетку  $F$ . Установлено, что эта полоса совпадает с полосой, дизъюнктивной полосе, порожденной всеми сингулярными ортогонально аддитивными операторами, действующими из  $E$  в  $F$ .

**Ключевые слова:** Ортогонально аддитивный оператор, регулярный оператор, латерально непрерывный оператор, сингулярный оператор, ортогонально аддитивное отображение, векторная решетка, латеральный идеал.

Струкова И. И. О периодических на бесконечности функциях относительно подпространств / И. И. Струкова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 3 (40). — С. 112–127.

УДК: 517.9

Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных периодических на бесконечности функций. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций. Вводятся понятия медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Вводятся понятия рядов Фурье (канонического и обобщенного), изучаются свойства коэффициентов Фурье. Доказана теорема о суммируемости на бесконечности рядов Фурье методом Чезаро. Кроме того, получены аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, а также критерий представимости периодической на бесконечности функции (относительно выбранного подпространства) в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций и спектральный критерий периодичности функции на бесконечности. Результаты статьи получены с существенным использованием теории банаховых модулей и изометрических представлений.

**Ключевые слова:** исчезающая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, банахово пространство, ряд Фурье, банахов модуль.

## Список авторов номера

---

---

**Бардин Александр  
Евгеньевич**

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация  
*e-mail: inth2006@rambler.ru*

**Войтицкий Виктор  
Иванович**

к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

**Житенева Юлия  
Николаевна**

к. ф.-м. н, доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация  
*e-mail: ulya\_zhiteneva@mail.ru*

**Жуковский Владислав  
Иосифович**

д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация  
*e-mail: zhkvlad@yandex.ru*

**Калитвин Анатолий  
Семенович**

заведующий кафедрой математики и физики института естественных, математических и технических наук Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, д. ф.-м. н., профессор, г. Липецк, Российская Федерация  
*e-mail: kalitvinas@mail.ru*

**Калитвин Владимир  
Анатольевич**

доцент кафедры математики и физики института естественных, математических и технических наук Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, к. ф.-м. н., доцент, г. Липецк, Российская Федерация  
*e-mail: kalitvin@gmail.com*

- Копачевский Николай  
Дмитриевич** д. ф.-м. н, заведующий кафедрой математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: kopachevsky@list.ru*
- Морозов Андрей  
Игоревич** студент 4-го курса факультета информатики, математики и компьютерных наук, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород, Российская Федерация  
*e-mail: andreifrostnn@gmail.com*
- Москалева Юлия  
Петровна** к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной информатики факультета экономики, менеджмента и информационных технологий ГБОУВО РК КИПУ, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: yulmosk@mail.ru*
- Плиев Марат  
Амурханович** к. ф.-м. н, старший научный сотрудник Южного математического института ВШЭ РАН, г. Владикавказ, Российская Федерация  
*e-mail: plimarat@yandex.ru*
- Починка Ольга  
Витальевна** заведующая лаборатории топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород, Российская Федерация  
*e-mail: olga-pochinka@yandex.ru*
- Сачков Сергей  
Николаевич** к. ф.-м. н, г. Орехово-Зуево Московской области, Российская Федерация  
*e-mail: snsachkov@yandex.ru*
- Сачкова Елена  
Николаевна** к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево Московской области, Российская Федерация  
*e-mail: ensachkova@mail.ru*

- 
- Сейдаметова Зарема Сейдалиевна** д. пед. н, профессор кафедры прикладной информатики факультета экономики, менеджмента и информационных технологий ГБОУВО РК КИПУ, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: z.seydametova@gmail.com*
- Струкова Ирина Игоревна** к. ф.-м. н, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация  
*e-mail: irina.k.post@yandex.ru*
- Трусова Наталья Ивановна** старший преподаватель кафедры математики и физики института естественных, математических и технических наук Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Российская Федерация  
*e-mail: trusova.nat@gmail.com*

Подписано к печати 7.12.2018. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 14,5 п. л. Тираж 50 экз.

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 31.01.2019

Отпечатано: ИП Павлюков В. В.

295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, дом 44, литера «3», офис 6