ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№ 4 (37) ' 2017

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2017, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

- Функциональный анализ и его приложения
- Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы
- Спектральные и эволюционные задачи
- Математические проблемы гидродинамики
- Дискретная оптимизация
- Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений
- Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
- Дедуктивные системы и базы знаний
- Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
- Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
- Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 11 от 21 декабря 2017 г.

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	**Editor-in-Chief**, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Nikolay KOPACHEVSKY	**Vice Chief Editor**, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoliy GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Igor ORLOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Valeriy CHEHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

EDITORIAL BOARD

Ayder ANAFIYEV	**Managing Editor** of the "Computer Science Theory" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	**Managing Editor** of the "Mathematics" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Vladimir BLYSCHIK	**The Editor of the Cite** Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Margarita KOZLOVA	**Scientific Secretary of the Journal** Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 51 (09)
MSC2010: 01A60

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ТАВРИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

© Л. И. Руденко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
проспект Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *domlir@yandex.ru*

Historical essay of the development of physics-mathematical faculty of the Tavrida University.

Rudenko L. I.

Abstract. Taurida University was officially opened in the Crimea on October 14, 1918. It was established in the crucial period and fully experienced all the difficulties and trials on the way of its development. On the eve of the centennial of the University awareness comes of a historic role it had played in the establishment of scientific and cultural traditions and of the entire system of education in Crimea.

Among the first in the Taurida University was established physics-mathematical faculty. Its origins were well-known scientists-mathematicians which initiated the beginning of mathematics education and brought the spirit of scientific creativity. Times had been changing and the University had been changing. The faculty underwent these changes as well, and now the faculty grew out of a long-standing physics-mathematical in today's faculty of mathematics and informatics.

This article is an essay which is devoted to pedagogical work the mathematicians, tutors and graduates of the faculty in a rich and complex history of Taurida University from its foundation to the present day which contributed a memorable contribution to the scientific and historical heritage of the Taurida University and of the Crimea.

Keywords: *Taurida University, physics-mathematical faculty, tutors and graduates.*

1. 1918–1930 годы: Таврический университет, Крымский университет, Крымский педагогический институт

К созданию высшего учебного заведения в Таврической губернии были причастны многие видные общественные деятели и ученые. Среди них была группа профессоров Киевского университета Св. Владимира во главе с профессором математики Д. А. Граве, включавшая Р. И. Гельвига, первого ректора университета, П. А. Ардашева, М. В. Довнар-Запольского и многих других. Начатая в 1916 году подготовительная работа каким-то чудом продолжалась в последующие два переломных года, когда свершались революции и шли войны, и в 1918 году завершилась созданием Таврического университета — учебного заведения, необходимость которого признавалась всеми сменяющимися правлениями.

Находящиеся в те годы в Крыму профессора-математики Н. М. Крылов и М. А. Тихомандрицкий с полной отдачей включились в организационную работу, имея целью создание физико-математического факультета с естественным отделением. В течение короткого времени на работу в открывшийся университет поступили и другие известные ученые, приехавшие в Крым в силу разных причин. Одной из них было и то, что в научных кругах России вскоре заговорили о создании в Крыму университета как нового научного центра, способного в эти невероятно трудные годы дать пусть и не лучшие, но все же возможности для работы. И хотя в большинстве своем они недолго пробыли в Крыму, но оставили ощутимый вклад в науку и память о себе в крымский период деятельности.

Матвей Александрович Тихомандрицкий (1844–1921), доктор чистой математики, ординарный профессор Таврического университета, был глубоко образованным человеком, получившим в 1865 году диплом Петербургского университета и защитившим в 1876 году диссертацию «О гипергеометрических рядах». В своей заграничной командировке в 1884–1885 годах он имел возможность личного общения с Карлом Вейерштрассом, Феликсом Клейном и Леопольдом Кронекером, а в дальнейшем вел переписку с европейскими математиками Эмми Нетер, Шарлем Эрмитом и Эмилем Пикаром. Наиболее известные работы Тихомандрицкого связаны с теорией эллиптических и абелевых интегралов и функций. Одна из его работ была напечатана в Annales de l'Ecole Normale Super в 1892 году. Основная работа Матвея Александровича Elements de la theorie des integrales Abeliennes была издана только в 1909 году, но в русском переводе статья «Основания теории абелевых интегралов» была опубликована значительно раньше, в 1895 году в издании Харьковского математического общества. За работу «Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций», также изданную в 1895 году, Матвею Александровичу была присуждена премия Российской академии наук имени В. Я. Буняковского.

Ради укрепления здоровья жены М. А. Тихомандрицкий в 1915 году переезжает в Ялту. После смерти жены, в память о ней, Матвей Александрович остается в Крыму и всеми силами включается в работу по созданию Таврического университета. Уже в мае 1918 года, еще до официального открытия университета, он читает лекции для слушателей первого набора студентов физико-математического факультета, а в дальнейшем — курсы лекций по аналитической геометрии и высшей алгебре, интегрированию дифференциальных уравнений и факультативные курсы по теории эллиптических интегралов и теории поверхностей. Крымский период в научной деятельности профессора Тихомандрицкого отмечен продолжением исследований в области специальных функций. Он входит в число членов-учредителей Математического общества и по мере сил участвует в его собраниях. Профессор Тихомандрицкий передает в созданный при его участии математический кабинет пятьсот томов из личной библиотеки.

Преклонный возраст профессора, тяжелые условия работы в холодных помещениях, отсутствие лекарств и голод привели к тому, что, заболев воспалением легких, он уже не смог поправиться. После смерти Матвея Александровича в феврале 1921 года в «Записках Математического кабинета» был опубликован список его трудов, насчитывающий 52 наименования. Список, в частности, включал: «Краткий курс высшей алгебры», «Курс теории конечных разностей», «Курс теории вероятностей», «Курс дифференциального и интегрального исчислений», «Дифференциальную геометрию пространства n измерений», «Основания теории абелевых интегралов», «Теорию эллиптических интегралов и эллиптических функций», а также биографические статьи о выдающихся математиках.

Николай Митрофанович Крылов (1879–1855), выдающийся математик, академик Академии наук СССР, в октябре 1917 года в связи с проблемами со здоровьем переезжает в Крым. Включившись в работу по организации Таврического университета, он всем сердцем отдается решению многочисленных проблем, что, возможно, и помогло ему преодолеть болезнь. И хотя организационная и преподавательская работа на созданном физико-математическом факультете отнимали много времени и сил, это не было помехой его научной деятельности. Основные труды Крылова в этот период посвящены приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений математической физики и оценке погрешностей.

За время работы в Таврическом университете с 1917 по 1922 в должности заведующего кафедрой математики Николай Митрофанович пытался внедрить новую систему преподавания математики, где наряду с традиционными лекциями были обязательны практические и факультативные занятия. Для этих целей был необходим кабинет математики с библиотекой, наглядными пособиями и такой организацией работы, которая способствовала бы усвоению материала и самостоятельным исследованиям студентов. Благодаря настойчивым усилиям Крылова в феврале 1919 года такой кабинет был создан. При кабинете издавались (первоначально в рукописном варианте) «Известия Математического кабинета Таврического университета» с протоколами семинаров и текстами докладов. В дальнейшем печатное издание

«Записки Математического кабинета Таврического университета» под редакцией Н. М. Крылова становится приложением к «Известиям Таврического университета».

В 1918 году Крылов завершает работу на соискание степени доктора чистой математики «О различных обобщениях метода Ритца и некоторых соприкасающихся вопросах» и представляет ее к защите в Совет Киевского университета. Эта работа была опубликована в «Записках Математического кабинета» в выпусках 1920 и 1921 годов, равно как и его фундаментальный доклад «О роли минимального принципа в современной математике», напечатанный в 1920 году.

В апреле 1919 года профессор Н. М. Крылов и приват-доцент М. Л. Франк вышли с предложениями о расширении математического кабинета, и уже в июне 1919 года Совет Таврического университета принял постановление об учреждении Математического общества. Председателем общества был избран Н. М. Крылов, товарищем председателя — Л. А. Вишневский, секретарем — Н. С. Кошляков. Почетными членами общества были избраны: ординарный академик Академии наук А. Н. Крылов, заслуженный ординарный профессор Киевского университета Д. А. Граве, ординарный академик Академии наук В. А. Стеклов. Членами-учредителями были профессора и преподаватели Таврического университета М. А. Тихомандрицкий, Л. И. Кордыш, М. Л. Франк А. И. Лампси, Я. И. Френкель.

Математическое общество объединило не только видных ученых-математиков Таврического университета, но и всех интересующихся математикой. И несмотря на крайне сложные условия того времени об интенсивной научной работе свидетельствуют многочисленные доклады (свыше восьмидесяти за 1919–1922 годы) и выпущенные три тома «Записок Математического кабинета». Только Николай Митрофанович Крылов сделал свыше тридцати докладов, среди которых были доклады «О некоторых формулах для приближенного представления функций, основанных на обобщениях т. н. механических квадратур», «О существовании корня алгебраического уравнения», «О сходимости некоторых формул механических квадратур для многократных интегралов» и другие.

После реорганизации университета в 1921 году изменились условия работы, как изменилась и интенсивность научных исследований. В 1922 году Н. М. Крылов был избран академиком Академии наук Украины и переехал в Киев. Математическое общество продолжало свое существование и научную работу, но к 1925 году университет покинули многие другие ученые-математики, и в 1926 году общество было закрыто. Работу продолжил математический кружок, и на его заседаниях вплоть до 1929 года заслушивались научные и методические доклады, а также выступления студентов.

Николай Митрофанович Крылов возглавил кафедру математической физики отделения естествознания АН Украины и занялся исследованиями по нелинейной механике в сотрудничестве с Николаем Боголюбовым. Их совместные работы по проблемам теории нелинейных колебательных процессов приобрели широкую известность. В 1925 году Н. М. Крылов был избран членом-корреспондентом, а в 1929-м действительным членом Академии наук СССР. За выдающиеся заслуги в области развития советской науки Николаю Митрофановичу в 1939 году было присвоено звание заслуженного деятеля науки и техники УССР, он дважды награжден орденом Трудового Красного Знамени и орденом Ленина. Научное наследие Николая Митрофановича опубликовано в многочисленных книгах и статьях, немалая часть которых относится к периоду его работы в Таврическом университете. Это был звездный час для математической науки в Крыму, сформировавшейся за короткое время в признанную математическую школу благодаря Н. М. Крылову и его коллегам.

Владимир Иванович Смирнов (1887–1974), выдающийся математик, академик Академии наук СССР работал в Таврическом университете с апреля 1920 по сентябрь 1921 года. Известен такой факт из биографии В. И. Смирнова: когда в конце 1920 года в Крыму окончательно пришли к власти большевики, Владимир Иванович чудом избежал приговора «суда» и расстрела. Несмотря на кратковременное пребывание в Крыму и нечастое упоминание об этом периоде в биографических публикациях, В. И. Смирнов вел активную научную деятельность совместно с Н. М. Крыловым. Только в третьем томе «Записок Математического кабинета» он напечатал три статьи: «О группе линейных дифференциальных уравнений с четырьмя особыми точками», «О конформном преобразовании односвязной области в себя», отзыв о диссертации доцента Н. С. Кошлякова «О некоторых приложениях теории интегральных вычетов». В октябре 1920 года на 7-м съезде Таврической научной ассоциации В. И. Смирнов и Н. М. Крылов сделали совместный развернутый доклад «Памяти двух великих русских ученых второй половины XIX столетия — П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова», также опубликованный в третьем томе «Записок Математического кабинета». По роду преподавательской деятельности в этот период Владимир Иванович обращается к методическим вопросам, касающимся содержания учебников и преподавания математики для физиков. Возможно, что мотивацией тому могли послужить и лекции на курсе, который посещали будущие выдающиеся физики И. Курчатов, Г. Франк, И. Франк, Л. Лойцянский.

В 1921 году Владимир Иванович возвратился в Петроград, где позднее, в 1925 году, организовал в Ленинградском университете кафедру теории функций комплексного переменного. С 1929 по 1935 год В. И. Смирнов заведовал теоретическим отделом Сейсмологического института Академии наук СССР. В совместных работах с С. Л. Соболевым он опубликовал новые результаты по теории распространения волн. В 1932 году В. И. Смирнов был избран членом-корреспондентом АН СССР, с 1937 по 1955 год возглавлял Научно-исследовательский институт математики и механики при Ленинградском университете. В годы войны Владимир Иванович занимался аэро- и гидромеханикой в эвакуации, в Елабуге. В 1943 году за выдающиеся заслуги в науке В. И. Смирнов был избран в действительные члены АН СССР.

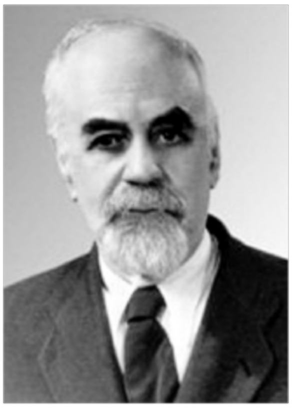
Владимир Иванович Смирнов — автор большого числа книг, статей, обзоров, отзывов, но широчайшую известность во всем мире ему принес «Курс высшей математики» в пяти томах. Задуманный еще в 20-е годы как учебник математики для физиков, он издавался по частям с 1924 по 1947 год, а дополнением и переработкой автор занимался до конца жизни. В 1948 году за это издание В. И. Смирнов был удостоен Сталинской (Государственной) премии. Пятитомник издан на многих языках и составляет часть мирового научного наследия. Помимо этого Владимир Иванович занимался изданием трудов выдающихся математиков А. М. Ляпунова, Л. Эйлера, А. Н. Крылова, М. В. Остроградского, возглавлял Комиссию по истории физико-математических наук. Научные труды, научно-общественная и педагогическая деятельность В. И. Смирнова получили широкое признание: он был членом нескольких иностранных академий, ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда в 1967 году, он был награжден четырьмя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени. Имя академика В. И. Смирнова присвоено НИИ математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета.

Вместе с этими ярчайшими представителями математической науки начали свою деятельность в Таврическом университете профессора М. Л. Франк и Л. А. Вишневский, Н. С. Кошляков и Н. М. Герсеванов, А. С. Кованько и Н. В. Оглоблин, нашедшие применение своим математическим знаниям и таланту в те переменчивые трудные времена.

Михаил Людвигович Франк (1878–1942), математик, профессор Таврического университета, профессор Ленинградского университета, летом 1917 года с семьей приехал в Крым для лечения жены и старшего сына, полагая осенью возвратиться в Петербург. Но семья осталась в Крыму, и в 1918 году профессор Франк с большими трудностями переезжает в Крым. В январе 1919 года по приглашению Н. М. Крылова Михаил Людвигович поступает на работу в Таврический университет в качестве ассистента, а позднее — приват-доцента кафедры математики и сразу же погружается в атмосферу творчества, царившую тогда на физико-математическом факультете.

Николай Митрофанович Крылов
(1879–1955),
профессор Таврического университета
в 1918–1922 годах,
выдающийся математик,
академик АН СССР,
заслуженный деятель
науки и техники УССР

Матвей Александрович
Тихомандрицкий
(1844–1921).
доктор чистой математики,
в 1918–1921 годах
заслуженный ординарный профессор
Таврического университета



Владимир Иванович Смирнов
(1887 – 1974).
профессор Таврического университета,
в 1920 – 1921 годах,
академик АН СССР,
лауреат Государственной премии,
автор пятитомного издания
«Курс высшей математики»

Вместе с Крыловым он деятельно участвует в создании Математического кабинета, в работе мастерской по изготовлению моделей пространственных фигур, роль которых, по словам Крылова, очень важна в изучении геометрии и прикладной математики. На заседаниях Математического кабинета Франк выступает с докладами по теории планиметрирования и принципам устройства планиметров. В мастерской изготавливаются приборы для черчения специальных кривых, модель логарифмической линейки, многочисленные модели эллипсоидов и параболоидов.

Вместе с Крыловым Франк ратует за создание Математического общества и активно участвует в его работе. В «Записках Математического кабинета» Франк публикует статьи «О вычислении корней уравнения с помощью метода постоянного коэффициента», «Логарифмический прибор для решения алгебраических уравнений», Uber die Interpolation einiger in der Praxis vorkommend geschlossener Kurven и другие; читает лекции по приближенным вычислениям в связи с теорией математических приборов.

После отъезда в Киев Н. М. Крылова Михаил Людвигович и его коллеги стараются сохранить атмосферу научного творчества и поддерживают деятельность Математического общества, несмотря на изменившиеся условия и постоянные реорганизации университета. В 1922–1925 годах он регулярно делает доклады на заседаниях общества, среди которых можно выделить доклады «О топологии односторонних поверхностей», «К вопросу об определении связности поверхности», «О коллинеации», «О многоугольниках Poncelet», а также выступает с публичными лекциями на тему «Принципы относительности».

27 марта 1926 года в связи со столетием неевклидовй геометрии М. Л. Франк сделал доклад на заседании Математического общества и Крымского общества естествоиспытателей и любителей природы, напечатанный в «Известиях Крымского педагогического института имени М. В. Фрунзе» за 1927 год под названием «Геометрия Лобачевского и ее значение для современной науки». В этой статье дан обзор развития неевклидовой геометрии, ее влияния на современную науку. В том же 1927 году Франк выступил с докладами на I Всероссийском съезде математиков в Москве, а в 1928 году в составе делегации ездил на Международный конгресс математиков в Болонье.

С осени 1926 года, когда Математическое общество прекратило свою работу, Франк поддерживал деятельность математического кружка. Будучи прекрасным педагогом, он пользовался заслуженным уважением в среде студентов, а его организаторские способности привели к тому, что в 1927–1928 годах он был заместителем ректора по учебной работе. В 1930 году Михаил Людвигович покидает Симферополь, получив приглашение заведовать кафедрой приближенных вычислений в Ленинградском университете. И там он ведет плодотворную научную работу, выпускает статьи в Математическом сборнике с оригинальными исследованиями односторонних поверхностей, а на II Всесоюзном съезде математиков в 1934 году делает доклад «Об одном новом критерии односторонности поверхностей». В 30-е годы печатаются его книги «Элементарные приближенные вычисления», «Элементы высшей математики», «Элементы теории вероятностей» и другие. В начале Великой Отечественной войны М. Л. Франк эвакуируется из Ленинграда в Казань, где и завершает свой жизненный путь.

Лев Александрович Вишневский (1887–1938), математик, специалист по теории специальных функций, профессор Таврического университета, профессор Томского университета, окончил физико-математический факультет Московского университета в 1913 году и после магистерских экзаменов в 1916 году был принят на должность приват-доцента Московского университета. В 1917 году был вынужден переехать в Ялту из-за болезни, работал сначала в коммерческом училище, затем в январе 1918 года был избран приват-доцентом филиального отделения Киевского университета в Ялте; осенью 1918 года — штатным доцентом; а в начале 1919 года — экстраординарным профессором на физико-математическом факультете Таврического университета.

С момента создания Математического кабинета в феврале 1919 года Лев Александрович участвовал в его работе, регулярно выступая с докладами. В созданном вскоре Математическом обществе он стал товарищем председателя Н. М. Крылова, а с 1923 года — председателем. Объемное исследование «О некоторых вопросах теории функций бесконечного числа переменных», напечатанное Вишневским в «Записках Математического кабинета», было представлено как диссертация на степень магистра математики, и положительный отзыв о ней с подробным анализом дал Н. М. Крылов. Эта работа была посвящена теории непрерывных и дифференцируемых функций в гильбертовом пространстве последовательностей. В дальнейшем Л. А. Вишневский дал применение теории функций бесконечного числа переменных к различным вопросам математического анализа и вариационного исчисления, привел доказательство существования абсолютного экстремума и указал эффективные методы нахождения решения с помощью обобщенного метода Ритца, развитого в работах Н. М. Крылова. В рамках лектория Математического общества профессор Вишневский читал курс «Избранные главы по анализу бесконечного множества переменных».

Свою научную и учебную деятельность Лев Александрович сочетал и с активной организационной работой. В 1921–1925 годах он был деканом физико-математического факультета, а в 1923 году даже исполнял обязанности ректора Крымского университета. В 1925 году после решения о закрытии Крымского университета Вишневский переехал в Томск, где читал лекции по дифференциальным уравнениям, вариационному исчислению, уравнениям баллистики в Томском университете. В 1932 году при университете был открыт научно-исследовательский институт математики и механики, в котором Л. А. Вишневский был директором и заведующим сектором прикладной математики. Вишневский вел деловую переписку с Альбертом Энштейном, а в созданном институте работали приглашенные из Германии Нетер и Бергман.

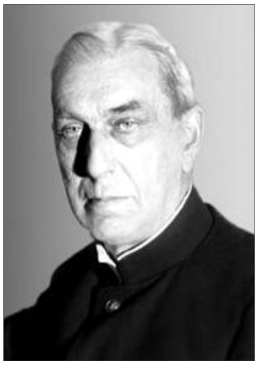
Николай Сергеевич Кошляков (1891–1958) — математик, член-корреспондент Академии наук СССР, лауреат Государственной премии СССР — в 1914 году окончил физико-математический факультет Петербургского университета и в марте 1919 года был приглашен на работу в Таврический университет на должность доцента; в дальнейшем, с 1922 года, стал профессором.

Николай Сергеевич как специалист в области теории функций и дифференциальных уравнений математической физики, читал на физико-математическом факультете курсы математического анализа, теории функций комплексного переменного, и его лекции слушали будущие академики И. В. Курчатов и Д. И. Щербаков, профессор Л. Г. Лойцянский. В созданном Математическом обществе Н. С. Кошляков был

Михаил Людвигович Франк
(1878–1942),
профессор
Таврического университета
в 1919–1928 годах

Лев Александрович Вишневский
(1887–1938),
профессор
Таврического университета
в 1918–1925 годах,
декан физико-математического факультета
в 1921–1925 годах

Николай Сергеевич Кошляков
(1891–1958) ,
профессор
Таврического университета
в 1919–1922 годах,
член-корреспондент АН СССР,
лауреат Государственной премии



Николай Михайлович Герсеванов
(1879–1950),
профессор
Таврического университета
в 1919–1921 годах,
член-корреспондент АН СССР,
лауреат Государственной премии

секретарем, а с 1925 года — его председателем. Он сделал четырнадцать докладов и опубликовал в «Записках Математического кабинета» ряд работ, включая магистерскую диссертацию «О некоторых приложениях теории интегральных вычетов», которую высоко оценил Н. М. Крылов. Защита диссертации успешно состоялась в 1922 году в Ростовском университете. Работы Кошлякова по теории рядов Дирихле явились достойным продолжением трудов Т. Ф. Вороного и много привнесли в аналитическую теорию.

В 1925 году Н. С. Кошляков был избран на должность профессора Ленинградского университета и уехал из Симферополя. В 1926 году он возглавил кафедру математики Ленинградского электротехнического института и заведовал ею в течение шестнадцати лет. В 1933 году Николай Сергеевич был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1937 году — членом Лондонского математического общества. Он автор известных книг «Основные дифференциальные уравнения математической физики», «Дифференциальные уравнения математической физики». В 1933–1936 годах Николай Сергеевич работал в Математическом отделе Физико-математического института имени В. А. Стеклова, затем в Математическом институте АН СССР.

Николай Михайлович Герсеванов (1879–1950), математик, специалист в области номографии, инженер, специалист по механике грунтов, член-корреспондент АН СССР, в 1896–1901 годах получил образование в Петербургском институте инженеров путей сообщения и в течение четырнадцати лет был производителем работ по строительству железных дорог. Одновременно он вел и педагогическую работу в своем институте и в Петербургском политехническом институте. К научным заслугам Герсеванова относится положенное им начало использования номографии в России. В своих изданиях «Основы номографического исчисления» (1906), «Теория и построение инженерных номограмм» (1926), «Основы номографии» он изложил основы построения номограмм и их применения в инженерных расчетах.

В 1917 году Николай Михайлович получает приглашение от Таврического университета. В 1919 году по представлению Н. М. Крылова его избирают приват-доцентом физико-математического факультета и привлекают к чтению лекций по многим математическим дисциплинам и спецкурсов по номографии. На заседаниях Математического общества он неоднократно выступает с докладами, среди которых и опубликованный доклад «О графическом решении функциональных уравнений». В 1921 году Н. М. Герсеванов уезжает из Крыма и поступает на работу в Тбилисский государственный политехнический институт. В 1923 году по результатам конкурса Н. М. Герсеванов был приглашен в Москву и возглавил кафедру портовых сооружений в Московском институте инженеров путей сообщения. Опубликованная им в 1931 году работа «Основы динамики грунтовой массы» стала очень своевременным трудом, заложившим основы новой научной дисциплины. В 1936 году Н. М. Герсеванову присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, а в 1939 году он становится членом-корреспондентом Академии наук СССР по отделению технических наук. В 1948 году Герсеванову была присуждена Сталинская (Государственная) премия.

1918–1925 годы были временем становления и расцвета математических исследований в Таврическом университете, где плодотворно сотрудничали представители различных математических школ России: Н. М. Крылов, Н. С. Кошляков и В. И Смирнов из петербургской школы, М. А. Тихомандрицкий из харьковской школы, Л. А. Вишневский и А. С. Кованько из московской. Созданные ими Математический кабинет и Математическое общество существовали в течение десяти лет и были центром математической науки в Крыму в самые трудные годы войны, разрухи и потрясений. Как вспоминал В. И. Смирнов, «*. . . если коротко говорить об атмосфере, царившей тогда в университете, то ее можно назвать обстановкой бескорыстного подвижничества*». Признано, что под руководством Николая Митрофановича Крылова в университете сложилась научная математическая школа, объединившая исследования работавших тогда в университете ученых-математиков.

В эти годы университет выпустил сотни специалистов, педагогов, врачей, агрономов, в их числе были выдающиеся ученые — выпускники физико-математического факультета.

Игорь Васильевич Курчатов (1903–1960) — выдающийся физик, академик АН СССР, трижды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Сталинских премий СССР. Он награжден пятью орденами Ленина, Серебряной медалью Мира имени Жолио-Кюри, а также другими орденами и медалями. В 1920 году *Игорь Курчатов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Таврического университета, где слушал лекции математиков Н. М. Крылова, Н. С. Кошлякова, В. И. Смирнова, физиков И. Е. Тамма и Я. И. Френкеля.* В 1923 году досрочно окончил университет и поступил в Петроградский политехнический институт, где начал свой выдающийся путь в науке.

Лев Герасимович Лойцянский (1900–1991) — доктор физико-математических наук, специалист в области гидро- и аэродинамики, лауреат Сталинской премии (1946), заслуженный деятель науки и техники РСФСР (1968). В 1918–1921 годах *учился на математическом отделении Таврического университета.* Будучи поначалу единственным студентом, Лойцянский имел особое положение и добрую репутацию в коллективе преподавателей, позволившую ему быть причастным к созданию Математического кабинета и общества. Первые протоколы общества были написаны его рукой. В 1921 году Лойцянский закончил обучение и стал преподавателем физико-математического факультета. В 1922 году Л. Г. Лойцянский возвратился в Петроград на физико-механический факультет Политехнического института. В 1935 году получил степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации. В годы войны продолжал научную работу в Казани, а в 1945 году вернулся в Политехнический институт. Профессор Лойцянский известен публикациями учебников по теоретической механике, а также трудов по аэродинамике и механике пограничных слоев.

Глеб Михайлович Франк (1904–1976), биофизик, радиобиолог, академик АН СССР, в 1925 году окончил физико-математический факультет Крымского педагогического института, где на естественном отделении слушал лекции В. И. Вернадского, А. Т. Гурвича, И. Е. Тамма. Окончив аспирантуру Московского университета, в 1929–1933 годах работал в Ленинградском университете. В 1935 году защищает докторскую диссертацию, в 1945 году избирается членом-корреспондентом, а в 1946 году — действительным членом Академии медицинских наук СССР; в 1943–1952 годах заведует лабораторией изотопов и излучений АН СССР. В 1949 году за создание интегрирующих дозиметров он удостоен Сталинской премии, в 1951 году получает вторую Сталинскую премию. В 1956–1976 годах Г. М. Франк возглавляет институт биофизики АН СССР. Основные труды посвящены биологическому действию ультрафиолетового излучения, биофизике биологической подвижности, механизмам передачи нервного возбуждения.

Лев Герасимович Лойцянский
(1900 – 1991),
окончил обучение
в Таврическом университете
в 1921 году,
доктор физико-математических наук,
лауреат Сталинской премии,
заслуженный деятель
науки и техники РСФСР

Игорь Васильевич Курчатов
(1903 – 1960),
окончил обучение
в Таврическом университете
в 1923 году,
выдающийся физик,
академик АН СССР,
трижды Герой Социалистического Труда,
лауреат Ленинской и
Сталинской премий СССР

Глеб Михайлович Франк
(1904 – 1976),
окончил обучение
в Таврическом университете
в 1925 году,
выдающийся биофизик,
радиобиолог,
академик АН СССР

Илья Михайлович Франк
(1908 – 1990),
слушатель лекций
в Таврическом университете
в 1925 году,
выдающийся физик,
академик АН СССР,
лауреат Нобелевской премии

Илья Михайлович Франк (1908–1990) — физик, специалист области оптической и ядерной физики, академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии, учился в Ялте в школе-техникуме, в 1925 году переехал в Симферополь и посещал лекции в Крымском педагогическом институте. Работал в физической лаборатории и участвовал в заседаниях математического кружка, где опубликовал работу по геометрии. В 1926 году поступил на физико-математический факультет Московского университета, по окончании которого в 1930–1934 годах работал в Государственном оптическом институте в Ленинграде. В 1935 году получил степень доктора физико-математических наук. В 1934 году поступил на работу в Физический институт имени П. Н. Лебедева АН СССР. Вместе с В. И. Вавиловым, И. Е. Таммом и П. С. Черенковым занимался изучением свойств и объяснением поляризации излучения, открытого и названного именем Черенкова. В 1946 году был избран членом-корреспондентом АН СССР и вместе с Таммом, Черенковым и Вавиловым был награжден Государственной премией СССР. В 1958 году Франк Тамм и Черенков были удостоены Нобелевской премии по физике за «открытие и истолкование эффекта Черенкова». Помимо этого он был награжден двумя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом Октябрьской Революции, золотой медалью Вавилова, а также был лауреатом Ленинской премии. В 1968 году был избран академиком АН СССР.

Кирилл Иванович Щелкин (1911–1968) — физик, профессор, член-корреспондент Академии наук СССР, трижды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии и трех Государственных премий, в 1932 году окончил физико-математический факультет Крымского педагогического института и поступил на работу в Институт химической физики АН СССР. Кандидатскую диссертацию защитил в 1938 году, докторскую — в 1945. Был ответственным за проведение испытания РДС-1 в Семипалатинске в 1949 году. С 1960 года работал в Московском физико-техническом институте. Его основные научные труды посвящены физике горения и взрыва, детонации газов.

Постановлением обкома РКР(б) от 23 декабря 1920 года Таврический университет был распущен, и в результате его реорганизации создан Крымский университет. Но, несмотря на «пролетаризацию», изменение структуры управления, чистки мандатными комиссиями, тяжелое материальное положение и голод, реорганизованный университет продолжал свою деятельность на сохранившихся факультетах. Однако трудности содержания привели к закрытию части факультетов, и уже в 1922 году поставили под угрозу само существование университета. Из-за отсутствия средств учебная и научная база факультетов была в плачевном состоянии, мало что сохранилось и от классической структуры университета. И хотя университет еще держался на плаву, в 1924 году был ликвидирован физико-математический факультет, а его преподаватели и слушатели переведены на педагогический факультет, впоследствии преобразованный в педагогический институт. Крымский университет прекратил свое существование.

Наследником Крымского университета стал созданный в октябре 1925 года на базе оставшегося после реорганизации педагогического факультета Крымский педагогический институт имени М. В. Фрунзе. Пединститут был нацелен на решение насущных задач народного образования под прямым управлением со стороны советских и партийных органов. В его структуре работали четыре отделения (естественное, физико-техническое, русского языка, татарского языка). На физико-техническом и естественном отделениях в 1925–1930 годах работали и вели научные исследования профессора-математики М. Л. Франк, Н. В. Оглоблин, Т. А. Афанасьева-Эренфест, доценты Е. Ф. Скворцов, А. И. Лемпси, ассистенты В. Б. Кречмер, В. В. Лопатень, И. Е. Тиханович. При их горячей поддержке еще продолжало работу Математическое общество, затем математический кружок с привлечением студентов к выступлениям с докладами. В феврале 1929 года в торжественной обстановке было проведено собрание, посвященное 10-летию образования Математического общества. В числе поздравлений свои приветствия прислали Н. М. Крылов, Л. А. Вишневский, Л. Г. Лойцянский и другие ученые.

2. 1930–1971 ГОДЫ. КРЫМСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ М. В. ФРУНЗЕ

В середине тридцатых годов на базе естественного и физико-технических отделений вновь был создан физико-математический факультет с кафедрами математики и физики, однако его профессорский состав еще сильнее сократился в ходе чисток. После отъезда профессоров М. Л. Франка и Т. А. Афанасьевой-Эренфест, ухода из жизни в 1935 году профессора Н. В. Оглоблина кафедру математики и физико-математический факультет возглавил профессор Е. Ф. Скворцов. В конце 30-х годов продолжались чистки и репрессии, в результате которых были утрачены лучшие преподаватели, что повлекло и отсев студентов, и свертывание научных направлений. Но все же, несмотря на все трудности, Крымский педагогический и (учрежденный при нем) учительский институт имени М. В. Фрунзе оставался очагом науки и культуры в Крыму.

В годы Великой Отечественной войны Крымский педагогический институт находился в эвакуации с сентября 1941 по август 1944 года в Махачкале, где по решению правительства Дагестана был включен в состав Дагестанского пединститута. Учебные занятия проходили вначале в Махачкале, а позднее в районном центре Касумкент. После освобождения Крыма пединститут вернулся из эвакуации и в исключительно трудных условиях начал учебный год. Были восстановлены все факультеты: языка и литературы, исторический, географический, естествознания, физико-математический, а также создан факультет иностранных языков. Научная работа восстанавливалась с большими трудностями.

В послевоенные годы пединститут восстанавливал свою материальную и учебную базу, и только к 1960 году были введены в строй все здания и сооружения. На физико-математическом факультете в 60-е годы подготовка студентов велась по специальностям «физика и математика», «математика и черчение», «физика и труд». Факультет объединял четыре кафедры, включая кафедру общей физики, которой руководил доцент Р. Г. Бадальян — декан факультета, кафедру математического анализа, которой заведовала доцент Ш. Ш. Сутюшева, кафедру математики с заведующим кафедрой доцентом В. Н. Скрыдловым и кафедру общетехнических дисциплин с заведующим М. А. Баженовым.

Среди выпускников физико-математического факультета были замечательные математики, получившие мировую известность.

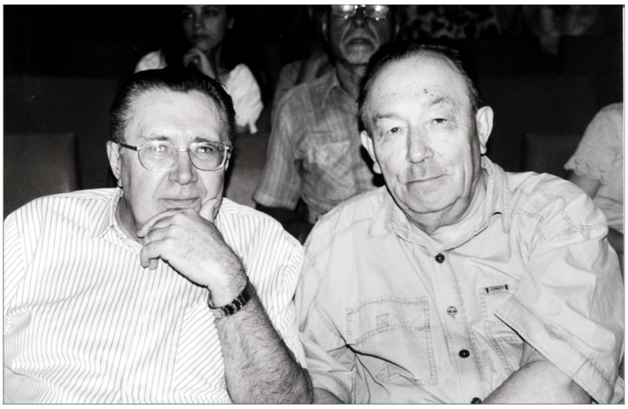
Вячеслав Сергеевич Танаев (1940–2002) — академик Академии наук Беларуси, заслуженный деятель науки Республики Беларусь, лауреат Государственной премии Беларуси — известен своими исследованиями в области математической кибернетики, исследования операций, теории и методов оптимизации, теории расписаний. П*о окончании в 1957 году симферопольской школы № 5 Вячеслав Танаев поступил в Крымский педагогический институт, который с отличием окончил по специальности «математика и черчение» в 1962 году* и недолго работал в нем ассистентом. Первую научную статью «К вопросу о механическом образовании плоских кривых» он опубликовал в «Известиях Крымского педагогического института» в 1961 году.

С 1963 по 1965 год Вячеслав Сергеевич обучался в аспирантуре Института тепло- и массобмена АН БССР, досрочно ее окончил и защитил кандидатскую диссертацию. С июля 1965 работал в Институте технической кибернетики (ИТК) АН БССР главным инженером лаборатории конечных автоматов, в 1966 стал заведующим лабораторией дискретного программирования. В 1970–1971 году был начальником лаборатории филиала НИИ автоматической аппаратуры. В 1971 году возвратился в Институт технической кибернетики и возглавил лабораторию управляющих систем, переименованную позднее в лабораторию математической кибернетики. С 1987 года Танаев становится директором Института технической кибернетики — одного из ведущих центров исследований в СССР.

Научные интересы Вячеслава Сергеевича были очень разносторонни и охватывали области прикладной математики, кибернетики и информационных технологий в различных классах задач математического программирования, оптимального проектирования, теории расписаний, экстремальных комбинаторных задач и разработки эффективных методов их решения. Его докторская диссертация «Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений», защищенная в 1978 году, и последующие труды обосновывают общую теорию параметрической декомпозиции оптимизационных задач на совокупность связанных подзадач, решаемых известными методами. Танаев разработал методы решения нескольких специальных классов экстремальных задач, возникающих, в частности, при принятии оптимальных проектных решений в САПР. Созданная им научная школа по теории расписаний и параметрической декомпозиции широко известна в научном мире. В 1994 профессор В. С. Танаев был избран членом-корреспондентом АН Беларуси, в 1995 году он получил звание Заслуженного деятеля науки Республики Беларусь. С июня 1996 он становится генеральным директором НИО «Кибернетика» НАН Беларуси, организованного по его инициативе на базе ИТК. В 2000 году В. С. Танаев становится академиком АН Беларуси, в 2002 он назначен генеральным директором Объединенного института проблем информатики АН Беларуси. В числе основных трудов академика Танаева — «Синтез граф-схем алгоритмов выбора решений» (1974), «Введение в теорию расписаний» (1975), «Математические модели и методы календарного планирования» (1994), «Теория расписаний. Групповые технологии» (1998) и многие другие. Благодаря широчайшему научному кругозору академик Танаев был участником многочисленных международных научных программ по информационным технологиям, автоматизации исследований, освоению космоса, членом редакционных советов многих журналов и энциклопедий, европейских научных обществ.

Вячеслав Сергеевич Танаев
(1940 – 2002),

выпускник Крымского педагогического института 1962 года,
академик НАН Беларуси,
заслуженный деятель науки Республики Беларусь,
лауреат Государственной премии Республики Беларусь



Академики
Вячеслав Сергеевич Танаев и
Юрий Иванович Журавлев
на международной конференции
«Интеллектуализация обработки информации»,
г. Алушта, 2002 год

Вячеслав Сергеевич не раз бывал в стенах своей альма-матер по приглашению коллег, а также участвовал в работе Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» вместе с академиком Ю. И. Журавлевым. Факультет математики и информатики бережно хранит память об этом выдающемся ученом.

В конце 1960-х годов встал вопрос о преобразовании педагогического института в университет. Унаследованные от Таврического университета традиции отвечали основным требованиям, но кадровый состав и материальная база требовали расширения и модернизации.

3. 1972–1998 ГОДЫ. СИМФЕРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ФРУНЗЕ

Созданный в феврале – марте 1972 года университет продолжил учебные и научные традиции предшественников, существенно преобразив свою структуру и материальную базу. Были построены учебные корпуса, приобретено новое лабораторное оборудование, созданы новые факультеты, их число достигло семи, а физико-математический факультет был разделен на физический и математический. Началась подготовка по широкому спектру университетских специальностей.

На математическом факультете были организованы пять кафедр: математического анализа, геометрии, алгебры и теории чисел, дифференциальных и интегральных уравнений, прикладной математики. Возглавили эти кафедры, соответственно, доцент В. Д. Андронов, доцент В. Н. Скрыдлов, профессор А. В. Кужель, профессор Ю. И. Черский и профессор Ю. А. Шевляков.

Александр Васильевич Кужель (1930–2005), доктор физико-математических наук, профессор, специалист по функциональному анализу, в 1954 году окончил Николаевский пединститут и поступил в аспирантуру Одесского пединститута к профессору М. С. Лившицу. По ее окончании был направлен в Уманский педагогический институт, где завершил работу над диссертацией по теме «Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов» и в 1959 году защитил ее в Харьковском университете. Результаты исследований по теории линейных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, легли в основу докторской диссертации «О некоторых вопросах спектральной теории линейных операторов в пространствах с дефинитной и индефинитной метрикой», которую Александр Васильевич защитил в 1969 году в институте математики АН УССР.

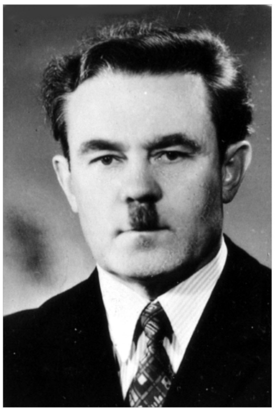
В Крымский педагогический институт А. В. Кужель приехал в 1970 году и был принят на должность заведующего кафедрой алгебры и теории чисел. В Крыму он создал и возглавил научную школу в области функционального анализа и теории операторов. Вместе со своими учениками профессор Кужель внес существенный вклад в развитие теории характеристических функций, спектрального анализа несамосопряженных операторов, теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой, теории расширений эрмитовых операторов, теории рассеяния Лакса – Филлипса. Под его руководством защитили диссертации пять кандидатов наук. Опубликовал свыше ста научных работ, двенадцать книг, в том числе монографию: Kuzhel A. V. and Kuzhel S. A. Regular Extensions of Hermitian Operators. — VSP. Utrecht, Netherlands, 1998, — 273 рр. В 1999 году профессор кужель был удостоен звания заслуженного деятеля науки и техники Автономной Республики Крым.

Юрий Иосифович Черский (1929–2015) — математик, доктор физико-математических наук, профессор, ученый в области уравнений типа свертки, в 1952 году окончил математический факультет Казанского государственного университета, затем обучался в аспирантуре Ростовского государственного университета. В 1956 году Юрий Иосифович защитил диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки» в Математическом институте АН Грузинской ССР и по уровню результатов получил в Совете по защитам степень доктора наук, однако ВАК утвердил степень кандидата наук. В 1955–1964 годах Юрий Иосифович работал в Ростовском государственном университете, а в 1964 году защитил докторскую диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки и их приложения» в Математическом институте АН Грузинской ССР. С 1964 года Ю. И. Черский возглавил кафедру методов математической физики в Одесском государственном университете, продолжая исследования по приближенным методам решения уравнений типа свертки.

В 1972 году Юрий Иосифович приехал в Симферополь и стал профессором кафедры математического анализа, а с 1973 года возглавил вновь созданную кафедру дифференциальных и интегральных уравнений, руководил научным семинаром, на котором обсуждались идеи и результаты нового подхода к теории обобщенных функций. Предложенный им вариант теории обобщенных функций позволял решать задачу Римана и ряд классов уравнений типа свертки. В 1977 году Ю. И. Черский был приглашен на работу в Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР во Львов, где возглавил отдел функционального анализа и интегральных уравнений, а с 1983 года вновь переехал в Одессу. К научному наследию профессора Черского наряду с теорией интегральных уравнений типа свертки относятся методы решения уравнений плавного перехода, исследование общих сингулярных уравнений в банаховом пространстве, методов решения экстремальных задач.

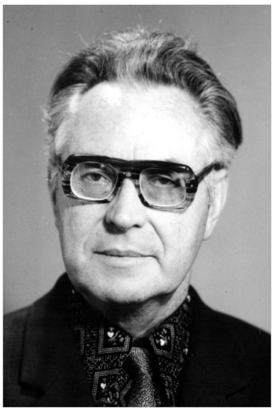
В 1980-е годы на математическом факультете начали свою деятельность профессора С. К. Персидский и Н. Д. Копачевский.

Сергей Константинович Персидский (1930–2005) — математик, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки и образования Автономной Республики Крым, в 1954 году окончил физико-математический факультет Казахского госуниверситета и работал в нем до 1970 года. В 1961 году в Московском государственном университете защитил кандидатскую диссертацию, а в 1972 году в Университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы защитил докторскую диссертацию «О развитии метода функций Ляпунова в теории устойчивости



Александр Васильевич Кужель
(1930 – 2005),
доктор физико-математических наук,
профессор, ученый в области
спектральной теории линейных операторов.
В 1972 – 2005 годах заведующий кафедрой
алгебры и теории чисел

Юрий Иосифович Черский
(1925 – 2015),
доктор физико-математических наук,
профессор, ученый в области
уравнений типа свертки.
В 1972 – 1977 годах заведующий кафедрой
дифференциальных и интегральных уравнений



Сергей Константинович Персидский
(1930 – 2005),
доктор физико-математических наук,
профессор, ученый в области
метода функций Ляпунова.
В 1980 – 2000 годах заведующий кафедрой
дифференциальных и интегральных уравнений

движения». В этом же году он возглавил кафедру высшей математики Казахского госуниверситета и в течение ряда лет был деканом физико-математического факультета.

С 1980 по 2000 год профессор Персидский заведовал кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Симферопольского государственного университета, читал лекции по основным и специальным дисциплинам, руководил аспирантурой, под его научным руководством защищены четыре кандидатских диссертации. Профессор Персидский опубликовал свыше ста научных работ, большая часть из них посвящена развитию метода функций Ляпунова и его применениям. В них введены понятия сильно или слабо знакоопределенной функции Ляпунова, позволившие получить новые эффективные критерии устойчивости различных типов, получены новые результаты в области качественной теории дифференциальных уравнений, новые необходимые и достаточные условия устойчивости, расширен класс допустимых функций Ляпунова. Большой заслугой Сергея Константиновича стало возрождение традиции регулярных конференций по методу функций Ляпунова, начатой еще в Казани, Иркутске, Харькове. Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его применения» с 1993 года проводилась под его председательством. Помимо этого профессор Персидский возглавлял ряд проектов, связанных с разработкой и внедрением математических методов автоматизированного проектирования и технологической подготовки производства, сотрудничал с предприятиями промышленности и оборонной отрасли.

Николай Дмитриевич Копачевский
доктор физико-математических наук, профессор,
с 1981 года заведующий кафедрой математического анализа,
заслуженный деятель науки и техники Украины,
заслуженный работник образования Автономной республики Крым,
лауреат премии им. В. И. Вернадского,
лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники

На заседании КРОМШ –
Крымской осенней математической школы
«Спектральные и эволюционные задачи»

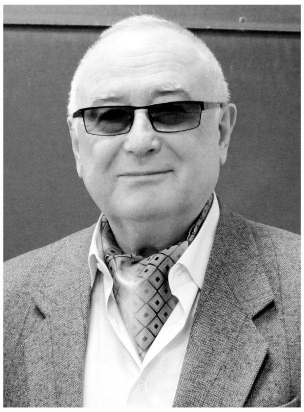
Николай Дмитриевич Копачевский, 1940 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, в 1963 году окончил факультет авиамоторостроения Харьковского авиационного института и был принят на работу в Физико-технический институт низких температур. В 1966 году защитил кандидатскую диссертацию «О малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости» в Физико-техническом институте низких температур АН УССР в Харькове. Диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения» защитил в Вычислительном центре АН СССР в 1979 году.

В 1981 году Николай Дмитриевич возглавил кафедру математического анализа Симферопольского государственного университета имени М. В. Фрунзе. Под его руководством вскоре сложилась научная школа «Спектральные и эволюционные задачи», основные научные направления которой охватывают исследования вопросов разрешимости и качественных свойств различных гидродинамических задач, проблем линейной гидродинамики и прикладной математики, функционального анализа, спектральной теории операторов и операторных пучков, теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В рамках научной деятельности школы ежегодно проводится международная конференция «Крымская осенняя математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Под руководством профессора Копачевского защитили диссертации 21 кандидат наук. Профессор Копачевский ведет активную педагогическую работу, читая лекции по разработанным курсам «Операторные методы математической физики», «Операторные методы линейной гидродинамики», «Спектральная теория операторных пучков» и другим.

Николай Дмитриевич автор 7 монографий, 250 научных статей. Среди них статьи в известных журналах: «Доклады АН СССР», «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Механика жидкости и газа», «Функциональный анализ и его приложения», «Математические заметки», «Математическая физика, анализ, геометрия», Russian Journal of Mathematical Physics, Nonlinear Analysis, Mathematische Nachrichten, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (USA), Methods of Functional Analysis and Topology, Operator Theory: Advances and Applications, Journal of Mathematical Sciences (Springer).

Николай Дмитриевич участвует в деятельности многих научных организаций: он академик Крымской академии наук, академик Петровской академии наук и искусств (ПАНИ) (г. Санкт-Петербург, Крымское отделение), председатель Математического фонда Крыма, член Германской математико-инженерной ассоциации, член экспертного совета ВАК при Минобрнауки России (Математика и механика), эксперт Российской академии наук. Заслуги Николая Дмитриевича отмечены многими почетными званиями: заслуженный деятель науки и техники Украины (1992), заслуженный работник образования Автономной Республики Крым (2000), лауреат премии им. В. И. Вернадского (2001), лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (2013) и орденом «За заслуги» III степени (2008).

Владимир Иосифович Донской, 1948 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник образования Автономной Республики Крым, заслуженный деятель науки и техники Украины. В 1971 году В. И. Донской окончил радиотехнический факультет Севастопольского приборостроительного института по специальности «Радиотехника» и начиная с 1974 года работал программистом вычислительного центра, в научно-исследовательском секторе, а затем — на кафедре прикладной математики Симферопольского государственного университета. В 1983 году В. И. Донской защитил диссертацию «Алгоритмы обучения, основанные на построении решающих деревьев» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математическая кибернетика» в Совете Вычислительного центра Академии наук СССР. В 1994 году он защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Дискретные модели принятий решений при неполной информации на основе синтетического подхода» в Вычислительном центре Российской академии наук по специальности «Теоретические основы информатики».



Владимир Иосифович Донской,
доктор физико-математических наук, профессор,
с 1994 года заведующий кафедрой информатики,
заслуженный деятель науки и техники Украины,
заслуженный работник образования Автономной Республики Крым

На конференции ИОИ-2006 г.,
слева академик РАН К. В. Рудаков

В 1994 году по инициативе профессора В. И. Донского на математическом факультете была создана кафедра информатики, открыта специальность «информатика», организована лаборатория программного обеспечения компьютерных систем. С 1999 по 2010 год В. И. Донской — декан факультета математики и информатики. Владимир Иосифович читает лекции по дискретной математике, теоретическим основам информатики, алгоритмической теории сложности, а ранее читал и разрабатывал курсы лекций по исследованию операций, программированию, распознаванию образов, которые в дальнейшем перешли к его ученикам.

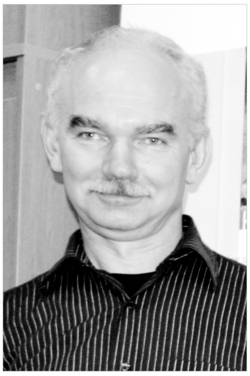
Профессор Донской принадлежит научной школе проблем распознавания, прогнозирования и методов дискретного анализа академика Ю. И. Журавлева, при поддержке которого в период с 1983 по 2010 год в университете удалось развить научное направление, посвященное интеллектуализации обработки информации и дискретным моделям принятия решений при неполной информации. В 1996 году совместно с Вычислительным центром РАН при активном руководстве и участии академика К. В. Рудакова была организована Международная научная конференция «Интеллектуализация обработки информации», которая в течение ряда лет проводилась на базе Таврического национального университета.

Владимир Иосифович подготовил пять кандидатов физико-математических наук, все они ныне доценты факультета математики и информатики. Профессором Донским получены научные результаты в области теоретической информатики и математической кибернетики. Основные из них — теория дуальных моделей принятия решений; методы псевдобулевой оптимизации при неполной информации; теория логических продукционных систем и машин; теория игр с булевыми стратегиями и частично заданной платежной функцией; методы решения задач линейного программирования с частично заданными ограничениями и целевой функцией; гибридные алгоритмы машинного обучения; pVCD метод оценивания размерности Вапника – Червоненкиса.

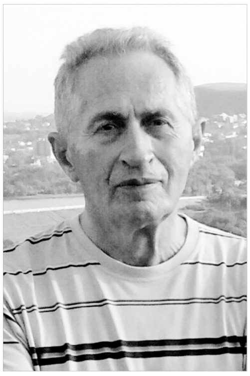
В. И. Донской является главным редактором созданного в 2002 году по его инициативе научного журнала «Таврический вестник информатики и математики». Он автор свыше 140 научных работ, включая монографии и учебные пособия «Дискретные модели принятия решений при неполной информации» (1992), «Дискретная математика» (2000), «Теоретические основы информатики: учебное пособие» (2016) и другие. Научная деятельность профессора В. И. Донского отмечена почетными званиями заслуженный работник образования Автономной Республики Крым (2001), заслуженный деятель науки и техники Украины (2004) и орденом «За заслуги» II степени (2009).

Валерий Николаевич Чехов, 1940 года рождения, математик, механик, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии Украины (1986), получил высшее образование в 1957–1962 годах на механико-математическом факультете Днепропетровского государственного университета. В 1967 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата наук на тему «Исследование напряжений возле отверстий на поверхности круговой цилиндрической оболочки» в Днепропетровском государственном университете. Работал в Днепропетровском отделении Физико-технического института низких температур АН УССР. В 1968 году защитил докторскую диссертацию «Развитие аналитических исследований напряженно-деформированного состояния пологих и непологих оболочек, ослабленных отверстиями» в Институте механики АН УССР. В 1968–1977 годах работал в должности доцента кафедры прикладной и теоретической механики Донецкого государственного университета. В 1977–1978 годах недолго работал в Симферополе, в том числе в университете; в 1978–1992 годах был доцентом, а затем профессором кафедры прикладной и теоретической механики Донецкого государственного университета. За опубликованную в 1980–1982 годах монографию в пяти томах «Методы расчета оболочек», подготовленную авторским коллективом — А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов, Вик. Н. Чехов, К. И. Шнеренко — удостоен Государственной премии Украинской ССР в области науки и техники.

Валерий Николаевич Чехов,
доктор физико-математических наук,
профессор, с 1993 года заведующий
кафедрой прикладной математики,
лауреат Государственной премии Украины



Олег Васильевич Анашкин,
доктор физико-математических наук,
профессор, с 2000 года заведующий
кафедрой дифференциальных
и интегральных уравнений



Игорь Владимирович Орлов,
выпускник Крымского государственного
педагогического института 1969 года,
доктор физико-математических наук,
профессор, с 2005 года заведующий
кафедрой алгебры и функционального анализа

В Симферопольский государственный университет приехал в 1993 году и стал заведующим кафедрой прикладной математики. В 2004 году в течение двух месяцев работал по приглашению в Физико-техническом институте в г. Брауншвайг, Германия. Профессор Чехов читает курсы лекций по теоретической механике, математическим моделям механики, численному моделированию динамических систем, ведет подготовку аспирантов, пятеро из которых защитили под его руководством кандидатские диссертации.

4. 1999–2014 годы. Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

В 1999 году университет получил статус национального и восстановил историческое название Таврического университета имени своего второго ректора В. И. Вернадского. Математический факультет в 2000 году был переименован в факультет математики и информатики, что соответствовало требованиям времени и сложившимся направлениям подготовки «математика», «прикладная математика», «информатика». Защитили докторские диссертации и стали профессорами факультета О. В. Анашкин, И. В. Орлов, Е. П. Белан, М. А. Муратов, О. А. Щербина.

Олег Васильевич Анашкин, 1952 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, в 1970–1975 годах учился в Московском госуниверситете имени М. В. Ломоносова на факультете вычислительной математики и кибернетики по специальности «прикладная математика». В 1978–1982 годах — ассистент, затем доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Симферопольского государственного университета имени М. В. Фрунзе. Сфера научных интересов — качественная теория дифференциальных уравнений, динамические системы и приложения. Диссертацию «Исследование на устойчивость в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук защитил в 1979 году в Московском государственном университете.

С 2000 года О. В. Анашкин возглавляет кафедру дифференциальных и интегральных уравнений Таврического национального университета, в дальнейшем (с 2010 года) преобразованную в кафедру дифференциальных уравнений и геометрии. Читает основные курсы дифференциальных уравнений, методов оптимизации, асимптотических методов. Область научных интересов — качественная теория дифференциальных, функционально-дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, теория устойчивости и асимптотические методы. В 2004 году защитил докторскую диссертацию «Развитие второго метода Ляпунова в теории устойчивости дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений» в Киевском национальном университете. Профессор Анашкин — член Американского математического общества, автор более 130 публикаций, в том числе более 50 статей в научных журналах и трудах международных конференций. Он участвовал в 65-и международных научных конференциях, проходивших в России, Болгарии, Венгрии, Чехии, Италии, Германии, Португалии, Канаде, США, Израиле, Японии. В настоящее время профессор Анашкин является главным редактором научного журнала «Динамические системы».

Игорь Владимирович Орлов, 1947 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, в 1969 году окончил физико-математический факультет Крымского государственного педагогического института имени М. В. Фрунзе. В 1972 году окончил аспирантуру Московского государственного педагогического института. В 1972–1975 годах работал на кафедре информатики Бирского государственного педагогического института в Башкирии. В 1974 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «О замене переменных в интеграле Лебега и в A-интеграле» в Московском государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина. В 1975 году поступил на работу в Симферопольский государственный университет на кафедру математического анализа. В 2005 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Шкалы пространств как инструмент линейного и нелинейного анализа в локально-выпуклых пространствах» в Институте математики НАНУ. С 2005 года возглавляет кафедру алгебры и функционального анализа. Читает лекции по дополнительным главам функционального анализа, курсы дифференциального исчисления в банаховых пространствах, дифференциального исчисления в пространствах Фреше.

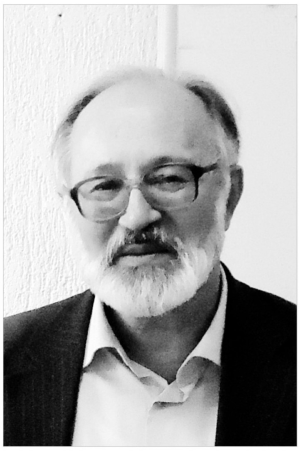
Под руководством профессора Орлова на кафедре в настоящее время ведется активная научная работа. Основным научным направлением является негладкий анализ и негладкая оптимизация, субдифференциальное исчисление на базе сублинейной операторной теории. Совместно со своим учеником Федором Стонякиным Игорь Владимирович опубликовал две монографии: «Интеграл Бохнера» (2015), «Новые методы негладкого анализа и их приложения в теории векторного интегрирования и оптимизации» (2016), а также два учебных пособия и свыше 160 научных и методических публикаций. С 2010 по 2014 год был председателем специализированного совета К 52.051.10 по защите диссертаций в Таврическом национальном университете. Под руководством профессора Орлова защищены 4 кандидатских диссертации. Игорь Владимирович является экспертом Российского научного фонда, членом экспертной группы Министерства обороны РФ в КФУ, а также он штатный рецензент журнала Mathematical Reviews (USA), штатный рецензент журнала Zentralblatt Mathematik (Germany), член редколлегии журнала «Динамические системы», член редколлегии журнала «Таврический вестник информатики и математики».

Евгений Петрович Белан
(1941–2017),
выпускник Крымского государственного
педагогического института 1963 года,
доктор физико-математических наук,
профессор

Евгений Петрович Белан (1941–2017), доктор физико-математических наук, профессор, после окончания в 1963 году Крымского педагогического института поступил в аспирантуру Института математики АН УССР. Под руководством академика Ю. А. Митропольского подготовил диссертацию по специальности «Дифференциальные уравнения» и в 1969 году защитил ее в Институте математики.

В 1971 году был избран по конкурсу в Крымский педагогический институт имени М. В. Фрунзе и работал на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений с момента ее организации. В 2007 году защитил докторскую диссертацию «Метод инвариантных многообразий в теории параболических и функционально-дифференциальных уравнений и его приложения» в Институте математики

НАН Украины. Область научных интересов профессора Белана включает теорию бифуркаций, пространственно-временные структуры и их устойчивость, метаустойчивые структуры в параболических задачах, явление буферности, исследование динамики структур в параболических задачах с преобразованием пространственной переменной и малой диффузией. По этим направлениям получен ряд приоритетных результатов, отраженных в многочисленных публикациях в «Украинском математическом журнале», в журналах «Кибернетика и системный анализ», «Дифференциальные уравнения» и других. Е. П. Белан читал лекции по уравнениям математической физики, спецкурсы по теории бифуркаций, сингулярно возмущенным задачам, руководил аспирантами, был членом редколлегии журналов «Динамические системы», «Таврический вестник информатики и математики». Совсем недавно Евгений Петрович ушел из жизни, оставив о себе добрую память. . .



Мустафа Абдурешитович Муратов,
доктор физико-математических наук, профессор,
с 1991 года работает на кафедре математического анализа,
с 2016 года декан факультета математики и информатики

Мустафа Абдурешитович Муратов, 1951 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и информатики с 2016 года, в 1968–1973 учился на математическом факультете Ташкентского государственного университета имени В. И. Ленина, по окончании которого работал кафедре общей математики, а затем учился в аспирантуре при кафедре функционального анализа. В 1979 году защитил диссертацию на соискание степени кандидата наук на тему «Идеальные подпространства в кольцах измеримых операторов» в совете Ташкентского университета.

В 1991 году был избран по конкурсу на должность доцента кафедры математического анализа Симферопольского государственного. Докторскую диссертацию «Сходимости, эргодические теоремы и представимость в алгебрах измеримых функций и операторов» защитил в 2008 в Институте математики НАН Украины. Область научных интересов охватывает различные виды сходимости измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, эргодические теоремы в симметричных пространствах измеримых функций и измеримых операторов, коммутационные соотношения в этих алгебрах. На Украинском математическом конгрессе в Киеве в 2009 году Мустафа Абдурешитович был награжден памятной медалью имени М. М. Боголюбова «За высокий уровень научных результатов в области математической науки». В 2014 году был награжден премией и медалью В. И. Вернадского в области естественных наук Таврического национального университета. Автор свыше ста публикаций, среди которых монографии «Алгебры измеримых и локально измеримых операторов» (2010, в соавторстве с В. И. Чилиным), Ben-Zion Rubshtein, Genady Ya. Grabarnik, Mustafa A. Muratov, Yulia S. Pashkova Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkievicz and Orlicz Spaces (Springer, 2016). В 2016 году единогласным решением Совета факультета математики и информатики профессор М. А. Муратов был избран деканом факультета и является им в настоящее время.

5. 1999–2014 годы. Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

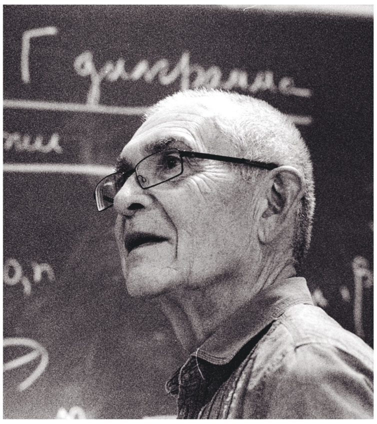
С приходом Крымской весны 2014 года начался период масштабных преобразований всей высшей школы в Крыму. Ведущие вузы региона объединились в структуре федерального университета, созданного распоряжением Правительства Российской Федерации от 4 августа 2014 года. Некогда разъединенные медицинский, агрономический, физико-математический и другие факультеты и отделения Таврического университета вновь образовали единую структуру. Крымский федеральный университет, продолжая традиции Таврического университета, становится крупным современным научным и образовательным центром России с богатой и драматической столетней историей.

На факультете математики и информатики под активным и успешным руководством декана — профессора М. А. Муратова в настоящее время ведется интенсивная работа по реорганизации учебных программ в соответствии с образовательными стандартами, созданию Совета по защите диссертаций научно-исследовательская работа, в том числе по грантам РФ, активная публикация результатов, участие в научных конференциях. Математическая наука представлена в разных областях – от классической математики и ее приложений до современных разделов теоретической информатики.

Огромное значение имеет работа с юными математиками и программистами, которую ведут преподаватели факультета в течение многих десятилетий, организованная в структурах Крымской Малой академии наук «Искатель», станции юных техников и др. Уместно напомнить, что из крымских школьников вырастали знаменитые на весь мир математики, например:

Юрий Иванович Манин — пионер программирования квантовых компьютеров. Юрий Иванович родился в Симферополе в 1937 году в семье тогдашних студентов Крымского педагогического института. В этом году ему исполнилось 80 лет, его заслуги известны всему миру.

Юрий Манин окончил 7-ю среднюю школу в Симферополе, поехал в Москву и был принят на мехмат МГУ. А сегодня Ю. И. Манин — член-корреспондент РАН, профессор Северо-западного университета США, член Общества Макса Планка в Германии и многих научных сообществ, конференций, журналов. Его математические направления широки и разнообразны: алгебра, теория чисел, алгебраическая геометрия, математическая логика, дифференциальные уравнения, сложность вычислений, квантовые компьютеры и многие другие. Он автор известной книги «Математика как метафора» и признанный популяризатор науки.



Выдающийся математик современности Ю. И. Манин, выпускник школы № 7 г. Симферополя.

Нельзя не вспомнить огромный вклад в становление и развитие Малой академии наук, многолетнюю подвижническую работу с одаренными школьниками В. Н. Касаткина.

Валентин Николаевич Касаткин (1924–1998), кандидат педагогических наук, почетный профессор Симферопольского государственного университета, в 1962 году окончил Крымский педагогический институт и работал учителем математики, а затем преподавателем пединститута. Основное направление его деятельности было связано с методикой преподавания основ вычислительной техники для школьников и популяризацией идей кибернетики. Известная во всей стране Малая академия наук школьников Крыма «Искатель» была основана в 1963 году, в решающей степени благодаря В. Н. Касаткину, а секция кибернетики была в ней наиболее популярной.

В 1974 году Валентин Николаевич защитил кандидатскую диссертацию на тему «Элементы математического аппарата в школьном курсе кибернетики». А когда в 1985 году в школьную программу был введен курс информатики, стали очень востребованы изданные им учебники «Азбука кибернетики» (1968), «Секреты кибернетики» (1971), «Введение в кибернетику» (1976), «Основы информатики и вычислительной техники. Пробное учебное пособие для 9–10 классов средней школы» (1985). «Основы информатики и вычислительной техники» (1989) и многие другие.

Валентин Николаевич Касаткин
(1924–1998),

выпускник Крымского педагогического института 1962 года, кандидат педагогических наук,
почетный профессор Симферопольского государственного университета,
президент Малой академии наук школьников Крыма «Искатель», заслуженный работник
народного образования Украины, лауреат Государственной премии Автономной Республики Крым

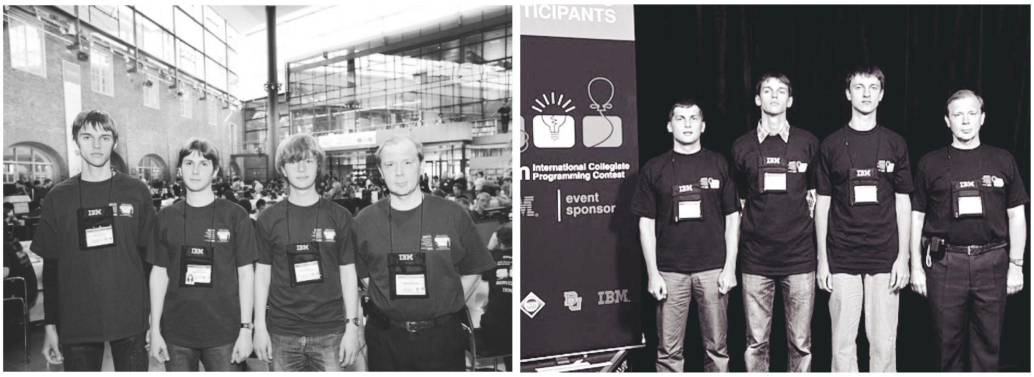
В 70-е годы Валентин Николаевич вместе с учениками МАН конструировал кибернетические устройства, имитирующие условные рефлексы животных (мышь Шеннона, шахматный автомат, черепаха Маша), а позднее занимался разработкой простейших вычислительных машин учебного назначения, реализующих алгоритмические системы Поста, Тьюринга, Маркова. За эти и другие оригинальные устройства он получил авторские свидетельства и награды ВДНХ СССР, а учебное устройство «Полигон логических структур» по заказу Министерства образования Украины пошло в серийное производство. Валентин Николаевич поддерживал тесные связи с Институтом кибернетики АН УССР и был лично знаком с ведущими учеными и педагогами.

На факультете математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского с 2000 года ведется подготовка команд для участия в студенческих чемпионатах по спортивному программированию. Тренер команд и организатор олимпиад — доцент кафедры информатики, кандидат технических наук Александр Иванович Козлов.

Подготовленные им команды из числа студентов специальностей «информатика» и «прикладная математика» достойно представляют наш университет, город и страну на всех этапах мировых и региональных первенств. Выдающиеся педагогические способности и профессиональные знания, увлеченность, самоотдача и преданность любимому делу позволили Александру Ивановичу стать одним из лучших тренеров спортивного программирования в мире.

Начиная с 2014 года университетские команды, тренируемые А. И. Козловым, ежегодно выходят в полуфинал чемпионата мира по программированию среди университетских команд ACM ICPC в регионе Северной Евразии (NEERC ICPC), который проводится в Санкт-Петербурге. Помимо этого наши программисты участвуют в соревнованиях открытого командного студенческого чемпионата Поволжья по спортивному программированию, завоевывая там призовые места (в 2016 году абсолютное 1 место, в 2017 — диплом II степени), в открытом командном студенческом чемпионате Урала, а также в финальных соревнованиях Международной олимпиады IT Планета и Honor Cup. В спортивном программировании, как и в большом спорте, чем раньше начинается подготовка, тем больше шансов на успех. Поэтому Александр Иванович не только работает со студенческими командами, но и ведет кружок по олимпиадному программированию для школьников Симферополя и районов Крыма.

Как видно из представленного очерка, крымская математика имеет богатые традиции и в научной, и в педагогической деятельности, а славная история факультета математики и информатики изобилует именами ученых, которыми можно гордиться.



Команды программистов в финале ACM-ICPC.
Стокгольм, 2009. Орландо, 2011. Справа А. И. Козлов.

Автор выражает благодарность Людмиле Петровне Банниковой за консультации и возможность использования материалов, опубликованных в [1], профессорам факультета математики и информатики, предоставившим сведения о себе и своих коллегах, а также интернет-сообществу, которому небезразлична наша история.

Список литературы

1. Банникова, Л. П. Физико-математический факультет Таврического университета (1918–1930) / Л. П. Банникова. — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. — 120 с.

   BANNIKOVA L. P. (2014) *Physics-Mathematical Faculty of the Tavrida University.* Simferopol: IT ARIAL.

2. Очерки истории Симферопольского государственного университета (1918–1993). — Симферополь: Таврида, 1993. — 415 с.

   Essays on the history of Simferopol State University (1993) . Simferopol: Tavrida.

3. История Таврического университета (1918–2003) / под общей ред. Н. В. Багрова. — К.: Лыбидь, 2003. — 248 с.

   History of the Taurida University (2003) . K.: Lybid.

4. Профессора Таврического национального университета имени В. И. Вернадского / Ред. коллегия Н. В. Багров, В. Н. Бержанский, В. В. Лавров. — К.: Лыбидь, 2007. — 172 с.

   Professors of Taurida National Vernadsky University (2007) . K.: Lybid.

УДК: 517.9:532

MSC2010: 35P05, 35P10

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ С БОЛЬШОЙ ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ

© О. А. Андронова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *o.andronova@list.ru*

Reconciliation of the theory of the operator bundles in spectral problems with the strong internal dissipation of an energy.

Andronova O. A.

Abstract. We consider the following spectral problem:

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u - \triangle u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \ (\text{ на } \Gamma), \quad K = K^* \gg 0. \tag{1}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ is an domain with Lipschitz boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The parameter $\beta > 0$ imitates the power of the internal dissipation of an energy.

The problem (1) can be reduce to study another spectral problem seeing in sum of Hilbert spaces:

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K), \ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}), \ A \gg 0. \tag{2}$$

We consider here, that $0 < A^{-1} \in \mathscr{S}_\infty(E)$.

This problem contains parameter of internal dissipation of an energy $\beta > 0$. It is found out that behavior of spectrum depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The case of strong intensity of internal dissipation is studied in the article. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates at different positive β and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements. The two methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in idefinite metric spaces can be used. The first one give that the spectrum has two branches of positive eigenvalues with limit points not only in infinity, but also in zero. Eigenfunctions answering to each branch in the case of strong intensity of internal dissipation in all range of β form basis Rissa in some Hilbert spaces.

Keywords: *Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, characteristic equation, dynamics of the eigenvalues motion.*

Введение

Термин «диссипация энергии» (лат. dissipatio) означает рассеяние, переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. п.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счете — в теплоту. Системы, в которых энергия упорядоченного движения с течением времени убывает за счет диссипации, переходя в другие виды энергии, например в теплоту или излучение, называются диссипативными. Примерами диссипативных систем являются: твердое тело, движущееся по поверхности другого при наличии трения, жидкость или газ, между частицами которых при движении действуют силы вязкости, и т. п.

Диссипативные системы формируют важный класс задач, который в настоящее время является предметом активного исследования. Главная особенность таких задач заключается в наличии механизмов «перераспределения» и выделения энергии. Взаимодействие этих двух механизмов ведет за собой появление особых режимов в системе. Рост интереса к диссипативным системам был стимулирован попыткой найти адекватные математические модели для объяснения турбулентности в жидкости, основанные на понятии аттрактора.

Настоящая работа касается исследования спектральных задач, порожденных начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Отметим, что этим исследованиям предшествовало детальное изучение эволюционных и спектральных проблем с поверхностной диссипацией энергии. Автор данной работы и его научный руководитель проф. Копачевский Н. Д. познакомились с проблемой исследования эволюции динамических систем с поверхностной диссипацией энергии на лекции проф. Чуешова И. Д. на XV Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ — 2004, Ласпи – Батилиман). Ранее и другими авторами исследовались задачи с диссипацией на границе. Так, Лагнез Дж. в работе [1] исследовал вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [2] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе.

Работы Чуешова И. Д. с соавторами и его монография (см. [3]–[4]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [3] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [4] изучается глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией. Отметим еще, что исследованием аттракторов (притягивающих множеств) динамических систем занимались многие другие ученые. Упоминаем лишь монографию Бабина А. В. и Вишика М. И. (1992), работы Ладыженской О. А. (1985), Темама (1988).

Результатом исследования линейной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии стала работа автора и его научного руководителя Копачевского Н. Д. [13]. В работе методами функционального анализа изучалась линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии, а также ее абстрактный аналог с использованием абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Рассматривались также спектральные проблемы, порожденные этими задачами. Далее, в работе [14] задача видоизменялась и исследовалась начально-краевая и спектральная задача при различной интенсивности внутренней диссипацией энергии. Оказалось, что при большой внутренней диссипации возможно применение нескольких подходов к ее исследованию: теории операторных пучков и теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Каждый из них выявляет новые эффекты локализации спектра, уточняет и дополняет утверждения о полноте и базисности корневых элементов.

1. Спектральная задача с внутренней диссипацией энергии.

Рассматривается начально-краевая задача математической физики с внутренней диссипацией энергии. Ее формулировка такова. В области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(t, x)$, для которой выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta K \frac{\partial u}{dt} - \triangle u = f(t, x)\,(\text{в}\,\Omega), \quad \beta > 0, \tag{3}$$

а также граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\,(\text{на}\,\Gamma), \quad u(0, x) = u^0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x)\ (\text{в}\,\Omega). \tag{4}$$

Здесь слагаемое $\beta K(\partial u/\partial t)$, $\beta > 0$, появляется вследствие наличия в динамической системе внутренней диссипации энергии; при $\beta = 0$ задача (3) — (4) является гиперболической, т. е. консервативной.

Далее изучаются нормальные движения системы, т. е. такие решения однородной задачи (3) — (4) без начальных условий, для которых

$$u(t, x) = exp(-\lambda t)u(x),\ x \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Тогда для амплитудных элементов $u(x)$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u - \triangle u = 0\ (\text{в}\ \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\ (\text{ на}\ \Gamma). \tag{6}$$

Далее вводятся, как и в работах [13, 14] гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $\widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} u \cdot \overline{v}\, d\Gamma$$

и $L_2(\Gamma)$, а также порождающий оператор A гильбертовой пары $\left(\widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega); L_2(\Omega)\right)$,

$$Au := -\triangle u,\ \mathscr{D}(A) := \left\{u \in \widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega) :\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma),\ \mathscr{R}(-\triangle) = L_2(\Omega)\right\}.$$

Тогда задачу (6) можно переписать в виде

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \tag{7}$$

где $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K. Далее, будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого «сравнима», с $\mathscr{D}(A)$, т. е. выполнено одно из условий: $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(K)$ либо $\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{D}(K)$. Отметим, что оператор A также обладает свойствами $A = A^* \gg 0$.

Спектральная задача (6) допускает обобщение на случай тройки пространств E, F, G и оператора следа γ, для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [6, 7]). Её формулировка такова: требуется найти элемент $u \in F$ такой, что выполнены уравнение и граничное условие:

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + L u = 0 \text{ (в } E), \quad \partial u = 0 \text{ (в } G). \tag{8}$$

Введя здесь оператор A гильбертовой пары $(F; E)$,

$$Au := Lu,\ \mathscr{D}(A) := \{u \in F :\ \partial u = 0 \text{ (в } G),\ \mathscr{R}(L) = E\} \subset F, \tag{9}$$

снова приходим к проблеме (7), рассматриваемой теперь в пространстве F.

Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + A u = 0 \text{ (в } E), \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K) \subset F. \tag{10}$$

Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (10). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Введем в (10) новый искомый элемент ζ согласно формуле $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (10) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K),\ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}), \quad A \gg 0, \tag{11}$$

которая рассматривается в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

Ранее в работе [14] было показано, что собственные значения задач (10), (11) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При $\beta = 0$ спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси.

2. Случай большой интенсивности внутренней диссипации. Сильнодемпфированный пучок

Будем теперь считать, что выполнены все условия, приведенные в постановке задачи. Рассмотрим случай большой интенсивности внутренней диссипации энергии, т. е.

$$\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(K^{1/2}) \subset \mathscr{D}(A^{1/2}). \tag{12}$$

Снова рассмотрим спектральную задачу

$$\mathscr{A}_\beta z = \lambda z, \quad z = (u;\zeta)^t \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_\beta), \tag{13}$$

$$\mathscr{A}_\beta = \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{D}(\mathscr{A}_\beta) = \mathscr{D}(K) \oplus \mathscr{D}(A^{1/2}). \tag{14}$$

При исследовании этой задачи при условиях (12), как выясняется, полезно осуществить сдвижку спектра, т. е. изучать задачу

$$\mathscr{A}_{\beta,a} z = \widetilde{\lambda} z, \quad \mathscr{A}_{\beta,a} := \mathscr{A}_\beta + a\mathscr{I}, \quad a > 0, \quad \widetilde{\lambda} := \lambda + a. \tag{15}$$

Лемма 1. *Оператор $\mathscr{A}_{\beta,a}$ является равномерно аккретивным, т. е.*

$$\operatorname{Re}(\mathscr{A}_{\beta,a} z; z)_{E^2} \geqslant a\|z\|^2, \ \forall z \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\beta,a}), \tag{16}$$

и допускает факторизацию в следующем виде

$$\mathscr{A}_{\beta,a} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iK^{-1/2}A^{1/2} \\ iA^{1/2}K^{-1/2} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Свойство (17) проверяется непосредственно. □

Введем в рассмотрение следующие операторы:

$$Q := A^{1/2}K^{-1/2}, \quad Q^+ := K^{-1/2}A^{1/2}, \quad \mathscr{D}(Q^+) := \mathscr{D}(A^{1/2}). \tag{18}$$

Лемма 2. *Операторы Q и Q^+ имеют следующие свойства:*

$$Q \in \mathscr{L}(E), \quad Q^+ = Q^*|_{\mathscr{D}(A^{1/2})}, \quad \overline{Q^+} = Q^* \in \mathscr{L}(E). \tag{19}$$

Следствием лемм 1 и 2 является такое утверждение.

Утверждение. *Оператор* $\mathscr{A}_{\beta,a}$ *допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathscr{A}_a := \overline{\mathscr{A}_{\beta,a}} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{20}$$

заданного на области определения

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}_a) := \left\{ z = (u;\zeta)^t \in E^2 : \beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathscr{D}(K^{1/2}) \right\}. \tag{21}$$

Доказательство. Как известно (см. [9], стр. 109), любой аккретивный (равномерно аккретивный) оператор допускает замыкание до максимального аккретивного (равномерно аккретивного) оператора. Из этого факта следует, во-первых, что оператор $\mathscr{A}_a$ замкнут и равномерно аккретивен, а во-вторых, он имеет ограниченный обратный оператор

$$\mathscr{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{22}$$

заданный на всем пространстве E^2. Значит, область значений $\mathscr{R}(\mathscr{A}_a)$ оператора $\mathscr{A}_a$ есть все пространство E^2, т. е. $\mathscr{A}_a$ максимален.

Отметим еще, что для элементов из $\mathscr{D}(\mathscr{A}_a)$ должно быть

$$\beta K^{1/2}u + aK^{-1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathscr{D}(K^{1/2}), \tag{23}$$

и так как $K^{-1/2}u \in \mathscr{D}(K^{1/2})$, то выполнено свойство $\beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathscr{D}(K^{1/2})$. Отметим еще, что отсюда же следует свойство $u \in \mathscr{D}(K^{1/2})$. □

Лемма 3. *Матричный оператор* $\mathscr{A}_a^{-1}$ *допускает факторизацию в форме*

$$\mathscr{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где

$$B_Q := \beta I + aK^{-1} + a^{-1}Q^*Q, \quad A_Q := aI + Q(\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*. \tag{25}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь формула

$$\begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Для ее вывода рассмотрим задачу $(\beta I + aK^{-1})u + iQ^*\zeta = u_1$, $iQu + a\zeta = \zeta_1$. Отсюда имеем:

$$u = (\beta I + aK^{-1})^{-1}(u_1 - iQ^*\zeta), \quad \zeta = a^{-1}(\zeta_1 - iQu).$$

Подставляя эти выражения в задачу выше, будем иметь, с учетом (25),

$$B_Q u = u_1 - ia^{-1}Q^*\zeta_1, \quad A_Q\zeta = -iQ(\beta I + aK^{-1})^{-1}u_1 + \zeta_1. \tag{27}$$

Отсюда, а также из соотношения $a^{-1}B_Q^{-1}Q^* = (\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*A_Q^{-1}$, которое проверяется непосредственно, следует формула (26). □

Опираясь на доказанные утверждения, рассмотрим спектральную задачу

$$\mathscr{A}_a z = \widetilde{\lambda} z, \quad z = (u;\zeta)^t \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_a), \quad \widetilde{\lambda} = \lambda + a, \tag{28}$$

порожденную задачей (15) и условиями (12).

Отметим предварительно, что задача (28) может быть преобразована также к спектральной задаче для операторного пучка С. Г. Крейна. В самом деле, из представления (20) для оператора $\mathscr{A}_a$ получаем, что задача (28) принимает вид

$$K^{1/2}\left((\beta I + aK^{-1})K^{1/2}u + iQ^*\zeta\right) = \widetilde{\lambda} u, \quad iQK^{1/2}u + a\zeta = \widetilde{\lambda}\zeta. \tag{29}$$

Проверим сначала, что эта задача при $\widetilde{\lambda} = a$, т. е. при $\lambda = 0$, имеет лишь тривиальное решение. Действительно, вводя обозначение

$$K^{1/2}u = v, \tag{30}$$

приходим к соотношениям

$$\beta v + aK^{-1}v + iQ^*\zeta = aK^{-1}v, \quad iQv = 0. \tag{31}$$

После сокращения, умножения на v и использования второго равенства получаем $\beta(v,v) = 0$, т. е. $v = 0$. Далее, так как $Q^*\zeta = 0$, то $(QQ^*)\zeta = 0$ и потому $\zeta = 0$, поскольку оператор QQ^* положителен.

Учитывая доказанный факт, осуществим в (29) замену (30) и исключим ζ. Имеем

$$(\beta I + aK^{-1})v + iQ^*\zeta = (\lambda + a)K^{-1}v, \quad \zeta = \lambda^{-1}iQv,$$

и тогда для искомого элемента $v \in E$ возникает спектральная задача

$$L_\beta(\lambda)v := (\beta I - \lambda K^{-1} - \lambda^{-1}B)v = 0, \quad B := Q^*Q \tag{32}$$

для операторного пучка С. Г. Крейна $L_\beta(\lambda)$.

Далее будем предполагать, что выполнено условие

$$Q = A^{1/2}K^{-1/2} \in \mathscr{S}_\infty(E). \tag{33}$$

Тогда в пучке С.Г. Крейна Q^*Q — компактный положительный оператор, а средний множитель в (20) равен сумме положительно определенного оператора $\mathrm{diag}(\beta I; aI)$ и компактного оператора.

Таким образом, дальнейшие свойства решений изучаемой задачи можно изучать как на основе уравнения (28) и индефинитного подхода к нему, так и на основе уравнения (32) и спектральной теории операторных пучков.

Итак, рассмотрим сначала задачу (32) при условии (33). Тогда операторные коэффициенты K^{-1} и $B = Q^*Q$ компактны и положительны. Операторный пучок $L_\beta(\lambda)$ впервые появился в работах С. Г. Крейна, а затем изучался многими авторами. В частности, результаты этого исследования отражены в параграфе 7.2 монографии [12]. Поэтому свойства решений задачи (32) сейчас будут сформулированы без доказательства.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (32) *выполнены условия*

$$0 < K^{-1} \in \mathscr{S}_\infty(E), \quad 0 < B \in \mathscr{S}_\infty(E). \tag{34}$$

Тогда решения этой задачи обладают свойствами.

1^0. *Задача* (32) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных (нормальных) собственных значений* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ *с предельными точками* ∞ *и* 0 *соответственно, причем эти ветви расположены на положительной полуоси. Кроме того, задача* (32) *может иметь также не более конечного числа невещественных собственных значений.*

2^0. *Все невещественные собственные значения, а также те вещественные собственные значения, которым отвечают не только собственные, но и присоединенные элементы, расположены в сегменте*

$$\Lambda_0 := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant (2\beta\|K^{-1}\|)^{-1}, \, |\lambda| \leqslant 2\beta^{-1}\|B\|\Big\}. \tag{35}$$

Если, в частности, выполнено условие

$$\beta^2 > 4\|K^{-1}\| \cdot \|B\|, \tag{36}$$

то $\Lambda_0 = \emptyset$ *и потому все собственные значения* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ *вещественны, положительны, им не отвечают присоединенные элементы.*

3^0. *Если выполнено условие* (36), *то собственные значения* λ_k^- *расположены на промежутке* $(0, r_-)$, *а собственные значения* λ_k^+ *— на промежутке* (r_+, ∞), *где*

$$r_\pm(\mu) := \mu\frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4\|K^{-1}\| \cdot \|B\|\mu^{-2}})}{2\|K^{-1}\|}, \quad 0 < r_- < r_+ < \infty. \tag{37}$$

4^0. *При выполнении условия* (36) *собственные элементы* $\{v_k^-\}_{k=1}^\infty$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, *образуют базис Рисса в пространстве* E, *а собственные элементы* $\{v_k^+\}_{k=1}^\infty$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$, *также образуют базис Рисса в пространстве* E.

5^0. *При выполнении условия* (36) *имеют место следующие двусторонние оценки для собственных значений* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$*:*

$$\mu^{-1}\lambda_k(B) \leqslant \lambda_k^- \leqslant \mu^{-1}\lambda_k(B)/(1-2\lambda_k(B)\|K^{-1}\|\mu^{-1}),\ k=1,2,\ldots, \tag{38}$$

$$\mu\lambda_k^{-1}(K^{-1}) - 2\mu^{-1}\|B\| \leqslant \lambda_k^+ \leqslant \mu\lambda_k^{-1}(K^{-1}), \tag{39}$$

где $\lambda_k(B)$ *и* $\lambda_k(K^{-1})$ *— собственные значения операторов* B *и* K^{-1} *соответственно. Отсюда, в частности, следуют асимптотические формулы*

$$\lambda_k^- = \mu^{-1}\lambda_k(B)[1+o(1)]\ \ (k\to\infty), \tag{40}$$

$$\lambda_k^+ = \mu\lambda_k^{-1}(K^{-1})[1+o(1)]\ \ (k\to\infty). \tag{41}$$

6^0. *Если выполнено условие* (36)*, а также, в уточнение свойств* (34)*, условия*

$$0 < K^{-1} \in \mathscr{S}_{p_K}(E), \quad 0 < B \in \mathscr{S}_{p_B}(E), \tag{42}$$

то базисы Рисса, о которых говорилось в п. 4^0*, являются p-базисами с константой*

$$p \geqslant p_0, \quad p_0^{-1} = p_K^{-1} + p_B^{-1}.$$

7^0. *Если условие* (36) *не выполнено, однако собственные значения операторов* B *и* K^{-1} *имеют степенную асимптотику, т. е.*

$$\lambda_k(K^{-1}) = c_K k^{-a}[1+o(1)], \quad \lambda_k(B) = c_B k^{-b}[1+o(1)]\ \ (k\to\infty),$$

$$c_K > 0, \quad c_B > 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

то асимптотические формулы (40)*,* (41) *сохраняются.*

8^0. *Если условие* (36) *не выполнено, то свойства базисности Рисса, о которой говорилось в* 4^0*, заменяется на свойство базисности Рисса с конечным дефектом.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Этим завершается общее рассмотрение случая большой внутренней диссипации энергии в исследуемой динамической системе с применением теории операторных пучков. Здесь установлено, в частности, что происходит новая перестройка спектра задачи. Более точные свойства спектра и системы корневых элементов зависят от интенсивности внутренней диссипации. Ранее было показано, что если диссипация в динамической системе достаточно мала, то спектр задачи (10) локализован в окрестности мнимой оси, а корневые элементы имеют свойства двукратной полноты и двукратной базисности по Абелю–Лидскому. В случае средней интенсивности внутренней диссипации спектр задачи локализован в окрестности положительной полуоси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы задачи образуют полную систему либо базис Абеля – Лидского в пространстве E^2. В рассмотренном в данной статье случае большой внутренней диссипации происходит новая перестройка спектра задачи, он имеет две положительных ветви собственных значений с предельными точками не только на бесконечности, но и в нуле. Таким образом, в динамической системе имеются не только как угодно быстро затухающие апериодические нормальные движения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k^+ \to +\infty$, $(k \to \infty)$ и множителям $\exp(-\lambda_k^+ t)$, но и как угодно медленно затухающие, отвечающие собственным значениям λ_k^- и множителям $\exp(-\lambda_k^- t)$, $\lambda_k^- \to +0\,(k \to \infty)$. Собственные элементы , отвечающие каждой ветке, образуют базис Рисса в пространстве E.

Дополнить и уточнить эти результаты может применение теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Результаты применения этого подхода будут отражены в последующих публикациях автора.

Автор благодарит проф. Н. Д. Копачевского за помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. LAGNESE, J. (1983) Decay of the solution of the wave equation in a bounded region wiyh boundary dissipation. *J. Diff. Equations.* 50. p. 163–182.
2. LASIECKA, I. & TARATU, D. (1993) Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation. *Diff. Integral Equations.* 6. p. 507–533.
3. CHUESHOV, I.& ELLER, M. & LASIECKA, I. (2004) Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation. *Comunications in Partial Differential Equations.* 29 (11–12). p. 1847–1876.
4. CHUESHOV, I.& LASIECKA, I. (2004) Global attractors for von Karman evolutions with a nonliner boundary dissipations. *J. Diff. Equations.* 198. p. 196–231.
5. CHUESHOV, I. (2006) *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems.* Kharkov: Acta. http://www.emis.de/monographs/Chueshov
6. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский // Украинский математический вестник. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 69–97.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces, abstract boundary value and spectral and problems. *Ukrainian mathematical Herald.* Vol. 1, No 1. p. 69–97.
7. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2004. — № 2. — С. 52–80.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces and it's applications in Stock's problem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* No 2. p. 52–80.

8. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   GOHBERG, I. (1965) *Introduction in the theory of liner selfadjoint operators.* Moscow: Nauka.

9. Копачевский, Н. Д. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   KOPACHEVSKY, N. and KREIN, S. (1967) *Linear differential equations in Banach space.* Moscow: Nauka.

10. Крейн, С. Г. Функциональный анализ. Серия «Справочная математическая библиотека» / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

    KREIN, S. (1972) *Functional analysis. Series "Mathematical Reference library".* Moscow: Nauka.

11. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

    MARKUS, A. (1986) *Introduction in the spectral theory of polynomial operator bundles.* Kishenev: Shiintsa.

12. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Зуй Кан. Нго. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

    KOPACHEVSKY, N. and KREIN, S. and Ngo, Z. (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

13. Андронова, О. А., Копачевский, Н. Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // О. А. Андронова, Н. Д. Копачевский / Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Том 29. — С. 11–28.

    ANDRONOVA, O. and KOPACHEVSKY, N. (2008) About liner problems with surface dissipation of an energy. *Modern mathematics. Fundamental direction.* Vol. 29. p. 11–28.

14. Андронова, О. А. / Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии // / О. А. Андронова. — Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия «Математика. Механика. Информатика и Кибернетика», 2009. — Т. 22 (61).1. — С. 1–13.

    ANDRONOVA, O. (2009) Boundary-value and spectral problems with surface and initial dissipation of an energy. *Scientific notes of Tavrida National University named after V. I. Vernadsky, series Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics.* Vol. 22(61).1. p. 1-13.

УДК: 517.9

MSC2010: 37D05

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ Ω-УСТОЙЧИВОГО ПОТОКА С СЕДЛОВОЙ СВЯЗКОЙ НА СФЕРЕ[1]

© А. А. Босова, В. Е. Круглов, О. В. Починка

Высшая школа экономики
факультет информатики, математики и компьютерных наук
ул. Большая Печёрская, 25/12, Нижний Новгород, Нижегородская обл., 603155, Росийская Федерация
e-mail: *aabosova@edu.hse.ru; kruglovslava21@mail.ru, olga-pochinka@yandex.ru*

Energy function for an Ω-stable flow with a saddle connection on a sphere.

Bosova A. A., Kruglov V. E., Pochinka O. V.

Abstract. In this paper the class of simplest not rough Ω-stable flows on a sphere is considered. We call simplest not rough Ω-stable flow an Ω-stable flow with least number of fixed points, a single separatrix connecting saddle points and without limit cycles. For such flows we design the Morse energy function.

Well known that the Morse-Smale flows, introduced for the first time on a plane by A. A. Andronov and L. S. Pontryagin have finite number of hiperbolic fixed points and closed trajectories, and its non-wandering set does not contain other elements. Besides, such flows does not have separatrices connecting saddle points.

Morse-Smale flows which does not have limit cycles (they are called the gradient-like flows), as Smale showed, in suitable metrix they are gradient-like flows generated by some Morse function. Then this function decrease along non-singular trajectories of a flow and its fixed points are exactly the fixed points of a flow. Thus, it was the first example of designing so called energy function for a dynamical system, i.e a smooth function decreasing along wandering trajectories and whose singular points set is equal with the non-wandering set of a system.

K. Meyer generalised the Smale's result and constructed energy function for an arbitrary Morse-Smale flow. As such flow has periodic trajectories in general case, an energy function could not be a Morse function but its generalization – a Morse-Bott function with points of first degeneracy degree along limit cycles.

In this work we make a first step to generalise Meyer's results to flows which are not structural stable. Precisely, we consider the class of simplest Ω-stable flows with separatrices connecting saddle points on a two-dimensional sphere and we show that any such flow has its Morse energy

---

[1] Построение глобальной энергетической функции выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041) в 2017 году, построение локальной энергетической функции выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а).

function. Obviously, this work is going to be a foundation for next generalisation of Smale's and Meyer's results.

Let us denote by S^2 a two-dimensional sphere with a metric d and by G the class of Ω-stable flows f^t on S^2 whose non-wandering set consists of six fixed points: two sinks ω_1 and ω_2, two sources α_1 and α_2 and two seddle points σ_1 and σ_2 with a common connecting separatrix.

Theorem 1. *There is energy Morse function for each flow from the class G.*

Keywords: *energy function, Ω-stable flow, not rough one, simplest one, saddle connection*

Введение

Хорошо извесно, что потоки Морса – Смейла, впервые введённые на плоскости в работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], обладают конечным числом гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий, составляющих всё неблуждающее множество системы, и не имеют *связок* — траекторий, соединяющих седловые точки. Те из них, которые не имеют предельных циклов — *градиентно-подобные потоки*, как показал С. Смейл [5], в подходящей метрике являются градиентными потоками, порождёнными некоторой функцией Морса. Тогда эта функция убывает вдоль неособых траекторий потока, а её критические точки — в точности неподвижные точки потока. Таким образом, это был первый пример построения так называемой *энергетической функции* для динамических систем — гладкой функции, убывающей вдоль блуждающих траекторий и имеющей множество критических точек, совпадающее с неблуждающим множеством системы.

К. Мейер [3] обобщил результат С. Смейла и построил энергетическую функцию для произвольного потока Морса – Смейла. В силу наличия у такого потока в общем случае периодических траекторий, энергетическая функция уже не могла быть функцией Морса, а являлась её обобщением — функцией Морса – Ботта, имеющей точки первой степени вырождения вдоль предельных циклов.

В настоящей работе мы делаем первый шаг в обобщении результатов С. Смейла на негрубые потоки. Именно, мы рассматриваем класс простейших Ω-устойчивых потоков с седловыми связками на двумерной сфере и показываем, что любой такой поток обладает энергетической функцией Морса. Очевидно, что эта работа явится фундаментом для дальнейшего обобщения результатов С. Смейла и К. Мейера.

1. Формулировка результатов

Напомним, что *гладким потоком* на многообразии M называется гладкое отображение

$$f\colon M \times \mathbb{R} \to M$$

со свойствами

$$1) f(x,0) = x,\ x \in M;$$

$$2) f(f(x,t),s) = f(x,t+s),\ x \in M, t \in \mathbb{R};$$

обозначим его $f(x,t) = f^t(x)$.

Множество $\mathscr{O}_x = \{f^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ называется *траекторией* или *орбитой* точки x. Точка x является неподвижной, если её траектория содержит только саму точку x. Траектории полагают ориентированными в направлении возрастания параметра t.

Для потока f^t точка x называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек потока f^t называется его *неблуждающим множеством.*

Поток называется Ω-*устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$ такая, что если некоторый поток $\phi^t \in U(f^t)$, то существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, переводящий неблуждающие траектории потока f^t в неблуждающие траектории потока ϕ^t с сохранением направления движения по траекториям.

Из критерия Ω-устойчивости [4] следует, что Ω-устойчивый поток имеет неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа замкнутых траекторий (или предельных циклов). У каждой неподвижной точки p Ω-устойчивого потока существует *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия, будем их обозначать W^s_p и W^u_p, выделяемые условиями:

$$W^s_p = \{x \in M \mid d(f^t(x),p) \to 0, t \to \infty\},$$

$$W^u_p = \{x \in M \mid d(f^t(x),p) \to 0, t \to -\infty\}.$$

В зависимости от размерности неустойчивого многообразия $dim\ W^u_p$ неподвижные гиперболические точки потока f^t делятся на три типа: источники ($dim\ W^u_p = dim\ M$), стоки ($dim\ W^u_p = 0$) и седла ($0 < dim\ W^u_p < dim\ M$).

Обозначим через S^2 двумерную сферу с метрикой d и G класс Ω-устойчивых потоков f^t класса гладкости C^2 на сфере S^2, неблуждающее множество которых состоит из шести неподвижных точек: двух стоков ω_1 и ω_2, двух источников α_1 и α_2, а также двух седел σ_1 и σ_2, имеющих общую сепаратрису — связку (см. Рис. 1).

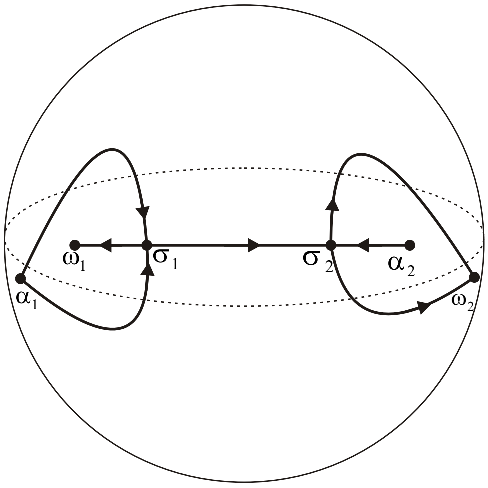


Рис. 1. Фазовый портрет потока из класса G

Теорема 1. *Для любого потока в классе G существует энергетическая функция Морса.*

2. Построение энергетической функции

Пусть поток f^t принадлежит классу G. Чтобы было проще говорить об аналогичных конструкциях для разных неподвижных точек потока, создадим дополнительные обозначения: $\omega_2 = \beta_{0,2}$, $\omega_1 = \beta_{0,1}$, $\sigma_2 = \beta_{1,2}$, $\sigma_1 = \beta_{1,1}$, $\alpha_2 = \beta_{2,2}$, $\alpha_1 = \beta_{2,1}$. Вначале построим локальные энергетические функции в окрестностях неподвижных точек так, чтобы в источниковых точках функция равнялась $a_{2,1} = a_{2,2} = 9$, в стоковых – $a_{0,1} = a_{0,2} = 0$, в σ_1 и σ_2 – $a_{1,1} = 6$ и $a_{1,2} = 3$ соответственно. Затем соединим локальные энергетические функции в глобальную. Разобьем детальные построения на шаги.

1. Поскольку $\beta_{j,i}$ — гиперболическая неподвижная точка потока f^t, то в локальных координатах $X = (x, y)$ касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид

$$\dot{X} = A_{j,i}X + g_{j,i}(X),$$

где $A_{i,j}$ — матрица с собственными значениями с ненулевой действительной частью и $g_{j,i}(0) = dg_{j,i}(0) = 0$. Согласно теории Ляпунова (смотрите, например, [6]), существуют симметрические матрицы $B_{j,i}$ и $C_{j,i}$ такие, что квадратичная форма $w_{j,i}(X) = X^TB_{j,i}X$ положительно определена, а квадратичная форма $v_{j,i}(X) = X^TC_{j,i}X$ невырождена, при этом $A^T_{j,i}C_{j,i}+C_{j,i}A_{j,i} = -B_{j,i}$. Тогда существует окрестность $U_{j,i}$ неподвижной точки $\beta_{j,i}$, в которой функция

$$\varphi_{j,i}(X) = a_{j,i} + v_{j,i}(X)$$

является энергетической функцией Морса для потока f^t. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестности $U_{j,i}$ попарно не пересекаются для различных j, i.

2. Выберем число $r \in (0,1)$ так, чтобы $[9-r, 9] \subset \varphi_{j,i}(U_{2,i})$ для источников α_i, $[0,r] \subset \varphi_{0,i}^{-1}(U_{0,i})$ для стоков ω_i и $[a_{1,i} - r, a_{1,i} + r] \subset \varphi_{1,i}(U_{1,i})$ для седла $\sigma_i, i = 1, 2$. Положим $U_{\alpha_i} = \varphi_{2,i}^{-1}([9-r, 9])$ и $U_{\omega_i} = \varphi_{0,i}^{-1}([0, r])$. В качестве окрестности U_{σ_i} седловой точки σ_i выберем криволинейный восьмиугольник, четыре стороны которого лежат на четырех компонентах связности линий уровня $\varphi_{1,i}^{-1}(a_{1,i} \pm r)$, а остальные четыре лежат на различных траекториях потока f^t (см. Рис. 2).

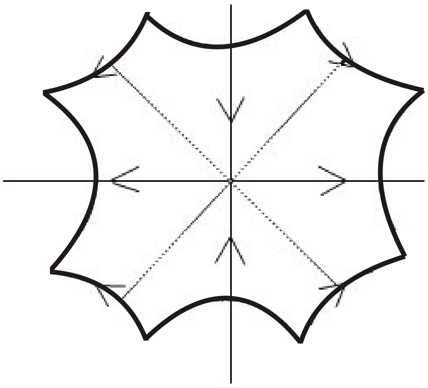


Рис. 2. Окрестность U_{σ_i}, $i = 1, 2$

По построению множество $\varphi_{1,i}^{-1}(a_{1,i} \pm r) \cap \partial U_{\sigma_i}$ состоит из двух дуг $\delta_{i\pm}^1, \delta_{i\pm}^2$, при этом будем считать, что обозначения выбраны так, что $\delta_{1-}^1 \subset W_{\omega_1}^s, \delta_{2+}^2 \subset W_{\alpha_2}^u$. Построим на множестве $S^2 \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup U_{\omega_1} \cup U_{\omega_2})$ гладкие замкнутые попарно непересекающиеся кривые

$$\gamma_{6+r},\ \gamma_{6-r}^1,\ \gamma_{6-r}^2,\ \gamma_{3+r}^1,\ \gamma_{3+r}^2,\ \gamma_{3-r}$$

со следующими свойствами:

1) каждая из кривых либо не пересекается с траекторией потока, либо пересекает эту траекторию в единственной точке;

2) $(\delta_{1+}^1 \cup \delta_{1+}^2) \subset \gamma_{6+r}$, $\delta_{1-}^1 \subset \gamma_{6-r}^1$, $\delta_{1-}^2 \subset \gamma_{6-r}^2$;

3) $\delta_{2+}^1 \subset \gamma_{3+r}^1$, $\delta_{2+}^2 \subset \gamma_{3+r}^2$, $(\delta_{2-}^1 \cup \delta_{2-}^2) \subset \gamma_{3-r}$.

Проведем построение кривой γ^2_{3+r}, для остальных кривых построения аналогичные. Обозначим через b_1, b_2 граничные точки дуги δ^2_{2+}. Пусть $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ значения времени такие, что $b_1^0 = f^{-t_1}(b_1) \in \partial U_{\alpha_2}$ и $b_2^0 = f^{-t_2}(b_2) \in \partial U_{\alpha_i}$. Обозначим через $[b_1^0, b_2^0]$ дугу окружности ∂U_{α_2}, ограниченную точками b_1^0 и b_2^0 и не пересекающую $W^s_{\sigma_1}$. Для любых точек $z_1, z_2 \in [b_1^0, b_2^0]$ обозначим через $[z_1, z_2]$ дугу окружности ∂U_{α_2}. Для любой точки $z \in [b_1^0, b_2^0]$ обозначим через ℓ_z длину дуги $[b_1^0, z]$. Положим $L = \ell_{b_2^0}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что на отрезке $[0, L]$ в односторонних ε-окрестностях точек 0 и L корректно определена C^2-гладкая функция τ_1 формулой

$$f^{\tau_1(\ell_z)}(z) \in \varphi_{1,2}^{-1}(3+r).$$

Определим функцию τ_2 на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_2(\ell) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{L}\ell.$$

Обозначим через $\psi : [0, L] \to [0, 1]$ C^2-гладкую функцию такую, что $\psi = 0$ в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестностях точек 0 и L, $\psi = 1$ вне ε-окрестностей этих точек. Определим функцию τ_3 на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_3(\ell) = \psi(\ell)\tau_2(\ell) + (1 - \psi(\ell))\tau_1(\ell).$$

Положим $\gamma^2_{3+r} = \delta^2_{2+} \cup \{f^{\tau_3(\ell_z)}(z), z \in [b_1^0, b_2^0]\}$.

3. Введем следующие обозначения для подмножеств множества $S^2 \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup U_{\omega_1} \cup U_{\omega_2} \cup U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2})$ (см. Рис. 3):

- V_{ω_1} — двумерное кольцо, ограниченное окружностями ∂U_{ω_1} и γ^1_{6-r};
- V_{α_1} — двумерное кольцо, ограниченное окружностями ∂U_{α_1} и γ_{6+r};
- V_{ω_2} — двумерное кольцо, ограниченное окружностями ∂U_{ω_2} и γ_{3-r};
- V_{α_2} — двумерное кольцо, ограниченное окружностями ∂U_{α_2} и γ^2_{3+r};
- $V_{\sigma_1\sigma_2}$ — двумерное кольцо, ограниченное окружностями γ^2_{6-r} и γ^1_{3+r}.
- $V_{\alpha_1\omega_1}$ — двумерный диск, ограниченный γ_{6+r}, γ^1_{6-r} и ∂U_{σ_1}.
- $V_{\alpha_2\omega_2}$ — двумерный диск, ограниченный γ^2_{3+r}, γ_{3-r} и ∂U_{σ_2}.
- $V_{\alpha_1\sigma}$ — двумерный диск, ограниченный γ^2_{6-r}, γ_{6+r} и ∂U_{σ_1}.
- $V_{\omega_2\sigma}$ — двумерный диск, ограниченный γ^1_{3+r}, γ_{3-r} и ∂U_{σ_2}.

Определим искомую энергетическую функцию φ на границах перечисленных колец и дисков следующим образом: $\varphi(\partial U_{\omega_i}) = r$, $\varphi(\gamma^i_{6-r}) = 6 - r$, $\varphi(\gamma_{6+r}) = 6 + r$, $\varphi(\gamma^i_{3+r}) = 3 + r$, $\varphi_{\gamma_{3-r}} = 3 - r$, $\varphi(\partial U_{\alpha_i}) = 9 - r$, $i = 1, 2$. Продолжим функцию φ внутрь каждого кольца и диска по траекториям. Объясним построение на кольце V_{α_2} и на диске $V_{\alpha_2\omega_2}$, для остальных колец и дисков построение аналогичное.

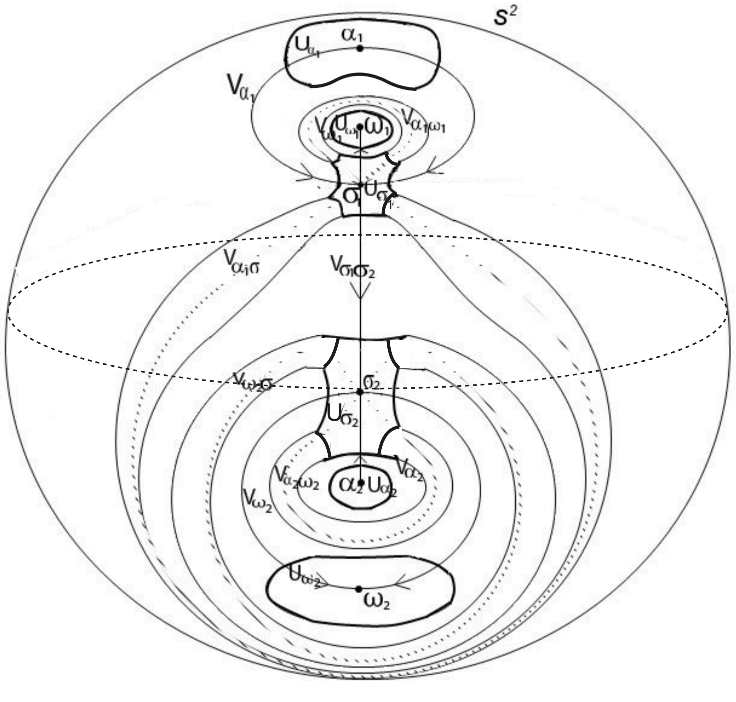


Рис. 3. Сфера S^2, фазовый портрет потока f^t, окрестности неподвижных точек и разбиение сферы на области линиями уровня функции φ

На кольце V_{α_2} для любой точки $z \in \partial U_{\alpha_2}$ существует время $t_z > 0$ такое, что $f^{t_z}(z) \in \gamma^2_{3+r}$. Для любого $t \in [0, t_z]$ положим

$$\varphi(f^t(z)) = (9 - r) + \frac{t}{t_z}(2r - 6).$$

На диске $V_{\alpha_2\omega_2}$ согласно пункту 2 определена функция τ_4 на отрезке $[0, L]$ такая, что

$$\gamma_{3-r} \cap V_{\alpha_2\omega_2} = \{f^{\tau_4(\ell_z)}(z), z \in [b^0_1, b^0_2]\},$$

где $\tau_4(\ell_z) > \tau_3(\ell_z)$ для любого $z \in [b^0_1, b^0_2]$. На криволинейных прямоугольниках $\Pi_1 = \{0 \le \ell \le \varepsilon, \tau_3(\ell) \le t \le \tau_4(\ell)\}$, $\Pi_2 = \{L - \varepsilon \le \ell \le L, \tau_3(\ell) \le t \le \tau_4(\ell)\}$ корректно определена C^2-гладкая функция ϕ_1 формулой

$$\phi_1(\ell_z, t) = \varphi_{1,2}(f^t(z)).$$

Определим функцию ϕ_2 на прямоугольнике $\Pi = \{0 \le \ell \le L, \tau_3(\ell) \le t \le \tau_4(\ell)\}$ формулой

$$\phi_2(\ell, t) = 3 + r - 2r\frac{t - \tau_3(\ell)}{\tau_4(\ell) - \tau_3(\ell)}.$$

Обозначим через $\Psi : \Pi \to [0,1]$ C^2-гладкую функцию такую, что $\Psi = 0$ на прямоугольниках $\{0 \leq \ell \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tau_3(\ell) \leq t \leq \tau_4(\ell)\} \cup \{L - \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell \leq L, \tau_3(\ell) \leq t \leq \tau_4(\ell)\}$ и $\Psi = 1$ вне $\Pi_1 \cup \Pi_2$. Определим функцию ϕ_3 на Π формулой

$$\phi_3(\ell, t) = \Psi(\ell, t)\phi_2(\ell, t) + (1 - \Psi(\ell, t))\phi_1(\ell, t).$$

Положим

$$\varphi(f^t(z)) = \phi_3(\ell_z, t).$$

4. Построенная функция является гладкой всюду, кроме, возможно, точек линий уровня $\varphi^{-1}(6 \pm r)$, $\varphi^{-1}(3 \pm r)$, где она в общем случае является лишь непрерывной. Стандартной процедурой переопределения значений функции в некоторой окрестности этих линий уровня можно построить C^2-гладкую функцию (см., например, [2], лемма 4.1), которая является искомой энергетической функцией.

Список литературы

1. Андронов, А. А., Понтрягин, Л. С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247–250.

   ANDRONOV, A. A. and PONTRYAGIN, L. S. (1937) Rough systems. *Reports of the Academy of Sciences of USSR.* Vol. 14, No. 5. p. 247–250.

2. Гринес, В. З., Починка, О. В. Построение энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2017. — Т. 63, № 2. — С. 191–222.

   GRINES, V. Z. and POCHINKA, O. V. (2017) Construction of Energetic Functions for Ω-Stable Diffeomorphisms on 2- and 3-Manifolds. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* Vol. 63, No. 2. p. 191–222.

3. MEYER, K. R. (1968) Energy function for Morse-Smale systems. *American Journal of Mathematics.* Vol. 90, No 4. p. 1031–1040.

4. PUGH, C. and SHUB, M. (1970) The Ω-stability theorem for flows. *Inventiones Math.* Vol. 11. p. 150–158.

5. SMALE, S. (1961) On gradient dynamical systems. *Annals of Mathematics.* Vol. 74. p. 199–206.

6. Валеев, К. Г., Финин, Г. С. Построение функций Ляпунова. — Киев.: Наукова думка, 1981. — 412 с.

   VALEEV, K. G. and FININ, G. S. (1981) *Liapunov functions constructing.* Kiev: Naukova dumka.

УДК: 519.7
MSC2010: 97P20

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗ ДАННЫХ: ПОДХОД НА ОСНОВЕ РЕШАЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ И ЛЕСОВ

© В. И. Донской

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
пр-т. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *vidonskoy@mail.ru*

Extraction Optimization Models from Data: an Approach based on Decision Trees and Forests.

Donskoy V. I.

Abstract. Evolution of mathematical methods of classification and regression based on building decision trees and forests allowed to apply these methods to solve more complex problems of non-classical information modeling — retrieval models selection of the best solutions from the data. In this approach, a mathematical model is not specified a priori but is synthesized automatically based on the available empirical information. The properties of the classification algorithms and regression based on building decision trees and forests, providing the possibility of automatic extraction of both linear and non-linear models that implement a piecewise approximation of the objective functions and surfaces, separating admissible and inadmissible (not satisfying the constraints) solutions. In this paper we developed two approaches to the synthesis of models of solutions choice from the empirical data. The first approach involves the synthesis of 'joint' model of decision tree that implements both the regression and the classification of decision variants onto admissible and inadmissible. The second approach involves building a separate models: regression tree to approximate the objective function and classification tree for selection of admissible solutions.The approach based on extraction from data separately the model of the objective function and the model of admissible solution region allows to use as a regression model any known models appropriative for this goal. It may be random forests, bagging and boosting regression forests, regression equations (if one have the appropriate additional a priori information), or a neural networks.

Classification decision trees allow to obtain a logical description of area of admissible solutions in the form of disjunctive normal form (DNF) over the selected set of the featured predicates. The paper shows how it is possible to make more exact the construction of these DNF if instead a single decision tree use decision forest based on areas of competence or through the use of the so-called 'full' decision tree.

Received the article the results are intended for use in the development of intelligent control algorithms and they present theoretical basis of Building Optimization Models from Data (named BOMD information technology).

Keywords: *Building Optimization Models from Data, Decision Trees, Decision Forests, BOMD technology*

Введение

Классическое математическое моделирование предполагает знание физических свойств и закономерностей моделируемых объектов. Эти знания, как правило, представляются уравнениями, которые объединяются в некоторую систему и решаются численно с целью получения требуемых характеристик и изучения свойств объектов. Такой подход хорошо зарекомендовал себя при исследовании и усовершенствовании физических и технических систем. Однако его применение, например, в экономике зачастую не даёт желаемых результатов, поскольку сложные экономические системы плохо поддаются аналитическому описанию. Априорный выбор «подходящей» математической модели может оказаться субъективным и неудачным. Такая ситуация обычно имеет место при попытках моделирования плохо формализованных систем.

Существует и другой подход — *неклассическое информационное моделирование*[1]*, основанное на построении или, можно сказать точнее, «извлечении» моделей из данных, которые представляют собой главным образом массивы наблюдений-прецедентов над рассматриваемым объектом или системой* [14, 6, 20, 4, 38, 24, 45].

Исторически первыми были решены задачи построения информационных моделей классификации, регрессии, формирования понятий, которые оказались широко востребованными для применения в различных интеллектуализированных (в частности, робототехнических) системах [32, 1, 3, 19, 13, 23]. Большое значение для развития указанного направления имели фундаментальные работы академика Ю. И. Журавлёва [13, 14] и учёных его научной школы [20, 4, 23, 33]. Дальнейшее усовершенствование информационных моделей потребовало разработки математических методов и алгоритмов *автоматического выбора наилучших* (*оптимальных*) *вариантов решений на основе имеющихся и пополняющихся массивов данных.*

Естественным шагом в направлении построения таких моделей выбора решений на основе данных явился подход, основанный на распознавании классов состояний объектов, их оценки и вычислении наилучшего варианта преобразования объекта.

---

[1] Этот термин принадлежит академику К. В. Рудакову, объясняющему его не только как научное направление, но и как подход к решению широчайшего круга прикладных задач — от медицины и социологии до биржевого управления.

Формально реализация такого подхода соответствует решению некоторой математической задачи оптимизации, которую нужно либо сначала построить, а потом решить, либо получить наилучшее решение в процессе выполнения последовательности некоторых итераций.

Методы моделирования плохо формализуемых ограничений в задачах оптимизации с помощью процедур распознавания образов впервые были представлены в работах Вл. Д. Мазурова [16, 17] и затем обобщены в монографии [12]. Дискретные модели выбора наилучших решений на основе прецедентной информации разрабатывались в статьях [8, 11] и в монографии [7]. Различным аспектам информационного оптимизационного моделирования посвящены работы [2, 10, 15, 22, 25, 26, 28], в частности, линейному моделированию — работы [9, 21]. В статье [9] также представлен подход к оцениванию синтезированных моделей на основе колмогоровской теории сложности.

Цель данной работы — дать достаточно полное изложение принципов, лежащих в основе подхода к моделированию выбора наилучших решений путём извлечения оптимизационных моделей из данных, главным образом основываясь на применении решающих деревьев и лесов.

1. Основные определения и постановка задачи

Будем обозначать $X^n = M_1 \times \cdots \times M_i \cdots \times M_n$ — пространство признаков; n — его размерность; $\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ — произвольную точку в пространстве признаков, являющуюся описанием допустимого объекта.

Каждая координата описания объекта x_i, $i = 1, \ldots, n$, принадлежит некоторому зафиксированному *ограниченному множеству допустимых значений* M_i.

$\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_L$ — набор зафиксированных множеств — классов допустимых объектов: $\mathfrak{M}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{M}_L = X^n$; L — число классов. В рамках данной статьи полагается,что классы не пересекаются: $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M}_p = \emptyset, \;\; j \neq p; \;\; j, p \in \overline{1, L}$.

$\mathfrak{T}_{Cl} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j)\}_{j=1}^{l}$ — обучающая выборка для задачи классификации; $\tilde{a}_j = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \in X^n$; γ_j — номер одного из классов $\{\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_L\}$, которому принадлежит точка $\tilde{a}_j$; l — длина выборки.

Задача обучения классификации Z_f состоит в синтезе по обучающей информации $\{(\tilde{a}_j, \gamma_j)\}_{j=1}^{l}$ решающего правила (классифицирующей функции) $\hat{f} : X^n \to \{1, \ldots, L\}$, позволяющей для любой допустимой точки $\tilde{x} \in X^n$ вычислить номер класса $\hat{f}(\tilde{x})$, которому эта точка принадлежит. При этом полагается, что существует истинная (но не известная точно) классифицирующая функция f, и требуется синтезировать её аппроксимацию $\hat{f}$ как можно более близкую к неизвестной функции f. Например, стремясь обеспечить как можно меньшей величину вероятности события $[\hat{f}(\tilde{x}) \neq f(\tilde{x})]$ на множестве X^n, если полагается существование вероятностной меры на X^n.

$\mathfrak{T}_{Opt} = \{(\tilde{a}_j, \gamma_j, y_j)\}_{j=1}^{l}$ — аналогичная достоверная выборка[2] для *задачи обучения выбору решения на основе частичной информации о некотором скалярном критерии* $F : X^n \to \mathbb{R}$ *и ограничениях в виде* $\Omega(\tilde{x}) = 1$. В этой задаче, *обозначаемой далее* $Z_{\Omega,F}$, полагается, что множество X^n разбито только на два класса: класс $\mathfrak{M}_1$ состоит из точек, заведомо удовлетворяющих некоторой системе ограничений задачи наилучшего выбора, и класс $\mathfrak{M}_0$, содержащий точки, заведомо не удовлетворяющие этой системе ограничений. Будем обозначать $\Omega : X^n \to \{0; 1\}$ — *характеристическую функцию ограничений, которая частично задана обучающей выборкой*; $\Omega(\tilde{x}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{M}_1$; $\Omega(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} \in \mathfrak{M}_0$. Поэтому в обучающей выборке $\mathfrak{T}_{Opt}$ $\gamma_j = \Omega(\tilde{a}_j),\ \gamma_j \in \{0; 1\},\ y_j = F(\tilde{a}_j)$.

В процессе обучения следует построить правило (алгоритм), позволяющее выбрать такое решение $\tilde{x}^*$, чтобы оно удовлетворяло ограничениям ($\Omega(\tilde{x}^*) = 1$), и значение $F(\tilde{x}^*)$ было бы как можно большим (или меньшим — по смыслу задачи).

В рассматриваемых задачах критерий F *и ограничения (характеристическая функция* Ω*) не заданы точно — ни аналитически, ни полностью таблично, ни при помощи какой-либо формальной системы. Они «отражены» в наборе данных* $\mathfrak{T}_{Opt}$ *и являются частично заданными.*

Постановка задачи, решаемой в данной статье, состоит в следующем. Требуется, используя частичную начальную информацию $\mathfrak{T}_{Opt}$, выбрать решение $\hat{\tilde{x}}^*$ как более близкое к оптимальному решению $\tilde{x}^*$, определяемому неизвестными, но существующими истинными объектами F и Ω. Схематически поставленную задачу можно представить следующим образом:

$$\mathfrak{T}_{Opt} \xrightarrow{\mathscr{A}} \hat{\tilde{x}}^* : \|\hat{\tilde{x}}^* - \tilde{x}^*\| \to min; \quad \tilde{x}^* = argmin\ F(\tilde{x}) \mid \Omega(\tilde{x}) = 1,$$

где $\| \cdot \|$ — заданная в признаковом пространстве норма, $\mathscr{A}$ — искомый алгоритм решения задачи (предполагается алгоритмический подход к её решению).

Если скалярный критерий и характеристическая функция ограничений аппроксимируются независимо друг от друга отдельными алгоритмами, вычисляющими как

---

[2] Требование достоверности или безошибочности обучающей выборки определяется детерминистским подходом к проблеме, рассматриваемой в данной статье. Это связно с предположением, что рассматриваемые объекты являются регулярными и допускают получение корректной информации об их функционировании. Методы стохастического информационного моделирования лежат за рамками рассматриваемого подхода.

можно более точные в каком-либо смысле приближения $\hat{F}$ и $\hat{\Omega}$, то *восстановленная по обучающей выборке задача нахождения наилучшего решения имеет следующий вид*:

$$max(min)\ \hat{F}(\tilde{x}) : \hat{\Omega}(\tilde{x}) = 1 \wedge \tilde{x} \in X^n.$$

Полученная в результате машинного обучения пара функций $< \hat{F}, \hat{\Omega} >$ называются *эмпирической информационной моделью.*

Известен и другой подход к решению поставленной задачи, основанный на итерационном выборе точки $\hat{\tilde{x}}^*$ как можно более близкой к оптимальной точке $\tilde{x}^*$. Первый (*синтетический*) и второй (*итерационный*) подходы иллюстрируются следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T}_{Opt} \arrow[rr, "\text{Итерационный алгоритм}"] \arrow[dr, "\text{Синтез функций}"'] & & \hat{\tilde{x}}^* \\
& \hat{F}, \hat{\Omega} \arrow[ur, "\text{Решение оптимизационной задачи}"'] &
\end{tikzcd}$$

В этой статье рассматривается первый, синтетический подход к выбору решений на основе данных — эмпирической (прецедентной) информации $\mathfrak{T}_{Opt}$ *— с использованием методов обучения, основанных на построении решающих деревьев и лесов.*

2. Решающие деревья и леса в задачах синтеза целевых функций и ограничений

Решающие деревья (РД) и составленные из них ансамбли — решающие леса — широко применяются в задачах машинного обучения, распознавания, формирования понятий и построения регрессии [37, 18]. Отдельные РД порождают решающие правила, эквивалентные разбиению пространства X^n на области, границы которых определяются выбранными признаковыми предикатами. Решающие леса порождают разнообразные, чаще всего взвешенные, композиции таких правил.

Подчеркнём одно важное преимущество РД по сравнению с другими методами. Если решающее дерево по своей структуре является бинарным (из каждой его внутренней вершины выходит ровно два ребра), то такое бинарное решающее дерево (БРД) является легко «прочитываемым» алгоритмом, *точное логическое описание* которого может быть представлено в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) над признаковыми предикатами. Поэтому БРД можно и очень удобно использовать для того, чтобы синтезировать приближённое описание $\hat{\Omega}$ области допустимых решений Ω в виде ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$ по данным $\mathfrak{T}_{Opt}$.

С целью повышения точности в задачах машинного обучения используют ансамбли РД, называемые *решающими лесами.* В большинстве случаев решения (результаты классификации или некоторые прогнозируемые значения), полученные отдельными деревьями леса, суммируются с некоторыми весами или используются процедурой мажоритарного выбора ответа. Но тогда получение логического описания решений либо оказывается невозможным, либо становится слишком сложной задачей. Однако для вычисления значений целевой функции $\hat{F}$ среди прочих методов могут быть использованы бэггинг и бустинг как подходы к построению решающего леса с целью получения алгоритма $\mathscr{A}_{\hat{F}}$ вычисления регрессии $\hat{F}$.

Далее будем также использовать следующие обозначения.

$\{T_1, ..., T_\tau, ..., T_\Theta\}$ — рассматриваемое множество деревьев, образующих лес;

$\{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_d, ..., \mathscr{P}_D\}$ — множество всех используемых в узлах деревьев предикатов, называемых *признаковыми*: $\mathscr{P}_D : X^n \to \{0; 1\}$.

$\tilde{y} = \big(\mathscr{P}_1(\tilde{x}), \ldots, \mathscr{P}_d(\tilde{x}), ..., \mathscr{P}_D(\tilde{x})\ \big)$ — логическое (признаковое) описание точки $\tilde{x}$.

$\tilde{\mathscr{P}} : X^n \to \mathbb{B}^n$ — предикатное отображение точек признакового пространства в $\mathbb{B}^n = \{0; 1\}^n$; $\tilde{y} = \tilde{\mathscr{P}}(\tilde{x})$.

$\{\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_d, ..., \mathscr{R}_D\}$ — множество областей истинности предикатов $\{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_d, ..., \mathscr{P}_D\}$.

Будем также использовать общепринятое обозначение *литерала* $\mathscr{P}_d^\sigma$: $\mathscr{P}_d^\sigma = \mathscr{P}_d$ при $\sigma = 1$ и $\mathscr{P}_d^\sigma = \bar{\mathscr{P}}_d$ (инверсия) при $\sigma = 0$ и назвать ортогональными два разных литерала, логическое произведение которых равно нулю. Будем также говорить, что две области истинности предикатов $\mathscr{P}_d$ и $\mathscr{P}_g$ ортогональны, если $\mathscr{P}_d \cap \mathscr{P}_g = \emptyset$; $d \neq g$.

Будем далее обозначать K_s^τ — ветвь с номером s входящего в конечный ансамбль (лес) дерева τ и полагать, что каждая из ветвей леса (в частности, каждого отдельного дерева) имеет свой номер: $s = 1, ..., S$. Определив такую нумерацию, можно полагать заданной функцию $\varphi = \varphi(s)$ такую, что $\tau = \varphi(s)$, т. е. по ветви с номером s можно определить дерево, которому эта ветвь принадлежит. Тогда ветвь достаточно идентифицировать её номером: $K_s^\tau = K_s^{\varphi(s)} = K_s$.

Как отдельное решающее дерево, так и совокупность деревьев — решающий лес — можно описать множеством ветвей. Каждая ветвь K_s является элементарным условным классификатором (служит для принятия решения только в том случае, когда точка попадает в область признакового пространства, определяемого этой ветвью) и заканчивается концевой вершиной (листом). В отличие от случайного леса, использование ансамбля деревьев для синтеза характеристической функции области допустимых решений целесообразно в том случае, когда каждая ветвь леса является надежным элементарным классификатором.

В задаче классификации Z_f описание листа в общем случае определяется как $\mathscr{L}_s = \mathscr{L}_s\big(j_s, len(s), \eta_s(1), \ldots, \eta(L)_s\big)$, где j_s — номер класса, к которому относит объекты эта решающая ветвь; $len(s)$ — длина ветви s, равная числу внутренних вершин в этой ветви дерева; $\eta_s(1), \ldots, \eta_s(L)$ — число точек, соответственно, классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_L$, удовлетворяющих конъюнкции литералов, содержащихся в узлах этой ветви (*будем говорить «попавших» в концевую вершину этой ветви*). Таким образом, концевой вершине приписывается набор чисел $\mathscr{L}_s$, который изменяется в процессе синтеза дерева — при удлинении ветви. В частных случаях описание листа может быть упрощено и содержать, например, только номер класса.

Классифицирующая ветвь называется (*эмпирически*) *корректной*, если значение ровно одного числа из $\eta_s(1), \ldots, \eta_s(L)$ больше нуля.

Классифицирующая ветвь s называется (*эмпирически*) *компетентной*, если одновременно выполняются следующие условия:

i) $len(s) \leq \Lambda(L)$ (ограничение длины ветви), где Λ и вводимая далее Δ — некоторые оценивающие функции;

ii) $\sum_{k=1}^{L} \eta_s(k) \geq \Delta(L)$ (попадание в ветвь достаточного числа точек);

iii) $max\{\eta_s(1), \ldots, \eta_s(L)\}/\big(\sum_{k=1}^{L} \eta_s(k)\big) \geq 1 - \varepsilon$ (почти все точки, попавшие в ветвь, принадлежат одному классу; малое $\varepsilon > 0$ определяет долю точек, принадлежащих классам, отличающимся от класса с номером $j_{s^*} = argmax\{\eta_s(1), \ldots, \eta_s(L)\}$). При $\varepsilon = 0$ ветвь является эмпирически корректной.

В задаче $Z_{\Omega,F}$ — *выбора по скалярному критерию с ограничениями* — описание листа определяется, например, как $L_s = L_s\big(\gamma_s, len(s), \eta_s, \bar{y}_s\big)$, где $\gamma_s = 1$, если ветвь с номером s выделяет только те точки (возможные решения) $\tilde{x}$ из $\mathfrak{X}_{Opt}$, которые удовлетворяют ограничению $\Omega(\tilde{x}) = 1$, и $\gamma_s = 0$ — в противном случае; $len(s)$ — длина ветви s, равная числу внутренних вершин в этой ветви дерева; η_s — число точек из обучающей выборки, попавших в концевую вершину ветви s; $\bar{y}_s$ — среднее значение скалярного критерия по всем точкам из обучающей выборки, попавшим в концевую вершину этой ветви. В частных случаях описание листа может быть модифицировано, что будет обязательно уточняться.

Ветви деревьев, используемых в задаче $F_{\Omega,F}$, будем называть *оценивающими*. Оценивающая ветвь s называется *компетентной*, если

i) $\gamma_s = 1$ (выделяет только те точки из $\mathfrak{X}_{Opt}$, которые описывают допустимые решения);

ii) $len(s) \leq \Lambda(L)$ (ограничение длины ветви);

iii) $\eta_s/L > 1 - \delta, \quad 0 \leq \delta < 0.5$ (в ветвь попадает достаточное число точек).

Ветвь K_s^τ полностью определяется конъюнкцией $\mathscr{K}_s^\tau$ предикатов (с инверсией или без), содержащихся в последовательности решающих узлов этой ветви:

$$\mathscr{K}_s^\tau = \mathscr{P}_{s,1}^{\sigma_{s,1}} \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}_{s,\omega_s}^{\sigma_{s,\omega_s}}.$$

Область истинности этой конъюнкции $\mathscr{R}_s^\tau = \mathscr{R}_{s,1}^\tau \cap \cdots \cap \mathscr{R}_{s,\omega_s}^\tau$ будем называть *областью истинности ветви* K_s^τ.

Отметим следующие случаи.

A) $\mathscr{R}_s^\tau \cap \mathscr{R}_v^\tau = \emptyset$. Этот случай имеет место для двух произвольных разных ветвей s и v одного и того же дерева τ; конъюнкция $\mathscr{K}_s^\tau$ обязательно содержит некоторый литерал $\mathscr{P}_d^\sigma$ такой, что конъюнкция $\mathscr{K}_v^\tau$ содержит инверсию этого литерала $\mathscr{P}_d^{\bar\sigma}$.

B) $\mathscr{R}_s^\tau \cap \mathscr{R}_v^\lambda = \emptyset$. В этом случае ветви двух разных деревьев с номерами τ и λ и конъюнкции $\mathscr{K}_s^\tau$ и $\mathscr{K}_v^\lambda$ содержат, соответственно, некоторые ортогональные литералы. В случаях A) и B) будем называть рассматриваемые ветви *ортогональными*.

C) $\mathscr{R}_s^\tau \cap \mathscr{R}_v^\lambda \neq \emptyset$. Любые два литерала из разных ветвей с номерами s и v не ортогональны, и их области истинности имеют непустое пересечение.

D) $\mathscr{R}_s^\tau \subset \mathscr{R}_v^\lambda \neq \emptyset$. В этом случае будем говорить: «ветвь $\mathscr{K}_v^\lambda$ *поглощает* ветвь $\mathscr{K}_s^\lambda$».

3. Основные этапы синтеза моделей $< \hat{F} \& \hat{\Omega} >$ и $< \hat{F}, \hat{\Omega} >$ по обучающей информации $\mathfrak{T}_{Opt}$ и их использование для выбора решений

В этом параграфе излагаются основные принципы построения моделей выбора наилучших решений по набору данных — обучающей информации. Поэтому главным образом описываются не шаги алгоритмов, а этапы построения моделей, которые могут быть уточнены и модифицированы при построении на их основе алгоритмов и программ.

Синтез *слитной* модели $< \hat{F} \,\&\, \hat{\Omega} >$.

Будем называть *слитной* эмпирической моделью построенное в результате обучения по выборке $\mathfrak{T}_{Opt}$ решающее дерево, совмещающее аппроксимацию $\hat{F}$ критерия F и аппроксимацию $\hat{\Omega}$ характеристической функции области допустимых решений Ω.

1^o По обучающей выборке $\mathfrak{T}_{Opt}$ осуществляется синтез *корректного бинарного дерева* — корректного эмпирического классификатора, решающего задачу Z_Ω распознавания принадлежности произвольной точки $\tilde{x} \in X^n$ множеству допустимых (удовлетворяющих представленных прецедентной информацией) ограничений. *Допустимость ветви* s дерева, т. е. допустимость точек, попадающих в эту ветвь ($\hat{\Omega}(\tilde{x}) = 1$), отмечается значением $\gamma_s = 1$ в описании листа этой ветви s. Если же ветвь не является допустимой $(\hat{\Omega}(\tilde{x}) = 0)$, то $\gamma_s = 0$.[3]

Далее каждая ветвь построенного бинарного дерева рассматривается как оценивающая ветвь для вычисления приближённого значения критерия $\hat{F}$.

2^o Для каждой оценивающей компетентной ветви с номером s вычисляются минимальное (μ_s), максимальное (m_s) и среднее $(\bar{y}_s)$ значения критерия $F(\tilde{x})$ по всем точкам $\tilde{x}$ обучающей выборки $\mathfrak{T}_{Opt}$, попавшим в эту ветвь (эти значения $F(\tilde{x})$ содержатся в обучающей выборке).[4]

3^o Пока в решающем дереве существует оценивающая компетентная ветвь с условным номером s такая, что добавление к ней вместо листа новой внутренней решающей вершины позволяет получить хотя бы одну новую компетентную ветвь и *разброс* $\delta_s = m_s - \mu_s$ превышает заданный параметр аппроксимации Δy, выполнять следующее:

> 3.1^o. Точки $\tilde{x}$ обучающей выборки, пропавшие в эту ветвь с номером s, разбиваются на два класса, определяемых значением предиката $F(\tilde{x}) \leq \rho$, где пороговое число ρ принадлежит интервалу $(\mu_s; m_s)$.
>
> 3.2^o. Ветвь с номером s «наращивается» путём достраивания новой условной вершины, замещающей концевую вершину этой ветви, что приводит к увеличению числа оценивающих компетентных ветвей на единицу и их условной перенумерации. Для ветвления в новой условной вершине используется один из предикатов $\{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_d, ..., \mathscr{P}_D\}$, который не использовался в предшествующих условных вершинах удлиняемой ветви.

4^o В построенном решающем дереве для концевой вершины каждой оценивающей компетентной ветви с условным номером s вычисляется (если это ещё не сделано) среднее значение $\bar{y}_s$ критерия $F(\tilde{x})$ по всем точкам $\tilde{x}$ обучающей выборки $\mathfrak{T}_{Opt}$, попавшим в эту ветвь.

Использование слитной модели $< \hat{F}$ & $\hat{\Omega} >$ для выбора решения.

1^o Пусть уже построено решающее дерево, имеющее q компетентных оценивающих ветвей и определяющее эмпирическую модель $< \hat{F}$ & $\hat{\Omega} >$, которая является

---

[3] Предполагается, что существует истинная характеристическая функция Ω, наблюдаемый объект обладает регулярными свойствами, а обучающая выборка не содержит ошибочных примеров. При таких предположениях корректное классифицирующее дерево существует всегда. Появление в процессе синтеза БРД некомпетентных, слишком длинных ветвей является признаком возможной ошибки в данных, позволяющим применить их фильтрацию и повторный синтез дерева.

[4] Простое усреднение — не единственный способ формирования приближения $\hat{F}$ для оценивающей компетентной ветви [36, 37].

результатом обучения по выборке $\mathfrak{T}_{Opt}$. Находим в этом дереве ветвь

$$\mathscr{K}_u = \mathscr{P}_{u,1}^{\sigma_{u,1}} \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}_{u,\omega_u}^{\sigma_{u,\omega_u}},$$

имеющую максимальную оценку $\hat{y}^* = max\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s, \ldots, \bar{y}_q\}$ критерия F, где u — номер найденной ветви $\mathscr{K}_u$.

2^o В качестве решения может быть взята любая точка $\tilde{x} \in X^n$, удовлетворяющая условию

$$\big(\mathscr{P}_{u,1}^{\sigma_{u,1}}(\tilde{x}) = 1\big) \wedge \cdots \wedge \big(\mathscr{P}_{u,\omega_u}^{\sigma_{u,\omega_u}}(\tilde{x}) = 1\big). \tag{1}$$

Пример. Пусть каждый признаковый предикат существенно зависит только от одной переменной и является пороговым:

$$\mathscr{P}_{u,1}(x_{u,1}) = [x_{u,1} \le b_{u,1}], \ldots, \mathscr{P}_{u,\omega_u}(x_{u,\omega_u}) = [x_{u,\omega_u} \le b_{u,\omega_u}].$$

Тогда в качестве решения может выбрана любая точка, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x_{u,1} \le b_{u,1}, & \text{если } \sigma_{u,1} = 1; \\ (x_{u,1} > b_{u,1}, & \text{если } \sigma_{u,1} = 0); \\ \cdots \ \cdots & \cdots \ \cdots \ \cdots; \\ x_{u,\omega_u} \le b_{u,\omega_u}, & \text{если } \sigma_{u,\omega_u} = 1; \\ (x_{u,\omega_u} > b_{u,\omega_u}, & \text{если } \sigma_{u,\omega_u} = 0); \\ x_i \in M_i, & \text{любое значение из } M_i, \text{ если } i \notin \{u_1, u_2, \ldots, u_{\omega_u}\}. \end{cases} \tag{2}$$

Если в рассматриваемом примере интерпретировать задачу выбора решения как нахождение наилучшего управления на основе модели $< \hat{F}\ \&\ \hat{\Omega} >$, то, имея описание объекта (и, может быть, окружающей среды) $\tilde{x}^t$, следует изменить значения переменных $x_{u,1}^t, \ldots, x_{u,\omega_u}^t$ согласно приведенным неравенствам. Будет получено новое описание $\tilde{x}^{t+1}$:

$$x_{u,1}^{t+1} \pm \epsilon_1, \ldots, x_{u,\omega_u}^{t+1} \pm \epsilon_{\omega_u},$$

где $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{\omega_u}$ — поправки переменных, обеспечивающие выполнение условий (2).$\square$

При использовании линейных признаковых предикатов, имеющих местность, равную два и более, система (2) будет заменена соответствующей системой линейных неравенств.

Следует подчеркнуть, что конъюнкция (1) является аналитическим описанием наилучшего решения, принимаемого на основе эмпирической информации $\mathfrak{T}_{Opt}$.

Синтез и использование *раздельной* модели $< \hat{F}\ ,\ \hat{\Omega} >$.

Если для синтеза $\hat{F}$ используется случайный лес или бустинг, то может получиться эмпирическая алгоритмическая модель $A_{\hat{F}}$, не имеющая явного аналитического описания. Однако для любой точки $\tilde{x}$, используя эту алгоритмическую модель, можно вычислить приближённое значение $\mathscr{A}_{\hat{F}}(\tilde{x})$ функции F — критерия выбора наилучшего решения.

При использовании раздельной модели полагается, что кроме приближения $\hat{F}$ отдельно синтезирована характеристическая функция области допустимых решений $\hat{\Omega}$, представленная в виде эмпирической ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$ над признаковыми предикатами. Тогда, просматривая все конъюнкции $\mathscr{K}_s$, $s = \overline{1, S}$, входящие в ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$, и соответствующие им области истинности $\mathscr{R}_s$, можно сформировать точки-представители областей $\tilde{x}_s \in \mathscr{R}_s$, вычислить значения $\mathscr{A}_{\hat{F}}(\tilde{x}_s)$ и найти экстремальное решение

$$\tilde{x}_{s^*} = \underset{s}{argmax}(\underset{s}{argmin}) \quad \mathscr{A}_{\hat{F}}(\tilde{x}_s).$$

В задачах динамического управления на основе эмпирических данных и машинного обучения можно осуществлять циклический просмотр всех конъюнкций $\mathscr{K}_s$, входящих в ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$, и формировать из текущего вектора состояния $\tilde{x}_t$ вектор $\tilde{x}_{t+1}(s)$, удовлетворяющий конъюнкции $\mathscr{K}_s$. Затем, последовательно вычисляя $\hat{y}_s = A_{\hat{F}}(\tilde{x}_{t+1}(s))$, находить наилучшее в данной модели решение $\tilde{x}_{t+1}(s^*)$.

Преимуществом раздельной модели $< \hat{F} \ , \ \hat{\Omega} >$ является возможность применения (с целью повышения точности) любых методов формирования регрессионной модели $\hat{F}(\tilde{x})$ — не только случайного леса, но и нейронной сети или построения регрессии классическими методами при условии априорного задания семейства, в котором функция F содержится. В последнем случае предполагается наличие такой *дополнительной информации* о свойствах критерия выбора решений.

Эксперименты, известные из научной литературы, показали, что нейросетевые регрессионные модели в большинстве случаев оказываются точнее классических регрессионных моделей, основанных на приближении к заданным типам уравнений, и моделей, основанных на лесах и отдельных деревьях. Так, сравнение методов построения регрессии по величине средней абсолютной ошибки в работе [41, Табл. 4, с. 70] показало, что нейросетевая модель продемонстрировала точность 4.75 %, превосходя точность модели CART [29, 42] (4.79 %) и точность уравнения регрессии (5.08 %), полученного по методу наименьших квадратов. В работе [43] сравнивались по точности регрессионные модели NN (нейронная сеть), CART и CUBIST [36] (пакет программ, реализующий вариант дерева с линейными регрессионными локальными моделями в листьях). Нейросетевая модель регрессии оказалась наиболее точной: NN — 7.48 %, CART — 9.99 %, CUBIST — 11.37 %.[5]

Использование в слитной модели одиночного решающего дерева определяет повышенные требования к его качеству как к классификатору.

4. КОМПЕТЕНТНОСТЬ ПРОТИВ БОЛЬШИНСТВА: АПОЛОГЕТИКА ОДНОГО «СИЛЬНОГО» КЛАССИФИКАТОРА-РЕШАЮЩЕГО ДЕРЕВА

Мажоритарный принцип принятия решений «по большинству» не всегда даёт наилучший результат. Можно представить модельную ситуацию, когда в группе принимающих решение лиц только один из участников группы действительно является компетентным профессиональным экспертом, а остальные лица выбраны неудачно и слабо знают оцениваемый процесс или объект. В такой ситуации решение большинства, не совпадающее с правильным решением эксперта-профессионала, в итоге может привести к ошибке.

Для строгого обоснования подобных ошибок в мажоритарных системах принятия решений рассмотрим следующий случай.

Пусть ансамбль состоит из трёх алгоритмов, принимающих бинарное решение по большинству. Вероятность ошибки принятия решения одним из этих алгоритмов (компетентным) равна $p_1 = 0.1$, а каждым из двух других («слабых») алгоритмов — $p_2 = 0.4$. Вероятности правильных решений — $q_1 = 0.9$, $q_2 = 0.6$. Решения, принимаемые алгоритмами, и соответствующие вероятности ошибок полагаются независимыми.

Обозначим S_1, S_2, S_3 индикаторы ошибок принятых решений: $S_i = 1$, если алгоритм с номером i принимает ошибочное решение, и $S_i = 0$, если решение правильное; $i = 1, 2, 3$. Все возникающие ситуации и расчёты приведены в табл. 1.

Вероятность ошибки мажоритарного решения совокупности этих трёх алгоритмов есть $p_o(3) = 0.144 + 0.024 + 0.024 + 0.016 = 0.208$, и мажоритарное решение оказывается гораздо хуже, чем решение одного компетентного алгоритма с вероятностью ошибки $p_1 = 0.1$.

---

[5] Приводя примеры сравнительного исследования методов построения регрессии по эмпирическим данным, мы не останавливались на описании проблемных областей, но нужно отметить, что успешность применения той или иной модели во многом зависит именно от исходных данных и проблемной области. Так, рассматривая регулярную, заведомо линейную проблему оптимального выбора решения, следует выбирать классическую модель линейной регрессии, а не приближать линейную функцию ступенчатой или кусочно линейной аппроксимацией древообразной модели или нейронной сетью с нелинейными ядрами.

Таблица 1

S_1	S_2	S_3	Результат	Вероятность результата
0	0	0	Верно	0.324
0	0	1	Верно	0.216
0	1	0	Верно	0.216
0	1	1	Ошибка	0.144
1	0	0	Верно	0.036
1	0	1	Ошибка	0.024
1	1	0	Ошибка	0.024
1	1	1	Ошибка	0.016
$\sum = 1.0$				

Обобщение рассмотренного мажоритарного решения трёх алгоритмов приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть мажоритарная система содержит* $2k+1$ *алгоритмов, независимо вычисляющих решение одной и той же задачи. Пусть из этих алгоритмов один — компетентный, с вероятностью ошибки* p_1, *а остальные — «слабые» алгоритмы с одинаковой вероятностью ошибки* p_2: $0.5 > p_2 > p_1$. *Тогда вероятность* p_o *ошибки такой мажоритарной системы определяется формулой*

$$p_1 C_{2k}^k p_2^k (1-p_2)^k + \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j p_2^j (1-p_2)^{2k-j}. \tag{3}$$

Доказательство.

$$p_o = \underbrace{\sum_{j=k}^{2k} C_{2k}^j p_1 p_2^j (1-p_2)^{2k-j}}_{\text{Компетентный алгоритм ошибся}} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j (1-p_1) p_2^j (1-p_2)^{2k-j}}_{\text{Компетентный алгоритм дал верное решение}}$$

$$= p_1 C_{2k}^k p_2^k (1-p_2)^k + p_1 \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j p_2^j (1-p_2)^{2k-j} + (1-p_1) \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j p_2^j (1-p_2)^{2k-j}$$

$$= p_1 C_{2k}^k p_2^k (1-p_2)^k + \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j p_2^j (1-p_2)^{2k-j}.$$

□

Следствие 1.

$$\sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^{j} p_2^{j} (1-p_2)^{2k-j} < p_o < \sum_{j=k}^{2k} C_{2k}^{j} p_2^{j} (1-p_2)^{2k-j}; \tag{4}$$

Следствие 2.

$$p_o \sim p_1 h \times \varphi\big((k-2k\cdot p_2)h\big) + \Phi\big((2k-2k\cdot p_2)h\big) - \Phi\big((k+1-2k\cdot p_2)h\big) \text{ при } k \to \infty, \tag{5}$$

где

$$h = (2k\cdot p_2(1-p_2))^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Доказательство. Неравенства (4) получаются из (3) путём замены p_1 на ноль (левая часть) и на единицу (правая часть). Далее, применяя локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, из (3) получаем асимптотическое приближение (5). □

Например, пусть в мажоритарной системе $n = 2k + 1 = 11$ алгоритмов, один компетентный с вероятностью ошибки $p_1 = 0.1$, а все остальные — слабые: $p_2 = 0.4$. Тогда вероятность ошибки $p_o(11)$ такой мажоритарной системы может быть приближено вычислена по формуле (5):

$$\sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^{j} p_2^{j} (1-p_2)^{2k-j} \approx \Phi\left(\frac{10 - 10\times 0.4}{\sqrt{10\times 0.4(1-0.4)}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 10\times 0.4}{\sqrt{10\times 0.4(1-0.4)}}\right) \approx 0.0985;$$

$$p_1 C_{2k}^{k} p_2^{k} (1-p_2)^{k} \approx 0.1 \times 0.2 = 0.02;$$

$$p_o(11) \approx 0.02 + 0.0985 = 0.1185.$$

Оказалось, что ансамбль с указанной структурой из 11 алгоритмов даёт точность, уступающую точности одного компетентного алгоритма, входящего в этот ансамбль: $0.1 < 0.1185$. Проведя такие же расчёты, можно убедиться, что уменьшить ошибку по сравнению с ошибкой одного компетентного алгоритма ($p_1 = 0.1$) удаётся только в случае, когда число слабых алгоритмов ансамбля ($p_2 = 0.4$) больше или равно 20; в этом случае $p_o(21) \approx 0.097$.

5. Повышение точности решающих деревьев

Способность решающих деревьев к эмпирическому обобщению и их точность по сравнению с другими моделями обычно проверяется экспериментально. Для этой цели на одном и том же обучающем множестве данных строятся различные модели — нейронные сети, ансамбли алгоритмов, например случайные леса, SVM. Затем построенные модели оцениваются на контрольной выборке, сравнивается их точность.

Важно заметить, что для разных предметных областей и различных задач лучшими могут оказаться разные обученные модели. Это подтверждается многочисленными экспериментами, представленными в научной литературе. Известны эксперименты, в которых отдельные деревья решений дают лучший результат, чем, например, случайный лес.

В статье [27] сравнивались результаты классификации одних и тех же данных алгоритмами Random Forest (RF, случайный лес) и Decision Tree (DT, решающее дерево). Для синтеза DT использовался алгоритм J-48, реализующий известную модель C4.5 Р. Куинлана [40]. На разных задачах более точным классификатором оказывался не только RF, но и DT. Так, процент ошибок решающего дерева при решении задачи Heart-h был 19.04, в то время как случайный лес показал процент ошибки 22.1. В задаче Breast cancer *решающее дерево также «выигрывало» у случайного леса: 24.47 % ошибок против 30.76 %.*

Повысить точность решающего дерева удаётся за счёт использования в его вершинах более сложных (чем пороговые одноместные) признаковых предикатов. Например, работе [35] предложена модель машинного обучения — Confidence-Based Decision Tree (CBDT, решающее дерево, основанное на доверительных интервалах). По числовому признаку x_i, описывающему объект и использующемуся во любой внутренней вершине η решающего дерева, строится статистическое распределение, находится выборочное среднее $\bar{A}$ и дисперсия $\hat{\sigma}^2$, а также доверительный интервал $(\bar{A} - \kappa\hat{\sigma}, \bar{A} + \kappa\hat{\sigma})$ на заданном уровне значимости α, который определяет значение $\kappa = \kappa(\alpha)$. Указанные статистические характеристики строятся по подвыборке точек обучающей выборки, попавших в сегмент разбиения признакового пространства, определяемого вершиной дерева η.

Не углубляясь в детали использования CBDT, отметим, что подход, основанный на доверительных интервалах, в сущности использует признаковые предикаты вида $[x_i \in (\bar{A} - \kappa\hat{\sigma}, \bar{A} + \kappa\hat{\sigma})]$, что и позволило обеспечить высокую точность классификации, превышающую точность случайного леса. Эксперименты с моделью CBDT [35] показали значительное *превосходство по точности деревьев с доверительными интервалами над случайным лесом* (см. табл. 2). Для вычисления доверительных интервалов использовалась гипотеза о нормальных распределениях значений признаков [NORM].

Для решения проблем, поставленных в данной статье, большое значение имеют персептронные решающие деревья (Perceptron Decision Trees, PDT) [44, 46]. В каждой вершине PDT для осуществления разбиения вещественного признакового пространства $X^n = \mathbb{R}^n$ используется гиперплоскость $w_1^j x_1 + w_2^j x_2 + ... + w_n^j x_n = b_j$ или

Таблица 2. Процент ошибок классификации в экспериментах с моделями CBDT и Random Forest на 10 задачах (фрагмент табл. I из статьи [35])

Задача	Число классов	Длина обучающей выборки	ConfDTree	Random Forest
Cancer	2	569	3.1 %	6.9 %
Contraceptive	2	1473	1.3 %	21.7 %
Credit	2	690	0.3 %	8.5 %
Diabetes	2	768	4.5 %	11.2 %
Ecoli	2	336	3.2 %	17.5 %
Ionosphere	2	351	2.0 %	16.7 %
Pima	2	768	3.3 %	5.4 %
Spam	2	4601	1.8 %	6.1 %
Yeast	2	1004	0.0 %	27.2 %
MiniBooNE	2	130000	6.0 %	12.5 %

в другой записи, $W_j^T\tilde{x} = b_j$, которую обозначим $\mathscr{L}_j$. Поэтому признаковый предикат в вершине имеет вид

$$\mathscr{P}_j = [w_1^j x_1 + w_2^j x_2 + ... + w_n^j x_n \geq b_j].$$

Такой линейный предикат может быть получен путём применения процедуры линейной коррекции Розенблатта – Новикова непосредственно на шаге ветвления и добавления очередной вершины решающего дерева.

На рис. 1 приведен пример, поясняющий решающее правило, определяемое персептронным решающим деревом с четырьмя внутренними вершинами, линейными предикатами $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_4$ и разделяющими прямыми $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_4$. Вещественное признаковое пространство X^n условно представлено в виде прямоугольной области, разделённой прямыми $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_4$. Часть признакового пространства, отнесённая к первому классу, обозначена γ_1, а часть признакового пространства, отнесённая ко второму классу, обозначена γ_2.

Рис. 1 иллюстрирует *возможность построения при помощи* PDT *невыпуклых кусочно-линейных (но всё же нелинейных) областей классов* γ_1 и γ_2.

В общем случае признаковое пространство $X^n = M_1 \times \cdots \times M_i \cdots \times M_n$ может быть образовано из разнотипных множеств $M_1, \cdots, M_i, \cdots, M_n$. Если из этих множеств только m, $2 \leq m < n$, являются ограниченными числовыми подмножествами, то линейные предикаты в вершинах могут использовать соответствующие m признаков или, возможно, часть их. Для остальных признаков, например булевых, используются другие, более простые признаковые предикаты.

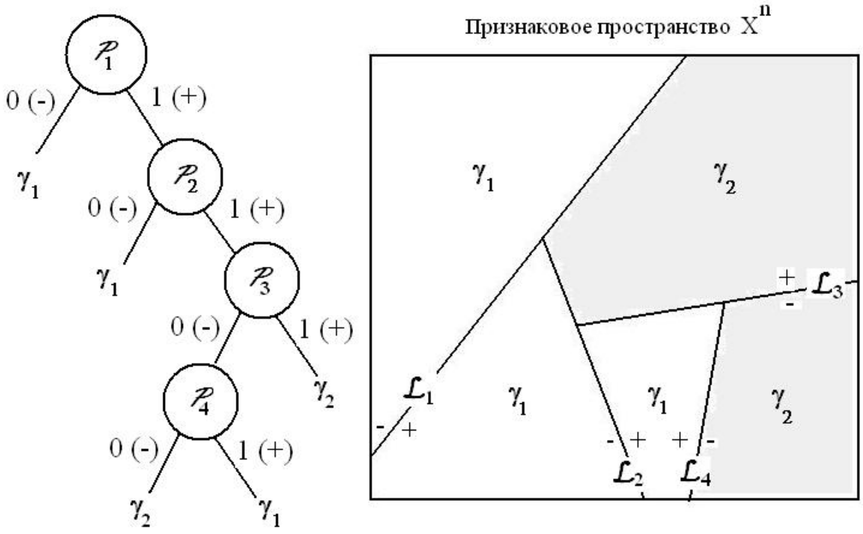


Рис. 1. Персептронное решающее дерево и разбиение признакового пространства

В статье [44] используются *линейные предикаты с целочисленными коэффициентами* (полезно также добавлять ограничение значений этих коэффициентов по модулю), что позволяет существенно понизить верхнюю оценку VC размерности используемого *целочисленного* семейства персептронных решающих деревьев по сравнению с классом деревьев, использующих линейные предикаты с вещественными коэффициентами.

В работе [39] деревья с линейными признаковыми предикатами названы *Oblique Decision Trees* (Скошенные решающие деревья) и обозначены как модель OC1. Представлены результаты экспериментов на шести разных задачах машинного обучения и последующего распознавания: Bright S/G, Dim S/G, Cancer, Iris, Housing, Diabetes. В четырёх из шести указанных задач модель OC1 PDT превосходила по точности модели CART и C4.5.

Приведенные примеры убедительно показывают, что известны способы выбора признаковых предикатов, позволяющие существенно повысить точность решающих деревьев, которая в некоторых случаях может превосходить точность таких ансамблей, как случайный решающий лес.

Кроме подходов к повышению точности решающих деревьев, основанных на усложнении признаковых предикатов, существуют и структурные *квазиансамблевые* методы повышения точности. К последним относятся *решающие леса с областями компетентности* [31] *и некоторые модификации полных решающих деревьев* [33, 34].

На рис. 2 приведен пример полного решающего дерева, заимствованный из работы [5]. Полное дерево содержит внутренние вершины двух типов. Вершины первого типа — обычные, применяемые в различных решающих деревьях и содержащие некоторый признаковый предикат или признак. *Вершины второго типа содержат набор признаков или предикатов* (например, $\{x_1, x_3\}$, см. рис. 2), и из них выходит столько рёбер, сколько признаков (или предикатов) приписано такой вершине [5]. Каждое из этих рёбер соответствует выбору одного из признаков (предикатов) и определяет одну из альтернативных ветвей ветвления. Концевые вершины содержат метки классов, определяемых полным деревом решений, или запись, содержащую числовые значения степеней принадлежности каждому из классов. Так, на рис. 2 пометка концевой вершины ветви $B_1\{\omega_1^1, \omega_1^2\}$ соответствует конъюнкции $\mathscr{K}_1$, определяемой этой ветвью, и степени принадлежности: ω_1^1 — первому классу, ω_1^2 — второму классу. В этом примере полное дерево описывается пятью конъюнкциями:

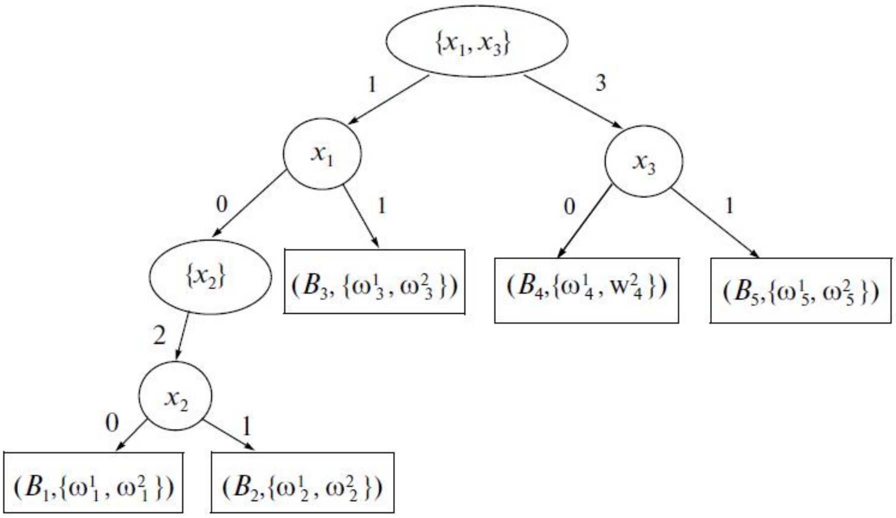


Рис. 2. Пример полного решающего дерева, заимствованный из работы [5]

$$\mathscr{K}_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2; \mathscr{K}_2 = \bar{x}_1 x_2;\ \mathscr{K}_3 = \bar{x}_1;\ \mathscr{K}_4 = \bar{x}_3;\ \mathscr{K}_5 = x_3.$$

В рамках рассматриваемой проблемы наибольший интерес представляют корректные на обучающей выборке ветви полного дерева, когда вектор принадлежности классам $\tilde{\omega} = (\omega_s^1, \dots, \omega_s^L)$ содержит только одну единицу, а остальные значения — равные нулю. Иначе говоря, когда вершина помечена номером единственного класса. *Будем называть полное дерево корректным, если оно содержит только корректные* *ветви.* Совокупность корректных ветвей одного и того же класса определяет ДНФ — логическое описание этого класса.

Решающий лес с областями компетентности [31] представляет собой ансамбль деревьев, которые синтезируются последовательно на некоторым образом выбранных подмножествах признаковых предикатов. Каждая ветвь такого ансамбля либо является компетентной, либо заканчивается ссылкой на следующее дерево, как показано на рис. 3.

И решающий лес с областями компетентности, и полные решающие деревья осуществляют «размножение» решающих ветвей и получение логических описаний классов в виде удлинённых ДНФ, что позволяет сделать описания классов более детальными.

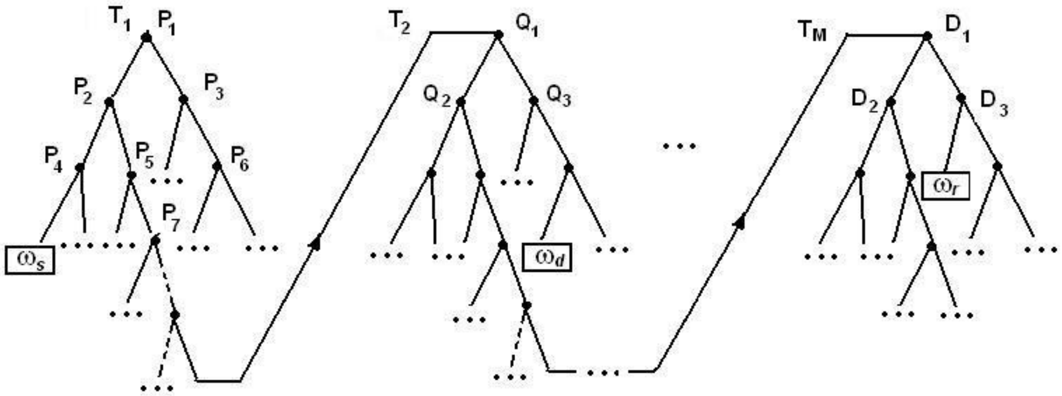


Рис. 3. Решающий лес с областями компетентности

6. Формирование описания решений в виде формулы над признаковыми предикатами

В этом параграфе рассматриваются задачи формирования логических описаний классов (ЛОК) в виде ДНФ, определяющих области истинности решений, полученных в результате машинного обучения. Речь идёт о двух классах решений: допустимых для выбора и не являющихся допустимыми. Соответственно, предполагается решение задач обучения классификации в случае только двух классов.

В случае использования отдельных деревьев, таких как, например, в модели C4.5 [40], построение логических описаний классов является наиболее простым. Если дерево τ является корректным (корректны все его ветви), то ЛОК строится путём сбора в получаемую ДНФ всех конъюнкций, соответствующих ветвям, имеющим концевую отметку $\gamma_s = 1$ — признак допустимых решений. Построенная ДНФ

$$\mathscr{D}^{\tau}_{\hat{\Omega}} = \mathscr{K}^{\tau}_1 \vee \cdots \vee \mathscr{K}^{\tau}_s \vee \cdots \vee \mathscr{K}^{\tau}_{\mu}$$

описывает аппроксимацию области допустимых решений

$$\hat{\Omega}^{\tau} = \mathscr{R}^{\tau}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{R}^{\tau}_s \cup \cdots \cup \mathscr{R}^{\tau}_{\mu}$$

(в дальнейшем, чтобы уменьшить число индексов, будем опускать символ τ, если понятно, о каком дереве идет речь).

Если некоторое количество ветвей не удовлетворяет условию компетентности (когда длина ветви превышает заданную граничную величину или число точек, попавших в эту ветвь, меньше минимального допустимого значения), то эти ветви помечаются как «недостаточные для принятия решения». Соответствующую область «недостаточной информации» обозначим

$$\Delta = \mathscr{R}^{\Delta}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{R}^{\Delta}_q \cup \cdots \cup \mathscr{R}^{\Delta}_{\nu}.$$

Пусть при выборе решения с наибольшим (наименьшим) значением критерия $\hat{F}$ будут просматриваться μ допустимых компетентных подобластей (подмножеств) и ν областей недостаточной информации. Если максимум (минимум) будет найден на одном из компетентных допустимых множеств, то наличие области Δ не повлияет на решение задачи выбора на основе машинного обучения. Если же окажется, что максимум (минимум) будет найден на одном из подмножеств множества Δ, то потребуется построение другой аппроксимации $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$. Для этой цели подходят более сложные модели — полные деревья и леса с областями компетентности.

При использовании полных решающих деревьев (в отличие от использования одного отдельного дерева) в результате обучения порождается намного больше ветвей, в том числе и, как правило, бо́льшее число корректных ветвей. Однако может возникнуть пересечение областей допустимых ($\gamma = 1$) и недопустимых ($\gamma = 0$) решений. Назовём эти пересечения *конфликтными областями*. Убедимся в возможности возникновения таких конфликтных областей.

Теорема 2. *Корректные полные решающие деревья могут порождать конфликтные области в признаковом пространстве.*

Доказательство. Рассмотрим полное дерево на рис. 4. Это дерево порождает описание области допустимых решений в виде ДНФ

$$\mathscr{D}_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3,$$

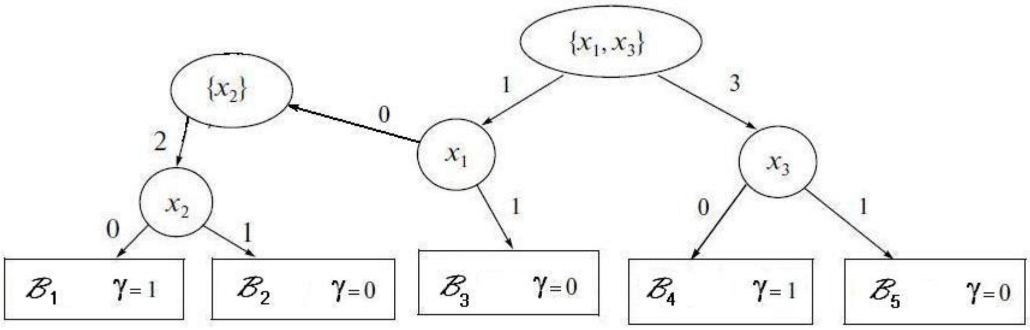


Рис. 4. Полное корректное решающее дерево с булевыми предикатами x_1, x_2, x_3 и с пересечением допустимых и недопустимых областей

определяемой ветвями $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_4$, и описание области решений, не являющихся допустимыми,

$$\mathscr{D}_0 \;=\; x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_3 \equiv x_1 \vee x_2 \vee x_3,$$

определяемое ветвями $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_2$ и $\mathscr{B}_5$. *Порождёнными конфликтными областями* являются интервалы

$$N_{x_1\bar{x}_3},\; N_{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3},\; N_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3}.$$

Эти интервалы определяются путём нахождения логического произведения ДНФ $\mathscr{D}_0$ и $\mathscr{D}_1$ и, соответственно, парами ветвей

$$(\mathscr{B}_3, \mathscr{B}_4),\; (\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4),\; (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_5).$$

□

Каждый конфликтный интервал порождается ветвями с различными концевыми пометками классов (в примере на рис. 4 — пометками $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$). Например, конфликтный интервал $N_{x_1\bar{x}_3}$ порожден ветвями дерева $\mathscr{B}_3$ и $\mathscr{B}_4$. Ветви, порождающие конфликтный интервал, будем называть *конфликтными.*

Построение ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$ *по корректному полному решающему дереву* осуществляется следующим образом.

1^o Конъюнкции, соответствующие ветвям, не являющимся конфликтными и имеющими пометку $\gamma = 1$, в первую очередь включаются в ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$.

2^o Если для ветви $\mathscr{K}$ с пометкой $\gamma = 1$ существуют конфликтующие ветви, то она включается в ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$ только в том случае, когда соответствующая ей ветвь является более компетентной, чем все конфликтующие с ней ветви.

При использовании решающего леса с областями компетентности возникает такая же проблема с конфликтными областями, как и в случае использования полных решающих деревьев.

Теорема 3. *Решающий лес с областями компетентности может порождать конфликтные области в признаковом пространстве.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим «модельный» пример — простейший лес с одной областью некомпетентности и двумя решающими деревьями (рис. 5) в предположении, что при его синтезе был *принудительно задан порядок выбора признаков* согласно предпочтению $x_1 \succ x_2 \succ x_3$. Этот лес построен путём декомпозиции полного решающего дерева, представленного на рис. 4, и в нём сохраняются две конфликтные области $N_{x_1\bar{x}_3}$ и $N_{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}$. □

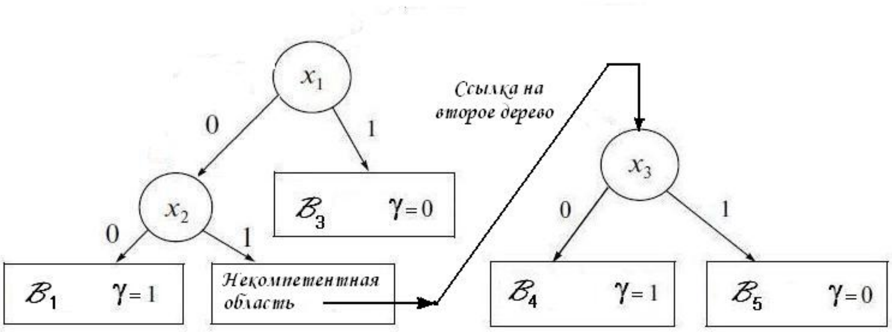


Рис. 5. Полное корректное решающее дерево с булевыми предикатами $x_1,\ x_2,\ x_3$ и с пересечением допустимых и недопустимых областей

Процедура построения ДНФ $\mathscr{D}_{\hat{\Omega}}$ в случае использования решающего леса с областями компетентности определяется следующим образом.

1^o Сначала выбираются все ветви первого дерева T_1, помеченные меткой $\gamma = 1$. Соответствующие им конъюнкции объединяются в ДНФ $\mathscr{D}_1$.

2^o Пусть уже построена ДНФ $\mathscr{D}_t$. Рассматривается следующее по порядку дерево с номером $t + 1$.

3^o Каждая ветвь $\mathscr{V}$ (конъюнкция $\mathscr{K}_{\mathscr{V}}$) дерева T_{t+1} сравнивается со всеми конъюнкциями деревьев $T_1, \dots, T_t$.

> Если ветвь $\mathscr{V}$ помечена номером класса $\gamma = 1$ и ортогональна любой ветви деревьев $T_0, \dots, T_t$ с пометкой $\gamma = 0$, то конъюнкция $\mathscr{K}_{\mathscr{V}}$ добавляется к ДНФ $\mathscr{D}_t$. Если ветвь $\mathscr{V}$ неортогональна хотя бы одной ветви деревьев $T_0, \dots, T_t$ с пометкой $\gamma = 0$, то конъюнкция $\mathscr{K}_{\mathscr{V}}$ добавляется к ДНФ $\mathscr{D}_t$ только в том случае, если она более компетентна, чем любая из таких найденных неортогональных ей ветвей.

5^o Если ещё не все деревья леса с областями компетентности просмотрены, то перейти на пункт 2^o.

6^o Конец.

Заключение

Развитие математических методов классификации и регрессии, основанных на построении решающих деревьев и лесов, позволили применить эти методы для решения более сложных задач неклассического информационного моделирования — извлечения моделей выбора наилучших решений из данных. При таком подходе математическая модель не задаётся априорно, а синтезируется автоматически на основе имеющейся эмпирической информации.

Свойства алгоритмов классификации и регрессии, основанных на построении решающих деревьев и лесов, обеспечивают возможность автоматического извлечения как линейных, так и нелинейных моделей, которые реализуют кусочную аппроксимацию целевых функций и поверхностей, разделяющих допустимые и недопустимые (не удовлетворяющие ограничениям) решения.

В статье разработаны два подхода к синтезу моделей выбора решений из данных. Первый подход предполагает синтез «слитной» модели — решающего дерева, реализующего одновременно и регрессию, и классификацию вариантов решений на допустимые и не являющиеся допустимыми. Второй подход предполагает раздельное построение дерева регрессии для аппроксимации целевой функции и дерева классификации для выделения допустимых вариантов решений.

Классифицирующие решающие деревья позволяют получать логическое описание областей допустимых решений в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) над выбранным множеством признаковых предикатов. В работе показано, как можно уточнить построение таких ДНФ за счёт использования в качестве классификатора вместо одного отдельного дерева ансамбля деревьев, основанного на областях компетентности, а также за счёт использования полных решающих деревьев.

Подход, основанный на извлечении из данных раздельной модели, допускает использование в качестве регрессии алгоритмов, полученных любыми известными методами. Кроме случайных лесов, бэггинга и бустинга регрессионных моделей, возможно применение аппроксимации априорно заданными уравнениями (если имеется соответствующая дополнительная априорная информация) и использование нейронной сети.

Полученные в статье результаты предназначены для использования при разработке алгоритмов интеллектуального управления и являются их теоретической основой.

Список литературы

1. Абламейко, С. В., Краснопрошин, В. В., Образцов, В. А., Распознавание образов и анализ изображений: теория и опыт решения практических задач / Материалы междунар. науч. конгресса, Республика Беларусь, Минск, 4–7 ноября 2013 г. — Минск: БГУ, 2013. — 434–444 с.

   ABLAMEYKO, S. V., KRASNOPROSHIN, V. V., & OBRASZOV V. A. (2013) Pattern Recognition and Image Processing: Theory and Experience in Solving Practical Problems. *Proc. of the Int. Sci. Congress, Republic of Belarus, Minsk, 4–7 November 2013.* p. 434–444.

2. Блыщик, В. Ф. Интеллектуализированная программная система Intman поддержки принятия решений в задачах планирования и управления / В. Ф. Блыщик, В. И. Донской, Г. А. Махина // Искусственный интеллект. — 2002. — № 2. — С. 406–415.

   BLYSCHIK, V. F., DONSKOY, V. I., & MAKHINA, G. A. (2002) Intellectualized Software System INTMAN for Support Decision Making in Problems of Planning and Management. *Artificial Intelligence.* (2). p. 406–415.

3. Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. — М.: Наука, 1979. — 448 с.

   VAPNIK, V. N. (1979) *The restoration of dependencies from empirical data.* Moscow: Nauka.

4. Воронцов, К. В. Аддитивная регуляризация тематических моделей коллекций текстовых документов / К. В. Воронцов // ДАН. — 2014. — Том 456, № 3. — С. 268–271.

   VORONTSOV, K. V. (2014) Additive Regularization of Topic Models for Collections of Text Documents. *Doklady Akadimii Nauk.* 456 (3). p. 268–271.

5. Генрихов, И. Е. Исследование обобщающей способности полного решающего дерева / И. Е. Генрихов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Том 54. — № 6. — С. 1033–1047.

   GENRIKHOV, I. E. (2014) A Study of the Generalizing Ability of a Full Decision Tree. *J. Comp. Math. & Math. Phys.*. 54 (6). p. 1033–1047.

6. Гупал, А. М., Вагис, А. А. Индуктивный подход в математике / А. М. Гупал, А. А. Вагис // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 83–90.

   GUPAL, A. M. (2002) Inductive Approach in Mathematics. *Problems of Control and Informatics.* (2). p. 83–90.

7. Донской, В. И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации / В. И. Донской. — Симферополь: Таврия, 1992. — 166 с.

   DONSKOY, V. I. (1992) *Discrete Models of Decision Making under Incomplete Information.* Simferopol: Tavrija.

8. Донской, В. И. Логическое управление плохо формализованными системами / В. И. Донской // Динамические системы. — К.: Вища школа, 1985. — Вып. 1. — С. 90–96.

   DONSKOY, V. I. (1985) Logical Control of Poorly Formalized Systems. *Dynamic Systems.* (1). p. 90–96.

9. Донской, В. И. Синтез согласованных оптимизационных моделей по прецедентной информации: подход на основе колмогоровской сложности / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — № 2. — С. 13–25.

   DONSKOY, V. I. (2012) Synthesis of Coordinated Optimization Models According to Precedent Information: an Approach based on Kolmogorov Complexity. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* (2). p. 13–25.

10. Донской, В. И., Козлова, М. Г. Извлечение знаний о свойствах целевой функции в логических системах поддержки принятия решений / В. И. Донской, М. Г. Козлова // Искусственный интеллект. — 2000. — № 3. — С. 230–234.

    DONSKOY, V. I. & KOZLOVA, M. G. (2000) Extracting Knowledge about the Properties of the Objective Function in the LogicalSystems of Decision Support. *Artificial Intelligence.* (3). p. 230–234.

11. Донской, В. И., Щербина, О. А. Управление развитием рекреационной системы с использованием алгоритмов формирования понятий / Сб. «Управление потоками материальных ресурсов на уровне предприятий и объединений». — К.: ИК АН УССР, 1980. — 58–65 с.

    DONSKOY, V. I. & SCHERBINA, O. A. (1980) Managing the Development of the Recreation System with the use of Algorithms of Formation of Concepts. *A collection of articles 'Managing flows of material resources at the enterprise level, and unions'.* Glushkov' Institute for Cybernetics (Kiev). p. 58–65.

12. Ерёмин, И. И., Мазуров, В. Д. Нестационарные процессы математического программирования / И. И. Ерёмин, Вл. Д. Мазуров. — М.: Наука, 1979. — 288 с.

    ERIOMIN, I. I. & MAZUROV, Vl. D. (1979) *Nonstationary Processes of Mathematical Programming.* Moscow: Nauka.

13. Журавлёв, Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации / Ю. И. Журавлёв // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1978. — Вып. 33. — С. 5–68.

    ZHURAVLEV, Yu. I. (1978) On the Algebraic Approach to Recognition and Classification Problems. *Problems in Cybernetics.* (33). p. 5–68.

14. Журавлёв, Ю. И. Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации / Ю. И. Журавлёв // Доклады АН СССР. Математика. — 1976. — Том 231. — № 3. — С. 532–535.

    ZHURAVLEV, Yu. I. (1976) Extreme Algorithms in Mathematical Models for Pattern Recognition and Classification. *Reports of the USSR Academy of Sciences. Mathematics.* 231 (3). p. 532–535.

15. Козлова, М. Г. Знаниеориентированные модели принятия оптимальных решений / М. Г. Козлова // Ученые записки Симферопольского государственного университета. — 1998. — № 7(46). — С. 76–83.

    KOZLOVA, M. G. (1998) Knowledge Based Models of Optimal Decision Mking. *Scientific notes of Simferopol state University.* 46 (7). p. 76–83.

16. Мазуров, Вл. Д. Об одном итерационном методе планирования, использующем распознавание образов для учёта плохо формализуемых факторов / Вл. Д. Мазуров // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1973. — № 3. — С. 205–207.

MAZUROV, Vl. D. (1973) On Iterative Method of Planning using Pattern Recognition to Account for Poorly Formalized Factors. *Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Technical Cybernetics.* (3). p. 205–207.

17. Мазуров, Вл. Д. Применение методов теории распознавания образов в оптимальном планировании и управлении / Труды I Всесоюзной конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. — М: ЦЭМИ, 1971. — 49 с.

    MAZUROV, Vl. D. (1971) Application of Methods of Theory of Pattern Recognition in the Optimal Pplanning and Management. *Proceedings of I-st all-Union Conference on Optimal Planning and National Economy Management.* Moscow: Central Economics and Mathematics Institute. p. 49.

18. Мельников, Г. А., Губарев, В. В. Метод построения деревьев регрессии на основе муравьиных алгоритмов / Г. А. Мельников, В. В. Губарев // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. — 2014. — № 4 (34). — С. 72–78.

    MELNIKIV, G. A. & GUBAREV, V. V. (2014) The Method for Building Regression Trees based on Ant Colony Optimization Algorithms. *Reports of Tomsk State University of Control systems and Radioelectronics.* 34 (4). p. 72–78.

19. Местецкий, Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры / Л. М. Местецкий. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 286 с.

    MESTETSKIY, L. M. (2009) *Continuous Morphology of Binary Images: Figures, Skeletons, Circulars.* Moscow: PHYSMATHLIT.

20. Рудаков, К. В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации / К. В. Рудаков / В кн. «Распознавание, классификация, прогноз». — М.: Наука, 1989. — 176–201 с.

    RUDAKOV, K. V. (1989) On Algebraic Theory of Universal and Local Constraints for Classification Problems. *In the book: 'Recognition, classification, prediction. Moscow: NAUKA'.* (Issue 1). p. 58–65.

21. Руденко, Л. И. Аппроксимация целевой функции в частично определенной задаче оптимизации / Л. И. Руденко // Динамические системы. — К. Лыбидь, 1992. — Вып. 10. — С. 117–123.

    RUDENKO, L. I. (1992) Approximation of the Object Function into a Partially-Defined Problem of Optimization. *Dynamic Systems.* (Issue 10). p. 117–123.

22. Руденко, Л. И. О развитии подходов к принятию решений при неполной информации / М. Г. Козлова // Ученые записки ТНУ. Серия «Математика, Механика, Информатика». — 2001. — № 3. — С. 93–95.

    RUDENKO, L. I. (2001) On the Evolution of Approaches to Decision-Making with Incomplete Information. *Scientific notes of TNU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics.* (3). p. 93–95.

23. Рязанов, В. В., Тишин К. В., Щичко А. С. Восстановление зависимостей по прецедентам на основе применения методов распознавания и динамического программирования / В. В. Рязанов, К. В. Тишин, А. С. Щичко // Математические методы распознавания образов. — 2014. — Том 14. — № 1. — С. 168–171.

RYAZANOV, V. V., TISHIN, A. S., & SCHICHKO, A. S. (2014) The Restoration of Dependencies from Precedents based on the the Application of Methods of Pattern Recognition and Dynamic Programming. *Mathematical Methods of Pattern Recognition.* 14 (1). p. 168–171.

24. Сергиенко, И. В., Гупал, А. М. Индуктивная математика / И. В. Сергиенко, А. М. Гупал // Вестник НАН Украины. — 2002. — № 5. — С. 19–25.

    SERGIENKO, I. V., & GUPAL, A. M. (2002) Inductive mathematics. *Bulletin of the NAS of Ukraine.* (5). p. 19–25.

25. Таратынова, Н. Ю. Задача линейной оптимизации с частично заданной информацией / Н. Ю. Таратынова // Таврический вестник математики и информатики. — 2005. — № 1. — С. 82–93.

    TARATYNOVA, N. Yu. (2005) Linear Optimization Problem with Partially-Specified Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* (1). p. 82–93.

26. Таратынова, Н. Ю. Построение оптимизационной модели по прецедентной начальной информации как задача нелинейной регрессии / Н. Ю. Таратынова // Искусственный интеллект. — 2006. — № 2. — С. 238–241.

    TARATYNOVA, N. Yu. (2006) The construction of OptimizationModels by the Precedent Initial Information as a Problem of Nonlinear Regression. *Artificial Intelligence.* (2). p. 238–241.

27. ALI, J., KHAN, R., AHMAD, N., & MADSOON, I. (2012) Random Forests and Decision Trees. *International Journal of Computer Science.* 9, Issue 5 (3). p. 272–278.

28. ANAFIEV, A. S. & ABDULKHAIROV, A. (2013) An Approach to Reconstruct Target Function of the Optimization Problem with Precedent Initial Information. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathmatics.* (2). p. 4–9.

29. BREIMAN, L., FRIEDMAN, J. H., OLSHEN, R., & STONE, C. J. (1984) *Classification and Regression Trees.* New York: Chapman and Hal.

30. DONSKOY, V. I. (2016) Building Optimization Models from Data for the Intelligent Control Systems. *Intellectual Archive.* (#1708). p. 7.

31. DONSKOY, V. I. (2016) On the Smart Trees and Competence Areas Based Decision Forest. *Belorusian State University.* [Online] Electrinic Library ISSN 2519-4437. p. 3. Available from: http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/158800/1/Donskoy.pdf. [Accessed: 10th December 2017].

32. DONSKOY, V. I. (1998) Case-, knowledge-, and optimization- based hybrid approach in AI. *International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems IEA/AIE 1998.* Methodology and Tools in Knowledge-Based Systems (LNCS, volume 1415). p. 520–527.

33. DJUKOVA, E. V. & PESKOV, N. V. (2007) A Classification Algorithm based on the Complete Decision Tree. *Pattern Recognition and Image Analysis.* 17 (3). p. 363–367.

34. GENRIKHOV, I. E. (2011) Synthesis and Analysis of Recognizing Procedures on the basis of Full Decision Trees. *Pattern Recognition and Image Analysis.* 21 (1). p. 45–51.

35. KATZ, G., SHABTAI, A., ROKACH, L., & OFEK, N., (2014) ConfDTree: A Statistical Method for Improving Decision Trees. *Journal of Computer Science and Technology.* 29 (3). p. 392–407.
36. KUHN, M. (2017) *Package CUBIST.* [Online] Available from: https://mran.revolutionanalytics.com/web/packages/Cubist/Cubist.pdf. [Accessed: 27.12.2017].
37. LOH, W.-Y. (2014) Fifty Years of Classification and Regression Trees. *International Statistical Review.* 82 (3). p. 329–348.
38. MathWorks. (2017) *Building Models from Data and Scientific Principles.* [Online] Available from: https://www.mathworks.com/solutions/mathematical-modeling/building-models-data-scientific-principles.html. [Accessed: 15th December 2017].
39. MURTHY, S. K., KASIF, S., & SALZBERG, S. (1994) A System for Induction of Oblique Decision Trees. *Journal of Artificial Intelligence Research.* 2. p. 1–32.
40. QUINLAN, J. R. (1993) *C4.5: Programs for Machine Learning.* San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers Inc.
41. RAZI, M. A., ATHAPPILY, K. (2005) Random Forests and Decision Trees. *Expert Systems with Applications.* (29). p. 65–74.
42. SREINBERG, D. & COLLA, P. (2001) *CART: Tree-Structured Non-Parametric Data Analysis* . San Diego: Salford Systems.
43. TAMMINEN, S., LAURINEN, P. & RONING, J. (1999) Comparing regression trees with neural networks in aerobic fitness approximation. *Proceedings of the International Computing Sciences Conference Symposium on Advances in Intelligent Data Analysis, Rochester, N.Y., June 22-25.* p.414–419.
44. UTGOFF, P.E. (1989) Perceptron trees: A case study in hybrid concept representations. *Connection Science.* 1. p. 377–391.
45. VENTURA, D., MARTINEZ, T. R. (1996) A General Evolutionary/Neural Hybryd Approach to Learning Optimization Problems. *Proceedings of the World Congress on Neural Networks, San Diego, California.* p.1091–1096.
46. WU, D., BENNETT, K.P., CRISTIANINI, N. and SHAWE-TAYLOR, J. (2000) Enlarging the Margins in Perceptron Decision Trees. *Machine Learning.* 41 (3). p. 295–313.

УДК: 519.71

MSC2010: 93B30

ОКРЕСТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ И МЕТАСТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ [1]

© Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин

Липецкий государственный технический университет
физико-технологический факультет
ул. Московская, 30, Липецк, 398600, Российская Федерация
e-mail: *nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru*

Neighborhood Structures and Metastructural Identification.

Mishachev N. M., Shmyrin A. M.

Abstract. In the article, the concept of metastructural identification of a modeled system is formalized as the construction of a pair consisting of a neighborhood structure (graph) and the type of interactions between the nodes of this structure. In the language of metagraphs, two types of interactions are defined: vertex type, when the equations of the model correspond to the nodes of the structure, and the relational type, when the equations correspond to the edges of the structure. Structural identification of the modeled system, as a rule, can be divided into two stages. At the first stage we specify the nodes of the model, the connections between them and the sets of variables corresponding to these nodes and connections. On the second, we define the model equations with unknown parameters that are subject to further parametric identification. In this article, we propose to call the first stage a *metastructural* identification and define such identification as the construction of a neighborhood structure (graph), the choice of the type of interactions between the nodes of this structure and the indication of the corresponding variables. Our experience in modeling complex systems shows that in many cases it makes sense to distinguish between two types of such interactions: vertex-type, when the equations of the model correspond to the nodes of the structure, and the relational-type (edge-type) when the equations of the model correspond to the edges of the structure. The main purpose of this article is to create a system of definitions to describe these two situations and to clarify the relationships between them. These two types of models are convenient to define using the language of metagrafics. In order to describe the relationships between vertex-type and relational-type models, we are define the notions of clustering and declustering of neighborhood structures, and show that each relational-type structure can be uniquely declustered down to a vertex-type. This (fairly simple) result does not mean that we need to exclude the relational-type models, since declustering of the relational-type model often loses its visibility. We also discuss the inverse problem of clustering the vertex-type structures into more compact relational ones.

Keywords: *neighborhood structure, neighborhood system, metastructural identification, metagraph, vertex system, relational system.*

---

[1] **Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854)**.

1. Введение. Постановка задачи

Структурная идентификация моделируемой системы, как правило, может быть разделена на два этапа. На первом этапе мы задаем узлы модели, связи между ними и соответствующие этим узлам и связям наборы переменных. На втором мы определяем уравнения модели с неизвестными параметрами, подлежащими дальнейшей параметрической идентификации. В этой статье мы предлагаем называть первый этап *метаструктурной* идентификацией и определяем такую идентификацию, как построение окрестностной структуры (орграфа), выбор типа взаимодействий между узлами этой структуры и указание соответствующих переменных. Наш опыт математического моделирования сложных систем показывает, что во многих случаях имеет смысл различать два типа таких взаимодействий: вертексный (вершинный), когда уравнения модели соответствуют узлам структуры, и реляционный (реберный), когда уравнения модели соответствуют ребрам структуры. В данной статье мы описываем указанные два типа моделей на языке метаграфов и обсуждаем связи между ними. Для описания соотношений между вертексными и реляционными моделями мы определяем понятия кластеризации и декластеризации окрестностных структур и показываем, что каждая реляционная структура может быть канонически (единственным образом) декластеризована до вертексной. Это наблюдение не означает, что нужно отказаться от реляционных моделей в пользу вертексных, поскольку декластеризованные реляционные системы образуют довольно узкий специальный класс в пространстве всех вертексных систем и, кроме того, при декластеризация реляционной модели часто теряется ее наглядность, компактность и связь с моделируемым объектом. Мы обсуждаем также обратную задачу кластеризации вертексных структур до более компактных реляционных.

2. Окрестностные структуры и метаграфы

Далее, нам будет удобно различать термины «вершина» и «узел» графа: каждый узел является вершиной, но не каждую вершина является узлом. *Окрестностной структурой* мы называем *ориентированный* граф $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$, содержащий вершины $\widehat{V} = U \cup V \cup W$ трех типов: *входы* U, *узлы* V и *выходы* W, при этом:

- каждая вершина инцидентна, по крайней мере, одному ребру;
- каждый вход $u \in U$ имеет только выходящие ребра $e(u, *)$;
- каждый выход $w \in W$ имеет только входящие ребра $e(*, w)$;
- каждые два *узла* $v', v'' \in V$ могут быть соединены между собой не более чем двумя противоположно ориентированными ребрами-связями $e(v', v'')$ и $e(v'', v')$;
- каждый узел $v \in V$ имеет петлю $e(v, v)$;

- каждый узел $v \in V$ имеет входящие и выходящие ребра (кроме петли).

Заметим, что в силу этого определения в непустой окрестностной структуре число вершин $|\widehat{V}| \geqslant 2$, а если $U = \varnothing$ или $W = \varnothing$, то число узлов $|V| \geqslant 2$. Как обычно в теории графов, *источниками* вершины мы называем все входящие в нее вершины и *стоками* — все исходящие. Все узлы (то есть вершины из V) в силу наличия петель являются своими стоками и источниками, все входы имеют только стоки, все выходы — только источники. На рис. 1 изображена окрестностная структура с одним входом, одним выходом и одним узлом.

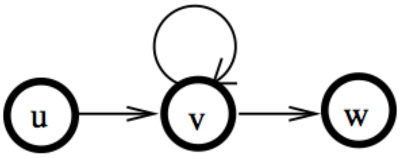


Рис. 1. Окрестностная структура

Метаграфом $\mathfrak{M} = (MV; ME)$ над конечным множеством V мы называем граф, метавершинами MV которого являются подмножества множества V, а метаребрами ME — пары метавершин. Или, на языке теории множеств: метавершины метаграфа — это элементы первого булеана $\mathfrak{B}(V)$, то есть $MV \subset \mathfrak{B}(V)$, а метаребра метаграфа — это двухэлементные подмножества второго булеана $\mathfrak{B}\mathfrak{B}(V)$, то есть $ME \subset \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}(V)$. Заметим, что метавершины MV метаграфа над V являются ребрами *гиперграфа* $(V; MV)$ над V и что любой гиперграф над V можно считать метаграфом, все метаребра которого соединяют непустые метавершины с пустой метавершиной $\varnothing \in \mathfrak{B}(V)$. По аналогии с обычными графами можно определить *ориентированные* метаграфы и *двудольные* метаграфы. В окрестностной структуре $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$ каждый узел $v \in V$ порождает метавершину его источников (*метаисточник*) $v^+ \in \mathfrak{B}(U \cup V)$ и метавершину его стоков (*метасток*) $v^- \in \mathfrak{B}(V \cup W)$, при этом $v \in v^+ \cap v^-$. Обозначим через V^+ и V^- множества всех метаисточников и метастоков, для всех узлов $v \in V$. Добавим еще к множеству метавершин все узлы $v \in V$. Каждый узел $v \in V$ порождает метаребро (v^+, v), соединяющее метаисточник узла с этим узлом, и метаребро (v^+, v^-), соединяющее метаисточник узла с его метастоком. Таким образом, каждая окрестностная структура $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$ порождает ориентированные двудольные метаграфы

$$\mathfrak{M}_V = \mathfrak{M}_V(\mathfrak{N}) = (V^+, V; V) \text{ и } \mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_R(\mathfrak{N}) = (V^+, V^-; V)\,.$$

Метаграфы $\mathfrak{M}_V$ и $\mathfrak{M}_R$ мы будем называть, соответственно, *вертексным* и *реляционным* метаграфами, ассоциированными с окрестностной структурой $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$.

Заметим, что вертексный метаграф не содержит никакой информации о выходах W, в то время как в реляционном метаграфе выходы W участвуют в образовании V^-. На самом деле в некоторых случаях имеет смысл рассматривать *аугментированные* метаграфы $\widetilde{\mathfrak{M}}_V(\mathfrak{N}) = (V^+ \cup W^+, V \cup W; V \cup W)$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}_R(\mathfrak{N}) = (V^+ \cup W^+, V^- \cup W; V)$, но мы не будем делать это в данной статье.

Замечание (от окрестностных структур к метаграфам и обратно). Обозначим через $\mathfrak{M}(S)$ и $\mathfrak{N}(S)$ множества всех метаграфов и множество всех окрестностных структур над конечным множеством вершин S. Далее, обозначим через $\mathfrak{M}^\bullet(S)$ множество метаграфов с отмеченной вершиной в каждой метавершине таких, что каждое метаребро соединяет метавершины с общей отмеченной вершиной, и через $\mathfrak{D}M^\bullet(S)$ — множество всех двудольных метаграфов из $\mathfrak{M}^\bullet(S)$, у которых в каждой доле нет метавершин с совпадающими отмеченными вершинами. Можно доказать, что описанная выше конструкция $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}_R(\mathfrak{N})$ определяет изоморфизм $\mathfrak{N}(S) \to \mathfrak{D}M^\bullet(S)$.

3. ВЕРТЕКСНЫЕ И РЕЛЯЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Метаграфам $\mathfrak{M}_V$ и $\mathfrak{M}_R$ соответствуют вертексные и реляционные системы над окрестностной структурой $\mathfrak{N}$. Опишем подробнее эти системы, ограничиваясь дискретным динамическим и статическим случаями. Мы предполагаем, что входы U, узлы V и выходы W пронумерованы числами от 1 до n_U, от $n_U + 1$ до $n_U + n_V$ и от $n_U + n_V + 1$ до $n_U + n_V + n_W$. Обозначения множеств вершин U, V, W и метаузлов v_i^+, v_i^- можно понимать и как обозначения соответствующих наборов чисел (номеров вершин). Каждому ребру $e(i,k)$, включая петли, соответствует переменная $Y(i,k) \in \mathbb{R}^{n(i,k)}$ *входа-выхода* из i-го узла в k-тый. Переменные $Y(i,k) = U(i,k)$ с $i \in U$ мы называем *внешними входами* в систему, переменные $Y(i,k) = W(i,k)$ с $k \in W$ — *внешними выходами* из системы, переменные $Y(i,k) = V(i,k)$ с $i,k \in V$ — *внутренними переменными.* Для петель $e(i,i)$ положим $Y(i,i) = X(i)$ и $\mathbb{R}^{n(i,i)} = \mathbb{R}^{n(i)}$. Переменную $Y(i,i) = X(i)$ мы называем *состоянием узла.* В вертексной модели вход-выход $Y(i,k)$ *не зависит от* k, то есть узел $v_i \in V$ передает по всем исходящим связям одну и ту же переменную своего состояния $X(i) = Y(i,i)$, а вход $u_i \in U$ — одну и ту же переменную входа $U(i) = U(i,k) = Y(i,k)$. Далее, метаисточнику v_i^+ узла $v_i \in V$ соответствует переменная *состояния метаисточника* $X_+(i) \in \mathbb{R}^{N(i,+)}$, где $\mathbb{R}^{N(i,+)}$ — это произведение всех пространств $\mathbb{R}^{n(k,i)}$ с $k \in v_i^+$. Метастоку v_i^- узла $v_i \in V$ соответствует переменная *состояния метастока* $X_-(i) \in \mathbb{R}^{N(i,-)}$, где $\mathbb{R}^{N(i,-)}$ — это произведение всех пространств $\mathbb{R}^{n(i,k)}$ с $k \in v_i^-$. В динамическом случае, который мы считаем далее основным, все перечисленные выше переменные зависят от (дискретного) времени t. Сделаем еще замечание по поводу переменных управления. Можно считать, что $U = \widetilde{U} \cup \widehat{U}$, где $\widetilde{U}$ — независимые входы и $\widehat{U}$ — управляемые входы. Соответственно, переменные входов $U(i,k)$ бывают двух типов: внешние переменные $\widetilde{U}(i,k)$ и переменные управления $\widehat{U}(i,k)$.

Вертексному метаграфу $\mathfrak{M}_V$ соответствует набор *функций*

$$F_i : \mathbb{R}^{N(i,+)} \to \mathbb{R}^{n(i)}\,, \quad i \in V\,, \tag{1}$$

каждая из которых преобразует состояние $X_+(i)$ метаисточника узла в состояние $X(i)$ этого узла. Термин «функция» мы используем здесь потому, что для скалярных переменных это действительно функции.

Реляционному метаграфу $\mathfrak{M}_R$ соответствует набор *операторов*

$$\mathbb{F}_i : \mathbb{R}^{N(i,+)} \to \mathbb{R}^{N(i,-)}\,, \quad i \in V\,, \tag{2}$$

каждый из которых преобразует состояние $X_+(i)$ метаисточника узла в состояние $X_-(i)$ метастока этого узла.

Функции F_i и операторы $\mathbb{F}_i$ порождают вертексные и реляционные системы, которые могут быть динамическими или статическими. Уравнения динамической вертексной системы имеют вид

$$X^{t+1}(i) = F_i(X^t_+(i))\,, \quad i \in V \tag{3}$$

(здесь n_V уравнений) или подробнее:

$$X^{t+1}(i) = F_i(\{X^t(k) | k \in v_i^+\})\,, \quad i \in V\,. \tag{4}$$

Уравнения динамической реляционной системы имеют вид

$$X^{t+1}_-(i) = \mathbb{F}_i(X^t_+(i)\,)\,, \quad i \in V \tag{5}$$

(здесь n_V *операторных* уравнений) или подробнее:

$$Y^{t+1}(i,m) = F_{im}(\{Y^t(k,i) | k \in v_i^+\})\,, \quad i \in V\,;\ m \in v_i^-\,. \tag{6}$$

В последнем случае количество уравнений равно $\Sigma_{v \in V}|v^-|$, где $|v^-|$ — это количество вершин в метастоке v^-. Термин «уравнения» в этих случаях традиционен, но не вполне корректен, поскольку при заданных входах это просто формулы для пересчета предыдущего состояния в последующее. Эти формулы превращаются в настоящие уравнения в задачах управления.

Статические вертексные и реляционные системы возникают как системы уравнений для стационарных состояний соответствующих динамических систем и имеют вид

$$X(i) = F_i(X_+(i))\,, \quad i \in V \tag{7}$$

(здесь n_V уравнений) и

$$X_-(i) = \mathbb{F}_i(X_+(i)\,)\,, \quad i \in V \tag{8}$$

(здесь n_V *операторных* уравнений). Теперь это настоящие уравнения — их нужно решать, чтобы найти стационарные режимы системы.

Замечание (метавертексные системы). На языке метаграфов реляционные системы фактически становятся вертексными или, точнее, двудольно-метавертексными, поскольку переменные входа-выхода $Y(i,k)$ объединяются в переменные $X_\pm(i)$ состояния метаузлов: метаисточников и метастоков.

4. Кластеризация и декластеризация

Пусть $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$ — некоторая окрестностная структура, вершины и ребра которой мы будем называть далее «красными». *Декластеризацией* красного узла $v \in V$ называется замена этого узла на $|v_-|$ зеленых узлов с дублированием входящих в v красных ребер и петли соответствующими зелеными ребрами и зелеными петлями, при этом выходящие из v ребра распределяются по новым узла и остаются красными, см. рис. 2. Точно так же можно определить декластеризацию входа $u \in U$.

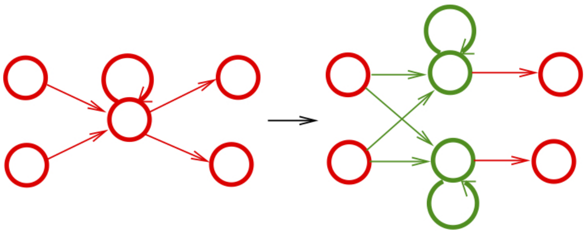


Рис. 2. Декластеризация узла

Результат последовательного применения декластеризации ко всем узлам и входам структуры $\mathfrak{N}$ не зависит от выбора порядка вершин и в итоге исходная «красная» окрестностная структура $\mathfrak{N}$ превращается в «зеленую» структуру $\mathfrak{N}^{\uparrow}$ такую, что вертексному метаграфу $\mathfrak{M}_V(\mathfrak{N}^{\uparrow})$ и реляционному метаграфу $\mathfrak{M}_R(\mathfrak{N})$ соответствует одна и та же система уравнений (5). Нетрудно привести примеры окрестностных структур $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ таких, что их декластеризации $\mathfrak{N}_1^{\uparrow}$ и $\mathfrak{N}_2^{\uparrow}$ совпадают, и потому обратная задача свертывания (кластеризации) окрестностной структуры $\mathfrak{N}$ в окрестностную структуру $\mathfrak{N}^{\downarrow}$ такую, что вертексному метаграфу $\mathfrak{M}_V(\mathfrak{N})$ и реляционному метаграфу $\mathfrak{M}_R(\mathfrak{N}^{\downarrow})$ отвечает одна и та же система уравнений, не имеет однозначного решения.

История вопроса

В этом пункте мы обсуждаем историю вопроса и даем библиографические ссылки. Системы уравнений, ассоциированные с графами, в той или иной версии достаточно часто возникают в приложениях (см., например, [1] или [2]), но эти версии, как правило, отражают специфику соответствующих приложений. *Окрестностные системы*, определенные в работах [3] и [4], являются достаточно общим классом систем на графах, и им было посвящено значительное количество работ. Заметим, что в [3] термин «окрестностная система» отсутствовал, но зато обсуждался соответствующий класс графов. Термин «окрестностная система» появился в [4], но в этой работе отсутствовало, хотя и подразумевалось, описание соответствующих графов. Далее, в работе [5] акцент был перенесен на эти графы, которые были названы *окрестностными структурами*, а разные типы окрестностных систем рассматривались уже как надстройки над окрестностными структурами. В работах [6], [7] и [8] определение окрестностной структуры последовательно видоизменялось и параллельно были определены два класса систем над окрестностными структурами — вертексные и реляционные. В работах [9], [10], и [11] построение моделей фактически уже содержало этап метаструктурной идентификации. В то же время во всех этих работах вопросы метаструктурной идентификации были вспомогательными, так как статьи были посвящены конкретным приложениям. Понятие метаграфа (см. [12]) оказалось идеально приспособленным для описания вертексных и реляционных систем. В данной статье, посвященной основаниям (а не приложениям), мы обновили, используя язык метаграфов, определение окрестностной структуры и двух типов систем над ней и формализовали понятие метаструктурной идентификации.

Заключение

Мы определили метаструктурную идентификацию моделируемой системы как построение окрестностной структуры (орграфа), выбор типа взаимодействия между узлами структуры и указание соответствующих переменных. Новым и, как мы считаем, полезным элементом здесь является указание типа взаимодействий между узлами. Мы описали, исходя из нашего опыта моделирования сложных объектов, два таких типа: вертексный, когда уравнения модели соответствуют узлам структуры, и реляционный, когда уравнения соответствуют ребрам структуры. Для определения этих двух типов исключительно удобным оказался язык метаграфов. Мы показали, что любую реляционную модель можно канонически преобразовать в эквивалентную ей вертексную, но при такой редукции количество узлов модели может значительно возрасти, будет потеряна наглядность модели и связь между моделью и физическим объектом.

Список литературы

1. Кафаров, В. В. Анализ и синтез химико-технологических систем / В. В. Кафаров, В. П. Мешалкин. — Москва: Химия, 1991. — 432 с.

   KAFAROV V. V. and MESHALKIN V. P. (1991) *Analysis and synthesis of chemical-technological systems.* Moscow: Chemistry.

2. Татур, Т. А. Основы теории электрических цепей / Т. А. Татур. — Москва: Высшая школа, 1980. — 274 с.

   TATUR T. A. (1980) *Fundamentals of the theory of electrical circuits.* Moscow: High school.

3. Блюмин, С. Л. Смешанное управление смешанными системами / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин. — Липецк: ЛГТУ, 1998. — 80 с.

   BLYUMIN S. L., SHMYRIN A. M and SHMYRIN D. A. (1998) *Mixed control of mixed systems.* Lipetsk: LGTU.

4. Блюмин, С. Л. Окрестностные системы / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин. — Липецк: ЛЭГИ, 2005. — 131 с.

   BLYUMIN S. L. and SHMYRIN A. M. (2005) *Neighborhood systems.* Lipetsk: LEGI.

5. Шмырин, А. М., Мишачев, Н. М., Канюгина, А. С. Кластеризация окрестностной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — Тамбов, 2016. — Т. 21(2). — С. 459–464. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-459-464.

   SHMYRIN, A. M., MISHACHEV, N. M., KANYUGINA, A. S. (2016) Clustering of neighborhood structure. *Bulletin of Tambov University. Natural and technical sciences.* 21 (2). p. 459–464.

6. Шмырин, А. М., Мишачев, Н. М. Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — Тамбов, 2016. — Т. 21(6). — С. 2113–2120. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120.

   SHMYRIN, A. M., MISHACHEV, N. M. (2016) Neighborhood systems and Kaczmarz algorithm. *Bulletin of Tambov University. Natural and technical sciences.* 21 (6). p. 2113–2120.

7. Шмырин, А. М., Мишачев, Н. М., Канюгина, А. С. Кластеризованная окрестностная структура и алгоритм Качмажа // Системы управления и информационные технологии. — Воронеж, 2017. — 68(2). — С. 93–97.

   SHMYRIN, A. M., MISHACHEV, N. M., KANYUGINA, A. S. (2017) Clustered Neighborhood structure and Kaczmazh algorithm. *Control Systems and Information Technology.* 68 (2). p. 93–97.

8. Мишачев, Н. М., Шмырин, А. М., Параметрическая идентификация окрестностных систем вблизи номинальных режимов // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — Тамбов, 2017. — Т. 22(3). — С. 558–564. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564.

   MISHACHEV, N. M., SHMYRIN, A. M. (2016) Parametric identification of neighborhood systems near nominal modes. *Bulletin of Tambov University. Natural and technical sciences.* 22 (3). p. 558–564.

9. Shmyrin, A. M., Mishachev, N. M., Semina, V. V. (2017) Structural Identification of Neighborhood Model for Ventilation-Filtration System. *International Journal of Applied Engineering Research.* 12 (21). p. 11114–11117.

10. Мишачев, Н. М., Шмырин, А. М., О градиенте нейросетевой функции // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — Тамбов, 2017. — Т. 22 (3). — С. 552–567. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-552-567.

    MISHACHEV, N. M., SHMYRIN, A. M. (2016) On the gradient of a neural network function. *Bulletin of Tambov University. Natural and technical sciences.* 22 (3). p. 552–567.

11. Шмырин, А. М., Мишачев, Н. М., Семина, В. В. Агрегирование окрестностных систем в модели вентиляции цеха цементного производства // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — Тамбов, 2017. — Т. 22(6-1). — С. 1346–1354. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1346-1354.

    SHMYRIN, A. M., MISHACHEV, N. M., SEMINA V. V. (2017) Aggregation of neighborhood systems in the model of ventilation of cement production workshop. *Bulletin of Tambov University. Natural and technical sciences.* 22 (6-1). p. 1346–1354.

12. BASU A. and BLANNING R. (2007) *Metagraphs and their applications.* Springer.

УДК: 51.74
MSC2010: 93C10

СТРУКТУРНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПРОМЫШЛЕННОЙ ВЕНТИЛЯЦИИ

© А. М. Шмырин, В. В. Сёмина, О. А. Мещерякова, Е. А. Лукьянова

Липецкий государственный технический университет
кафедра высшей математики
ул. Московская, 30, Липецк, 398600, Российская Федерация
e-mail: *amsh@lipetsk.ru*

Structural neighborhood modeling of the industrial ventilation system.

Shmyrin A. M., Semina V. V., Mesheryakova O. A. and Lukyanova O. A.

Abstract. Both in the chemical and metallurgy production there is a problem of exceeding the allowable concentration of harmful substances in the premises, shops and in the environment. If we consider cement production, we deal with dust, associated with a non-optimal operation of the dust-free ventilation system in the clinker burning department. The optimally organized ventilation system in any type of production ensures the microclimate of the production premises, corresponding to the sanitary norms and rules, which contributes to the increase of the staff's efficiency. The optimal operating modes of the industrial ventilation system associated with the technological process allow solving energy saving issues in the ventilation section and the maximum productivity. In this paper, the questions of the neighborhood modeling of the ventilation system in the premises of the cement production shop are considered. Any neighborhood model is a system of equations on an oriented graph such that the equations of the model correspond to the vertices of the graph and the entering edges specify the sets of variables participating in the corresponding equation. Therefore, any neighborhood model is structurally identified at least at the level of occurrences of variables in the equations. Further, postulating the type of equations (linear, bilinear, etc), we usually deal with parametric identification. Thus we eliminate the difficult problem of structural identification due to the introduction of a large number of parameters, and this is the advantage of the neighborhood-oriented approach. However, for reliable identification of the parameters we need a large number of experimental data and, in addition, we must be prepared for the difficulties created by multicollinearity. Therefore, it will be useful to take into account any available information related to the structure of the equations. In fact, for the ventilation-filtration model some simple physical considerations make it possible to significantly reduce the number of parameters.The proposed measures allow for purification of fresh air, remove excess heat, moisture, dust, harmful gases and vapors entering the air of workspaces and the atmosphere. The refinement of the structure of the model is based on physical considerations and leads to a piecewise trilinear dependencies with a significantly reduced number of coefficients subject to further parametric identification. A system for minimizing energy costs and reducing dust emission in the clinker burning shop is proposed, which allows increasing the environmental safety of production. This system can be applied to chemical and metallurgical production, where harmful substances are released into the air, with a slight adjustment for a specific production process. In the case of cement production workshop, the described ventilation-filtration model in the simplest case leads to a linearly constrained quadratic optimization problem.

Keywords: *neighborhood structure, ventilation system, structural identification, parametric identification, complex systems.*

Введение

Как в химическом, так и в металлургическом производстве существует проблема превышения допустимой концентрации вредных веществ в помещениях цехов и в окружающей среде. Если рассмотреть производство цемента, то мы имеем дело с клинкерной пылью, появление которой связано с неоптимальной работой системы пылеулавливания в цехе обжига клинкера.

Оптимально организованная система вентиляции на любом производстве обеспечивает микроклимат производственных помещений, соответствующий санитарным нормам и правилам, что способствует повышению производительности труда.

Оптимальные режимы работы промышленной системы вентиляции [1], связанные с технологическим процессом, позволяют решить проблемы энергосбережения в системах вентиляции и достичь максимальной производительности производства.

В статье [2] была рассмотрена модель окрестностной системы вентиляции и фильтрации воздуха в производственных помещениях. В данной статье рассмотрим проблему структурной идентификации этой модели.

Любая окрестностная модель представляет собой систему уравнений на ориентированном графе так, что уравнения модели соответствуют вершинам графа, а входящие ребра задают множество переменных, участвующих в соответствующем уравнении [6]. Поэтому любая окрестностная модель структурно идентифицируется, по крайней мере на уровне вхождения переменных, в уравнениях. Далее, определяется тип уравнений (линейный, билинейный и т. д.) и необходима параметрическая идентификация.

Таким образом, устраняется сложная проблема структурной идентификации из-за введения большого числа параметров. Это является преимуществом окрестностно-ориентированного подхода. Однако для надежной идентификации параметров нужно большое количество экспериментальных данных, кроме того, необходимо быть готовым к трудностям, связанным с мультиколлинеарностью. Например, уравнения системы, предложенные в [3], даже в простейшем линейном случае будут содержать около ста параметров. Поэтому будет полезно учесть любую имеющуюся информацию, связанную со структурой уравнения. Фактически для модели вентиляции и фильтрации воздуха некоторые простые физические соображения позволяют значительно уменьшить количество параметров.

1. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВЕНТИЛЯЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ ВОЗДУХА

Клинкерная пыль выделяется при всех процессах дробления и измельчения извести и угля, при разгрузке печи, последующем транспорте и измельчении цемента, его отгрузке. Три основных источника выбросов пыли дымовой трубы — это печь, клинкерный холодильник и цементные мельницы.

Технологическая блок-схема системы вентиляции в цехе обжига показана на рис. 1.

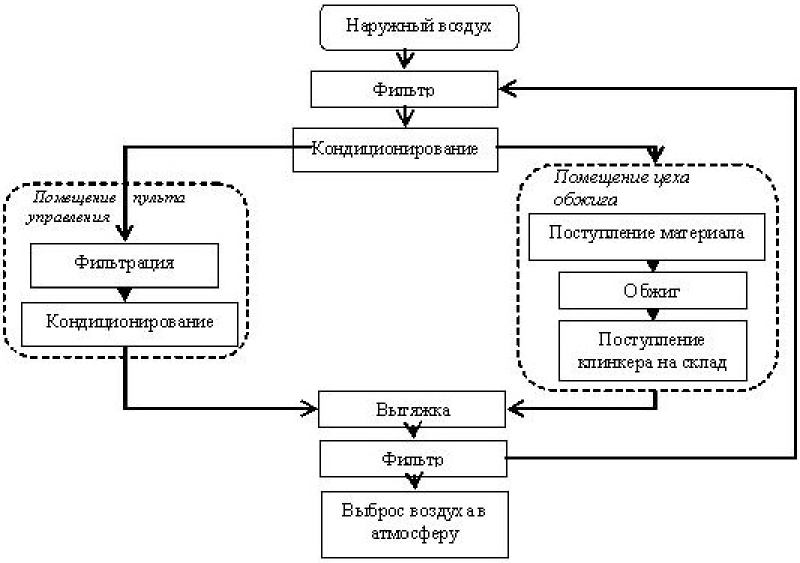


Рис. 1. Блок-схема системы вентиляции в цехе обжига

Система вентиляции воздуха должна также решать проблему снижения теплопоступлений от головки вращающейся цементной печи и нормализации влажности воздуха в рабочих помещениях.

2. СТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВЕНТИЛЯЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ ВОЗДУХА

Окрестностная структура [5] системы вентиляции цеха цементного производства в упрощенном базовом варианте показана на рис. 2 и состоит из следующих узлов (вершин):

- «Ext» — приточный воздух;
- «Cond» — фильтрация и терморегуляция приточного воздуха;
- «Plant» — производственный цех, нагрев воздуха и пылеобразование;
- «Filt» — вытяжка и фильтрация воздуха перед удалением и рециркуляцией.

Вместо номеров узлов окрестностной структуры мы используем мнемонические обозначения узлов первыми буквами их названий: e (для Ext), c (для Cond), p (для Plant) и f (для Filt). Верхние индексы t и d соответствуют температуре и содержанию пыли, индекс f связан с приточной вентиляцией и фильтрацией воздуха. В нашем базовом приближении функционирование системы описывается следующими переменными:

- Узел «Ext» — D_e, T_e — концентрация пыли в приточном воздухе, температура приточного воздуха; после фильтрации и терморегуляции, расход энергии в единицу времени на фильтрацию (точнее приток и фильтрацию) и терморегуляцию.
- Узел «Cond» — V_c, D_c, T_c, E_c^d, E_c^t — объем фильтруемого воздуха в единицу времени, концентрация пыли после фильтрации, температура воздуха, расход энергии в единицу времени на фильтрацию и кондиционирование воздуха.
- Узел «Plant» — T_p, D_p, N_t, N_d — установившаяся температура и концентрация пыли в цехе, интенсивность производства, интенсивность тепловыделения и пылеобразования.
- Узел «Filt» — V_f, D_f, E_f, R — объем фильтруемого воздуха в единицу времени, концентрация пыли, расход энергии в единицу времени на фильтрацию (точнее, вытяжку и фильтрацию), коэффициент рециркуляции.

Все величины измеряются в единицах системы СИ; $R \in [0,1]$ — безразмерный коэффициент, равный отношению объема возвращаемого воздуха ко всему объему фильтрованного воздуха [4].

Разделение переменных на состояния и управления часто зависит от решаемой задачи, зачастую зависит от решаемой проблемы и может изменяться. За переменные управления примем потребления энергии E_c^f, E_c^t, E_f и коэффициент рециркуляции воздуха R. Переменные D_e, T_e, N_t, N_d и N являются внешними, то есть не могут

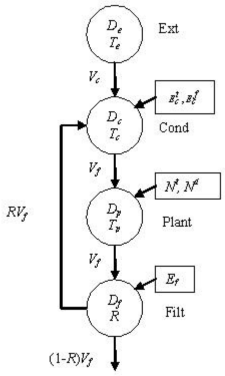


Рис. 2. Окрестностная структура системы вентиляции и фильтрации в производственном цехе

рассматриваться как управления. Формально описанная окрестностная модель имеет вид:

$$\begin{cases} D_c = F_{cd}(D_e, T_e, D_c, T_c, E_c^t, E_c^f, E_f, V_c, V_f, D_f, R); \\ T_c = F_{ct}(D_e, T_e, D_c, T_c, E_c^t, E_c^f, E_f, V_c, V_f, D_f, R); \\ D_p = F_{pd}(D_c, T_c, D_p, T_p, V_f, N^t, N^d); \\ T_p = F_{pt}(D_c, T_c, D_p, T_p, V_f, N^t, N^d); \\ D_f = F_f(D_p, T_p, V_f, E_f, D_f, R). \end{cases} \qquad (1)$$

Даже в простейшем линейном случае эти уравнения содержат около пятидесяти параметров. С одной стороны, некоторые структурные упрощения очевидны. С другой стороны, есть также более тонкие наблюдения, которые позволяют радикально упростить систему (1).

Внутренние переменные (как состояния, так и управления) должны удовлетворять некоторым технологическим ограничениям. В нашем случае

$$T_c \in [T_c^{\min}, T_c^{\max}], \;\; T_p \in [T_p^{\min}, T_p^{\max}]\,,$$
$$E_c^f \leqslant E_c^{\text{fmax}}, \;\; E_c^t \leqslant E_c^{\text{tmax}}, \;\; E_f \leqslant E_f^{\max}\,,$$
$$D_c \leqslant D_c^{\max}, \;\; D_p \leqslant D_p^{\max}, \;\; D_f \leqslant D_f^{\max}\,.$$

Некоторые из этих ограничений могут зависеть от внешних переменных. Например, ограничения на температуру и концентрацию пыли могут зависеть от влажности приточного воздуха, которая на данном этапе не учитывается. Значение $D_f^{\max}$ определяется экологическими нормами и, вообще говоря, зависит от погодных условий:

влажности воздуха, направления и силы ветра и т. п. Если вместо концентрации $D_f^{\max}$ задано ограничение $D_V^{\max}$ на количество пыли, выбрасываемой за единицу времени, то $D_f^{\max} = D_V^{\max}/[(1-R)\,V_f]$. Укажем очевидное уравнение баланса, связывающее объемы приточного и удаляемого воздуха:

$$V_c + R\,V_f = V_f \quad \text{или} \quad V_c = (1-R)\,V_f. \tag{2}$$

В более подробной модели уравнение баланса (2) будет иметь вид $V_c = (1-R)\,V_f + V_{ext}$, где V_{ext} — дополнительная утечка воздуха. Уравнение баланса (2) позволяет дополнительно исключить переменную V_c из уравнений.

3. Структурная идентификация

Первое наблюдение, которое помогает упростить модель, состоит в том, что подсистемы терморегуляции и фильтрации имеют только две общие переменные V_f и R. Принимая во внимание также уравнение баланса (2), мы можем переписать (1) в виде:

$$\begin{cases} D_c = F_{cd}(D_e, D_c, E_c^f, E_f, V_f, D_f, R); \\ T_c = F_{ct}(T_e, T_c, E_c^t, V_f, R); \\ D_p = F_{pd}(D_c, D_p, V_f, N^d); \\ T_p = F_{pt}(T_c, T_p, V_f, N^t); \\ D_f = F_f(D_p, V_f, E_f, D_f, R). \end{cases} \tag{3}$$

Но даже в этом случае простейшая линейная модель требует около тридцати параметров. Теперь мы можем записать три уравнения для фильтрации и два уравнения для терморегуляции, используя некоторые естественные физические соображения, связанные с потреблением энергии, балансом тепла и балансом содержания пыли. Нам понадобится функция $S(x) = \max(0, x)$, показанная на рис. 3.

Простейшая модель фильтрации, которая включает приток воздуха, его фильтрацию, вытяжку и вновь фильтрацию, может быть описана следующими уравнениями:

$$\begin{cases} E_c^f = \beta_c^f\,V_f + \beta_c^d\,\big[V_c\,S(D_e - D_c) + R\,V_f\,S(D_f - D_c)\big]; \\ D_p = \widehat{D}_c + \beta_p^d\,N^d - \beta_p^f\,V_f; \\ E_f = \beta_f^d\,V_f\,(D_p - D_f) + \beta_f^f\,V_f, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\widehat{D}_c = (1-R)\min\{D_c, D_e\} + R\min\{D_c, D_f\}\,. \tag{5}$$

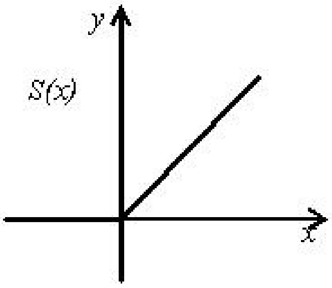


Рис. 3. Функция $S(x) = \max(0, x)$

Здесь для ясности мы не используем уравнение баланса (2). Первое (кусочно-трилинейное) уравнение описывает расход энергии в узле «Cond» для притока воздуха и фильтрации смешанного с рециркулируемым воздуха. Второе (кусочно-линейное) уравнение описывает баланс концентрации пыли в узле «Plant». Третье (кусочно-билинейное) уравнение описывает расход энергии в «Filt» для вытяжки и фильтрации воздуха. Переменная $\widehat{D}_c$ означает концентрацию пыли в смешанном подаваемом наружном и рециркулируемом воздухом после фильтрации до необходимого уровня D_c. Равенство $\widehat{D}_c = D_c$ имеет место, когда $D_c \leqslant D_e$ и $D_c \leqslant D_f$, в противном случае $\widehat{D}_c \leqslant D_c$.

Простейшую модель терморегуляции можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} E_c^t = \gamma_c^t \left|(V_c\,(T_e - T_c) + R\,V_f\,(T_p - T_c))\right|; \\ T_p = T_c + \gamma_p^t\,N^t - \gamma_p^f V_f\,. \end{cases} \tag{6}$$

Первое (кусочно-трилинейное) уравнение описывает расход энергии в узле «Cond» для терморегуляции смешанного подаваемого и рециркулируемого воздуха. Коэффициент γ_c, вообще говоря, может зависеть от режима нагрева или охлаждения. Второе (линейное) уравнение описывает тепловой баланс в узле «Plant». Принимая во внимание уравнение баланса (2), мы можем переписать (4) и (6) как:

$$\begin{cases} E_c^f = \beta_c^f\,V_f + \beta_c^d\,V_f\big[(1-R)\,S(D_e - D_c) + R\,S(D_f - D_c)\big]; \\ D_p = \widehat{D}_c + \beta_p^d\,N^d - \beta_p^f\,V_f; \\ E_f = \beta_f^d\,V_f\,(D_p - D_f) + \beta_f^f\,V_f; \\ E_c^t = \gamma_c^t\,V_f\big|(1-R)\,(T_e - T_c) + R\,(T_p - T_c))\big|; \\ T_p = T_c + \gamma_p^t\,N^t - \gamma_p^f V_f\,. \end{cases} \tag{7}$$

Окончательная система (7) содержит только девять коэффициентов, которые подлежат дальнейшей параметрической идентификации. Заметим, что интенсивности N^d и N^t часто линейно зависят от интенсивности производства N и в этом случае N^d и N^t можно заменить в (7) на N.

4. Проблема оптимизации

Целью нашей математической модели является оптимальное управление системой вентиляции и фильтрации воздуха [4]. Это означает, что значения всех переменных должны быть в заданных пределах, а потребление энергии

$$E = E_c + E_f = E_c^f + E_c^t + E_f \tag{8}$$

должно быть минимальным. Кроме того, можно рассмотреть проблему минимизации для экологического функционала:

$$E^2(k) = (1-k)\left(\frac{E}{E_n}\right)^2 + k\left(\frac{D_f}{D_f^n}\right)^2, \tag{9}$$

где E_n — номинальное значение потребления энергии, D_f^{n} — номинальная интенсивность выделения пыли, $k \in [0,1]$ является выбираемым коэффициентом. Необходимо обратить внимание на то, что при $k \to 1$ преобладают экологические требования.

В качестве примера рассмотрим следующий случай, который, в частности, относится к модели производства цемента, представленной в [1]. Пусть

$$D_e \leqslant D_c \leqslant D_f, D_c \ll D_p, T_e = T_c.$$

Эти условия подразумевают отсутствие фильтрации и терморегуляции для приточного воздуха в узле «Cond». Более того, в связи с целью нашей оптимизации, здесь рециркуляция не имеет смысла и, следовательно, $R = 0$. Тогда систему (7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} E_c^f = \beta_c^f\, V_f; \\ D_p = \beta_p^d\, N^d - \beta_p^f\, V_f; \\ E_f = \beta_f^d\, V_f\,(D_p - D_f) + \beta_f^f\, V_f; \\ E_c^t = 0; \\ T_p = T_e + \gamma_p^t\, N^t - \gamma_p^f V_f\,. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, для минимизации потребления энергии $E(V_f, D_f) = E_c^f + E_f$ мы имеем линейно ограниченную двумерную квадратичную задачу оптимизации:

$$(\beta_c^f + \beta_f^d\,((\beta_p^d\,N^d - \beta_p^f\,V_f) - D_f) + \beta_f^f)\,V_f \to \min \tag{11}$$

$$\begin{cases} \beta_p^d\,N^d - \beta_p^f\,V_f \leqslant D_p^{\max}; \\ T_e + \gamma_p^t\,N^t - \gamma_p^f V_f \leqslant T_p^{\max}; \\ D_f \leqslant D_f^{\max}\,. \end{cases} \tag{12}$$

5. Моделирование связанных сложных систем

Для исследования большой интерес представляет описание процесса производства, как сложной иерархической системы. Такая система, на примере цементного производства будет включать: систему обжига клинкера, систему вентиляции и кондиционирования воздуха и др.

Под сложной системой понимается система, которая, с одной стороны, состоит из большого числа компонентов, а с другой стороны, допускает наличие связей между ее компонентами. Стоит отметить, что сложная система обладает многомасштабной (в том числе пространственно-временной) изменчивостью. Многомасштабность сложных систем требует использования для их описания параметрически связанных моделей.

Таким образом, перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение иерархической системы, включающей описанную выше окрестностную модель системы вентиляции и модель производственного процесса.

В случае цементного производства эта окрестностная модель включает следующие основные узлы: помол клинкера, обжиг клинкера во вращающейся печи, поступление клинкера на склад. Данные производственные этапы связаны с выделением большого количества клинкерной пыли. Изменение температуры обжига на различных участках печи в допустимых пределах влияет на пылеобразование.

Заключение

Предлагается система минимизации затрат энергии и снижения выбросов пыли в цехе обжига клинкера цементного производства, которая позволяет повысить экологическую безопасность производства. Эта система может применяться для химического и металлургического производства, где вредные вещества высвобождаются в воздух, с небольшой корректировкой для конкретного производственного процесса.

В случае цеха по производству цемента описанная модель фильтрации и вентиляции в простейшем случае приводит к линейно ограниченной проблеме квадратичной оптимизации.

Список литературы

1. Ананьев, Б. А. Системы вентиляции и кондиционирования / Б. А. Ананьев. — М.: Евроклимат, 2001. — 567 с.

   ANANYEV, B. (2001) *Ventilation and air conditioning systems.* Moscow: Euroclimate.

2. SHMYRIN, A. M., SEMINA, V. V., KAVYGIN, V. V. (2017) Neighborhood model for the ventilation system in the industrial premises. *International Journal of Applied Engineering Research.* 12 (16). p. 6230–6234.

3. SHMYRIN, A. M., MISHACHEV, N. M., SEMINA, V. V. (2017) Structural Identification of Neighborhood Model for Ventilation-Filtration System. *International Journal of Applied Engineering Research.* 12 (21). p. 11114–11117.

4. SHMYRIN, A. M., POGODAEV, A. K., KAVYGIN, V. V., SEMINA, V. V. (2017) Modeling of the Objects Search by the Skills- Computational System of Technical Vision. *International Journal of Applied Engineering Research.* 12 (20). p. 10334–10338.

5. Shmyrin, A. M., MAZUR, I. P., KAVYGIN, V. V., YARTSEV, A. G. (2016) Parametrical neighborhood modelling of the process of forming the temperature of hot-rolled strip coiling. *Journal of Chemical Technology and Metallurgy.* 51 (4). p. 401–404.

6. Шмырин, А. М. Параметрическая идентификация окрестностной модели процесса воздухообмена в производственном помещении / А. М. Шмырин, Е. П. Трофимов, В. В. Семина // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки» / Тамбов. — Т. 3, 2017. — № 23. — С. 460–466.

   SHMYRIN, A. M., TROFIMOV, E. P., SEMINA, V. V. (2017) Parametric identification of the neighborhood model of the air exchange process in the production room. *Bulletin of Tambov State University.* 23 (3). p. 460–466.

Руденко Л. И. Исторический очерк развития физико-математического факультета Таврического университета / Л. И. Руденко // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 7 – 39.

УДК: 51 (09)

Таврический университет, официально открытый в Крыму 14 октября 1918 года, был основан в переломную эпоху и в полной мере познал все трудности и испытания на пути своего развития. В преддверии столетнего юбилея университета приходит осознание того, какую историческую роль он сыграл в становлении научных и культурных традиций, в создании всей системы образования и просвещения в Крыму. В числе первых в Таврическом университете был создан физико-математический факультет, и у его истоков стояли известные ученые-математики, которые положили начало математическому образованию и привнесли дух научного творчества. Менялись времена, менялся университет, и вместе с ним все изменения и преобразования переживал факультет, выросший из того давнего физико-математического в сегодняшний факультет математики и информатики. Эта статья-очерк посвящена ученым-математикам, преподавателям и выпускникам факультета в богатой и сложной истории Таврического университета от его открытия и до наших дней, внесших запоминающийся вклад в научное и историческое достояние Таврического университета и Крыма.

Ключевые слова: *Таврический университет, физико-математический факультет, преподаватели и выпускники.*

Андронова О. А. Применение теории операторных пучков к исследованию спектральных проблем с большой внутренней диссипацией / О. А. Андронова // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 40 – 50.

УДК: 517.9:532

В статье рассмотрены спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен, он зависит от интенсивности внутренней диссипации. Это обосновывает рассмотрение нескольких различных подходов к исследованию таких спектральных задач, основанных на теории операторных пучков и теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Результаты применения этих подходов не только дают общие свойства спектра, но и доказывают более тонкие утверждения о его локализации. В данной статье рассмотрим один из них, т. е. подход с применением теории операторных пучков. Применение этого подхода позволяет сформулировать утверждения о базисности Рисса системы собственных элементов.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, компактный самосопряжённый оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.*

Босова А. А., Круглов В. Е., Починка О. В. Энергетическая функция для Ω-устойчивого потока с седловой связкой на сфере / А. А. Босова, В. Е. Круглов, О. В. Починка // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 51 – 58.

УДК: 517.9

В настоящей работе рассматривается класс простейших негрубых Ω-устойчивых потоков на сфере. Простейшими негрубыми Ω-устойчивыми потоками мы называем Ω-устойчивые потоки с наименьшим числом неподвижных точек, одной сепаратрисой, соединяющей седловые точки и без предельных циклов. Для таких потоков строится энергетическая функция Морса.

Ключевые слова: *энергетическая функция, Ω-устойчивый поток, негрубый, простейший, седловая связка.*

Донской В. И. Извлечение оптимизационных моделей из данных: подход на основе решающих деревьев и лесов / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 59 – 86.

УДК: 519.7

В статье разработаны два подхода к синтезу моделей выбора решений из данных. Первый подход предполагает синтез «слитной» модели — решающего дерева, реализующего одновременно и регрессию, и классификацию вариантов решений на допустимые и не являющиеся допустимыми. Второй подход предполагает раздельное построение дерева регрессии для аппроксимации целевой функции и дерева классификации для выделения допустимых вариантов решений.

Ключевые слова: *извлечение оптимизационных моделей из данных, решающие деревья, решающий лес, BOMD-технология.*

Мишачев Н. М., Шмырин А. М. Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация / Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 87 – 95.

УДК: 519.71

В статье формализуется понятие метаструктурной идентификации моделируемой системы как построение пары, состоящей из окрестностной структуры (графа) и типа взаимодействий между узлами этой структуры. На языке метаграфов определяются два типа взаимодействий — вертексный, когда уравнения модели соответствуют узлам структуры, и реляционный, когда уравнения соответствуют ребрам структуры. Обсуждаются соотношения между моделями вертексного и реляционного типа.

Ключевые слова: *окрестностные структуры, окрестностные системы, метаструктурная идентификация, метаграф, вертексные системы, реляционные системы.*

Шмырин А. М., Сёмина В. В., Мещерякова О. А., Лукьянова Е. А. Структурное окрестностное моделирование систем промышленной вентиляции / А. М. Шмырин, В. В. Сёмина, О. А. Мещерякова, Е. А. Лукьянова // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 4 (37). — С. 96 – 105.

УДК: 51.74

В этой статье рассматриваются вопросы моделирования окрестностной системы вентиляции в помещениях цеха по производству цемента. Предлагаемые меры позволяют очищать приточный воздух, удалять избыточное количество тепла, влаги, пыли, вредных газов и паров, попадающих в воздух рабочей зоны и в атмосферу. Уточнение структуры модели основано на физических соображениях и приводит к кусочно-трилинейным зависимостям со значительно уменьшенным числом коэффициентов, подлежащих дальнейшей параметрической идентификации.

Ключевые слова: *окрестностная структура, системы вентиляции, структурная идентификация, параметрическая идентификация, сложные системы.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Андронова Ольга Андреевна	к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики и информатики факультета водных ресурсов и энергетики Академии строительства и архитектуры ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: o.andronova@list.ru*
Босова Анна Александровна	студентка третьего курса факультета информатики, математики и компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Российская Федерация *e-mail: aabosova@edu.hse.ru*
Донской Владимир Иосифович	д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: vidonskoy@mail.ru*
Круглов Владислав Евгеньевич	стажер-исследователь лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород, студент второго курса магистратуры института ИТММ ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Российская Федерация *e-mail: kruglovslava21@mail.ru*
Лукьянова Елена Александровна	к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: lukyanovaea@mail.ru*
Мещерякова Ольга Анатольевна	к. т. н., доцент кафедры прикладной математики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Российская Федерация *e-mail: omes-48@mail.ru*

Мишачев Николай Михайлович	к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Российская Федерация *e-mail: nmish@lipetsk.ru*
Починка Ольга Витальевна	д. ф.-м. н., профессор, заведующая кафедрой фундаментальной математики НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород, Российская Федерация *e-mail: olga-pochinka@yandex.ru*
Руденко Людмила Ивановна	к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: domlir@yandex.ru*
Семина Валерия Владимировна	старший преподаватель кафедры высшей математики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Российская Федерация *e-mail: valvlasem@mail.ru*
Шмырин Анатолий Михайлович	д. т. н., профессор кафедры высшей математики Липецкого государственного технического университета, г. Липецк, Российская Федерация *e-mail: amsh@lipetsk.ru*

Подписано к печати 21.12.2017. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,5 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/142. Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 15.03.2018.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7