Таврический Вестник Информатики Математики

№ 1 (38) ’ 2018

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2018, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 2 от 07 июня 2018 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: **www.tvim.info**

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 519.833

MSC2010: 91A10, 91B52

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Т. В. Макаркина

Государственный гуманитарно-технологический университет
физико-математический факультет
ул. Зеленая, д. 22., г. Орехово-Зуево, Московс. область, 142600, Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

© Ю. А. Бельских

Государственный гуманитарно-технологический университет
физико-математический факультет
ул. Зеленая, д. 22., г. Орехово-Зуево, Московс. область, 142600, Российская Федерация
e-mail: *fizmat@ggtu.ru*

The Existence of Berge Equilibrium.

Zhukovskiy V. I., Makarkina T. V., Belskih Y. A.

Abstract.

The sufficient conditions of the existence of Berge equilibrium situation in noncooperative game of many persons in normal form are established. On the basis of these conditions the existence of Berge equilibrium situation in mixed strategies (by compact sets of strategies of players and continuity of their payoff functions) is proved. Let us consider the history of the appearance of the Berge equilibrium notion.

In 1949 the 21-years-old PhD student of Prinston University, John F. Nash (jun.), formalized the notion of “good” solution in noncooperative games (later called “Nash equilibrium”). It has got the broad spectrum of applications in economics, sociology, military sciences. And now after more than 50 years, in any journal of system analysis, game theory, mathematical programming we find the papers devoted to Nash equilibrium (NE). In 1994 John Nash won the Nobel Prize in economics in a common effort with John Harsanyi and R. Selten “for fundamental analysis of equilibria in noncooperative game theory”. Actually 20-years-old Nash developed the foundation of the scientific method that played the great role in the development of world economy.

However “in the sun there are spots” (proverb). And the main of them is “the eqoistic character” of Nash equilibrium concept. It appears in the fact that every player tries to increase only his own payoff, i. e. follows “politica dei campanile”, without considering interests

of other participants of the conflict. One of the methods to remove this negative is to use the approach (by formalization of "good" solution of the game), which differs from "dictated" Nash equilibrium. Such approach was proposed in 1994 at the scientific seminar (leader V.I.Zhukovskiy) at discussing the book of C.Berge «Theorie generale des jeux a n personnes games» (this book was published in Paris in 1957 and in 1961 it was translated into Russian [1]). Concretely the criticism of NE was caused by non-existence NE at strongly concave in strategy at least one player his payoff function (but the decision making is necessary!). The sense of the new approach lies in change of condition of solution stability not to deviation of the player whom belongs "payoff function" but to deviation of all players except the one who is "the owner" of this payoff function. We shall note three circumstances.

Firstly, we called the proposed new concept "BE". The term "BE" arouse as the result of reviewing Claude Berge's book. Secondly, in 1994 K.S.Vaisman (then the post-graduate student of V.Zhukovskiy) was engaged in construction of initial foundations of mathematical BE theory. In 1995 K. Vaisman defended his thesis "Berge equilibrium" (BE) in Leningrad University. (K.Vaisman died in 1998 at the age of 35 years). His sudden death suspended further development of the Berge equilibrium in Russia, but the notion of a Berge equilibrium was "exported from Russia" by Algerian scholars of V.Zhukovskiy M. Radjef and M. Larbani.

This notion caused the broad interest of our foreign colleagues. The acquaintance with their publications showed that "par le temps qui ceurt" the most papers of this direction devoted to the properties of Berge equilibrium, singularities, modifications of this notion, relations with Nash equilibrium. It is supposed that in originated theory of Berge equilibrium the stage of formation of strict mathematical theory becomes nearer. Probably an intensive accumulation of facts will be replaced by the stage of evolutionary internal development. At this stage one should traditionally answer two fundamental questions:

1. Does the Berge equilibrium exist?
2. How one should find this equilibrium?

The present article is just devoted to answers of these both questions. Thirdly, the authors were motivated by the IX Moscow Festival of Science that partially was held in a new building of MSU Fundamental library on October 10, 2014. Apart from lectures of Nobel laureates chemists Kurt Wuthrich (USA, California), Jean-Marie Lehn (France), biochemist Sir Richard Roberts (USA), RAS academician M.Ya.Marov ("The Chelyabinsk meteor"), L.M. Zelenyi ("Exoplanets: Searching for a second Earth"), Doctors of Sciences A.V. Markov ("Why a human has large brain"), Yury I. Aleksandrov ("Neurons, humans and cultures"), the program included the lecture of RAS academician, director of RAS Institute of Philosophy A.A.Guseinov "The Golden Rule of ethics". Being inspired by lecture the first author of this article addressed the following question to the speaker, "Are you interested in a mathematical theory of the Golden rule?" The answer was confirmative. Now, at our strong belief, the concepts of Berge equilibrium most completely meet main requirement of the Golden Rule of Ethics, "Behave to others as you would like them to behave to you".

Thus, the article offered to the reader, first, suggests the method of construction of Berge equilibrium situation for finding minimax strategy in specific Germeier convolution, effectively constructed in assumed mathematical model of existence strategies if sets of strategies are compact and payoff function is continuous according to situations.

Keywords: *noncooperative game, payoff function, payoff, Nash and Berge equilibrium, Germeier convolution, mixed strategies.*

Введение

Упорядоченная тройка

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle,$$

образует нормальную форму бескоалиционной игры N лиц. В игре Γ множество $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ — порядковые номеров игроков, стратегии i-го игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, ситуация $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$, $n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i$. Игроки, не имея возможности объединяться в коалиции, выбирают свои стратегии; на множестве X ситуаций определены функции выигрыша $f_i(x) : X \to \mathbb{R}$ каждого игрока. Цель участия i-го игрока (на «содержательном уровне») — выбор своей стратегии так, чтобы его выигрыш (значение его функции выигрыша) стало возможно большим.

Далее используем общепринятое (в играх вида Γ) обозначения: $(x||z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ для $z_i \in X_i$.

Определение 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, \ldots, x_2^e) \in X$ называется равновесной по Нэшу в игре Γ (РН), если

$$\max_{x_i\in X_i} f_i(x^e||x_i) = f_i(x^e), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Определение 2. Ситуация $x^B = (x_1^B, \ldots, x_N^B) \in X$ называется равновесной по Бержу в игре Γ, если

$$\max_{x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}\in X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}} f_i(x||x_i^B) = f_i(x^B), \quad (i \in \mathbb{N}),$$

здесь

$$x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \text{ и } X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = \prod_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} X_j. \tag{2}$$

Для игры трех лиц ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$) требования (1) и (2) соответственно означают (3) и (4), именно

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1\in X_1} f_1(x_1, x_2^e, x_3^e) &= f_1(x^e), \\ \max\limits_{x_2\in X_2} f_2(x_1^e, x_2, x_3^e) &= f_2(x^e), \\ \max\limits_{x_3\in X_3} f_3(x_1^e, x_2^e, x_3) &= f_3(x^e), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{x_2,x_3} f_1(x_1^B, x_2, x_3) & = & f_1(x^B), \\ \max\limits_{x_1,x_3} f_2(x_1, x_2^B, x_3) & = & f_2(x^B), \\ \max\limits_{x_1,x_2} f_3(x_1, x_2, x_3^B) & = & f_3(x^B). \end{cases} \tag{4}$$

Перейдем к интерпретации равновесия по Бержу для семьи из трех человек: мужа (игрок I), жены (игрок II) и сына (игрок III). Например, для мужа — муж, забывая о своих интересах (первое равенство из (4)), направляет все свои усилия, чтобы помочь жене и сыну достичь наибольших выигрышей (второе и третье равенство из (4)). Те (жена и сын), в свою очередь, помогают мужу достичь максимально возможного успеха (первое равенство из (4)). Аналогичное положение для игрока 2 (жены) и игрока 3 (сына). Такой альтруизм при разрешении конфликтов типичен для христианства, ислама, иудаизма, конфуцианства. Такой подход к принятию решения заведомо исключает вооруженные столкновения, войны. Мир стал бы много лучше, если бы при уравновешивании конфликтов применялось бы равновесие по Бержу (а не по Нэшу!).

Достаточные условия

Для игры Γ будем использовать новые переменные $z_i \in X_i$ $(i \in \mathbb{N})$ и $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$, а также $(x||z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X$. Составим с помощью этих обозначений N скалярных функций:

$$\varphi_i(x, z) = f_i(x||z_i) - f_i(z_i) \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

и гермейеровскую свертку $\varphi_i(x, z)$, именно,

$$\varphi(x, z) = \max_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x, z). \tag{6}$$

Ограничимся случаем $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$, т. е. игрой Γ трех лиц.

Теперь рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{I, II\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x, z) \rangle,$$

в которой игрок I за счет подходящего выбора своей стратегии $x \in X$ стремится максимально увеличить платежную функцию $\varphi(x, z)$, а игрок II с помощью выбора $z \in Z = X$ – максимально уменьшить $\varphi(x, z)$.

Бесспорным решением Γ^a является седловая точка $(x^0, z^B) \in X \times X$, т. е.

$$\max_{x \in X} \varphi(x, z^B) = \varphi(x^0, z^B) = \min_{z \in X} \varphi(x^0, z), \tag{7}$$

причем x^0 является максиминной, а z^B — минимаксной стратегией в Γ^a, т. е.

$$\min_{z\in X}\max_{x\in X}\varphi(x,z)=\max_{x\in X}\varphi(x,z^B),\quad \max_{x\in X}\min_{z\in X}\varphi(x,z)=\min_{z\in X}\varphi(x^0,z).$$

Утверждение 1. Если в игре Γ^a существует седловая точка (x^0,z^B), то минимаксная стратегия x^0 является равновесной по Бержу ситуацией в игре Γ.

Доказательство. Из (7) следует справедливость цепочки неравенств:

$$\varphi(x,z^B)\le\varphi(x^0,z^B)\le\varphi(x^0,z)\quad \forall x,z\in X. \tag{8}$$

Из (5) и (6) при $z=x^0$ имеем $\varphi(x^0,x^0)=0$. Отсюда, согласно (8) (по транзитивности) получаем $\varphi(x^0,z^B)\le 0$ и поэтому $\varphi(x,z^B)\le 0$ $\forall x\in X$.

Тогда с учетом (6) и (5)

$$f_i(x||z_i^B)-f_i(z^B)\le 0\quad \forall x\in X\quad (i\in\mathbb{N}),$$

т. е.

$$f_i(x||z_i^B)\le f_i(z^B)\quad \forall x\in X\quad (i\in\mathbb{N}).$$

□

Замечание 1. Из приведенного утверждения следует ясный и наглядный способ построения ситуации равновесия по Бержу исходной игры Γ:

1) по функциям выигрыша $f_i(x)$ из Γ построить с помощью (5) скалярные функции $\varphi_i(x,z)$, а затем с помощью (6) выписать гермейеровскую свертку $\varphi(x,z)$;

2) найти седловую точку (x^0,z^B) функции $\varphi(x,z)$ из (6).

Тогда минимаксная стратегия z^B является искомой ситуацией равновесия по Бержу игры Γ.

Пожалуй, наибольшая сложность здесь возникает при построении седловой точки негладкой функции $\varphi(x,z)$. Здесь уже следует привлечь к построению седловой точки негладкий анализ, разрабатываемый в России недавно скончавшемся ленинградским профессором Владимиром Федоровичем Демьяновым.

Существование в смешанных стратегиях

Нужно обладать большим оптимизмом, чтобы надеяться найти для игры Γ равновесную по Бержу ситуацию в чистых стратегиях $x_i\in X_i$ $i\in\mathbb{N}$ для трех и более игроков. Поэтому следуя подходу Эмиля Бореля [8], Джона фон Неймана [9], Джона Нэша [4], [5] и их последователей, установим существование ситуации равновесия по Бержу в смешанных стратегиях. Причем будем следовать подходу к решению аналогичной задачи, предложенной первым автором в [6].

Напомним, что здесь и далее через $comp\,\mathbb{R}^{n_i}$ обозначаем множество всех компактов (замкнутых и ограниченных подмножеств из евклидова n_i-мерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$), непрерывность на X скалярной функции $f_i(x)$ обозначаем $f_i(\cdot) \in C(X)$. Не оговаривая особо, для элементов игры $\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$ предполагаем выполнение следующих требований:

$$X_i \in comp\,\mathbb{R}^n, \quad f_i(\cdot) \in C(X), \quad i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}. \tag{9}$$

Перейдем к понятию *смешанного расширения игры* Γ, включающее смешанные стратегии, ситуации, математическое ожидание функции выигрыша. Будем предполагать, что для игры Γ выполнены ограничения (9), тогда $f_i(x)$ непрерывна на компакте X, где $X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$. На каждом компакте $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ — множество подмножеств X_i таких, что $X_i \in \mathfrak{B}(X_i)$, причем $\mathfrak{B}(X_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathfrak{B}(X_i)$, кроме того, $\mathfrak{B}(X_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта X_i. Согласно математической теории игр, *смешанную стратегию* i-го игрока $\nu_i(\cdot)$ будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* X_i. Вероятностная мера есть неотрицательная скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X_i)$ подмножеств компакта $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

(1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(X_i)$ (свойство счетной аддитивности функции $\nu_i(\cdot)$);

(2) $\nu_i(X_i) = 1$ (свойство нормированности) и поэтому $\nu_i(Q^{(i)}) \leq 1$ для всех $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$. Построим ситуацию в смешанных стратегиях в виде меры-произведения

$$\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3),$$

множество которых обозначим через $\{\nu\}$, а также математическое ожидание $f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)$.

Получаем *смешанное расширение* игры Γ, которое обозначим через

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle. \tag{10}$$

Будем использовать также меры-произведения

$$(\nu||\mu_i) = \nu_1(dx_1)\dots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\mu_i(dz_i)\nu_{i+1}(dx_{i+1}), \dots, \nu_N(dx_N),$$

где вероятностные меры $\mu_i(dz_i) \in \{\nu_i\}$, а новые чистые стратегии $z_i \in X_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Аналогично определению 2 введем

Определение 3. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^B(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем равновесной по Бержу в смешанном расширении (10) (или равновесной по Бержу ситуацией в смешанных стратегиях для игры Γ), если

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_i(\nu||\mu_i^B) = f_i(\nu^B) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Наконец, приведем утверждение, доказанное в [8].

Утверждение 2. Если в игре Γ множества $X_i \in comp\, \mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, то для функции

$$\varphi = \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)$$

имеет место неравенство

$$\max_{r=1,2,3} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dz)\nu(dx) \leq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)\mu(dz)\nu(dx)$$

при любых $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; здесь, напомним, скалярные функции $\phi_r(x,z)$ определены в (5) и (6) (этот результат аналогичен свойству: максимум суммы не больше суммы максимумов).

Перейдем к доказательству центрального результата настоящей статьи: установим существование равновесной по Бержу ситуации в смешанных стратегиях в игре Γ при выполнении условий (9).

Теорема 1. *Если в игре* Γ *множества* $X_i \in comp\, \mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, *то в этой игре существует равновесная по Бержу ситуация в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Как и в утверждении 1 рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{I, II\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x,z)\rangle.$$

В игре Γ^a множество X стратегий x первого I (максимизирующего $\varphi(x,z)$) игрока совпадает с тем же X. Одним из решение Γ^a является седловая точка $(x^0, z^B) \in X \times X$, именно, напомним: для нее при всех $x \in X$ и каждом $z \in X$ имеет место цепочка неравенств

$$\varphi(x, z^B) \leq \varphi(x^0, z^B) \leq \varphi(x^0, z).$$

Теперь игре Γ^a поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}^a = \langle \{I, II\}, \{\nu\}, \{\mu\}, \phi(\nu,\mu)\rangle.$$

где $\{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\nu(\cdot)$ первого I, а $\{\mu\} = \{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\mu(\cdot)$ второго игрока II, функция выигрыша первого I (математическое ожидание)

$$\varphi(\nu, \mu) = \int\limits_{X\times X} \varphi(x, z)\nu(dx)\mu(dz). \tag{11}$$

Отметим, что в силу [7] и (6), (5), (9) функция $\varphi(x, z)$ из (6) непрерывна на X. Решением игры $\tilde{\Gamma}^a$ (смешанного расширения Γ^a) также будет седловая точка (ν^0, μ^B), определяемая двумя последовательными неравенствами

$$\varphi(\nu, \mu^B) \le \varphi(\nu^0, \mu^B) \le \varphi(\nu^0, \mu) \tag{12}$$

при любых $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Эту пару (ν^0, μ^B) иногда называют *решением игры* Γ^a *в смешанных стратегиях.*

В 1952 г. Ирвинг Гликсберг установил [8] теорему существования равновесной по Нэшу ситуации бескоалиционной игры $N \ge 2$ лиц в смешанных стратегиях, откуда (для частного случая — антагонистической игры Γ^a) следует утверждение: пусть в игре Γ^a множество $X \subset \mathbb{R}^n$ суть непустой компакт, а функция выигрыша первого (I) игрока $\varphi(x, z)$ непрерывна на $X \times X$. Тогда для игры Γ^a существует решение (ν^e, μ^B), определенное в (12), то есть существует седловая точка в смешанных стратегиях.

С учетом (11) неравенства (12) примут вид

$$\int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu(dx)\mu^B(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi(x, z)\nu^0(dx)\mu^B(dz) \le$$

$$\le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu^0(dx)\mu(dz)$$

при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Положив в

$$\varphi(\nu^0, \mu) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu^0(dx)\mu(dz)$$

меру $\mu_i(dz_i) = \nu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ (и тогда $\mu(dz) = \nu^0(dx)$), получаем, с учетом (12), что $\varphi(\nu^0, \nu^0) = 0$. Аналогично приходим к $\varphi(\nu^0, \nu^0) = 0$ и тогда из (12) имеем

$$\varphi(\nu^0, \mu^B) = 0. \tag{13}$$

Согласно $\phi(\nu^0, \mu^B) = 0$ и неравенства в (13) (по транзитивности) приходим к

$$\varphi(\nu, \mu^B) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu(dx)\mu^B(dz) \le 0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Применяя затем утверждение 2, получаем

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\nu^B(dz) \geq \max_{r=1,2,3} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\nu^B(dz).$$

Поэтому для всех $r = 1,\dots,N$ будет

$$\int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\mu^B(dz) \leq 0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Отсюда при $r = 1,2,3$ и согласно (5), а также нормированности $\nu(\cdot)$, приходим, например, при $r = 1$

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \varphi_1(x,z)\nu(dx)\mu^B(dz) = \int\limits_{X\times X} \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_1(z_1,x_2,x_3) - f_1(z)\}\nu(dx)\mu^B(dz) \geq$$

$$\geq \int\limits_{X\times X} f_1(z_1,x_2,x_3)\nu(dx)\mu^B(dz) - \int\limits_X f_1(z)\mu^B(dz) \int\limits_X \nu^B(dx) =$$

$$= f_1(\mu_1^B,\nu_2,\nu_3) - f_1(\mu^B).$$

Аналогично устанавливается справедливость еще трех неравенств при $r = 2,3$

$$0 \geq f_2(\nu_1,\mu_2^B,\nu_3) - f_2(\mu^B)$$

$$0 \geq f_3(\nu_1,\nu_2,\mu_3^B) - f_3(\mu^B).$$

Откуда, в силу определения 3, следует равновесие по Бержу $\mu^B(\cdot) \in \{\nu\}$ в игре (10). $\square$

Заключение

В работе получены следующие результаты:

Установлены достаточные условия существования равновесной по Бержу ситуации в бескоалиционной игре трех лиц в нормальной форме. На основе этих условий доказано существование ситуации равновесия по Бержу в смешанных стратегиях (при компактных множествах стратегий игроков и непрерывности их функций выигрыша).

Список литературы

1. Berge, C. Théorie générule des jeux a n personnes / Berge, C. — Paris: Gauthier-Villar, 1957. — 114 c.

   Берж, С. (1961) *Общая теория игр нескольких лиц.* М.: Физматгиз.

2. Borel, E. La théorie du jeu et les equations inténgrales a noyau symétrique // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. — 1921. — Vol. 173. — C. 1304–1308.

3. Von Neumann, J. Theorie der Gesellschaftspiele // Math. Ann. — 1928. — Vol. 100. — C. 295–320.

4. Nash, J. Non-cooperative games // Math. Ann. — 1951. — Vol. 54. — C. 286-295.

5. Nash, J. Equilibrium point in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. — 1950. — Vol. 36. — C. 48-49.

6. Zhukovskiy, V. I. and Kudryavtsev, K. N. Mathematical Foundations of the Golden Rule. I. Static Setting // Automation and Remote Control. Pleiades Publishing. Ltd. — 2017. — Vol. 78, № 10. — C. 1920–1940.

7. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1986. — 285 с.

   MOROZOV, V. and SUHAREV, A. and FEDOROV, V. (1986) *Operations research in problems and exercises.* Moscow: Nauka.

8. Glicksberg, I. L. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3, № 1. — C. 170 –174.

9. Zhukovskiy, V. I. and Kudryavtsev, K. N. Pareto-Equilibrium Strategy Strategies Profile: sufficient Conditions and Existence in mixed Strategies // Automation and Remote Control. Pleiades Publishing. Ltd. — 2016. — Vol. 77, № 8. — C. 1500 – 1510.

УДК: 519.834

MSC2010: 91A12

О КОАЛИЦИОННОМ РАВНОВЕСИИ

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления
Ленинские горы, МГУ, ВМК, 2 учебный корпус, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Л. В. Смирнова

Государственный гуманитарно-технологический университет
факультет информатики
кафедра информатики
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская федерация
e-mail: *smirnovalidiya@rambler.ru*

About Coalitional Equilibrium.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V.

Abstract. In this paper, consider the n-person normal form game under uncertainty. Many coalition related concepts of equilibrium or solutions have been introduced for n-person normal form games. The main initial motivation for the inception of this direction of research is to overcome one of the drawbacks of Nash equilibrium (NE), namely, NE is not immune against coalition deviation. A coalition may improve the payoff of all its members by collectively deviating from NE. In this article, the Coalitional Equilibrium (CE), is introduced for normal form games under uncertainty. Regarding the undetermined parameters, it is assumed that the players know their range of variation only; no probability information is available (for known or unknown reasons). In the process of modelling game phenomena, considering uncertainty leads to more adequate results and decisions, which is supported by the numerous publications related to this domain (a google search on the topic "mathematical modelling under uncertainty", returns more than one million links to related works). The uncertainty appears because of incomplete information about the players' strategy sets, the strategies being selected by each player and the related payoffs.

A question arises: How a player can, at the same time, consider the game's strategic and cooperation aspects, and the presence of uncertainty when selecting his/her strategy?

In this paper, the following approach to formalize the cooperation aspect of the game is adopted. It is assumed that the cooperation character of the game consists in the fact that any nonempty subset of players has the possibility to form a coalition through communication and coordination by agreeing to select a bundle of strategies to achieve the best possible payoff for all its members. This assumption means that the interests of all possible coalitions are considered.

Further, it is also assumed that the game is without side payments or non-transferable utility. The concept of coalitional equilibrium (CE) is introduced for the described game. This concept is based on the synthesis of the notions of individual rationality and collective rationality in normal form games without side payments, and a proposed coalitional rationality. Sufficient conditions for the existence of CE in pure strategies are established via the saddle point of the Germeier convolution function of the players' payoff functions. Finally, following the approach of Borel, von Neumann and Nash, a theorem of existence of CE in mixed strategies is proved under common minimal mathematical conditions for normal form games (compactness of players' strategy sets, uncertainty set and continuity of payoff functions).

Keywords: *Normal form game without side payments, uncertainty, guarantee, mixed strategies, Germeier convolution, saddle point, equilibrium*

Введение

Математическая модель кооперации в конфликте для данной статьи представлена кооперативной игрой N лиц в нормальной форме без побочных платежей и при учете неопределенных факторов (интервальных неопределенностей). Считаем, что о неопределенностях участникам конфликта известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют (по тем или иным причинам). Учет неопределенностей при моделировании реальных конфликтов позволяет получать более адекватные результаты, что подтверждается, например, большим числом публикаций (более 1 млн. работ в Google Scholar по запросу «mathematical modelling under uncertainty»). Сами неопределенности возникают за счет неполноты (неточности) знаний о реализациях выбранных участниками конфликта своих стратегий: «In these matters the only certainty is there is nothing certain» (Pliny the Elder) (в этой жизни определенно только то, что нет ничего определенного) (Плиний Старший[1]). Например, экономическая система как правило, подвергается неожиданным труднопрогнозируемым возмущениям как *извне* (изменение количества и номенклатуры поставок, скачки спроса на товары, выпускаемые данным производством), так и *изнутри* (появление новых технологий, поломка и замена оборудования, несовпадение реальных сроков пуска нового оборудования с планируемыми сроками и так далее); появление новых технологий может служить причиной возмущений в экологических системах; в механических — температурные, а также погодные условия. Возникает вопрос: как при выборе стратегий одновременно учесть как кооперативный «характер» конфликта, так и наличие неопределенностей?

[1]Плиний Старший (ок. 23–79) — римский писатель, ученый.

Особенность кооперативного «характера» конфликта в том, что в нем учитываются интересы любой возможной коалиции — объединении игроков (участников конфликта), приобретающих возможность согласованного выбора своих стратегий с целью достижения возможно лучших результатов. При этом предполагается:

во-первых, если игроки коалиции договорились в результате переговоров о совместных действиях, то этот договор в течение игры должен выполняться, то есть соглашения обязательны;

во-вторых, игроки лишены возможности передавать остальным «коллегам по конфликту» часть своего результата (выигрыша) (то есть ограничиваемся играми без побочных платежей — так называемые игры с нетрансферабельными выигрышами);

в-третьих, выполнено свойство персональности, именно, выигрыш пустой коалиции равен нулю; согласно этому принципу ненулевых выигрышей могут достичь только действующие («живые») игроки.

1. **Игра гарантий**

Рассматривается математическая модель конфликта с N участниками в виде нормальной формы кооперативной игры N лиц при неопределенности и нетрансферабельными выигрышами

$$\Gamma = \langle \mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

В Γ множество участников (игроков) $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$, игрок i ассоциируется с порядковым номером $i \in \mathbb{N}$; в Γ каждый из N участников выбирает и использует свою *стратегию* $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$; независимо от их действий в Γ реализуется (*интервальная*) *неопределенность* $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$; на множестве пар $(x, y) \in X \times Y$ определена *функция выигрыша* каждого i-го игрока $f_i(x, y)$, значение которой называется *выигрышем* этого игрока i. На содержательном уровне, цель каждого игрока в Γ — выбор такой своей стратегии x_i^* $(i \in \mathbb{N})$, при которой выигрыш каждого становится *возможно большим*, при этом они должны учитывать возможность создания любой коалиции и реализации любой, в том числе и *стратегической*, *неопределенности* вида $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$.

Известная французская пословица гласит: «Entre bouche et cuiller vient souvent grand encombrier» (пока несешь ложку в рот, нередко возникает помеха), но учет неопределенности приводит к многозначности функции выигрыша каждого игрока $f_i(x, Y) = \bigcup\limits_{y\in Y} f_i(x, y)$. Такая многозначность несомненно затрудняет исследование кооперативных игр вида Г и поэтому предлагаем оценивать качество функционирования каждого i-го игрока в Г не значением его функции выигрыша $f_i(x,y)$, а ее (нижней) гарантией $f_i[x]$. Можно предложить следующий способ построения таких гарантий.

Именно, в качестве гарантии $f_i(x,y)$ $\forall y \in Y$ выбираем

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x,y).$$

Действительно, отсюда следует $f_i[x] \leq f_i(x,y)$ $\forall y \in Y$ и поэтому нижнюю границу качества функционирования i-го игрока при реализации в Г ситуации $x \in X$ можно оценить числом $f_i[x]$ (то есть при любых неопределенностях $y \in Y$ функция $f_i(x,y)$ не может стать меньше $f_i[x]$). Заметим, что существование непрерывной на X скалярной функции $f_i[x]$ будет следовать из компактности (замкнутости и ограниченности) множеств X_i $(i \in \mathbb{N})$, Y и непрерывности $f_i(x,y)$ на $X \times Y$.

2. Коалиционная равновесность

Пусть $2^{\mathbb{N}}$ — множество всех коалиций (не пустых подмножеств множества $\mathbb{N}$), т. е. $2^{\mathbb{N}} = \{K | K \subseteq \mathbb{N}\}$. Для каждой коалиции $K \in 2^{\mathbb{N}}$ обозначим через $-K$ множество $\mathbb{N} \backslash K$, т. е. $-K = \mathbb{N} \backslash K$. В частности $-i = \mathbb{N} \backslash \{i\}$. Тогда коалиционная структура $\{K, -K\}$ является разбиением всего множества игроков $\mathbb{N}$. Для данной коалиционной структуры любую ситуацию $x = (x_1, \ldots, x_N)$ можно представить в виде $x = (x_K, x_{-K})$, где $x_K \in X_K = \prod_{j \in K} X_j$, $x_{-K} \in X_{-K} = \prod_{j \in \mathbb{N} \backslash K} X_j$.

Напомним два понятия из теории кооперативных игр без побочных платежей [1]: для ситуации $x^* \in X$ в игре гарантий

$$\Gamma^g = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} = \min_{y \in Y} f_i(x,y) \rangle$$

выполняется:

а) *условие индивидуальной рациональности* (при обозначениях $x = (x_i, x_{-i})$, $X_{-i} = \prod_{j \in \mathbb{N} \backslash \{i\}} X_j$), если

$$f_i[x^*] \geq f_i^0 = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i[x_i, x_{-i}] = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i[x_i^0, x_{-i}] \ \ (i \in \mathbb{N}),$$

в силу чего, если игрок i применяет максиминную стратегию x_i^0, то его выигрыш $f_i[x_i^0, x_{-i}] \geq f_i^0$ $\forall x_{-i} \in X_{-i}$ $(i \in \mathbb{N})$;

б) *условие коллективной рациональности*: x^* максимальна по Парето в N-критериальной задаче $\Gamma_v^g = \langle X, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, то есть при $\forall x \in X$ несовместна система неравенств $f_i[x] \geq f_i[x^*]$ $(i \in \mathbb{N})$, из которых, по крайней мере, одно неравенство строгое. Заметим, что если для любых $x \in X$ будет $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] \leq \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i[x^*]$, то x^* максимальна по Парето в Γ_v^g;

в) на основе модификаций концепций равновесия по Нэшу и по Бержу [2, 3, 4] для Γ^g введем *условие коалиционной рациональности*:

$$f_i[x^*] \geq f_i[x_K, x^*_{-K}] \quad \forall x_K \in X_K, \forall K \in 2^{\mathbb{N}} \ \ (i \in \mathbb{N}).$$

Определение 1. Ситуацию $x^* \in X$ назовем *коалиционно равновесной*, если она одновременно удовлетворяет условию индивидуальной рациональности, условию коллективной рациональности и условию коалиционной рациональности для «игры гарантий» Γ^g.

Замечание 1. Условие индивидуальной рациональности означает, что игроку имеет смысл объединяться с другим в коалицию, если при этом он получит выигрыш не меньший, чем он сам себе может «обеспечить», применяя свою максиминную стратегию. Условие коллективной рациональности приводит игрока к «самому большому» (в векторном смысле!) вектору выигрышей. Наконец условие коалиционной рациональности делает его выигрыш устойчивым к отклонению от x^* отдельных игроков или любых возможных коалиций.

3. Достаточное условие

В соответствии с определением 1, коалиционно равновесная ситуация x^* должна удовлетворять экстремальным ограничениям, «диктуемым» условиями индивидуальной и коллективной рациональности и условием коалиционной рациональности. Однако все эти условия являются следствием (N^2+1)-го неравенста:

$$\begin{gathered} f_i[x^*] \geq f_i[x_j^*, x_{-j}] \quad \forall x_{-j} \in X_{-j} \ \ (i, j \in \mathbb{N}), \\ \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x^*] \quad \forall x \in X, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$.

При формулировке достаточных условий существования коалиционно равновесной ситуации воспользуемся подходом, предложенным в [5]. Для этого введем N-вектор $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$ и $\varphi(x, z)$ — гермейеровскую свертку [6] функций $\varphi_r(x, z)$ $(r = 1, \dots, N+1)$:

$$\begin{gathered}\varphi_j(x, z) = \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_i[z_j, x_{-j}] - f_i[z]\} \ \ (j \in \mathbb{N}),\\ \varphi_{N+1}(x, z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[z],\\ \varphi(x, z) = \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z).\end{gathered} \tag{2}$$

Седловая точка $(x^0, z^*) \in X \times Y$ скалярной функции $\varphi(x, z)$ из (4) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z) \quad \forall\, x, z \in X. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если удалось найти седловую точку $(x^0, z^*) \in X \times X$ функции $\varphi(x, y)$, то минимаксная стратегия z^* является коалиционно равновесной ситуацией игры Γ^g.*

Доказательство. Действительно, при $z = x^0$ из (4) следует $\varphi(x^0, x^0) = 0$. Тогда по транзитивности из (5) получаем $[\varphi(x^0, z^*) \leq 0] \Rightarrow [\varphi(x, z^*) \leq 0 \quad \forall x \in X]$, что и означает, в силу (4), справедливость (3). $\square$

Замечание 2. Согласно теореме 1 построение коалиционно равновесной ситуации сводится к нахождению седловой точки (x^0, z^*) гермейеровской свертки $\varphi(x, z)$ из (4). Именно, получили следующий конструктивный способ построения коалиционнно равновесного решения игры Γ:

во-первых, построить по формуле (4) скалярную функцию $\varphi(x, z)$,

во-вторых, найти седловую точку (x^0, z^*) функции $\varphi(x, z)$ (удовлетворяющую цепочке неравенств из (5)),

в-третьих, определить значения N функций $f_i[x^*]$ $(i \in \mathbb{N})$.

Тогда пара $(z^*, f[z^*] = (f_1[z^*], \dots, f_N[z^*])) \in X \times \mathbb{R}^N$ образует коалиционное равновесие игры Γ^g: игрокам следует использовать свои стратегии из ситуации z^*, обеспечивая тем самым себе гарантии $f_i[z^*]$.

4. Существование коалиционного равновесия в смешанных стратегиях

Нужно обладать большим оптимизмом, чтобы надеятся найти ситуацию коалиционной равновесности в чистых стратегиях даже для игр двух лиц. Поэтому, следуя подходу Эмиля Бореля [8], Джона фон Неймана [9], Джона Нэша [2, 3] и их последователей, установим существование коалиционнно равновесной ситуации в смешанных стратегиях. Однако перед этим приведем ряд вспомогательных утверждений, на которые «опирается» доказательство теоремы существования.

4.1. **Вспомогательные сведения.** Здесь обозначаем через $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^{n_i}$ — множество всех компактов (замкнутых и ограниченных подмножеств евклидова n_i-мерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$), а непрерывность на $X \times Y$ скалярной функции $f_i(x,y)$ обозначаем $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$.

Рассматриваем снова кооперативную игру без побочных платежей Γ. Не оговаривая особо, предполагаем для элементов упорядоченного множества Γ выполнение следующих требований:

Условия 1.

$$X_i \in \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^{n_i} \quad (i \in \mathbb{N}), \quad Y \in \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^{m}, \quad f_i(\cdot) \in C(X \times Y). \tag{4}$$

Перейдем к понятию смешанного расширения игры Γ^g, включающее смешанные стратегии, ситуации, математическое ожидание функций выигрыша.

Будем предполагать, что для игры Γ выполнены ограничения (8), тогда $f_i(x,y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$, где $X = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$. На каждом компакте $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ — множество подмножеств X_i таких, что $X_i \in \mathfrak{B}(X_i)$, причем $\mathfrak{B}(X_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathfrak{B}(X_i)$, кроме того, $\mathfrak{B}(X_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта X_i. Согласно математической теории игр, *смешанную стратегию* i-го игрока $\nu_i(\cdot)$ будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* X_i. Вероятностная мера есть неотрицательная скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ- алгебре $\mathfrak{B}(X_i)$ подмножеств компакта $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(X_i)$ (свойство *счетной аддитивности* функции $\nu_i(\cdot)$);

2) $\nu_i(X_i) = 1$ (*свойство нормированности*) и поэтому $\nu_i\left(Q^{(i)}\right) \leq 1$ для всех $Q^{(i)} \in$ $\in \mathfrak{B}(X_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока ($i \in \mathbb{N}$). Построим ситуацию в смешанных стратегиях в виде меры-произведения

$$\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_N(dx_N),$$

множество которых обозначим через $\{\nu\}$, а также математическое ожидание $f_i[\nu] =$ $= \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)$. Получаем *смешанное расширение* игры гарантий Γ^g, обозначим которое через

$$\widetilde{\Gamma}^g = \langle \mathbb{N} = \{1,\ldots,N\}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{5}$$

Аналогично определению 1 введем

Определение 2. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем *коалиционно равновесной в смешанном расширении* (5) (или коалицонно равновесной ситуацией в смешанных стратегиях для игры $\widetilde{\Gamma}^g$), если

во-первых, ситуация $\nu^*(\cdot)$ коалиционно рациональна для игры (5), то есть

$$f_i[\nu_1,\ldots,\nu_j^*,\ldots,\nu_N] \leq f_i[\nu^*] \quad \forall\nu_k(\cdot) \in \{\nu_k\} \quad (k \in \mathbb{N}\setminus\{j\}\,;\;\; i,j \in \mathbb{N})$$

(множество коалиционно рациональных ситуаций игры (5) обозначим $\{\nu^*\}$);

во-вторых, $\nu^*(\cdot)$ максимальна по Парето в N-критеральной задаче

$$\widetilde{\Gamma}^g_v = \langle\{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

то есть при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ несовместна система неравенств

$$f_i[\nu] \geq f_i[\nu^*] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

Очевидно достаточное условие максимальности по Парето; оно составляет содержание следующего замечания.

Замечание 3. Смешанная ситуация $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ максимальна по Парето в $\widetilde{\Gamma}_v^g = \langle\{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, если

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[\nu] = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[\nu^*].$$

Утверждение 1. *Если в игре Γ^g множества $X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, то для функции*

$$\varphi(x,z) = \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x,z) \tag{6}$$

имеет место неравенство

$$\max_{r=1,\dots,N+1} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \tag{7}$$

при любых $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; здесь, напомним, скалярные функции $\varphi_r(x,z)$ определены в (4).

Доказательство. В самом деле, из (6) для каждого $x, z \in X$ следует

$$\varphi_r(x,z) \le \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x,z) \ \ (r = 1,\dots,N+1).$$

Интегрируя затем обе части этих неравенств с произвольной мерой-произведением $\mu(dx)\nu(dz)$ в качестве интегрируемой меры, получаем

$$\varphi_r(\mu,\nu) = \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz)$$

при всех $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ и каждом $r = 1,\dots,N+1$. Поэтому

$$\max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(\mu,\nu) = \max_{r=1,\dots,N+1} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \le$$

$$\le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \ \ \forall\mu(\cdot) \in \{\nu\}, \nu(\cdot) \in \{\nu\},$$

что доказывает (7).

□

Замечание 4. Фактически (7) является обобщением известного свойства операции взятия максимума: максимум суммы не больше суммы максимумов.

Утверждение 2. *Если в игре* Γ^g *выплнены условия 1, то функция* $\varphi(x, z)$ *из (6) непрерывна на* $X \times (Z = X)$.

Доказательство даже более общего утверждения (непрерывность функции максимума конечного числа непрерывных функций) имеется во многих учебных пособиях по исследованию операций, например, в [7, с. 54, 187].

4.2. **Теорема существования.** Приведем центральный результат настоящего раздела статьи: докажем существование коалиционно равновесной ситуации в смешанных стратегиях в игре Γ^g при выполнении условий (8).

Теорема 2. *Если в игре* Γ^g *множества* $X_i \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, *то в этой игре существует коалиционно равновесная ситуация в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{1, 2\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x, z) \rangle.$$

В игре Γ^a множество X стратегий x первого (максимизирующего $\varphi(x, z)$) игрока совпадает с тем же X. Одним из решений Γ^a является *седловая точка* $(x^0, z^*) \in \in X \times X$, именно, для нее при всех $x \in X$ и каждом $z \in X$ имеет место цепочка неравенств

$$\varphi(x, z^*) \leq \varphi(x^0, z^*) \leq \varphi(x^0, z).$$

Теперь игре Γ^a поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\widetilde{\Gamma}^a = \langle \{1, 2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \varphi(\mu, \nu) \rangle,$$

где $\{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\nu(\cdot)$ второго, а $\{\mu\} = \{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\mu(\cdot)$ первого игрока, функция выигрыша первого (математическое ожидание)

$$\varphi(\mu, \nu) = \int\limits_{X \times X} \varphi(x, z) \mu(dx) \nu(dz). \tag{8}$$

Решением игры $\widetilde{\Gamma}^a$ (смешанного расширения Γ^a) также будет *седловая точка* (μ^0, ν^*), определяемая двумя последовательными неравенствами

$$\varphi(\mu, \nu^*) \leq \varphi(\mu^0, \nu^*) \leq \varphi(\mu^0, \nu) \tag{9}$$

при любых $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Эту пару (μ^0, ν^*) иногда называют *решением игры* Γ^a *в смешанных стратегиях.*

В 1952 г. Ирвинг Гликсберг установил [10] теорему существования равновесной по Нэшу ситуации бескоалиционной игры $N \geq 2$ лиц в смешанных стратегиях, откуда (для частного случая — антагонистической игры Γ^a) следует утверждение: пусть в игре Γ^a множество $X \subset \mathbb{R}^n$ суть непустой компакт, а функция выигрыша первого игрока $\varphi(x, z)$ непрерывна на $X \times X$ (у нас непрерывность $\varphi(x, z)$ — в утверждении 2). Тогда для игры Γ^a существует решение (μ^0, ν^*), определенное в (9), то есть существует седловая точка в смешанных стратегиях.

С учетом (8) неравенства (9) примут вид

$$\int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leq$$
$$\leq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu^0(dx)\nu^*(dz) \leq$$
$$\leq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Положив в

$$\varphi(\mu^0, \nu) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

меру $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ и тогда $\nu(dz) = \mu^0(dx)$, получаем, с учетом (9), что $\varphi(\mu^0, \mu^0) = 0$. Аналогично приходим к $\varphi(\nu^*, \nu^*) = 0$ и тогда из (9) имеем

$$\varphi(\mu^0, \nu^*) = 0.$$

Из $\varphi(\mu^0, \nu^*) = 0$ и неравенства в (9) (по транзитивности) приходим к

$$\varphi(\mu, \nu^*) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leq 0 \ \ \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Согласно утверждению 1 отсюда получаем

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,\dots,N+1} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \geq \max_{r=1,\dots,N+1} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz).$$

Поэтому для всех $r = 1, \dots, N+1$ будет

$$\int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \le 0 \ \ \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Выделим два случая.

I случай ($r = 1, \dots, N$). Здесь, согласно (4) и нормированности $\nu(\cdot)$, приходим, например, при $r = 1$

$$0 \ge \int\limits_{X\times X} \varphi_1(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{X\times X} \max_{i\in\mathbb{N}} \{f_i[z_1, x_2, \dots, x_N] - f_i[z]\}\, \mu(dx)\nu^*(dz) \ge$$

$$\ge \int\limits_{X\times X} f_i[z_1, x_2, \dots, x_N]\mu(dx)\nu^*(dz) - \int\limits_X f_i[z]\nu^*(dz) \int\limits_X \mu(dx) =$$

$$= f_i[\nu_1^*, \mu_2, \dots, \mu_N] - f_i[\nu^*] \ \ (i \in \mathbb{N}).$$

Аналогично устанавливается справедливость при $r = 2, \dots, N$ следующих неравенств:

$$0 \ge f_i[\mu_1, \nu_2^*, \mu_3, \dots, \mu_N] - f_i[\nu^*],$$

$$\dots$$

$$0 \ge f_i[\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \nu_N^*] - f_i[\nu^*]$$

для $i \in \mathbb{N}$.

Согласно определению 2 тогда $\nu^*(\cdot)$ — ситуация коалиционной рациональности в смешанных стратегиях для игры Γ^g.

II случай ($r = N + 1$). Согласно (4) и нормированности $\nu(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$, приходим к

$$0 \ge \int\limits_{X\times X} \left[\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[z]\right] \mu(dx)\nu^*(dz) =$$

$$= \int\limits_X \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x]\mu(dx) \int\limits_X \nu^*(dz) - \int\limits_X \mu(dx) \int\limits_X \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[z]\nu^*(dz) =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[\mu] - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[\nu^*].$$

Тогда, учитывая замечание 3 видим, что ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot) \in \in \{\nu\}$ игры Γ^g будет максимальна по Парето в N-критериальной задаче

$$\widetilde{\Gamma}^g_v = \langle \{\nu\}, \{f_i[\nu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Таким образом, для ситуации в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ игры $\widetilde{\Gamma}^g$ установлена ее коалиционная рациональность и одновременно максимальность по Парето. Следовательно, в силу определения 2, ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ будет коалиционно равновесной в игре $\widetilde{\Gamma}^g$ и пара $(\nu^*, f[\nu^*])$ образует коалиционное равновесие в смешанных стратегиях для $\widetilde{\Gamma}^g$.

$\square$

Заключение

В первую очередь здесь отметим новые в теории кооперативных игр результаты, полученные в настоящей статье.

Во-первых, формализовано понятие коалиционного равновесия, учитывающее интересы любой коалиции в игре N лиц.

Во-вторых, установлен конструктивный способ нахождения коалиционного равновесия, сводящийся к отысканию минимаксной стратегии для специальной гермейеровской свертки, эффективно строящейся по гарантиям функций выигрыша игроков.

В-третьих, доказано существование коалиционного равновесия в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр условиях (непрерывность функций выигрыша и компактность множества стратегий игроков и неопределенностей).

На наш взгляд, немаловажным являются и новые качественные результаты, следующие из настоящей статьи:

1) ситуация коалиционного равновесия $x^* \in X$ устойчива к отклонению от нее любых возможных коалиций; игроки отклонившейся коалиции либо «ухудшат» — уменьшат свои гарантированные выигрыши, либо оставят их прежними;
2) понятие коалиционного равновесия применимо, если даже в течение игры меняются коалицонные структуры или даже если все коалиции остаются в наличии;
3) коалиционное равновесие можно использовать при создании устойчивых союзов (альянсов) игроков;

и это далеко не все достоинства коалиционного равновесия!

Но есть еще одно достоинство, которое считаем нужным отметить.

До сих пор в теории кооперативных игр особо акцентировались условия индивидуальной и коллективной рациональности. Но индивидуальным интересам игроков отвечает концепция равновесности по Нэшу с ее «эгоистическим» характером («каждому свое»); коллективной более соответствует концепция равновесности по Бержу с ее «альтруизмом» («помогать всем, забывая порой о своих интересах»). Однако, такая «забывчивость» не свойственна человеческой сущности игроков. Этот негатив обеих концепций «снимает» коалиционная рациональность.

Список литературы

1. LUCE, R. D. and RAIFFA, H. (1957) *Games and decisions.* New York: John Wiley and Sons, Inc.
2. NASH, J. (1951) Non-cooperative games. *Annales of Mathematics.* 54 (2). p. 286–295.
3. NASH, J. (1950) Equillibrium points in N-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 36 (1). p. 48–49.
4. BERGE, C. (1957) *Théorie générale des jeux a n personnes.* Paris: Gauthier-Villar.
5. ZHUKOVSKIY, V., TOPCHISHVILI, A & SACHKOV, S. (2014) Application of probability measures to the existence of Berg-Vaisman quaranteed equilibrium. *Model Assisted Statistics and Applications.* 9 (3). p. 223–239.
6. Гермейер, Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 328 с.

   GERMEIER, Yu. B. (1986) *Non-antagonistic games.* Boston: Springer Netherlands.
7. Морозов, В. В., Сухарев, А. Г., Федоров, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1986. — 286 с.

   MOROZOV, V., SUKHAREV, A. and FEDOROV, V. (1968) *Operational research in problems and exercises.* Moscow: Higher school.
8. BOREL, E. (1921) La théorie du jeu et les équations intégrales a noyau symétrique. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* 173. p. 1304–1308.
9. NEUMANN, J. v. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Mathematische Annalen.* 100 (1). p. 295–320.
10. Гликсберг, И. Л. Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша // Бесконечные антагонистические игры / Н. Н. Воробьев. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 497–503.

    GLICKSBERG, I. L. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.*. 3 (1). p. 170–174.

УДК: 517.98

MSC2010: 35D35

ЗАДАЧА КОШИ, ПОРОЖДЕННАЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТОЙ ЛЬДОМ

© Н. Д. Копачевский, Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Cauchy problem generated by oscillations of stratified fluid partially closed by ice.

Kopachvsky N. D., Tsvetkov D. O.

Abstract.

In the paper, we study the Cauchy problem for the differential second-order equation in Hilbert space $\mathscr{H} = H_1 \oplus H_2$ of the following form

$$\mathscr{C}\frac{d^2u}{dt^2} + \mathscr{B}_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1,$$

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{B}_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right],$$

$$u = (u_1; u_2)^t, \qquad f = (f_1; f_2)^t.$$

Here $u = u(t)$ is an unknown function, $f = f(t)$ is a given function, I_1 is the identity operator,

$$0 < A = A^* \in \mathscr{L}(H_2), \qquad 0 \leq \mathscr{B} = \mathscr{B}^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

For the operator N, two situations are considered.

Situation 1. $N = I_2$ is the identity operator acting in H_2. This situation is possible in the study of the Cauchy problem generated by the oscillations of a stratified fluid partially covered with crumbled ice. Under the crumbled ice we understand that on the free surface float ponderable particles of some substance, the interaction of which one with another is negligibly small.

Situation 2. $N = N^* \gg 0$, $\overline{\mathscr{D}(N)} = H_2$. This situation is possible in the study of the Cauchy problem generated by oscillations of a stratified fluid partially covered with the elastic ice. Elastic ice is modeled by an elastic plate.

We find sufficient conditions for the existence of a strong (with respect to time variable) solution of initial Cauchy problems.

Keywords: *stratification effect in ideal fluids, differential equation in Hilbert space, Cauchy problem, strong solution.*

Введение

В работе изучаются абстрактные задачи Коши для дифференциальных уравнений, возникающие при исследовании малых движений идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным или упругим льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества (см., [1]). Упругий лед моделируется упругой пластиной, близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном (см. [2]).

Ситуация, когда однородная жидкость частично покрыта крошеным или упругим льдом, рассмотрена в работе [3]. Установлено, что когда жидкость является стратифицированной, то соответствующая начально-краевая задача сводится к абстрактной задачи Коши для дифференциального уравнения с более общими свойствами для операторных коэффициентов, чем в работе [3]. Данный факт не позволяет воспользоваться известной теоремой о существовании и единственности сильного решения (см., например, [4, с.44]), в связи с этим требуются дополнительные построения.

1. Задача Коши, возникающая в случае крошеного льда

Пусть $\mathscr{H} = H_1 \oplus H_2$ – произвольное комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ задачу Коши для дифференциального уравнения, возникающего при исследовании малых движений идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным льдом

$$\mathscr{C}\frac{d^2u}{dt^2} + \mathscr{B}_{I_2}u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u^{'}(0) = u^1, \tag{1}$$

где

$$\mathscr{C} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{B}_{I_2} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\right], \tag{2}$$

$$u = (u_1; u_2)^t, \qquad f = (f_1; f_2)^t.$$

Здесь $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $\mathscr{H}$, $f = f(t)$ — заданная функция, I_i — единичные операторы в H_i $(i = 1, 2)$. Для операторных коэффициентов выполнены условия

$$0 < A = A^* \in \mathscr{L}(H_2), \qquad 0 \le \mathscr{B} = \mathscr{B}^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mathscr{L}$ — пространство ограниченных операторов.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1 \\ Au_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I_2 + B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Осуществляя замену $Au_2 = y_2$ в (4), перейдем от задачи (1) к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathscr{A}v = f + Rv, \quad v(0) = (u_1(0); y_2(0))^t, \quad v^{'}(0) = (u_1^{'}(0); y_2^{'}(0))^t, \quad (5)$$

$$\mathscr{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1; f_2)^t, \quad v = (u_1; y_2)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_1 + B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & I_2 + B_{22} \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}, \; \mathscr{D}(\mathscr{A}) = \mathscr{D}(I_B F) = \mathscr{D}(F). \quad (6)$$

Введем эквивалентную норму в пространстве $\mathscr{H} = H_1 \oplus H_2$:

$$[v_1; v_2] := (I_B^{-1} v_1; v_2),$$

тогда

$$[I_B F v_1; v_2] = (F v_1; v_2) = (v_1; F v_2) = (v_1; I_B^{-1} I_B F v_2) = [v_1; I_B F v_2],$$

следовательно, $\mathscr{A} = I_B F$ – самосопряженный оператор, более того, он является неограниченным и положительно определенным оператором (см. (25)).

Определение 1. Сильным (по переменной t) решением задачи (5) на отрезке $[0, T]$ назовем такую функцию $v(t)$ со значениями в $\mathscr{H}$, для которой выполнены следующие условия:

1°. $v(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ при любом $t \in [0; T]$ и $\mathscr{A}v(t) \in C([0; T]; \mathscr{H})$;

2°. $v^{'}(t) \in C^1\big([0; T]; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\big)$;

3°. $v^{''}(t) \in C([0; T]; \mathscr{H})$;

4°. выполнено уравнение (5), где все слагаемые – функции из $C([0; T]; \mathscr{H})$, и начальные условия.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$v(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) = \mathscr{D}(I_B F) = \mathscr{D}(F), \quad v'(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) = \mathscr{D}((I_B F)^{1/2}) = \mathscr{D}(F^{1/2}), \quad (7)$$

$$f(t) \in C^1([0; T]; \mathscr{H}), \quad \mathscr{H} = H_1 \oplus H_2, \quad (8)$$

тогда задача (5) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0; T]$.

Доказательство. Если для задачи Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathscr{A}v = g, \quad v(0) = v^0, \quad v^{'}(0) = v^1, \quad \mathscr{A} = \mathscr{A}^* \gg 0, \tag{9}$$

выполнены условия

$$v(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}), \quad v'(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}), \quad g(t) \in C^1\left([0;T];\mathscr{H}\right), \tag{10}$$

то задача (9) имеет единственное сильное решение $v = v_0(t)$ на отрезке $[0;T]$, выражаемое формулой (см. [4, с.67])

$$v_0(t) = \cos(t\mathscr{A}^{1/2})v^0 + \mathscr{A}^{-1/2}\sin(t\mathscr{A}^{1/2})v^1 + \int\limits_0^t \mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)g(s)ds, \tag{11}$$

где $\cos(t\mathscr{A}^{1/2})$ и $\mathscr{A}^{-1/2}\sin(t\mathscr{A}^{1/2})$ – семейство операторных косинус-функций и синус-функций, построенное по $\mathscr{A}$ (см., например, [4, с.48-56]).

Обозначим в (5)

$$\widehat{g}(t) = g(t) + Rv.$$

Считая, что $\widehat{g}(t)$ известна, и используя формулу (11) для решения задачи Коши (9), приходим для искомой функции $v(t)$ к следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$v(t) = \cos(t\mathscr{A}^{1/2})v^0 + \mathscr{A}^{-1/2}\sin(t\mathscr{A}^{1/2})v^1 + \int\limits_0^t \mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)g(s)ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0(t) + \int\limits_0^t \mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds. \tag{12}$$

Здесь $v_0(t)$ задана формулой (11) и строится по данным (10), причем она в силу условий (10) является сильным решением задачи (9). Это означает, в частности, что

$$v_0(t) \in C^2\left([0;T];\mathscr{H}\right) \cap C^1\left([0;T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\right) \cap C\left([0;T];\mathscr{D}(\mathscr{A})\right). \tag{13}$$

Отметим, что $\mathscr{A}^{-1/2}\sin(t\mathscr{A}^{1/2})Rv(s)$ непрерывно дифференцируема по t (см., например, [5, 6], а также свойство 3 из [4, с.51]) , следовательно, уравнение (12) имеет решение $v(t) \in C\left([0;T];\mathscr{H}\right)$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы сводится к проверке того, что выполнены свойства 2°, 3° и 4° из определения сильного решения задачи (5).

Формальное дифференцирование обеих частей (12) приводит к формулам

$$v'(t) = v_0'(t) + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds = v_0'(t) + \tag{14}$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{A}^{-1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds = v_0'(t) + \int\limits_0^t \cos\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)\,ds\,;$$

$$v''(t) = v_0''(t) + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \cos\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s) = \tag{15}$$

$$= v_0''(t) + Rv(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\cos\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)\right\}ds =$$

$$= v_0''(t) + Rv(t) - \int\limits_0^t \mathscr{A}^{1/2}\sin\left((t-s)\mathscr{A}^{1/2}\right)Rv(s)ds.$$

Из полученных формул (14) и (15) можно сделать следующие выводы. Так как в силу (13) $v_0'(t) \in C\left([0;T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\right)$, то из (14), а также того, что оператор-функция $\cos(t\mathscr{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема по t, следует свойство 2° из определения сильного решения, т.е. $v'(t) \in C\left([0;T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})\right)$. Далее, так как $v_0''(t) \in C([0;T];\mathscr{H})$, тогда из (15) и того, что оператор-функция $\mathscr{A}^{-1/2}\sin(t\mathscr{A}^{1/2})$ непрерывно дифференцируема, получаем свойство 3°, т.е. $v''(t) \in C([0;T];\mathscr{H})$.

Наконец, непосредственный подсчет показывает, что функция $v(t)$ являющаяся решением уравнения (12), удовлетворяет также исходному уравнению (5), причем все слагаемые в нем — непрерывные функции t со значениями в $\mathscr{H}$.

Заметим еще, что из (12) следует, что $v(0) = v_0(0) + 0 = v_0(0)$, а из (14) $v'(0) = v_0'(0) + 0 = v_0'(0)$. Теорема доказана. □

Лемма 1. *Если в задаче* (1) – (2) *выполнены условия:*

$$u^0 \in \mathscr{H}, \quad u^1 \in \mathscr{H}, \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathscr{H}), \tag{16}$$

то имеют место начальные условия (7) – (8) *в задаче* (5).

Доказательство. С учетом замены $Au_2 = y_2$, пусть выполнены условия (7) – (8), тогда имеем

$$\left(\, v^0 = (u_1^0; y_2^0)^t \in \mathscr{D}(I_B F) = \mathscr{D}(F)\,\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \left(u_1^0 \in H_1,\ y_2^0 = Au_2^0 \in \mathscr{D}(A^{-1})\,\right),$$

последнее условие равносильно тому, что $u_2^0 \in H_2$.

Далее,

$$\big(\ v^1=(u_1^1;y_2^1)^t\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})=\mathscr{D}((I_BF)^{1/2})=\mathscr{D}(F^{1/2})\ \big)\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad\Big(\ u^1\in\vec{H}_1,\quad y_2^1=Au_2^1\in\mathscr{D}(A^{-1/2})\ \Big)\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad\Big(\ u_1^1\in\vec{H}_1,\quad A^{-1/2}Au_2^1=A^{1/2}u_2^1\in H_2\ \Big)\quad\Longleftrightarrow\quad\big(\ u_1^1\in H_1,\quad u_2^1\in H_2\ \big).$$

$\square$

2. Задача Коши, возникающая в случае упругого льда

Пусть $\mathscr{H}=H_1\oplus H_2$ – произвольное комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим в $\mathscr{H}$ задачу Коши для дифференциального уравнения возникающего, при исследовании малых движений идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой упругим льдом

$$\mathscr{C}\frac{d^2u}{dt^2}+\mathscr{B}_Nu=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u^{'}(0)=u^1, \tag{17}$$

где

$$\mathscr{C}=\begin{pmatrix} I_1 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix},\qquad \mathscr{B}_N=\left[\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\right], \tag{18}$$
$$u=(u_1;u_2)^t,\qquad f=(f_1;f_2)^t.$$

Здесь, как и прежде, $u=u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в $\mathscr{H}$, $f=f(t)$ — заданная функция, I_i — единичные операторы в H_i $(i=1,2)$. Для операторных коэффициентов выполнены условия

$$0<A=A^*\in\mathscr{L}(H_2),\qquad 0\ll N=N^*,\quad \overline{\mathscr{D}(N)}=H_2, \tag{19}$$

$$0\le\mathscr{B}=\mathscr{B}^*\in\mathscr{L}(\mathscr{H}),\quad \mathscr{B}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Перепишем уравнение (17) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1\\ Au_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I_1+B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & N+B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Осуществим замену $N^{1/2}u_2=w_2$ в (21) и применим оператор $\operatorname{diag}(I_1;N^{-1/2})$ к обеим частям уравнения, в результате приходим к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u_1\\ N^{-1/2}AN^{-1/2}w_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I_1+B_{11} & B_{12}N^{-1/2}\\ N^{-1/2}B_{21} & I_2+N^{-1/2}B_{22}N^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ w_2\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 \\ N^{-1/2} f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Пусть теперь $N^{-1/2} A N^{-1/2} w_2 = y_2$, что равносильно

$$A_N w_2 := N^{-1/2} A N^{-1/2} w_2 = N^{-1/2} A N^{-1/2} (N^{1/2} u_2) = N^{-1/2} A u_2 = y_2. \tag{23}$$

С учетом сказанного приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \mathscr{A} v = f + Rv, \quad v(0) = (u_1(0); y_2(0))^t, \quad v'(0) = (u_1'(0); y_2'(0))^t, \tag{24}$$

$$\mathscr{A} := I_B F, \quad R = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = (f_1; N^{-1/2} f_2)^t, \quad v = (u_1; y_2)^t,$$

$$I_B = \begin{pmatrix} I_1 + B_{11} & B_{12} N^{-1/2} \\ N^{-1/2} B_{21} & I_2 + N^{-1/2} B_{22} N^{-1/2} \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A_N^{-1} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия:*

$$u^0 \in H_1 \oplus \mathscr{D}(N^{1/2}), \quad u^1 \in H_1 \oplus \mathscr{D}(N^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathscr{H}), \tag{26}$$

то существует единственное сильное решение задачи (17).

Доказательство. Пусть выполнены условия

$$v(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}), \quad v'(0) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0;T]; \mathscr{H}),$$

тогда задачи Коши (24), согласно теореме 1, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$. С учетом замены (23) имеем

$$\left(v^0 = (u_1^0; y_2^0)^t \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) \right) \iff \left(u_1^0 \in H_1, \quad y_2^0 \in \mathscr{D}(A_N^{-1}) \right) \iff$$
$$\iff \left(u_1^0 \in H_1, \quad A_N^{-1} y_2^0 = A_N^{-1} (N^{-1/2} A N^{-1/2}) N^{1/2} u_2^0 \in H_2 \right) \iff$$
$$\iff \left(u_1^0 \in H_1, \quad u_2^0 \in \mathscr{D}(N^{1/2}) \right).$$

Далее,

$$\left(v^1 = (u_1^1; y_2^1)^t \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \right) \iff \left(u_1^1 \in H_1, \quad y_2^1 \in \mathscr{D}(A_N^{-1/2}) \right) \iff$$
$$\iff \left(u_1^1 \in H_1, \quad A_N^{-1/2} y_2^1 = A_N^{-1/2} A_N N^{1/2} u_2^1 = A_N^{1/2} N^{1/2} u_2^1 \in H_2 \right) \iff$$
$$\iff \left(u_1^1 \in H_1, \quad u_2^1 \in \mathscr{D}(N^{1/2}) \right).$$
$$f(t) \in C^1([0;T]; \mathscr{H}) \iff \left(f_1 \in C^1([0;T]; H_1), \ N^{-1/2} f_2 \in C^1([0;T]; H_2) \right) \iff$$
$$\iff \left(f_1 \in C^1([0;T]; H_1), \quad f_2 \in C^1([0;T]; H_2) \right).$$

Здесь оператор $N^{-1/2}$ является ограниченным оператором. $\square$

3. Заключительные замечания

Замечание 1. Теорему существования сильного решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения (5) можно доказать также, опираясь на следующие преобразования, изложенные в [7, с.291-293], применительно к уравнению

$$v'' + I_B F v = g + Rv, \tag{27}$$

рассматриваемому в гильбертовом пространстве H.

Введем новые искомые функции

$$F^{1/2}v =: u, \quad u' = F^{1/2}v' = F^{1/2}w, \quad v' = w, \tag{28}$$

и перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -I_B F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_B & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g + RF^{-1/2}u \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь оператор $\mathrm{diag}(I_B; I_2)$ ограничен и положительно определен, а оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & iF^{1/2} \\ -iF^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

является генератором унитарной группы операторов, действующей в пространстве $H \oplus H$. Поэтому произведение таких операторов обладает таким же свойством в пространстве с эквивалентной нормой, определяемой оператором $\mathrm{diag}(I_B^{-1}; I_2)$.

Далее, дополнительное слагаемое, определяемое выражением $(RF^{-1/2}u; 0)^t$, соответствует ограниченному возмущению генератора унитарной и потому сильно непрерывной группы операторов. Поэтому операторный коэффициент в полученной задаче Коши является генератором сильно непрерывной группы операторов. Значит, если выполнены условия

$$F^{1/2}v^0 = u^0 \in \mathscr{D}(F^{1/2}) \iff v^0 \in \mathscr{D}(F), \;\; v^1 = w^0 \in \mathscr{D}(F^{1/2}), \quad g(t) \in C^1\left([0,T]; H\right).$$

то задача (29) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$ (теорема 1).

Замечание 2. Теорему 1 можно доказать также, опираясь на тот факт, что в задаче (27) оператор $I_B F$ является самосопряженным и положительно определенным в пространстве с эквивалентной нормой. Поэтому он является генератором семейства косинус-функций, действующих в этом пространстве (см. [8, с.175-177]). Далее, так как оператор R из (5) ограничен, то возмущенный оператор $I_B F - R$, согласно теореме

8.5 из [8, с.177], также является генератором семейства косинус-функций. Отсюда снова следует, что при выполнении условий (7), (8) задача (5) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.

Авторы благодарят Д.А. Закору за внимание к работе, замечания и полезные советы.

Список литературы

1. Габов С. А. Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией / Дифференциальные уравнения. — 1988, Т. 24, № 1. — 16–21 с.

   GABOV, S. A. (1988) About one hydrodynamics problems of an ideal fluid associated with flotation. Differential equations. Vol. 24, no. 1, pp. 16–21

2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G., NGO ZUY CAN (1989) Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. Moscow.

3. Солдатов М. А. Колебания жидкости в бассейне, частично покрытом льдом / Ученые записки СГУ. — 2000, Т. 12, № 2. — 80–83 с.

   SOLDATOV, M. A. (2000) Oscillations of fluids in a basin partially closed by ice. Scientific notes of Simferopol state University. Vol. 12, no. 2, pp. 80–83.

4. Копачевский Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций / Копачевский Н. Д. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012. — 152 с.

   KOPACHEVSKY, N. D. (2012) Volterra integro-differential equations in Hilbert space: Special lecture course. Simferopol.

5. *SOWA, M.* Cosine operator functions // Rozpr. Math. — 1966. — *49*. — pp. 1–47.

6. *Иванов В. К., Мельников И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматлит, 1995. — 176 с.

   IVANOV, V. K., MELNOKOV, I. V. and FILINKOV, A. I. (1995) Differential-operator equations and ill-posed problems. Moscow.

7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   KREIN, S. G. (1967) Linear differential equations in Banach space. Moscow.

8. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — К.: Выща школа, 1989. — 347 с.

   JEROME A. GOLDSTEIN (1989) Semigroups of linear operators and applications. Kiev.

УДК: 517.984.48

MSC2010: 47B44, 47A20

ИЗОМОРФИЗМ СПЕКТРАЛЬНОГО И ТРАНСЛЯЦИОННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

© Ю. Л. Кудряшов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *kudryashov_2889@mail.ru*

Isomorphism of spectral and translational presentations of self-adjoint dilation of dissipative operator.

Kudryashov Yu. L.

Abstract. Let A be a linear dissipative operator with dense domain $\mathfrak{D}(A)$ in Hilbert space $\mathfrak{H}$ and $-i \in \rho(A)$. We consider the self-adjoint operators $B = iR - iR^* - 2R^*R$, $\widetilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*$, where $R = (A + iI)^{-1}$. Let $Q = \sqrt{B}$, $\widetilde{Q} = \sqrt{\widetilde{B}}$, $\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}_2 = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$.

1. Spectral presentation. We consider the Hilbert spaces $H_+ = L_2(0, \infty; \mathfrak{H}_1)$, $H_- = L_2(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2)$, $H = H_- \bigoplus \mathfrak{H} \bigoplus H_+$ and operator S, $h = (h_-, h_0, h_+) \in \mathfrak{D}(S)$ if and only if

a) $\left\{h_\pm, \dfrac{dh_\pm}{dt}\right\} \subset H\pm$,

b) $\varphi = h_0 + \widetilde{Q}h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,

c) $h_+(0) = T^* h_-(0) + iD\varphi$,

where $T^* = I + 2iR^*$, $D = Q(A + iI)$. $S(h_-, h_0, h_+) = \left(i\dfrac{dh_-}{dt}, -ih_0 + (A + iI)\varphi, \dfrac{dh_+}{dt}\right)$. S is dilatation of A.

2. Translational presentation. We consider the Hilbert spaces $\mathfrak{H}_- = \overset{-1}{\underset{-\infty}{\oplus}} \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_+ = \overset{1}{\underset{\infty}{\oplus}} \mathfrak{H}_1$ and $\mathbf{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_+$, $f = (\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots) \in \mathbf{H}$ if and only if $\sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty$, $f_0 \in \mathfrak{H}$, $f_n \in \mathfrak{H}_1$, $f_{-n} \in \mathfrak{H}_2$, $n \in \mathbb{N}$. We consider the operators $S_+ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $S_- f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k}$. $f \in \mathfrak{D}(S_\text{т})$ if and only if

a) $f \in \mathfrak{D}(S_+) \bigcap \mathfrak{D}(S_-)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|S_n f\|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|S_{-n} f\|^2 < \infty$,

where $S_n f = -\dfrac{1}{2} f_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$, $S_{-n} = \dfrac{1}{2} f_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{-k}$.

b) $\varphi' = f_0 + \widetilde{Q} S_- f \in \mathfrak{D}(A)$.

c) $S_+ f = T^* S_- f + iD\varphi'$ and $S_\text{т} f = (\ldots g_{-1}, g_0, g_1, \ldots)$,

where $g_0 = -if_0 + (A + iI)\varphi'$, $g_n = iS_n f$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. $S_\text{т}$ is dilatation of A.

Theorem 1. *If the spaces $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ are separable, then the dilations S and $S_\text{т}$ are isomorphic.*

Keywords: *dissipative operator, self-adjoint dilation, isomorphism of dilations.*

Введение

Унитарную дилатацию оператора сжатия впервые построил Б. С. Надь [1]. Существование самосопряженной дилатации диссипативного оператора следует из преобразования Кэли. Поэтому задача сводится к явному построению такой дилатации. В случае ограниченного диссипативного оператора самосопряженная дилатация была построена Б. С. Павловым [2, 3].

Различными методами в работах [4, 5] была построена самосопряженная дилатация не обязательно ограниченного диссипативного оператора в общем виде. При этом также дилатации строились и для конкретных дифференциальных выражений [6, 7, 8]. При использовании дилатации, например, при построении функциональной модели, существенную роль играет изоморфизм тех представлений дилатации, которые при этом используются.

Изоморфизм представлений самосопряженной дилатации в случае ограниченного диссипативного оператора, который был получен в [2, 10], и спектрального представления такой дилатации был установлен в [9].

Определение 1. Оператор D, действующий в гильбертовом пространстве H называется дилатацией оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{H} \subset H$ и выполняется одно из следующих эквивалентных между собой условий:

1. $(A-\lambda I)^{-1}h = P(D-\lambda I)^{-1}h$, $\forall h \in \mathfrak{H}$, $\forall \lambda \in w(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(D)$, где $w(\lambda_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точек λ_0.

2. $R^n(A, \alpha)h = PR^n(D, \alpha)h$, $\forall h \in \mathfrak{H}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \rho(A) \cap \rho(D)$, где $R(T, \lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$, P — оператор ортогонального проектирования в H на $\mathfrak{H}$.

Определение 2. Дилатации D_1 и D_2 оператора A, действующие соответственно в пространствах H_1 и H_2, называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что

1. $Uh = h$ $(\forall h \in \mathfrak{H})$.
2. $D_2 = UD_1U^{-1}$.

Основной результат

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{B}$ — дилатация оператора A, действующая в H $(\mathfrak{H} \subset H)$. Если при этом оператор $\mathbb{B}_1$, действующий в H_1, удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\mathfrak{H} \subset H_1$.
2. *Существует унитарное отображение U пространства H на H_1 такое, что*

a) $Uh = h$ $(\forall h \in \mathfrak{H})$,

b) $\mathbb{B}_1 = U\mathbb{B}U^{-1}$,

то $\mathbb{B}_1$ — дилатация оператора A.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(\mathbb{B})$. Тогда в силу унитарной эквивалентности операторов $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}_1$, $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(\mathbb{B}_1)$.

При этом для любого $h \in \mathfrak{H}$ выполняется:

$$(A - \lambda I)^{-1} h = P(\mathbb{B} - \lambda I)^{-1} h = P(U^{-1}\mathbb{B}_1 U - \lambda I)^{-1} h =$$
$$P_1(\mathbb{B}_1 - \lambda I)^{-1} U h = P_1(\mathbb{B}_1 - \lambda I)^{-1} h,$$

где P — ортопроектор в H на $\mathfrak{H}$, $P_1 = PU^{-1}$.

Учитывая свойства оператора U, имеем $P_1 = UPU^{-1}$. Это означает, что P_1 — оператор ортогонального проектирования из H_1 на $\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathbb{B}_1$ — дилатация оператора A. $\square$

Пусть A — диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$ и $-i \in \rho(A)$.

В дальнейших построениях будем использовать следующие операторы:

$$B = iR - iR^* - 2R^*R, \ \widetilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*,$$

где $R = (A + iI)^{-1}$.

Так как $B \geq 0$ и $\widetilde{B} \geq 0$, то существуют операторы $Q = \sqrt{B}$ и $\widetilde{Q} = \sqrt{\widetilde{B}}$.

1. Спектральное представление

Рассмотрим пространства вектор-функции:

$$H_+ = L_2(0, \infty; \mathfrak{H}_1) \text{ и } H_- = L_2(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2),$$

где $\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}_2 = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$.

Образуем гильбертово пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ и построим в нем оператор S следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in \mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1. $\left\{ h_\pm, \dfrac{dh_\pm}{dt} \right\} \subset H_\pm$,
2. $\varphi = h_0 + \widetilde{Q} h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,
3. $h_+(0) = T^* h_-(0) + iD\varphi$, где $T^* = I + 2iR^*$, $D = Q(A + iI)$.

Если $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$Sh = S \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_- h_- \\ -ih_0 + (A+iI)\varphi \\ \mathfrak{P}_+ h_+ \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{P}_+ h_+ = i\dfrac{dh_+}{dt}$, $\mathfrak{P}_- h_- = i\dfrac{dh_-}{dt}$.

Оператор S является спектральным представлением самосопряженной дилатации оператора A [5].

2. Трансляционное представление

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_+$, где $\mathfrak{H}_- = \bigoplus\limits_{-\infty}^{-1} \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_+ = \bigoplus\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{H}_1$.

Элементами пространства $\mathbf{H}$ являются векторы $f = (..., f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, ...)$, $f_k \in \mathfrak{H}_1$ при $k \geq 1$, $f_k \in \mathfrak{H}_2$ при $k \leq -1$, $f_0 \in \mathfrak{H}$ и $\sum_{-\infty}^{\infty} \|f_k\|^2 < \infty$ (рамка означает, что помещенный в нее элемент расположен на нулевом месте).

В пространстве $\mathbf{H}$ рассмотрим неограниченные операторы S_+ и S_-:

$$S_+ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \; S_- f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k},$$

где $f = (..., f_{-1}, f_0, f_1, ...)$.

Построим в пространстве $\mathbf{H}$ оператор $S_{\text{т}}$ следующим образом.

Вектор $f \in \mathfrak{D}(S_{\text{т}})$ тогда и только тогда, когда

1. $f \in \mathfrak{D}(S_+) \cap \mathfrak{D}(S_+)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|S_n f\|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|S_{-n} f\|^2 < \infty$,
где $S_n f = -\dfrac{1}{2} f_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$, $S_{-n} f = \dfrac{1}{2} f_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{-k}$.

2. $\varphi' = f_0 + \widetilde{Q} S_- f \in \mathfrak{D}(A)$.

3. $S_+ f = T^* S_- f + iD\varphi'$,
где $D = Q(A+iI)$, $T = I - 2iR$.

Если $f \in \mathfrak{D}(S_{\text{т}})$, то $S_{\text{т}} f = (..., g_{-1}, \boxed{g_0}, g_1, ...)$, где $g_0 = -if_0 + (A+iI)\varphi'$, $g_n = iS_n f (\forall n \in Z \backslash \{0\})$.

Оператор $S_{\text{т}}$ является трансляционным представлением самосопряженной дилатации оператора A [4].

Теорема 2. *Если пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ сепарабельные, то дилатации S и $S_т$ изоморфны.*

Доказательство. Установим изоморфизм пространств H_+ и $\mathfrak{H}_+$. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,\infty)$ полную ортонормированную систему функций Чебышева-Лаггера:

$$\psi_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} e^{\frac{t}{2}} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(t^{k-1} e^{-t}\right), \ (\forall k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Обозначим через H_k подпространство пространства $H_+ = L_2(0,\infty;\mathfrak{H}_1)$, образованное функциями вида $\psi_k a$ ($a \in \mathfrak{H}_1$).

Очевидно, что $H_k \perp H_j$ при $k \neq j$. Далее

$$L_2(0,\infty;\mathfrak{H}_1) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k. \tag{2}$$

Действительно, пусть $h \in H_+$ ортогонально ко всем H_k, т. е.

$$\int_0^\infty \psi_k(t)(h(t),a)_{\mathfrak{H}_1} dt = 0 \ (\forall a \in \mathfrak{H}_1 \wedge k \in \mathbb{N}),$$

тогда $(h(t),a)_{\mathfrak{H}_1} = 0$ всюду, кроме, быть может, точек множества E_a меры нуль. Заставляя a пробегать счетное плотное в $\mathfrak{H}_1$ множество и беря объединение соответствующих множеств E_a, получим множество E меры нуль. При этом $h(t) = 0$ вне E, т. е. почти всюду, следовательно $h = 0$, как элемент пространства $L_2(0,\infty;\mathfrak{H}_1)$. Таким образом, равенство (2) доказано.

Заметим, что $\|\psi_k(t)a\|_{H_+} = \|a\|_{\mathfrak{H}_1}$, т. к. система функций $\psi_k(t)$ нормирована в $L_2(0,\infty)$. Из последнего равенства и (1) следует, что между элементами рассматриваемых пространств существует взаимно-однозначное, изометрическое соответствие V, устанавливаемое формулами:

$$\text{Если } h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) a_k, \text{ то} \tag{3}$$

$Vh(t) = (a_1, a_2, ...) = a$, и наоборот, причем

$$\|h(t)\|_{H_+}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{\mathfrak{H}}^2 = \|a\|_{\mathfrak{H}_+}^2.$$

Таким образом, изоморфизм пространств H_+ и $\mathfrak{H}_+$ доказан.

Аналогично можно установить изоморфизм пространств $H_- = L_2(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2)$ и $\mathfrak{H}_- = \bigoplus\limits_{-\infty}^{-1} \mathfrak{H}_2$, если в $L_2(-\infty, 0)$ взять полную и ортонормированную систему функций

$$\varphi_{-k}(t) = \psi_k(-t), \ (k \in \mathbb{N}).$$

Теперь найдем $V\dfrac{dh(t)}{dt}$, где $h(t)$ представимо в виде (3).

Пусть $h(t) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_+)$, тогда, учитывая (1), получим:

$$\frac{d}{dt}\psi_k(t) = \frac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_k(t) +$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}e^{\dfrac{t}{2}}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\left[(k-1)(k-2)t^{k-3}e^{-t} - (k-1)t^{k-2}e^{-t}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_{k-1} + \frac{1}{(k-3)!}e^{\dfrac{t}{2}}\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\left(t^{k-3}e^{-t}\right) = ...$$

$$... = -\frac{1}{2}\psi_k(t) - \psi_{k-1}(t) - ... - \psi_2(t) - \psi_1(t).$$

Используя это соотношение, имеем

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)a_k = \psi_1\left(-\frac{1}{2}a_1 - \sum_{k=2}^{\infty}a_k\right) +$$

$$+\psi_2\left(-\frac{1}{2}a_2 - \sum_{k=3}^{\infty}a_k\right) + ... + \psi_n\left(-\frac{1}{2}a_n - \sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right) + ... \, .$$

Таким образом

$$V\left(i\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)a_k\right) = (iS_1a, iS_2a, ...),$$

где $a = (a_1, a_2, ...)$.

Отображение $\widetilde{V}$ между пространствами $H = L_2(-\infty, 0; \mathfrak{H}_2)$ и $\mathfrak{H}_-$ определяется следующим равенством:

$$\widetilde{V}h_-(t) = \widetilde{V}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}a_{-k}\right) = (..., a_{-2}, a_{-1}).$$

Из соотношения

$$\frac{d}{dt}\varphi_{-k}(t) = \frac{1}{2}\varphi_{-k}(t) + \varphi_{-k+1}(t) + \varphi_{-k+2}(t) + ... + \varphi_{-1}(t)$$

легко получить, что

$$\widetilde{V}(\mathfrak{D}_-h_-) = \widetilde{V}\left(\mathfrak{D}_-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}(t)a_{-k}\right) =$$

$$= (..., iS_{-2}a', iS_{-1}a'), \text{ где } a' = (..., a_{-2}, a_{-1}).$$

Теперь построим унитарное отображение U пространства H на $\mathbf{H}$, действующее по формуле

$$U \begin{pmatrix} h_-(t) \\ h_0 \\ h_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{V}h_-(t) \\ h_0 \\ Vh_+(t) \end{pmatrix}.$$

При этом отображении $U\mathfrak{D}(S) = \mathfrak{D}(S_т)$. Действительно, условия 1 и 2 на $\mathfrak{D}(S)$ и $\mathfrak{D}(S_т)$ эквивалентны. Докажем эквивалентность условий 3.

Так как $\varphi_{-k}(0) = \psi_k(0) = 1$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ и $h_+(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t)a_k$, $h_-(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{-k}(t)a_{-k}$, то $h_+(0) = S_+a$ и $h_-(0) = S_-a'$.

Таким образом мы доказали, что

$$USh = S_тU^{-1}h \ (\forall h \in \mathfrak{D}(S)) \text{ и } Uh_0 = h_0(\forall h_0 \in \mathfrak{H}).$$

□

Заключение

Основным результатом данной работы является теорема 2, которая позволяет при построении функциональных моделей диссипативного оператора и при вычислении его обобщенных собственных функций пользоваться любым из рассмотренных представлений самосопряженной дилатации.

Список литературы

1. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970. — 431 с.

   SZOKEFALVI-NADY, B. and FOYASH, CH. (1970) *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space.* Moscow: Mir — 431 p.

2. Павлов Б. С. Теория дилатаций и спектральный анализ несамосапряженных дифференциальных операторов // В сб.: Матем. программир. и смежн. вопр. Теория операторов в линейных пространствах. — М., 1976. — С. 3–69.

   PAVLOV, B. S. (1976) Theory of dilations and spectral analysis of nonself-adjoint differential operators. *Math. Programming and Relating Questions.* M. p. 3–69.

3. Павлов Б. С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб., 1977. — 102 (144). — № 4. — С. 511–536.

   PAVLOV, B. S. (1977) Self-adjoint dilatation of dissipative Schrodinger operator and decomposition on his own functions. *Math. Sb.* 102 (144). № 4. p. 511–536.

4. Кужель А. В. Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов // Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — вып. 37. — С. 54–62.

   KUZHEL, A. V. (1982) Self-adjoint and J-self-adjoint dilations of linear operators. *Function theory, functional analysis and their applications.* vol. 37. p. 54–62.

5. Кудряшов Ю. Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов // Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — вып. 37. — С. 51–54.

   KUDRYASHOV, YU. L. (1982) Symmetric and J-self-adjoint dilations of dissipative operators. *Function theory, functional analysis and their applications.* vol. 37. p. 51–54.

6. Павлов Б. С., Фаддеев Л. Д. Построение самосопряженной дилатации для задачи с импедансными граничными условиями // Зап. ЛОМИ . — АН СССР, 1977. — 73. — С. 217–223.

   PAVLOV, B. S., & FADDEEV, M. D. (1977) Construction of self-adjoint dilation for the problem with impedance boardry conditions. *Zap. LOMI AN USSR.* 73. p. 217–223.

7. Bilander P., Allahverdiev and Ekin Ugurlu (2013) On self-adjoint dilatation of the dissipative extension of a direct sum differential operator. *Banach. J. Math. Anal.* v. 7, № 2. p. 194–207.

8. KURASOV, P. B. & ELANDER, N. (1993) Complex scaling and self-adjoint dilatations. *International Journal of Quantum Chemistry.* v. 46, Issue 3. p. 415–418.

9. Кудряшов Ю. Л. Изоморфизм двух представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора // Ученые записки ТНУ, серия «Физ.-мат. науки». — т. 23 (62) № 3, 2011. — С. 32–38.

   KUDRYASHOV, YU. L. (2011) Isomorphism of two presentations of self-adjoint dilatation of dissipative operator. *Scientific notes of the TNU, series «Physics and mathematics».* vol. 23 (62) (№ 3). p. 32–38.

10. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков.: ХНУ, 2003. — 342 с.

   ZOLOTAREV, V. A. (2003) *Analitic Methods of Spectral Representations of Nonself-Adjoint and Nonunitary Operators.* Kharkov University. — 342 p.

УДК: 517.9

MSC2010: 60H30, 60H10

О РАЗРЕШИМОСТИ СИНГУЛЯРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ[1]

© Е. Ю. Машков, Д. Н. Тютюнов

Юго-Западный государственный университет
кафедра высшей математики
ул. 50 лет октября, 94, Курск, 305040, Российская Федерация
e-mail: *mashkovevgen@yandex.ru, tjutjunov@mail.ru*

On solvability of singular stochastic Leontieff type equation with impulse action.

Mashkov E. Yu., Tyutyunov D. N.

Abstract. By a stochastic Leontief type equation we mean a special class of stochastic differential equations in the Ito form, in which both in the left-hand and right-hand sides there are rectangular real matrices that form a singular pencil. Besides, in the right-hand side there are a deterministic summand, depending only on time, and impulse action. It is supposed that the diffusion coefficient of the system is given by a matrix depending only on time. For investigation of this equation it is required to consider derivatives of sufficiently high orders from the free terms, including the Wiener process. In connection with this, to differentiate the Wiener process, we apply the machinery of Nelson mean derivatives of random processes, which makes it possible to avoid using the theory of generalized functions to the study of equations. As a result, analytical formulas are obtained for solving the equation in terms of mean derivatives of random processes.

Keywords: *mean derivative, current velocity, Wiener process, stochastic Leontief type equation*

Введение

Изучается система стохастических дифференциальных уравнений в R^n вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{Q}\zeta(t) + \int_0^t P(s)dw(s), \ \ 0 \le t \le T,$$

где $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ — сингулярный пучок постоянных матриц размера $n \times m$, причем в случае с квадратными матрицами $\tilde{L}$ вырождена, $P(t)$ — коэффициент диффузии,

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 18-01-00048

являющийся достаточно гладкой $n \times m$ — матрицей, $f(t)$ — достаточно гладкая детерминированная вектор функция, зависящая от времени, $\tilde{Q}$ — числовая $n \times n$ — матрица, $\zeta(t)$ — n-мерный процесс скачков, $w(t)$ — винеровский процесс, $\xi(t)$ — искомый случайный процесс.

Системы леонтьевского возникают работах Л. А. Власенко и др. [1, 2] при математическом моделировании динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования. С применением данных систем в работах А. Л. Шестакова, Г. А. Свиридюка и А. В. Келлер [3, 4], изучается динамическое искажение сигналов в радиоустройствах. В работах O. Schein, G. Denk [5], T. Sickenberger, R. Winkler [6] рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей. Также отметим замечательную работу А. А. Белова, А. П. Курдюкова [7], в которой описаны многочисленные приложения систем леонтьевского типа.

Для изучения данного класса уравнений требуется рассмотрение производных высших порядков от свободных членов [7, 8] — в данном случае, детерминированного слагаемого и винеровского процесса или белого шума. Известно, что производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций, которые крайне трудны для применения в конкретных уравнениях. Это обстоятельство делает прямое исследование нашей системы сложным.

Следуя работам [9, 10], в которых был изучен данный класс уравнений без импульсных воздействий в правой части, мы для изучения решений рассматриваемых уравнений применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не применяются обобщенные функции. А именно, мы применяем симметрические производные в среднем (текущие скорости) винеровского процесса. Текущие скорости, в соответствии с общей идеологией производных в среднем, являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов. В результате для рассматриваемой системы мы получаем физически осмысленные формулы для решений в терминах симметрических производных в среднем случайных процессов.

1. Производные в среднем

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0, l]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1-случайной величиной для всех t. Известно, что каждый такой процесс порождает семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{F}$ «настоящее» $\mathscr{N}_t^{\xi}$, которое будем считать полным, т. е. пополненным всеми множествами вероятности нуль.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot|\mathscr{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего», $\mathscr{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ. Обычное ("безусловное") математическое ожидание обозначается символом E.

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать использования обобщенных функций, согласно Нельсону [11], [12], даем следующее определение:

Определение 1 ([13]). (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\Big),$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$. (ii) Производная в среднем слева $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\Big),$$

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ и $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$, но если, например, $\xi(t)$ почти наверное имеет гладкие выборочные траектории, эти производные очевидно совпадают.

Из свойств условного математического ожидания (см. [14]) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Y^0(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t}\Big|\xi(t) = x\Big)$$

$$Y^0_*(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi\Big(\frac{\xi(t) - \xi(t-\triangle t)}{\triangle t}\Big|\xi(t) = x\Big)$$

на R^n, то есть, $D\xi(t) = Y^0(t,\xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y^0_*(t,\xi(t))$.

Определение 2 ([13]). Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется симметрической производной в среднем. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется антисимметрической производной в среднем.

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) + Y^0_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(Y^0(t,x) - Y^0_*(t,x))$.

Определение 3 ([13]). $v^{\xi}(t) = v^{\xi}(t, \xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется текущей скоростью процесса $\xi(t)$; $u^{\xi}(t) = u^{\xi}(t, \xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется осмотической скоростью процесса $\xi(t)$.

Текущая скорость является для случайных процессов прямым аналогом обычной физической скорости детермиинированных процессов (см. [13]). Осмотическая скорость измеряет насколько быстро нарастает «случайность» процесса.

Определяющую роль в наших конструкциях играет винеровский процесс ([13]), который мы обозначим символом $w(t)$. Имеют место следующие

Лемма 1 ([9]). *Пусть $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $P(t)$ – достаточно гладкая $k \times n$-матрица, $t \in (0, T)$. Тогда для любого t имеет место формула*

$$D_S^w \int_0^t P(s)dw(s) = P(t)\frac{w(t)}{2t}.$$

Лемма 2 ([13], [15]). *Для $t \in (0, T)$ имеют место равенства*

$$Dw(t) = 0,\ \ D_*w(t) = \frac{w(t)}{t},\ \ D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

При целом $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^k}\frac{w(t)}{t^k}.$$

2. Основной результат

Как уже было сказано выше, рассматривается система стохастических дифференциальных уравнений в R^n вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \int_0^t \tilde{M}\xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{Q}\zeta(t) + \int_0^t P(s)dw(s),\ \ 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

где $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, $\xi(t)$ – искомый случайный процесс, $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс в R^m, $P(t)$ — достаточно гладкая $n \times m$ — матрица, $\tilde{Q}$ — числовая $n \times n$ — матрица, $\zeta(t)$ — n-мерный процесс скачков, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция. Для простоты изложения будем считать, что строки и столбцы пучка $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами. Процесс скачков $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$ задается следующим образом

$$\zeta(t, \omega) = \sum_{r=1}^{N} \tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t - t_r),\ \ 0 < t_1 < \cdots < t_N < T,$$

где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных, $\tilde{\zeta}_r(\omega)$ – случайные величины со значениями в R^n.

Из вида (1) понятно, что (для простоты) начальное условие для решения (1) предполагается вида

$$\xi(0,\omega) = 0. \tag{2}$$

Скажем сразу, что для построенных нами ниже решений это условие не выполняется. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют этому начальному условию, но становятся решениями лишь с некоторого (заранее заданного сколь угодно малого) момента времени $t_0 > 0$ (см. ниже).

Формулы для решений задачи (1), (2) будем искать среди случайных процессов $\xi(t,\omega)$, которые удовлетворяют (в том смысле как описывается ниже) дифференциальным уравнениям

$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(0) = \tilde{M}\int_0^t \xi(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s), \ \ 0 \le t \le t_1,$$

$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_r) = \tilde{M}\int_{t_r}^t \xi(s)ds + \int_{t_r}^t f(s)ds + \int_{t_r}^t P(s)dw(s), \ \ t_r \le t \le t_{r+1},$$

$$\tilde{L}\xi(t) - \tilde{L}\xi(t_N) = \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \int_{t_N}^t P(s)dw(s), \ \ t_N \le t \le T,$$

при всех $r = 1, 2, \dots, N-1$, в точках t_r удовлетворяют равенствам

$$\tilde{L}\xi(t_r+0,\omega) - \tilde{L}\xi(t_r-0,\omega) = \tilde{Q}\tilde{\zeta}_r(\omega), r = 1, 2, \dots, N,$$

и в начальный момент времени $t = 0$ удовлетворяют начальному условию (2).

Итак, процесс $\xi(t)$ для решения задачи (1), (2) определяется последовательно для $r = 0, 1, \dots, N$ через случайные процессы $\xi_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{L}\xi_0(t) - \tilde{L}\xi_0(0) = \tilde{M}\int_0^t \xi_0(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s), \ \ 0 \le t \le t_1, \ (r=0),$$

$$\tilde{L}\xi_r(t) - \tilde{L}\xi_r(t_r) = \tilde{M}\int_{t_r}^t \xi_r(s)ds + \int_{t_r}^t f(s)ds + \int_{t_r}^t P(s)dw(s), \ \ t_r \le t \le t_{r+1},$$

$$\tilde{L}\xi_N(t) - \tilde{L}\xi_N(t_N) = \tilde{M}\int_{t_N}^t \xi_N(s)ds + \int_{t_N}^t f(s)ds + \int_{t_N}^t P(s)dw(s), \ \ t_N \le t \le T,$$

$r = 1, 2, \ldots, N-1$, где

$$\xi_0(0) = 0, \;\; \tilde{L}\xi_r(t_r) = \tilde{L}\xi_{r-1}(t_r, \omega) + \tilde{Q}\tilde{\zeta}_r(\omega), \;\; r = 1, \ldots, N.$$

Как нетрудно видеть, уравнение (1) в общей форме неудобно для изучения, поэтому приведем его к некоторому каноническому виду. Для сингулярного пучка матриц $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ имеется преобразование Кронекера-Вейерштрасса (описывается парой невырожденных матриц (операторов) P_L и P_R размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно), при котором матрица $P_L\tilde{M}P_R + \lambda P_L\tilde{L}P_R$ – квазидиагональна (см., например, [8]) и тогда уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$P_L\tilde{L}P_R P_R^{-1}\xi(t) = \int\limits_0^t P_L\tilde{M}P_R P_R^{-1}\xi(s)ds + \int\limits_0^t P_L f(s)ds + \int\limits_0^t P_L P(s)dw(s)$$

При соответствующей нумерации векторов базиса, в $L = P_L\tilde{L}P_R$ вдоль главной диагонали стоят в указанном порядке блоки следующих типов: N – жордановы клетки с нулями вдоль главной диагонали, E – единичная матрица, A и G – прямоугольные матрицы указанного ниже вида (сингулярные клетки). В $M = P_L\tilde{M}P_R$ строках, соответствующих блокам L, стоят в указанном порядке такие блоки: E – единичная матрица, K – некоторая квадратная матрица, B и H – прямоугольные матрицы указанного ниже вида (сингулярные клетки). Приведем матрицы A и B, G и H в общем явном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\eta(t) = P_R^{-1}\xi(t)$, $C(t) = P_L P(t)$. В новых обозначениях (1), (2) принимает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + \int_0^t C(s)dw(s), \tag{3}$$

$$\eta(0) = 0, \tag{4}$$

Тогда, учитывая сказаное выше, формулы для решений $\eta(t)$ задачи (3), (4) определяется последовательно для $r = 0, 1, \ldots, N$ через случайные процессы $\eta_r(t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$L\eta_0(t) - L\eta_0(0) = \int_0^t M\eta_0(s)ds + \int_0^t P_L f(s)ds + \int_0^t C(s)dw(s),\ 0 \le t \le t_1, \tag{5}$$

$$L\eta_r(t) - L\eta_r(t_r) = \int_{t_r}^t M\eta_r(s)ds + \int_{t_r}^t P_L f(s)ds + \int_{t_r}^t C(s)dw(s),\ \ t_r \le t \le t_{r+1}, \tag{6}$$

$$L\eta_N(t) - L\eta_N(t_N) = \int_{t_N}^t M\eta_N(s)ds + \int_{t_N}^t P_L f(s)ds + \int_{t_N}^t C(s)dw(s),\ \ t_N \le t \le T, \tag{7}$$

$r = 1, \ldots, N-1$, где

$$\eta_0(0) = 0,\ \ L\eta_r(t_r) = L\eta_{r-1}(t_r, \omega) + Q\tilde{\zeta}_r(\omega),\ \ r = 1, \ldots, N \tag{8}$$

и $Q = P_L\tilde{Q}$.

Замечание 1. Как было отмечено выше, для построения процесса, описывающего модель, заданную уравнениями (5), (6) и (7), нужны производные свободных членов (включая винеровский процесс). Производные винеровского процесса существуют только в смысле обобщенных функций. Поэтому, чтобы избежать использования обобщенных функций, мы для построения процесса, описывающего модель, заданную (5), (6) и (7), будем использовать симметрические производные в среднем (текущие скорости) D_S^w для случайных процессов. В этой работе для вычисления симметрических производных высших порядков будет использоваться σ-алгебра «настоящее» винеровского процесса. Отметим, что для вычисления производных в среднем можно использовать и какую-либо другую σ-алгебру, но тогда формулы для вычисления симметрических производных высших порядков от винеровского процесса изменятся.

Нетрудно заметить, учитывая квазидиагональную структуру матриц L и M, что задачи (3), (4) и (5), (6), (7), (8) распадаются на несколько независимых систем уравнений четырех типов (каждой паре соответствующих блоков в L и M соответствует уравнение определенного типа). Обозначим через $\varsigma(t)$, $\vartheta(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ компоненты вектора $\eta(t)$, соответствующие парам блоков N и E, E и K, A и B, G и H соответственно. Также через $u(t), v(t), g(t), z(t)$ обозначим соответствующие компоненты вектора $P_L f(t)$, а через $C_{p+1}(t)$, $C_{q+1}(t)$, $C_l(t)$, $C_{d+1}(t)$ обозначим соответствующие блоки матрицы $C(t)$. Исследуем каждый тип уравнений.

Паре матриц N и E размера $(p+1)\times(p+1)$ соответствует система типа

$$N\varsigma_r(t) - N\varsigma_r(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t} \varsigma_r(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} u(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} C_{p+1}(s)dw(s)., \tag{9}$$

$$t_r \le t \le t_{r+1}, \;\; r = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_r^1(t)\\ \varsigma_r^2(t)\\ \vdots\\ \varsigma_r^p(t)\\ \varsigma_r^{p+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_r^1(t_r)\\ \varsigma_r^2(t_r)\\ \vdots\\ \varsigma_r^p(t_r)\\ \varsigma_r^{p+1}(t_r) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{t_r}^t (\varsigma_r^1(s) + u^1(s))ds\\ \int_{t_r}^t (\varsigma_r^2(s) + u^2(s))ds\\ \vdots\\ \int_{t_r}^t (\varsigma_r^p(s) + u^p(s))ds\\ \int_{t_r}^t (\varsigma_r^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds \end{pmatrix} +$$

$$+\int\limits_{t_r}^{t} \begin{pmatrix} c_1^1(s) & c_2^1(s) & \dots & c_{m-1}^1(s) & c_m^1(s)\\ c_1^2(s) & c_2^2(t) & \dots & c_{m-1}^2(s) & c_m^2(s)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ c_1^p(s) & c_2^p(s) & \dots & c_{m-1}^p(s) & c_m^p(s)\\ c_1^{p+1}(s) & c_2^{p+1}(s) & \dots & c_{m-1}^{p+1}(s) & c_m^{p+1}(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s)\\ w^2(s)\\ \vdots\\ w^{m-1}(s)\\ w^m(s) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из последнего уравнения системы (10) получаем, что

$$\int\limits_{t_r}^{t} (\varsigma_r^{p+1}(s) + u^{p+1}(s))ds = -\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} c_j^{p+1}(s)dw^j(s).$$

Поскольку текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, из этого уравнения мы находим $\varsigma_r^{p+1}(t)$ применением к обеим частям производной D_S^w. Тогда с применением Леммы 1 мы получаем, что

$$\varsigma_r^{p+1}(t) = -u^{p+1}(t) - \sum_{j=1}^{m} c_j^{p+1}(t)\frac{w^j(t)}{2t}. \tag{11}$$

Из предпоследнего уравнения системы (10) мы получаем, что

$$\varsigma_r^{p+1}(t) = \int_{t_r}^{t} (\varsigma_r^p(s) + u^p(s))ds + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_r}^{t} c_j^p(s)dw^j(s)$$

откуда, проведя рассуждения, аналогично сделанным выше, выводим

$$\varsigma_r^p(t) = -u^p(t) + D_S^w \varsigma_r^{p+1}(t) - D_S^w \sum_{j=1}^{m} \int_{t_r}^{t} c_j^p(s)dw^j(s).$$

Подставив в последнее равенство выражение для $\varsigma_r^{p+1}(t)$ из (11) и применив Леммы 1 и 2, получим

$$\varsigma_r^p(t) = -\frac{du^{p+1}}{dt} - u^p(t) - \sum_{l=1}^{m} \frac{dc_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} + \sum_{l=1}^{m} c_l^{p+1}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^{m} c_l^p \frac{w^l}{2t} \tag{12}$$

Также получаем

$$\begin{gathered} \varsigma_r^{p-1} = -\frac{d^2u^{p+1}}{dt^2} - \frac{du^p}{dt} - u^{p-1} - \\ -\sum_{l=1}^{m} \frac{d^2c_l^{p+1}}{dt^2}\frac{w^l}{2t} + 2\sum_{l=1}^{m} \frac{dc_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^{m} c_l^{p+1}\frac{3w^l}{8t^3} - \\ -\sum_{l=1}^{m} \frac{dc_l^p}{dt}\frac{w^l}{2t} + \sum_{l=1}^{m} c_l^p\frac{w^l}{4t^2} - \sum_{l=1}^{m} c_l^{p-1}\frac{w^l}{2t} \end{gathered} \tag{13}$$

В точности аналогично, для $1 \le i \le p$ мы получаем рекурентную формулу

$$\varsigma_r^i(t) = D_S^w \varsigma_r^{i+1}(t) - D_S^w \sum_{j=1}^{m} \int_{t_r}^{t} c_j^i(s)dw^j(s) - u^i. \tag{14}$$

С помощью Лемм 1 и 2 по формуле (14) нетрудно получить явное выражение для любого $\varsigma_r^i(t)$

$$\varsigma_r^i = -\sum_{k=i}^{p} \frac{d^{k-i+1}u^{k+1}}{dt^{k-i+1}} - u^i - \sum_{l=1}^{m} \frac{dc_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t} +$$

$$
+\sum_{l=1}^{m} c_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2}-\sum_{s=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{m}\{\frac{d^{s-i+1}c_l^{s+1}}{dt^{s-i+1}}\frac{w^l}{2t}+
$$

$$
+c_l^{s+1}(-1)^{s-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{s-i+1}(2j-1)}{2^{s-i+2}}\frac{w^l(t)}{t^{s-i+2}}+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{s-i} C_{s-i+1}^{k}\frac{d^{s-i+1-k}c_l^{s+1}}{dt^{s-i+1-k}}(-1)^k\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{2^{k+1}}\frac{w^l(t)}{t^{k+1}}\}-\sum_{l=1}^{m} c_l^{i}\frac{w^l}{2t}, \tag{15}
$$

$$
1\le i\le p-1,\ \ C_{n_1}^{k_1}=\frac{n_1!}{k_1!(n_1-k_1)!}
$$

Отметим, что для уравнений вида (9), заданных на промежутках $[0,t_1]$ и $[t_N,T]$, справедливы при $0<t\le t_1$ и $t_N\le t<T$ соответственно аналогичные формулы для решений. При этом найденные процессы удовлетворяют ограничениям (8) в том случае, если компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие жордановым клеткам с нулями по главной диагонали в L, равны нулю.

Стало быть, компоненты процесса $\varsigma^i(t)$ при $0<t<T$ находятся из следующих соотношений

$$
\varsigma^{p+1}(t)=-u^{p+1}(t)-\sum_{j=1}^{m} c_j^{p+1}(t)\frac{w^j(t)}{2t}, \tag{16}
$$

$$
\varsigma^{p}(t)=-\frac{du^{p+1}}{dt}-u^p(t)-\sum_{l=1}^{m}\frac{dc_l^{p+1}}{dt}\frac{w^l}{2t}+\sum_{l=1}^{m} c_l^{p+1}\frac{w^l}{4t^2}-\sum_{l=1}^{m} c_l^{p}\frac{w^l}{2t}, \tag{17}
$$

$$
\varsigma^{i}(t)=-\sum_{k=i}^{p}\frac{d^{k-i+1}u^{k+1}}{dt^{k-i+1}}-u^i-\sum_{l=1}^{m}\frac{dc_l^{i+1}}{dt}\frac{w^l}{2t}+
$$

$$
+\sum_{l=1}^{m} c_l^{i+1}\frac{w^l}{4t^2}-\sum_{s=i+1}^{p}\sum_{l=1}^{m}\{\frac{d^{s-i+1}c_l^{s+1}}{dt^{s-i+1}}\frac{w^l}{2t}+
$$

$$
+c_l^{s+1}(-1)^{s-i+1}\frac{\prod_{j=1}^{s-i+1}(2j-1)}{2^{s-i+2}}\frac{w^l(t)}{t^{s-i+2}}+
$$

$$
+\sum_{k=1}^{s-i} C_{s-i+1}^{k}\frac{d^{s-i+1-k}c_l^{s+1}}{dt^{s-i+1-k}}(-1)^k\frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{2^{k+1}}\frac{w^l(t)}{t^{k+1}}\}-\sum_{l=1}^{m} c_l^{i}\frac{w^l}{2t}, \tag{18}
$$

$$
1\le i\le p-1,
$$

Для пары матриц E и K размеров $(q+1)\times(q+1)$ получаем систему в R^{q+1} типа

$$
\vartheta_r(t)-\vartheta_r(t_r)=K\int_{t_r}^{t}\vartheta_r(s)ds+\int_{t_r}^{t}v(s)ds+\int_{t_r}^{t}C_{q+1}(s)dw(s), \tag{19}
$$

$$t_r \le t \le t_{r+1}, \ \ r = 1, 2, ..., N-1.$$

Для этого уравнения известна аналитическая формула для решений (см. [16])

$$\vartheta_r(t) = e^{K(t-t_r)}\vartheta_r(t_r) + \int\limits_{t_r}^{t} e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int\limits_{t_r}^{t} e^{K(t-\tau)}C_{q+1}(\tau)dw(\tau).$$

Для уравнения вида (19), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, справедливы аналогичные формулы для решений. Суммируя все $\vartheta_r(t)$, получаем выражение для $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \sum_{r=1}^{N} e^{K(t-t_r)}Q\tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t-t_r) + \int\limits_{0}^{t} e^{K(t-\tau)}v(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{t} e^{K(t-\tau)}C_{q+1}(\tau)dw(\tau), \quad (20)$$

где из произведения $Q\tilde{\zeta}_r(\omega)$ берутся только элементы из R^{q+1}.

Рассмотрев пару матриц A и B размера $l \times (l+1)$, получим систему вида

$$A\eta_r(t) - A\eta_r(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t} B\eta_r(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} g(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} C_l(s)dw(s), \quad (21)$$

$$t_r \le t \le t_{r+1}, \ \ r = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^1(t) \\ \eta_r^2(t) \\ \vdots \\ \eta_r^l(t) \\ \eta_r^{l+1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^1(t_r) \\ \eta_r^2(t_r) \\ \vdots \\ \eta_r^l(t_r) \\ \eta_r^{l+1}(t_r) \end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_{t_r}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_r^1(s) \\ \eta_r^2(s) \\ \vdots \\ \eta_r^l(s) \\ \eta_r^{l+1}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}\begin{pmatrix} g^1(s) \\ g^2(s) \\ \vdots \\ g^{l-1}(s) \\ g^l(s) \end{pmatrix} ds + \int\limits_{t_r}^{t}\begin{pmatrix} \check{c}_1^1(s) & \check{c}_2^1(s) & \dots & \check{c}_m^1(s) \\ \check{c}_1^2(s) & \check{c}_2^2(t) & \dots & \check{c}_m^2(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \check{c}_1^{l-1}(s) & \check{c}_2^{l-1}(s) & \dots & \check{c}_m^{l-1}(s) \\ \check{c}_1^l(s) & \check{c}_2^l(s) & \dots & \check{c}_m^l(s) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^{m-1}(s) \\ w^m(s) \end{pmatrix},$$

т. е.,

$$\eta_r^2(t) - \eta_r^2(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t}(\eta_r^1(s) + g^1(s))ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_r}^{t}\check{c}_j^1(s)dw^j(s),$$

$$\eta_r^3(t) - \eta_r^3(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t}(\eta_r^2(s) + g^2(s))ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_r}^{t}\check{c}_j^2(s)dw^j(s),$$

$$\eta_r^{l+1}(t) - \eta_r^{l+1}(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t}(\eta_r^l(s) + g^l(s))ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_r}^{t}\check{c}_j^l(s)dw^j(s).$$

Это означает, что можно взять в качестве η_r^{l+1} произвольный случайный процесс, удовлетворяющий ограничениям (8) и для которого можно найти симметрическую производную порядка l, а потом рекурентно получить все остальные компоненты процесса η_r. Дело обстоит таким образом потому, что в системе число неизвестных на единицу больше, чем число уравнений, т. е. система недоопределена. Аналогично случаю первой независимой системы, имеют место формулы:

$$\eta_r^l(t) = D_S^w\eta_r^{l+1} - \sum_{j=1}^{m}\check{c}_j^l\frac{w^j}{2t} - g^l(t); \tag{22}$$

$$\eta_r^l(t) = \int\limits_{t_r}^{t}(\eta_r^{l-1}(s) + g^{l-1}(s))ds + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_r}^{t}\check{c}_j^{l-1}(s)dw^j(s);$$

$$\eta_r^{l-1}(t) = D_S^2\eta_r^{l+1} - \sum_{j=1}^{m}\frac{d\check{c}_j^l}{dt}\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{m}\check{c}_j^l\frac{w^j}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m}\check{c}_j^{l-1}\frac{w^j}{2t} - \frac{dg^l}{dt} - g^{l-1}, \tag{23}$$

Точно также, для $1 \le i \le l$ получаем

$$\eta_r^i(t) = D_S^w\eta_r^{i+1} - D_S^w\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_r}^{t}\check{c}_j^i(s)dw^j(s) - g^i(t). \tag{24}$$

С помощью Лемм 1 и 2 по формуле (24) получаем явное выражение для любого $\eta_r^i(t)$, $r = 1, 2, ..., N-1$:

$$\eta_r^i = -\sum_{k=i}^{l-1} \frac{d^{k-i+1} g^{k+1}}{dt^{k-i+1}} - g^i - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\check{c}_j^{i+1}}{dt} \frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^{i+1} \frac{w^j}{4t^2} - \sum_{s=i+1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m} \{ \frac{d^{s-i+1} \check{c}_j^{s+1}}{dt^{s-i+1}} \frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \check{c}_j^{s+1} (-1)^{s-i+1} \frac{\prod_{r=1}^{s-i+1}(2r-1)}{2^{s-i+2}} \frac{w^j(t)}{t^{s-i+2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s-i} C_{s-i+1}^k \frac{d^{s-i+1-k} \check{c}_j^{s+1}}{dt^{s-i+1-k}} (-1)^k \frac{\prod_{r=1}^{k}(2r-1)}{2^{k+1}} \frac{w^j(t)}{t^{k+1}} \} - \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^i \frac{w^j}{2t} + D_S^{l+1-i} \eta^{l+1}, \qquad (25)$$

$$1 \le i \le l-2$$

Нетрудно заметить, что для уравнений вида (21), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, имеют место при $0 < t \le t_1$ и $t_N \le t < T$ соответственно аналогичные формулы для решений. Также в качестве η_r^{l+1} берется произвольный случайный процесс, удовлетворяющий требованиям (8) и для которого можно найти симметрическую производную порядка l. При этом найденные процессы удовлетворяют ограничениям (8) в том случае, когда компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие сингулярным клеткам A и B, равны нулю. Таким образом, для нахождения $\eta(t)$ при $0 < t < T$ имеют место формулы

$$\eta^l(t) = D_S^w \eta_r^{l+1} - \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^l \frac{w^j}{2t} - g^l(t); \qquad (26)$$

$$\eta^{l-1}(t) = D_S^2 \eta_r^{l+1} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\check{c}_j^l}{dt} \frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^l \frac{w^j}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^{l-1} \frac{w^j}{2t} - \frac{dg^l}{dt} - g^{l-1}, \qquad (27)$$

$$\eta^i = -\sum_{k=i}^{l-1} \frac{d^{k-i+1} g^{k+1}}{dt^{k-i+1}} - g^i - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\check{c}_j^{i+1}}{dt} \frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^{i+1} \frac{w^j}{4t^2} - \sum_{s=i+1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m} \{ \frac{d^{s-i+1} \check{c}_j^{s+1}}{dt^{s-i+1}} \frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \check{c}_j^{s+1} (-1)^{s-i+1} \frac{\prod_{r=1}^{s-i+1}(2r-1)}{2^{s-i+2}} \frac{w^j(t)}{t^{s-i+2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s-i} C_{s-i+1}^k \frac{d^{s-i+1-k} \check{c}_j^{s+1}}{dt^{s-i+1-k}} (-1)^k \frac{\prod_{r=1}^{k}(2r-1)}{2^{k+1}} \frac{w^j(t)}{t^{k+1}} \} - \sum_{j=1}^{m} \check{c}_j^i \frac{w^j}{2t} + D_S^{l+1-i} \eta^{l+1}, \qquad (28)$$

$$1 \le i \le l-2$$

И, наконец, для матриц G и H размера $(d+1)\times d$ имеем систему типа

$$G\theta_r(t) - G\theta_r(t_r) = \int\limits_{t_r}^{t} H\theta_r(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} z(s)ds + \int\limits_{t_r}^{t} C_{d+1}(s)dw(s), \tag{29}$$

$$t_r \le t \le t_{r+1}, \ \ r = 1, 2, ..., N-1.$$

В координатной форме получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_r^1(t) \\ \theta_r^2(t) \\ \vdots \\ \theta_r^{d-1}(t) \\ \theta_r^d(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_r^1(t_r) \\ \theta_r^2(t_r) \\ \vdots \\ \theta_r^{d-1}(t_r) \\ \theta_r^d(t_r) \end{pmatrix} =$$

$$\int\limits_{t_r}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_r^1(s) \\ \theta_r^2(s) \\ \vdots \\ \theta_r^{d-1}(s) \\ \theta_r^d(s) \end{pmatrix} ds + \int\limits_{t_r}^{t} \begin{pmatrix} z^1(s) \\ z^2(s) \\ \vdots \\ z^d(s) \\ z^{d+1}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ \int\limits_{t_r}^{t} \begin{pmatrix} \hat{c}_1^1(s) & \hat{c}_2^1(s) & \dots & \hat{c}_m^1(s) \\ \hat{c}_1^2(s) & \hat{c}_2^2(t) & \dots & \hat{c}_m^2(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{c}_1^d(s) & \hat{c}_2^d(s) & \dots & \hat{c}_m^d(s) \\ \hat{c}_1^{d+1}(s) & \hat{c}_2^{d+1}(s) & \dots & \hat{c}_m^{d+1}(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^{m-1}(s) \\ w^m(s) \end{pmatrix}.$$

или

$$0 = \int\limits_{t_r}^{t} (\theta_r^1(s) + z^1(s))ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^1(s)dw^j(s),$$

$$\theta_r^1(t) = \int\limits_{t_r}^{t} (\theta_r^2(s) + z^2(s))ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^2(s)dw^j(s),$$

$$\theta_r^{d-1}(t) = \int\limits_{t_r}^{t} (\theta_r^d(s) + z^d(s))ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^d(s)dw^j(s),$$

$$\theta_r^d(t) = \int\limits_{t_r}^{t} z^{d+1}(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^{d+1}(s)dw^j(s).$$

Начиная с первого уравнения, последовательно получаем

$$\theta_r^1(t) = -z^1(t) - D_S^w \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^1(s)dw^j(s) = -z^1 - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^1 \frac{w^j(t)}{2t}, \tag{30}$$

$$\theta_r^2(t) = -z^2(t) + D_S^w\theta_r^1 - D_S^w \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^2(s)dw^j(s) =$$

$$= -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\hat{c}_j^1}{dt}\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^1 \frac{w^j(t)}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^2 \frac{w^j(t)}{2t}, \tag{31}$$

Как и ранее, для $2 \leq i \leq d$ имеет место рекурентная формула

$$\theta_r^i(t) = -z^i(t) + D_S^w\theta_r^{i-1} - D_S^w \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^i(s)dw^j(s).$$

Тогда

$$\theta_r^i(t) = -z^i(t) - \frac{dz^{i-1}(t)}{dt} - ... - \frac{d^{i-1}z^1(t)}{dt^{i-1}} -$$

$$-D_S \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^i(s)dw^j(s) - D_S^2 \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^{i-1}(s)dw^j(s) - ... - D_S^i \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^1(s)dw^j(s) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^i \frac{w^j}{2t} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{i-1} D_S^p(\hat{c}_j^{i-p} \frac{w^j}{2t}).$$

Следовательно, применяя Леммы 1 и 2, получаем при $i \geq 3$ следующее

$$\theta_r^i(t) = -\sum_{p=1}^{i-1} \frac{d^{i-p}z^p}{dt^{i-p}} - z^i - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^i \frac{w^j}{2t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\hat{c}_j^{i-1}}{dt}\frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^{i-1} \frac{w^j}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=2}^{i-1} \{ \frac{d^p \hat{c}_j^{i-p}}{dt^p} \frac{w^j}{2t} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{p-1} C_p^l \frac{d^{p-l}\hat{c}_j^{i-p}}{dt^{p-l}} (-1)^l \frac{\prod_{r=1}^{l}(2r-1)}{2^{l+1}} \frac{w^j}{t^{l+1}} + \hat{c}_j^{i-p}(-1)^p \frac{\prod_{r=1}^{p}(2r-1)}{2^{p+1}} \frac{w^j}{t^{p+1}} \}, \tag{32}$$

а также условие согласования

$$\int\limits_{t_r}^{t} z^{d+1}(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^{d+1}(s)dw^j(s) = \theta_r^d(t).$$

Если компоненты z^i и w^i не удовлетворяют этому условию, то система не имеет решений. Здесь число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, т. е. данная подсистема переопределена.

Легко видеть, что для уравнений вида (29), заданных на промежутках $[0, t_1]$ и $[t_N, T]$, справедливы при $0 < t \le t_1$ и $t_N \le t < T$ соответственно аналогичные условия согласования и формулы для решений. При этом, найденные процессы удовлетворяют условиям (8) в том случае, если компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие сингулярным клеткам G и H, равны нулю.

Стало быть, при $0 < t < T$ имеют место при выполнении условий согласования

$$\int\limits_{0}^{t} z^{d+1}(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_r}^{t} \hat{c}_j^{d+1}(s)dw^j(s) = \theta_r^d(t) \tag{33}$$

соотношения для определения компонент $\theta^i(t)$

$$\theta^1 = -z^1 - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^1 \frac{w^j(t)}{2t}, \tag{34}$$

$$\theta^2(t) = -z^2(t) - \frac{dz^1(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\hat{c}_j^1}{dt}\frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^1 \frac{w^j(t)}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^2 \frac{w^j(t)}{2t}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered}
\theta^i(t) = -\sum_{p=1}^{i-1} \frac{d^{i-p}z^p}{dt^{i-p}} - z^i - \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^i \frac{w^j}{2t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d\hat{c}_j^{i-1}}{dt}\frac{w^j}{2t} + \\
+ \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j^{i-1} \frac{w^j}{4t^2} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=2}^{i-1} \{ \frac{d^p \hat{c}_j^{i-p}}{dt^p} \frac{w^j}{2t} + \\
+ \sum_{l=1}^{p-1} C_p^l \frac{d^{p-l}\hat{c}_j^{i-p}}{dt^{p-l}} (-1)^l \frac{\prod_{r=1}^{l}(2r-1)}{2^{l+1}} \frac{w^j}{t^{l+1}} + \hat{c}_j^{i-p} (-1)^p \frac{\prod_{r=1}^{p}(2r-1)}{2^{p+1}} \frac{w^j}{t^{p+1}} \},
\end{gathered} \tag{36}$$

Перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений систем (9), (21), (29) (при $r = 0$). Принимая во внимание определение симметрических производных в среднем, нетрудно заметить, что они корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда из формул (11), (12), (13), (15), (22), (23), (25), (30), (31) и (32) видно, что решения $\eta^l(t)$ описываются как суммы, в которых каждое слагаемое содержит сомножитель вида $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Следовательно, решения стремятся к бесконечности при $t \to 0$, т. е. значения решений при $t = 0$ не существуют. Один из вариантов разрешения указанной ситуации (как и в [15]) состоит в следующем. Зафиксируем сколь угодно малый момент времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, \text{ если } 0 \leq t \leq t_0; \\ t, \text{ если } t_0 \leq t. \end{cases} \tag{37}$$

Элементы $\frac{w^j(t)}{t^k}$ в формулах (11), (12), (13), (15), (22), (23), (25), (30), (31) и (32), а следовательно и в формулах (16), (17), (18), (26), (27), (28), (34), (35) и (36), заменим на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. Полученные процессы в момент времени $t = 0$ будут принимать нулевые значения, однако они станут решениями только при $t_0 \leq t < T$. Отметим, что для двух разных моментов времени $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$ при $t \geq \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих процессов п.н. совпадают.

Таким образом, суммируя выше сказанное, мы доказали следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ – сингулярный пучок матриц размера $n \times m$, у которого строки и столбцы не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами, $\tilde{Q}$ – $n \times n$-матрица, $f(t)$ – достаточно гладкая n-мерная вектор-функция, $0 \leq t \leq T$; пусть $0 < t_1 < \cdots < t_N < T$; P_L и P_R – невырожденные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, приводящие пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (т. е. к квазидиагональному виду), $L = P_L\tilde{L}P_R$ и $M = P_L\tilde{M}P_R$, $Q = P_L\tilde{Q}$; пусть $\tilde{\zeta}_r(\omega)$, $r = 1, 2, \ldots, N$ – случайные величины со значениями в R^n, такие, что компоненты случайной величины $Q\tilde{\zeta}_r(\omega)$, соответствующие жордановым и сингулярным клеткам по главной диагонали в L, равны нулю; пусть $\zeta(t, \omega) = \sum_{r=1}^{N} \tilde{\zeta}_r(\omega)\chi(t - t_r)$, где χ – функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице для неотрицательных. Тогда: 1) уравнение* (1) *трансформируется к каноническому уравнению* (3)*, которое распадается на независимые подсистемы уравнений; 2) для подсистемы в R^{q+1}, соответствующей единичной матрице в L и $(q+1) \times (q+1)$-матрице K в M, имеет место аналитическая формула для решений вида* (20)*; 3) для подсистем, соответствующих жордановым клеткам в L размера $(p+1) \times (p+1)$ с нулями по главной диагонали и единичным матрицам в M, при $0 < t < T$ имеют место соотношения для нахождения решений вида* (16), (17) *и* (18)*; 4) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из $M + \lambda L$ размера $l \times (l+1)$, при $0 < t < T$ имеют место* *формулы для нахождения решений вида* (26), (27) *и* (28)*; 5) для подсистем, соответствующих сингулярным клеткам из* $M + \lambda L$ *размера* $(d+1) \times d$*, при* $0 < t < T$ *имеют место при выполнении условий согласования* (33) *соотношения для нахождения решений вида* (34), (35) *и* (36)*; 6) зафиксировав сколь угодно малый момент времени* $t_0 > 0$*, мы в знаменателях процессов, удовлетворяющих приведенным в пунктах 3)-5) соотношениям, заменяем* t *на* $t_0(t)$ *по формуле* (37) *и получаем процессы, которые при* $t = 0$ *принимают нулевые значения, но становятся решениями только при* $t_0 \leq t < T$.

Список литературы

1. Власенко Л. А. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации / Л. А. Власенко, Ю. Г. Лысенко, А. Г. Руткас // Экономическая кибернетика.- 2011. №1-3 (67-69). С. 4–9

   VLASENKO, L. A., LYSENKO, YU. G., RUTKAS, A. G. (2011) About one stochastic model of enterprise corporations dynamics. Economic Cybernetics. No. 1–3 (67-69). Pp. 4–9

2. VLASENKO L. A., LYSHKO, S. L., RUTKAS, A. G. (2012) On a stochastic impulsive sustem. ISSN 1025-6415 Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. No. 2. P. 50–55.

3. Шестаков А. Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2010. — № 16 (192). — С. 116–120.

   SHESTAKOV, A. L., SVIRIDYUK, G. A. (2010) A new approach to the measurement of dynamically distorted signals. Vestnik of South Ural State University. — No. 16 (192). — P. 116–120.

4. SHESTAKOV, A. L., KELLER, A. V., SVIRIDYUK, G. A. (2014) The theory of optimal measurements. Journal of Computational and Engineering Mathematics. Vol. 1. No. 1. P. 3–16.

5. SCHEIN, O, DENK, G. (1998) Numerical solution of stochastic differential-algebraic equations with applications to transient noise simulation of microelectronic circuits. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 100, No. 1, P. 77–92, Nov. 1998.

6. SICKENBERGER, T, WINKLER, R. (2007) Stochastic oscillations in circuit simulation. PAMM· Proc. Appl. Math. Mech.. Vol. 7, Issue 1. P. 4050023–4050024.

7. Белов А. А. Дескрипторные системы и задачи управления / А. А. Белов, А. П. Курдюков // М.: АНО Физматлит, 2015. — 272 с.

   BELOV, A. A., KURDYUKOV, A. P. (2015) Descriptor systems and control problems. M .: ANO Fizmatlit. — 272 p.

8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 1967. — 575 с.

   GANTMAKHER, F. R. (1967) The Matrix Theory. Moscow. Fizmatlit. — 575 p.

9. GLIKLIKH, YU. E., MASHKOV, E. YU. (2015) Stochastic Leontieff type equation with non-constant coefficients. Applicable Analysis: An International Journal. — Taylor and Francis. — Vol. 94, Issue 8. — P. 1614–1623.
10. MASHKOV, E.YU. (2017) Singular Stochastic Leontieff type equation with depending on time diffusion coefficients. Global and Stochastic Analysis. Vol. 4 No. 2, September (2017). P. 207–217
11. NELSON, E. (1966) Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. Phys. Reviews. — Vol. 150, No. 4. — P. 1079–1085
12. NELSON, E. (1967) Dynamical theory of Brownian motion. — Princeton: Princeton University Press. — 142 p.
13. GLIKLIKH, YU. E. (2011) Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. — London: Springer-Verlag. — 460 p.
14. Партасарати К. Р. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Р. Партасарати. — М.: Мир, 1988. — 343 с.

    PARTASARATI, K. R. (1988) Introduction to Probability Theory and Measure Theory. Moscow: Mir. — 343 p.
15. Гликлих Ю. Е. Стохастические уравнения леонтьевского типа и производные в среднем случайных процессов / Ю. Е. Гликлих, Е. Ю. Машков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Том 6, № 2. С. 25–39.

    GLIKLIKH, YU. E., MASHKOV, E. YU. (2013) Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. — Vol. 6. — Issue 2. — P. 25–39.
16. GIHMAN, I. I., SCOROHOD, A. V. (1979) Theory of stochastic processes. Vol. 3. New York (NY): Springer-Verlag.

УДК: 519.55/56

MSC2010: 46E30, 46E35, 26D10, 26D15, 46B70

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

© М. А. Муратов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *mamuratov@gmail.com*

© Б. А. Рубштейн

Университет Бен Гуриона в Негеве
отделение математики факультета естественных наук, Беер-Шева, Израиль
e-mail: *benzion@cs.bgu.ac.il*

Embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions.

Muratov M. A., Rubshtein B. A.

Abstract. Let m be the usual Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Dealing with symmetric (rearrangement invariant) spaces $\mathbf{E}$ on the standard measure space $(\mathbb{R}_+, m)$, we treat the following embeddings:

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \ ,$$

where $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ is the closure of $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ in $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1$ is the second associate space of $\mathbf{E}$, $V(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}}$ is the fundamental function of the symmetric space $\mathbf{E}$, $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)} 1_{(0,\infty)}(x)$, $\widetilde{V}$ is the least concave majorant of V, $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ and $\mathbf{M}_{V_*}$ are the Lorentz and Marcinkiewicz spaces with the weights $\widetilde{V}$ and V_* respectively, $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = cl_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$.

The space $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ is the minimal part of the Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$. It is the smallest symmetric space on $\mathbb{R}_+$ whose fundamental function $\varphi_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} = \widetilde{V}$ is equivalent to V. The Marcinkiewicz space $\mathbf{M}_{V_*}$ is the largest symmetric space on $\mathbb{R}_+$ satisfying $\varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = \varphi_{\mathbf{E}} = V$.

The inclusion $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ claimed in [3, II.5.4, Th. 5.5] fails in general. Although, it is true, for example, if $V(+\infty) = \infty$ (the space $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ is minimal), or if the space $\mathbf{E}$ itself is maximal ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$).

The embeddings and natural inequalities for corresponding norms are studied in detail.

A full English version of the work will be published in [7].

Keywords: *Symmetric spaces, Lorentz and Marcinkiewicz spaces, embedding theorems.*

1. Введение

1.1. **Симметричные пространства.** Пусть m обычная мера Лебега на множестве неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, и пусть $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbb{R}_+, m)$ пространство всех конечных почти всюду m-измеримых вещественных функций $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, при этом, функции, равные почти всюду, отождествляются в $\mathbf{L}_0$. Всюду в работе мы рассматриваем симметричные пространства $\mathbf{E}$ на стандартном пространстве с мерой $(\mathbb{R}_+, m)$.

Ненулевое банахово пространство $\mathbf{E} = (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ действительных измеримых функций на $(\mathbb{R}_+, m)$ называется *симметричным (перестановочно инвариантным)*, если

$$f \in \mathbf{L}_0\,,\ g \in \mathbf{E} \text{ и } f^* \le g^* \implies f \in \mathbf{E} \text{ и } \|f\|_{\mathbf{E}} \le \|g\|_{\mathbf{E}}.$$

Через f^* мы обозначаем непрерывную справа убывающую перестановку функции $|f|$, определяемую как

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0, +\infty) \colon n_{|f|}(y) \le x\}\ ,\ x \in [0, \infty)\ ,$$

где

$$n_{|f|}(y) := m\,\{x \in [0, +\infty) \colon |f(x)| > y\}$$

(верхняя) функция распределения $|f|$. Обычно мы предполагаем, что $\lim_{x\to+\infty} n_f(x) = 0$, чтобы избежать случая $n_f(x) \equiv +\infty$.

Легко видеть, что банахово пространство $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_0$ симметрично тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(1) Если $f \in \mathbf{L}_0\,,\ g \in \mathbf{E}$ и $|f| \le |g|$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \le \|g\|_{\mathbf{E}}$.
(2) Если $f \in \mathbf{L}_0\,,\ g \in \mathbf{E}$ и $f^* = g^*$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Условие (1) означает, что $\mathbf{E}$ является идеальной банаховой решеткой. Условие (2) является условием *симметричности (или перестановочной инвариантности)* нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$.

Таким образом, симметричное пространство — это идеальная банахова решетка с симметричной (перестановочно инвариантной) нормой.

1.2. **Первая теорема вложения.** Напомним, что фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{E}}$ симметричного пространства $\mathbf{E}$ определяется как

$$\varphi_{\mathbf{E}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}},\ x \ge 0.$$

В частности, $\varphi_{\mathbf{E}}(1) = \|1_{[0,1]}\|_{\mathbf{E}}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство. Тогда имеют место непрерывные вложения*

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \,, \tag{1}$$

причем

$$\varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geq \|f\|_{\mathbf{E}} \,,\; f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \;\textit{и}\; \|f\|_{\mathbf{E}} \geq \varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \,,\; f \in \mathbf{E} \tag{2}$$

Отметим, что пространство $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ снабжено нормой

$$\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} = \max(\|f\|_{\mathbf{L}_1}, \|f\|_{\mathbf{L}_\infty}),\; f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty.$$

В свою очередь, пространство

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon f = g + h \,,\; g \in \mathbf{L}_1 \,,\; h \in \mathbf{L}_\infty\}$$

содержит все локально интегрируемые функции на $(\mathbb{R}_+, m)$, и снабжено нормой

$$\|f\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} = \inf\{\|g\|_{\mathbf{L}_1} + \|h\|_{\mathbf{L}_\infty} \colon f = g + h \,,\; g \in \mathbf{L}_1 \,,\; h \in \mathbf{L}_\infty\} \,.$$

Пространства $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ являются наименьшим и наибольшим симметричными пространствами на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.

1.3. **Вторая теорема вложения.** Пусть $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ замыкание $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в симметричном пространстве $\mathbf{E}$, и пусть $\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1$ второе ассоциированное пространство к $\mathbf{E}$, где

$$\mathbf{E}^1 := \left\{ g \in \mathbf{L}_0 \colon \|g\|_{\mathbf{E}^1} := \sup \left| \int fg\, dm \right| < \infty,\; f \in \mathbf{E},\; \|f\|_{\mathbf{E}} \leq 1 \right\} \,.$$

Пространства $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{E}^{11}$ являются минимальным и максимальным симметричными пространствами, соответствующими пространству $\mathbf{E}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство. Тогда имеют место непрерывные вложения*

$$\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \,, \tag{3}$$

причем

$$\|f\|_{\mathbf{E}^0} = \|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \,,\; f \in \mathbf{E}^0 \;\; \textit{и} \;\; \|f\|_{\mathbf{E}} \geq \|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \,,\; f \in \mathbf{E} \,. \tag{4}$$

Два частных случая, когда $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$ ($\mathbf{E}$ минимально), и когда $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ ($\mathbf{E}$ максимально), представляют особый интерес.

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.

1.4. **Третья теорема вложения.** Пусть W — возрастающая функция на $[0,+\infty)$ такая, что $W(0)=0$, W вогнута на $(0,+\infty)$ и $W(x)>0$ для некоторого x. Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$ на $(\mathbb{R}_+, m)$ относительно вогнутой весовой функции W определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_W := \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := \int\limits_0^\infty f^*(x)\, dW(x) < \infty \right\}.$$

Оно является симметричным пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W$.

Пусть теперь V квазивогнутая функция на $\mathbb{R}_+$, т.е. $V(0)=0$ и обе функции $V(x)$ и $V_*(x) := \dfrac{x}{V(x)} 1_{(0,\infty)}(x)$ возрастают на $\mathbb{R}_+$. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ на $(\mathbb{R}_+, m)$ определяется как

$$\mathbf{M}_V := \{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{M}_V} := \sup_{0<x<\infty} \frac{1}{V(x)} \int\limits_0^x f^*(y)\, dy < \infty \}.$$

Оно является симметричным пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$.

Теорема 3. *Пусть* $V(x) = \varphi_{\mathbf{E}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}}$ *фундаментальная функция симметричного пространства* $\mathbf{E}$, $\widetilde{V}$ *— наименьшая вогнутая мажоранта* V *и* $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)} 1_{(0,\infty)}(x)$. *Тогда имеют место непрерывные вложения*

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}\,, \tag{5}$$

причем

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} \geq \|f\|_{\mathbf{E}}\,,\ f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \ \text{и}\ \|f\|_{\mathbf{E}} \geq \|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}}\,,\ f \in \mathbf{E}\,. \tag{6}$$

Здесь пространство $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ является минимальной частью пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$. Это наименьшее симметричное пространство на $\mathbb{R}_+$, фундаментальная функция которого $\varphi_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} = \widetilde{V}$ эквивалентна V. Пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_*}$ является наибольшим симметричным пространством на $\mathbb{R}_+$, для которого

$$\varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = \varphi_{\mathbf{E}} = V.$$

Вложение $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ из [3, II.5.4, Теорема 5.5], в общем случае неверно. В то же время, оно является верным, например, если $V(+\infty)=\infty$ (пространство $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ является минимальным), или если само пространство $\mathbf{E}$ является максимальным ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$).

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 3

Объединяя вложения (1), (3) и (5), для произвольного симметричного пространства $\mathbf{E}$ на $\mathbb{R}_+$ мы имеем:

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \ .$$

Неравенства (2), (4) и (6) определяют естественные соотношения между соответствующими нормами.

Некоторые варианты вышеуказанных теорем рассматривались, например, в [1, 2, 3, 4, 5, 6].

2. Вложения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

2.1. **Минимальность и условие (A).** Симметричное пространство $\mathbf{E}$ называется *минимальным*, если множество $\mathbf{F}_1$ всех простых (конечнозначных) интегрируемых функций плотно в $\mathbf{E}$. Так как $\mathbf{F}_1$ плотно в $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, то симметричное пространство $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда замыкание $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ совпадает с $\mathbf{E}$.

В общем случае, замыкание

$$\mathbf{E}^0 := cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) \subseteq \mathbf{E}$$

является симметричным пространством, которое называется *минимальной частью* $\mathbf{E}$. Таким образом, симметричное пространство $\mathbf{E}$ является минимальным тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}.$$

Симметричное пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A) (имеет *порядково непрерывную норму*), если:

(A) $\quad 0 \le f_n \in \mathbf{E},\ f_n \downarrow 0 \Longrightarrow \|f_n\|_{\mathbf{E}} \downarrow 0.$

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{E}$ симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию (A).*
(2) $\mathbf{E}$ *минимально и* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.
(3) $\mathbf{E}$ *сепарабельно.*

Доказательство. Смотри, например, [2, X.3, Теорема.3], [4, Утверждение 1.a.8, Теорема.1.b.16], [5, Теорема 6.5.3.]. □

2.2. **Минимальность и условие** (C). Симметричное пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C) (имеет *порядково полунепрерывную норму*), если

$(C)\quad 0 \le f_n \uparrow f \in \mathbf{E} \implies \sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Теорема 5. *Каждое минимальное симметричное пространство* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию (C).*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.

Если $\mathbf{E}$ минимально, и $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$, то $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A) (см. теорему 4), а из условия (A), очевидно, следует условие (C).

Случай 2. $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) > 0$.

Пусть $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = c > 0$ и $x_n \downarrow 0$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E}$, мы имеем:

$$\|f^*\|_{\mathbf{E}} \ge \|f^* \cdot 1_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} \ge f^*(x_n)\|1_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} = f^*(x_n)\varphi_{\mathbf{E}}(x_n) \ge c \cdot f^*(x_n).$$

Откуда

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = f^*(0) = \sup_n f^*(x_n) \le \frac{1}{c}\|\|f^*\|_{\mathbf{E}} < \infty \ ,$$

т.е. $f \in \mathbf{L}_\infty$. Таким образом, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_\infty$.

Теперь нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{E}$ *минимальное симметричное пространство такое, что* $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}_\infty$ *(строгое вложение). Тогда для каждой функции* $f \in \mathbf{E}$,

$$\|f - f \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \to 0 \text{ при } n \to \infty \ . \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}_0$ — множество всех простых функций на $\mathbb{R}_+$, имеющих ограниченный носитель. Простая функция g принадлежит $\mathbf{F}_0$ тогда и только тогда, когда $g \cdot 1_{[a,\infty)} = 0$ для некоторого конечного $a > 0$.

Так как $\mathbf{F}_0$ плотно в $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$, и $\mathbf{E}$ минимально, то

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_0) \ .$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \mathbf{F}_0$ такая, что $\|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon$. Тогда мы имеем

$$\|f - f \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \le \|f - g\|_{\mathbf{E}} + \|g - g \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} + \|g \cdot 1_{[0,n]} - f \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \ .$$

Более того, $\|g - g \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} = 0$ для достаточно больших n, и

$$\|g \cdot 1_{[0,n]} - f \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \le \|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon \ .$$

Следовательно, $\|f - f \cdot 1_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} < 2\varepsilon$ для достаточно больших n, и поэтому имеет место предельное соотношение (7). □

Вернемся к доказательству теоремы 5. Пусть

$$0 \le f_n \uparrow f \in \mathbf{E} = \mathbf{E}^0 \subset \mathbf{L}_\infty \, .$$

Тогда по лемме 1, мы имеем

$$\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \sup_n \sup_k \|f_n \cdot 1_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \sup_k \|f \cdot 1_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}} \, .$$

□

Замечание 1. Минимальные симметричные пространства $\mathbf{E}$ были определены в [4, Определение.2.a.1(ii)], как симметричные пространства, удовлетворяющие равенству

$$\mathbf{E} = cl_{\mathbf{E}^{11}}(\mathbf{F}_1).$$

Из теоремы 5 следует, что

$$cl_{\mathbf{E}^{11}}(\mathbf{F}_1) = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1) = \mathbf{E}^0.$$

Таким образом, наше определение минимальности ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$), эквивалентно определению минимальности из [4].

2.3. **Естественное вложение $\mathbf{E}^1 \to \mathbf{E}^*$.** Напомним, что ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ симметричного пространства $\mathbf{E}$ определяется как

$$\mathbf{E}^1 := \left\{ g \in \mathbf{L}_0 \colon \|g\|_{\mathbf{E}^1} := \sup_{\|f\|_{\mathbf{E}} \le 1} \left| \int fg \, dm \right| < \infty \right\} \, .$$

Утверждение 3. *Пусть $\mathbf{E}$ симметричное пространство и $\mathbf{E}^0$ его минимальная часть. Тогда*

(1) $\mathbf{E}^1$ *является симметричным пространством.*
(2) $(\mathbf{E}^0)^1 = \mathbf{E}^1$.
(3) $\varphi_{\mathbf{E}^1}(x) = \varphi_*(x)$, *где* $\varphi_*(x) := \dfrac{x}{\varphi_{\mathbf{E}}(x)} 1_{(0,\infty)}, x \ge 0$.

Доказательство. Смотри, например, [3, II.6.], [6, 1.7.]. □

Ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ может быть отождествлено с подмножеством $\{\upsilon_g \colon g \in \mathbf{E}^1\}$ дуального пространства $\mathbf{E}^*$, где

$$\upsilon_g(f) := \int fg \, d\mu \, , \; f \in \mathbf{E} \, .$$

По определению, $\upsilon_g \in \mathbf{E}^*$ и $\|\upsilon_g\|_{\mathbf{E}^*} = \|g\|_{\mathbf{E}^1}$ для каждой функции $g \in \mathbf{E}^1$. Более того,

Утверждение 4. *Естественное вложение*

$$\upsilon : \mathbf{E}^1 \ni g \to \upsilon_g \in \mathbf{E}^*$$

является изометрическим изоморфизмом из $\mathbf{E}^1$ *на замкнутое подпространство* $\{\upsilon_g \colon g \in \mathbf{E}^1\}$ *пространства* $\mathbf{E}^*$.

Теорема 4 может быть продолжена эквивалентным условием (4).

Теорема 6. *Условия (1) - (3) теоремы 4 эквивалентны следующему условию*

(4) $\upsilon(\mathbf{E}^1) = \mathbf{E}^*$.

Доказательство. Смотри, например, [2, X.4.]. □

Следствие 1. $(\mathbf{E}^0)^* = \upsilon(\mathbf{E}^1) \Longleftrightarrow \varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.

Доказательство. Следует из теорем 4, 6 и утверждения 3. □

2.4. **Вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$ и условие (C).** Так как ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ само является симметричным, мы можем определить второе ассоциированное пространство как

$$\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1.$$

Пространство $\mathbf{E}^{11}$ состоит из функций $h \in \mathbf{L}_0$ таких, что

$$\|h\|_{\mathbf{E}^{11}} = \sup\left\{\left|\int_0^\infty hg\,dm\right| : g \in \mathbf{E}^1, \|g\|_{\mathbf{E}^1} \le 1\right\} < \infty\ .$$

Если $f \in \mathbf{E}$, то для каждого $g \in \mathbf{E}^1$ мы имеем

$$\left|\int_0^\infty fg\,dm\right| \le \|f\|_{\mathbf{E}} \cdot \|g\|_{\mathbf{E}^1}.$$

Это означает, что

$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \text{ и } \|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \le \|f\|_{\mathbf{E}}\ ,\ f \in \mathbf{E}\ . \tag{8}$$

Вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$ может быть строгим.

Пример 1. Пусть $\mathbf{R}_0 := \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty : f^*(\infty) = 0\}$. Тогда

1. $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)^0$;
2. $(\mathbf{L}_\infty)^0 = \mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{R}_0 \subset \mathbf{L}_\infty = (\mathbf{L}_1)^1 = (\mathbf{L}_\infty)^{11} = [(\mathbf{L}_\infty)^0]^{11}$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (C).

(2) $\|f\|_{\mathbf{E}} = \sup\left\{\left|\int\limits_0^\infty fg\,dm\right| : g \in \mathbf{E}^1, \|g\|_{\mathbf{E}^1} \le 1\right\}$.

(3) $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} = \|f\|_{\mathbf{E}}\,,\ f \in \mathbf{E}$.

Доказательство. Смотри, например, [2, X.4., Теорема 7], [4, Утверждение 1.b.18]. □

Условие (3) означает, что вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ есть изометрия. В отличии от вложений $\mathbf{E}^0 \to \mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^0 \to \mathbf{E}^{11}$, отображение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ не обязательно в общем случае должно быть изометрическим. Более того, оно не обязательно должно быть открытым, т.е. пространство $\mathbf{E}$ может не быть замкнутым в $\mathbf{E}^{11}$.

2.5. **Максимальность. Условия** (B) **и** (BC). Симметричное пространство $\mathbf{E}$ называется *максимальным*, если

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}.$$

Симметричное пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (B) (имеет *монотонно полную норму*), если

(B) $\quad 0 \le f_n \uparrow,\ f_n \in \mathbf{E}\,,\ \sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty \implies f_n \uparrow f$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}$.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{E}$ *максимально.*

(2) $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G}$.

(3) $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (B).

Доказательство. 1) $\iff$ 2). Если $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ для некоторого симметричного пространства $\mathbf{G}$, то $\mathbf{E}^1 = \mathbf{G}^{11}$ и

$$\mathbf{E}^{11} = \mathbf{G}^{111} = \mathbf{G}^1 = \mathbf{E}.$$

Обратно, если $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, то $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ для $\mathbf{G} = \mathbf{E}^1$.

2) $\implies$ 3). Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ и $\{f_n\} \subset \mathbf{E}$ такая, что $0 \le f_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$.

Так как оба пространства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{G}^1$ банаховы, то по теореме об открытом отображении нормы $||\cdot||_{\mathbf{E}}$ и $||\cdot||_{\mathbf{G}^1}$ эквивалентны. Следовательно,

$$\sup_n ||f_n||_{\mathbf{G}^1} = c < \infty.$$

Поскольку

$$\|f_n\|_{\mathbf{G}^1} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty f_n g dm : 0 \le g \in \mathbf{G},\ \|g\|_{\mathbf{G}} \le 1\right\},$$

то для каждой функции $0 \le g \in \mathbf{G}$, такой что $\|g\|_{\mathbf{G}} \le 1$, функции $f_n g$ будут интегрируемы и

$$\int\limits_0^\infty f_n g dm \le \sup_n \|f\|_{\mathbf{G}^1} = c < \infty.$$

По теореме Фату–Лебега функция $\sup\limits_n (f_n g) = (\sup\limits_n f_n) g$ является интегрируемой, и следовательно, она почти всюду конечна. Пусть $f = \sup\limits_n f_n$, тогда

$$\|f\|_{\mathbf{G}^1} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty f g dm : 0 \le g \in \mathbf{G},\ \|g\|_{\mathbf{G}} \le 1\right\} \le c < \infty,$$

т.е. $f \in \mathbf{G}^1 = \mathbf{E}$. Следовательно, пространство $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ удовлетворяет условию (B).

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $f \in \mathbf{E}^{11}$ и $f \ge 0$. Тогда существует такая последовательность $\{f_n\}$, что $0 \le f_n \in \mathbf{F}_0$ и $f_n \uparrow f$. Так как вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$ непрерывно и $\mathbf{E}^0 = (\mathbf{E}^{11})^0$ как множества, то по теореме об открытом отображении, нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^0}$ и $\|\cdot\|_{(\mathbf{E}^{11})^0}$ эквивалентны.

Следовательно, для некоторого $c > 0$,

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \le c \cdot \|f\|_{\mathbf{E}^{11}},\ f \in \mathbf{E}^0 = (\mathbf{E}^{11})^0.$$

Поскольку $\{f_n\} \subset \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{E}^0$ и $f \in \mathbf{E}^{11}$, мы имеем

$$\|f_n\|_{\mathbf{E}} \le c \cdot \|f_n\|_{\mathbf{E}^{11}} \le c \cdot \|f\|_{\mathbf{E}^{11}} < \infty$$

для всех $n \ge 1$. Следовательно, $\sup_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$ и из условия (B) следует, что $f \in \mathbf{E}$.

Мы показали, что $\mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{E}^{11} = \mathbf{E}$, т.е. $\mathbf{E}$ максимально.

$\square$

Симметричное пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (BC), если

(BC) : $\{f_n\} \subset \mathbf{E},\ 0 < f_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty \implies f \uparrow f$ и $\|f_n\|_{\mathbf{E}} \uparrow \|f\|_{\mathbf{E}}$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}$.

Замечание 2. Условие (BC) означает, что в симметричном пространстве $\mathbf{E}$ выполнены оба условия (B) и (C).

Объединяя теоремы 7 и 8, получим

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричные пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$.
(2) $\mathbf{E} = \mathbf{G}^{1}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} = \|\cdot\|_{\mathbf{G}^{1}}$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G}$.
(3) $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (BC).

Замечание 3. (**Условие Фату**) Эквивалентные условия теоремы 9 можно переформулировать следующим образом:

$$(F): \quad \begin{array}{l} \{f_n\} \subset \mathbf{E},\ f_n \to f \text{ почти всюду и } \sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty \implies f \in \mathbf{E} \\ \text{и } \|f\|_{\mathbf{E}} \le \underline{\lim}_n \|f_n\|_{\mathbf{E}}. \end{array}$$

В случае $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ условие (F) — это утверждение теоремы Фату. Поэтому условие (F) обычно называют условие Фату. (См, [4, Теорема 1.b.18, Замечание 2])

2.6. **Доказательство теорем 1 и 2.** Мы начнем с доказательства теоремы 2. Принимая во внимание соотношения (8), нам достаточно доказать следующее утверждение:

Утверждение 5. *Для любой функции* $f \in \mathbf{E}^0$ *имеет место равенство:*

$$\|f\|_{\mathbf{E}^0} = \|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}^{11}}.$$

Доказательство. Симметричное пространство $\mathbf{E}^0$ минимально, и по утверждению 3

$$(\mathbf{E}^0)^1 = \mathbf{E}^1.$$

Поэтому

$$(\mathbf{E}^0)^{11} = \mathbf{E}^{11}.$$

Так как симметричное пространство $\mathbf{E}^0$ минимально, то оно удовлетворяет условию (C) (теорема 5). Следовательно, по теореме 7, вложение

$$\mathbf{E}^0 \subseteq (\mathbf{E}^0)^{11} = \mathbf{E}^{11}$$

является изометрическим. □

Перейдем к доказательству теоремы 1. По поводу доказательства вложения (1) и неравенства

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \ge \varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}\ ,\ f \in \mathbf{E}\ , \tag{9}$$

мы отошлем читателя к [3, Теор. II.4.1]. Нам осталось доказать неравенство

$$\varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geq \|f\|_{\mathbf{E}} \ , \ f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \ , \tag{10}$$

вместо более слабого неравенства

$$2\varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geq \|f\|_{\mathbf{E}} \ , \ f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \ ,$$

доказанного в [3, II.4., Теорема 4.1].

Если $f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, то по утверждению 5 мы имеем

$$\|f\|_{\mathbf{E}^0} = \|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}^{11}}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}^{11}} = \sup\left\{\left|\int fg\,dm\right| : \|g\|_{\mathbf{E}^1} \leq 1\right\} \ .$$

Заменяя $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}^1$ в (1) и (9), мы имеем

$$\mathbf{E}^1 \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \text{ и } \|g\|_{\mathbf{E}^1} \geq \varphi_{\mathbf{E}^1}(1)\|g\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \ , \ g \in \mathbf{E}^1 \ .$$

Следовательно, из неравенства $\|g\|_{\mathbf{E}^1} \leq 1$ следует неравенство $\varphi_{\mathbf{E}^1}(1)\|g\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \leq 1$, и

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \leq \sup\left\{\left|\int fg\,dm\right| : \varphi_{\mathbf{E}^1}(1)\|g\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \leq 1\right\} \ .$$

Рассматривая функцию $h = \varphi_{\mathbf{E}^1}(1)g$, мы получим

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbf{E}} &\leq \sup\left\{\left|\int f\frac{h}{\varphi_{\mathbf{E}^1}(1)}\,dm\right| : \|h\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \leq 1\right\} = \ . \\ &= \frac{1}{\varphi_{\mathbf{E}^1}(1)}\sup\left\{\left|\int fh\,dm\right| : \varphi_{\mathbf{E}^1}\|h\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty} \leq 1\right\} = \\ &= \frac{1}{\varphi_{\mathbf{E}^1}(1)}\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} = \varphi_{\mathbf{E}}(1)\|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty}.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из

$$\varphi_{E^1} = \varphi_*(x) = \frac{x}{\varphi_{\mathbf{E}}(x)}1_{(0,\infty)}, x \geq 0$$

при $x = 1$ (утверждение 3).

3. Вложения $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$

3.1. **Пространства Лоренца.** Пространство Лоренца $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_W := \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := \int\limits_0^\infty f^*(x)\, dW(x) < \infty \right\} ,$$

где весовая функция $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ предполагается возрастающей вогнутой на $(0, \infty)$, причем $W(0) = 0$ и $W(x) > 0$ для $x > 0$. Здесь

$$\int\limits_0^\infty f^*(x)\, dW(x) = f^*(0)W(0+) + \int\limits_0^\infty f^*(x)W'(x)dx$$

несобственный интеграл Римана-Стилтьеса от убывающей функции f^* по возрастающей функции W на $\mathbb{R}_+$.

Напомним некоторые основные свойства этих пространств.

Утверждение 6. (1) $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ *является симметричным пространством.*

(2) *Фундаментальная функция* $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}$ *совпадает с* W.

(3) $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ *является максимальным* ($(\mathbf{\Lambda}_W)^{11} = \mathbf{\Lambda}_W$) *и* $\|\cdot\|_{(\mathbf{\Lambda}_W)^{11}} = \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$.

Доказательство. Смотри, например, [3, II.5.1], [6, 2.1.]. □

Напомним, что симметричное пространство $\mathbf{R}_0$ определяется как

$$\mathbf{R}_0 := \{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}\infty \colon f^*(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f^*(x) = 0 \} .$$

Это пространство совпадает с замыканием $cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, т.е.

$$\mathbf{R}_0 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)^0$$

является минимальной частью пространства $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

Утверждение 7. (1) *Минимальная часть* $\mathbf{\Lambda}_W$ *имеет вид* $\mathbf{\Lambda}^0_W = \mathbf{\Lambda}_W \cap \mathbf{R}_0$.

(2) $\mathbf{\Lambda}_W$ *минимально* $\iff W(+\infty) = +\infty$.

(3) $\mathbf{\Lambda}_W$ *сепарабельно* $\iff W(+\infty) = +\infty$ *and* $W(0+) = 0$.

Доказательство. Смотри, например, [3, II.5.1], [6, 2.1.]. □

3.2. **Четыре типа пространств Лоренца.** Рассмотрим четыре основных типа пространств Лоренца.

Случай (1). $W(0+) = 0$, $W(\infty) = \infty$.

Так как $W(\infty) = \infty$, по утверждению 7, $\mathbf{\Lambda}_W$ является минимальным, причем

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}(0+) = W(0+) = 0.$$

Это означает, что пространство $\mathbf{\Lambda}_W$ сепарабельно (Теорема 4). По этой же теореме 4 и утверждению 6, предположения случая **(1)** эквивалентны условию (A) и $\upsilon(\mathbf{\Lambda}_W^1) = \mathbf{\Lambda}_W^*$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{R}_0$, $\mathbf{\Lambda}_W \nsubseteq \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{\Lambda}_W$ сепарабельно.

Пример. $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_1$ при $W(x) = x$, $x \geq 0$.

Случай (2). $W(0+) > 0$**,** $W(\infty) = \infty$**.**

Как и в случае (1), условие $W(\infty) = \infty$ обеспечивает минимальность пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$. Однако, $\mathbf{\Lambda}_W$ — не сепарабельное, так как для фундаментальной функции $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W$ имеем $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}(0+) = W(0+) > 0$ (теорема 4).

Из условия $W(0+) > 0$ получаем:

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} \geq f^*(0)W(0+) = W(0+)\|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$$

для всех $f \in \mathbf{\Lambda}_W$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty$.

С другой стороны,

$$\|1_{(0,\infty)}\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = W(0+) + \int_0^\infty dW = W(\infty) = \infty,$$

т.е. $1_{(0,\infty)} \notin \mathbf{\Lambda}_W$ и потому $\mathbf{\Lambda}_W \neq \mathbf{L}_\infty$. Таким образом,

$$\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{R}_0 = \mathbf{L}_\infty^0.$$

Следовательно, в этом случае $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{R}_0$, $\mathbf{\Lambda}_W$ минимально и не сепарабельно.

Пример. $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ при $W(x) = (x+1) \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$, $x \geq 0$. Здесь норма $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = \|f\|_{\mathbf{L}_1} + \|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$ не равна норме $\|f\|_{\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty} = \max\{\|f\|_{\mathbf{L}_1}, \|f\|_{\mathbf{L}_\infty}\}$, но эквивалентна ей.

Случай (3). $W(0+) = 0$**,** $W(\infty) < \infty$**.**

Пространство $\mathbf{\Lambda}_W$ не минимально, так как $W(\infty) < \infty$ (утверждение 7). При этом,

$$\|1_{(0,\infty)}\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = W(0+) + \int_0^\infty dW = W(\infty) < \infty,$$

т.е. $1_{(0,\infty)} \in \mathbf{\Lambda}_W$, и потому $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{\Lambda}_W$.

Из условия $W(0+) = 0$ следует, что $\mathbf{\Lambda}_W \neq \mathbf{L}_\infty$.

Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W \supset \mathbf{L}_\infty$ (вложение строгое) и $\mathbf{\Lambda}_W$ не минимально.

Пример. $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ при $W(x) = \min\{x, 1\},\ \ x \geq 0$. В этом случае,

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = \int_0^\infty f^* dW = \int_0^\infty f^* W' dm = \int_0^1 f^* dm = \|f\|_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}.$$

Случай (4). $W(0+) > 0$, $W(\infty) < \infty$**.**

Эти условия влекут, соответственно, $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{\Lambda}_W \supseteq \mathbf{L}_\infty$, т.е. $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$. При этом, из неравенства

$$0 < W(0+) \leq W(x) \leq W(\infty) < \infty$$

следует, что

$$W(0+)\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} \leq \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} \leq W(\infty)\|f\|_{\mathbf{L}_\infty},$$

где $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = f^*(0)$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ и нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty}$ эквивалентны.

Пример. $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ при $W(x) = 1_{(0,\infty)}(x), \quad x \geq 0$. Ясно, что пространство $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ не минимально, $\mathbf{L}_\infty^0 = \mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{R}_0$.

Пример 2. Пространства $\mathbf{L}_p$, $\ 1 < p < \infty$. Фундаментальная функция пространства $\mathbf{L}_p$ равна $\varphi_{\mathbf{L}_p} = x^{\frac{1}{p}}$ при $x \geq 0$.

Положим $W_p = \varphi_{\mathbf{L}_p}$, $1 < p < \infty$, и рассмотрим семейство пространств Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{W_p}$, где $1 < p < \infty$.

Функции W_p вогнутые, и $W_p(0+) = 0$, $W_p(\infty) = \infty$. таким образом, пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{W_p}$, как и соответствующие пространства $\mathbf{L}_p$, сепарабельны. Можно показать, что $\mathbf{\Lambda}_{W_p} \subset \mathbf{L}_p$, $1 < p < \infty$, причем все вложения являются строгими.

3.3. **Пространства Марцинкевича.** Пространство Марцинкевича $(\mathbf{M}_V, \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V})$ можно определить как множество

$$\mathbf{M}_V := \{f \in \mathbf{L}_0 \colon V_* \cdot f^{**} \in \mathbf{L}_\infty\}\ ,$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{M}_V} := \|V_* \cdot f^{**}\|_{\mathbf{L}_\infty}\ ,\ f \in \mathbf{M}_V\ ,$$

где

$$V_*(0) = 0\ ,\ V_*(x) = \frac{x}{V(x)} 1_{(0,\infty)}(x) \text{ и } f^{**}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f^*(y)\,dy\ ,\ x > 0\ .$$

В этом определении весовая функция V не обязательно вогнута. Предполагается, что она *квази-вогнута* на $\mathbb{R}_+$, т.е. $V(0) = 0$ и обе функции $V(x)$ и $V_*(x)$ являются возрастающими на $\mathbb{R}_+$.

Утверждение 8. (1) $(\mathbf{M}_V, \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V})$ *является симметричным пространством.*

(2) *Фундаментальная функция* $\varphi_{\mathbf{M}_V}$ *совпадает с* V_*.

(3) $\mathbf{M}_V$ *максимально:* $(\mathbf{M}_V)^{11} = \mathbf{M}_V$

Доказательство. Смотри, например, [3, II.5.2], [5, Глава 11.] . □

Чтобы описать двойственность между пространствами Лоренца и Марцинкевича, напомним, что для каждой квазивогнутой функции V на $\mathbb{R}_+$ существует наименьшая вогнутая мажоранта $\widetilde{V}$, и имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\widetilde{V} \le V \le \widetilde{V}. \tag{11}$$

Смотри, [3, II.1].

Таким образом, $\mathbf{M}_{\widetilde{V}} = \mathbf{M}_V$,т.е. пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_{\widetilde{V}}$ и $\mathbf{M}_V$ совпадают как множества, а нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_{\widetilde{V}}}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V}$ эквивалентны:

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathbf{M}_{\widetilde{V}}} \le \|f\|_{\mathbf{M}_V} \le \|f\|_{\mathbf{M}_{\widetilde{V}}},\ f \in \mathbf{M}_V.$$

Утверждение 9. (1) *Для каждой вогнутой весовой функции* W *имеет место*

$$(\mathbf{\Lambda}^1_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}^1_W}) = (\mathbf{M}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W}) \text{ и } (\mathbf{M}^1_W, \|\cdot\|_{\mathbf{M}^1_W}) = (\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}).$$

(2) *Для каждой квази-вогнутой весовой функции* V *пространства* $\mathbf{M}^1_V$ *и* $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ *совпадают как множества, а нормы* $\|\cdot\|_{\mathbf{M}^1_V}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}}$ *эквивалентны.*

3.4. **Вложение** $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$**.** Пусть V квази-вогнутая функция на $\mathbb{R}^+$, $\widetilde{V}$ наименьшая вогнутая мажоранта V, и V_* — квазивогнутая функция, определяемая равенство $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)}$, $x > 0$ и $V_*(0) = 0$.

Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$, также как и его минимальная часть

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = cl_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}}(\mathbf{F}_1) = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \cap \mathbf{R}_0$$

имеют фундаментальную функцию $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \widetilde{V}$, где функции $\widetilde{V}$ и V эквивалентны.

Во-первых, докажем вложение $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}$, имеющего фундаментальную функцию $\varphi_{\mathbf{E}} = V$.

Утверждение 10. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство с фундаментальной функцией* $\varphi_{\mathbf{E}} = V$. *Тогда* $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ *и*

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} \ge \|f\|_{\mathbf{E}} \tag{12}$$

для каждой функции $f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$.

Доказательство. Докажем, что $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} \ge \|f\|_{\mathbf{E}}$ для каждой функции $f \in \mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$.

Допустим, что $f = 1_A$, где $0 \le mA < \infty$. В этом случае $f = 1_A \in \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$. Пусть $x = mA$. Тогда $f^*(x) = 1_{[0,x]} \in \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$, и

$$\|1_A\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \widetilde{V}(x) \ge V(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}} = \|1_A\|_{\mathbf{E}}.$$

Если $f \in \mathbf{F}_1$, то $f^* \in \mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ и f^* можно представить в виде

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot 1_{[0,b_i]}, c_i > 0,\ 0 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_m.$$

Для таких функций мы имеем

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \int\limits_0^\infty f^* d\widetilde{V} = \sum_{i=1}^{m} c_i \widetilde{V}(b_i) \ge \sum_{i=1}^{m} c_i V(b_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \|1_{[0,b_i]}\|_{\mathbf{E}}$$

$$\ge \left\| \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot 1_{[0,b_i]} \right\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}.$$

Таким образом, неравенство (12) верно для любой функции $f \in \mathbf{F}_1$.

По определению, $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = cl_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}}(\mathbf{F}_1)$. Поэтому для любой функции $f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ можно выбрать последовательность $f_n \in \mathbf{F}_1$ такую, что

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

С другой стороны, из неравенства (12) следует, что f_n является последовательностью Коши в $\mathbf{E}$. Так как $\mathbf{E}$ полное, то $\|f_n - f_0\|_{\mathbf{E}} \to 0$ для некоторой функции $f_0 \in \mathbf{E}$. Так как

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} \to 0 \Longrightarrow \|f_n - f\|_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty} \to 0$$

и

$$\|f_n - f_0\|_{\mathbf{E}} \to 0 \Longrightarrow \|f_n - f_0\|_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty} \to 0$$

то $f = f_0 \in \mathbf{E}$. Следовательно, $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ и (12) имеет место для любой функции $f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$. □

3.5. **Вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{\mathbf{V}_*}$.** Теперь мы покажем, что пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_*}$ является наибольшим среди всех симметричных пространств $\mathbf{E}$ с фундаментальной функцией $\varphi_E = V$

Утверждение 11. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство с фундаментальной функцией* $\varphi_{\mathbf{E}} = V$. *Тогда* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$ *и*

$$\|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} \le \|f\|_{\mathbf{E}} \tag{13}$$

для каждой функции $f \in \mathbf{E}$.

Доказательство. Для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}$ имеем

$$\|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{L}_1} \leq \frac{x}{\varphi_{\mathbf{E}}(x)} \|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}}, \quad x > 0$$

для любой функции $f \in \mathbf{E}$ (см., [3, II.4.1]). Из этого неравенства для фундаментальной функции $\varphi_{\mathbf{E}} = V$ получаем, что

$$\frac{\|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{L}_1}}{\|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}}} \leq \frac{x}{V(x)} = V_*(x),\ x > 0, \quad f \in \mathbf{E}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{\mathbf{E}} = \|f^*\|_{\mathbf{E}} \geq \|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}} \geq \frac{1}{V_*(x)} \|f^* \cdot 1_{[0,x]}\|_{\mathbf{L}_1} = \frac{1}{V_*(x)} \int\limits_0^x f^* dm$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} = \sup_{0<x<\infty} \left\{ \frac{1}{V_*(x)} \int\limits_0^x f^* dm \right\} \leq \|f\|_{\mathbf{E}}.$$

$\square$

3.6. **Теорема 3 и ее следствия.** Удобно объединить утверждения 10 и 11 с теоремой 2 в следующей теореме вложения.

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{E}$ *симметричное пространство с фундаментальной функцией* $\varphi_{\mathbf{E}} = V$, $\widetilde{V}$ *наименьшая вогнутая мажоранта квазивогнутой функции* V *и* $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)}$, $x > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}, \tag{14}$$

причем

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \|f\|_{\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}} \geq \|f\|_{\mathbf{E}^0} = \|f\|_{\mathbf{E}},\ f \in \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \tag{15}$$

и

$$\|f\|_{\mathbf{E}} \geq \|f\|_{\mathbf{X}^{11}} \geq \|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}},\ f \in \mathbf{E}. \tag{16}$$

Доказательство. Из утверждения 10 имеем $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$, откуда

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}) = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1) = \mathbf{E}^0.$$

В силу утверждения 11 имеем, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{V_*}$, откуда из двойственности между пространствами Лоренца и Марцинкевича (раздел 4.3), мы также имеем

$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{V_*} \Longrightarrow \mathbf{E}^1 \supseteq \mathbf{M}^1_{V_*} = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V_*}} \Longrightarrow \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}^{11}_{V_*} = \mathbf{M}_{V_*}.$$

Вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$ было доказано в разделе 3.4. Отсюда следуют и соответствующие неравенства для норм. $\square$

Следует отметить, что пространства $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{11}$ и $\mathbf{M}_{V_*}$ имеют одну и ту же квазивогнутую фундаментальную функцию V, в то же время как пространства $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}}$ и $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ имеют вогнутую фундаментальную функцию $\widetilde{V}$. Функция $\widetilde{V}$ эквивалентна функции V, но не обязана с ней совпадать. А именно, $\frac{1}{2}\widetilde{V} \leq V \leq \widetilde{V}$ (см., (11)).

Замечание 4. 1). Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ минимально тогда и только тогда, когда $\widetilde{V}(\infty) = \infty$ (раздел 4.1., утверждение 7) или, что эквивалентно, $V(\infty) = \infty$. Очевидно, в этом случае мы имеем

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}.$$

Полагая $\mathbf{E} = \mathbf{L}^0_\infty = \mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{R}_0$, мы получим

$$V(x) = \varphi_{\mathbf{E}}(x) = 1_{(0,\infty)},\ x \geq 0$$

и $\mathbf{\Lambda}_V = \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} = \mathbf{L}_\infty$. Следовательно, $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ не минимально, и мы видим, что в этом примере $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \not\subseteq \mathbf{E}$. Более того,

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = \mathbf{L}^0_\infty = \mathbf{E} \subset \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}},$$

причем последнее вложение строгое.

2). Рассмотрим случай, когда симметричное пространство $\mathbf{E}$ является максимальным, т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ как множества. Тогда

$$\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E} \Longrightarrow (\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}})^1 = \mathbf{\Lambda}^1_{\widetilde{V}} \supseteq \mathbf{E}^1 \Longrightarrow \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} = \mathbf{\Lambda}^{11}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^{11} = \mathbf{E}.$$

Таким образом, в этом случае $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$ даже если пространство $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ не минимально, т.е. вложение $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subset \mathbf{\Lambda}_V$ строгое.

3). Равенство $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, вообще говоря, не влечет равенства норм $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$. Например, пусть $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$, снабженное нормой

$$\|f\|_{\mathbf{E}} = f^*(0) + f^*(\infty), \quad f \in \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty.$$

В этом случае

$$\|f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = f^*(0), \quad f \in \mathbf{L}^0_\infty,$$

так как полунорма $f \mapsto f^*(\infty)$ тождественно равна нулю на $\mathbf{L}^0_\infty$. Таким образом. мы имеем

$$V(x) = \varphi_{\mathbf{E}}(x) = 1_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$$

и

$$\mathbf{\Lambda}_V = \mathbf{L}_\infty = \mathbf{E},$$

в то время как
$$\mathbf{\Lambda}_V^0 = \mathbf{L}_\infty^0 \neq \mathbf{\Lambda}_V = \mathbf{L}_\infty.$$
Однако, полагая $f = 1_{[0,\infty)}$, мы получим
$$\|1_{[0,\infty)}\|_{\mathbf{E}} = 2 > \|1_{[0,\infty)}\|_{\mathbf{L}_\infty} = 1.$$

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{E}$ *максимальное симметричное пространство с фундаментальной функцией* $\varphi_{\mathbf{E}}$*. Тогда*

(1) $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) > 0 \iff \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_\infty$*;*
(2) $\varphi_{\mathbf{E}}(\infty) < \infty \iff \mathbf{E} \supseteq \mathbf{L}_\infty$*;*
(3) $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) > 0$ *и* $\varphi_{\mathbf{E}}(\infty) < \infty \iff \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$*.*

Доказательство. Пусть $V = \varphi_{\mathbf{E}}$. Так как $\mathbf{E}$ максимально, то мы имеем $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}$.

(1). Если $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_\infty$, то $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{L}_\infty$ и $V(0+) > 0$.

Обратно, из условия $V(0+) > 0$ следует, что $\mathbf{M}_{V_*} \subseteq \mathbf{L}_\infty$. В самом деле,
$$f \in \mathbf{M}_{V_*} \iff \|Vf^{**}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty \implies V(0+)f^{**}(0+) < \infty$$
$$\implies f^{**}(0+) = f^*(0) < \infty \iff f \in \mathbf{L}_\infty.$$
Откуда
$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{M}_{V_*} \subseteq \mathbf{L}_\infty.$$

(2). Пусть $V(\infty) < \infty$. Тогда
$$\|1_{[0,\infty)}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}} = \int\limits_0^\infty d\widetilde{V} = \widetilde{V}(\infty) = V(\infty) < \infty,$$
откуда следует, что $1_{[0,\infty)} \in \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$. Таким образом,
$$1_{[0,\infty)} \in \mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E} \ \text{ и } \ \mathbf{E} \supseteq \mathbf{L}_\infty.$$

Обратно,
$$\mathbf{E} \supseteq \mathbf{L}_\infty \Longrightarrow \mathbf{M}_{V_*} \supseteq \mathbf{L}_\infty \Longleftrightarrow \mathbf{M}_{V_*} \ni 1_{[0,\infty)}.$$
Это означает, что
$$\|1_{[0,\infty)}\|_{\mathbf{M}_{V_*}} = \|V \cdot 1_{[0,\infty)}^{**}\|_{\mathbf{L}_\infty} = \|V\|_{\mathbf{L}_\infty} = V(\infty) < \infty.$$

(3). Следует из (1) и (2).

$\square$

В заключении рассмотрим классические пространства $\mathbf{E} = \mathbf{L}_p,\ \ 1 \leq p \leq \infty$.

Пример 3. Пусть $1 < p < \infty$ и
$$V(x) = \varphi_{\mathbf{L}_p}(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x \geq 0.$$

Тогда $\widetilde{V} = V$ и

$$V_*(x) = \varphi_{\mathbf{L}_q}(x) = x^{\frac{1}{q}},$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Поэтому мы имеем вложения

$$\mathbf{\Lambda}_V \subseteq \mathbf{L}_p \subseteq \mathbf{M}_{V_*},$$

где

$$\mathbf{\Lambda}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_V} = \int\limits_0^\infty f^*(x)\, d(x^{\frac{1}{p}}) < \infty \right\}$$

и

$$\mathbf{M}_{V_*} = \left\{ f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} = \sup_{0<x<\infty} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x) < \infty \right\}.$$

Пространства $\mathbf{\Lambda}_V$ и $\mathbf{L}_p$ минимальны и сепарабельны, в отличие от пространства $\mathbf{M}_{V_*}$, которое не минимально.

Минимальная часть $\mathbf{M}^0_{V_*} = cl_{\mathbf{M}_{V_*}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{M}_{V_*}$ имеет вид

$$\mathbf{M}^0_{V_*} = \left\{ f \in \mathbf{M}_{V_*} \colon \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x) = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x) = 0 \right\}.$$

(смотри, [3, II.2.3]). Минимальное пространство $\mathbf{M}^0_{V_*}$ сепарабельно также как пространства $\mathbf{\Lambda}_V$ и $\mathbf{L}_p$.

Легко проверить, что все вложения

$$\mathbf{\Lambda}_V \subset \mathbf{L}_p \subset \mathbf{M}^0_{V_*} \subset \mathbf{M}_{V_*}$$

строгие.

В случае $p = 1$ мы имеем: $V(x) = x$, $V_*(x) = 1_{(0,\infty)}(x)$ и

$$(\mathbf{\Lambda}_V, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_V}) = (\mathbf{L}_1, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_1}) = (\mathbf{M}_{V_*}, \|\cdot\|_{\mathbf{M}_{V_*}}).$$

В случае $p = \infty$ мы имеем: $V(x) = 1_{(0,\infty)}(x)$, $V_*(x) = x$, и

$$(\mathbf{\Lambda}_V, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_V}) = (\mathbf{L}_\infty, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty}) = (\mathbf{M}_{V_*}, \|\cdot\|_{\mathbf{M}_{V_*}}).$$

Список литературы

1. BENNET, C., SHFRPLEY, R. (1988) *Intropolation of operators*. London. Academic Press.

2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

   KANTOROVICH, L., AKILOV, G. (1977) *Functional Analysis*. Moskow: Nauka. 744 p.

3. Крейн С. Г Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

KREIN, S. G., PETUNIN, Yu. I., SEMENOV, E. M. (1982) *Interpolation of liniar operators.* Trans. Math. Mon., 54, AMS, Perovidance. 400 p.

4. LINDENSTRAUSS, J, TZAFRIRI, L (1979) *Classical Banach Spaces II. Function Spaces.* Springer.
5. RUBSHTEIN, B. A., GRABARNIK, G. Ya., MURATOV, M. A., PASHKOVA, Yu. S. (2016) *Foundations of Simmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces.* Springer.
6. Рубштейн, Б. А. Введение в теорию симметричных пространств измеримых функций / Б. А. Рубштейн, Г. Я. Грабарник, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 204 с.
   RUBSHTEIN, B. A., GRABARNIK, G. Ya., MURATOV, M. A., PASHKOVA, Yu. S. (2014) *Introduction to the theory of symmetric spaces of measurable functions.* Simferopol: DIAIPI. 204 p..
7. MURATOV, M. A. & RUBSHTEIN, B. A. (2018) Main Embedding Theorems for Symmetric Spaces of Measurable Functions. *Topological algebras and their applications. Proceedings of the 8th international conference on topological algebras and their applications 2014.* (Berlin:De Gruyter). p. 350. (to appear)

УДК: 514.7

MSC2010: 51F15, 14L24

КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ УНИТАРНЫХ ГРУПП $W(J_3(m)), m = 4, 5$

© О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *oirud58@gmail.com*

Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$.

Rudnitskii O. I.

Abstract. Let G be a finite unitary reflection group acting on the n-dimensional unitary space U^n. Then G acts on the polynomial ring $R = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ in a natural manner and there exists n-tuple $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$ of positive integers, such that the algebra I^G of all G-invariant polynomials is generated by n algebraically independent homogeneous polynomials $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) \in I^G$ with $\deg f_i = m_i$ (a system of basic invariants of group G) [1].

A system $\{f_1, \ldots, f_n\}$ of basic invariants of group G is said to be canonical if it satisfies the following system of partial differential equations:

$$\bar{f}_i(\partial) f_j = 0,\ i, j = \overline{1, n}\ (i < j),$$

where a differential operator $\bar{f}_i(\partial)$ is obtained from polynomial f_i if each coefficient of polynomial to replace by the complex conjugate and each variable ${x_i}^p$ to replace by $\frac{\partial^p}{\partial {x_i}^p}$ [2, 3].

In this paper, canonical systems of basic invariants were constructed in explicit form for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$, generated by reflections in space U^3.

Keywords: *Unitary space, reflection, reflection groups, algebra of invariants, basic invariant, canonical system of basic invariants.*

Введение

Пусть G — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей с общей точкой O, действующая в n-мерном унитарном пространстве U^n. Тогда G естественным образом действует в кольце многочленов $R = \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ и алгебра I^G, всех G-инвариантных многочленов $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \in R$, порождается n алгебраически независимыми однородными многочленами $f_i \in R$ степеней m_i $(i = \overline{1,n})$ [1]; не нарушая общности, будем считать, что $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$. Система многочленов $\{f_i(\vec{x}),\ i = \overline{1,n}\}$ называется системой базисных инвариантов группы G.

В работе [2] введено понятие «канонической системы базисных инвариантов» для невещественных групп G пространства U^n, а также предложен метод построения канонических систем. Этот метод в [4] был реализован для построения канонической системы бесконечного семейства импримитивных групп $G(m,p,n)$.

В работе [3], автором реализован другой метод построения в явном виде канонических систем базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе трехмерного унитарного пространства U^3.

В настоящей статье этим же методом построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4,5$, порожденных отражениями в пространстве U^3. Таким образом, с учетом результатов статьи [3], построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов всех примитивных групп G пространства U^3.

1. Постановка задачи

Введем в пространстве U^n ортонормированную систему координат с началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$; вектор $\vec{x} = \sum\limits_i x_i \vec{e}_i$.

Система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ базисных инвариантов группы G называется *канонической системой*, если она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [2, 3]:

$$\bar{f}_i(\partial) f_j = 0,\ i,j = \overline{1,n}\ (i < j), \tag{1}$$

где дифференциальный оператор $\bar{f}_i(\partial)$ получается из многочлена f_i, если коэффициенты многочлена заменить на комплексно сопряженные, а переменные ${x_i}^p$ – на $\frac{\partial^p}{\partial {x_i}^p}$.

Цель настоящей работы – построить в явном виде канонические системы для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4,5$, порожденных отражениями в пространстве U^3, и, таким образом, завершить построение канонических систем базисных инвариантов для всех примитивных групп G пространства U^3.

2. Канонические системы для групп $W(J_3(m)), m = 4,5$

В пространстве U^3 существуют только следующие четыре невещественные примитивные группы G: $W(L_3)$, $W(M_3)$ и $W(J_3(m))$, $m = 4,5$ [5]. Для первых двух групп (группы симметрий многогранников Гессе) канонические системы базисных инвариантов построены в работе [3]. Рассмотрим каждую из групп $W(J_3(m))$.

1. Группа $W(J_3(4))$ порядка 336, порожденная отражения в пространстве U^3, и ее инварианты исследовались в большом числе работ (обзор смотри, например, в [6]). Она порождается отражениями второго порядка относительно плоскостей с уравнениями

$$x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,$$

где $\alpha = \frac{1-\sqrt{-7}}{2}$, (корень уравнения $z^2 - z + 2 = 0$) [5].

Все 21 плоскостей отражения определяются уравнениями

$$x_i = 0,\ x_i \pm x_j = 0,\ i,j = \overline{1,3}\ (i<j),\ x_i \pm x_j \pm \alpha x_k = 0,$$

$((i,j,k) = (1,2,3)-$циклически).

Множество их нормальных векторов (система корней группы) состоит из 42 векторов

$$\pm\vec{e}_i,\ \pm\frac{\alpha}{2}(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j),\ \pm\frac{1}{2}(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \bar{\alpha}\vec{e}_k)$$

и инвариантно относительно группы $W(J_3(4))$ [7]. Степени $m_i = 4, 6, 14$ [1].

Используя многочлены Погорелова, в [7] построена следующая система базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$:

$$J_4 = \sum {x_i}^4 - 3\bar{\alpha}\sum_{i<j} {x_i}^2{x_j}^2, \tag{2}$$

$$J_6 = 2\sum {x_i}^6 + 5\bar{\alpha}\sum {x_i}^4{x_j}^2 + 20\alpha^2{x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} J_{14} = 382\sum {x_i}^{14} - 793\bar{\alpha}\sum {x_i}^{12}{x_j}^2 + 143(16-21\bar{\alpha})\sum {x_i}^{10}{x_j}^4 - \\ -143(16+95\bar{\alpha})\sum {x_i}^8{x_j}^6 + 572(21+9\bar{\alpha})\sum_{j<k} {x_i}^{10}{x_j}^2{x_k}^2 - \\ -4290(19-5\bar{\alpha})\sum {x_i}^8{x_j}^4{x_k}^2 + 8008(13-11\bar{\alpha})\sum_{i<j} {x_i}^6{x_j}^6{x_k}^2 + \\ +20020(5+\bar{\alpha})\sum_{j<k} {x_i}^6{x_j}^4{x_k}^4. \end{gathered}$$

(здесь и далее в записи многочленов, индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы).

Воспользуемся этой системой базисных инвариантов для построения канонической системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ базисных инвариантов группы $W(J_3(4))$.

Введем обозначение $f_1 = J_4$. Так как соотношение $\bar{f}_1(\partial)J_6 = 0$ выполняется тождественно, то $f_2 = J_6$.

Семейство всех инвариантов четырнадцатой степени группы $W(J_3(4))$ можно записать в виде:

$$I_{14} = a_1 J_{14} + a_2 {J_4}^2 J_6,$$

где $a_1,\ a_2$ – неопределенные коэффициенты.

Коэффициенты $a_1,\ a_2$, найдем из условия (1), которое запишем в виде

$$\bar{f}_1(\partial) I_{14} = 0, \bar{f}_2(\partial) I_{14} = 0. \tag{4}$$

Соотношения (4) приводят к линейной однородной системе 9 уравнений относительно двух неизвестных $a_1,\ a_2$. Ее общее решение имеет вид: $a_1 = -9c$ и $a_2 = 1430c$. Тогда f_3 (многочлен I_{14} для найденных значений $a_1,\ a_2$), с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$\begin{gathered} f_3 = 34 \sum x_i^{14} + 169\bar{\alpha} \sum x_i^{12} x_j^2 - 143(5-\alpha^7) \sum x_i^{10} x_j^4 + 143(1+ \\ +\alpha^6) \sum x_i^8 x_j^6 + 572(6+13\alpha^2) \sum_{j<k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 - 4290\alpha \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 - \\ -8008(1-2\alpha) \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 - 20020\alpha \sum_{j<k} x_i^6 x_j^4 x_k^4. \end{gathered} \tag{5}$$

Следовательно, каноническая система базисных инвариантов для группы $W(J_3(4))$ состоит из форм (2), (3) и (5).

2. Группа $W(J_3(5))$ имеет порядок 2160; степени $m_i = 6, 12, 30$ [1]. Она порождается отражениями второго порядка относительно 45 плоскостей с уравнениями

$$\begin{gathered} x_i = 0, x_i \pm x_j = 0 \ (i<j), i, j = \overline{1,3}, \\ x_i \pm (\omega - \gamma) x_j \pm x_k = 0, \omega x_l \pm \gamma \omega^2 x_m \pm r x_t = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $r = \gamma^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ есть первообразный корень третьей степени из единицы, индексы $(i,j,k) = (1,2,3)-$циклически; $l, m, t = \overline{1,3}$.

Система корней группы ($W(J_3(5))$-инвариантная совокупность нормальных векторов плоскостей (6)) состоит из 270 векторов

$$\pm\omega^p \vec{e}_i,\ \pm\frac{\omega^p}{2}(\gamma - \omega)(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j),\ \pm\frac{\omega^p}{2}(\vec{e}_i \pm (\omega^2 - \gamma)\vec{e}_j \pm \vec{e}_k),\ \pm\frac{\omega^p}{2}(\vec{e}_l \pm \gamma\omega^2 \vec{e}_m \pm r\omega \vec{e}_t).$$

Отметим, что здесь, для задания группы $W(J_3(5))$, используется более удобная, чем в [7], система координат. Для перехода к системе координат, используемой в [7], необходимо осуществить следующую замену переменных: $x_1 = \omega^2 y_1$, $x_2 = \omega y_2$, $x_3 = y_3$.

Используя многочлены Погорелова (см. [7]), построим следующую систему базисных инвариантов группы $W(J_3(5))$:

$$J_6 = 4 \sum {x_i}^6 - 3(5 + \sqrt{-15}) \sum {x_i}^4 {x_j}^2 + 12(5 - \sqrt{-15}) {x_1}^2 {x_2}^2 {x_3}^2, \tag{7}$$

$$J_{12} = 148 \sum {x_i}^{12} - 66(5+\sqrt{-15}) \sum {x_i}^{10}{x_j}^2 - 165(7-5\sqrt{-15}) \sum {x_i}^8{x_j}^4 +$$
$$+308(7+3\sqrt{-15}) \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 660(19+\sqrt{-15}) \sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 -$$
$$-18480 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 - 4620(3+\sqrt{-15}) x_1^4 x_2^4 x_3^4,$$
$$J_{30} = 24195204 \sum x_i^{30} - 3603975(5+\sqrt{-15}) \sum x_i^{28} x_j^2 - 9135(39147-$$
$$-15281\sqrt{-15}) \sum x_i^{26} x_j^4 + 13195(461197+13953\sqrt{-15}) x_i^{24} x_j^6 -$$
$$-130065(44261+23105\sqrt{-15}) \sum x_i^{22} x_j^8 + 10015005(821+$$
$$+1745\sqrt{-15}) \sum x_i^{20} x_j^{10} + 5766215(21871+4587\sqrt{-15}) \sum x_i^{18} x_j^{12} +$$
$$+3231615(32539+12479\sqrt{-15}) \sum x_i^{16} x_j^{14} + 109620(27493+$$
$$+279\sqrt{-15}) \sum_{j<k} x_i^{26} x_j^2 x_k^2 - 791700(31441+5358\sqrt{-15}) \sum x_i^{24} x_j^4 x_k^2 -$$
$$-101970960(1343-342\sqrt{-15}) \sum x_i^{22} x_j^6 x_k^2 + 60090030(13927-$$
$$-299\sqrt{-15}) \sum x_i^{20} x_j^8 x_k^2 - 1522280760(243+130\sqrt{-15}) \sum x_i^{18} x_j^{10} x_k^2 -$$
$$-1176307860(601-202\sqrt{-15}) x_i^{16} x_j^{12} x_k^2 + 775587600(791-$$
$$-7\sqrt{-15}) \sum_{i<j} x_i^{14} x_j^{14} x_k^2 + 18209100(21651-991\sqrt{-15}) \sum_{j<k} x_i^{22} x_j^4 x_k^4 -$$
$$-1682520840(233+152\sqrt{-15}) \sum x_i^{20} x_j^6 x_k^4 - 3805701900(91-$$
$$-248\sqrt{-15}) \sum x_i^{18} x_j^8 x_k^4 + 6469693230(547+113\sqrt{-15}) \sum x_i^{16} x_j^{10} x_k^4 -$$
$$-23526157200(219+40\sqrt{-15}) \sum x_i^{14} x_j^{12} x_k^4 + 3551988440(2051+$$
$$+177\sqrt{-15}) \sum_{j<k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 - 116454478140(65-16\sqrt{-15}) \sum x_i^{16} x_j^8 x_k^6 -$$
$$-13560477010080 \sum x_i^{14} x_j^{10} x_k^6 + 214088030520(17-21\sqrt{-15}) \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 -$$
$$-83181770100(141-\sqrt{-15}) \sum_{j<k} x_i^{14} x_j^8 x_k^8 + 336424047960(29-$$
$$-16\sqrt{-15}) \sum x_i^{12} x_j^{10} x_k^8 + 3700664527560(13-\sqrt{-15}) x_1^{10} x_2^{10} x_3^{10}$$

(см. результаты работы [7], с учетом перехода к новой системе координат).

Как и в **п.1**, введем обозначение $f_1 = J_6$. Совокупность всех инвариантов группы $W(J_3(5))$ двенадцатой степени можно записать в виде

$$I_{12} = a_1 J_{12} + a_2 {J_6}^2.$$

Тогда условие (1) имеет вид $\bar{f}_1(\partial)I_{12} = 0$ и приводит к линейной однородной системе 3 уравнений относительно коэффициентов a_1, a_2. Ее общее решение: $a_1 = -47c, a_2 = 308c$.

Следовательно, с точностью до постоянного множителя,

$$f_2 = 52\sum {x_i}^{12} + 110(5+\sqrt{-15})\sum {x_i}^{10}{x_j}^2 - 11(105-43\sqrt{-15})\sum x_i^8{x_j}^4 +$$
$$+308(3-\sqrt{-15})\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 132(75+\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^8x_j^2x_k^2 - \tag{8}$$
$$-1232\sqrt{-15}\sum x_i^6x_j^4x_k^2 - 1540(21-\sqrt{-15})x_1^4x_2^4x_3^4.$$

Множество всех инвариантов группы $W(J_3(5))$ тридцатой степени запишем в виде

$$I_{30} = a_1{J_6}^5 + a_2{J_6}^3J_{12} + a_3J_6{J_{12}}^2 + a_4J_{30}.$$

При этом, I_{30} принадлежит искомой канонической системе базисных инвариантов, если удовлетворяет следующей системе $\bar{f}_1(\partial)I_{30} = 0, \bar{f}_2(\partial)I_{30} = 0$.

Это приводит к системе из 31 линейного однородного уравнения относительно четырех неизвестных a_1, a_2, a_3, a_4, общее решение которой можно записать в виде

$$a_1 = 343253007718159c,\ a_2 = 618823210059208c,$$

$$a_3 = -132560631461468c,\ a_4 = 233373442224c.$$

Поэтому, с точностью до постоянного множителя,

$$f_3 = 39635380\sum x_i^{30} + 179231397(5+\sqrt{-15})\sum x_i^{28}x_j^2 + 609(26506335+$$

$$+1773619\sqrt{-15})\sum x_i^{26}x_j^4 + 197925(218451+39055\sqrt{-15})\sum x_i^{24}x_j^6 +$$

$$+390195(116725+83729\sqrt{-15})\sum x_i^{22}x_j^8 + 14021007(14275-$$

$$-5049\sqrt{-15})\sum x_i^{20}x_j^{10} - 86493225(1487-1221\sqrt{-15})\sum x_i^{18}x_j^{12} +$$

$$+3231615(66495+17683\sqrt{-15})\sum x_i^{16}x_j^{14} - 7308(11040225-$$

$$-1326133\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^{26}x_j^2x_k^2 - 791700(314640+23873\sqrt{-15})\sum x_i^{24}x_j^4x_k^2 -$$

$$-43701840(44365-2752\sqrt{-15})\sum x_i^{22}x_j^6x_k^2 - 420630210(3975-$$

$$-403\sqrt{-15})\sum x_i^{20}x_j^8x_k^2 - 7611403800(1166+365\sqrt{-15})\sum x_i^{18}x_j^{10}x_k^2 +$$

$$+1176307860(6480+2719\sqrt{-15})\sum x_i^{16}x_j^{12}x_k^2+1551175200(12600- \qquad (9)$$

$$-3593\sqrt{-15})\sum_{i<j} x_i^{14}x_j^{14}x_k^2+54627300(45005-13601\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^{22}x_j^4x_k^4+$$

$$+2804201400(1140+439\sqrt{-15})\sum x_i^{20}x_j^6x_k^4+3805701900(1470-$$

$$-67\sqrt{-15})\sum x_i^{18}x_j^8x_k^4-19409079690(2455-283\sqrt{-15})\sum x_i^{16}x_j^{10}x_k^4+$$

$$+23526157200(435-934\sqrt{-15})\sum x_i^{14}x_j^{12}x_k^4+586078092600(57+$$

$$+7\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^{18}x_j^6x_k^6+194090796900(150-23\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^{16}x_j^8x_k^6-$$

$$-51757545840(1605-433\sqrt{-15})\sum x_i^{14}x_j^{10}x_k^6-1070440152600(141+$$

$$+19\sqrt{-15})\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12}x_k^6+1247726551500(25+3\sqrt{-15})\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^8x_k^8+$$

$$+336424047960(120+71\sqrt{-15})\sum x_i^{12}x_j^{10}x_k^8+$$

$$+8141461960632(25-\sqrt{-15})x_1^{10}x_2^{10}x_3^{10}.$$

Таким образом, каноническая система базисных инвариантов для группы $W(J_3(5))$ состоит из форм (7), (8) и (9).

Заключение

В статье построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для групп $W(J_3(m)), m=4,5$. Таким образом, с учетом результатов работы [3], построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для всех примитивных групп, порожденных отражениями в трехмерном унитарном пространстве.

Список литературы

1. SHEPHARD, G. C. & TODD J. A. (1954) Finite unitary reflection groups. *Can. J. Math.* 6 (2). p. 274–304.

2. NAKASHIMA, N., TERAO, H. & TSUJIE, S. (2016) Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. *Canad. Math. Bull.* 59 (3). p. 617–623.

3. Рудницкий, О. И. Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе // *Таврический вестник информатики и математики.* — 2017. — № 3 (36). — С. 73–78.

   RUDNITSKII, O. I. (2017) Canonical system of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons. *TVIM.* No 3 (36). — p. 73–78.

4. TSUJIE, S. (2014) *Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups.* The thesis (doctoral). Hokkaido.

5. COHEN, A. M. (1976) Finite complex reflection groups. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4. p. 379–436.

6. Рудницкий, О. И. О базисных инвариантах унитарной группы $W(J_3(4))$ // *Таврический вестник информатики и математики.* — 2017. — № 2 (35). — С. 97–103.

   RUDNITSKII, O. I. (2017) On basic invariants of unitary group $W(J_3(4))$. *TVIM.* 2 (35). p. 97–103.

7. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1990. – 115 с.

   RUDNITSKII, O. I. (1990) *Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space.* The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Minsk.

Жуковский В. И., Макаркина Т. В., Бельских Ю. А. Существование равновесия по Бержу / В. И. Жуковский, Т. В. Макаркина, Ю. А. Бельских // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 7 – 16.

УДК: 519.833

В статье рассматривается способ построения равновесной по Бержу ситуации, сводящейся к нахождению минимаксной стратегии в специальной гермейеровской свертке, эффективно строящейся по исходной математической модели бескоалиционной игры.Кроме того, доказано существование равновесной по Бержу ситуации в смешанных стратегиях, если множества стратегий суть компакты, а функции выигрыша непрерывны на ситуациях.

Ключевые слова: *бескоалиционная игра, функция выигрыша, выигрыш, равновесие по Нэшу и Бержу, гермейеровская свертка, смешанные стратегии.*

Жуковский В. И., Смирнова Л. В. О коалиционном равновесии / В. И. Жуковский, Л. В. Смирнова // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 17 – 30.

УДК: 519.834

В настоящей статье вводится концепция коалиционной рациональности. На синтезе понятий индивидуальной, а также коллективной рациональности (из теории кооперативных игр без побочных платежей) и предложенного в настоящей статье определения коалиционной рациональности формализуется коалиционная равновесная ситуация в конфликте N лиц при неопределенности. Устанавливаются достаточные условия существования коалиционно равновесной ситуации, сводящиеся к построению седловой точки гермейеровской свертки гарантий функций выигрыша. Наконец, следуя подходу Эмиля Бореля, Джона фон Неймана и Джона Нэша, доказывается существование коалиционной равновесной ситуации в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр ограничениях (компактность множеств неопределенностей и стратегий игроков и непрерывность функций выигрыша). В заключении статьи предлагаются возможные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: *игра в нормальной форме без побочных платежей, неопределенность, гарантия, смешанные стратегии, гермейеровская свертка, седловая точка, равновесие.*

Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом / Н. Д. Копачевский, Д. О. Цветков // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 31 – 39.

УДК: 517.98

В работе изучаются вопросы, связанные с сильной разрешимостью задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка с определенными свойствами для операторных коэффициентов. К задачам такого вида приводит, в частности, проблема малых движений идеальной стратифицированной жидкости в произвольной ограниченной области, частично покрытой льдом.

Ключевые слова: *стратифицированной жидкость, крошеный лед, упругий лед, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.*

Кудряшов Ю. Л. Изоморфизм спектрального и трансляционного представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора / Ю. Л. Кудряшов // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 40 – 47.

УДК: 517.984.48

В статье рассматриваются два представления самосопряженной дилатации диссипативного плотно заданного оператора с непустым множеством регулярных точек. С помощью системы функций Чебышева-Лаггера устанавливается изоморфизм этих представлений дилатации при условии сепарабельности дефектных подпространств данного оператора.

Ключевые слова: *диссипативный оператор, самосопряженная дилатация, изоморфизм дилатаций.*

Машков Е. Ю., Тютюнов Д. Н. О разрешимости сингулярного стохастического уравнения леонтьевского типа с импульсными воздействиями / Е. Ю. Машков, Д. Н. Тютюнов // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 48 – 66.

УДК: 517.9

Под сингулярным стохастическим уравнением леонтьевского типа понимается специальный класс стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, у которых в левой и правой частях имеются прямоугольные числовые матрицы, образующие сингулярный пучок. Кроме этого, в правой части имеется детерминированное слагаемое, которое зависит только от времени, а также импульсные воздействия. Предполагается, что коэффициент диффузии данной системы задается матрицей, зависящей только от времени. Для изучения рассматриваемых уравнений требуется рассмотрение производных достаточно высоких порядков от свободных членов, включая винеровский процесс. В связи с этим для дифференцирования винеровского процесса мы применяем аппарат производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, что позволяет при исследовании уравнения не применять аппарат теории обобщенных функций. В результате получаются аналитические формулы для решений уравнения в терминах производных в среднем случайных процессов.

Ключевые слова: *производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа.*

Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Теоремы вложения для симметричных пространств измеримых функций на полуоси / М. А. Муратов, Б. А. Рубштейн // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 67 – 88.

УДК: 519.55/56

Пусть m обычная мера Лебега на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Для симметричных (перестановочно инвариантных) пространств $\mathbf{E}$ на стандартном пространстве с мерой $(\mathbb{R}_+, m)$, мы будем рассматривать следующие вложения:

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} \subseteq \mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11} \subseteq \mathbf{M}_{V_*} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \ ,$$

где $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ — замыкание $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1$ второе ассоциированное пространство к $\mathbf{E}$, $V(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{E}}$ фундаментальная функция симметричного пространства $\mathbf{E}$, $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)} 1_{(0,\infty)}(x)$, $\widetilde{V}$ наименьшая вогнутая мажоранта V, $\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}$ и $\mathbf{M}_{V_*}$ пространства Лоренца и Марцинкевича относительно весовых функций $\widetilde{V}$ и V_* соответственно, $\mathbf{\Lambda}^0_{\widetilde{V}} = cl_{\mathbf{\Lambda}_{\widetilde{V}}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$. В работе подробно изучаются вложения и неравенства для соответствующих норм.

Ключевые слова: *симметричные пространства, пространства Лоренца и Марцинкевича, теоремы вложения.*

Рудницкий О. И. Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m)),\ m = 4, 5$ / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — № 1 (38). — С. 89 – 96.

УДК: 514.7

В работе завершено построение в явном виде канонических систем базисных инвариантов для примитивных групп, порожденных отражениями в трехмерном унитарном пространстве. Построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для групп $W(J_3(m)),\ m = 4, 5$.

Ключевые слова: *унитарное пространство, отражение, группа отражений, алгебра инвариантов, базисный инвариант, каноническая система.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Бельских Юлия Анатольевна — к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: fizmat@ggtu.ru

Жуковский Владислав Иосифович — д. ф.-м. н., профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Копачевский Николай Дмитриевич — д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: kopachevsky@list.ru

Кудряшов Юрий Леонтьевич — к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: kudryashov_2889@mail.ru

Макаркина Татьяна Владимировна — к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: tatmak147@yandex.ru

Машков Евгений Юрьевич — к. ф.-м. н., преподаватель кафедры высшей математики Юго-Западного государственного университета, г. Курск, Российская Федерация
e-mail: mashkovevgen@yandex.ru

Муратов Мустафа Абдурешитович — д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа, декан факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: o.andronova@list.ru

Рубштейн Бенцион Абрамович — д. ф.-м. н., профессор математики факультета естественных наук Университета Бен Гуриона в Негеве, Беер-Шева, Израиль
e-mail: benzion@cs.bgu.ac.il

Рудницкий Олег Иванович — к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: oirud58@gmail.com

Смирнова Лидия Викторовна — к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Тютюнов Дмитрий Николаевич — к. т. н., доцент кафедры высшей математики Юго-Западного государственного университета, г. Курск, Российская Федерация
e-mail: tjutjunov@mail.ru

Цветков Денис Олегович — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: tsvetdo@gmail.com

Подписано к печати 07.06.2018. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11 п. л. Тираж 50 экз.
Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 29.06.2018.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7