

ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№ 2 (39) ' 2018

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru/title_about.asp?id=48863).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2018, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901

Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТЯНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ	профессор, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. СТАРОСТЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

- к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** — ответственный редактор (раздел «Математика»)
к. ф.-м. н., доцент **В. Ф. БЛЫЩИК** — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА** — ученый секретарь журнала

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор): vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Nikolay KOPACHEVSKY	Vice Chief Editor , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoliy GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Igor ORLOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir STAROSTENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valeriy CHEKHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

EDITORIAL BOARD

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the "Computer Science Theory" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the "Mathematics" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	The Editor of the Cite Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	Scientific Secretary of the Journal Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V. Multistep Bertrand duopoly model with imports	7
Emelichev V. A., Nikulin Yu. V. On some type of stability for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions.....	17
Гаврилов С. В., Гуров С. И., Тельпухов Д. В., Жукова Т. Д. Использование информационной избыточности при построении сбоеустойчивых комбинационных схем	29
Германчук М. С., Козлова М. Г. Синтез алгоритмов кластеризации для решения многоагентной задачи коммивояжера.....	45
Донской В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: применение нейронных сетей	71
Shchukin M. V. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold	90
Рефераты	98
Список авторов номера	101

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Boldyrev M. V. Multistep Bertrand duopoly model with imports	7
Emelichev V. A., Nikulin Yu. V. On some type of stability for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions.....	17
Gavrilov S. V., Gurov S. I., Tel'pukhov D. V., Zhukova T. D. Synthesis of fault-tolerant combination schemes by introducing information redundancy ..	29
Germanchuk M. S., Kozlova M. G. Synthesis of Algorithms of Clustering to Solve the Multi-agent Traveling Salesman Problem.....	45
Donskoy V. I. Extraction of Optimization Models from Data: an Application of Neural Networks	71
Shchukin M. V. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold	90
Abstracts	98
Authors	101

УДК: 519.532.2

MSC2010: 90C39

MULTISTEP BERTRAND DUOPOLY MODEL WITH IMPORTS

© V. I. Zhukovskiy, M. V. Boldyrev

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
FACULTY OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND CYBERNETICS
DEPARTMENT OF OPTIMAL CONTROL
LENINSKIYE GORY UL., 1, BLDG. 52, MOSCOW, 119234, RUSSIAN FEDERATION
E-MAIL: *m_boldyrev@list.ru*

INTRODUCTION

In 1838, French mathematician Antoine Augustin Cournot suggested a mathematical model of interactions between two firms in his book *Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* [1]. In this model, the firms select their output values, assuming the opponent's policy constant, thereby de facto stating the hypothesis beneath the "Nash equilibrium". Independently from Cournot in 1950, American mathematician and economist John Forbes Nash formalized [2, 3] the concept of the equilibrium situation, later named the Nash equilibrium. Forty-four years later (in 1994) he received a Nobel Prize (shared with John Harsanyi and Reinhard Selten) "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games". In his model Cournot assumed that both firms select the amount of the good they can sell while the price is formed as a result of equality of demand and supply. However, it would be more natural for the salesperson to select their price directly. This approach was suggested by French mathematician Joseph Louis François Bertrand in 1883 [4]. The mathematical model considered in this article differs from Bertrand's: *first*, the problem is formulated in terms of a multistep game; *second*, it accounts for imports into the market.

A suitable modification of Bellman's method of dynamic programming is suggested for such an extended mathematical model. Thanks to this method, an explicit presentation of a strongly guaranteed equilibrium is found, first suggested by the first author in 1994 in [5, p. 233].

1. MATHEMATICAL MODEL

Suppose the market is dominated by two firms, 1 and 2, who produce interchangeable goods. Firm 1 declares their price p_1 , firm 2 declares their price p_2 . After the prices have been declared, demand for these goods is established (we assume it is linear in respect to the declared prices). The demand for the first firm's good can be represented as

$$Q_1(p_1, p_2) = q - l_1 p_1 + l_2(p_2 + y),$$

for the second firm's good as

$$Q_2(p_1, p_2) = q - l_1 p_2 + l_2(p_1 + y),$$

where q is the initial demand, $l_1 > 0$ is the coefficient of elasticity that represents the fall of demand after the price of the firm's good has been increased by one currency unit, $l_2 > 0$ is the coefficient of elasticity that represents the rise of demand after the price of the competitor firm's good has been increased by one currency unit, $y > 0$ is the price of analogous imported good set independently from the seller's actions (y will later be assumed as an uncertainty).

Suppose the cost price of a unit of the good is c . Then the function estimating the profit of the firm $i = 1, 2$ may be represented as

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2, y) &= [q - l_1 p_1 + l_2(p_2 + y)](p_1 - c), \\ f_2(p_1, p_2, y) &= [q - l_1 p_2 + l_2(p_1 + y)](p_2 - c). \end{aligned}$$

Since $f_i(p_1, p_2, y)$ is concave downward with respect to p_i ($i = 1, 2$) (since $\frac{\partial^2 f_i}{\partial p_i^2} = -2l_i < 0$), the sufficient condition of existence of p_i^* that maximizes $f_i(p_1, p_2, y)$ with respect to p_i is reduced to fulfillment of the following condition:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1(p_1, p_2, y)}{\partial p_1} \right|_{p_1^*} &= q - 2l_1 p_1^* + l_2(p_2 + y) + l_1 c = 0, \\ \left. \frac{\partial f_2(p_1, p_2, y)}{\partial p_2} \right|_{p_2^*} &= q - 2l_1 p_2^* + l_2(p_1 + y) + l_1 c = 0. \end{aligned}$$

Then the maximum profit of player 1 is reached when

$$p_1^* = \frac{q + l_1 c}{2l_1} + \frac{l_2}{2l_1}(p_2 + y) = a + l(p_2 + y) \quad \forall p_2 \geq 0,$$

analogously for player 2

$$p_2^* = a + l(p_1 + y) \quad \forall p_1 \geq 0,$$

where

$$a = \frac{q + l_1 c}{2l_1} > 0,$$

$$l = \frac{l_2}{2l_1} > 0.$$

If we account for time lags (which we assume equal to one time period), assume $z = ly$ and u_i is control action of the firm i , and if $u_i[k]$ is the amount of money spent at the moment of time $t = k$ for marketing, modernization of means of production, implementation of new technologies, various measures of stimulation and penalty on the producer, then our controlled system of interactions between the firms and importers may be represented as a "difference scheme":

$$\begin{cases} p_1(k+1) = a + lp_2(k) + z[k] + u_1[k], \\ p_2(k+1) = a + lp_1(k) + z[k] + u_2[k] \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ p_i(0) = p_i^0 \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad (1)$$

where $p_i^0 = p_i(0)$ are initial prices; $z[k] = ly[k]$ is the uncertainty at the moment of time $t = k$. With matrix $L = \begin{bmatrix} 0 & l \\ l & 0 \end{bmatrix}$ and two-dimensional column-vectors $\bar{a} = (a, a)^T, p = (p_1, p_2)^T, e = (1, 1)^T, u = (u_1, u_2)^T$ the system (1) may be represented as

$$p(k+1) = \bar{a} + Lp(k) + ez[k] + u[k], \quad p(0) = p^0 = (p_1^0, p_2^0)^T \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

2. TWO-STEP NONCOALITIONAL GAME

From now on, we will suppose the game (1) (or (2)) only lasts for two turns, i.e. $k = 0, 1$. Each firm will be called a *player*. Each strategy (rule of operation) $U_i(k)$ of the firm i at the moment $k = 0, 1$ will be identified (in accordance with the theory of differential games) as a scalar function $u_i(k, p)$ of position $(k, p_1, p_2) = (k, p)$ at the moment $t = k$ (we will from now on represent this relation as $U_i(k) \div u_i(k, x)$).

The set of strategies $U_i(k)$ will be denoted by the symbol $\mathfrak{U}_i(k)$ ($i = 1, 2$). Then the strategy of player i in the two-step noncoalitional game defined later will be represented as an ordered set $U_i = (U_i(0), U_i(1)) \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_i(0) \times \mathfrak{U}_i(1)$.

We will now consider uncertainties. Supposing *informational discrimination of the firms*, we will identify the uncertainty $Z(k)$ at the moment $t = k$ as a scalar function $z(k, p, u)$, i.e. $Z(k) \div z(k, p, u) = z(k, p_1, p_2, u_1, u_2)$; we will later use the set $\mathfrak{Z}(k) = \{Z(k)\}$. Then the uncertainty is $Z = (Z(0), Z(1)) \in \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(0) \times \mathfrak{Z}(1)$. As time progresses from 0 to 2, the game "unfolds" as follows. Suppose the players

do not form a coalition and each player i ($i = 1, 2$) independently selects their strategy $U_i = (U_i(0), U_i(1)) \in \mathfrak{U}_i$, i. e. builds two scalar functions $u_i(0, p_1, p_2) \geq 0$ and $u_i(1, p_1, p_2) \geq 0$ (where $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$). Each player i selects strategies $U_i(0) \in \mathfrak{U}_i(0)$ and $U_i(1) \in \mathfrak{U}_i(1)$ under their guidance to maximize their outcome (the value of the outcome function $J_i(U, Z, p^0), p^0 = (p_1^0, p_2^0)$; its composition will be shown below). At the same time, some definite values of strategies $u[0] = u(0, p(0)), u[1] = u(1, p(1))$ and uncertainties $z[0] = z(0, p(0), u[0]), z[1] = z(1, p(1), u[1])$ take place. Using (2) under $k = 0, z = z[0]$, and $p(0) = p^0$ ($i = 1, 2$), we obtain the value of the phase vector $p(1) = (p_1(1), p_2(1))$:

$$p(1) = \bar{a} + Lp(0) + ez[0] + u[0].$$

Then, after applying (2) under $k = 1, z = z[1]$, and already selected scalar functions $u_i(1, p_1, p_2)$ ($i = 1, 2$), we have

$$p(2) = a + Lp(1) + ez[1] + u[1].$$

Thereby we have obtained, *first*, two sequences

$$p_i(k)_{k=0}^2 \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

that form a discrete trajectory of system (2) that assumes the usage of the mentioned (and selected) specific strategies $U_i \div u_i(0, p), u_i(1, p), U_i \in \mathfrak{U}_i$ ($i = 1, 2$) and implementation of uncertainty $Z \div \{z(0, p, u), z(1, p, u)\}$;

second, two sequences of implementation

$$u_i[k] = u_i(k, p_1(k), p_2(k))_{k=0}^1 \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

of the selected strategies $U_i \in \mathfrak{U}_i$ ($i = 1, 2$);

third, a sequence of implementation of uncertainties $z[k]_{k=0}^1$.

Using (3), (4), and $z[k]_{k=0}^1$, we will build the criterion (outcome function) of player i , whose value (outcome) will estimate the quality of player's operations. While doing this, we will account for three circumstances:

first, each firm i ($i = 1, 2$) seeks to minimize their price, which, in the end, may be represented as minimization of $p_i^2(2)$ (or, equivalently, maximization of $-p_i^2(2)$) by player i ,

second, each firm seeks to minimize usage of their resources. This may be represented as aspiration to maximize $\sum_{k=0}^1 (-2u_i^2[k])$,

third, following the principle of guaranteed result formulated by Yu. B. Germeyer and choosing their strategy, player i must assume "maximal antagonism" of the uncertainty,

which can be accounted for by introducing the summand of $\sum_{k=0}^1 1.5z^2[k]$ to the outcome function. Therefore, we obtain the outcome function of player i :

$$J_i(U, Z, p^0) = -p_i^2(2) + \sum_{k=0}^1 (-2u_i^2[k] + 1.5z^2[k]) \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Ordered quintuplet

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \Sigma \div (2), \{\mathfrak{U}_i\}_{i=1,2}, \mathfrak{Z}, \{J_i(U, \mathfrak{Z}, p^0) \div (5)\}_{i=1,2} \rangle$$

forms a *two-step noncoalitional linear-quadratic game of two persons under uncertainty*. Here, $\Sigma \div (2)$ denotes that the control system Σ is described by the difference scheme (2), and $J_i(U, Z, p^0) \div (5)$ is the outcome function of player i that takes the form (5).

Definition 1. Pair $(U^e, J^e[p^0])$ is called [6, p.117] a *strongly guaranteed equilibrium* of the game Γ if:

- 1) there exist uncertainties $Z^{(i)} \in Z$ ($i \div 1, 2$) such that

$$\min_{Z \in \mathfrak{Z}} J_i(U, Z, p^0) = J_i(U, Z^{(i)}, p^0) = J_i[U, p^0] \quad (i = 1, 2)$$

for $\forall U \in \mathfrak{U}$;

- 2) $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathfrak{U}$ is the only Nash equilibrium situation in the "game of guaranties"

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma, \mathfrak{U}_{i=1,2}, \{J_i[U_1, U_2, p^0]\}_{i=1,2} \rangle,$$

i. e. U^e is defined by equalities:

$$\max_{U_1 \in \mathfrak{U}_1} J_1[U_1, U_2^e, p^0] = J_1[U^e, p^0] = J_1^e[p^0],$$

$$\max_{U_2 \in \mathfrak{U}_2} J_2[U_1^e, U_2, p^0] = J_2[U^e, p^0] = J_2^e[p^0];$$

- 3) $J^e[p^0] = (J_1^e[p^0], J_2^e[p^0])$.

3. METHOD OF BUILDING OF A STRONGLY GUARANTEED EQUILIBRIUM

After using the method of dynamic programming, first described by German mathematician Richard Bellman, and results from [6, §3.4], we obtain the following method of finding a strongly guaranteed equilibrium (SGE).

First of all, we need to build two ($i = 1, 2$) functions of $p(k+1)$

$$W_i(k, p, u, z, V_i^{(k+1)}(p(k+1) = \bar{a} + Lp + ez + u)) =$$

$$= -2u_i^2 + 1.5z^2 + V_i^{(k+1)}(\bar{a} + Lp + ez + u) \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Step 1. For $k = 2$ we introduce two scalar functions

$$V_i^{(2)}(p) = -p_i^2 \quad (i = 1, 2).$$

Step 2. For $k = 1$ we need to find two functions $z^{(i)}(1, p, u)$ for $\forall p \in \mathbb{R}_+^2 = \{p = (p_1, p_2) | p_i \geq 0\}$, $u \in \mathbb{R}_+^2$ in accordance with the equalities

$$\begin{aligned} & \min_z \{-2u_i^2 + 1.5z^2 - (a + lp_{3-i} + u_i + z)^2\} = \\ & = Idem\{z \rightarrow z^{(i)}(1, p, u_1, u_2)\} = W_i[1, p, u_1, u_2] \quad (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (7)$$

then we need to build four functions $V_i^{(1)}(p)$ и $u_i^e(1, p)$ ($i = 1, 2$) in accordance with

$$V_1^{(1)}(p) = \max_{u_1} \{W_1[1, p, u_1, u_2^e(1, p)]\} = Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(1, p)\}, \quad (8)$$

$$V_2^{(1)}(p) = \max_{u_2} \{W_2[1, p, u_1^e(1, p), u_2]\} = Idem\{u_2 \rightarrow u_2^e(1, p)\} \quad (9)$$

under $\forall p \in \mathbb{R}_+^2$, and ensure that the pair $(u_1^e(1, p), u_2^e(1, p))$ is unique;

Step 3. For $k = 0$ we need to find two functions $z^{(i)}(0, p, u)$ ($i = 1, 2$) using equalities

$$\begin{aligned} & \min_z \{-2u_1^2 + 1.5z^2 + V_1^{(1)}(p(1) = \bar{a} + Lp + ez + u)\} = \\ & = W_i[0, p, u] = Idem\{z \rightarrow z^{(i)}(0, p, u)\} \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^2, u \in \mathbb{R}^2 \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (10)$$

analogously to Step 2, find functions $u_i^e(0, p)$, $V_i^{(0)}(p)$ ($i = 1, 2$) for $\forall p \in \mathbb{R}_+^2$ according to

$$\begin{aligned} & \max_{u_1} W_1[0, p, u_1, u_2^e(0, p)] = Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(0, p)\} = V_1^{(0)}(p), \\ & \max_{u_2} W_2[0, p, u_1^e(0, p), u_2] = Idem\{u_2 \rightarrow u_2^e(0, p)\} = V_2^{(0)}(p) \end{aligned} \quad (11)$$

and establish that the pair $(u_1^e(0, p), u_2^e(0, p))$ is unique. Then the SGE of the game Γ for all $p^0 \in \mathbb{R}_+^2$ is formed by the pair $(U^e, J^e[p^0])$, where $U^e = (U_1^e, U_2^e)$, $U_i^e = (U_i^e(0), U_i^e(1)) \div (u_i^e(0, p), u_i^e(1, p))$ ($i = 1, 2$), and $J^e[p^0] = (V_1^{(0)}(p^0), V_2^{(0)}(p^0))$.

4. EXPLICIT PRESENTATION OF THE SGE OF THE GAME Γ

We have applied the scheme suggested in the previous section.

Step 1. ($k = 2$). Two scalar functions $V_i^{(2)}(p) = -p_i^2$ ($i = 1, 2$) have been built.

Step 2. ($k = 1$). Equalities (7) only take place under $z = z^{(i)}(1, p, u)$ if

$$\min_z \overline{W}_i^{(1)}(z) = \overline{W}_i^{(1)}(z^{(i)}(1, p, u)) \quad \forall p, u \in \mathbb{R}_+^2 \quad (12)$$

where

$$\overline{W}_i^{(1)}(z) = +1.5z^2 - (a + lp_{3-i} + u_i + z)^2 (i = 1, 2). \quad (13)$$

In turn, (12) takes place if

$$\left. \frac{\partial \overline{W}_1^{(1)}(z)}{\partial z} \right|_{z^{(1)}(1,p,u)} = 3z^{(1)}(1,p,u) - 2(a + lp_2 + u_1 + z^{(1)}(1,p,u)) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \overline{W}_1^{(1)}(z)}{\partial z^2} = 1 > 0.$$

The first equality leads us to

$$z^{(1)}(1,p,u) = 2(a + lp_2 + u_1). \quad (14)$$

Analogously

$$z^{(2)}(1,p,u) = 2(a + lp_1 + u_2).$$

After substitution of (14) into (13) and taking (7) into account under $i = 1$ we obtain

$$V_1^{(1)}(p) = \max_{u_1} \{-2u_1^2 - 3[a + lp_2 + u_1]^2\} = Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(1,p)\}. \quad (15)$$

This equality takes place for $\forall p_2 \geq 0$ if

$$\left. \frac{\partial \overline{W}_1^{(1)}(1)[u]}{\partial u_1} \right|_{u_1^e(1,p)} = -4u_1^e(1,p) - 6[a + lp_2 + u_1^e(1,p)] = 0, \quad (16)$$

since

$$\left. \frac{\partial^2 \overline{W}_1^{(1)}(1)[u]}{\partial u_1^2} \right|_{u_1^e(1,p)} = -10 < 0,$$

where

$$\overline{W}_1^{(1)}[u] = -2u_1^2 - 3[a + lp_2 + u_1]^2.$$

From (16) and (15) we obtain $u_1^e(1,p) = -0.6(a + lp_2)$ and $V_1^{(1)}(p) = -1.2(a + lp_2)^2$, analogously $u_2^e(1,p) = -0.6(a + lp_1)$ and $V_2^{(1)}(p) = -1.2(a + lp_1)^2$.

Step 3. ($k = 0$) Finding $z^{(i)}(0,p,u)$ ($i = 1, 2$) using inequalities

$$\min_z \overline{W}_i^{(0)}(z) = W_i^{(0)}(z^{(i)}(0,p,u)) \quad \forall p, u \in \mathbb{R}^2 \quad (i = 1, 2),$$

where (see (10))

$$\begin{aligned}\overline{\overline{W}}_1^{(0)}(z) &= 1.5z^2 - 1.2[a + lp_1 + u_2 + z]^2, \\ \overline{\overline{W}}_2^{(0)}(z) &= 1.5z^2 - 1.2[a + lp_2 + u_1 + z]^2.\end{aligned}$$

Since

$$\left. \frac{\partial \overline{\overline{W}}_1^{(0)}}{\partial z} \right|_{z^{(1)}(0,p,u)} = 3z^{(1)}(0,p,u) - 2.4l[a + l(a + lp_1 + u_2 + z^{(1)}(0,p,u))] = 0, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \overline{\overline{W}}_1^{(0)}}{\partial z^2} \right|_{z^{(1)}(0,p,u)} = 3 - 2.4l^2,$$

and $3 - 2.4l^2 > 0$ if

$$l \in [0; 1.11], \quad (18)$$

then, when (18) takes place, (17) yields

$$z^{(1)}(0,p,u) = \gamma[a(1+l) + l^2p_1 + lu_2],$$

where constant

$$\gamma = \frac{2.4l}{3 - 2.4l^2} > 0, \quad \forall l \in [0; 1.11].$$

Finally,

$$V_1^{(0)}(p) = \max_{u_1} \left\{ -2u_1^2 + \frac{6}{4l^2 - 5} [a(1+l) + l^2p_1 + lu_2^e(0,p)] \right\} = Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(0,p)\}.$$

This chain of equalities and its analog for building $u_1^e(0,p)$ takes place under $u_1^e(0,p) = u_2^e(0,p) = 0$.

Then

$$V_1^{(0)}(p) = \frac{6}{4l^2 - 5} [a(1+l) + l^2p_1],$$

analogously

$$V_2^{(0)}(p) = \frac{6}{4l^2 - 5} [a(1+l) + l^2p_2].$$

Finally, we obtain the following

Statement 1. *If in the game Γ constant $l = \frac{l_2}{2l_1} \in [0; 1.11]$, then for any initial price $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ the strongly guaranteed equilibrium (U^e, J^e) is:*

first, the equilibrium situation

$$\begin{aligned} U^e &= (U_1^e, U_2^e), \\ U_i^e &= (U_i^e(0), U_i^e(1)), \\ U_1^e(0) &= U_2^e(0) \div 0, \\ U_1^e(1) &\div -0.6(a + lp_2), \\ U_2^e(1) &\div -0.6(a + lp_1); \end{aligned}$$

second, the equilibrium outcomes

$$\begin{aligned} J^e &= (J_1^e, J_2^e), \\ J_1^e &= J_1[U^e, p^0] = \frac{6}{4l^2 - 5}[a(1 + l) + l^2 p_1^0], \\ J_2^e &= J_2[U^e, p^0] = \frac{6}{4l^2 - 5}[a(1 + l) + l^2 p_2^0]. \end{aligned}$$

CONCLUSION

Through the use of a suitable variant of dynamic programming, the explicit form of the situation of guaranteed equilibrium in a two-step positional mathematical model of Bertrand duopoly has been found. This research may be extended by examination of N -person games as well as applying the Berge equilibrium instead of the Nash equilibrium.

REFERENCES

1. COURNOT, A. A. (1838) *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de richesses*. Paris.
2. NASH, J. F. (1950) Equilibrium points in N -person games. *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*. 36. p. 48–49.
3. NASH, J. F. (1951) Non-cooperative games. *Ann. Math.*. 54. p. 286–295.
4. BERTRAND, J. (1883) Review of Walras's *Théorie mathématique de la richesse sociale* and Cournot's *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de richesses*. *Ann. Math.*. 68. p. 499–508.

5. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова Думка, 1994. — 320 с.
ZHUKOVSKIY, V. I. and CHIKRIY A. A. (1994) *Linear-quadratic differential games*. Kiev: Naukova Dumka.
6. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Смирнова Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М.: КРАСАНД, 2013. — 368 с.
ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N., and CHIKRIY A. A. (2013) *Guaranteed solutions to conflicts and their applications*. Moscow: KRASAND.

UDK: 519.854

MSC2010: 90C09, 90C27, 90C29, 90C31

ON SOME TYPE OF STABILITY FOR MULTICRITERIA INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEM OF FINDING EXTREMUM SOLUTIONS

© Vladimir A. Emelichev*, Yury V. Nikulin**

* BELARUSIAN STATE UNIVERSITY
NEZAVISIMOSTI 4, MINSK, 220030, BELARUS
E-MAIL: vemelichev@gmail.com

** UNIVERSITY OF TURKU
VESILINNANTIE 5, TURKU, 20014, FINLAND
E-MAIL: yurnik@utu.fi

Abstract. We consider a wide class of linear optimization problems with integer variables. In this paper, the lower and upper attainable bounds on the T_2 -stability radius of the set of extremum solutions are obtained in the situation where solution space and criterion space are endowed with various Hölder's norms. As corollaries, the T_2 -stability criterion is formulated, and, furthermore, the T_2 -stability radius formula is specified for the case where criterion space is endowed with Chebyshev's norm.

Keywords: *multicriteria integer linear programming, set of extremum solutions, stability radius, T_2 -stability, Hölder's norm, Chebyshev's norm.*

INTRODUCTION

Multicriteria decision making models of discrete optimization are widely used in economics, management, and many other fields of applied mathematics. One of the major troubles in such models is related to inaccuracy of input data due to many factors such as modeling and/or prediction errors, imprecise calculation, and etc. Sometimes an algebraic formulation may also influence the issue [1]. The accumulated experience of dealing with these aspects clearly shows that none of the real life problems can be properly formulated and correctly solved without deep analyzing its stability.

Any complex decision making problem involves multicriteria choice of a subset of the best alternatives among all the feasible solutions satisfying some chosen optimality principle. Post-optimal and parametric analysis of discrete problems target finding an answer to the question how optimal solutions react to small perturbations of input parameters (problem initial data).

There exist two major approaches, qualitative and quantitative, in post-optimal analysis of discrete optimization problems. Different types of stability are typically

analyzed, where stability can be defined as a certain feature of preserving some invariance properties on the set of optimal solutions. In a family of qualitative approaches, we are seeking for necessary and/or sufficient conditions of stability as well as specifying an area of stability, usually termed as stability region [2–8].

A family of quantitative approaches deals with construction and calculation of numerical characteristics (quantifying measures) of stability. The stability radius is a key concept used inhere. It is defined as a radius of extreme stability ball, i. e. a radius of the largest neighborhood inside the initial problem parameter metric space such that any "perturbed" problem with parameters in it has a certain invariance properties on the set of optimal solutions. The coefficients of a scalar or vector criterion (objective function) are usually subject for perturbations. Sometime we can also have uncertainty related to the feasibility constraints, then the coefficients of the constraints are considered as a subject for perturbation. The main research goal is to find analytical expressions or bounds of the stability radius [9–19] as well as algorithms of their calculation for optimization problems [20–22].

This paper belongs to the family of quantitative approaches. It continues a series of publications [11, 23–26] seeking for analytical bounds on stability radius (different types of stability) for multicriteria problem of Integer Linear Programming (ILP) with Pareto optimality principle.

In multicriteria decision making, we may also deal with some choice functions that are different from the well-known Pareto optimality principle. Such functions have a specific merit in many real life applications (see e.g. [27–30]). In this paper, we consider multicriteria problem of ILP with extremum optimality principle, i. e. with the set of all extremum solutions. We study the so-called T_2 -type of stability [4] that can easily be interpreted in terms of stability kernel existence, i. e. existence of a subset of extremum solutions such that the solutions are stable with respect to small perturbations of initial problem parameters. Thus, the T_2 -stability radius is defined as a supreme level of problem parameter perturbations preserving at least one solution within the stability kernel. In this paper, we specify the lower and upper bounds on the T_2 -stability radius of multicriteria ILP problem with extremum solutions for the case where criterion space is endowed with various Hölder's norms. Attainability of the estimates (both lower and uppers bounds) is shown. As a corollary, we deduce a known before criterion on T_2 -stability of multicriteria ILP problem for the case where criterion space is endowed with Chebyshev's norm.

INTRODUCTION

We consider an m -criteria problem of ILP problem in the following formulation. Let $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ be a real valued $m \times n$ - matrix with corresponding rows $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 1$. Let also $X \subset \mathbf{Z}^n$, $1 < |X| < \infty$, be a set of feasible solutions (integer vectors) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $n \geq 2$. We define a vector criterion

$$Cx = (C_1x, C_2x, \dots, C_mx)^T \rightarrow \min_{x \in X},$$

with partial criteria being linear functions.

In this paper, $Z_m(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, is a problem of finding the set of extremum solutions defined in traditional way (see e.g. [27–29]):

$$E_m(C) = \{x \in X : \exists k \in N_m \ \forall x' \in X \ (C_k(x) \leq C_k(x'))\}.$$

Thus, the choice of extremum solutions can be interpreted as finding best solutions for each of m criteria, and then combining them into one set. In other words, the set of extremum solutions contains all the individual minimizers of each objective. Obviously, $E^1(C)$, $C \in \mathbf{R}^n$ is the set of optimal solutions for scalar problem $Z^1(C)$ with $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Taking into account that X is finite, the following formulae below are true for any $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$:

$$E_m(C) = S_m(C) \setminus (P_m(C) \setminus L_m(C)) = L_m(C) \cup (S_m(C) \setminus P_m(C)),$$

$$E_m(C) \cap P_m(C) = L_m(C) \neq \emptyset,$$

$$L_m(C) \subseteq P_m(C) \subseteq S_m(C),$$

$$L_m(C) \subseteq E_m(C) \subseteq S_m(C),$$

where $P_m(C)$ denotes the Pareto set [31], $S_m(C)$ denotes the Slater set [32], and $L_m(C)$ denotes the lexicographic set (see e.g. [33, 34]).

Below we define all the three sets in a traditional way:

$$P_m(C) = \left\{ x \in X : \nexists x^0 \in X \ (Cx \geq Cx^0 \ \& \ Cx \neq Cx^0) \right\},$$

$$S_m(C) = \left\{ x \in X : \nexists x^0 \in X \ \forall k \in N_m \ (C_k(x) > C_k(x^0)) \right\},$$

$$L_m(C) = \bigcup_{s \in \Pi_m} L(C, s), \quad L(C, s) = \left\{ x \in X : \forall x' \in X \ (Cx \leq_s Cx') \right\}.$$

Here Π_m is the set of all $m!$ permutations of numbers $1, 2, \dots, m$; $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \Pi_m$; and the binary relation of lexicographic order between

two vectors $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ and $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m) \in \mathbf{R}^m$ is defined as follows

$$y \leq_s y' \Leftrightarrow (y = y') \vee \left(\exists k \in N_m \quad \forall i \in N_{k-1} \quad (y_{s_k} < y'_{s_k} \ \& \ y_{s_i} = y'_{s_i}) \right),$$

where $N_0 = \emptyset$. Obviously all the sets, $P_m(C), S_m(C), L_m(C)$ and $E_m(C)$, are non-empty for any matrix $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ due to the finite number of alternatives in X .

We will perturb the elements of matrix $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ by adding elements of the perturbing matrix $C' \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Thus the perturbed problem $Z_m(C + C')$ of finding extremum solutions has the following form

$$(C + C')x \rightarrow \min_{x \in X}.$$

The set of extremum solutions of the perturbed problem is denoted by $E_m(C + C')$. In the solution space \mathbf{R}^n , we define an arbitrary Hölder's norm l_p , $p \in [1, \infty]$, i. e. the norm of vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ is defined by the number

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j \in N_n} |a_j|^p \right)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|a_j| : j \in N_n\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

In the criterion space \mathbf{R}^m , we define another Hölder's norm l_q , $q \in [1, \infty]$, The norm of matrix $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ is defined by the number

$$\|C\|_{pq} = \|(\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \dots, \|C_m\|_p)\|_q,$$

It is well-known that l_p norm, defined in \mathbf{R}^n , induces conjugated l_{p^*} norm in $(\mathbf{R}^n)^*$. For p and p^* , the following relations hold

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \quad 1 < p < \infty.$$

In addition, if $p = 1$ then $p^* = \infty$. Obviously, if $p^* = 1$ then $p = \infty$. Also notice that p and p^* belong to the same range $[1, \infty]$. We also set $\frac{1}{p} = 0$ if $p = \infty$.

It is easy to see that for any vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ with $|a_j| = \sigma$, $j \in N_n$ it holds

$$\|a\|_p = n^{\frac{1}{p}} \sigma \tag{1}$$

for any $p \in [1, \infty]$. For any two vectors a and b of the same dimension, the following Hölder's inequalities are well-known

$$|a^T b| \leq \|a\|_p \|b\|_{p^*}. \tag{2}$$

Using the well-known condition (see [35]) that transforms (2) into equality, the validity of the following statements becomes transparent

$$\forall b \in \mathbf{R}^n \quad \forall \sigma > 0 \quad \exists a \in \mathbf{R}^n \quad (|a^T b| = \sigma \|b\|_{p^*} \ \& \ \|a\|_p = \sigma). \quad (3)$$

Given $\varepsilon > 0$, let

$$\Omega_{pq}(\varepsilon) = \left\{ C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_{pq} < \varepsilon \right\}$$

be the set of perturbing matrices C' with rows $C'_k \in \mathbf{R}^n$, $k \in N_m$, and $\|C'\|_{pq}$ is the norm of $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Denote

$$\Xi_{pq} = \left\{ \varepsilon > 0 : \exists x \in E_m(C) \quad \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (x \in E_m(C + C')) \right\}.$$

Following [4, 16], the number

$$\rho_m(p, q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq} & \text{if } \Xi_{pq} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } \Xi_{pq} = \emptyset \end{cases}$$

is called the T_2 -stability radius (strong quasistability radius in terminology [10, 24]) of problem $Z_m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, with Hölder's norms l_p and l_q in the spaces \mathbf{R}^n and \mathbf{R}^m respectively. Thus, the T_2 -stability radius of problem $Z_m(C)$ defines the extreme level of independent perturbations of the elements of matrix C in the metric space $\mathbf{R}^{m \times n}$ such that there exists at least one of the extremum solutions of $Z_m(C)$ preserving a property of being an extremum solution for each perturbed problem $Z_m(C + C')$.

The same concept of the T_2 -stability radius of $Z_m(C)$ can also be introduced using the definition of the stability kernel, known earlier in [4]. Indeed, it is easy to see that

$$\rho_m(p, q) = \sup \{ \varepsilon > 0 : Kr_m(C, \varepsilon) \neq \emptyset \},$$

where

$$Kr_m(C, \varepsilon) = \left\{ x \in E_m(C) : \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (x \in E_m(C + C')) \right\}.$$

Here $Kr_m(C, \varepsilon)$ is a ε -stability kernel of $Z_m(C)$, and

$$Kr_m(C) = \left\{ x \in E_m(C) : \exists \varepsilon > 0 \quad \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (x \in E_m(C + C')) \right\}$$

is a stability kernel of $Z_m(C)$. Thus, the problem $Z_m(C)$ is T_2 -stable ($\rho_m(p, q) > 0$) if and only if the stability kernel is nonempty.

BOUNDS ON STABILITY RADIUS

Given the multicriteria ILP problem $Z_m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, for any $p \in [1, \infty]$ we set

$$\phi_m(p) = \max_{x' \in E_m(C)} \max_{i \in N_m} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \frac{[C_i(x - x')]^+}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

where $[a]^+ = \max\{0, a\}$ is a nonnegative projection of $a \in \mathbf{R}$. Obviously, $\phi_m(p) \geq 0$.

Theorem 1. *Given $p, q \in [1, \infty]$ and $m \in \mathbf{N}$, for the T_2 -stability radius $\rho_m(p, q)$ of multicriteria ILP problem $Z_m(C)$, the following lower and upper bounds are valid*

$$\phi_m(p) \leq \rho_m(p, q) \leq m^{\frac{1}{q}} \phi_m(p).$$

Proof. First, we prove that $\rho_m(p, q) \geq \phi := \phi_m(p)$. If $\phi = 0$, then it is evident.

Let $\phi > 0$. Then according to the definition of ϕ , there exist a solution $x^0 \in E_m(C)$ and an index $k \in N_m$ such that for any solution $x \in X \setminus \{x^0\}$ the following inequality holds

$$[C_k(x - x^0)]^+ \geq \phi \|x - x^0\|_{p^*}.$$

Since $\phi > 0$, we have $C_k(x - x^0) > 0$ for $x \neq x^0$. Assuming $C' \in \Omega_{pq}(\phi)$, taking into account

$$\|C'_k\|_p \leq \|C'\|_{pq} < \phi$$

and Hölder's inequalities (2), we deduce

$$\begin{aligned} (C_k + C'_k)(x - x^0) &= [C_k(x - x^0)]^+ + C'_k(x - x^0) \geq \\ &(\phi - \|C'_k\|_p) \|x - x^0\|_{p^*} > 0 \end{aligned}$$

for any $x \neq x^0$ i. e. $x \in E_m(C + C')$ for $C' \in \Omega_{pq}(\phi)$, and hence $\rho_m(p, q) \geq \phi$.

Further, we prove that $\rho_m(p, q) \leq m^{\frac{1}{q}} \phi$. According to the definition of number ϕ , for any solution $x \in E_m(C)$ and any index $i \in N_m$, there exists a solution $x(i) \in X \setminus \{x\}$ such that

$$[C_i(x(i) - x)]^+ \leq \phi \|x(i) - x\|_{p^*}. \quad (4)$$

Setting σ with a condition

$$\frac{\varepsilon}{m^{\frac{1}{q}}} > \sigma > \phi, \quad (5)$$

according to formula (3) for any index $i \in N_m$ there exists $C_i^0 \in \mathbf{R}^n$ such that

$$C_i^0(x(i) - x) = -\sigma \|x(i) - x\|_{p^*}, \quad (6)$$

$$\|C_i^0\|_p = \sigma.$$

Therefore, due to (1), the norm of matrix C^0 containing rows C_i^0 , $i \in N_m$, is calculated as

$$\|C^0\|_{pq} = m^{\frac{1}{q}} \sigma,$$

i. e. $C \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$. Using sequentially (6), (4) and (5) we get for any index $i \in N_m$ we deduce

$$\begin{aligned} (C_i + C_i^0)(x(i) - x) &= C_i(x(i) - x) + C_i^0(x(i) - x) \leq [C_i(x(i) - x)]^+ - \sigma \|x(i) - x\|_{p^*} \leq \\ &(\phi - \sigma) \|x(i) - x\|_{p^*} < 0. \end{aligned}$$

Thus, $x \notin E_m(C + C^0)$ for $x \in E_m(C)$. Hence, the following formula is valid

$$\forall \varepsilon > m^{\frac{1}{q}}\phi \quad \forall x \in E_m(C) \quad \exists C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (x \notin E_m(C + C^0)),$$

i. e.

$$\rho_m(p, q) \leq m^{\frac{1}{q}}\phi. \quad \square$$

The following corollary from Theorem 1 illustrates the attainability of the lower bound for the T_2 -stability radius.

Corollary 1. *If $q = \infty$, then for any $p \in [1, \infty)$ and $m \in \mathbf{N}$ for the T_2 -stability radius $\rho_m(p, \infty)$ of ILP problem $Z_m(C)$ the following formula holds*

$$\rho_m(p, \infty) = \phi_m(p) = \max_{x' \in E_m(C)} \max_{i \in N_m} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \frac{[C_i(x - x')]^+}{\|x - x'\|_{p^*}}.$$

The next Theorem illustrates the attainability of the upper bound for the T_2 -stability radius specified in Theorem 1.

Theorem 2. *Given $p = \infty$, $q \in [1, \infty]$ and $m \in \mathbf{N}$, there exists a class of multicriteria ILP problem problems such that for any $Z_m(C)$ belonging to that class the T_2 -stability radius of $Z_m(C)$ can be expressed by the following formula*

$$\rho_m(p, q) = m^{\frac{1}{q}}\phi_m(\infty). \quad (7)$$

Proof. According to Theorem 1, in order to prove equation (7), it suffices to specify a class of problems $Z_m(C)$ with $\rho_m(\infty, q) \geq m^{\frac{1}{q}}\phi_m(\infty)$. Let $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n = \{0, 1\}$, where $n = m + 1$, and every solution x^j , $j \in N_n$, be a unit vector, i. e. a column of identity matrix of size $n \times n$. Let matrix $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ with rows $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m$ be constructed as follows

$$C = \begin{pmatrix} 0 & M & \dots & M & -2\alpha \\ M & 0 & \dots & M & -2\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M & M & \dots & 0 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

where $M \gg \alpha > 0$, and M is a number large enough. Then we have

$$\begin{aligned} Cx^1 &= (0, M, \dots, M, M)^T \in \mathbf{R}^m, \\ Cx^2 &= (M, 0, \dots, M, M)^T \in \mathbf{R}^m, \\ &\dots\dots\dots \\ Cx^{n-1} &= (M, M, \dots, M, 0)^T \in \mathbf{R}^m, \\ Cx^n &= (-2\alpha, -2\alpha, \dots, -2\alpha, -2\alpha)^T \in \mathbf{R}^m, \end{aligned}$$

Thus, $x^n \in E_m(C)$, $x^j \notin E_m(C)$, $j \in N_m$. Moreover, the following equality is evident

$$\phi_m(\infty) = \max_{i \in N_m} \min_{j \in N_m} \frac{C_i(x^j - x^n)}{2} = \alpha.$$

Let $C' = [c'_{ij}] \in \Omega_{\infty q}(m^{\frac{1}{q}}\alpha)$ be an arbitrary perturbing matrix with rows C'_1, C'_2, \dots, C'_m i. e. $C' \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\|C'\|_{\infty q} < m^{\frac{1}{q}}\alpha$. Proving by contradiction, it is easy to show that there exists an index $k \in N_m$ with $\|C'_k\|_{\infty} < \alpha$. Therefore, $|c'_{kj}| < \alpha$ for any $j \in N_n$. So, we deduce

$$(C_k + C'_k)(x^k - x^n) = 2\alpha + c'_{kk} - c'_{kn} \geq 2\alpha - |c'_{kk}| - |c'_{kn}| > 0,$$

and hence for any index $i \in N_m \setminus \{k\}$ we obtain

$$(C_i + C'_i)(x^k - x^n) = C_i(x^k - x^n) + C'_i(x^k - x^n) = M + 2\alpha + c'_{ik} - c'_{in} > 0.$$

As a result we conclude that $x^n \in E_m(C + C')$ for any perturbing matrix $C' \in \Omega_{\infty q}(m^{\frac{1}{q}}\alpha)$ the following inequality holds

$$\rho_m(\infty, q) \geq m^{\frac{1}{q}}\phi_m(\infty),$$

and hence, taking into account Theorem 1, we get that equality (7) is true, i. e. Theorem 2 is now proven. \square

The problem $Z_m(C)$ is called T_2 -stable if $\rho_m(p, q) > 0$. We introduce a set of strict extremum solutions of $Z_m(C)$:

$$SE_m(C) = \left\{ x \in X : \exists k \in N_m \quad \forall x' \in X \setminus \{x\} \quad (C_k(x) < C_k(x')) \right\}.$$

From Theorem 1 we get the following result.

Corollary 2. *Given the ILP problem $Z_m(C)$, the following statements are equivalent*

- *The problem $Z_m(C)$ is T_2 -stable;*
- *$Kr_m(C) = SE_m(C) \neq \emptyset$;*
- *$\phi_m(p) > 0$.*

Due to equivalence of any two norms in a finite dimensional linear space (see e.g. [36, 37]), the result of Corollary 2 is true for any norms specified in the parameter space $\mathbf{R}^{m \times n}$ of the problem $Z_m(C)$.

At the end to compare the result of theorem 1, we present here a formula to calculate the T_2 -stability radius of multicriteria ILP problem $Z_m(C)$ consisting in finding the set of Pareto optimal solutions $P_m(C)$:

$$\rho_m^P(p, q) = \max_{x' \in P_m(C)} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \frac{\|[C(x - x')]^+\|_q}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

where $[a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_m^+)^T$ is a nonnegative projection of vector $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T \in \mathbf{R}^m$, i.e. $a_i^+ = \max\{0, a_i\}$, $i \in N_m$. This formula is clearly follows from the results of [25].

CONCLUSION

Since the initial data of real problems are usually given with a certain degree of uncertainty (inaccuracy), there is a need to study the stability of the optimal solutions to perturbations of the problem parameters. It is worth mentioning that such investigations are done not only in optimization theory but also in other areas of operations research and applied mathematics, in particular scheduling theory (see e.g. [38, 39]).

The quantitative characteristic of T_2 -stability of the multicriteria integer linear programming problem, consisting in the search for all extremum solutions, is investigated. These studies were carried out on the assumption that different Hölder's norms are given in the space of solutions and criteria. The following results are obtained: 1) the lower and upper bounds of the T_2 -stability radius are found; 2) the attainability of these estimates is indicated; 3) the stability criteria of the problem are specified.

REFERENCES

1. LEONTIEV, V. (2007) Discrete Optimization. *Journal of Computational Physics and Mathematics*. 47 (2). p. 338–352.
2. BELOUSOV, E. & ANDRONOV, V. (1993) *Solvability and Stability for Problems of Polynomial Programming*. Moscow: Moscow University Publisher.
3. SERGIENKO, I., KOZERATSKAYA, L. & LEBEDEVA, T. (1995) *Stability and Parametric Analysis of Discrete Optimization Problems*. Kiev: Naukova dumka.
4. SERGIENKO, I. & SHILO, I. (2003) *Discrete Optimization Problems. Problems, Methods, Research*. Kiev: Naukova dumka.
5. LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N. & SERGIENKO, T. (2005) Stability of vector problems of integer optimization: relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 41 (4). p. 551–558.
6. LEBEDEVA, T., & SERGIENKO, T. (2006) Stability of a vector integer quadratic programming problem with respect to vector criterion and constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. 42 (5). p. 667–674.

7. LEBEDEVA, T. & SERGIENKO, T. (2008) Different types of stability of vector integer optimization problem: general approach. *Cybernetics and Systems Analysis*. 44 (3). p. 429–433.
8. LIBURA, M., VAN DER POORT, E., SIERKSMA, G. & VAN DER VEEN, J. (1998) Stability aspects of the traveling salesman problem based on k -best solutions. *Discrete Applied Mathematics*. 87 (1-3). p. 159–185.
9. LEONTIEV, V. (1979) Stability in linear discrete problems. *Problems of Cybernetics*. 35. p. 169–184.
10. EMELICHEV, V. & PODKOPAEV, D. (2001) Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii. Ser. 2*. 8 (1). p. 47–69.
11. EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2007) A general approach to studying the stability of a Pareto optimal solution of a vector integer linear programming problem. *Discrete Mathematics and Applications*. 17 (4). p. 349–354.
12. EMELICHEV, V. & PODKOPAEV, D. (2010) Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. *Discrete Optimization*. 7 (1-2). p. 48–63.
13. EMELICHEV, V., GUREVSKY, E. & KUZMIN, K. (2010) On stability of some lexicographic integer optimization problem. *Control and Cybernetics*. 39 (3). p. 811–826.
14. EMELICHEV, V. & KARELKINA, O. (2012) Postoptimal analysis of the multicriteria combinatorial median location problem. *Optimization*. 61 (9). p. 1151–1167.
15. EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2013) Estimating the stability radius of the vector MAX-CUT problem. *Discrete Mathematics and Applications*. 23 (2). p. 145–152.
16. EMELICHEV, V., KOTOV, V., KUZMIN, K., LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N., & SERGIENKO, T. (2014) Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal Automation and Information Sciences*. 26 (2). p. 27–41.
17. BUKHTOYAROV, S. & EMELICHEV, V. (2015) On the stability measure of solutions to a vector version of an investment problem. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 9 (3). p. 328–334.

18. GORDEEV, E. (2015) Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 9 (3). p. 358–366.
19. EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2016) On the T_1 -stability radius of a multicriteria linear Boolean programming problem with Hölder's norms in parameter spaces. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1. p. 49–64.
20. CHAKRAVARTI, N. & WAGELMANS, A. (1998) Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems. *Operations Research Letters*. 23 (1). p. 1–7.
21. VAN HOESEL, S. & WAGELMANS, A. (1999) On the complexity of postoptimality analysis of 0-1 programs. *Discrete Applied Mathematics*. 91. p. 251–263.
22. ROLAND, J., DE SMET, Y. & RUI FIGUEIRA, J. (2012) On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization. *4OR*. 10 (4). p. 379–389.
23. EMELICHEV, V. & NIKULIN, YU. (1999) Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming. *Computer Science Journal of Moldova*. 7 (1). p. 105–117.
24. EMELICHEV, V., GIRLICH, E., NIKULIN, YU. & PODKOPAEV, D. (2002) Stability and regularization of vector problem of integer linear programming. *Optimization*. 51 (4). p. 645–676.
25. EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2007) On a type of stability of a multicriteria integer linear programming problem in the case of a monotone norm. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 46 (5). p. 714–720.
26. EMELICHEV, V., & KUZMIN, K. (2010) Stability radius of a vector integer linear programming problem: case of a regular norm in the space of criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*. 46 (1). p. 72–79.
27. SHOLOMOV, L. (1989) *Logival Methods for Investigation of the Discrete Choice Models*. Moscow: Nauka.
28. YUDIN, D. (1989) *Computational Methods in Decision Making*. Moscow: Nauka.
29. AIZERMAN, M. & ALEKSEROV, F. (1990) *Choice of Alternatives: Theoretical Foundations*. Moscow: Nauka.
30. LOTOV, A. & POSPELOV, I. (2008) *Multicriteria Decision Making Problems*. Moscow: Fizmatlit.

31. PARETO, V. (1909) *Manuel D'economie Politique*. Paris: Qiard.
32. SLATER, M. (1950) Lagrange Multipliers Revisited. *Cowles Commission Discussion Paper 80. Mathematics*. Reprinted in Giorgi, G. & Kjeldsen, T., eds. (2014). (*Traces and Emergence of Nonlinear Programming*). p. Basel: Birkhäuser. 293–306
33. PODINOVSKII, V. & NOGHIN, V. (2007) *Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems*. Moscow: Fizmatlit.
34. STEUER, R. (1986) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York: John Wiley&Sons.
35. HARDY, G., LITTLEWOOD J. & POLYA, G. (1988) *Inequalities*. Cambridge: University Press.
36. TIKHONOV, A. & ARSENIN, V. (1977) *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York: Winston.
37. KOLMOGOROV, A. & FOMIN, S. (2009) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow: Fizmatlit.
38. SOTSKOV, Y., SOTSKOVA, N., LAI, T. & WERNER, F. (2010) *Scheduling under Uncertainty, Theory and Algorithms*. Minsk: Belorusskaya nauka.
39. SOTSKOV, Y., TANAEV, V. & WERNER, F. (1998) Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments. *Industrial Applications of Combinatorial Optimization*. 16. p. 72–108.

УДК: 519.725, 621.3.049.771.14

MSC2010: 94B05, 68R99

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СВОЕУСТОЙЧИВЫХ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ¹

© С. В. Гаврилов

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН
проспект 60-летия Октября, 9, Москва, 117312, Российская Федерация e-mail: ippt@ippt.ru

© С. И. Гуров

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, д. 1, стр. 52, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: sgur@cs.msu.su

© Д. В. Тельпухов, Т. Д. Жукова

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН
проспект 60-летия Октября, 9, Москва, 117312, Российская Федерация e-mail: ippt@ippt.ru

SYNTHESIS OF FAULT-TOLERANT COMBINATION SCHEMES BY INTRODUCING INFORMATION REDUNDANCY.

Gavrilov S. V., Gurov S. I., Tel'pukhov D. V., Zhukova T. D.

Abstract. In the article, based on the analysis of the specifics of the problem of increasing the fault tolerance of combinational integrated circuits, the requirements for such a code are formulated by the methods of excessive coding. A linear non-cyclic code with parity checks satisfying these requirements is proposed. The code fixes single errors, detects double errors and has the advantages that are essential for the task at hand. The efficiency of the proposed code is estimated.

Keywords: *Synthesis of fault-tolerant circuits, redundant coding, codes with parity checks, R-code*

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 17-19-01645

ВВЕДЕНИЕ

Любая система характеризуется не ошибками и сбоями, а реакцией на ошибки и сбои.

Фольклор.

Важной стороной задачи синтеза интегральных схем (ИС) остаётся проблема устойчивости их к кратковременным случайным самоустраняемым отказам — *сбоям*. Причиной сбоев (*SEU, single event upsets*) является воздействия на схему различных видов помех: радиационных, скачков напряжений питания, деградаций сигналов во времени и др. В последнее время проектные нормы ИМС уменьшаются до единиц нанометров, что влечёт уменьшение энергетического порога, вызывающего сбой.

Считается, что интенсивность сбоев (*soft errors*) на порядок превышает интенсивность отказов (*hard errors*) — потери способности устройства выполнить требуемую функцию. В литературе отмечается, что до 50% отказов в современном оборудовании, работающем в условиях воздействия внешней радиации, связаны с влиянием различных радиационных эффектов. В таблице 1 указаны дозы радиации в зависимости от места нахождения ИС².

Место	Доза
Поверхность Земли	1 кРад/год
Объекты ядерной энергетики	100 кРад/день
Низкие орбиты Земли (МКС)	2 кРад/год
Радиационные пояса Земли	100 кРад/год
Геостационарные орбиты Земли	10 кРад/год
Поверхность Марса	1 кРад/год
Орбита Марса	5 кРад/год
Путь до Марса	5 кРад/год
Орбита Юпитера	100 кРад/год ... 100МРад/год

Рис. 1. Дозы радиации (по данным компании Миландр, г. Москва, Зеленоград)

Поэтому сбоеустойчивость является важнейшим требованием к аппаратуре, работающей в тяжелых условиях космоса. Период работоспособного функционирования,

²Рад — внесистемная единица измерения поглощённой дозы ионизирующего излучения.

например, аппаратуры спутников связи должен быть не менее 15 лет, а радиационно-стойкие техпроцессы в настоящее время по проектным нормам отстают на 4–6 поколений от современных коммерчески доступных. Например, 32-битное микропроцессорное ядро LEON3 систем на кристалле (СнК), используемой в европейских космических проектах, реализовано по 180 нм-технологии.

В настоящее время в мире активно развивается направление радиационно-стойкого проектирования (RHBD, Radiation Hardening by Design), основанное на использовании схмотехнических, топологических и алгоритмических методов повышения сбоеустойчивости [21].

Следует отметить, что многие современные СнК реализуют так называемые «критически-важные приложения» (*mission-critical applications*), ошибки в которых приводят к серьёзному воздействию на управляющие системы (связь, управление движением, слежение за движущимся объектом, бизнес-операции, криптографические приложения и др.) и даже могут вызвать социальные потрясения и катастрофы³.

Отказы по характеру своего проявления подразделяются на «византийские»⁴ (система активна и может проявлять себя по-разному, даже злонамеренно) и «пропажа признаков жизни» (частичная или полная). Первые распознать гораздо сложнее, чем вторые.

Повышение надёжности схем связывают с использованием того или иного вида избыточности. Выделяют аппаратную, информационную и временную избыточность. Аппаратная избыточность обеспечивается внедрением в схему дополнительной корректирующей аппаратуры, информационная — использованием корректирующих кодов, временная — многократным пересчётом выхода (аналогом метода повторной передачи в теории связи). При этом понятно, что использование любого вида избыточности в конечном счёте реализуется дополнительными схемами.

В работе рассматриваются автоматические способы коррекции ошибок, возникающие при сбоях комбинационных схем (выходные сигналы которых в некоторый момент времени однозначно определяются входными сигналами, имеющими место в данный момент времени). Предлагается код для исправления одиночных и обнаружения двойных ошибок, возникающих при сбоях комбинационных схем (выходные сигналы которых в некоторый момент времени однозначно определяются входными сигналами, имеющими место в данный момент).

³ См., например, https://en.wikipedia.org/wiki/Mission_critical.

⁴ Это название они получили по имени Византийской империи (330-1453 гг.), где процветали интриги и обман

1. САМОКОРРЕКТИРУЕМЫЕ СХЕМЫ И ОБРАТИМАЯ СХЕМОТЕХНИКА

Построение самопроверяемых схем — традиционный подход решению поставленной проблемы [1, 2]. *Самокорректируемость* функциональных блоков есть свойство обнаруживать и исправлять неисправности как в основной, так и в контролирующей аппаратуре. Последнее свойство позволяет избежать проблемы “сторожа над сторожем”. В этом случае говорят о *схемной избыточности*.

Поскольку одиночная неисправность того или иного элемента схемы может привести к кратной ошибке на выходе схемы, типичной является ситуация либо полного отсутствия ошибки (*маскирование*), либо наличия сразу нескольких ошибок на выходе схемы (*конус ошибок*). Для исключения эффекта конуса ошибок возможно применение принципа независимой реализации функций, при котором не производится совместная минимизация, однако это приводит к заметному увеличению объема аппаратуры.

При возникновении ошибки контролирующая схема обеспечивает пересчет значений выхода основной схемы. Такой пересчет может повторяться неоднократно, что иногда может привести к большой задержке времени получения результата.

Другим широко используемым методом является *N-модульная избыточность*, при котором результат определяется *мажорированием* выходов N экземпляров основной схемы. Как правило, используется исключительно *троирование* аппаратуры (TMR, Triple Modular Redundancy, тройное модульное резервирование). Очевидно, применение аппаратного резервирования приводит к проигрышу в площади схемы (при TMR — более 200%), но практически не ведет к временным задержкам.

Обратимые схемы представляют собой новую технологию, основанную на нетрадиционном подходе: такие схемы реализует биективные преобразования битовых данных. В настоящее время ведутся исследования по синтезу сбоеустойчивых обратимых схем, способных обнаружить широкий класс ошибок на выходах [3, 4]. Оценки показывают, что число вентилей при реализации комбинационной логики на программируемых логических матрицах в обычной и обратимой сбоеустойчивой схемотехнике может совпадать [5]. Это подтверждает предположение о высокой эффективности данного метода для решения рассматриваемой задачи.

2. ИЗБЫТОЧНОЕ КОДИРОВАНИЕ ДЛЯ СБОЕУСТОЙЧВЫХ ИС

Данный подход также хорошо известен [2, 6, 7], однако, в силу разных причин, только в последнее время к нему возрос интерес исследователей [8, 9, 11–14]. Из

специфики задачи следует, что возможные ошибки связаны только с инвертированием некоторых разрядов выходного вектора комбинационной схемы (нет выпадения/вставки бит). При этом понятно, что любой избыточный код может обнаружить или исправить не все ошибки, а только ошибки определенного типа.

2.1. Особенности задачи. Прежде всего считают, что исходная (основная) функциональная схема ОС спроектирована и не подлежит изменению. Далее, обычно искажение информации, возникающее при сбоях, не описывается в рамках традиционных моделей каналов передачи информации. Также понятно, что эффективность и сложность применения того или иного метода избыточного кодирования существенно зависит от требуемого уровня обеспечения надежности исправления ошибки.

Важным является то, что обычные характеристики: минимальное кодовое расстояние, избыточность и т. д., не являются определяющими при выборе кода для рассматриваемой задачи и поэтому на практике часто выбирают коды с худшими характеристиками, но позволяющими более просто выполнить парирование ошибки схемы.

При разработке средств исправления ошибок схем, вызванных сбоями, следует также учитывать следующие особенности задачи, из которых вытекают требования к свойствам выбираемого кода.

1. Проверочные биты вычисляются специальной корректирующей схемой (КС), параллельно и одновременно с информационными, вычисляемыми (ОС), в то время как при классическом подходе предполагается кодирование уже имеющегося сообщения.

В составе КС будем различать *кодер*, вычисляющий проверочные биты, *декодер*, вычисляющий данные, необходимые для парирования ошибки (например, синдром) и исправляющую схему (ИС), обеспечивающую исправление ошибок при их наличии.

2. Выигрыш в суммарной площади ОС+КС при описываемом подходе получается из-за того, что число проверочных разрядов меньше, и обычно — значительно, числа информационных, и методы минимизации позволяют синтезировать кодер существенно меньшей площади, чем ОС.
3. Для исключения появления ошибки уже в процессе проверки и исправления выходного вектора (проблема «сторожа над сторожем»), КС с помощью специальных схемотехнических и технологических методов выполняют в специальном сбоеустойчивом варианте, и поэтому этот процесс можно считать свободным от ошибок.

4. Представляется естественным строить корректирующие схемы для комбинационных схем также комбинационными, что означает ограничение на реализацию декодера, заключающееся в отказе от использования последовательностных элементов: сдвиговых регистров, счётчиков и д. р.
5. Проведенные эксперименты показали, что наиболее вероятный одиночный сбой, функционального элемента схемы, как правило, либо маскируется (не проявляется на выходе), либо приводит к инвертированию единственного разряда на выходе схемы, т. е. кратные ошибки маловероятны [13].

Для исключения появления ошибки уже в процессе проверки и исправления выходного вектора, с помощью схемотехнических и технологических методов КС выполняют в специальном сбоеустойчивом варианте и поэтому этот процесс можно считать свободным от ошибок⁵ [11, 12, 15, 16]. Платой за такую безошибочность служит увеличение площади КС. Понятно, что успех будет лишь в случае, когда площадь последней менее чем в два раза превосходит площадь ОС, иначе исправление одиночной ошибки методом TMR с мажорированием выходов по правилу «2 из 3» становится более выгодным.

На практике обычно используют линейные коды, исправляющие одиночную единичную и обнаруживающие двойную ошибку (SEC/DED, Single error correction/Double error detection). Далее мы их кратко рассмотрим. Использование нелинейных кодов связано с трудоемкими исследованиями свойств конкретного синтезируемого устройства. Применение же циклических кодов нецелесообразно, поскольку их эффективная реализация требует использования последовательностных схем.

2.2. Линейные блочные коды (коды с проверкой на четность). При систематическом блочном кодировании, напомним, кодовые слова (n, k) -кода имеют длину $n = k + m$, где k — число информационных разрядов, повторяющих символы сообщения, а m — число проверочных разрядов, которые суть суммы по $\text{mod } 2$ различных подмножеств информационных (далее “+” и “ \sum ” для битовых переменных — символы суммирования по $\text{mod } 2$). Минимальное расстояние d кода есть минимум по числу несовпадающих координат среди всех пар кодовых слов.

Систематическим кодом с проверкой на четность называется двоичный блочный код, в котором сообщению $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ сопоставлено кодовое слово

⁵ Например, считается, что микросхемы технологии больше 0,2 мкм радиационно-стойки.

$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $k \leq n$, определяемое соотношениями

$$v_i = \begin{cases} u_i, & 1 \leq i \leq k, \\ \sum_{j=1}^k u_j \cdot g_{i-k-1,j}, & k+1 \leq i \leq n, \end{cases} \quad (1)$$

где множество двоичных символов $\{g_{i,j}\}$, $0 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq k$ фиксировано [17]. Таким образом, мы предполагаем размещение символов сообщения в первых позициях кодового слова.

Ясно, что описан класс блочных линейных кодов. Кодирование в них описывается умножением вектора сообщения (в нашей задаче это — выходной вектор комбинационной схемы) на определяемую вышепреведенными соотношениями порождающую матрицу G : $\mathbf{v} = \mathbf{u}G$. Искажение в результате сбоя описывается вектором ошибок \mathbf{e} : $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{e}$, \mathbf{w} — полученный вектор.

В связи указанной выше специфики, предлагается характеристика *качества кода* $\frac{k}{m}$, более адекватная чем *скорость кода* $\frac{k}{n}$ рассматриваемой задаче избыточного кодирования для повышение сбоеустойчивости ИС.

Существуют различные методы декодирования линейных кодов: прямое, весовое, оптимальной проверочной матрицы [18], перестановочное [19], метод дизъюнкции сфер [2] и др. Для нашей задачи применяют, как наиболее удобные, либо синдромное, либо мажоритарное декодирование.

Синдромное декодирование основано на вычислении вектора \mathbf{s} *синдромов* по *проверочной матрице* H : $\mathbf{s} = H\mathbf{w}$ (проверочная матрица может быть построена по порождающей и связана с ней соотношением $GH^T = \mathbf{0}$ — нулевая матрица). Если ошибок нет, то $\mathbf{s} \equiv \mathbf{0}$. Иначе по заранее определенным наиболее вероятным позициям ошибки $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{s})$, соответствующим данному синдрому, производится восстановление сообщения \mathbf{u} .

Декодер при синдромном декодировании состоит из схемы обнаружения ошибки, включая подсхему вычисления синдрома, и схемы определения вектора ошибки с последующим ее исправлением.

Мажоритарное декодирование базируется на системе проверочных равенств для каждого информационного бита, в качестве которых используются линейные комбинации строк проверочной матрицей H . Такое декодирование допускает большое число кодов. При этом декодирующие устройства, построенные по мажоритарному принципу, часто оказываются наиболее простыми.

Заметим, что в рассматриваемых кодах длина кодовых слов определяется, вообще говоря, однозначно. Это обстоятельство накладывает существенные ограничения

на число информационных разрядов k в кодовом слове. Для обхода этого ограничения переходят к *укороченным кодам*, при этом укорачивание некоторых видов кодов может быть сопряжено со значительными трудностями.

2.3. Практически применяемые коды для синтеза сбоеустойчивых ИС кратко описаны ниже; они принадлежат к классу линейных блочных SEC/SED-кодов, имеющих минимальное расстояние кода $d = 4$.

Коды Хэмминга ($d = 3$) требуют минимального количества проверочных битов и позволяют определять и исправлять однократную ошибку. При добавлении еще одного общего бита четности для всех информационных и проверочных битов получают *модифицированный код Хэмминга* ($d = 4$). Анализ этого дополнительного бита и синдрома позволяет исправить единичную ошибку и обнаружить двойную, кроме тех, которые затрагивают сам общий бит четности. Это необходимо учитывать при проектировании декодера, что делается с помощью отдельного сторожа в схеме формирования сигнала ошибки [12].

При исправлении одиночной ошибки кодом Хэмминга площадь корректирующей схемы может составлять 130% площади основной [8].

Коды Хсяо (которые в отечественной литературе также называют «кодами с нечетным весом столбца») [20] являются подклассом модифицированных кодов Хэмминга. Проверочная матрица кода может быть получена путем линейных операций над соответствующей матрицей модифицированного кода Хэмминга приведением ее к каноническому виду с единичной матрицей в левой (правой) части. При этом минимизируется количество единиц в матрице, что влечет уменьшение аппаратных средств и задержки для вычисления синдрома, однако за это приходится платить усложнением алгоритма вычисления номера искаженного разряда и меньшим, по сравнению с кодер-декодерами Хэмминга, быстродействием. Коды Хсяо широко применяются для помехоустойчивого кодирования субмикронных КМОП оперативных запоминающих устройств.

Низкоплотностные коды (коды Галлагера, LDPC-коды, Low Density Parity-Check Codes), или коды с малой плотностью проверок на четность являются сейчас объектом интенсивных исследований. Они описываются сильно разреженными проверочными матрицами H , что уменьшает количество символов, входящих в проверочные соотношения. Это упрощает процесс обнаружения ошибки, но усложняет ее исправление. Некоторые коды данного типа могут быть получены из кодов Хэмминга с помощью укорачивания.

Важной характеристикой порождающей матрицы LDPC-кода является отсутствие циклов определенного размера. Параметры LDPC-кодов класса SED приведены в [22]. На сегодняшний день они считаются оптимальными для применения при синтезе помехозащищенных схем при реализации декодирования мажоритарным методом.

3. Спектральный код на основе функций Радемахера. Опишем новый систематический код с проверками на четность, имеющий произвольное число k информационных разрядов [10].

3.1. Построение кода. Предположим сначала, что $k = 2^q$, $q = 1, 2, \dots$; это ограничение потом легко снимается. Положим $g_{0,j} \equiv 1$, а значения $q_{i,j}$ для $i = \overline{1, q}$ и $j = \overline{1, k}$ такими, чтобы вектор $(g_{1,j}, g_{2,j}, \dots, g_{q,j})$ был двоичным кодом числа $j - 1$. Например, для $q = 3$, $j = 5$ это вектор (100).

Значения $q_{i,j}$ можно получить линейным преобразованием аргумента и значений дискретных функций Радемахера [23]. Как известно, система функций Радемахера ортогональна, ортонормирована, но не полна и используется для построения функций Уолша, по которым, как по базису, осуществляют спектральное разложение кусочно-постоянных булевых функций [24]. В силу этого полученный код предлагается называть *R-спектральным*.

Таким образом, получены $m = q + 1$ проверочных разрядов и образован блочный систематический код длины $n = 2^q + q + 1$ с проверкой на четность.

Покажем, что построенный код способен исправлять ошибку инвертирования некоторого разряда в \mathbf{u} . Для этого примем еще одно допущение, что одиночная ошибка произошла в информационных битах, т.е. $\mathbf{w}' = (w_1, \dots, w_k) = \mathbf{u} + \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$, где w' — начальная часть полученного вектора, содержащая информационные разряды, а \mathbf{e} — вектор ошибки, содержащий не более одной 1. Это ограничение мы далее обойдем.

Вычислим синдромы s_0, \dots, s_q для вектора \mathbf{w}' : $s_i = \sum_{j=1}^k w_j \cdot g_{i,j}$, $0 \leq i \leq q$.

Если $s_0 = 0$, то одиночной ошибки не произошло. В противном случае вычисляем вектор (s_1, \dots, s_q) который есть двоичный вектор числа $j - 1$, если \mathbf{e} содержит 1 в j -й позиции, и эта позиция может быть получена дешифрованием полученного вектора. Ясно, что вычисление вектора ошибки построенного кода происходит по *упрощенной схеме*: входом является синдром ошибки разрядности $n - k - 1$, а выходом — вектор ошибки разрядности k .

Построенный линейный нециклический R-код имеет минимальное расстояние кода $d = 2$: нулевой вектор и вектор, имеющий 1 только в первом и $(k + 1)$ -м разрядах — его кодовые слова. Но, тем не менее, R-код позволяет исправлять одиночную ошибку

в информационных разрядах полученного слова, а для определения разряда, в котором произошла ошибка, может быть использована стандартная схема дешифратора. Пример. Рассмотрим пример с $q = 3$. Значения коэффициентов $g_{i,j}$, $0 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 8$ представлены ниже в таблице:

$g_{0,j}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$g_{1,j}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$g_{2,j}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$g_{3,j}$	0	1	0	1	0	1	0	1
Позиции информационных разрядов, j	1	2	3	4	5	6	7	8

Мы видим, что значения вектора $(g_{1,j}, g_{2,j}, g_{3,j})$ есть двоичный код числа $j - 1$. Значения проверочных v_9, \dots, v_{12} разрядов для $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_8)$ будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} v_9 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8, & v_{11} &= u_3 + u_4 + u_7 + u_8, \\ v_{10} &= u_5 + u_6 + u_7 + u_8, & v_{12} &= u_2 + u_4 + u_6 + u_8. \end{aligned}$$

Если ошибка произошла, например, в 5-м разряде, то $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = 0$, при ошибке в 8-м разряде будем иметь $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ и т. д. В коде Хэмминга расположение столбцов проверочной матрицы H такое, что синдром также является двоичным представлением позиции ошибки, однако при этом учитывается ошибка не только в информационных, но и в проверочных разрядах.

Ограничение $k = 2^q$ легко снимается: при $2^{q-1} < k \leq 2^q$ строим код для q как указано выше и отбрасываем последние $2^q - k$ значений \mathbf{v} и коэффициентов $g_{i,j}$. В результате получен $(\lceil \log k \rceil + 1 + k, k)$ -код, исправляющий одиночную ошибку в информационных битах.

3.2. Обнаружение и исправление сбоев комбинационной схемы. Пусть ОС по входному вектору \mathbf{x} вычисляет выходной k -мерный вектор информационных бит \mathbf{y} , и одновременно КС по \mathbf{x} и формулам (1), вычисляет вектор $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_l)$ из $m = l + 1$, $l = \lceil \log k \rceil$ проверочных бит R-кода.

Реально выход ОС может быть искажен: $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k) = \mathbf{y} + \mathbf{e}$, \mathbf{e} — вектор ошибок. Вектор проверочных бит \mathbf{z} тоже может содержать ошибки, но всех ошибок не более двух. Также считаем, что значение z_0 — бит четности неискаженного вектора \mathbf{y} — кодером всегда вычисляется верно. Это можно обеспечить защитой соответствующей части кодера специальными технологическими методами, причем подсхемы вычисления остальных проверочных бит z_1, \dots, z_l могут оставаться незащищенными.

Обнаружение и исправление сбоев комбинационной схемы проходит по следующему алгоритму, реализуемому декодером, который также защищает от ошибок.

1. Вычисляется вектор $s = (s_0, \dots, s_l)$ синдрома: $s_i = \sum_{j=1}^k \tilde{y}_j \cdot g_{i,j}$, $i = \overline{0, l}$.
2. Если $s_0 = z_0$, то либо $\|e\| = 0$ и выходной вектор ОС \mathbf{y} вычислен верно, либо $\|e\| = 2$ и \mathbf{y} содержит две ошибки. Далее
 - а) если $s_i = z_i$ для всех $i = \overline{1, l}$, то выходной вектор ОС ошибок не содержит;
 - б) иначе, вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ содержит две ошибки, и R-код устанавливает этот факт.
3. Если $s_0 \neq z_0$, то вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ содержит одну ошибку в позиции t и (s_1, \dots, s_l) есть двоичный код числа $t - 1$.

Утверждение в п. 2б справедливо, поскольку если обе возможные ошибки произошли в $\tilde{\mathbf{y}}$, то контрольные разряды z_1, \dots, z_l вычислены верно. В случае 3 возможна ещё одна ошибка в контрольных разрядах, что, однако, не влияет на вычисление битов синдрома s_1, \dots, s_l .

Таким образом, построенный R-код относится к классу SEC/SED.

Мы видим, что вычисление вектора ошибки \mathbf{e} декодером R-кода проводится дешифрованием вектора (s_1, \dots, s_l) . Однако схема дешифратора обладает естественной избыточностью [7, 18], т.к. на его выходе должен возбуждаться только один разряд, и другое свидетельствует об ошибке. Данный факт можно использовать: не обеспечивая сам дешифратор технологической защитой, снабдить его защищенной схемой проверки на четность, а в случае ошибки в вычислениях \mathbf{e} применить пересчет выходного вектора. Это будет единственная последовательностная подсхема в проектируемой КС.

Такой подход оправдан, поскольку, во-первых, данный дешифратор будет иметь площадь существенно меньше площади ОС и, во-вторых, возбуждаться он будет лишь в случае коррекции ошибки в последней, т.е. достаточно редко. Поэтому вероятность появления ошибки в схеме дешифратора будет значительно меньше вероятности ошибки в ОС. С другой стороны, именно вычисление позиции ошибки по синдрому является наиболее сложной операцией, выполняемой декодером [18].

Стоит отметить, что для повышения вероятности исправления ошибки возможно использование разбиения выходов исходной схемы по группам, с последующим синтезом схемы функционального контроля для каждой из групп.

3.4. Сравнение кодов. С целью оценки эффективности применения R-кода для повышения сбоеустойчивости комбинационных схем был проведено имитационное тестирование на схемах из известных тестовых наборов ISCAS'85 и LGSynth89; состав этих наборов может быть найден на сайте http://icdm.ippm.ru/w/Схемы_ISCAS85.

При моделировании сбоя осуществлялось искажение выхода некоторого логического элемента тестируемой схемы. При этом, чтобы оставаться в рамках принятой модели сбоев, считалось, что может оказаться инвертированными не более одного бита вектора \mathbf{y} , а всех ошибок в выходе ОС и кодера — не более двух. Также считалось, что значение бита четности неискаженного выходного вектора \mathbf{y} всегда вычисляется верно, что обеспечивается специальной технологической защитой соответствующей части кодера, при этом подсхемы вычисления остальных проверочных бит могут оставаться незащищенными [25].

При оценке структурных затрат для схем функционального контроля было проведено сравнение исходной схемы с и без КС. При этом оптимизация кодера и декодера проводилась отдельно с использованием программы Yosys. В результате тестирования было получено, что благодаря оптимизации схема функционального контроля для представленных схем в среднем была уменьшена на 18,7%.

Также моделировалось внедрение однократных ошибок в полученные схемы функционального контроля. Полученные результаты показали, что

- 65,3% сбоев маскируются;
- 17,5% сбоев исправляются КС;
- 4,4% сбоев были пропущены;
- в 10,1% случаев получен ложный сигнал о наличии ошибки;
- в 2,6% случаев получен сигнал о наличии двукратной ошибки.

Относительно последнего пункта отметим, что однократная ошибка в каком-либо элементе схемы может привести к множественной ошибке на выходе [13]. В целом приведённые результаты говорят о том, что использование R-кода обеспечивает в среднем исправление или обнаружение приблизительно 85,5% реальных ошибок на выходе схем (без использования разбиений выходов на группы).

Также было проведено сравнение структурных затрат КС предлагаемого спектрального R-кода и схем, полученных с помощью TMR [28]. В результате оказалось, что для рассмотренных схем при использовании TMR число элементов схемы увеличивалось в среднем в 3,2 раза, а при использовании схемы функционального контроля на основе спектрального R-кода — в среднем в 2,2 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе дан краткий обзор проблемы синтеза сбоеустойчивых ИС и подхода, основанного на использовании помехозащищенного кодирования. Выявлены особенности данной задачи, отличающие ее от известной задачи кодирования сообщений. Указывается, в частности, что обычные характеристики кода для рассматриваемой

задачи не являются определяющими. При использовании корректирующих кодов важно обнаружить и исправить ошибку именно в информационных, а не в проверочных символах.

Описан блочный линейный нециклический R-код с проверкой на четность с произвольным числом информационных символов. Важным свойством R-кода является возможность обеспечивать технологической защитой только часть КС. Код относится к классу SEC/SED, хотя и имеет кодовое расстояние, равное 2 (следствие безошибочности вычисления бита четности выходного вектора ОС). Иммитационное моделирование показало достаточную эффективность использования предложенного R-кода для повышения сбоеустойчивости ИМС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Согомонян, Е. С., Слабаков, Е. В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. — М.: Радио и связь, 1989.
SOGOMONJAN, E. S., SLABAKOV, E. V. (1989) Self-testing devices and fault-tolerant systems. Radio and Communication, Moscow.
2. Щербаков, Н. С. Самокорректирующиеся дискретные устройства. — М.: Машиностроение, 1975.
SHCHERBAKOV, N. S. (1976) Self-correcting discrete devices. Mashinostroenie, Moscow.
3. BEHROOZ PARHAMI. Fault-tolerant reversible circuits // Proc. 40th Asi-lomar Conf. Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, October 2006. p. 1726–1729.
4. BOYKIN, P. O., ROYCHOWDHURY, V. P. Reversible fault-tolerant logic // Proc. Int'l Conf. Dependable Systems and Networks, 2005. p. 444–453.
5. RUBAIA RAHMAN, LAFIFA JAMAL, HAFIZ MD. HASAN BABU. Design of reversible fault tolerant programmable logic arrays with vector orientation // International Journal of Information and Communication Technology Research Volume, **1**, No. 8, December 2011. p. 337–343.
6. Коц, У. Коды с исправлением ошибок и их реализация в цифровых системах / В кн.: Методы введения избыточности для вычислительных систем. — М.: Сов. радио, 1966. С. 179–229.
KAUTZ, W. (1962) Codes and coding circuitry for automatic error correction within

- digital systems / in “Redundancy techniques for computing systems”, ed. R. H. Wilcox, W. C. Mann. Washington D. C.: Spartan Books, p. 152–195.
7. Хетагуров, Я. А., Руднев, Ю. П. Повышение надежности цифровых устройств методами избыточного кодирования. М.: Энергия, 1974.
KHETAGUROV, YA. A., RUDNEV, YU. P. (1974) Increasing the reliability of digital devices by redundant coding methods, Energija, Moscow.
 8. POOLAKKARAMBIL, M., MATHEW, J. BCH code based multiple bit error correction in finite field multiplier circuits // ISQED, 2011. p. 1–6.
 9. Гаврилов, С. В., Гуров, С. И., Жукова, Т. Д., Рыжова, Д. И. Применение теории кодирования для повышения надежности комбинационных схем // Информационные технологии. № 12. М.: Новые технологии, 2016. С. 931–937.
GAVRILOV, S. V., GUROV, S. I., ZHUKOVA, T. D., RYZHOVA, D. I. (2016) Application of the coding theory for increasing the reliability of combinational circuits. Information technology, 12., New technologies, p. 931–937.
 10. Гуров, С. И. Спектральный R-код с проверками на четность // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс, 2017, № 55. — С. 91–96.
GUROV, S. I. (2017) Spectral R-code with parity checks. Applied Mathematics and Informatics. MAX Press, 55. p. 91–96.
 11. POOLAKKARAMBIL, M., MATHEW, J. AND JABIR ABUSALEH. Multiple Bit Error Tolerant Galois Field Architectures Over $GF(2^m)$ // Electronics, 2012, 1. p. 3–22.
 12. Петров, К. А. Элементы помехоустойчивого кодирования нециклического типа субмикронных КМОП оперативных запоминающих устройств / Дисс. ... канд. техн. наук. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2015.
PETROV, K. A. (2015) Elements of noise-immune encoding of non-cyclic type of submicron CMOS RAMs / Diss. ... cand. tech. sciences. National Research Nuclear University "MIFI".
 13. Гаврилов, С. В., Гуров, С. И., Жукова, Т. Д., Рыжова, Д. И., Тельпухов, Д. В. Методы повышения сбоеустойчивости комбинационных ИМС методами избыточного кодирования // Прикладная математика и информатика. № 53. М.: МАКС Пресс, 2016. С. 93–102.
GAVRILOV, S. V., GUROV, S. I., ZHUKOVA, T. D., RYZHOVA, D. I., TELPUKHOV, D. V. (2006) Methods for increasing the fault tolerance of combinational IMS by the methods of excessive coding. Applied Mathematics and

- Informatics. 53. MAX Press, 2016. p. 93–102.
14. Гаврилов, С. В., Иванова, Г. А., Рыжова, Д. И., Соловьев, А. Н., Стемпковский, А. Л. Методы синтеза помехозащищенных комбинационных блоков // Информационные технологии. 2015, **21**, № 11. С. 821–826.
GAVRILOV, S. V., IVANOVA, G. A., RYZHOVA, D. I., SOLOVIEV, A. N., STEMPOVSKY, A. L. (2015) Methods for the synthesis of jam-free combination blocks. Information Technology. 21 (11). p. 821–826.
15. Телец, В., Цыбин, С., Быстрицкий, А., Подъяпольский, С. ПЛИС для космических применений. Архитектурные и схемотехнические особенности // ЭЛЕКТРОНИКА: Наука, Технология, Бизнес, 2005. **6**. С. 44–48.
TAURUS, V., TSYBIN, S., BYSTRITSKII, A., PODYAPOLSKY, S. (2005) FPGA for space applications. Architectural and circuit design features. ELECTRONICS: Science, Technology, Business. 6. p. 44–48.
16. Юдинцев, В. Радиационно-стойкие интегральные схемы. Надежность в космосе и на земле // Электроника: Наука, технология, бизнес, 2007. Вып. **5**. С. 72–77.
YUDINTSEV, V. (2007) Radiation-resistant integrated circuits. Reliability in space and on earth. Electronics: Science, technology, business, 5. p. 72–77.
17. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. М.: Сов. Радио, 1974.
GALLAGER, R. G. (1968) Information theory and reliable communication. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley and sons, Inc.
18. Савченко, Ю. Г. Цифровые устройства, нечувствительные к неисправностям элементов. — М.: Советское радио, 1977.
SAVCHENKO, YU. G. (1977) Digital devices that are insensitive to faults of elements. Soviet radio, Moscow.
19. Мак-Вильямс, Дж. Перестановочное декодирование систематических кодов / Кибернетический сборник, № 1, (новая серия). М.: Мир, 1965. С. 35–57.
MACWILLIAMS, J. (1964) Permutation decoding of systematic codes. Bell Syst. Techn. J., 43, (1), part 2. p. 485–505.
20. HSIAO, M. Y. A class of optimal minimum odd-weight-column SEC-DED codes // IBM J. Res. Develop. 1970. Vol. 14. p. 395–401.
21. RAKESH, T., MENA, U. S. A Survey of Radiation Hardening by Design (RHBD) Techniques for Electronic Systems for Space Application. International Journal of Electronics and Communication Engineering & Technology, 7(1), 2016, pp. 75–86.
22. Кодирование информации (двоичные коды). Справочник / Под ред. проф. Н. Т. Березнюка. Харьков: Вища школа, 1978.
Coding information (binary codes). (1978) Directory / Ed. prof. BEREZNYUK, N.

- T. Vishcha school, Kharkov.
23. Ахмед, Н., Рао, К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов — М.: Связь, 1980.
AHMED, N., RAO, K. R. (1975) *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Springer-Verlag.
 24. Карповский М. Г., Москалев Э. С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. — Л.: Энергия, 1973.
KARPOVSKY, M. G., MOSKALEV, E. S. (1973) *Spectral methods for analysis and synthesis of discrete devices*. Energia, Leningard.
 25. Тельпухов, Д. В., Жукова, Т. Д., Деменева, А. И., Гуров, С. И. Схема функционального контроля для комбинационных схем на основе R-кода / VIII Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем 2018» (МЭС–2018). Сборник трудов под общей ред. А. Л. Стемповского. М.: ИПИМ РАН, 2018. Часть I. (в печати).
TELPUKHOV, D. V., ZHUKOVA, T. D., DEMENEVA, A. I., GUROV, S. I. (2018) *Functional control scheme for R-code combination schemes / VIII All-Russian Scientific and Technical Conference « Problems development of promising micro- and nanoelectronic systems 2018 » (MES - 2018). Collection of works under the general ed. A. L. Stempkovsky. Moscow: IPPM RAS, 2018. Part I. (in press).*
 26. WOLF C., GLASER J. Yosys — A Free Verilog Synthesis Suite. In *Proceedings of Austrochip 2013*.
 27. WOLF C., GLASER, J. Methodology and Example-Driven Interconnect Synthesis for Designing Heterogeneous Coarse-Grain Reconfigurable Architectures. In Jan Haase, editor, *Models, Methods, and Tools for Complex Chip Design. Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol. 265, 2014, pp. 201–221. Springer, 2013.*
 28. Стемповский, А. Л., Тельпухов, Д. В., Жукова, Т. Д., Гуров, С. И., Соловьев, Р. А. Методы синтеза сбоеустойчивых комбинационных КМОП схем, обеспечивающих автоматическое исправление ошибок // Известия ЮФУ. Технические науки. 2017. № 7 (192). — С. 197–210.
STEMPKOVSKY, A., L., TELPUKHOV, D., V., ZHUKOVA, T. D., GUROV, S. I., SOLOV'EV, R. A. (2017) *Methods for synthesizing fault-tolerant CMOS combinational circuits that provide automatic error correction. Izvestiya SFU. Technical science. 7 (192). p. 197–210.*

УДК: 519.16

MSC2010: 90C27

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОАГЕНТНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

© М. С. Германчук, М. Г. Козлова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *m.german4uk@yandex.ru*

SYNTHESIS OF ALGORITHMS OF CLUSTERING TO SOLVE THE MULTI-AGENT TRAVELING SALESMAN PROBLEM.

Germanchuk M. S., Kozlova M. G.

Abstract.

Purpose of work. For a given (partially, completely) complex network, it is necessary to find, consistent with the routing problem, the network layout for a certain number of clusters, which provides high accuracy and speed of solving the corresponding extreme problems on the graphs.

The article considers graph clustering algorithms, as well as their application for discrete optimization problems on graphs, as an example of the problem for k traveling salesmen. The basic algorithms for solving the traveling salesman problem and some of their modifications are considered. On the basis of theoretical results the software implementation of the following clustering algorithms is developed: hierarchical algorithm, K-means and greedy algorithm with various modifications. A genetic algorithm for solving the traveling salesman problem was implemented, as well as the synthesis of clustering algorithms and the solution of the traveling salesman problem with finding the optimal centers.

The main task of the work was to find the optimal clusters or subgraphs of the desired graph, taking into account the uniform distribution of traveling salesman routes in clusters. As a result, the difference between splitting the graph into clusters (with the preservation of the required centers in these clusters) and finding the optimal centers for further clustering with them is demonstrated. To find optimal in relation to the problem k traveling salesmen subgraphs, a synthesis of clustering algorithms and solutions of discrete optimization problems was developed and implemented on the example of the traveling salesman problem for k agents. The essence of the method is the mechanism of "throwing" vertices from larger clusters to smaller ones, until the convergence condition is fulfilled, the objective function of which depends on the length of the traveling salesmen paths. There are various options for this mechanism, including the transit of vertices through clusters between large and small clusters, so that the resulting clusters do not lose compactness and do not create intersections in further search of the optimal route.

Keywords: *discrete optimization on complex networks, clustering, routing, synthesis of algorithms*

ВВЕДЕНИЕ

К дискретным моделям выбора решений на основе данных и знаний приводится широкий класс задач из различных областей: обработки и восстановления изображений, прикладных задач маршрутизации в сложных сетях, построения траекторий динамических систем и др. Как правило, такие задачи являются NP -трудными. Классический подход состоит в разработке алгоритма решения конкретной задачи, оценки его сложности и проверки на известных тестовых задачах. Следующим шагом является применение комбинаций эвристических алгоритмов. Многие задачи изначально сочетают в своей постановке несколько задач дискретной оптимизации (ДО), например, задачу размещения и задачу кластеризации; задачу маршрутизации и задачу о рюкзаке; задачу маршрутизации, задачу кластеризации и задачу построения разрезов и т. д. В этом случае необходим синтез алгоритмов из заранее разработанного набора, который зависит от предполагаемого наличия знаний о дискретной модели и решении. В статье рассматривается задача кластеризации согласованная с основной задачей построения маршрутов в сложной сети, которая позволяет синтезировать иерархические алгоритмы решения, существенно снижающие время построения приемлемого приближенного решения.

Любая сложная сеть — это граф большой размерности, состоящий из вершин и дуг, которым отвечают наборы количественных (метрических) и качественных характеристик, признаков. Может оказаться, что для некоторых частей сети (кластеров) выбранные свойства практически не меняются, но претерпевают изменения на границах кластера. В связи с этим цель кластеризации заключается в упрощении исходной сложной сети, выделении в ней характерных структур для последующего анализа кластеров и межкластерных связей и построения приближенных (рациональных, реального времени, быстрых) решений соответствующих задач ДО на графах.

Результатом кластеризации является множество кластеров, которые полностью покрывают граф сети, либо границы кластеров, определяемые дугами разрезов между кластерами. В зависимости от исходных постановок задач ДО на сети возникает множество различных многоагентных задач на кластерах и межкластерных коммуникациях.

Работа является частью проекта по исследованию задач ДО на сложных сетях, предполагающего использование дополнительной информации [4], алгоритмов взаимодействия интеллектуальных агентов в решении сетевых задач [5], [18], алгоритмов реоптимизации сети [6] и др. В данной статье для решения задач маршрутизации

применяются алгоритмы кластеризации, основанные на K -средних, бионических алгоритмах и построении маршрутов с помощью генетических алгоритмов. Перспективной является композиция *K-means*, муравьиного и модифицированного генетического алгоритмов.

Цель работы. Для заданной (частично, полностью) сложной сети необходимо найти, согласованную с задачей маршрутизации, разметку сети на определенное количество кластеров, которая обеспечивает высокую точность и скорость решения соответствующих экстремальных задач на графах.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать существующие методы и алгоритмы ДО (маршрутизации для задач типа многих коммивояжеров), выявить и обосновать подходы, наиболее пригодные для достижения поставленной цели;
- разработать, исследовать и применить модели и методы коллективного интеллекта для решения задачи кластеризации и маршрутизации с учетом критериев точности и скорости построения метаэвристик;
- получить теоретическую и экспериментальную оценку возможностей алгоритмов коллективного интеллекта с целью расширения сферы применения интеллектуальных моделей в теории ДО и в задачах маршрутизации для повышения их продуктивности.

Подходящим способом для эффективного решения задач маршрутизации в сложноструктурированных сетях является использование математических моделей, описывающих коллективное поведение децентрализованной самоорганизующейся системы, состоящей из множества агентов, локально взаимодействующих между собой и с окружающей средой для достижения глобальной цели. В природе примерами подобного рода систем являются, например, муравьиные колонии, рои пчел. Каждый агент в системе функционирует автономно, используя простые правила. В то же время алгоритм совместного поведения всех агентов позволяет решить подобную задачу. Коллективный интеллект рассматривается как эффективная процедура оптимизации, которой присущи масштабируемость, возможность решать задачи независимо от их размерности, гибкость, отсутствие жесткой структуры, простота правил поведения агентов.

При переходе к математическим мультиагентным моделям коллективного интеллекта вводятся так называемые эвристические коэффициенты, которые являются управляющими параметрами мультиагентных методов и алгоритмов. От значения

этих параметров зависит, насколько эффективно будет решена оптимизационная задача. Параметры могут принимать бесконечное число значений из некоторого диапазона. Поэтому встает вопрос об их подборе и необходимости проведения экспериментальных исследований на распространенных модельных (эталонных) тестовых задачах из библиотек, чтобы выяснить оптимальные значения коэффициентов и оценить вычислительную сложность методов коллективного интеллекта. Иными словами, необходимо выяснить, насколько точно такие методы могут решать задачи ДО по сравнению с известными методами; какова оценка их вычислительной сложности; а также каковы оптимальные значения используемых в методах эвристических коэффициентов и как они влияют на конечный результат.

С учетом указанных подходов представим результаты по разработке алгоритмов кластеризации, пригодных для решения задачи многих коммивояжеров и их программной реализации.

1. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОАГЕНТНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРОВ

Задача коммивояжера (ЗК) является одной из самых известных задач ДО на графах. Суть задачи заключается в том, чтобы найти кратчайший путь в графе, который проходит из начальной вершины через все вершины графа и возвращается в исходную вершину. Агент должен пройти через каждую вершину лишь один раз. Для упрощения исходной задачи будем считать, что искомый граф имеет полную связность, т. к. в неполном графе нельзя гарантировать разовое прохождение через каждую вершину. Такой путь называют гамильтоновым циклом, а ЗК формулируют как нахождение минимального гамильтонова цикла в графе. Если исходный граф не является полным, его можно преобразовать в полный, добавив недостающие ребра и присвоив им большие весовые значения, чтобы эти ребра были менее «привлекательны» для алгоритмов решения ЗК. Таким образом, исходными данными в ЗК является полный взвешенный граф с матрицей расстояний (взвешенная матрица смежности).

Существуют частные случаи общей постановки задачи.

ЗК можно рассматривать как для одного агента (коммивояжера), так и для k агентов. Изначально заданы базы каждого агента или множество вершин-баз. Задача состоит в том, чтобы агент прошел путь по всем вершинам кластера и возвратился на свою базу.

Рассмотрим ЗК для k агентов. Для каждого агента задана вершина-база, а также k кластеров (подграфов) искомого графа сети, в каждом из которых содержится

соответствующая база. Существует также вариант, при котором агенты будут выходить из одной базы. Такое условие сведется к двум базам, где вторая база будет являться ближайшей вершиной к первой базе и при этом не будет базой для другого агента.

После разбиения графа на k оптимальных подграфов, необходимо решить ЗК для каждого подграфа.

1.1. Точные алгоритмы. К точным алгоритмам относят алгоритм полного перебора (АПП), метод ветвей и границ (МВГ) и метод динамического программирования.

Алгоритм полного перебора. Алгоритм реализует поиск оптимального решения с помощью полного перебора всех вариантов и гарантирует минимальный путь в графе. Недостаток заключается в том, что для больших n (количество вершин) алгоритм будет работать с оценкой $O((n-1)!)$, что является неприемлемым, и уже при $n = 30$ ЗК станет практически неразрешимой. Но для малых n целесообразно использовать именно этот алгоритм.

Метод ветвей и границ. Ветвление подразумевает разбиение исходного множества допустимых значений на подмножества меньших размеров. В результате будет получено дерево ветвлений, а построенные подмножества будут узлами дерева. Далее находятся нижние и верхние границы для решения задачи на подмножестве. Если есть два подмножества M_1 и M_2 , и нижняя граница подмножества M_1 дерева ветвления больше, чем верхняя граница ранее просмотренного подмножества M_2 , то M_1 можно исключить из дальнейшего ветвления. Минимальное значение из уже найденных верхних оценок хранят как глобальную переменную S , и любой узел, чья нижняя граница больше S , можно отсечь из ветвления. За счет этого количество проверок и ширина поиска значительно сокращается по сравнению с АПП. Однако при больших n алгоритм работает медленно и плохо применим для графов размерности больше чем 20 вершин. К МВГ можно применить жадный алгоритм в качестве начального решения. Точность в этих алгоритмах достигается большими временными затратами. Для таких алгоритмов ЗК при $n = 30$ и более практически неразрешима. Для ЗК с большим количеством вершин используют эвристические алгоритмы.

1.2. Эвристические алгоритмы. Эвристические алгоритмы являются основным инструментом для решения ЗК. На практике их особенностью является быстрое выполнение и адаптация к различным дополнительным условиям [4]. В эвристических алгоритмах учитывают специфику задачи с помощью простых средств, создают приёмы, эффективные для решения задач с определенной особенностью. Обычно такие алгоритмы редко дают точный результат. Строгого обоснования у этих алгоритмов

не существует, равно как и единого принятого алгоритма. Описание различных эвристических алгоритмов можно найти в работах [1, 9]. Одним из часто используемых эвристических алгоритмов является жадный алгоритм.

Жадный алгоритм. Алгоритм заключается в том, что в итоговый путь записываются те вершины, которые являются ближайшими к уже полученному пути. Такой подход гарантирует локальный минимум в ЗК и довольно быстрое выполнение. Также одним из его достоинств является возможность синтеза с другими алгоритмами решения ЗК.

Существуют различные реализации жадного алгоритма для решения ЗК: ближайшего соседа; самого «дешевого» включения и др. Наиболее применимым для ЗК является алгоритм ближайшего соседа, который определяет вершину, ближайшую к текущей вершине.

Самыми известными эвристиками для решения ЗК являются **эволюционные алгоритмы** [8, 10, 19]. Они моделируют биологический процесс естественного отбора. Эволюционные алгоритмы используют для решения NP -трудных задач дискретной и комбинаторной оптимизации, в частности ЗК.

Эволюционные алгоритмы имеют широкое разнообразие. Наиболее известными алгоритмами являются: генетический алгоритм; алгоритм муравьиных колоний; алгоритм пчелиного роя; алгоритм роя светлячков и др.

Алгоритмы коллективного интеллекта. Аналогия в решении NP -трудных задач ДО неявно используется при выборе методов и алгоритмов, подобных алгоритмам живой природы, — «бионических» алгоритмов и методов. В этом случае считается, что если подобные алгоритмы эффективно работают в реальности, то обоснование работоспособности (сходимость, устойчивость и пр.) их аналогов для решения задач ДО косвенно получено в живой природе.

Термин «бионический» применяется к методам, учитывающим принципы организации, свойств, функций и структур живой природы. Среди «бионических» выделяют эволюционные и когнитивные роевые методы и алгоритмы. Эволюционные алгоритмы (генетические алгоритмы [26], эволюционные стратегии [39], генетическое и эволюционное программирование [33]) представляют собой итерационные преобразования, выполняемые специальными эволюционными операторами (кроссинговер, мутация, селекция), основанными на стохастических правилах имитации механизмов эволюции. Известны попытки применить генетические алгоритмы для решения задач кластеризации, ДО на графах [3, 8, 14, 16, 17, 26, 31].

Когнитивные роевые алгоритмы (колоний муравьев, роя пчел, стаи птиц, стаи волков, косяков рыб и др.) представляют собой преобразования, которые описывают коллективное поведение децентрализованной самоорганизующейся системы, состоящей из множества агентов, локально взаимодействующих между собой и с окружающей средой для достижения глобальной цели. Эти преобразования могут быть основаны на статистическом подходе к исследованию ситуаций и итерационном приближении к искомому решению. Каждый агент функционирует автономно по набору простых правил. В отличие от почти примитивного поведения агентов, поведение всей системы получается разумным.

Алгоритмы муравьиных колоний. Характерная особенность этих методов — для колонии муравьев или роя пчел необходима определенная форма связи, чтобы сотрудничать при решении общей задачи. Например, для колонии муравьев связь предполагает изменение индивидуумом окружающей среды так, чтобы это изменило поведение других индивидуумов, проходящих через эту измененную среду в будущем. Оставляя следы феромона, муравьи обеспечивают коммуникацию через среду, придавая ей семиотические характеристики. Колония или рой не имеют управляющих функций, они самоорганизуются за счёт согласованного взаимодействия множества составляющих элементов. Самоорганизация является результатом взаимодействия таких компонентов, как положительная и отрицательная обратная связь; случайность и многократность. Имитация самоорганизации и составляет основу этого типа бионических алгоритмов.

Достоинства муравьиных, роевых методов и алгоритмов известны: сравнительная простота выполняемых действий, возможность высокоэффективной реализации для многопроцессорных архитектур, гарантированная сходимость (хотя время сходимости не определено). Их недостатки в основном связаны с не всегда оптимальной настройкой параметров. Между тем объекты сложноструктурированных сетей обладают большой степенью сложности и многофакторности, что налагает высокие требования к надежности и точности их исследования.

К задачам ДО на графах применимы муравьиный, роевой и другие мультиагентные алгоритмы. Для кластеризации сети муравьиным (роевым) методом необходимо:

- представить сеть в виде графа с приписанными (вершинам и дугам) атрибутами (весаи);
- определить пороговые значения параметров, которые должны быть в разных кластерах;
- определить значение следа феромона;
- настроить параметры метода.

Предполагаем, что «муравьи» порождаются в графе периодически каждой вершиной и следуют в случайно выбранную соседнюю вершину. Далее, по уровню феромона в каждой вершине происходит кластеризация сети. Здесь ключевую роль играют пороговые значения метрических характеристик сети между разными кластерами. Порог 0,5 позволяет отделить межкластерные связи от объекта. Если порог взять меньшим, то кластер станет больше.

Генетический алгоритм (ГА). ГА — это эволюционный алгоритм, используемый для решения разнообразных задач ДО путём случайного подбора, скрещивания (комбинирования) и мутации искомым параметров. Общий процесс поиска значений параметров схож с реальными биологическими процессами [8]. На данный момент реализовано большое количество ГА (в основном они мало похожи на классический ГА [16]) — это целое семейство алгоритмов, и их разнообразие проявляется не только при решении разных по условию задач, но и по конструкции отдельных частей алгоритма.

Несмотря на то, что модель эволюционного развития, применяемая в ГА, упрощена по сравнению со своим природным аналогом, она всё равно является достаточно хорошей моделью и может применяться для большого количества прикладных задач, даже тех, которые трудно, а иногда и невозможно решить другими методами. Генетические алгоритмы не гарантируют нахождение глобального оптимума. Они хорошо справляются с поиском «достаточно хорошего» решения задачи «достаточно быстро». Для задач, которые могут быть решены специальным методом, практически всегда специальные методы будут более эффективными, чем ГА в быстройдействии и в точности найденных решений. Основным преимуществом данного алгоритма является то, что он легко адаптируется под задачу и может использоваться для решения сложных задач, в которых не существует никаких специальных методов. Важно, что можно достигнуть улучшения существующих методик, сочетая их с ГА [10, 14].

ГА содержит следующие основные этапы и действия:

- 1⁰. Формирование начальной популяции.
- 2⁰. Селекция.
- 3⁰. Скрещивание (кроссинговер).
- 4⁰. Мутации.
- 5⁰. Если условия остановки не выполнены, вернуться в 2⁰.

Рассмотрим эти этапы более подробно, с учетом специфики ЗК.

- 1⁰. Формирование начальной популяции.

Популяция в генетическом алгоритме состоит из некоторого числа хромосом. Каждая хромосома является собой некоторое уникальное решение поставленной задачи

или некоторой ее части. Природа хромосомы может быть абсолютно любая, главное, чтобы это не противоречило условию задачи. Например, хромосома, задающая путь в ЗК, может иметь вид, представленный на рис. 1. Здесь каждое число — это некоторый порядковый номер вершины в графе, а их последовательность — последовательность соединенных вершин, образующих путь.

6	3	7	4	5	9	10	1	8	2
---	---	---	---	---	---	----	---	---	---

Рис. 1. Пример хромосомы в генетическом алгоритме

2⁰. Селекция.

Оператор *селекции* — это оператор, при помощи которого хромосомы (разнообразие решений), имеющие более высокое значение целевой функции (лучшие показатели, признаки), получают большую возможность для производства потомков, чем «худшие» хромосомы. Элементы, выбранные для репродукции, обмениваются генетическим материалом, создавая более разнообразных потомков (решений).

Оператор селекции считается эффективным, если создается возможность перехода из одного подмножества уникальных решений в другое подмножество. Это повышает вероятность нахождения глобального оптимума целевой функции. Выделяют два основных типа реализации оператора селекции: случайный выбор хромосом; выбор хромосом на основе значений целевой функции.

Существует большое число видов операторов селекции. К ним относятся:

– *селекция на основе рулетки*. Данная селекция основана на вероятностном подходе к выбору. «Более сильные» хромосомы имеют более высокие шансы быть избранными, чем «слабые». Если проводить аналогии с рулеткой, то мы имеем рулетку, где каждой хромосоме отведена некоторая область, соизмеримая с «силой» хромосомы. Соответственно, при повороте рулетки лучшие хромосомы будут иметь больший шанс быть выбранными;

– *селекция на основе заданной шкалы*. Здесь популяцию сортируют по возрастанию на основе некоторого критерия. Каждой хромосоме присваивается определенное число, и селекция будет выполняться на основании этого числа;

– *элитная селекция*. В данном случае селекцию проходят хромосомы с лучшими значениями целевой функции. Такие хромосомы называются элитными хромосомами;

– *турнирная селекция*. Здесь выбирается некоторое число хромосом (размер «турнира») случайным образом или последовательно из популяции, и лучшие участники турнира будут проходить селекцию.

3⁰. Скрещивание (кроссинговер).

Оператор *скрещивания* (*кроссинговера*) — это конструкция, позволяющая на основе скрещивания хромосом родителей получать новые хромосомы — потомки. Разнообразие таких операторов велико, поскольку именно они определяют эффективность работы генетического алгоритма. Рассмотрим некоторые из них:

– *простой (одноточечный)* оператор кроссинговера. Перед началом работы одноточечного оператора определяется разрезающая точка оператора кроссинговера, которая обычно задается случайно. Эта точка определяет место в двух особях, где они должны быть «разрезаны»;

– *двухточечный оператор* кроссинговера. В каждой хромосоме определяются две точки оператора, и хромосомы обмениваются участками, расположенными между двумя точками оператора кроссинговера;

– *упорядоченный оператор* кроссинговера. Здесь «разрезающая» точка также выбирается случайно. Разрезав родительские хромосомы по «разрезающей» точке, мы получим два сегмента для каждого родителя: $\{P_l^1; P_r^1\}$ и $\{P_l^2; P_r^2\}$, где P_l^i и P_r^i — левый и правый сегмент i -го родителя. Тогда потомок S состоит из P_l^1 в первой части хромосомы, а остальные позиции в S берутся из хромосомы второго родителя в упорядоченном виде слева направо, исключая уже существующие значения в S . Второй потомок образуется аналогично, только первая часть хромосомы потомка состоит уже из P_l^2 и остатка от первого родителя;

– *частично соответствующий* оператор кроссинговера. Здесь также случайно выбирается «разрезающая» точка. Далее анализируются сегменты в обеих хромосомах и устанавливается частичное соответствие между элементами первого и второго родителей с формированием потомков. При этом правый сегмент P^2 переносится в S , левый сегмент P^1 переносится в S с заменой повторяющихся генов на отсутствующие гены, находящиеся в частичном соответствии;

– *циклический оператор* кроссинговера. Этот оператор выполняет рекомендации согласно циклам, которые существуют при установлении соответствия между генами первого и второго родителей.

3⁰. Мутации.

Оператор *мутации* позволяет получить потомка из одного родителя путем изменения состава хромосомы этого родителя. В общем случае оператор описывается следующим образом: в хромосоме случайным образом выбирается одна или несколько пар позиций; элементы в данных позициях в хромосоме меняются местами, тем самым получая новую хромосому.

Оператор применяется в том случае, если алгоритм долгое время не сходится, т. е. не удовлетворяется критерий останова. Если во время скрещивания получается некорректная хромосома с точки зрения условия задачи, мутацию можно применить для изменения хромосомы и приведения ее в корректную форму.

Исследования [2, 8] показали, что ГА дает лучший результат из описанных приближенных алгоритмов. В программной реализации в качестве решения ЗК будет использоваться именно ГА с жадной модификацией.

2. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ И КЛАСТЕРОВ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ГРАФАХ

Методы кластеризации условно можно разбить на автоматические и интерактивные; использующие априорную информацию или универсальные, которые не используют априорную информацию (о компактности, однородности и др.). К универсальной группе методов и алгоритмов относят алгоритм *K-means*; алгоритмы, использующие метрические характеристики; алгоритмы построения различных разрезов и др. [3, 12, 13, 17].

Алгоритм *K-means* (*K*-средних) предполагает быстрый кластерный анализ путем выделения *k* кластеров, которые располагаются на максимальном расстоянии друг от друга [30]. Число кластеров *k* выбирается интуитивно либо опираясь на результаты экспериментов [23]. Идея алгоритма состоит в том, что центры кластеров соответствуют локальным максимумам плотности распределения данных. Базовый алгоритм *K-means* предполагает случайный или эвристический выбор *k* центров кластеров, размещение каждой вершины графа в кластер с ближайшим центром к этой вершине, после чего заново пересчитываются центры кластеров до сходимости процесса. Алгоритм гарантированно сходится, но не обязательно приводит к оптимальному решению, поскольку зависит от начального множества кластеров и значения *k*. Вычислительная сложность алгоритма *K-means* равна $O(nkt)$, где *n* — размерность сети, *k* — число кластеров, а *t* — число итераций, которые требуются алгоритму для приведения кластеров к стабильному состоянию. К недостаткам алгоритма относится его чувствительность к локальным изменениям сети (запреты, предписания, удаление элементов и т. п.), снижение скорости работы на больших объемах данных, необходимость предварительно указывать число кластеров *k* [28].

Метод разреза графа предполагает, что сложная сеть представляется в качестве взвешенного неориентированного графа. Между всеми вершинами строятся ребра,

веса которых показывают меру сходства между вершинами по какой-либо характеристике. Исходная сеть в виде графа разрезается на подграфы, чтобы внутри подграфа веса ребер значительно отличались от весов ребер, связывающих подграфы. Одними из лучших графовых алгоритмов на сегодняшний день считаются алгоритм *NormalizedCut* [37] и его модификации [22, 29], алгоритм *NestedCuts* [38], а также алгоритм *SWA* [23, 36]. Большинство алгоритмов минимального разреза графа имеют трудоемкость $O(n)$, где n — общее число вершин графа, но требуют значительных затрат памяти для хранения матриц расстояний размером $n \times n$. Поэтому их затруднительно применять к сетям большой размерности. Таким образом, проблема построения алгоритмов кластеризации всей сети на основе кластеризации графов с приемлемыми требованиями к памяти и быстродействию остаётся актуальной.

Автоматические методы и алгоритмы не позволяют находить решение произвольных задач кластеризации с гарантированным результатом. Ни один из автоматических методов и алгоритмов не идеален, в лучшем случае необходимо использовать гибридную кластеризацию из разных комбинаций алгоритмов кластеризации, полученных разными методами с разными параметрами. Применительно к задачам кластеризации изображений как графовых структур в [32] было проведено сравнение различных бионических подходов. Рассмотрено 80 различных бионических методов. Сравнивались генетические алгоритмы (*GA*), эволюционные стратегии (*ES*), генетическое программирование (*GP*), метод роя частиц (*PSO*), метод муравьиных колоний (*ACO*). В качестве критерия сравнения для алгоритмов кластеризации, как правило, используют точность работы и скорость выполнения.

Для алгоритма кластеризации важное значение имеет сложность обрабатываемой сети. Роевые методы кластеризации, в частности *DarwinianPSO* и *Fractional – OrderDarwinianPSO*, описаны в [24, 25]. Особенностью применения роевых методов является возможность нахождения квазиоптимальных решений, что рекомендуется учитывать при выборе между скоростью работы и качеством решения.

Наилучшую точность кластеризации для сложноструктурированных сетей показывают муравьиные алгоритмы, в частности для задач обработки изображений [21, 30, 35]. Данные этих исследований показали значительное влияние целевых функций муравьиных алгоритмов на процесс разметки сети на кластеры, что позволяет сделать вывод о зависимости точности результата от используемых критериев целевой функции. Анализ алгоритмов эволюционных стратегий [39] и генетических

алгоритмов [34] показал, что данный подход можно применять для обработки сложно структурированных сетей, но результат обладает меньшей степенью точности, а сходимость наблюдается в меньшем проценте случаев.

В качестве задачи ДО возьмем ЗК для k агентов. Искомый граф будет иметь большое количество вершин, поэтому для решения ЗК будет применяться один из эвристических алгоритмов. Граф имеет полную связность.

Решаются две задачи: нахождение оптимальных центров кластеров; формирование оптимальных кластеров на основании критерия качества и решение ЗК на кластерах.

2.1. Нахождение оптимальных центров кластеров. В качестве исходных данных задаем количество кластеров k . Будем считать, что оптимальность центра кластера задается двумя параметрами: удаленность центра от других центров кластеров; выполнение «гипотезы компактности» для текущего кластера. *Гипотеза компактности* в задачах кластеризации — предположение о том, что схожие объекты гораздо чаще лежат в одном кластере, чем в разных; или, другими словами, что кластеры образуют компактно локализованные подмножества в пространстве объектов. Это также означает, что граница между кластерами имеет достаточно простую форму.

Для решения этой задачи подойдет алгоритм кластеризации *K-means*. В классической реализации алгоритма *K-means* не требуется задавать искомые центры, а достаточно знать количество кластеров. Следовательно, алгоритм способен сам подобрать оптимальные для него кластеры (подграфы). Разбив граф на соответствующие подграфы, можно взять центр каждого подграфа, где центр — множество вершин, имеющих минимальный эксцентриситет. Нам достаточно одной вершины из каждого такого множества. Соответствующие вершины и будут оптимальными центрами для исходного графа с заранее заданным количеством кластеров.

Предпочтение алгоритма *K-means* можно аргументировать тем, что этот алгоритм показывает хорошие результаты кластеризации с различными критериями качества. Единственным альтернативным вариантом со схожим уровнем точности можно отметить вероятностный EM-алгоритм. Но он имеет несколько недостатков, в следствие которых получить с его помощью необходимые центры не представляется возможным, хотя бы потому, что алгоритм не предназначен для «навязывания» ему количества кластеров.

Алгоритм *K-means* также придерживается гипотезы компактности (форма кластеров — сферическая), поскольку использует в качестве критерия «схожести» расстояние от вершины до центра кластера. Отсюда вытекает и тот факт, что центры кластеров будут максимально удаленными друг от друга.

2.2. Нахождение оптимальных кластеров на основании критерия качества.

Рассмотрим ЗК для k агентов. Имеем исходный граф, на котором выделены базы для каждого агента. Будем считать, что все агенты готовы пойти на условие, что каждому достанется «приблизительно» равный подграф искомого графа. Ставится задача: по искомым центрам разбить граф на k кластеров $G_i, i = \overline{1, k}$ так, что все агенты проходят почти равные расстояния $f_i(G_i) \approx f_{\text{среднее}}, i = \overline{1, k}$. Равенство кластеров относительно ЗК будем оценивать по следующему критерию качества:

$$\left| \max_{1 \leq i \leq k} f_i(G_i) - \min_{1 \leq i \leq k} f_i(G_i) \right| \leq \varepsilon \quad (1)$$

В качестве целевой функции выбрано значение пройденного пути в ЗК. Нахождение кратчайшего пути будет осуществляться ГА с элитной селекцией, частично соответствующим скрещиванием и с использованием жадной эвристики. Данная модификация предполагает, что одна из хромосом ГА в начальной популяции будет формироваться жадным алгоритмом (ближайший сосед). Такая хромосома гарантирует локальный оптимум, как и любая жадная эвристика, и при этом способствует более быстрой сходимости ГА. Проблема «застоя» в локальном оптимуме решается тем, что во время селекции половина хромосом из предыдущего поколения останутся в новом поколении. Поэтому «слабые» хромосомы могут внести свой дальнейший вклад в выходе из локального оптимума.

Получив начальное разбиение графа на k кластеров и значения целевой функции для каждого подграфа генетическим алгоритмом, оптимизируем кластеры путем балансирования значений целевой функции для каждого кластера. Для этого необходимо «перебросить» вершины из самого крупного по значению целевой функции кластера G_{max} в самый малый — G_{min} . Возьмем ближайшую вершину из G_{max} до G_{min} и присвоим ее кластеру G_{max} . При этом если расстояние между кластерами большое и/или между ними есть другие кластеры, то необходимо передать вершину из G_{max} в G_{min} «транзитом» через все кластеры, лежащие между данными:

$$G_{max} \longrightarrow G_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow G_m \longrightarrow G_{min},$$

где G_i — кластеры между G_{ma} и G_{min} , $i = \overline{1, m}$.

Будем считать, что кластер G_2 лежит между G_1 и G_3 , если:

$$\begin{cases} \rho(G_1, G_2) < \rho(G_1, G_3), \\ \rho(G_2, G_3) < \rho(G_1, G_3), \end{cases}$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние от центра кластера x до центра кластера y . После первого «перебрасывания» вершин применим генетический алгоритм для нового разбиения. Такие «перебрасывания» будем совершать до тех пор, пока не выполнится условие

остановки (1). При этом ε может быть сколь угодно малым. Впрочем, брать слишком малые значения не стоит, ввиду того, что алгоритм может подобрать кластеры с очень большим разбросом вершин, что не является приемлемым. В программной реализации используется динамическое увеличение ε (порога), если алгоритм не смог подобрать кластеры за некоторое количество итераций.

Данный алгоритм позволяет подобрать оптимальные подграфы с сохранением заданных центров для каждого кластера. Разбиение почти всегда будет неприемлемым, если обнаружатся центры, которые будут расположены близко друг к другу. В таком случае необходимо сначала найти оптимальные центры, а потом применить данный алгоритм.

В наиболее простом случае под синтезом алгоритмов кластеризации и решения ЗК будем понимать использование любого алгоритма кластеризации для получения начального разбиения исходного графа на подграфы и любого алгоритма решения ЗК. В общем случае синтез алгоритмов кластеризации и решения ЗК для k агентов выглядит следующим образом.

1. Для исходного графа ввести нужное количество кластеров k и центры.
2. Найти начальное разбиение графа на k кластеров с использованием текущих центров.
3. Если начальное разбиение на текущих центрах оказалось неприемлемым, то подобрать новые центры с помощью *K-means*.
4. Переопределить кластеры с помощью механизма «перебрасывания» вершин.
5. На каждом кластере найти решение локальной ЗК.
6. Найти значение целевой функции для каждого кластера текущего разбиения.
7. Проверить условие сходимости и, если оно не выполнено, вернуться в п. 4.

В качестве алгоритма кластеризации графа для начального разбиения подойдет любой алгоритм кластеризации с четкой принадлежностью вершин. ЗК также может решаться любым из известных алгоритмов. Данный синтез алгоритмов применим не только для ЗК, поскольку целевой функцией может быть целевая функция любой задачи ДО на графах, для которой необходимо применить кластеризацию и для которой можно сформулировать условие сходимости алгоритма синтеза.

2.3. Программная реализация. Среда программирования: Microsoft Visual Studio 2015 (Windows Forms); язык программирования: C#. Исходные данные: полный граф (100 вершин), количество кластеров k и их центры. Рассмотрим задачу многих агентов-коммивояжеров, с «плохими» начальными условиями, т. е. центры каждого агента будут расположены близко друг к другу. Для примера пусть число агентов

будет 5, а центрами — вершины 1, 2, 3, 4, 5. Реализуем кластеризацию графа алгоритмом *K-means* и жадным алгоритмом с распараллеливанием по исходным данным (рис. 2), сохраняя текущие центры (вершины, выделенные голубым цветом).

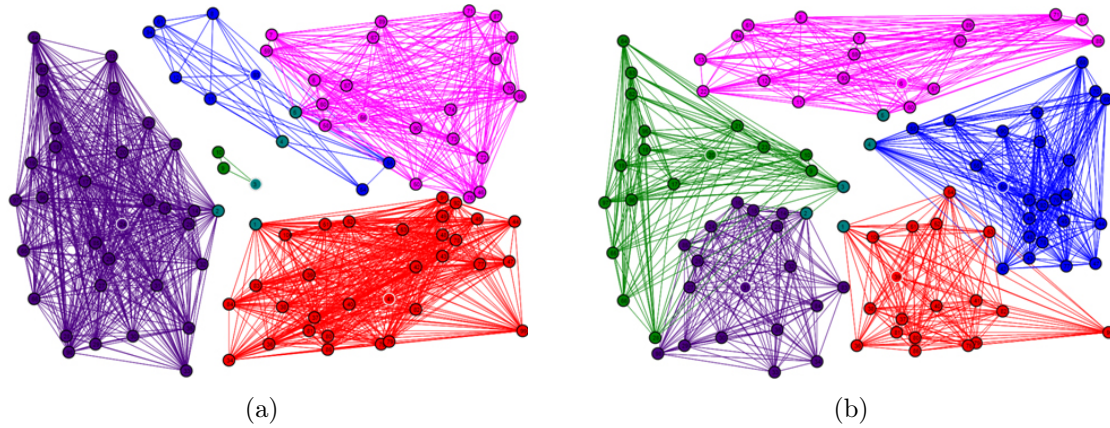


Рис. 2. Разбиение графа на пять подграфов: (а) методом *K-means*; (б) жадным алгоритмом с распараллеливанием

Получив данные разбиения, применим ГА для нахождения оптимального пути для каждого подграфа (рис. 3).

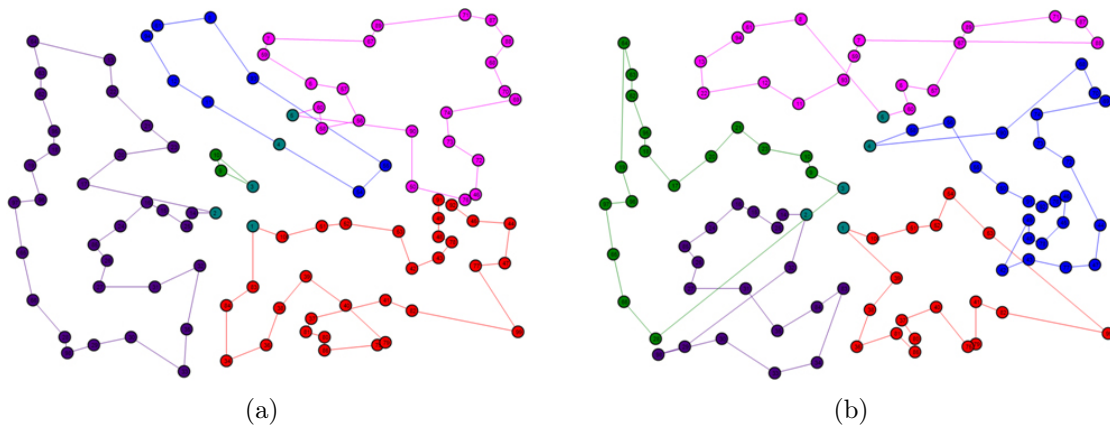


Рис. 3. Построение ГА оптимального маршрута для кластеров, полученных: (а) алгоритмом *K-means*; (б) жадным алгоритмом с распараллеливанием

Сравним результаты.

На рис. 4 слева отображены значения целевой функции для соответствующего кластера, а в скобках — количество вершин в подграфе; справа — дополнительная информация: сумма значений целевых функций, их среднее значение, минимальное и максимальное значение и разница между минимумом и максимумом.

K: 5				K: 5							
Centers:	1	2	3	4	5	Centers:	1	2	3	4	5
●	2371	(32)				●	1646	(19)			
					Sum:	●	1608	(19)			Sum:
●	2511	(33)			Means:	●	1789	(18)			Means:
					Max:	●	1895	(25)			Max:
●	190	(3)			Min:	●	1891	(19)			Min:
					Max-Min:						Max-Min:
●	1142	(9)									
●	1823	(23)									

(a)

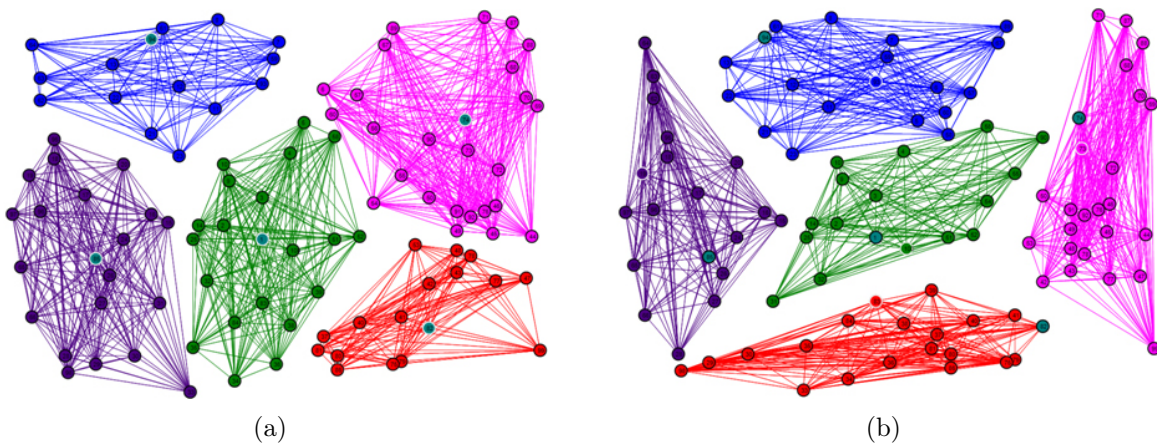
(b)

Рис. 4. Результаты работы: (a) алгоритма *K-means*; (b) жадного алгоритма с распараллеливанием

Учитывая, что оптимальность кластеров характеризуется не только минимизацией значения целевой функции, но и ее усреднением по всем кластерам, можно однозначно сказать, что жадный алгоритм с модификацией распараллеливания отработал лучше и при этом разница между наибольшим и наименьшим кластером невелика.

В общем случае жадный алгоритм с данной модификацией практически всегда будет давать приемлемый результат, и поэтому рекомендуем к использованию в качестве начального разбиения для синтеза алгоритмов.

Смысл модификации распараллеливания заключается в том, чтобы разбиение графа проходило по жадному алгоритму параллельно, когда кластеры ведут себя независимо друг от друга, за исключением того, что одна вершина не может одновременно принадлежать нескольким кластерам.



(a)

(b)

Рис. 5. Разбиение графа на подграфы с новыми центрами: (a) методом *K-means*; (b) жадным алгоритмом с распараллеливанием

Найдем оптимальные центры для данного графа при $k=5$ и снова применим те же алгоритмы кластеризации. Как видно из самих разбиений на рис. 5, кластеры получились более компактными, с выдержанной формой (сферической) и без пересечений.

Применим ГА для данных разбиений (рис. 6) и сравним результаты. По данным на рис. 7 видно, что найденные оптимальные центры оптимизируют алгоритм *K-means*, поскольку теперь не наблюдается сильных расхождений между кластерами. Однако, жадный алгоритм отработал сравнительно одинаково как для искомым центров, так и для новых. Это еще раз подчеркивает, что жадный алгоритм с распараллеливанием всегда дает адекватный результат.

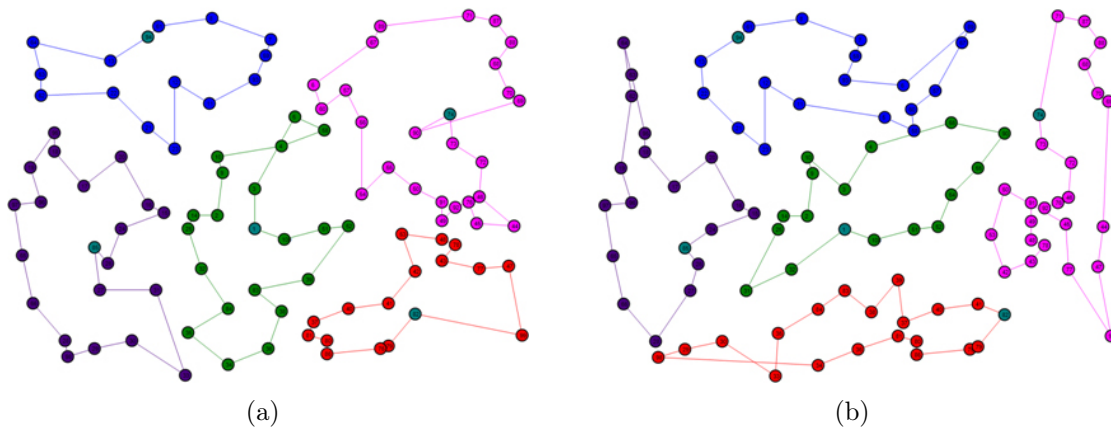


Рис. 6. Построение ГА оптимального маршрута для кластеров с новыми центрами, полученных: (а) алгоритмом *K-means*; (б) жадным алгоритмом с распараллеливанием

K: 5		K: 5	
Centers: 82 85 1 94 74		Centers: 82 85 1 94 74	
● 1177 (17)	Sum: 7536	● 1602 (20)	Sum: 7868
● 1640 (21)	Means: 1507	● 1504 (19)	Means: 1573
● 1653 (21)	Max: 1820	● 1369 (17)	Max: 1839
● 1246 (15)	Min: 1177	● 1554 (19)	Min: 1369
● 1820 (26)	Max-Min: 643	● 1839 (25)	Max-Min: 470
(a)		(b)	

Рис. 7. Результаты: (а) алгоритма *K-means* с новыми центрами; (б) жадного алгоритма с новыми центрами

Реализуем синтез алгоритмов кластеризации и решения ЗК. В качестве начального разбиения будем использовать *K-means* и жадный алгоритм с распараллеливанием; в качестве решения ЗК — генетический алгоритм (рис. 8, 9).

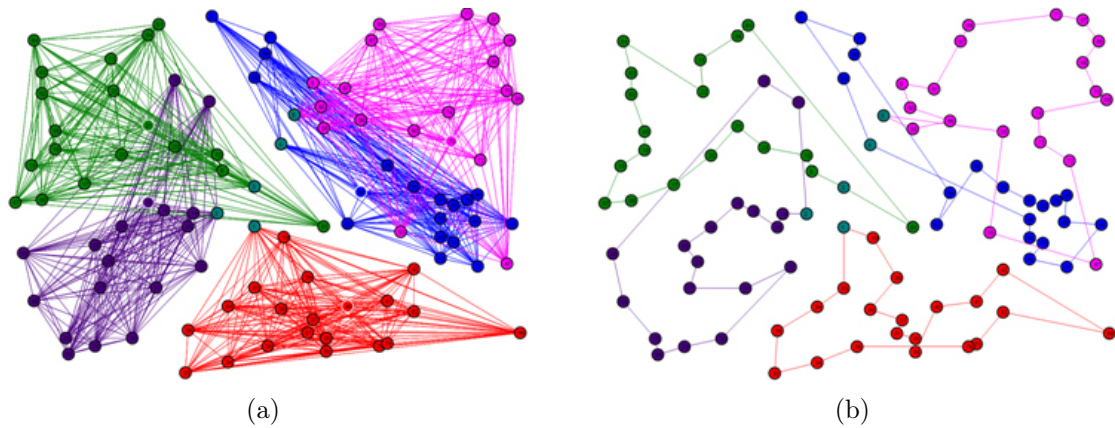


Рис. 8. (а) Результат кластеризации синтезом с *K-means* в качестве начального разбиения; (б) результат работы ГА для подграфов, полученных с помощью синтеза, с *K-means* в качестве начального

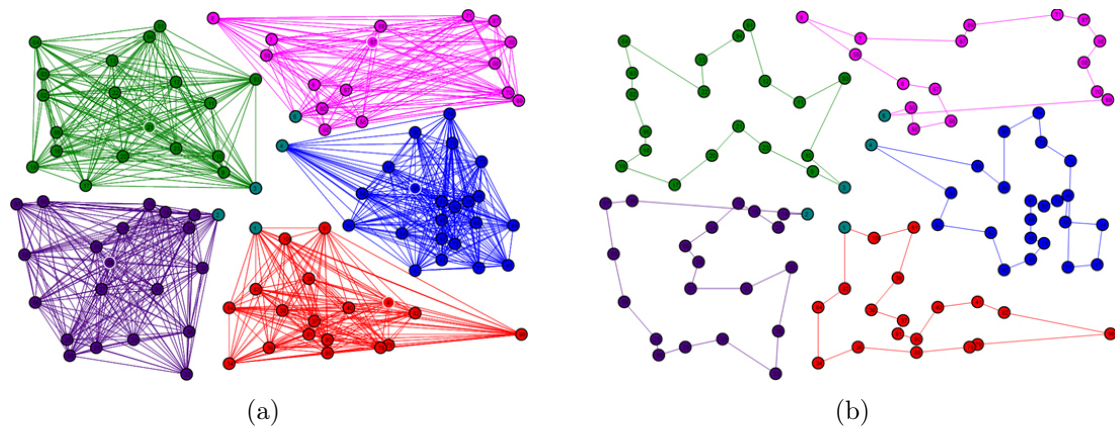


Рис. 9. (а) Результат кластеризации синтезом, с жадным алгоритмом в качестве начального разбиения; (б) результат работы ГА для подграфов, полученных с помощью синтеза, с жадным алгоритмом в качестве начального разбиения

На рис. 10, 11 из графиков видно, что синтез приближает значения целевых функций для всех кластеров к среднему значению (*AvgSyn*), с некоторым отклонением ε — как один из параметров критерия качества (1). В данной реализации $\varepsilon=100$, с последующим увеличением порога, если алгоритм долго не сходится. На рис. 10

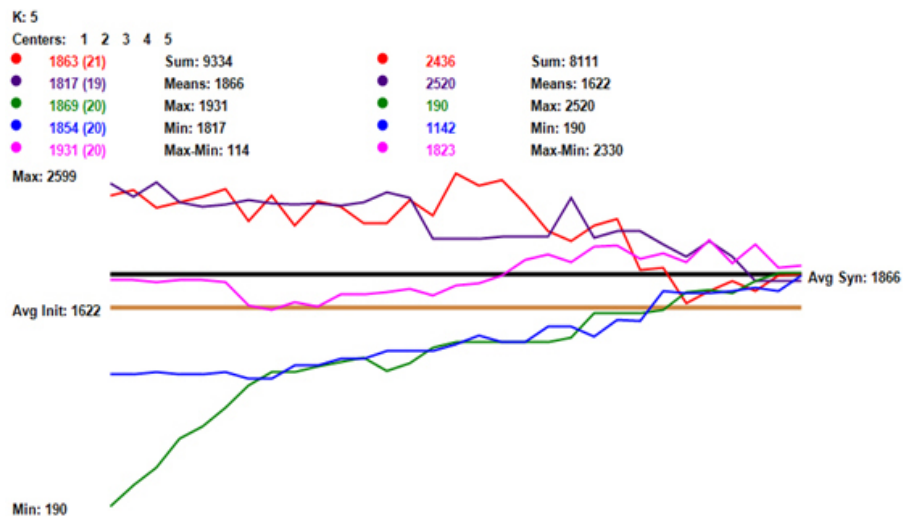


Рис. 10. Результаты синтеза с K -means в качестве начального разбиения

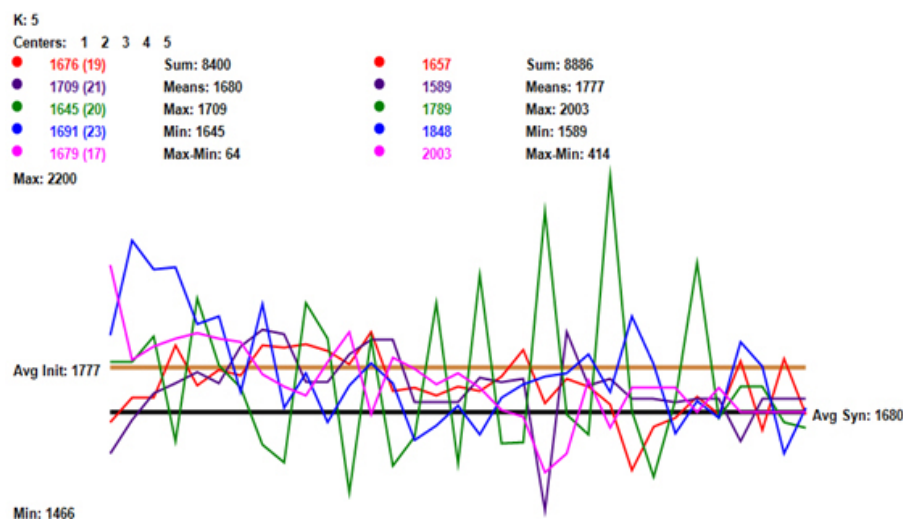


Рис. 11. Результаты синтеза с жадным алгоритмом в качестве начального разбиения

разница между максимальным и минимальным значениями целевой функции оказалась меньше $\varepsilon=100$, а на рис. 11 близко к ε . Это значит, что критерий качества (1) выполняется, но сходимость алгоритма сильно зависит от начального разбиения. По рис. 10, 11 можно наблюдать численную разницу между начальным разбиением (значения справа) и после реализации алгоритма синтеза (значения слева).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены алгоритмы кластеризации графов, а также их применение для задач ДО на графах на примере задачи для k коммивояжеров. Рассмотрены основные алгоритмы решения ЗК и некоторые их модификации. На основе теоретических результатов разработана программная реализация следующих алгоритмов кластеризации: иерархический алгоритм, *K-means* и жадный алгоритм с различными модификациями. Был реализован генетический алгоритм для решения ЗК, а также синтез алгоритмов кластеризации и решения ЗК с нахождением оптимальных центров.

Основной задачей работы было нахождение оптимальных кластеров или подграфов искомого графа с учетом равномерного распределения маршрутов коммивояжеров по кластерам. В результате продемонстрировано отличие между разбиением графа на кластеры (с сохранением искомым центров в этих кластерах) и нахождением оптимальных центров для дальнейшей кластеризации с ними. Для поиска оптимальных по отношению к задаче k коммивояжеров подграфов был разработан синтез алгоритмов кластеризации и решения задач ДО и реализован на примере ЗК для k агентов. Суть метода заключается в механизме «перебрасывания» вершин из более крупных кластеров в более мелкие, до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости, целевая функция которого зависит от длины путей коммивояжеров. Предусмотрены различные варианты этого механизма, включая транзитную передачу вершин через кластеры, находящиеся между крупными и мелкими кластерами, для того чтобы результирующие кластеры не потеряли компактность и не создавали пересечений в дальнейшем поиске оптимального маршрута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо, А. В. Структуры данных и алгоритмы / А. В. Ахо, Д.Е. Хопкрофт, Д.Д. Ульман. — М., СПб, Киев: Вильямс, 2000. — 384 с.
АНО, А., HOPKROFT, J. and ULLMAN, J. (2000) *Data structures and algorithms*. Moscow: Vilyams.
2. Борознов, В. О. Исследование решения задачи коммивояжера // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычислительная техника и информатика. — 2009, № 2. — С. 147–151.
BOROZNOZ, V. O. (2009) Research of the Task Solution. *Bulletin of the Astrakhan State Technical University. A series of management, computer technology and informatics*. 2. p. 147–151.

3. Воронцов, К. В. Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования // [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf>
VORONTSOV, K. V. (2007) Lectures on algorithms for clustering and multidimensional scaling. [Online] Available from: <http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf>
4. Германчук, М. С. Использование дополнительной информации в задачах дискретной оптимизации типа многих коммивояжеров // Таврический вестник информатики и математики. — 2016, № 2(33). — С. 68–82.
GERMANCHUK, M. S. (2016) Information Exploration for Discrete Optimization Problems such as Multiple Traveling Salesman Problems. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 4. p. 68–82.
5. Германчук, М. С., Козлова, М. Г., Пивовар, А. Е. Многоагентный подход к решению задач коммивояжера // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сб. науч. трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. — С. 114–119.
GERMANCHUK, M. S. (2017) Multi-agent approach to the solution of the traveling salesman's problems. *Mathematics, computer science, computer science, modeling, education*. p. 114–119.
6. Германчук, М. С., Козлова, М. Г. Задача реоптимизации сети // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сб. науч. трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. — С. 109–113.
GERMANCHUK, M. S. (2017) Network reoptimization task. *Mathematics, computer science, computer science, modeling, education*. p. 109–113.
7. Гипотеза компактности // MachineLearning.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Гипотеза_компактности
MachineLearning.ru. (2011) *The compactness hypothesis*. [Online] Available from: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Гипотеза_компактности.

8. Гладков, Л. А. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 320 с.
GLADKOV, L. A., KUREYCHIK, V. V. and KUREYCHIK, V. M. (2006) *Genetic algorithms*. Moscow: FIZMATLIT.
9. Гудман, С. Введение в разработку и анализ алгоритмов / С. Гудман, С. Хидетниemi. — М.: Мир, 1981. — 368 с.
GOODMAN, S., HIDETMIEMY, S. (1981) *Introduction to algorithm design and analysis*. Moscow: Mir.
10. Емельянов, В. В. Теория и практика эволюционного моделирования / В. В. Емельянов, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 432 с.
EMELIANOV, V. V., KUREYCHIK, V. V. and KUREYCHIK, V. M. (2003) *Theory and practice of evolutionary modeling*. Moscow: FIZMATLIT.
11. Канцедал, С. А., Костикова, М. В. Динамическое программирование для задачи коммивояжера // Автоматизированные системы управления и приборы автоматки. — 2014. — С. 15–20
KANCEDAL, S. A., KOSTIKOVA, M. V. (2014) Dynamic programming for traveling salesman problem. *Automated control systems and automation devices*. . p. 15–20.
12. Князь, Д. В. Методы кластеризации многомерных статистических данных // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края / Отв. ред. О. А. Краев — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014 // [Электронный ресурс]. — Режим доступа:
conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d02/s13/s13_007.pdf
KNYAZ, D. V. (2014) Methods clustering high-dimensional statistics. [Online] Available from: conf.sfu-kras.ru/sites/mn2014/pdf/d02/s13/s13_007.pdf
13. Куприянова, Н. И. Концептуальная модель кластеризации данных // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2012, № 4 (129). — С. 256–260.
KUPRIYANOVA, N. I. (2012) Conceptual model of data clustering. *Bulletin of the Southern Federal University*. 4(129). p. 256–260.

14. Курейчик, В. М., Родзин С. И. Эволюционные алгоритмы: генетическое программирование // Известия РАН. Теория и Системы Управления. — 2002, № 1. — С. 127–137.

KUREYCHIK, V. M., RODZIN S. I. (2002) Evolutionary algorithms: genetic programming. *Bulletin of The Russian Academy Of Sciences. Theory and management systems*. 1. p. 127–137.

15. Курейчик, В. М. Поисковая адаптация: теория и практика / В. М. Курейчик, Б. К. Лебедев, О. В. Лебедев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 272 с.

KUREYCHIK, V. M., LEBEDEV, B. K. and LEBEDEV, O. V. (2006) *Search adaptation: theory and practice*. Moscow: FIZMATLIT.

16. Рутковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. — М.: Горячая линия — Телеком, 2006. — 452 с.

RUTKOVSKAYA, D., PILINSKIY, M. and RUTKOVSKIY, L. (2006) *Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems*. Moscow: Goryachya liniya — Telekom.

17. Силин, И., Панов, М. Обзор и экспериментальное сравнение алгоритмов кластеризации графов // Сборник трудов 39-й междисциплинарной школы-конференции ИППИ РАН «Информационные технологии и системы 2015». — М.: ИППИ РАН. — С. 1042–1059.

SILIN, I., PANOV M. (2015) Review and experimental comparison of graph clustering algorithms. *Proceedings of the 39th interdisciplinary school-conference of "Information technologies and systems 2015"*. p. 1042–1059.

18. Узарашвили, В. М., Германчук, М. С. Взаимодействие интеллектуальных агентов в решении сетевых задач. Обзор подходов // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сб. науч. трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2017. — С. 172–177.

UZARASHVILI V. M., GERMANCHUK, M. S. (2017) Interaction of intelligent agents in solving network problems. Overview of approaches. *Mathematics, computer science, computer science, modeling, education*. p. 172–177.

19. Штовба, С. Д. Муравьиные алгоритмы // *Exponenta Pro. Математика в приложениях*, 2003. — №4. — С.70-75.
SHTOVBA S. D. (2003) Ant Algorithm. *Exponenta Pro. Mathematics in applications*. 4. p. 70–75.
20. CATHERINE A., JAMES G. M. (2003) Finding the number of clusters in a data set: An information theoretic approach. *Journal of the American Statistical Association*. Vol.98. p. 450–763.
21. FENG Y., WANG Z. (2011) Ant Colony Optimization for Image Segmentation. *Ant Colony Optimization – Methods and Applications*. p. 263–286.
22. FOWLKES C., BELONGIE S. (2001) Efficient Spatiotemporal Grouping Using the Nystrom Method. *Computer Vision and Pattern Recognition. – Proceedings of the IEEE Computer Society Conference*. Vol. 1. p. 231–238.
23. GALUN M., SHARON E., BRANDT A., BASRIY R. (2003) Texture Segmentation by Multiscale Aggregation of Filter Responses and Shape Elements. *Proceedings of IEEE conference on Computer vision*. Vol. 1. p. 716–723.
24. GHAMISI P., COUCEIRO M. S., FERREIRA M. F., KUMAR L. (2012) An Efficient Method for Segmentation of Remote Sensing Images Based on Darwinian Particle Swarm Optimization. *Proc. of the IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium – Remote Sensing for a Dynamic Earth (IGARSS'2012)*. p. 20–28.
25. GHAMISI P., COUCEIRO M. S., MARTINS M. L., BENEDIKTSSON J. A. (2013) Multilevel Image Segmentation Based on Fractional-Order Darwinian Particle Swarm Optimization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. p. 1–13.
26. GOLDBERG D. E. (1989) Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. *Addison Wesley*. 405 p.
27. HARTIGAN J. A., WOND M. A. (1979) Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C28(1)*. p. 100–108.
28. HATAMLOUA A., ABDULLAH S., NEZAMABADI H. (2012) A combined approach for clustering based on K-means and gravitational search algorithms. *Swarm and Evolutionary Computations*. Vol. 6. p. 47–52.
29. KEUCHEL J., SCHNORR C. (2003) Efficient Graph Cuts for Unsupervised Image Segmentation using Probabilistic Sampling and SVD-based Approximation. *Third*

- International Workshop on statistical and computational theories of Vision.* p. 120–128.
30. LAPTIK R., NAVAKAUSKAS D. (2007) Application of Ant Colony Optimization for Image Segmentation. *Elektronika ir Elektrotechnika*. Vol. 8(80). p. 13–18.
 31. LEE Z.-J., SU S.-F., LEE C.-Y., HUNG Y.-S. (2003) A heuristic genetic algorithm for solving resource allocation problems. *Knowledge and Information Systems*. Vol. 4, N4. p. 503–511.
 32. NORHARYATI A., NOOR E. A., SAADIAH Y., NOORHAYATI M. N. A Review of Bio-inspired Algorithms as Image Processing Techniques. http://www.academia.edu/3378857/A_Review_of_Bio-inspired_Algorithms_as_Image_processing_Techniques
 33. POLI R., LANGDON W. B. and MCPHEE N. F. (2008) A Field Guide to Genetic Programming. *Lulu Enterprises, UK*. 252 p.
 34. RAMOS V., MUGE F. (2000) Image Colour Segmentation by Genetic Algorithms. *Cornel University Labrary*. [Online] arXiv Database . p. 1–5. Available from: <https://arxiv.org/ftp/cs/papers/0412/0412087.pdf>. [Accessed: 20th December 2017].
 35. SAATCHI S. and HUNG C. (2007) Swarm Intelligence and Image Segmentation. *Swarm Intelligence, Focus on Ant and Particle Swarm Optimization*. Vol. 1. p. 163–178.
 36. SHARON E., BRANDT A., BASRIY R. (2000) Fast Multiscale Image Segmentation. *Proc. of IEEE conf. on Computer vision and pattern recognition*. Vol. 1. p. 70–77.
 37. SHI J., MALIK J. (2000) Normalized Cuts and Image Segmentation. *Journal IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 22. Issue 8. p. 888–905.
 38. VEKSLER O. (2000) Image Segmentation by Nested Cuts. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. p. 339–344.
 39. YUAN X., ZOURIDAKIS G., SITU N. (2008) Automatic Segmentation of Skin Lesion Images Using Evolution Strategies. *Biomedical Signal Processing and Control*. Vol. 3. Issue 3. p. 220–228.

УДК: 519.7

MSC2010: 97P20

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗ ДАННЫХ: ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

© В. И. Донской

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *vidonskoy@mail.ru*

EXTRACTION OF OPTIMIZATION MODELS FROM DATA: AN APPLICATION OF NEURAL NETWORKS.

Donskoy V. I.

Abstract. This paper continues the research within the paradigm of extracting or building optimization models from data (BOMD) for intelligent control systems. The obtained results are devoted to nonlinear models with real variables, generally speaking, of any functional complexity in the class of functions of arbitrary degree of smoothness and constraints represented by piecewise linear approximation. This is achieved through the use of neural networks as the main used mathematical apparatus.

If the initial training information presents the precedents of both the objective function and the characteristic function of constraints, it is proposed to use an approach based on the training of two neural networks: NN1 — for the synthesis of the objective function and NN2 — for the synthesis of the approximating characteristic function of constraints.

Unfortunately, the solution of the problem presented by such the synthesized 2-neural model may end up finding, generally speaking, a local conditional extremum. In order to find the global extremum of the multiextremal objective function, a heuristic algorithm based on a preliminary classification of the search area by using the decision tree is developed.

The presented in the paper approach to an extraction of conditionally optimization model from the data for the case when there is no information on the points not belonging to the set of admissible solutions is fundamentally novel. For this case, a heuristic algorithm for approximating the region of admissible solutions based on the allocation of regular (non-random) empty segments of the search area is developed. When using this approach in practice in intelligent control systems, it is necessary to additionally apply human-machine procedures for verification and correction of synthesized models.

Keywords: *Building Optimization Models from Data, Neural Networks, Classification Trees, BOMD technology*

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье продолжены исследования и разработка алгоритмов извлечения *оптимизационных моделей* из данных в рамках парадигмы *неклассического информационного моделирования* [2, 10, 12, 15, 29]. В предыдущих работах автором были представлены основные идеи в указанном научном направлении, алгоритмы извлечения линейных и псевдобулевых моделей и подходы, основанные на использовании решающих деревьев [5–8, 22–24]. Поскольку данная статья является непосредственным продолжением работ [8, 22], то имеющийся в них обзор публикаций в области извлечения моделей из данных и современное состояние проблемы здесь повторяются не будут; для более подробного изложения постановки задач и ознакомления с полученными к настоящему времени результатами предлагается обратиться к статьям [8, 17–19, 22].

Цель данной публикации – разработать подходы к извлечению оптимизационных моделей из данных, используя нейронные сети как аппарат, дающий возможность построения нелинейных целевых функций и ограничений.

Приоритет и пионерские работы в указанном направлении принадлежат российскому ученому, профессору Вл. Д. Мазурову [9, 12]. Первые работы, посвященные нейросетевым информационным обучающимся оптимизационным моделям, опубликованы Г. А. Махиной [1, 13, 14].

Будем, как и в предшествующих работах, обозначать $X^n = X_1 \times \dots \times X_i \times \dots \times X_n$ – ограниченную область в \mathbb{R}^n , которую обычно называют пространством переменных-признаков размерности n ; $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ – произвольную точку в пространстве переменных, являющуюся описанием допустимого объекта.

Каждая координата $x_i, i = 1, \dots, n$, описания объекта \tilde{x} принадлежит некоторому зафиксированному *ограниченному множеству допустимых значений* $X_i, X_i \subset \mathbb{R}, m_i \leq x_i \leq M_i$.

$\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$ – стандартная достоверная эмпирическая выборка для задачи обучения – извлечения модели на основе частичной информации о некотором существующем, но неизвестном скалярном критерии $F : X^n \rightarrow \mathbb{R}$ и неизвестных ограничениях, которые формально могут быть представлены в виде $\Omega(\tilde{x}) = 1$. В этой задаче, обозначаемой далее $Z_{\Omega, F}$, полагается, что множество X^n разбито на два класса: класс \mathfrak{L}_1 , состоящий из точек, заведомо удовлетворяющих некоторой системе ограничений задачи наилучшего выбора, и класс \mathfrak{L}_0 , содержащий точки, заведомо не удовлетворяющие этой системе ограничений. Будем обозначать $\Omega : X^n \rightarrow \{0; 1\}$ – характеристическую функцию ограничений, которая частично задана обучающей выборкой; $\Omega(\tilde{x}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{L}_1; \Omega(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{L}_0$. Будем полагать,

что в стандартной обучающей выборке \mathfrak{T}_{Opt} содержится достоверная информация $\gamma_j = \Omega(\tilde{a}_j)$, $\gamma_j \in \{0; 1\}$, $y_j = F(\tilde{a}_j)$, $\tilde{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$.

В процессе обучения следует построить правило (алгоритм), позволяющий выбрать такое решение \hat{x}^* , которое удовлетворяло бы ограничениям ($\Omega(\hat{x}^*) = 1$), и при этом значение $F(\hat{x}^*)$ было бы как можно большим (или меньшим — по смыслу задачи).

В рассматриваемых задачах критерий F и ограничения (характеристическая функция Ω) не заданы точно — ни аналитически, ни полностью таблично, ни при помощи какой-либо формальной системы. Они “отражены” в наборе данных \mathfrak{T}_{Opt} и являются частично заданными.

Постановка задачи, решаемой в данной статье, состоит в следующем. Требуется, используя частичную начальную информацию \mathfrak{T}_{Opt} , выбрать решение \hat{x}^* как более близкое к оптимальному решению \tilde{x}^* , определяемому неизвестными, но существующими истинными объектами F и Ω , аппроксимируемыми нейронными сетями¹. Схематически поставленную задачу можно представить следующим образом:

$$\mathfrak{T}_{Opt} \xrightarrow{\mathcal{A}} \hat{x}^* : \|\hat{x}^* - \tilde{x}^*\| \rightarrow \min; \quad \tilde{x}^* = \operatorname{argmin} F(\tilde{x}) \mid \Omega(\tilde{x}) = 1,$$

где $\|\cdot\|$ — норма, \mathcal{A} — искомый алгоритм решения задачи.

Если скалярный критерий и характеристическая функция ограничений аппроксимируются независимо друг от друга отдельными алгоритмами, вычисляющими как можно более точные в каком-либо смысле приближения \hat{F} и $\hat{\Omega}$, то *восстановленная по обучающей выборке задача (извлеченная математическая модель) нахождения наилучшего решения имеет следующий вид:*

$$\max(\min) \hat{F}(\tilde{x}) : \hat{\Omega}(\tilde{x}) = 1 \wedge \tilde{x} \in X^n.$$

Полученная в результате машинного обучения пара функций $\langle \hat{F}, \hat{\Omega} \rangle$ называется *эмпирической информационной моделью*.

1. ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сначала рассмотрим случай, когда для аппроксимации целевой функции используется трехслойная нейронная сеть прямого распространения, в которой первым слоем является слой входных переменных, вторым — скрытый слой нейронов, а третьим — слой, состоящий из одного сумматора (рис. 1). Функция активации φ может,

¹В некоторых случаях для аппроксимации области Ω будут использоваться классифицирующие деревья

например, иметь вид

$$\varphi(z) = (1 + \exp(-z))^{-1}; \quad \varphi'(z) = \varphi(z)(1 - \varphi(z)). \quad (1)$$

Нейронная сеть является суперпозицией функций, структура которой в точности определяет структуру сети. Суперпозиция, эквивалентная трехслойной сети, представленной на рис. 1, имеет вид

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m v_j \varphi \left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i \right).$$

Будем полагать, что суперпозиция \hat{F} получена в результате обучения нейронной

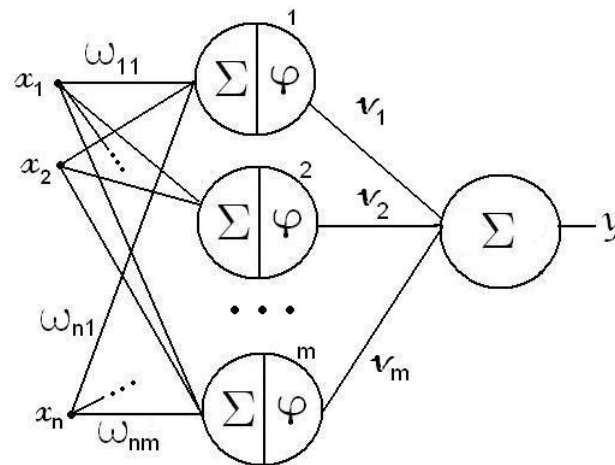


Рис. 1. Трехслойная нейронная сеть с одним скрытым слоем

сети, представленной на рис. 1. Алгоритмам обучения нейронных сетей посвящено множество публикаций [3, 26], поэтому повторять их здесь не имеет смысла. Будем считать, что нейронная сеть уже обучена по корректной начальной прецедентной информации, т. е. получена аппроксимация \hat{F} заданной прецедентами функции F .

Заметим, что рассмотрение трехслойной сети (рис. 1) целесообразно не только с точки зрения ее простоты. Такие сети обладают весьма широкими возможностями, что следует вкратце пояснить.

Введем необходимые обозначения.

$\Sigma(\varphi)$ — параметрическое семейство функций от n переменных $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, реализуемых трехслойной сетью, представленной на рис. 1 с сигмоидной функцией активации $\varphi(z)$, где z — вещественная переменная, значения которой определяются взвешенной суммой входов нейрона. Аппроксимационные возможности именно этого семейства $\Sigma(\varphi)$ будут рассмотрены ниже.

Введем следующие обозначения:

$U \subset \mathbb{R}^n$;

S — семейство функций $f : U \rightarrow \mathbb{R}$;

ρ — метрика на S ;

$C(U)$ — семейство функций, непрерывных на U .

Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор целых неотрицательных чисел (мультииндекс).

Обозначим

$$D^{\tilde{\alpha}} \equiv \partial^{\tilde{\alpha}} / (\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n})$$

обобщенную производную порядка $\mathbf{a} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$; $D^0 f \equiv f$.

$C^m(U) \subset C(U)$ — семейство функций, имеющих непрерывные частные производные степени от нуля до m включительно; $C^0(U) = C(U)$.

$C^\infty(U) \subset C(U)$ — семейство функций, имеющих непрерывные частные производные любой степени; $C^m(U) \subset C^\infty(U)$.

$C_{\downarrow}^\infty(\mathbb{R}^n)$ — семейство всех таких функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для мультииндексов \mathbf{a} и \mathbf{b} имеет место $\tilde{x}^{\mathbf{b}} D^{\mathbf{a}} f(\tilde{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, где $\tilde{x}^{\mathbf{b}} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, $\mathbf{x} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. Имеет место включение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{\downarrow}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$S_1^m(U, \lambda)$ — пространство Соболева $S_p^m(U, \lambda)$, $p = 1$, — семейство всех функций в $C^m(U)$, интегрируемых с 1-й степенью их модуля вместе со своими обобщенными производными до порядка m включительно, $\int_U |D^{\mathbf{a}} f| d\lambda < \infty$, $0 \leq \mathbf{a} \leq m$ (интеграл понимается в смысле Лебега). Норма в пространстве Соболева определяется как

$$\|f\|_{S_1^m(U)} = \sum_{\mathbf{a} \leq m} \int_U |D^{\mathbf{a}} f| d\lambda.$$

Определение 1. Пусть $m, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq l$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset C^l(U)$. Пусть для любой $f \in S$, любого компакта $K \subset U$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in \Sigma(\varphi)$ такая, что

$$\max_{\mathbf{a} \leq m} \sup_{\tilde{x} \in K} |D^{\mathbf{a}} f(\tilde{x}) - D^{\mathbf{a}} g(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Тогда говорят, что семейство $\Sigma(\varphi)$ является m -равномерно плотным на компакте в S .

Теорема 1. [27] Пусть функция $\varphi \neq 0$ принадлежит семейству $S_1^m(\mathbb{R}, \lambda)$ при некотором целом $m \geq 0$. Тогда $\Sigma(\varphi)$ является m -равномерно плотным на компакте в $C_{\downarrow}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2. Пусть l — неотрицательное целое. Функция φ называется l -конечной, если $\varphi \in C^l(\mathbb{R})$ и $0 < \int |D^l \varphi| d\lambda < \infty$

Теорема 2. [27] Если функция φ является l -конечной, то для всех $m \in \{0, 1, \dots, l\}$ семейство $\Sigma(\varphi)$ m -равномерно плотно на компакте в $C_{\downarrow}^{\infty}(R^n)$.

Условия, накладываемые на функцию активации φ в теоремах 1, 2 обеспечивают m -равномерную плотность аппроксимации нейронными функциями семейства $\Sigma(\varphi)$ неизвестных функций любой степени гладкости на компакте в $C_{\downarrow}^{\infty}(R^n)$.

Напомним, что аргумент z функции $\varphi(z)$ принимает значения, равные суммам произведений значений входных переменных нейрона на соответствующие веса. Модуль этих сумм ограничен некоторой вещественной положительной величиной $M < \infty$. Для сигмоидной логистической функции $\varphi(z) = (1 + \exp(-z))^{-1}$ с учетом такого ограничения выполняется неравенство $(1 + \exp(M))^{-1} \leq \varphi(z) \leq (1 + \exp(-M))^{-1}$. Поэтому формальный выбор функции активации в виде

$$\varphi^*(z) = \begin{cases} \varphi(z) = (1 + \exp(-z))^{-1}, & \text{если } |z| \leq M + \delta; \\ 0, & \text{если } |z| > M + \delta, \end{cases} \quad (2)$$

где малое $\delta > 0$, обеспечит выполнение условий теорем 1, 2. Поскольку $|z| \leq M$, в практических случаях допустимо применять функцию активации φ , а не φ^* , в силу их совпадения вместе с их производными на промежутке $-M \leq z \leq M$.

Мы привели одно из возможных обоснований применимости трехслойной нейронной сети с одним скрытым слоем для решения задач аппроксимации вещественных функций многих переменных.

2. ПРИНЦИПЫ ИЗВЛЕЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОПТИМИЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ИЗ ДАННЫХ. СЛУЧАЙ, КОГДА ОГРАНИЧЕНИЯ ЧАСТИЧНО ЗАДАНЫ ПРЕЦЕДЕНТАМИ В ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКЕ

Будем полагать, что по прецедентам, описывающим неизвестную целевую функцию F , строится аппроксимирующая ее нейронная сеть $NN1$, реализующая функцию $\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. По прецедентам, описывающим ограничения, обучается классифицирующая нейронная сеть $NN2$, аппроксимирующая характеристическую функцию ограничений $\Omega(\tilde{x})$: $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) &= \sum_{j=1}^m v_j \varphi\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i\right), \quad \varphi(z) = (1 + \exp(-z))^{-1}; \\ \partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_i &= \sum_{j=1}^m v_j \omega_{ij} \varphi\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i\right) \left(1 - \varphi\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij} x_i\right)\right), \quad i = \overline{1, n}; \\ \text{grad } \hat{F}_{NN1} &= \left(\partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_1, \partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_2, \dots, \partial \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \partial x_n\right); \\ \rho(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - u_i)^2}. \end{aligned}$$

Нахождение экстремума эмпирической информационной модели $\langle \hat{F}_{NN1}, \hat{\Omega}_{NN2} \rangle$ можно осуществить градиентным алгоритмом 1, представленным ниже. В общем случае, учитывая, что аппроксимация \hat{F}_{NN1} может оказаться многоэкстремальной, этот алгоритм будет отыскивать локальный экстремум.

Алгоритм 1. Поиск условного (локального) минимума по \hat{F}_{NN1} и $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$.

Вход: обучающая выборка $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$ и нейронные аппроксимации \hat{F}_{NN1} и $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$.

Выход: $\tilde{x}^* : \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}^*) \approx \min \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}) = 1$ — точка экстремума эмпирической

информационной модели и значение y^* функции \hat{F}_{NN1} в этой точке.

- 1: Взять из обучающей выборки точку $\tilde{x}_0 = a_{j^*} : y_{j^*} = \min_j y_j$ в качестве начального приближения и вычислить $\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_0)$.
 - 2: Выбрать начальное значение η_0 .
 - 3: Выбрать скорость уменьшения шага $\delta : 0,8 < \delta < 1$.
 - 4: **for** $t := 1, 2, 3, \dots$ **do**
 - 5: $\tilde{x}_t := \tilde{x}_{t-1} - \eta_{t-1} \text{grad } \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})$;
 - 6: $\eta_t := \eta_{t-1} \cdot \delta$;
 - 7: **if** $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}_t) = 0$ **then**
 - 8: **{ if** $\rho(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}) < \varepsilon$ **then goto 12 else** $\eta_t := \eta_{t-1} \cdot \delta$ **}**
 - 9: **else**
 - 10: **if** $\|\hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_t) - \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})\| < \varepsilon$ **then goto 13**;
 - 11: **end for**;
 - 12: $\tilde{x}^* := \tilde{x}_{t-1}$; $y^* := \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_{t-1})$; **stop**.
 - 13: $\tilde{x}^* := \tilde{x}_t$; $y^* := \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}_t)$; **stop**.
-

3. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ПОИСКУ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА МОДЕЛИ $\langle \hat{F}_{NN1}, \hat{\Omega}_{NN2} \rangle$

Поиск глобального экстремума для рассматриваемой задачи основан на повторяющемся применении представленного выше алгоритма 1 нахождения локального экстремума, начиная с различных исходных точек области допустимых решений.

Первый, традиционный подход, основанный на применении генетических алгоритмов, описание которых можно найти в обширной научно-технической литературе, например, [4, 16], в рамках настоящей статьи адаптироваться к решаемой задаче и описываться не будет.

Второй, новый излагаемый далее подход, основан на предварительной кластеризации точек обучающей выборки $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$ по значениями целевой функции y_j , $j = \overline{1, l}$. Для этой цели используется алгоритм построения решающего дерева, определяющего разбиение области допустимых значений переменных-признаков [5] на гиперпараллелепипеда [21, 30]. В области, соответствующей каждому такому гиперпараллелепипеду, значения целевой функции y_j принадлежат зафиксированному полуинтервалу. Число таких полуинтервалов и является числом классов в предварительной задаче кластеризации. После построения классифицирующего дерева каждый класс получает логическое описание в терминах пороговых предикатов вида $[x_i \leq b]$, где b — вещественная константа, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Необходимо из содержательных соображений, определяемых проблемной областью решаемой задачи, определить две константы m и M такие, что $m < y_j < M$ для всех $j = \overline{1, l}$. Затем отрезок $[m, M]$ разбить на k равных сегментов $[m, m + \Delta), [m + \Delta, m + 2\Delta) \dots, [m + k\Delta, M]$, где $\Delta = (M - m)/k$. Если точка \tilde{a}_j обучающей выборки попадает в сегмент с номером q , $q = \overline{1, k}$, то эта точка считается относящейся к классу \mathcal{H}_q . Таким образом, в каждом из полученных классов окажутся точки, значения целевой функции в которых отличаются не более чем на Δ .

Обозначим \bar{y}_q — среднее значение (середину q -го промежутка) $\bar{y}_q = m + q\Delta - \Delta/2$. Каждая концевая вершина дерева (лист) содержит значение \bar{y}_q , соответствующее номеру класса q , и специальную пометку-флажок, используемый для запоминания просмотренных листьев при поиске глобального экстремума.

Алгоритм 2. Эвристический поиск условного глобального минимума эмпирической информационной модели $\langle \hat{F}_{NN1}, \hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}) \rangle$.

Вход: обучающая выборка $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$; нейронные аппроксимации \hat{F}_{NN1} и $\hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x})$; алгоритм 1 поиска локального минимума в качестве используемой внутренней процедуры; дерево кластеризации точек по значениям целевой функции в качестве второй используемой внутренней процедуры; наибольшее допустимое число шагов локального поиска S .

Выход: $\tilde{x}^* : \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}^*) \approx \min \hat{F}_{NN1}(\tilde{x}) / \hat{\Omega}_{NN2}(\tilde{x}) = 1$ — предполагаемая точка глобального экстремума эмпирической информационной модели и значение y^* функции \hat{F}_{NN1} в этой точке.

- 1: Очистить пометки просмотра всех листьев дерева (все флажки получают нулевые значения).
- 2: Взять из обучающей выборки точку $\tilde{x}_0 = a_{j^*} : y_{j^*} = \min_j y_j$ в качестве начального приближения и выполнить алгоритм 1.

-
- 3: Запомнить найденную точку в переменной x^* и значение локального минимума в ней в переменной y^* .
 - 4: Пометить лист дерева, в который попала точка x^* (установить флажок в единицу).
 - 5: Выбрать непомеченный лист дерева с наименьшим значением \bar{y}_q и попавшую в него точку обучающей выборки с наименьшим значением целевой функции.
 - 6: Применить к выбранной точке алгоритм 1, получая экстремум y^\diamond в точке x^\diamond .
 - 7: Пометить выбранный лист как просмотренный (установить флажок в единицу).
 - 8: **if** $y^\diamond < y^*$ **then** $\{y^* := y^\diamond; x^* := x^\diamond\}$;
 - 9: Если еще есть непомеченные листья дерева и число исследований листьев (применений алгоритма1) не превысило заданного числа S , то перейти на 5;
-

Обоснование применения классифицирующего алгоритма при поиске глобально-го экстремума в составе алгоритма 2 состоит в следующем.

1. Число точек l в обучающей выборке многократно превышает число листьев дерева классификации, и вместо перебора всех l точек для инициализации локального поиска осуществляется повторение локального поиска не более $\mu \ll l$ раз — каждый раз с начальной точкой, взятой из сегмента, соответствующего выбранному листу дерева.

2. Листьям дерева соответствуют различные, в том числе удаленные друг от друга сегменты² области глобального поиска, в то время как любой упорядоченный перебор точек обучающей выборки для инициализации локального поиска может привести к повторению вычислений в достаточно узкой окрестности одного и того же локального минимума.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ, РЕАЛИЗОВАННОЙ ПОЛНОСВЯЗНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

При использовании многослойных нейронных сетей изложенный метод принципиально не изменяется: потребуется только умение вычислять градиент соответствующей аппроксимирующей нейронной функции. В этом параграфе показывается, как находить такой градиент.

²Удаленность двух областей W_1 и W_2 оценивается величиной

$$\inf_{\{\tilde{x} \in W_1, \tilde{y} \in W_2\}} \rho(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

где ρ — евклидово расстояние между точками в \mathbb{R}^n .

Для удобства вычислений представим многослойную полносвязную нейронную сеть, введя дополнительный “скрытый” слой с номером ноль (рис. 2). Функции активации этого нулевого слоя имеют вид $\varphi_0(z) = z$. Функции активации во всех остальных слоях будем полагать логистическими:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}; \quad \varphi'(z) = \varphi(z)(1 - \varphi(z)).$$

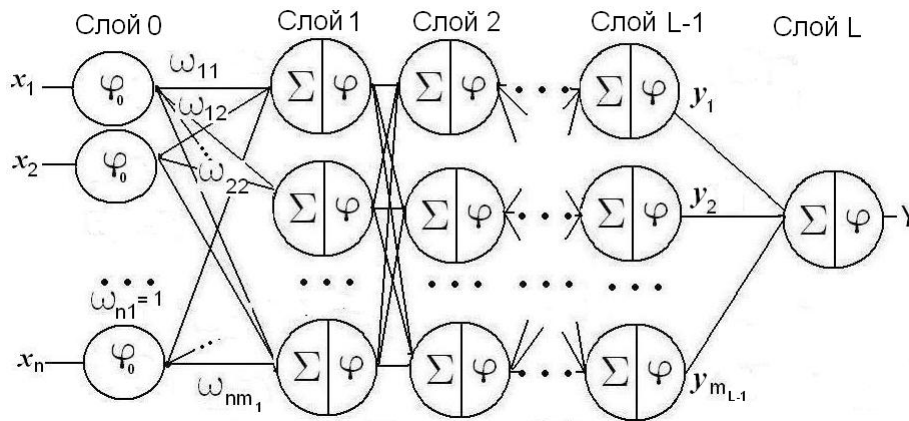


Рис. 2. Многослойная полносвязная нейронная сеть

Будем использовать следующие обозначения:

v_j — взвешенная сумма всех входов нейрона j , называемая его индуцированным локальным полем [26];

l — номер слоя, $0 \leq l \leq L$; слой с номером 0 — особый слой входов; выходной слой имеет номер L ;

m_1, m_2, \dots, m_{L-1} — число нейронов в скрытых слоях $1, 2, \dots, L-1$;

v_j — суммарный вход нейрона j ;

$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ — вход нейронной сети;

$y_j = \varphi(v_j)$ — выход нейрона j ; $Y = Y(\tilde{x})$ — выход сети.

Для нахождения градиента функции, реализованной обученной нейронной сетью, представленной на рис.2, будем использовать рекуррентную схему, которая лежит в основе алгоритма обучения нейронной сети методом обратного распространения ошибки [26].

Локальный градиент выходного нейрона определяется выражением

$$\delta_L^{(L)} = \frac{\partial Y}{\partial v_L} = \varphi'(v_L) = \varphi(v_L)(1 - \varphi(v_L)) = Y(1 - Y), \quad (3)$$

где верхний индекс в скобках обозначает номер слоя сети.

Локальный градиент нейрона j скрытого слоя с номером l :

$$\delta_j^{(l)} = \varphi'(v_j) \sum_k \delta_k^{(l+1)} \omega_{jk} = y_j^{(l)} (1 - y_j^{(l)}) \sum_k \delta_k^{(l+1)} \omega_{jk}, \quad (4)$$

где сумма берется по всем номерам нейронов слоя, непосредственно следующего за слоем, в котором содержится нейрон j .

$$\delta_j^{(1)} = \varphi' \left(\sum_{i=1}^n x_i \omega_{ij} \right) \sum_k \delta_k^{(2)} \omega_{jk} = y_j^{(1)} (1 - y_j^{(1)}) \sum_k \delta_k^{(2)} \omega_{jk}. \quad (5)$$

$$\delta_i^{(0)} = \varphi_0'(x_i) \sum_k \delta_k^{(1)} \omega_{ik} = \sum_k \delta_k^{(1)} \omega_{ik}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = \delta_i^{(0)}; \quad \text{grad } Y = (\delta_1^{(0)}, \dots, \delta_n^{(0)}). \quad (7)$$

Как и при вычислениях по методу обратного распространения ошибки, для заданного входа \tilde{x} сначала в прямом направлении от входа к выходу сети вычисляются локальные поля и выходы всех нейронов. Затем, в обратном направлении, начиная с уравнения 3, рекуррентно выполняются вычисления локальных градиентов по формуле 4 и завершаются вычислением градиента по формулам 6 и 7.

5. СЛУЧАЙ, КОГДА ОТСУТСТВУЕТ ИНФОРМАЦИЯ О ТОЧКАХ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ ДОПУСТИМЫМИ (НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОБЛАСТИ Ω)

Сбор начальной обучающей информации при решении задач в сфере управления большими системами является не менее трудной проблемой, чем разработка необходимого программного обеспечения, особенно в связи с тем, что в последние годы многие системы и среды программирования оснащены мощными библиотеками, реализующими всевозможные методы машинного обучения и принятия решений (например, SciKit-Learn, TensorFlow, Keras для Python 3).

Особенно сложно “добыть” данные о точках или состояниях оптимизируемых или управляемых объектов, которые не являются допустимыми — не удовлетворяют системным ограничениям. В нашем случае — это часть стандартной обучающей информации $\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^l$, состоящая из точек \tilde{a}_j таких, для которых $\gamma_j = \Omega(\tilde{a}_j) = 0$. Если данные об оптимизируемом объекте накапливаются в процессе его функционирования, то, как правило, наблюдаются некоторые допустимые состояния его работы; прочие состояния понимаются как “срыв” функционирования объекта и не являющегося допустимым. Возникновение такого состояния можно считать редким (*rare*) событием [20].

Изложенные соображения приводят к целесообразности рассмотрения случая, когда обучающая информация имеет вид $\mathfrak{T}_{Opt}^- = \{(\tilde{a}_j, y_j)\}_{j=1}^l$, и в ней содержатся только допустимые точки, для которых $\gamma_j = \Omega(\tilde{a}_j) = 1$.

Идея подхода к построению ограничений для такого случая связана с выделением в области поиска глобального экстремума так называемых *пустых сегментов*, в которые не попали точки выборки \mathfrak{T}_{Opt}^- , принадлежащие области допустимых решений. На рис. 3 для пояснения излагаемого подхода условно показана некоторая область поиска, в которой звездочками отмечены допустимые точки, а пустые сегменты обозначены как E_1, \dots, E_6 . Напомним, что в данной работе рассматриваются

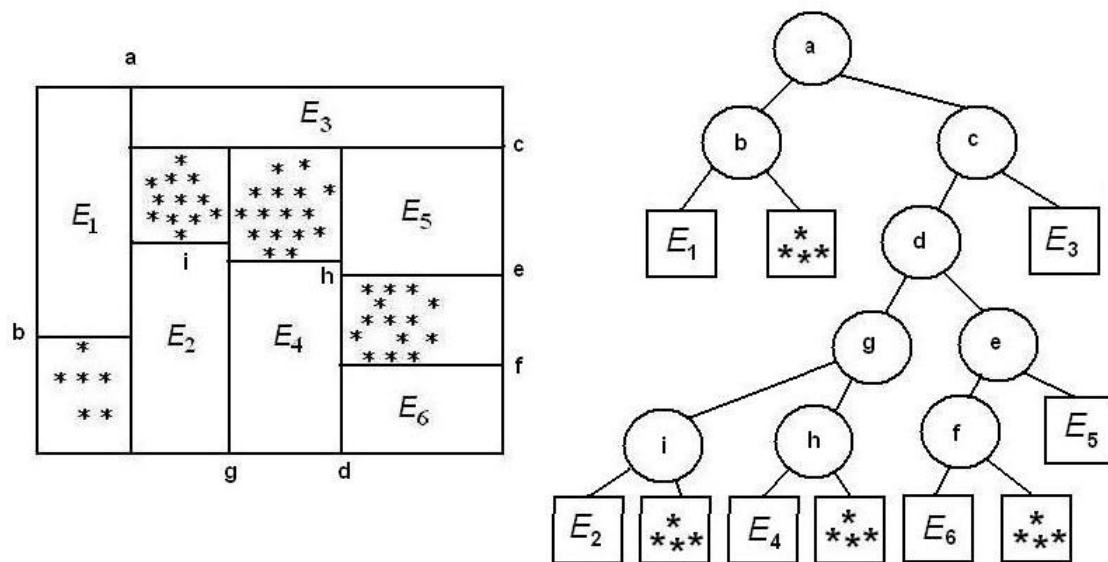


Рис. 3. Разбиение области поиска с найденными пустыми сегментами E_1, \dots, E_6 и классифицирующее дерево, реализующее это разбиение

регулярные процессы и объекты. В этом случае ни о каких вероятностных распределениях речь не идет, но все же возможно *оценивание выделенных пустых сегментов на основе колмогоровского подхода к оцениванию закономерности как неслучайности*.

А. Н. Колмогоров указывал на необходимость различать собственно *случайность как отсутствие регулярности* и стохастическую случайность как объект теории вероятностей [11, с. 42]. При эмпирическом извлечении закономерностей (регулярностей) колмогоровский подход позволяет получить оценку неслучайности наличия пустого сегмента.

Отсутствие закономерности (регулярности) в расположении точек в области возможных значений переменных — гиперпараллелепипеда объема

$$\mathfrak{V}_0 = \prod_{i=1}^n [m_i, M_i], \quad m_i \leq x_i \leq M_i,$$

имеет место, когда точки распределены равномерно, случайно и независимо. Если же, например, проекция точек a_j , $j = \overline{1, l}$, обучающей выборки на некоторую координату-переменную x_i представляется гистограммой, приведенной на рис. 4, то очевидна закономерность в данных, имеющая описание в виде предиката $[x_i \geq b]$. Ес-

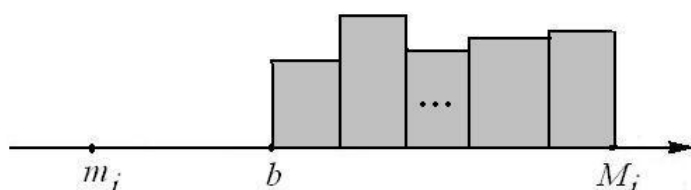


Рис. 4. Гистограмма проекции выборки на ось x_i с выраженной закономерностью $b \leq x_i \leq d$

ли бы рассматривалась одномерная равномерно распределенная на отрезке $[m_i, M_i]$ случайная величина с независимыми реализациями — попаданиями в этот отрезок, то вероятность попасть в $[m_i, b]$ геометрически оценивалась бы как $p = \frac{b-m_i}{M_i-m_i}$, а вероятность не попасть l раз при l независимых испытаниях — как $(1-p)^l$. Эта величина есть вероятность события, состоящего в том, что в результате l испытаний указанный промежуток окажется *случайно пуст*. А с вероятностью $1 - (1-p)^l$ этот промежуток будет пуст неслучайно, т. е. в рассматриваемом случае можно говорить, что вероятность наличия закономерности $[x_i \geq b]$ в результате l выборочных испытаний есть $1 - (1-p)^l$.

Для аппроксимации области допустимых решений Ω будем использовать классифицирующее дерево с пороговыми предикатами вида $[x_i \geq b]$ в вершинах [28, 30], построенное по прецедентам, представляющим собой только точки-представители этой области Ω . Классифицирующее дерево, выделяющего пустые сегменты, с целью иллюстрации идеи приведено на рис. 3.

Основным элементом синтеза такого дерева является выбор пороговых значений b при каждом ветвлении (разбиении текущей области G_ν) и построение очередной внутренней или терминальной вершины дерева. Следующий алгоритм 3 является основной процедурой, обеспечивающей процесс синтеза дерева аппроксимации области Ω .

Алгоритм 3. Выяснение возможности выделения пустого сегмента и выбор предиката вида $[x_i \geq b]$ ($[x_i \leq b]$) для разбиения текущей области G_ν и построения очередной вершины ν дерева классификации.

Вход: исследуемая область-гиперпараллелепипед G_ν ;

Δ_1 — минимальная допустимая ширина проекции пустой области.

Выход: значение флага указателя $Flag$; если $Flag = 1$, то возможно

выделение пустого сегмента, и выдается предикат для условной вершины;

если $Flag = 0$ — область G_ν разбиению не подлежит, и выдается

указание о построении концевой вершины с пометкой допустимого сегмента.

1. Выделить все точки выборки, попавшие в область G_ν .
 2. $Flag := 0$;
 3. **Цикл** по всем координатам точек, попавших в область G_ν ;
 4. **if** $Flag := 1$ **then goto** 14;
 5. Найти среднее расстояние Δ_2 между проекциями точек;
 6. Найти минимальное m и максимальное M значения текущей координаты;
 7. **if** $r_1 = m - m_i > \Delta_1 \vee r_2 = M_i - M > \Delta_1$ **then**
 8. { $Flag := 1$;
 9. **if** $r_1 \geq r_2$ **then**
 10. { $b := m - \Delta_2$; добавить вершину с предикатом $[x_i \leq b]$ }
 11. **else**
 12. { $b := M + \Delta_2$; добавить вершину с предикатом $[x_i \geq b]$ };
 - }
 13. **конец цикла**;
 14. **if** $Flag := 0$ **then** добавить лист с пометкой области допустимых решений.
-

Каждой терминальной вершине τ , имеющей пометку E_τ “пустой” области G_τ , соответствует вероятность $P(E_\tau)$, оценивающая неслучайность ее обнаружения, или, иначе говоря, вероятность того, что обнаруженная пустая область G_τ является закономерностью:

$$P(E_\tau) = 1 - (1 - p_\tau)^l, \quad \text{где } p_\tau = \frac{\mathfrak{V}(G_\tau)}{\mathfrak{V}_0},$$

а $\mathfrak{V}(G_\tau)$ — объем пустой области G_τ . Этот объем легко вычислить, осуществляя обратный проход по ветви дерева от концевой вершины τ к корню дерева, “прочитывая” все пороговые предикаты в просматриваемых вершинах проходимой ветви и формируя описание гиперпараллелепипеда G_τ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многолетние исследования в рамках парадигмы извлечения оптимизационных моделей из данных для интеллектуализированных систем управления (*Building Optimization Models from Data for the Intelligent Control Systems*) [23, 25] позволили получить результаты в виде готовых алгоритмов и программ, обеспечивающих синтез таких моделей и их обоснование [1, 5–8, 13, 14, 17, 18, 22, 24]. В наибольшей степени продвижение в данном научном направлении было связано с построением линейных моделей с вещественными переменными и псевдобулевых моделей.

Полученные в данной статье результаты посвящены нелинейным моделям с вещественными переменными, вообще говоря, любой функциональной сложности в классе функций произвольной степени гладкости и ограничений, представленных кусочно-линейной аппроксимацией. Это достигается за счет применения нейронных сетей как основного используемого математического аппарата.

Если в начальной обучающей информации представлены прецедентные значения и целевой функции, и характеристической функции ограничений, то предлагается использовать подход, основанный на обучении двух нейронных сетей: $NN1$ — для синтеза целевой функции и $NN2$ — для синтеза аппроксимирующей характеристической функции ограничений.

К сожалению, решение задачи, представленной такой синтезированной 2-нейронной моделью, может закончиться нахождением, вообще говоря, локального условного экстремума. Для нахождения глобального экстремума многоэкстремальной целевой функции в статье разработан эвристический алгоритм, основанный на предварительной классификации при помощи решающего дерева области, в которой отыскивается решение.

Принципиально новым является изложенный в статье подход к и извлечению условно оптимизационной модели из данных для случая, когда в обучающей информации нет данных о точках, заведомо не принадлежащих области допустимых решений. Для этого случая разработан эвристический алгоритм аппроксимации области допустимых решений на основе выделения закономерно (неслучайно) пустых сегментов области поиска. При использовании такого подхода на практике в интеллектуализированных системах управления следует дополнительно применять человеко-машинные процедуры для верификации и коррекции синтезированных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блыщик, В. Ф. Интеллектуализированная программная система Intman поддержки принятия решений в задачах планирования и управления /

- В. Ф. Блыщик, В. И. Донской, Г. А. Махина // Искусственный интеллект. — 2002. — № 2). — С. 406–415.
- BLYSCHIK, V. F., DONSKOY, V. I., & MAKHINA, G. A. (2002) Intellectualized Software System INTMAN for Support Decision Making in Problems of Planning and Management. *Artificial Intelligence*. (2). p. 406–415.
2. Воронцов, К. В. Аддитивная регуляризация тематических моделей коллекций текстовых документов / К. В. Воронцов // ДАН. — 2014. — Том 456, № 3. — С. 268–271.
- VORONTSOV, K. V. (2014) Additive Regularization of Topic Models for Collections of Text Documents. *Doklady Akademii Nauk*. 456 (3). p. 268–271.
3. Галушкин, А. И. Нейронные сети: основы теории / А. И. Галушкин. — М.: Горячая линия – Телеком, 2010. — 496 с.
- GALUSHKIN, A. I. (2010) *Neural networks: fundamentals of theory*. Moscow: Gorjachajz linija - Telecom.
4. Гладков, Л. А., Курейчик, В. В., Курейчик, В. М. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 320 с.
- GLADKOV, L. A., KUREJCHIK V. V., & KUREJCHIK V. M. (2006) *Genetic Algorithms*. Moscow: PHYSMATHLIT.
5. Донской, В. И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации / В. И. Донской. — Симферополь: Таврия, 1992. — 166 с.
- DONSKOY, V. I. (1992) *Discrete Models of Decision Making under Incomplete Information*. Simferopol: Tavrija.
6. Донской, В. И. Логическое управление плохо формализованными системами / В. И. Донской // Динамические системы. — К.:Вища школа, 1985. — Вып.1. — С. 90–96.
- DONSKOY, V. I. (1985) Logical Control of Poorly Formalized Systems. *Dynamic Systems*. (1). p. 90–96.
7. Донской, В. И. Синтез согласованных оптимизационных моделей по прецедентной информации: подход на основе колмогоровской сложности / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — № 2. — С. 13–25.
- DONSKOY, V. I. (2012) Synthesis of Coordinated Optimization Models According to Precedent Information: an Approach based on Kolmogorov Complexity. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (2). p. 13–25.

8. Донской, В. И.. Извлечение оптимизационных моделей из данных: подход на основе решающих деревьев и лесов / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4. — С. 59–86.
DONSKOY, V. I. (2017) Extraction of optimization models from data: a decision tree and forest-based approach. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (4). p. 59–86.
9. Ерёмин, И. И., Мазуров, В. Д. Нестационарные процессы математического программирования / И. И. Ерёмин, Вл. Д. Мазуров. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
ERIOMIN, I. I. & MAZUROV, V. D. (1979) *Nonstationary Processes of Mathematical Programming*. Moscow: Nauka.
10. Журавлёв, Ю. И. Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации / Ю. И. Журавлёв // Доклады АН СССР. Математика. — 1976. — Том 231. — №3. — С. 532–535.
ZHURAVLEV, Yu. I. (1976) Extreme Algorithms in Mathematical Models for Pattern Recognition and Classification. *Reports of the USSR Academy of Sciences. Mathematics*. 231 (3). p. 532–535.
11. Колмогоров, А. Н. Алгоритм, информация, сложность / А. Н. Колмогоров. — М.: Знание, 1991. — 44 с.
KOLMOGOROV, A. N. (1991) *Algorithm, information, complexity*. Moscow: Znanie.
12. Мазуров, Вл. Д. Применение методов теории распознавания образов в оптимальном планировании и управлении / Труды I Всесоюзной конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. — М: ЦЭМИ, 1971. — 49 с.
MAZUROV, V. D. (1971) Application of Methods of Theory of Pattern Recognition in the Optimal Planning and Management. *Proceedings of I-st all-Union Conference on Optimal Planning and National Economy Management*. Moscow: Central Economics and Mathematics Institute. p. 49.
13. Махина, Г. А. Архитектура нейронной сети решения задачи слабоопределенной оптимизации с линейными ограничениями / Г. А. Махина // Ученые записки Симферопольского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2002. — № 2. — С. 133–136.
MAKHINA, G. A. (2002) Neural Network Architecture for Solving the Weakly Defined Optimization Problem with Linear Constraints. *Reports of V.I. Vernadsky Simferopol State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science and Cybernetics*. (2). p. 133–136.

14. Махина, Г. А. Нейросетевой подход к задачам слабоопределенной оптимизации / Г. А. Махина // Искусственный интеллект. — 2000. — № 2. — С. 145–148.
MAKHINA, G. A. (2002) Neural Network Approach to Weakly Defined Optimization Problems. *Artificial intelligence*. (2). p. 133–136.
15. Рудаков, К. В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации / К. В. Рудаков / В кн. Распознавание, классификация, прогноз. — М.: Наука, 1989. — 176–201 с.
RUDAKOV, K. V. (1989) On Algebraic Theory of Universal and Local Constraints for Classification Problems. *In the book: 'Recognition, classification, prediction. Moscow: NAUKA'*. (Issue 1). p. 58–65.
16. Рутковская, Д., Пилиньский, М., Рутковский, Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская. — М.: Горячая линия — Телеком, 2006. — 452 с.
RUTKOVSKAJA, D., HILINSKY, M., & RUTKOVSKY, L. (2006) *Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems*. Moscow: Gorjachaja linija — Telekom.
17. Таратынова, Н. Ю. Задача линейной оптимизации с частично заданной информацией / Н. Ю. Таратынова // Таврический вестник математики и информатики. — 2005. — № 1. — С. 82–93.
TARATYNOVA, N. Yu. (2005) Linear Optimization Problem with Partially-Specified Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (1). p. 82–93.
18. Таратынова, Н. Ю. Построение оптимизационной модели по прецедентной начальной информации как задача нелинейной регрессии / Н. Ю. Таратынова // Искусственный интеллект. — 2006. — № 2. — С. 238–241.
TARATYNOVA, N. Yu. (2006) The construction of Optimization Models by the Precedent Initial Information as a Problem of Nonlinear Regression. *Artificial Intelligence*. (2). p. 238–241.
19. ANAFIYEV, A. S. & ABDULKHAIROV, A. (2013) An Approach to Reconstruct Target Function of the Optimization Problem with Precedent Initial Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. (2). p. 4–9.
20. BUCKLEW, J. A. (2004) *Introduction to Rare Event Simulation*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

21. BREIMAN, L., FRIEDMAN, J. H., OLSHEN, R., & STONE, C. J. (1984) *Classification and Regression Trees*. New York: Chapman and Hal.
22. DONSKOY, V. I. (2018) A Synthesis of Pseudo-Boolean Empirical Models by Precedential Information. *Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 11 (2). p. 96–107.
23. DONSKOY, V. I. (2016) Building Optimization Models from Data for the Intelligent Control Systems. *Intellectual Archive*. (#1708). p. 7.
24. DONSKOY, V. I. (2016) On the Smart Trees and Competence Areas Based Decision Forest. *Belorussian State University*. [Online] Electronic Library ISSN 2519-4437. p. 3. Available from:
<http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/158800/1/Donskoy.pdf>. [Accessed: 10th December 2017].
25. DONSKOY, V. I. (1998) Case-, knowledge-, and optimization- based hybrid approach in AI. *International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems IEA/AIE 1998*. Methodology and Tools in Knowledge-Based Systems (LNCS, volume 1415). p. 520–527.
26. HAYKIN, S. (2008) *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice Hall.
27. HORNIK, K., STINCHCOMBE M., & WHITE H. (1990) Universal Approximation of an Unknown Mapping and Derivatives Using Multilayer Feedforward Networks. *Neural Networks*. 3 (1). p. 551–560.
28. LOH, W.-Y. (2014) Fifty Years of Classification and Regression Trees. *International Statistical Review*. 82 (3). p. 329–348.
29. MathWorks. (2017) *Building Models from Data and Scientific Principles*. [Online] Available from:
<https://www.mathworks.com/solutions/mathematical-modeling/building-models-data-scientific-principles.html>. [Accessed: 15th December 2017].
30. QUINLAN, J. R. (1993) *C4.5: Programs for Machine Learning*. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers Inc.
31. VENTURA, D., MARTINEZ, T. R. (1996) A General Evolutionary/Neural Hybrid Approach to Learning Optimization Problems. *Proceedings of the World Congress on Neural Networks, San Diego, California*. p.1091–1096.

УДК: 517.9

MSC2010: Primary 46L05, Secondary 19K99

ON n -HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS OVER TWO-DIMENSIONAL ORIENTED COMPACT MANIFOLDS

© M. V. Shchukin

BELARUSIAN NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
UL. HMELNIZKOGO 9, MINSK, 220013, BELARUS
E-MAIL: *mvshchukin@bntu.by*

ON n -HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS OVER A TWO-DIMENSIONAL COMPACT
ORIENTED CONNECTED MANIFOLD.

Shchukin M. V.

Abstract. We consider the n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold. Suppose A be the n -homogeneous C^* -algebra with space of primitive ideals homeomorphic to a two-dimensional connected oriented compact manifold $P(A)$. It is well known that the manifold $P(A)$ is homeomorphic to the sphere P_k glued together with k handles in the hull-kernel topology. On the other hand, the algebra A is isomorphic to the algebra $\Gamma(E)$ of continuous sections for the appropriate algebraic bundle E . The base space for the algebraic bundle is homeomorphic to the set P_k . By using this geometric realization, we described the class of non-isomorphic n -homogeneous ($n \geq 2$) C^* -algebras over the set P_k . Also, we calculated the number of non-isomorphic n -homogeneous C^* -algebras over the set P_k .

Keywords: C^* -algebra, primitive ideals, base space, algebraic bundle, operator algebra, irreducible representation

INTRODUCTION

In [1] I. Gelfand and M. Naimark proved that for any C^* -algebra A there exists a Hilbert space H such that A is isomorphic to the algebra $B(H)$ of bounded operators on H . Furthermore, let A be a commutative C^* -algebra. Thus there exists a Hausdorff space M such that A is isomorphic to the algebra $C(M)$ of all continuous functions on M . Let π be an irreducible representation of the commutative C^* -algebra A . Hence the dimension of $\pi(A)$ equals 1. Moreover, let A be a non-commutative C^* -algebra. Consider an irreducible representation π of the algebra. If there exists an integer n such that for any π the dimension of $\pi(A)$ equals n then the algebra A is said to be n -homogeneous. In [2, 3] J. Fell, I. Tomiyama, M. Takesaki proved that a n -homogeneous C^* -algebra A is isomorphic to the algebra of all continuous sections for the appropriate algebraic bundle ξ .

In [4] F. Krauss and T. Lawson described the set of algebraic bundles over the spheres S^k .

In [5] A. Antonevich and N. Krupnik described the difference between bundles and algebraic bundles over the sphere S^k . On the other hand, in that paper they introduced some operations on the classes of algebraic bundles over S^k . In [6] S. Disney and I. Raeburn described the set of algebraic bundles over the torus T^2 and T^3 . In the present paper we describe the set of algebraic bundles over two-dimensional compact oriented manifolds.

Let us remind that a triple (E, B, p) is called bundle if the following conditions hold:

- (I) E and B are topological spaces.
- (II) $p : E \rightarrow B$ is a continuous surjection.

The space E is called bundle space, the space B is said to be base space. The surjection p is called projection. The set $F = p^{-1}(x)$ is the fiber over a point $x \in B$. For example, consider the product-bundle $E = B \times F$, where B and F are topological spaces. By p denote the projection $B \times F \rightarrow B$ to the first multiplier. The bundle ξ is said to be the trivial bundle if it is isomorphic to a product-bundle. On the other hand, consider the Mobius tape M . Note that the Mobius tape M is a non-trivial bundle. The circle S^1 is the bundle space. The interval I is the fiber. However M is not isomorphic to the product-bundle $S^1 \times I$. At the same time M is locally trivial.

A G -bundle $\xi = (E, B, p)$ is called algebraic bundle if the following conditions hold:

- (I) The fiber F_x is the algebra $Mat(n) = C^{n \times n}$ of square matrices of order n .
- (II) The group G is the group $Aut(n)$ of all automorphisms for the algebra $Mat(n)$.

Two bundles $\xi_1 = (E_1, B_1, p_1)$ and $\xi_2 = (E_2, B_2, p_2)$ are said to be isomorphic if there exists a homeomorphism $\gamma : E_1 \rightarrow E_2$ such that $\gamma(F_x) = F_{\alpha(x)}$. Here $\alpha : B_1 \rightarrow B_2$ is a homeomorphism of the bases, the set $F_{\alpha(x)} = p_2^{-1}(\alpha(x))$ is the fiber over the point $\alpha(x) \in B_2$.

1. ALGEBRAIC BUNDLES OVER THE COMPACT CONNECTED TWO-DIMENSIONAL ORIENTED MANIFOLDS

Proposition 1 ([7]). If M is a compact connected two-dimensional oriented manifold, then M is homeomorphic to the sphere S^2 with k handles.

We denote it by P_k (k can be equal 0). Let ξ be an algebraic bundle (E, P_k, p) over P_k . Let n be the order of fiber $F \cong Mat(n)$ for ξ . Cut out the part D from P_k , where D is homeomorphic to the disk D^2 . Further, we consider the set P_k as the union $(P_k \setminus D) \cup \overline{D}$, where $(P_k \setminus D) \cap \overline{D} = S^1$. The set D is contractible. Therefore, the restriction ξ_D of ξ to D is trivial. Thus, the restriction ξ_D is isomorphic to $Mat(n) \times D$.

Lemma 1. *The restriction $\xi_{P_k \setminus D}$ of the bundle ξ to the set $P_k \setminus D$ is trivial.*

Доказательство. The proof is by induction on number k of handles. Note that the case $B \cong P_0$ was considered in [5]. First consider the case $B \cong P_1$, where P_1 is homeomorphic to the torus. Now we realize P_1 as torus. Cut out the set D from the set P_1 . Now let us prove that the restriction $\xi_{P_1 \setminus D}$ of the bundle ξ to the set $P_1 \setminus D$ is trivial.

We realize the torus P_1 as the square I^2 with conditions of gluing u on its border:

$$u(1, y) = u(0, y); u(x, 0) = u(x, 1) (0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1).$$

Let $I_{0.5}^2$ denotes the square with the side equals 0.5. Suppose that the set $I_{0.5}^2$ has the same center as I^2 . Cut out the set $I_{0.5}^2$ from the square I^2 . The set $I^2 \setminus I_{0.5}^2$ is homeomorphic to the set $P_1 \setminus D$. The homotopic class of $P_1 \setminus D$ is the same as the homotopic class of the border $\delta(I^2)$ with the functions of gluing u . It is homeomorphic to two circles; these two circles contain a common point. Every algebraic bundle over two circles is trivial [5]. Hence the restriction of ξ to $P_1 \setminus D$ is trivial. The base of the induction is proved.

The induction hypothesis. Let us suppose that for any integer $m \leq k$ any algebraic bundle ξ over $P_m \setminus D$ is trivial.

The step of the induction.

Let us show that the restriction of the algebraic bundle ξ to $P_{k+1} \setminus D$ is trivial. Indeed, cut out a handle $P_1 \setminus D_1$ from the set $P_{k+1} \setminus D$. Here we realize the handle as the set P_1 without the set D_1 . Let L be the intersection of $P_{k+1} \setminus D$ and $P_1 \setminus D_1$. Thus the set L is homeomorphic to the unit interval I .

Now we have two sets: $P_k \setminus D_2$ and $P_1 \setminus D_1$ with the gluing function $\nu : L \rightarrow \text{Aut}(n)$ of the bundle ξ . The restrictions of the bundle ξ to the sets $P_k \setminus D_2$ and $P_1 \setminus D_1$ are trivial by the induction hypothesis. The class of the bundle ξ is determined by the homotopic class of the mapping $\gamma : L \rightarrow \text{Aut}(n)$ [5]. Since the set L is contractible, it follows that the mapping γ is homotopic to the constant mapping. \square

Lemma 2. *Let f be a continuous mapping from S^1 to $\text{Aut}(n)$, where $S^1 = \delta(P_k \setminus D)$. The identity $[f] = 0$ is a necessary and sufficient condition for the mapping f to have a continuous extension to $f^* : P_k \setminus D \rightarrow \text{Aut}(n)$. Here $[f]$ denotes the class of f from the group $\pi_1(\text{Aut}(n))$.*

Доказательство. The proof is by induction on the number of handles k .

1. The base of induction. The set P_0 is homeomorphic to the sphere S^2 . In this case we can extend the mapping $f : S^1 \rightarrow \text{Aut}(n)$ to the disk D if and only if $[f] = 0$ [5]. Moreover, we shall to prove the statement for the set $P_1 \cong T^2$. The set P_1 is homeomorphic to the torus T^2 . On the other hand, the set P_1 is homeomorphic to the unit square I^2 with the rule u of gluing on the border: $u(1, y) = u(0, y), u(x, 0) = u(x, 1) (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$. Let us cut out the square

$I_{0.5}^2$ from the set I^2 . The square $I_{0.5}^2$ has the same center as I^2 . The side of $I_{0.5}^2$ is equal 0.5. The set $I^2 \setminus I_{0.5}^2$ is homeomorphic to the set $P_1 \setminus D$. Now we can consider the function f as the function on the border of $I_{0.5}^2$. Let $U(x, t) = f(x(1+t), y(1+t))$ be a homotopy such that $u(0) = f(x, y), u(1) = f^*(x, y)$, where $(x, y) \in \delta(I^2)$. Here $\delta(I^2)$ denotes the border of I^2 . Consider the side $a = (x, 0), (0 \leq x \leq 1)$ of the square I^2 . The opposite side $c = (x, 1), (0 \leq x \leq 1)$ is glued with a . When we move on the border δI^2 we move on the side c in opposite direction. In addition, the same statement is true for two other sides. Therefore, $[f^*] = [f] = 0$.

Otherwise let f be a mapping $f \in C(\delta(I_{0.5}^2), Aut(n))$ and $[f] = 0$. This yields that we can extend the mapping f to all of $I_{0.5}^2$ [5]. Let f^* be the extension of f to the square $I_{0.5}^2: f^* \in C(I_{0.5}^2, Aut(n))$. Denote by $f_2 \in C(P_k \setminus D_2, Aut(n)), f_1 \in C(P_1 \setminus D_1, Aut(n))$ the restrictions of f^* to the sets $P_k \setminus D_2$ and $P_1 \setminus D_1$. Consider any point $y \in I^2$. Since $y \in I^2$, we have $y = r \cdot x$, where $x \in \delta(I_{0.5}^2), r \in [0; 2]$. For all r such that $r \in [0; 1]$ we have $r \cdot x \in I_{0.5}^2$. By definition, put $f^*(r \cdot x) = f^*((2-r) \cdot x)$ for $r \in [1; 2]$. Therefore, the mapping f^* is well defined with respect to the function u of gluing for the square I^2 .

The assumption of the induction. Suppose the lemma is true for all $m \leq k$.

The step of the induction. Consider the set $P_{k+1} \setminus D$. Cut out one handle $P_1 \setminus D_1$ from the set $P_{k+1} \setminus D$. Let the set L_1 be the intersection of $P_{k+1} \setminus D$ and $P_1 \setminus D_1$. The set L_1 is homeomorphic to the unit interval I . Now consider the set $P_{k+1} \setminus D$ as a union $P_k \setminus D_2 \cup P_1 \setminus D_1 ((P_k \setminus D_2) \cap (P_1 \setminus D) = L_1)$. Denote by $f^* \in C(P_{k+1} \setminus D, Aut(n))$ an extension of f to $P_{k+1} \setminus D$, where $f \in C(\delta(P_{k+1} \setminus D), Aut(n))$. Let $\alpha_1 : I \rightarrow S_1 \cup L_1$ be a parametrization of $\delta(P_1 \setminus D_1)$ such that $\alpha_1([0; \frac{1}{2}]) = S_1, \alpha_1([\frac{1}{2}; 1]) = L_1, \alpha_2([0; \frac{1}{2}]) = L_2, \alpha_2([\frac{1}{2}; 1]) = S_2$.

Denote by $g(x)$ the element from the class $[f_1] + [f_2]$ such that

$$g(x) = \begin{cases} f_1(\alpha_1(2x)), x \in [0; \frac{1}{2}] \\ f_2(\alpha_2(2x - 1)), x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases} .$$

Now we define the homotopy by the next rule:

$$F(t, x) = \begin{cases} g(\frac{x}{t+1}), x \in [0; \frac{1}{2}] \\ g(\frac{x+1}{t+1}), x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases} .$$

Thus $F(0, x) = g(x), F(1; x) = \begin{cases} g(\frac{x}{2}), x \in [0; \frac{1}{2}] \\ g(\frac{x+1}{2}), x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases} = f(x)$, because $g(\frac{x}{2}) = f(x)$ for all $x \in [0; \frac{1}{2}]$ and $g(\frac{x+1}{2}) = f(x)$ for all $x \in [\frac{1}{2}; 1]$. Note that $\alpha_1([0; \frac{1}{2}]) = S_1, \alpha_2([\frac{1}{2}; 1]) = S_2$. This implies that $[f] = [f_1] + [f_2]$.

Otherwise consider a mapping $f \in C(\delta D, \text{Aut}(n))$ such that $[f] = 0$. In this case we extend it to the set L_1 . Let $S_1(t)$ ($t \in [0; 1]$) be a parametrization of the set $S_1 = \overline{D} \setminus \overline{D}_2$. Suppose $L_1(t)$ be a parametrization of $L_1 = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$. Now we define the mapping f^* by the rule: $f^*(L_1(t)) := f(S_1(t))$. It follows in the standard way that $[f^*] = 0$ on the sets $D_1 = S_1 \cup L_1$ and $D_2 = S_2 \cup L_1$.

By the inductive hypothesis extend the mapping f^* to the set $P_k \setminus D_2$, because $[f^*/\delta D_2] = 0$. Finally, extend the mapping f^* to the set $P_1 \setminus D_1$. \square

Suppose ξ_1 and ξ_2 be two algebraic bundles with fiber $\text{Mat}(n)$ over the set $(P_k \setminus D) \cup \overline{D}$. Let $\eta_{12} = \gamma_2^{-1}\gamma_1$ be the gluing function for the bundle ξ_1 and $\mu_{12} = u_2^{-1}u_1$ be the gluing function for the bundle ξ_2 . Denote by ν_1 the map from $\xi_1/(P_k \setminus D) \rightarrow (P_k \setminus D) \times \text{Mat}(n)$ and by ν_2 the map from ξ_1/\overline{D} to $\overline{D} \times \text{Mat}(n)$. These maps are well defined by lemma 1. For any point $x \in \delta(D)$ the image of the fiber F_x from the bundle $\xi_1/(P_k \setminus D)$ is the fiber $(F_1)_x$ from the bundle ξ_1/\overline{D} . Thus the map η_{12} generates an automorphism $(\gamma_1)_x$ of the algebra $\text{Mat}(n)$ over every point $x \in \delta(D)$. The mapping $\gamma_3(x) = (\gamma_1)_x : S^1 \rightarrow \text{Aut}(n)$ is continuous, because the restriction of the bundle ξ_1 to $\delta(D)$ is trivial. By the same argument, the gluing function μ_{12} generates the mapping $\gamma_4 \in C(S^1, \text{Aut}(n))$. Denote by $[\gamma_3]$ the class of mapping γ_3 in the group $\pi_1(\text{Aut}(n)) \cong Z/nZ$. In this notation, let $\theta : \pi_1(\text{Aut}(n)) \rightarrow Z/nZ$ be the corresponded isomorphism. Suppose $-\gamma_4$ be the element $\theta^{-1}(-\theta([\gamma_4]))$.

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition for the bundles ξ_1 and ξ_2 to be isomorphic is $[\gamma_3] = \pm [\gamma_4]$.*

Доказательство. Denote by $\gamma : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ the isomorphism of the bundles. Let $\alpha : P_k \rightarrow P_k$ be the corresponded homeomorphism of the bases for the bundles. Suppose $\eta_{12} = \gamma_2^{-1}\gamma_1$ be the gluing function for the bundle ξ_1 over $(P_k \setminus D) \cup \overline{D}$. Denote by $\mu_{12} = u_2^{-1}u_1$ the gluing function for the bundle ξ_2 over $(P_k \setminus \alpha(D)) \cup \alpha(\overline{D})$. In this notation, $u_1 : \xi_1/(P_k \setminus \alpha(D)) \rightarrow (P_k \setminus \alpha(D)) \times \text{Mat}(n)$, $u_2 : \xi_2/(\alpha(\overline{D})) \rightarrow (\alpha(\overline{D})) \times \text{Mat}(n)$.

Let β be a homeomorphism $P_k \rightarrow P_k$ such that $\alpha(\overline{D}) = \overline{D}$ and $\alpha(\delta(\overline{D}))$ has the same orientation as $\delta(\overline{D})$.

Denote by β_1 the extension of β to the isomorphism of the bundles: $\beta_1 : \xi_2/(P_k \setminus \alpha(\overline{D})) \rightarrow \xi_2/(P_k \setminus \overline{D})$. Let us remark that it is possible, because $\beta(\overline{D}) = \overline{D}$ and $\beta(P_k \setminus D) = P_k \setminus D$. Denote by $\mu_{12}^* : \xi_2/\delta(P_k \setminus D) \rightarrow \xi_2/\delta(\overline{D})$ a mapping such that the next diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \xi_2/(P_k \setminus \alpha(D)) & \xrightarrow{\mu_{12}} & \xi_2/(\alpha(\overline{D})) \\ \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 \\ \xi_2/(P_k \setminus D) & \xrightarrow{\mu_{12}^*} & \xi_2/\overline{D} \end{array}$$

In this case, the bundle $\beta_1(\xi_2/(P_k \setminus \alpha(D))) \cup_{\mu_{12}^*} \beta_2(\xi_2/\alpha(\overline{D}))$ is isomorphic to the bundle ξ_2 .

Let β_3 be the isomorphism of the bundles.

Suppose α be a homeomorphism $\alpha : P_k \rightarrow P_k$ for the bases such that $\beta \circ \alpha(\delta(\overline{D})) = \delta(\overline{D})$. The restriction of the bundle ξ_1 to the set $P_k \setminus D$ is trivial. Further, let $\beta_5 \in C(P_k \setminus D, \text{Aut}(n))$ be a mapping defined by the isomorphism $\beta_3 \circ \gamma$. The image of a fiber F_x under the mapping β_5 is a fiber $\beta_3 \circ \gamma(F_x)$ for any point $x \in P_k \setminus D$. In addition, let $\beta_6 \in C(\overline{D}, \text{Aut}(n))$ be a mapping defined by the isomorphism $\beta_3 \circ \gamma$. The image of a fiber F_x under the mapping β_6 is a fiber $\beta_3 \circ \gamma(F_x)$ for any point $x \in \overline{D}$.

We have the next commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \xi_1/(P_k \setminus D) & \xrightarrow{\eta_{12}} & \xi_1/\overline{D} \\ \downarrow \beta_3 \circ \gamma & & \downarrow \beta_3 \circ \gamma \\ \xi_2/(P_k \setminus D) & \xrightarrow{\mu_{12}^*} & \xi_2/\overline{D} \end{array}$$

The image of a fiber F_x under the mapping $\beta_3 \circ \gamma$ is a fiber $F_{\beta \circ \alpha(x)}$. Therefore we have $\gamma_4(\beta \circ \alpha(x)) \beta_5(x) = \beta_6 \circ \gamma_3(x)$. Further,

$$[\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))] + [\beta_5(x)] = [\beta_6(x)] + [\gamma_3(x)] \tag{1}$$

The mappings $\beta_5(x)$ and $\beta_6(x)$ are defined on the sets $P_k \setminus D$ and \overline{D} correspondingly. Therefore we have $[\beta_5(x)] = [\beta_6(x)] = 0$ by the lemma 2. Using (1), we get

$$[\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))] = [\gamma_3(x)] \tag{2}$$

Let the mapping $\beta \circ \alpha$ changes the orientation of the circle $\delta(\overline{D})$. Therefore $[\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))] = -[\gamma_4(x)]$.

Otherwise, let the mapping $\beta \circ \alpha$ do not changes the orientation of the circle $\delta(\overline{D})$. In this case, $[\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))] = [\gamma_4(x)]$. Actually we obtain $[\gamma_4] = \pm [\gamma_3]$.

On the other hand, let $[\gamma_4] = \pm [\gamma_3]$. Suppose we have $[\gamma_4] = -[\gamma_3]$. Denote by α a homeomorphism $P_k \rightarrow P_k$ such that $\alpha(\overline{D}) = \overline{D}$. Let the homeomorphism α changes the orientation of the circle $S^1 = \delta(\overline{D})$. In this case, denote by γ_1 the isomorphism $v_1^{-1} \circ u_1$ from $\xi_1/(P_k \setminus D) \rightarrow \xi_2/(P_k \setminus D)$. Here, v_1 is the isomorphism of the bundles $\xi_2/(P_k \setminus D) \rightarrow (P_k \setminus D) \times \text{Mat}(n)$ such that restriction of v_1 to $P_k \setminus D$ equals α . We

see that the isomorphism $u_1 : \xi_1/(P_k \setminus D) \rightarrow (P_k \setminus D) \times \text{Mat}(n)$ produces the identity homeomorphism I for the bundle bases. Note that the isomorphism γ_1 produces a mapping $\gamma_5 \in C(P_k \setminus D, \text{Aut}(n))$. Thus the mapping $(\gamma_4(\alpha x)) \gamma_5(x) (\gamma_3(x))^{-1} \in C(S^1, \text{Aut}(n))$ produces the isomorphism $\eta_{12} \circ \gamma_1 \circ \mu_{12}^{-1} : \xi_1/\delta\bar{D} \rightarrow \xi_2/\delta\bar{D}$ for the trivial bundles. In addition, the homeomorphism α changes the orientation for the circle $S^1 = \delta D$. Now we get $[\gamma_4(\alpha x)] = -[\gamma_4(x)]$. We obtain $[\gamma_5(x)] = 0$ by the lemma 2. In addition, the next equality has a place: $[(\gamma_3(x))^{-1}] = -[\gamma_3(x)]$. Denote by γ_7 the extension of $\gamma_4(\alpha x) \circ \gamma_5(x) \circ (\gamma_3(x))^{-1}$ to \bar{D} by lemma 2. This means that $\gamma_7 \in C(\bar{D}, \text{Aut}(n))$. Define the isomorphism $\gamma_2 : \xi_1/\bar{D} \rightarrow \xi_2/\bar{D}$ by the rule $(x, y) \rightarrow (\alpha(x), \gamma_7(x) \cdot y)$, $(x \in \bar{D}, y \in F_x)$. The isomorphism is well-defined with respect to the functions of gluing for the bundles ξ_1 and ξ_2 . Further, define a map $\gamma : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ by the next rule:
$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ on } \xi_1/(P_k \setminus D) \\ \gamma_2 \text{ on } \xi_1/\bar{D} \end{cases}.$$

This implies that the map γ is an isomorphism of bundles. On the other hand, let $[\gamma_4] = [\gamma_3]$. Define the homeomorphism α as identity $I : P_k \rightarrow P_k$. Arguing as before, we get the map $\gamma_4(\alpha x) \circ \gamma_5(x) \circ (\gamma_3(x))^{-1} \in C(S^1, \text{Aut}(n))$ such that $[\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}] = [\gamma_4(\alpha x)] + [\gamma_5(x)] + [(\gamma_3(x))^{-1}] = [\gamma_4] - [\gamma_3] = 0$. Therefore, we can extend the map $\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}$ to a map $\gamma_7 \in C(\bar{D}, \text{Aut}(n))$. The map γ_7 produces an isomorphism $\gamma_2 : \xi_1/\bar{D} \rightarrow \xi_2/\bar{D}$ that is coordinated with gluing functions for the bundles ξ_1 and ξ_2 . At the same time the map γ_7 is coordinated with the isomorphism γ_1 . These isomorphisms γ_1 and γ_2 produce an isomorphism $\gamma : \xi_1 \rightarrow \xi_2$. \square

Theorem 2. *Suppose $n = 2l$ or $n = 2l + 1$ ($l \in \mathbb{N}$). Then there are $l + 1$ non-isomorphic algebraic bundles with fiber $\text{Mat}(n)$ over the set P_k .*

Доказательство. Let $n = 2l$. In other notation, we need to find number of classes in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ with respect to the equality $l = -l$. We have the next classes $\{0\}, \{1, 2l - 1\}, \{2, 2l - 2\}, \{3, 2l - 3\}, \dots, \{l - 1, l + 1\}, \{l\}$. There are exactly $l + 1$ such classes.

Further, let $n = 2l + 1$. In this case we have the next classes: $\{0\}, \{1, 2l\}, \{2, 2l - 1\}, \{3, 2l - 2\}, \{4, 2l - 3\}, \dots, \{l - 1, l + 2\}, \{l, l + 1\}$. There are $l + 1$ such classes. \square

CONCLUSION

In the work we described the class of non-equivalent algebraic bundles with base space homeomorphic to the two-dimensional compact oriented connected manifold. We calculated the number of non-isomorphic n -homogeneous C^* -algebras with space of primitive ideals homeomorphic to the two-dimensional compact connected oriented manifold. Further, it is interesting to know the structure of n -homogeneous C^* -algebras

with its space of primitive ideals homeomorphic to more complicated manifolds, for example, 3-dimensional manifolds and other.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank professor Anatolii Antonevich for useful discussions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NAIMARK M. A. (1968) *Normirovannye kolca*. Moscow.
2. FELL J. M. G. (1961) The structure of fields of operator fields. *Acta Mathematica* Vol. 106. No. 3-4, P. 233-280.
3. TOMIYAMA J., TAKESAKI M. (1961) Application of fiber bundle to certain class of C^* -algebras. *Tohoku Math. J.* Vol. 13. No 2, P. 498-522.
4. KRAUSS F., LAWSON T. (1974) Examples of homogeneous C^* -algebras. *Memoirs of the American mathematical society*, Vol. 148. P. 153-164.
5. ANTODEVICH A., KRUPNIK N. (2000) On trivial and non-trivial N-homogeneous C^* -algebras. *Integral Equations and Operator Theory*. Vol. 38. P. 172-189.
6. DISNEY S., RAEBURN I. (1985) Homogeneous C^* -algebras whose spectra are tori. *Jornal of the Australian mathematical society (Series A)*. Vol. 38. P. 9-39.
7. MASSEY W. (1977) *Algebraic topology: An introduction*. Springer, 292 p.

ZHUKOVSKIY V. I. & BOLDYREV M. V. 2018. Multistep Bertrand duopoly model with imports. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2, pp. 7 – 16.

MSC2010: MSC2010: 90C39

Through the use of a suitable variant of dynamic programming, the explicit form of the situation of guaranteed equilibrium in a two-step positional mathematical model of Bertrand duopoly has been found. This research may be extended by examination of N -person games as well as applying the Berge equilibrium instead of the Nash equilibrium.

Keywords: dynamic programming, strongly guaranteed equilibrium, Bertrand duopoly, uncertainty, Nash equilibrium, game theory.

EMELICHEV V. A. & NIKULIN Yu. V. 2018. On some type of stability for multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2, pp. 17 – 28.

MSC2010: 90C09, 90C27, 90C29, 90C31

We consider a wide class of linear optimization problems with integer variables. In this paper, the lower and upper attainable bounds on the T_2 -stability radius of the set of extremum solutions are obtained in the situation where solution space and criterion space are endowed with various Hölder's norms. As corollaries, the T_2 -stability criterion is formulated, and, furthermore, the T_2 -stability radius formula is specified for the case where criterion space is endowed with Chebyshev's norm.

Keywords: multicriteria integer linear programming, set of extremum solutions, stability radius, T_2 -stability, Hölder's norm, Chebyshev's norm.

Гаврилов С. В., Гуров С. И., Тельпухов Д. В., Жукова Т. Д. Использование информационной избыточности при построении сбоеустойчивых комбинационных схем / С. В. Гаврилов, С. И. Гуров, Д. В. Тельпухов, Т. Д. Жукова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 2 (39). — С. 29 – 44.

УДК: 519.725, 621.3.049.771.14

В статье на основе проведенного анализа специфики задачи повышения сбоеустойчивости комбинационных интегральных схем методами избыточного кодирования

формулируются и требования к такому коду. Предлагается линейный нециклический код с проверками на четность, удовлетворяющий данным требованиям. Код исправляет одиночные ошибки, обнаруживает двойные и обладает преимуществами, существенными для рассматриваемой задачи. Дана оценка эффективности предложенного кода.

Ключевые слова: синтез сбоеустойчивых схем, избыточное кодирование, коды с проверками на четность, *R*-код.

Германчук М. С., Козлова М. Г. Синтез алгоритмов кластеризации для решения многоагентной задачи коммивояжера / М. С. Германчук, М. Г. Козлова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 2 (39). — С. 45 – 70.

УДК: УДК: 519.16

Работа является частью проекта по исследованию задач ДО на сложных сетях, предполагающего использование дополнительной информации, алгоритмов взаимодействия интеллектуальных агентов в решении сетевых задач, алгоритмов реоптимизации и др. В данной статье для решения задач маршрутизации применяются алгоритмы кластеризации, основанные на *K*-средних, бионических алгоритмах и построении маршрутов с помощью генетических алгоритмов. Перспективной является композиция *K*-means, муравьиного и модифицированного генетического алгоритмов.

Ключевые слова: дискретная оптимизация на сложных сетях, кластеризация, маршрутизация, синтез алгоритмов.

Донской В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: применение нейронных сетей / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 2 (39). — С. 71 – 89.

УДК: 519.7

В статье разработаны методы построения нелинейных оптимизационных моделей из данных на основе использования обучающихся нейронных сетей. Предложен новый подход к построению таких моделей, когда в обучающей информации содержатся точки, принадлежащие только множеству допустимых решений, а о точках, не принадлежащих этому множеству, никакой информации нет. Разработан эвристический

алгоритм поиска глобального экстремума в задаче, представленной эмпирической нелинейной нейронной моделью.

Ключевые слова: построение оптимизационных моделей по данным, нейронные сети, решающие деревья.

Щукин М. В. О n -однородных C^* -алгебрах над ориентируемыми двумерными многообразиями / М. В. Щукин // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 2 (39). — С. 90–97.

УДК: 517.9

В работе рассматриваются n -однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерному ориентируемому компактному связному многообразию. Изучается структура таких алгебр. Приводится количество неизоморфных между собой n -однородных C^* -алгебр с указанным пространством примитивных идеалов.

Ключевые слова: n -однородная C^* -алгебра, пространство примитивных идеалов, алгебраическое расслоение, расслоенное пространство, база расслоения, операторная алгебра.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Болдырев Михаил
Владиславович*

студент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, РФ
e-mail: m_boldyrev@list.ru

*Гаврилов Сергей
Витальевич*

д. т. н., проф., врио директора Института проблем проектирования в микроэлектронике РАН, г. Москва, Зеленоград, Российская Федерация
e-mail: ippm@ippm.ru

*Германчук Мария
Сергеевна*

ассистент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: m.germanchuk@yandex.ru

*Гуров Сергей
Исаевич*

к. ф.-м. н., доцент кафедры Математических методов прогнозирования факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: sgur@cs.msu.ru

*Донской Владимир
Иосифович*

д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: vidonskoy@mail.ru

*Емеличев Владимир
Алексеевич*

д. ф.-м. н., профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь
e-mail: vemelichev@gmail.com

*Жукова Татьяна
Дмитриевна*

инженер-исследователь Института проблем проектирования в микроэлектронике РАН, г. Москва, Зеленоград, Российская Федерация
e-mail: zhukova_t@ippm.ru

**Жуковский Владислав
Иосифович**

д. ф.-м. н., профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, РФ
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

**Козлова Маргарита
Геннадьевна**

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: art-inf@mail.ru

Никулин Юрий

к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и статистики факультета естественных наук университета Турку, Финляндия
e-mail: yurnik@utu.fi

**Тельпухов Дмитрий
Владимирович**

к. т. н., зав. отделом МПИС Института проблем проектирования в микроэлектронике РАН, г. Москва, Зеленоград, Российская Федерация
e-mail: dmitr@ippm.ru

**Щукин Михаил
Владимирович**

к. ф.-м. н., доцент кафедры «Высшая математика № 1» Белорусского национального технического университета, г. Минск, Беларусь
e-mail: mvshchukin@bntu.by

Подписано к печати 03.10.2018. Формат 38х30/2. Бумага тип ОП. Объем 11 п. л. Тираж 50 экз.

Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 30.10.2018.

Отпечатано: ИП Павлюков В. В.

295017, Республика Крым, г. Симферополь, ул. Рубцова, дом 44, литера «З», офис 6