Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 3 (36) ' 2017

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2017, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Протокол № 11 от 21 декабря 2017 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 519.833

MSC2010: 91A10, 91B52

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Т. В. Макаркина

Государственный гуманитарно-технологический университет
физико-математический факультет
ул. Зеленая, д. 22., г. Орехово-Зуево, Московс. область, 142600, Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

© Ю. А. Бельских

Государственный гуманитарно-технологический университет
физико-математический факультет
ул. Зеленая, д. 22., г.Орехово-Зуево, Московс. область, 142600, Российская Федерация
e-mail: *fizmat@ggtu.ru*

The Existence of Berge Equilibrium.

Zhukovskiy V. I., Makarkina T. V., Belskih Y. A.

Abstract.

The sufficient conditions of the existence of Berge equilibrium situation in noncooperative game of many persons in normal form are established. On the basis of these conditions the existence of Berge equilibrium situation in mixed strategies (by compact sets of strategies of players and continuity of their payoff functions) is proved. Let us consider the history of the appearance of the Berge equilibrium notion.

In 1949 the 21-years-old PhD student of Prinston University, John F. Nash (jun.), formalized the notion of “good” solution in noncooperative games (later called “Nash equilibrium”). It has got the broad spectrum of applications in economics, sociology, military sciences. And now after more than 50 years, in any journal of system analysis, game theory, mathematical programming we find the papers devoted to Nash equilibrium (NE). In 1994 John Nash won the Nobel Prize in economics in a common effort with John Harsanyi and R. Selten “for fundamental analysis of equilibria in noncooperative game theory”. Actually 20-years-old Nash developed the foundation of the scientific method that played the great role in the development of world economy.

However “in the sun there are spots” (proverb). And the main of them is “the eqoistic character” of Nash equilibrium concept. It appears in the fact that every player tries to increase only his own payoff, i.e. follows “politica dei campanile” , without considering interests of

other participants of the conflict. One of the methods to remove this negative is to use the approach (by formalization of "good" solution of the game), which differs from "dictated" Nash equilibrium. Such approach was proposed in 1994 at the scientific seminar (leader V.I.Zhukovskiy) at discussing the book of C.Berge «Theorie generale des jeux a n personnes games» (this book was published in Paris in 1957 and in 1961 it was translated into Russian [1]). Concretely the criticism of NE was caused by non-existence NE at strongly concave in strategy at least one player his payoff function (but the decision making is necessary!). The sense of the new approach lies in change of condition of solution stability not to deviation of the player whom belongs "payoff function" but to deviation of all players except the one who is "the owner" of this payoff function. We shall note three circumstances.

Firstly, we called the proposed new concept "BE". The term "BE" arouse as the result of reviewing Claude Berge's book. Secondly, in 1994 K.S.Vaisman (then the post-graduate student of V.Zhukovskiy) was engaged in construction of initial foundations of mathematical BE theory. In 1995 K. Vaisman defended his thesis "Berge equilibrium" (BE) in Leningrad University. (K.Vaisman died in 1998 at the age of 35 years). His sudden death suspended further development of the Berge equilibrium in Russia, but the notion of a Berge equilibrium was "exported from Russia" by Algerian scholars of V.Zhukovskiy M. Radjef and M. Larbani.

This notion caused the broad interest of our foreign colleagues. The acquaintance with their publications showed that "par le temps qui ceurt" (фр. – в настоящеев ремя)the most papers of this direction devoted to the properties of Berge equilibrium, singularities, modifications of this notion, relations with Nash equilibrium. It is supposed that in originated theory of Berge equilibrium the stage of formation of strict mathematical theory becomes nearer. Probably an intensive accumulation of facts will be replaced by the stage of evolutionary internal development. At this stage one should traditionally answer two fundamental questions:

1. Does the Berge equilibrium exist?
2. How one should find this equilibrium?

The present article is just devoted to answers of these both questions. Thirdly, the authors were motivated by the IX Moscow Festival of Science that partially was held in a new building of MSU Fundamental library on October 10, 2014. Apart from lectures of Nobel laureates chemists Kurt Wuthrich (USA, California), Jean-Marie Lehn (France), biochemist Sir Richard Roberts (USA), RAS academician M.Ya.Marov ("The Chelyabinsk meteor"), L.M. Zelenyi ("Exoplanets: Searching for a second Earth"), Doctors of Sciences A.V. Markov ("Why a human has large brain"), Yury I. Aleksandrov ("Neurons, humans and cultures"), the program included the lecture of RAS academician, director of RAS Institute of Philosophy A.A.Guseinov "The Golden Rule of ethics".Being inspired by lecture the first author of this article addressed the following question to the speaker, "Are you interested in a mathematical theory of the Golden rule?" The answer was confirmative. Now, at our strong belief, the concepts of Berge equilibrium most completely meet main requirement of the Golden Rule of Ethics, "Behave to others as you would like them to behave to you".

Thus, the article offered to the reader, first, suggests the method of construction of Berge equilibrium situation for finding minimax strategy in specific Germeier convolution, effectively constructed in assumed mathematical model of existence strategies if sets of strategies are compact and payoff function is continuous according to situations.

Keywords: *noncooperative game, payoff function, payoff, Nash and Berge equilibrium, Germeier convolution, mixed strategies.*

Введение

Упорядоченная тройка

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$$

образует нормальную форму бескоалиционной игры N лиц. В Γ $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ — множества порядковых номеров игроков, стратегии i-го игрока $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, ситуация $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in X$, $n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i$. Игроки, не имея возможности объединяться в коалиции, выбирают свои стратегии; на множестве X ситуаций определены функции выигрыша $f_i(x) : X \to \mathbb{R}$ каждого игрока. Цель участия i-го игрока (на “содержательном уровне”) — выбор своей стратегии так, чтобы его выигрыш (значение его функции выигрыша) стал кок можно большим.

Далее используем общепринятое (в играх вида Γ) обозначение: $(x||z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ для $z_i \in X_i$.

Определение 1. Ситуация $x^e = (x_1^e, \dots, x_2^e) \in X$ называется равновесной по Нэшу в игре Γ (РН), если

$$\max_{x_i\in X_i} f_i(x^e||x_i) = f_i(x^e), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Определение 2. Ситуация $x^B = (x_1^B, \dots, x_N^B) \in X$ называется равновесной по Бержу в игре Γ, если

$$\max_{x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}\in X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}} f_i(x||x_i^B) = f_i(x^B), \quad (i \in \mathbb{N}),$$

здесь

$$x_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \text{ и } X_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = \prod_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} X_j. \tag{2}$$

Для игры трех лиц ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$) требования (1) и (2) соответственно означают (3) и (4), именно

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1\in X_1} f_1(x_1, x_2^e, x_3^e) &= f_1(x^e), \\ \max\limits_{x_2\in X_2} f_2(x_1^e, x_2, x_3^e) &= f_2(x^e), \\ \max\limits_{x_3\in X_3} f_3(x_1^e, x_2^e, x_3) &= f_3(x^e), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{x_2,x_3} f_1(x_1^B, x_2, x_3) & = & f_1(x^B), \\ \max\limits_{x_1,x_3} f_2(x_1, x_2^B, x_3) & = & f_2(x^B), \\ \max\limits_{x_1,x_2} f_3(x_1, x_2, x_3^B) & = & f_3(x^B). \end{cases} \tag{4}$$

Перейдем к интерпретации равновесия по Бержу для семьи из трех человек: из мужа (игрок I), жены (игрок II) и сына (игрок III). Например, для мужа – муж, забывая о своих интересах (первое равенство из (4)), направляет все свои усилия, чтобы помочь жене и сыну достичь наибольших выигрышей (второе и третье равенство из (4)). Те (жена и сын), в свою очередь, помогают мужу достичь максимально возможного успеха (первое равенство из (4)). Аналогичное положение для игрока 2 (жены) и игрока 3 (сына). Такой альтруизм при разрешении конфликтов типичен для христианства, ислама, иудаизма, конфуцианства. Такой подход к принятию решения заведомо исключает вооруженные столкновения, войны. Мир стал бы много лучше, если бы при уравновешивании конфликтов применялось бы равновесие по Бержу (а не по Нэшу!).

Достаточные условия

Для игры Γ будем использовать новые переменные $z_i \in X_i$ $(i \in \mathbb{N})$ и $z = (z_1, \dots, z_N) \in X$, а также $(x||z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X$. Составим с помощью этих обозначений N скалярных функций:

$$\varphi_i(x, z) = f_i(x||z_i) - f_i(z_i) \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

и гермейеровскую свертку $\varphi_i(x, z)$, а именно,

$$\varphi(x, z) = \max_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x, z). \tag{6}$$

Ограничимся случаем $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$, т. е. игрой Γ трех лиц.

Теперь рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{I, II\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x, z) \rangle,$$

в которой игрок I за счет подходящего выбора своей стратегии $x \in X$ стремится максимально увеличить платежную функцию $\varphi(x, z)$, а игрок II с помощью выбора $z \in Z = X$ — максимально уменьшить $\varphi(x, z)$.

Бесспорным решением Γ^a является седловая точка $(x^0, z^B) \in X \times X$, т. е.

$$\max_{x \in X} \varphi(x, z^B) = \varphi(x^0, z^B) = \min_{z \in X} \varphi(x^0, z), \tag{7}$$

причем x^0 является максиминной, а z^B – минимаксной стратегией в Γ^a, т. е.

$$\min_{z\in X}\max_{x\in X}\varphi(x,z)=\max_{x\in X}\varphi(x,z^B),\quad \max_{x\in X}\min_{z\in X}\varphi(x,z)=\min_{z\in X}\varphi(x^0,z).$$

Утверждение 1. Если в игре Γ^a существует седловая точка (x^0, z^B), то минимаксная стратегия x^0 является равновесной по Бержу ситуацией в игре Γ.

Доказательство. Из (7) следует справедливость цепочки неравенств:

$$\varphi(x,z^B)\le\varphi(x^0,z^B)\le\varphi(x^0,z)\quad \forall x,z\in X. \tag{8}$$

Из (5) и (6) при $z=x^0$ имеем $\varphi(x^0,x^0)=0$. Отсюда, согласно (8) (по транзитивности), получаем $\varphi(x^0,z^B)\le 0$, поэтому $\varphi(x,z^B)\le 0$ $\forall x\in X$.

С учетом (6) и (5) тогда

$$f_i(x||z_i^B)-f_i(z^B)\le 0\quad \forall x\in X\quad (i\in\mathbb{N}),$$

т. е.

$$f_i(x||z_i^B)\le f_i(z^B)\quad \forall x\in X\quad (i\in\mathbb{N}).$$

□

Замечание 1. Из приведенного утверждения следует ясный и наглядный способ построения ситуации равновесия по Бержу исходной игры Γ:

1) по функциям выигрыша $f_i(x)$ из Γ построить с помощью (5) скалярные функции $\varphi_i(x,z)$, а затем с помощью (6) выписать гермейеровскую свертку $\varphi(x,z)$;

2) найти седловую точку (x^0, z^B) функции $\varphi(x,z)$ из (6).

Тогда минимаксная стратегия z^B является искомой ситуацией равновесия по Бержу игры Γ.

Пожалуй, наибольшая сложность здесь возникает при построении седловой точки негладкой функции $\varphi(x,z)$. Здесь уже следует привлечь к построению седловой точки негладкий анализ, разрабатываемый в России недавно скончавшемся ленинградским профессором Владимиром Федоровичем Демьяновым.

Существование в смешанных стратегиях

Нужно обладать большим оптимизмом, чтобы надеяться найти для игры Γ равновесную по Бержу ситуацию в чистых стратегиях $x_i\in X_i$ $i\in\mathbb{N}$ для трех и более игроков. Поэтому, следуя подходу Эмиля Бореля [2], Джона фон Неймана [3], Джона Нэша [4], [5] и их последователей, установим существование ситуации равновесия по Бержу в смешанных стратегиях. Причем будем следовать подходу к решению аналогичной задачи, предложенной первым автором в [6].

Напомним, что здесь и далее через $comp\,\mathbb{R}^{n_i}$ обозначаем множество всех компактов (замкнутых и ограниченных подмножеств из евклидова n_i-мерного пространства $\mathbb{R}^{n_i}$), непрерывность на X скалярной функции $f_i(x)$ обозначаем $f_i(\cdot) \in C(X)$. Не оговаривая особо, для элементов игры $\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ предполагаем выполнение следующих требований:

$$X_i \in comp\,\mathbb{R}^n, f_i(\cdot) \in C(X), i \in \mathbb{N} = \{1,2,3\}. \tag{9}$$

Перейдем к понятию *смешанного расширения игры* Γ, которое включает смешанные стратегии, ситуации, математическое ожидание функции выигрыша. Будем предполагать, что для игры Γ выполнены ограничения (9), тогда $f_i(x)$ непрерывна на компакте X, где $X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$. На каждом компакте $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(X_i)$ – множество подмножеств X_i таких, что $X_i \in \mathfrak{B}(X_i)$, причем $\mathfrak{B}(X_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathfrak{B}(X_i)$, кроме того, $\mathfrak{B}(X_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта X_i. Согласно математической теории игр, *смешанную стратегию* i-го игрока $\nu_i(\cdot)$ будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* X_i. Вероятностная мера есть неотрицательная скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X_i)$ подмножеств компакта $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

(1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathfrak{B}(X_i)$ (свойство счетной аддитивности функции $\nu_i(\cdot)$);

(2) $\nu_i(X_i) = 1$ (свойство нормированности), поэтому $\nu_i(Q^{(i)}) \leq 1$ для всех $Q^{(i)} \in \mathfrak{B}(X_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$. Построим ситуацию в смешанных стратегиях в виде меры-произведения

$$\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3),$$

множество которых обозначим через $\{\nu\}$, а также математическое ожидание $f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)$.

Получаем *смешанное расширение* игры Γ, обозначим которое через

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N} = \{1,2,3\}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle. \tag{10}$$

Будем использовать также меры-произведения

$$(\nu||\mu_i) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\mu_i(dz_i)\nu_{i+1}(dx_{i+1}),\ldots,\nu_N(dx_N),$$

где вероятностные меры $\mu_i(dz_i) \in \{\nu_i\}$, а новые чистые стратегии $z_i \in X_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Аналогично определению 2 введем

Определение 3. Ситуацию в смешанных стратегиях $\nu^B(\cdot) \in \{\nu\}$ назовем равновесной по Бержу в смешанном расширении (10) (или равновесной по Бержу ситуацией в смешанных стратегиях для игры Г), если

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu\}} f_i(\nu||\mu_i^B) = f_i(\nu^B) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Наконец, приведем утверждение, доказанное в [8].

Утверждение 2. Если в игре Г множества $X_i \in comp\,\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, то для функции

$$\varphi = \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)$$

имеет место неравенство

$$\max_{r=1,2,3} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dz)\nu(dx) \leq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)\mu(dz)\nu(dx)$$

при любых $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; здесь, напомним, скалярные функции $\phi_r(x,z)$ определены в (5) и (6) (этот результат аналогичен свойству: максимум суммы не больше суммы максимумов).

Перейдем к доказательству центрального результата настоящей статьи: установим существование равновесной по Бержу ситуации в смешанных стратегиях в игре Г при выполнении условий (9).

Теорема 1. *Если в игре* Г *множества* $X_i \in comp\,\mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i[\cdot] \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$, *то в этой игре существует равновесная по Бержу ситуация в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Как и в утверждении 1, рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle \{I, II\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x,z)\rangle.$$

В игре Γ^a множество X стратегий x первого I (максимизирующего $\varphi(x,z)$) игрока совпадает с тем же X. Одним из решений Γ^a является седловая точка $(x^0, z^B) \in X \times X$. Напомним, для нее при всех $x \in X$ и каждом $z \in X$ справедлива цепочка неравенств

$$\varphi(x, z^B) \leq \varphi(x^0, z^B) \leq \varphi(x^0, z).$$

Теперь игре Γ^a поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}^a = \langle \{I, II\}, \{\nu\}, \{\mu\}, \phi(\nu,\mu)\rangle,$$

где $\{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\nu(\cdot)$ первого I, а $\{\mu\} = \{\nu\}$ — множество смешанных стратегий $\mu(\cdot)$ второго игрока II, функция выигрыша первого I (математическое ожидание)

$$\varphi(\nu, \mu) = \int\limits_{X\times X} \varphi(x, z)\nu(dx)\mu(dz). \tag{11}$$

Отметим, что в силу [7] и (6), (5), (9) функция $\varphi(x, z)$ из (6) непрерывна на X. Решением игры $\tilde{\Gamma}^a$ (смешанного расширения Γ^a) также будет седловая точка (ν^0, μ^B), определяемая двумя последовательными неравенствами

$$\varphi(\nu, \mu^B) \le \varphi(\nu^0, \mu^B) \le \varphi(\nu^0, \mu) \tag{12}$$

при любых $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Эту пару (ν^0, μ^B) иногда называют *решением игры* Γ^a *в смешанных стратегиях.*

В 1952 г. Ирвинг Гликсберг установил [8] теорему существования равновесной по Нэшу ситуации бескоалиционной игры $N \ge 2$ лиц в смешанных стратегиях, откуда (для частного случая – антагонистической игры Γ^a) следует утверждение: пусть в игре Γ^a множество $X \subset \mathbb{R}^n$ суть непустой компакт, а функция выигрыша первого (I) игрока $\varphi(x, z)$ непрерывна на $X \times X$. Тогда для игры Γ^a существует решение (ν^e, μ^B), определенное в (12), то есть существует седловая точка в смешанных стратегиях.

С учетом (11) неравенства (12) примут вид

$$\int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu(dx)\mu^B(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi(x, z)\nu^0(dx)\mu^B(dz) \le$$

$$\le \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu^0(dx)\mu(dz)$$

при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Положив в

$$\varphi(\nu^0, \mu) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu^0(dx)\mu(dz)$$

меру $\mu_i(dz_i) = \nu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ (и тогда $\mu(dz) = \nu^0(dx)$), получаем, с учетом (12), что $\varphi(\nu^0, \nu^0) = 0$. Аналогично приходим к $\varphi(\nu^0, \nu^0) = 0$ и тогда из (12) имеем

$$\varphi(\nu^0, \mu^B) = 0. \tag{13}$$

Согласно $\phi(\nu^0, \mu^B) = 0$ и неравенству в (13) (по транзитивности), приходим к

$$\varphi(\nu, \mu^B) = \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x, z)\nu(dx)\mu^B(dz) \le 0 \quad \forall\nu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Применяя затем утверждение 2, отсюда получаем

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \max_{r=1,2,3} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\nu^B(dz) \geq \max_{r=1,2,3} \int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\nu^B(dz).$$

Поэтому для всех $r = 1, \ldots, N$ будет

$$\int\limits_{X\times X} \varphi_r(x,z)\nu(dx)\mu^B(dz) \leq 0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Отсюда при $r = 1, 2, 3$ согласно (5), а также с учетом нормированности $\nu(\cdot)$, приходим, например, при $r = 1$

$$0 \geq \int\limits_{X\times X} \varphi_1(x,z)\nu(dx)\mu^B(dz) = \int\limits_{X\times X} \max_{i\in\mathbb{N}}\{f_1(z_1,x_2,x_3) - f_1(z)\}\nu(dx)\mu^B(dz) \geq$$

$$\geq \int\limits_{X\times X} f_1(z_1,x_2,x_3)\nu(dx)\mu^B(dz) - \int\limits_{X} f_1(z)\mu^B(dz) \int\limits_{X} \nu^B(dx) =$$

$$= f_1(\mu_1^B, \nu_2, \nu_3) - f_1(\mu^B).$$

Аналогично устанавливается справедливость еще трех неравенств при $r = 2, 3$

$$0 \geq f_2(\nu_1, \mu_2^B, \nu_3) - f_2(\mu^B)$$

$$0 \geq f_3(\nu_1, \nu_2, \mu_3^B) - f_3(\mu^B).$$

Откуда, в силу определения 3, следует равновесие по Бержу $\mu^B(\cdot) \in \{\nu\}$ в игре (10). □

Заключение

В работе получены следующие результаты.

Установлены достаточные условия существования равновесной по Бержу ситуации в бескоалиционной игре трех лиц в нормальной форме. На основе этих условий доказано существование ситуации равновесия по Бержу в смешанных стратегиях (при компактных множествах стратегий игроков и непрерывности их функций выигрыша).

Список литературы

1. BERGE, C. (1957) *Théorie générule des jeux a n personnes.* Paris: Gauthier-Villar.

Берж, С. Общая теория игр нескольких лиц / С. Берж. — Москва: Физматгиз, 1961. — 114 с.

2. BOREL, E. (1921) La théorie du jeu et les equations inténgrales a noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* 173. p. 1304–1308.
3. VON NEUMANN, J. (1928) Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Ann.* Vol. 100. p. 295–320.
4. NASH, J. (1951) Non-cooperative games. *Math. Ann.* Vol. 54. p. 286–295.
5. NASH, J. (1951) Equilibrium point in N-person games. *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*. Vol. 36. p. 48–49.
6. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2017) Mathematical Foundations of the Golden Rule. I. Static Setting. *Automation and Remote Control.* 78 (10). p. 1920–1940.
7. Морозов, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. — М.: Наука, 1986. — 285 с.

   MOROZOV, V., SUHAREV, A. and FEDOROV, V. (1986) *Operations research in problems and exercises.* Moscow: Nauka.
8. GLICKSBERG, I. L. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 3 (1). p. 170–174.
9. ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2016) Pareto-Equilibrium Strategy Strategies Profile: sufficient Conditions and Existence in mixed Strategies. *Automation and Remote Control.* 77 (8). p. 1500–1510.

УДК: 517.984

MSC2010: 47G10, 45P05

ОБ ОПЕРАТОРАХ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

© А. С. Калитвин, В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
Институт естественных, математических и технических наук
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Российская Федерация
e-mail: *kalitvinas@mail.ru, kalitvin@gmail.com*

ON THE OPERATORS WITH PARTIAL INTEGRALS IN THE FUNCTION SPACES OF TWO VARIABLES.

Kalitvin A. S., Kalitvin V. A.

Abstract. Linear operators with partial integrals are studied. Using Banach's closed graph theorem, a general theorem on the continuity acting from a space X to a space Y of linear operator K with partial integrals is proved. Here X and Y are complete metric spaces of measurable functions with a shift-invariant metric, and the space X contains, together with each function, its modulus. With the application of this theorem, the continuity acting of the operator K in various function spaces is established. The conditions of this theorem are not satisfied by spaces of continuously differentiable functions. In this connection, a theorem on continuity acting of the operator K in spaces of continuously differentiable functions is established. The conditions for continuity acting of the operator K from the spaces of continuously differentiable functions to various classes of function spaces are obtained. The continuity of the operator K defined on the space BV of bounded variation functions of two variables is proved, and the acting conditions for this operator in the space BV of functions defined on a finite rectangle are established.

Keywords: *linear operators with partial integrals, Banach's closed graph theorem, acting and continuity of the operators, function spaces, the space BV of bounded variation functions, conditions for the action in BV.*

Введение

Линейные операторы с частными интегралами имеют многочисленные приложения в механике сплошных сред, теории упругих оболочек, в задачах для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, при изучении ряда других вопросов [1–4]. Основы теории таких операторов построены в монографиях [1–4]. При этом операторы исследовались в квазибанаховых идеальных пространствах, в частности в банаховых идеальных пространствах, Лебеговых пространствах L^p $(1 \le p \le \infty)$, в пространствах Орлича, пространствах со смешанной нормой [1, 2]. В пространствах непрерывных функций нескольких переменных такие операторы изучались в [3, 4], а в пространствах функций с непрерывными частными производными — в [5, 6]. Свойства операторов с частными интегралами в пространствах функций двух переменных ограниченной вариации до настоящего времени оказались неизученными. Целесообразность изучения таких операторов в пространстве функций двух переменных ограниченной вариации связана не только с различными применениями таких операторов, но и с тем, что такие операторы в указанных пространствах дают конкретные выражения для непрерывных преобразований одних мер Лебега – Стильтьеса в другие.

В работе приводятся общие теоремы о непрерывности линейных операторов с частными интегралами в различных классах функциональных пространств, основанные на теореме Банаха о замкнутом графике, и устанавливаются условия действия таких операторов в пространствах функций двух переменных ограниченной вариации.

1. Функциональные пространства

Пусть T и S — множества с полными σ-конечными мерами μ и ν (здесь и далее μ, ν — обычные меры Лебега, если $T = [a, b]$, $S = [c, d]$), $D = T \times S$ и Σ — пространство измеримых и почти всюду конечных функций на D. Σ — полное метрическое пространство, сходимость в котором совпадает со сходимостью по мере [7], а метрика инвариантна относительно сдвигов. Полуупорядоченность в Σ определяется неравенством $x \le y$, которое означает, что $x(t, s) \le y(t, s)$ почти всюду, где $x, y \in \Sigma$. Далее предполагается, что X и Y — метрические пространства, непрерывно вложенные в Σ, то есть элементы пространств X и Y принадлежат Σ и из сходимости x_n к x в X, y_n к y в Y вытекает сходимость x_n к x и y_n к y в Σ.

Идеальным пространством (ИП) на D называется линейное множество $X \subset \Sigma$, такое что из $x \in X$, $z \in \Sigma$, $|z| \le |x|$ следует $z \in X$.

Неотрицательный функционал $\| \cdot \|$ называется квазинормой на ИП X, если выполнены условия:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda x| \|x\|$ (λ — скаляр);

3) $\|x + y\| \le c(\|x\| + \|y\|)$.

При $c = 1$ квазинорма является нормой.

Монотонность квазинормы на X означает, что если $x, z \in X$, $|x| \leq |z|$, то $\|x\| \leq \|z\|$. Квазинормированное идеальное пространство (КНИП) — это ИП с монотонной квазинормой. Сходимость в КНИП X — это сходимость по квазинорме. В [8, 9] показано, что КНИП X — метризуемое пространство с метрикой, инвариантной относительно сдвигов, сходимость по которой совпадает со сходимостью по квазинорме. Полное КНИП X называется квазибанаховым идеальным пространством (КБИП).

Примерами КБИП являются банаховы идеальные пространства (БИП), например пространства Лебега L^p $(1 \leq p \leq \infty)$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича и другие [9, 10]. Пространство L^p $(0 < p < 1)$ является КБИП, но оно не нормируемо.

Рассматриваемые далее пространства не являются КБИП.

Через $C(D)$ обозначим банахово пространство непрерывных $D = T \times S$ функций, где T и S — компактные множества в некоторых метрических пространствах.

Пусть T — компактное множество, $U = U(S)$ и $V = V(S)$ — банаховы пространства функций, такие, что если $u \in U$, $v \in V$, то $|u| \in U$, $|v| \in V$, а $C(U)$ и $C(V)$ — пространства непрерывных вектор-функций со значениями в U и V соответственно. В силу известной теоремы Гротендика $C(U)$ и $C(V)$ реализуются в виде банаховых пространств функций двух переменных t и s.

Пусть φ и ψ — определенные на $(0,1]$ неубывающие функции класса Φ [11]. Будем говорить, что функция $\omega(x,y)$ принадлежит классу W, если она ограничена на квадрате $D = [0,1] \times [0,1]$, $\lim\limits_{x,y \to 0} \omega(x,y) = 0$, $\omega(0,y) = y$, $\omega(x,0) = x$, $\omega(x,y) \leq x + y$ и при $x, y, u, v \in [0,1]$, $u \geq v$, $\omega(u,y) \geq \omega(v,y)$, $\omega(x,u) \geq \omega(x,v)$.

Функция $x(t,s)$, по определению, принадлежит классу $H(\varphi,\psi)$, если она непрерывна на D и существует такое число $C > 0$, что для любых $(t,s), (\tau,\sigma) \in D$

$$|x(t,s) - x(\tau,\sigma)| \leq C\omega(\varphi(|t-\tau|), \psi(|s-\sigma|)),$$

где $\omega(x,y) \in W$.

Непосредственно проверяется, что $H(\varphi,\psi)$ — линейное пространство, оно является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\|_H = \|x\|_C + \sup_{(t,s) \neq (\tau,\sigma)} \frac{|x(t,s) - x(\tau,\sigma)|}{\omega(\varphi(|t-\tau|), \psi(|s-\sigma|))}. \tag{3}$$

Отметим, что в рассмотренных пространствах функция x принадлежит пространству вместе с функцией $|x|$. Для банахова пространства $C^{(n)}(D)$ $(n \in N)$ непрерывно дифференцируемых на D функций это свойство не выполняется.

Через G обозначим множество функций $g(\tau,\sigma)$, определенных на $D=[a,b]\times[c,d]$ и имеющих ограниченную вариацию. Для определения функции $g(\tau,\sigma)$ ограниченной вариации на D прямоугольник D разбиваем на части прямыми, параллельными координатным осям и проходящими через точки $a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=b$, $c=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_m=d$, и полагаем для функции $g(\tau,\sigma)$

$$v=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{ij}(g)|, \tag{4}$$

где $\Delta_{ij}(g)=g(\tau_i,\sigma_j)-g(\tau_{i-1},\sigma_j)-g(\tau_i,\sigma_{j-1})+g(\tau_{i-1},\sigma_{j-1})$. Если теперь множество сумм (4) ограничено сверху, то функция $g(\tau,\sigma)$ называется функцией с ограниченным изменением, а верхняя грань этого множества называется полным изменением функции $g(\tau,\sigma)$ в прямоугольнике D и обозначается $V_D(g)$.

Пусть $\Delta_i(s)=g(t_i,s)-g(t_{i-1},s)$ $(i=1,\cdots,n)$, $\Delta_j(t)=g(t,s_j)-g(t,s_{j-1})$ $(j=1,\cdots,m)$. Верхние грани сумм

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i(s)|,\quad \sum_{j=1}^{m}|\Delta_j(t)|$$

обозначим через $V(g)(s)$ и $V(g)(t)$ соответственно.

Через BV обозначим множество функций $g(t,s)$, для которых $V_D(g)$, $V(g)(s)$ и $V(g)(t)$ ограничены. BV — банахово пространство относительно нормы

$$\|g\|_{BV}=|g(a,c)|+V_D(g)+V_1+V_2,$$

где $V_1=\sup\limits_s V(g)(s)$, $V_2=\sup\limits_t V(g)(t)$.

2. Непрерывность действия линейных операторов с частными интегралами в функциональных пространствах

Пусть X и Y — линейные полные метрические пространства с метрикой, инвариантной относительно сдвигов. Оператор $A:M\subset X\to Y$ называется замкнутым, если его график — замкнутое множество в $X\times Y$. По теореме Банаха о замкнутом графике линейный оператор $A:X\to Y$ непрерывен в X.

Данная теорема находит широкое применение в теории операторов с частными интегралами. Схема ее применения к таким операторам впервые описана в [12].

Через K обозначим линейный оператор с частными интегралами следующего вида:

$$K=C+L+M+N, \tag{1}$$

где C, L, M, N — операторы, определенные равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\mu(\tau),\ (Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\nu(\sigma),$$

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s),\ (Nx)(t,s) = \iint\limits_D n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma),$$

$c : D \to R$, $l : D\times T \to R$, $m : D\times S \to R$, $n : D\times D \to R$ — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) X и Y — линейные полные метрические пространства функций, определенных на D, с метрикой, инвариантной относительно сдвигов;

б) X и Y непрерывно вложены в Σ;

в) для каждой функции x из X $|x| \in X$.

Тогда из действия оператора (1) из X в Y следует его непрерывность.

Доказательство. Пусть $x \in X$. По условию теоремы функция $y(t,s) = (Kx)(t,s)$ определена и принадлежит Y. Следовательно, функции $l(t,s,\tau)x(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)$ почти при всех (t,s) интегрируемы по τ на T, по σ на S и (τ,σ) на D соответственно. По свойству интеграла Лебега функции $|l(t,s,\tau)x(\tau,s)|$, $|m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)|$ и $|n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)|$ интегрируемы почти при всех (t,s) соответственно на T, S и D. Тогда на X определен оператор

$$]Kx[(t,s) = |c(t,s)|x(t,s) + \int\limits_T |l(t,s,\tau)|x(\tau,s)d\mu(\tau) +$$

$$+ \int\limits_S |m(t,s,\sigma)|x(t,\sigma)d\nu(\sigma) + \iint\limits_D |n(t,s,\tau,\sigma)|x(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma), \qquad (2)$$

причем в силу теоремы Фубини $]Kx[\in \Sigma$.

Таким образом, оператор (2) действует из X в Σ.

Покажем, что оператор K замкнут. Пусть последовательность функций $x_n \in X$ сходится к $x \in X$, и последовательность функций Kx_n сходится к $y \in Y$. Покажем, что $Kx = y$. В силу [9] найдется такая подподпоследовательность (x_{n_k}), что x_{n_k} сходится почти всюду к x и $\sum_{k=0}^{\infty} \rho(x_{n_k}, x) < \infty$ $(x_{n_0} = 0)$, где ρ — расстояние в X. Так как X — полное пространство, то функция

$$z(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}(t,s) - x(t,s)|$$

принадлежит X. Следовательно, сходящиеся при почти всех (t,s) к функциям $l(t,s,\tau)x(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)$ последовательности функций $l(t,s,\tau)x_{n_k}(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma)x_{n_k}(t,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)x_{n_k}(\tau,\sigma)$ ограничены интегрируемыми на T, S и D функциями $|l(t,s,\tau)|z(\tau,s)$, $|m(t,s,\sigma)|z(t,\sigma)$ и $|n(t,s,\tau,\sigma)|z(\tau,\sigma)$ соответственно. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла последовательности функций $(Lx_{n_k})(t,s)$, $(Mx_{n_k})(t,s)$ и $(Nx_{n_k})(t,s)$ сходятся почти всюду к функциям $(Lx)(t,s)$, $(Mx)(t,s)$ и $(Nx)(t,s)$, а последовательность функций $(Cx_{n_k})(t,s)$, очевидно, сходится к $(Cx)(t,s)$. Тогда $(Kx_{n_k})(t,s)\to(Kx)(t,s)$. По нашему предположению $Kx_{n_k}\to y$ в Y. Следовательно, $Kx=y$. Поэтому оператор K замкнут. В силу теоремы Банаха о замкнутом графике он непрерывен. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы вытекает непрерывность действия оператора (1) в различных классах функциональных пространств. Отметим, что в теореме 1 Y может совпадать с Σ.

Следствие 1. *Если X — одно из пространств БИП $X_0(D)$, $C(D)$, $C(V)$, $H(\varphi,\psi)$, а Y — одно из пространств КБИП $Y_0(D)$, BV, $C(D)$, $C(V)$, $H(\varphi,\psi)$, Σ, то оператор (1) непрерывен из X в Y.*

Для доказательства достаточно отметить, что пространства, рассмотренные в условии следствия 1, удовлетворяют условию теоремы 1.

Теорема 1 не применима при $X=C^{(n)}(D)=C^{(n)}([a,b]\times[c,d])$, так как для $X=C^{(n)}(D)$ не выполнено предположение 2) в ее условии. Тем не менее справедлива

Теорема 2. *Если оператор (1) действует из $X=C^{(n)}(D)$ в X и действует из $C(D)$ в $C(D)$, то оператор (1) непрерывен из X в X.*

Доказательство. Докажем, что действующий из X в X оператор (1) замкнут. Пусть последовательность $(x_n)\subset X$, $x_n\to x$ и $Kx_n\to y$. Выберем подпоследовательность (x_{n_k}) так, чтобы $x_{n_0}=0$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|x_{n_k}-x\|<\infty$. По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|x_{n_k}-x|$ из непрерывных функций сходится равномерно на D. Тогда его сумма $z(t,s)$ является непрерывной на D функцией. Почти при всех $(t,s)\in D$ сходящиеся к функциям $l(t,s,\tau)x(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)$ последовательности функций $l(t,s,\tau)x_{n_k}(\tau,s)$, $m(t,s,\sigma)x_{n_k}(t,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)x_{n_k}(\tau,\sigma)$ ограничены функциями $|l(t,s,\tau)|z(\tau,s)$, $|m(t,s,\sigma)|z(t,\sigma)$, $|n(t,s,\tau,\sigma)|z(\tau,\sigma)$, которые интегрируемы на $[a,b]$, $[c,d]$ и D соответственно, в силу действия оператора (1) из $C(D)$ в Σ и свойств интеграла Лебега. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла последовательности $(Lx_{n_k})(t,s)$, $(Mx_{n_k})(t,s)$, $(Nx_{n_k})(t,s)$ сходятся почти при всех (t,s) к функциям $(Lx)(t,s)$, $(Mx)(t,s)$, $(Nx)(t,s)$ соответственно.

Последовательность $(Cx_{n_k})(t,s)$, очевидно, сходится в Σ к $(Cx)(t,s)$.

Тогда последовательность $(Kx_{n_k})(t,s)$ сходится к функции $(Kx)(t,s)$. По предположению, она сходится в $C^{(n)}(D)$ к $y(t,s)$. Так как $C^{(n)}(D) \subset \Sigma$ и в метрическом пространстве Σ $Kx_{n_k} \to Kx$, то в силу единственности предела, $Kx = y$.

Следовательно, оператор K замкнут. По теореме Банаха о замкнутом графике он непрерывен. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Если оператор (1) действует из $X = C^{(n)}(D)$ в одно из пространств BV, $C(D)$, $C(V)$, $H(\varphi,\psi)$, Σ и действует из $C(D)$ в $C(D)$, то оператор (1) непрерывен на X.*

Отметим, что условия действия оператора (1) в различных классах функциональных пространств можно найти в [1–6]. Непрерывность действия и признаки действия и оператора (1), определенного на пространстве BV функций двух переменных ограниченной вариации, до настоящего времени фактически не изучались. Эти вопросы рассматриваются в следующем разделе.

3. Линейные операторы с частными интегралами, определенные на пространстве BV

Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 3. *Если оператор (1) действует из пространства BV в одно из пространств КБИП $Y_0(D)$, $C(D)$, $C(V)$, $H(\varphi,\psi)$, Σ, то оператор (1) непрерывен из BV в BV.*

Достаточные условия действия оператора (1) в BV содержит

Теорема 4. *Пусть функция $c \in BV$, функции $|l(t,s,\tau)| \le C_1$, $|m(t,s,\sigma)| \le C_2$, $|n(t,s,\tau,\sigma)| \le C_3$, где C_1, C_2 и C_3 — некоторые постоянные, и пусть выполнены условия:*

а) $\int\limits_a^b V_D(l(\cdot,\cdot,\tau))d\tau < \infty$, $\sup\limits_s\left(\int\limits_a^b V_t l(t,s,\tau)d\tau\right) < \infty$, $\sup\limits_t\left(\int\limits_a^b V_s l(t,s,\tau)d\tau\right) < \infty$, *где полные вариации $V_t l(t,s,\tau)$, $V_s l(t,s,\tau)$ функции $l(t,s,\tau)$ рассматриваются как полные вариации функции по переменным t и s соответственно;*

б) $\int\limits_c^d V_D(m(\cdot,\cdot,\sigma))d\sigma < \infty$, $\sup\limits_s\left(\int\limits_c^d V_t m(t,s,\sigma)d\sigma\right) < \infty$, $\sup\limits_t\left(\int\limits_c^d V_s m(t,s,\sigma)d\sigma\right) < \infty$, *где полные вариации $V_t m(t,s,\sigma)$, $V_s m(t,s,\sigma)$ функции $m(t,s,\sigma)$ рассматриваются как полные вариации функции по переменным t и s соответственно;*

в) $\int\limits_a^b\int\limits_c^d V_{t,s}n(t,s,\tau,\sigma)d\tau d\sigma \in BV$, *где* $V_{t,s}n(t,s,\tau,\sigma)$ *— полная вариация функции* $n(t,s,\tau,\sigma)$ *по переменным* t *и* s.

Тогда оператор (1) действует в BV.

Доказательство. Докажем, что операторы

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s),\ (Lx)(t,s) = \int\limits_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau,$$

$$(Mx)(t,s) = \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, (Nx)(t,s) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

действуют в BV.

Действие в BV оператора C очевидно ввиду того, что из $c \in BV$ и $x \in BV$ следует $cx \in BV$.

Докажем, что оператор L действует в BV.

Пусть $x \in BV$, тогда

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{ij}(Lx)| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Bigg|\int\limits_a^b l(t_i,s_j,\tau)x(\tau,s_j)d\tau - \int\limits_a^b l(t_{i-1},s_j,\tau)x(\tau,s_j)d\tau -$$

$$- \int\limits_a^b l(t_i,s_{j-1},\tau)x(\tau,s_{j-1})d\tau + \int\limits_a^b l(t_{i-1},s_{j-1},\tau)x(\tau,s_{j-1})d\tau\Bigg| =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Bigg|\int\limits_a^b [l(t_i,s_j,\tau) - l(t_{i-1},s_j,\tau) - l(t_i,s_{j-1},\tau) + l(t_{i-1},s_{j-1},\tau)]x(\tau,s_j)d\tau +$$

$$+ \int\limits_a^b [l(t_i,s_{j-1},\tau) - l(t_{i-1},s_{j-1},\tau)][x(\tau,s_j) - x(\tau,s_{j-1})]d\tau\Bigg| \le$$

$$\le \left(\int\limits_a^b V_D(l(\cdot,\cdot,\tau))d\tau + \sup_s \int\limits_a^b V_t l(t,s,\tau)d\tau)\right)\|x\|_{BV} < \infty.$$

Покажем, что $\sup_t V(Lx)(t)$ и $\sup_s V(Lx)(s)$ конечны. Имеем

$$\sum_{j=1}^{m}|(Lx)(t,s_j) - (Lx)(t,s_{j-1})| = \sum_{j=1}^{m}\Bigg|\int\limits_a^b [l(t,s_j,\tau)x(\tau,s_j) - l(t,s_{j-1})x(\tau,s_{j-1})]d\tau\Bigg| =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left| \int_a^b [l(t, s_j, \tau) - l(t, s_{j-1})] x(\tau, s_j)] d\tau + \int_a^b l(t, s_{j-1}, \tau)[x(\tau, s_j) - x(\tau, s_{j-1})] d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left(\sup_t \int_a^b V_s l(t, s, \tau) d\tau + C_1(b-a) \right) \|x\|_{BV} \leq const < \infty.$$

Конечность $\sup_s V(Lx)(s))$ вытекает из оценки

$$\sum_{i=1}^{n} |(Lx)(t_i, s) - (Lx)(t_{i-1}, s)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b [l(t_i, s, \tau) - l(t_{i-1}, s)] x(\tau, s) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_s \int_a^b V_t l(t, s, \tau) d\tau \|x\|_{BV} \leq const < \infty.$$

Таким образом, $Lx \in BV$, следовательно, оператор L действует в BV.

Действие в BV оператора M доказывается аналогично.

Действие оператора N в BV вытекает из следующих оценок:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\Delta_{ij}(Nx)| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b \int_c^d [n(t_i, s_j, \tau, \sigma) - \right.$$

$$\left. -n(t_{i-1}, s_j, \tau, \sigma) - n(t_i, s_{j-1}, \tau, \sigma) + n(t_{i-1}, s_{j-1}, \tau, \sigma)] x(\tau, \sigma) d\tau\sigma \right| \leq$$

$$\leq \left\| \int_a^b \int_c^d V_{t,s} n(t_, s, \tau, \sigma) d\tau\sigma \right\|_{BV} \|x\|_{BV} < \infty.$$

Таким образом, операторы C, L, M, N действуют в пространстве BV. Следовательно, оператор (1) действует в BV. Теорема доказана. $\square$

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. Установлена теорема о непрерывности действия линейного оператора K с частными интегралами в полных метрических пространствах измеримых функций, получены следствия этой теоремы о непрерывности действия оператора K из одних пространств в другие.

2. Установлена теорема о непрерывности действия оператора K в пространствах непрерывно дифференцируемых функций, и получены условия непрерывности действия оператора K из пространств непрерывно дифференцируемых функций в различные классы функциональных пространств.

3. Доказана непрерывность оператора K, определенного на пространстве BV функций двух переменных ограниченной вариации, и установлены условия действия этого оператора в пространстве BV функций, определенных на конечном прямоугольнике.

Список литературы

1. Appell, J. M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J. M. Appell, A. S. Kalitvin & P. P. Zabrejko. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 c.

2. Калитвин, А. С. Линейные операторы с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

   KALITVIN, A. S. (2000) *Linear operators with partial integrals.* Voronegh: CHKI.

3. Калитвин, А. С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2006. — 177 с.

   KALITVIN, A. S. & KALITVIN, V. A. (2006) *Volterra and Volterra-Fredholm integral equations with partial integrals.* Lipetsk: LGPU.

4. Калитвин, А. С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А. С. Калитвин, Е. В. Фролова. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

   KALITVIN, A. S. & FROLOVA, E. V. (2004) *Linear equations with partial integrals. C-theory.* Lipetsk: LGPU.

5. Калитвин, А. С. О непрерывности операторов с частными интегралами в пространстве дифференцируемых функций / А. С. Калитвин, И. П. Рудометкина // Операторы с частными интегралами / Сб. науч. тр. — Липецк, 1997. — Вып. 3. — С. 7–12.

   KALITVIN, A. S. & RUDOMETKINA, I. P. (1997) On continuity operators with partial integrals in the space of differentiable functions. *Operators with partial integrals.* Lipetsk. p. 7–12.

6. Калитвин, А. С. Линейные операторы с частными интегралами в пространстве непрерывно дифференцируемых функций / А. С. Калитвин, И. П. Рудометкина // Операторы с частными интегралами / Сб. науч. тр. — Липецк, 2000. — Вып. 4. — С. 28–33.

   KALITVIN, A. S. & RUDOMETKINA, I. P. (2000) The linear operators with partial integrals in the space of continuously differentiable functions. *Operators with partial integrals.* Lipetsk. p. 28–33.

7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.

   KANTOROVICH, L. V. & AKILOV, G. P. (1984) *Functional analysis.* Moscow: Nauka.

8. Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. — М.: Мир, 1985. — 254 с.

   BERG, J. & LÖFSTRÖM, J. (1976) *Interpolation spaces-an introduction.* Moscow: Nauka.

9. Калитвин, А. С. Нелинейные операторы с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Липецк: ЛГПУ, 2002. — 208 с.

   KALITVIN, A. S. (2000) *Nonlinear operators with partial integrals.* Lipetsk: LGPU.

10. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

    KREJN, S. G., PETUNIN, Ju. I. & SEMENOV, E. M. (2000) *Interpolation of linear operators.* Moscow: Nauka.

11. Гусейнов, А. И. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений / А. И. Гусейнов, Х. Ш., Мухтаров. — М.: Наука, 1980. — 416 с.

    GUSEINOV, A. I. & MUHTAROV, X. H (1980) *Introduction in theory of nonlinear singular integral equations.* Moscow: Nauka.

12. Kalitvin, A. S., Zabrejko, P. P. On the theory of partial untegral operators // J. Integral Equ.Applications. — 1991, 3. — 3. — С. 351–382.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

MSC2010: 70E55, 35M33

О КОЛЕБАНИЯХ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© Н. Д. Копачевский

Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского

факультет математики и информатики

кафедра математического анализа

e-mail: *kopachevsky@list.ru*

© В. И. Войтицкий

Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского

факультет математики и информатики

кафедра математического анализа

e-mail: *victor.voytitsky@gmail.com*

© З. З. Ситшаева

Крымский инженерно-педагогический университет

Кафедра математики

e-mail: *szz2008@mail.ru*

On oscillations of two joined pendulums with cavities partially filled with an incompressible ideal fluid.

Kopachevsky N. D., Voytitsky V. I., Sitshaeva Z. Z.

Abstract. Let G_1 and G_2 be two joined bodies with masses m_1 and m_2. Each of them has a cavity partially filled with homogeneous incompressible ideal fluids situated in domains Ω_1 и Ω_2 with free boundaries $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)$ and rigid parts S_1, S_2. Let ρ_1, ρ_2 be densities of fluids. We suppose that the system oscillates (with friction) near the points O_1, O_2 which are spherical hinges.

We use the vectors of small angular displacement

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t) \vec{e}_k^{\,j}, \quad k = 1, 2,$$

to determine motions of the removable coordinate systems $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ (connected with bodies) relative to stable coordinate system $O_1 x^1 x^2 x^3$. Then angular velocities $\vec{\omega}_k(t)$ of bodies G_k is equal to $d\vec{\delta}_k/dt$.

Let $\vec{u}_k(x,t) = \vec{w}_k(x,t) + \nabla\Phi_k(x,t)$, $\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k)$, $\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ and $p_k(x,t) \in H^1(\Omega_k)$ be fields of fluids velocities and dynamical pressures in Ω_k (in removable coordinate systems), $\zeta_k(x,t) \in L_{2,\Gamma_k} := L_2(\Gamma_k) \ominus \operatorname{sp} 1_{\Gamma_k}$ are functions of normal deviation of $\Gamma_k(t)$ from equilibrium

plane surfaces $\Gamma_k(0) = \Gamma_k$. Then we consider initial boundary value problem (2.1), (2.4)–(2.6) with conditions (2.7)–(2.11).

We obtain the law of full energy balance (2.12). Using the method of orthogonal projections with some additional requirements initial problem can be reduced to the Cauchy problem for the system of differential equations

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0,$$
$$gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0,$$
$$z_1 = \left(\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1; \vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2\right)^\tau \in \mathscr{H}_1, \quad z_2 = \left(\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta}_2\right)^\tau \in \mathscr{H}_2,$$

in Hilbert spaces

$$\mathscr{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3)\oplus(\vec{J}_0(\Omega_2)\oplus\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)\oplus\mathbb{C}^3), \quad \mathscr{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2)\oplus(L_{2,\Gamma_2}\oplus\mathbb{C}^2).$$

Here operators of potential energy C_k is bounded, C_1 is positive definite, A_1 is bounded and nonnegative, B_{ij} is skew self-adjoint operators. Using this properties we prove theorem on existence of unique strong solution for $t \in [0; T]$ if some natural conditions for initial data and given functions $f_1(t)$ are satisfied. As a corollary we obtain theorem on solvability of initial Cauchy problem.

If friction is absent then operator $A_1 = 0$ and for $z(x,t) = e^{i\lambda t}z(x)$ we obtain spectral operator problem. For the eigenvalues $\mu = \lambda^2/g$ we find new variational principle and prove that spectrum is discrete. It consists of positive eigenvalues with limit point $+\infty$ in stable case, or the positive branch and not more then finite number of negative eigenvalues in unstable case.

Keywords: *equation of angular momentum deviation, operator matrix, self-adjoint operator, strong solution, discrete spectrum.*

1. Введение

Первой работой, посвящённой задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, была работа Н. Е. Жуковского [1]. В ней впервые были введены вспомогательные функции, зависящие только от формы полости, которые сейчас называют потенциалами Жуковского. С их помощью удаётся задачу динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменить на задачу о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

Если жидкость заполняет полость лишь частично, то гидромеханическая система имеет уже бесконечное число степеней свободы. Эта проблема исследовалась в 50–70-е годы прошлого века весьма интенсивно многими авторами, среди первых отметим работы Н. Н. Моисеева (1952), затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского (1956), С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [2] (1957). Данной задачей позже занимались также И. М. Рапопорт, Г. Н. Микишев, Ф. Л. Черноусько, С. Ф. Фещенко, И. А. Луковский, Л. В. Докучаев и другие.

В работах П. В. Харламова (1972) изучался вопрос о совместных движениях сочленённых твёрдых тел (маятников), соединенных сферическими шарнирами. Затем Ю. Н. Кононов (1997–2006) исследовал движения тела и системы связанных твёрдых тел с полостями, содержащими жидкость. Наконец, в последнее время Э. И. Батыр и Н. Д. Копачевский (см. [3]–[7]) изучали проблему малых движений системы сочленённых твёрдых тел (гиростатов), соединённых сферическими шарнирами и имеющих полости, целиком заполненные идеальной либо вязкой жидкостью. Проблема малых колебаний системы двух маятников, частично заполненных вязкой жидкостью, с выводом уравнений изменения кинетических моментов рассмотрена в [8].

В данной работе используются как методы функционального анализа, развитые С. Г. Крейном и позже Н. Д. Копачевским (см. монографии [9]–[11]), так и новые рассмотрения (см. [12], [8]).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке первого из соавторов грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

2. Постановка задачи

2.1. **Основные уравнения, краевые и начальные условия.** Будем считать, что имеется гидромеханическая система, состоящая из двух твёрдых тел Ω_{01} и Ω_{02} с плотностями ρ_{01} и ρ_{02}. Эти тела (маятники) последовательно соединены сферическими шарнирами: первое тело закреплено в неподвижной точке O_1, а второе аналогичным образом соединено с первым телом в точке O_2. Предполагаем, что оба тела имеют полости, частично заполненные идеальными однородными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Будем считать, что на данную систему действует однородное гравитационное поле постоянной интенсивности. Тогда в состоянии покоя гидромеханической системы точки подвеса O_1 и O_2 этих тел, а также центры масс C_1 и C_2 находятся на одной вертикальной оси. При этом в состоянии равновесия жидкости в полостях занимают области Ω_k, причем границы этих областей состоят из твёрдых стенок S_k, а также свободных поверхностей Γ_k $(k = 1, 2)$, которые являются горизонтальными.

Для описания движений, близких к состоянию покоя, введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = \overline{1, 3}$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$, $g > 0$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k = 1, 2)$, жестко связанные с телами G_{0k}, с единичными векторами $\vec{e}_k^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$. Наконец, в состоянии покоя считаем, что подвижная система координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ совпадаёт с неподвижной системой $O_1x^1x^2x^3$, а подвижная система $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ получается переносом по вертикальной оси системы $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ из точки O_1 в точку O_2.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k = 1,2)$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения $\vec{\delta}_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}$, $k=1,2$. Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_{0k} будет, очевидно, равна $\vec{\omega}_k = d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела равно $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

Приведем для каждого из тел (маятников) линеаризованные уравнения изменения кинетического момента относительно точки $O_k, k=1,2$. Вывод этих уравнений произведён в статье [8] (см. также [4] и [9], с. 129–132, 145, 136).

Первое уравнение:

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}\, d\Omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\right) dm_2$$

$$+\, \alpha_1\vec{\omega}_1 - \alpha_2\left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\right) + g\left(m_1l_1 + m_2h_1\right) P_2\vec{\delta}_1 - g\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 =$$

$$= \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2\, dm_2 =: \vec{M}_1(t). \quad (2.1)$$

Здесь $G_k = \Omega_{0k} \cup \Omega_k$ — область, занятая твёрдым телом и жидкостью для данного маятника, $k=1,2$, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор точки в G_k, причем использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k} (\ldots)\, dm_k := \rho_{0k} \int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots)\, d\Omega_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\ldots)\, d\Omega_k. \quad (2.2)$$

Далее, через $\vec{u}_k(t,x)$ обозначено поле относительной скорости жидкости в области Ω_k, $\vec{h}_1 = \overrightarrow{O_1O_2}$, $\alpha_k > 0$, $k = 1,2$ — коэффициенты трения в шарнирах, $h_1 = |\overrightarrow{O_1O_2}|$, $x_k^3 = \zeta_k(t, x_k^1, x_k^2)$, $(x_k^1, x_k^2) \in \Gamma_k$, — отклонения свободных поверхностей жидкостей в процессе малых движений маятников, m_k — масса маятника с жидкостью, $l_k = |\overrightarrow{O_kC_k}|$, $P_2\vec{\delta}_k = \sum\limits_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j}$ является проекцией на плоскость Γ_k вектора углового перемещения $\vec{\delta}_k$. Наконец, предполагается, что в процессе малых движений системы на нее действует поле, мало отклоняющееся от гравитационного, т. е. поле

$$-g\vec{e}^{\,3} + \vec{f}, \quad \vec{f}_1 := \vec{f}|_{G_1},\ \vec{f}_2 := \vec{f}|_{G_2}. \quad (2.3)$$

Уравнение изменения кинетического момента для второго маятника таково:

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\, d\Omega_2 + \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) +$$

$$+ g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 =: \vec{M}_2(t). \quad (2.4)$$

Здесь использованы обозначения, введённые выше.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения жидкостей в полостях, а также граничные условия на твёрдых стенках S_k и свободных поверхностях $\Gamma_k,\ k = 1, 2$.

Уравнения движения для идеальных жидкостей (уравнения Эйлера) имеют вид

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (2.5)$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) + \nabla p_2 = \rho_2 \vec{f}_2, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (2.6)$$

где через $p_k = p_k(t, x),\ x \in \Omega_k$, обозначено отклонение давления в области Ω_k от равновесного давления в этой области в состоянии покоя.

Далее, в процессе движения идеальных жидкостей на твёрдых стенках S_k полостей Ω_k должны выполняться условия непротекания:

$$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad (2.7)$$

где $\vec{n}_k$ — (внешняя) нормаль к $\partial\Omega_k$.

В исследуемой задаче должны выполняться также кинематические условия следующего вида

$$\frac{d}{dt}\left(P_2 \vec{\delta}_k\right) = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3} = \vec{\omega}_k^{\,3}, \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = u_k^3 = \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1, 2. \quad (2.8)$$

Здесь для удобства последующих построений связь $d\vec{\delta}_k/dt = \vec{\omega}_k$ расщеплена на две, так как в уравнения движения, а также в граничные условия на Γ_k входит лишь $P_2 \vec{\delta}_k$ (см. ниже).

Эти динамические условия имеют следующий вид

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + (P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (2.9)$$

Отметим ещё, что из свойства несжимаемости жидкостей следуют условия сохранения объемов жидкостей:

$$\int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k\, d\Gamma_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.10)$$

Наконец, для полной постановки начально-краевой задачи следует добавить начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^{\,0}(x),\ x \in \Omega_k, \quad \zeta_k(0,x) = \zeta^0(x),\ x \in \Gamma_k, \quad \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^{\,0}, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^{\,0}. \tag{2.11}$$

Будем считать, что задача (2.1), (2.4)–(2.11) имеет классическое решение при $t \geqslant 0$. Тогда, умножая (скалярно) обе части уравнений (2.5) и (2.6) на $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно, после интегрирования по Ω_k с учетом краевых условий получаем закон баланса полной энергии.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2\, d\Omega_1 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{02} +$$
$$+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2\, d\Omega_2\Bigg\} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{(m_1 l_1 + m_2 h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2 \vec{\delta}_2|^2\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2} g \frac{d}{dt}\Bigg\{\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Gamma_k} \Big(|\zeta_k + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2 - |\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\, d\Gamma_k\Bigg\} =$$
$$= -\Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2\Big) + \sum_{k=1}^{2} \vec{M}_k(t)\cdot\vec{\omega}_k + \sum_{k=1}^{2}\rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k\, d\Omega_k. \tag{2.12}$$

Здесь введены ортопроекторы

$$\theta_k:\ L_2(\Gamma_k) \to L_{2,\Gamma_k} := L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}, \quad k = 1, 2. \tag{2.13}$$

Слева в первых фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы. Вторая фигурная скобка после умножения на g соответствует изменению потенциальной энергии системы, отвечающему перемещению энергии системы из состояния покоя на углы поворота $\vec{\delta}_1$ и $\vec{\delta}_2$ для тел. Наконец, последняя фигурная скобка после умножения на g равна потенциальной энергии системы, отвечающей возмущениям ζ_k свободной поверхности Γ_k в процессе малых движений. Справа в (2.12) стоит мощность сил трения в шарнирах (первое слагаемое), а также мощность внешних сил, отвечающих действию внешнего дополнительного поля $\vec{f}$ (см. (2.3)) в жидкостях и твёрдых телах.

3. Операторный подход к исследованию начально-краевой задачи

3.1. **Выбор функциональных пространств.** Так как кинетическая энергия жидкостей в полостях Ω_k в любой момент времени должна быть конечной, то из (2.12) следует, что поля относительных скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ должны быть функциями переменной t со значениями в комплексных гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$. Опираясь на свойство соленоидальности $\vec{u}_k$ и граничные условия исследуемой проблемы, воспользуемся ортогональным разложением пространства $\vec{L}_2(\Omega_k)$ на подпространства, естественно возникающие в этой задаче (см. [9], с. 106):

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2, \tag{3.1}$$

где

$$\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \{\nabla\varphi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k)\}, \tag{3.2}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \Big\{\vec{w}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \operatorname{div}\vec{w}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \quad \vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\Big\}, \tag{3.3}$$

$$\vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k) := \big\{\nabla\Phi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \Delta\Phi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \ (\text{на } S_k), \ \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k d\Gamma_k = 0\big\}. \tag{3.4}$$

Здесь $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$, а операции вычисления дивергенции и производной по нормали понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [9], параграф 2.1, а также [13]. Отметим еще, что границы $\partial\Omega_k$ предполагаются липшицевыми, причем S_k и Γ_k — липшицевы куски этих границ (см. [13], [14]).

Так как потенциальная энергия жидкостей также должна быть конечной в любой момент времени $t \geqslant 0$, то снова в силу (2.12) следует считать, что $\zeta_k(t,x), x \in \Gamma_k$, являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_k)$ со стандартным скалярным произведением. Тогда из условий сохранения объемов жидкостей при колебаниях, т. е. из условий (2.10), следует, что в рассматриваемой задаче $\zeta_k \in L_{2,\Gamma_k}$.

3.2. **Применение метода ортогонального проектирования.** Так как $\operatorname{div}\vec{u}_k = 0$ в Ω_k и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0$ на S_k, то в силу разложения (3.1) имеем

$$\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k, \quad \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \ \nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2. \tag{3.5}$$

Далее, заметим, что давления $p_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, определены с точностью до произвольной функции t. Поэтому, используя условия (2.10) и вводя ортопроекторы θ_k (см. (2.13)),

$$\theta_k\zeta_k = \zeta_k - |\Gamma_k|^{-1} \int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k \, d\Gamma_k, \quad \forall\zeta_k \in L_2(\Gamma_k), \tag{3.6}$$

перепишем условия (2.9) в виде

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} p_k \, d\Gamma_k = 0, \tag{3.7}$$

где теперь p_k — нормированные давления, $k = 1, 2$. Поэтому в силу (3.2)–(3.4)

$$\nabla p_k = \nabla \widetilde{p_k} + \nabla \varphi_k, \quad \nabla \widetilde{p_k} \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k), \ \nabla \varphi_k \in \vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{3.8}$$

Пусть P_{0,Γ_k}, $P_{0,k}$ и P_{h,S_k} — ортопроекторы на соответствующие подпространства (3.2)–(3.4). Тогда, подставляя представления (3.5) и (3.8) при $k = 1$ в уравнение (2.5) и действуя этими ортопроекторами на обе части (2.5), приходим к соотношениям

$$\rho_1 P_{0,\Gamma_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\varphi_1 = \rho_1 P_{0,\Gamma_1}\vec{f}_1, \tag{3.9}$$

$$\rho_1 \frac{d\vec{w}_1}{dt} + \rho_1 P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = \rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1, \tag{3.10}$$

$$\rho_1 \frac{d}{dt}\nabla\Phi_1 + \rho_1 P_{h,S_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\widetilde{p_1} = \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1. \tag{3.11}$$

Здесь производные $\partial/\partial t$ у векторных полей скоростей заменены на d/dt, так как эти поля и поля градиентов давлений считаем функциями переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.

Аналогичная процедура проектирования для уравнения движения (2.6) приводит к соотношениям

$$\rho_2 P_{0,\Gamma_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\varphi_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma_2}\vec{f}_2, \tag{3.12}$$

$$\rho_2 \frac{d\vec{w}_2}{dt} + \rho_2 P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2, \tag{3.13}$$

$$\rho_2 \frac{d}{dt}\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\widetilde{p_2} = \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2. \tag{3.14}$$

Отметим теперь, что в силу нормировки (3.7) для p_k и определения $\vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k)$ (см. (3.1)) граничные условия (3.7) можно переписать в виде

$$\widetilde{p_k} = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1, 2. \tag{3.15}$$

Далее, кинематические условия (2.8) для ζ_k с учетом (3.5) теперь переписываются следующим образом:

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} \quad (\text{на } \Gamma_k), \tag{3.16}$$

где $\gamma_{n,k}$ — операция взятия нормальной компоненты поля на Γ_k:

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k = (\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k)_{\Gamma_k}, \quad k = 1, 2. \tag{3.17}$$

Отметим теперь важное обстоятельство: поле $\nabla\varphi_1$ не входит в систему уравнений (3.10), (3.11), а $\nabla\varphi_2$ — в систему уравнений (3.13), (3.14). Поэтому эти поля могут быть найдены по известным решениям $\vec{\omega}_k(t)$ и заданным $\vec{f}_k$ из формул (3.9), (3.12). Далее, векторы $\vec{\delta}_k^3(t) = \delta_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1, 2$, также не входят в эти уравнения и находятся по $\vec{\omega}_k^3(t) = \omega_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1, 2$, и начальным условиям. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать начально-краевую задачу (3.10), (3.11), (3.13), (3.14), (2.1), (2.4), (2.10), (3.15), (3.16) при соответствующих начальных условиях.

3.3. **Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве.** Рассмотрим сначала две вспомогательные краевые задачи Зарембы, помогающие в дальнейшем исключить давления $\widetilde{p}_k$ в областях Ω_k, выразив их через ζ_k и $P_2\vec{\delta}_k$. Эти задачи таковы:

$$\Delta\widetilde{p}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \widetilde{p}_k = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \psi_k \, d\Gamma_k = 0. \tag{3.18}$$

Для области Ω_k с липшицевой границей $\partial\Omega_k$, разбитой на липшицевы куски S_k и Γ_k, задача (3.18) имеет единственное слабое решение $\widetilde{p}_k \in H^1_{h,S_k}(\Omega_k)$, где

$$H^1_{h,S_k}(\Omega_k) := \left\{\widetilde{p}_k \in H^1(\Omega_k): \ \Delta\widetilde{p}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\widetilde{p}_k}{\partial n_k} = 0 \ (\text{на } S_k), \ \widetilde{p}_k = \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k)\right\} \tag{3.19}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\psi_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k} := H^{1/2}(\Gamma_k) \cap L_{2,\Gamma_k}, \tag{3.20}$$

(см., например, [9], с. 45–46, а также [13], [14]). Поэтому можно считать, что

$$\nabla\widetilde{p}_k = V_k\psi_k, \quad V_k \in \mathscr{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)). \tag{3.21}$$

С помощью введенных операторов V_k вместо граничных условий (3.15) будем иметь соотношения

$$\nabla\widetilde{p}_k = \rho_k g V_k(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1, 2. \tag{3.22}$$

Опираясь на эти факты, получим дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме. С этой целью введем в качестве искомых объектов наборы элементов

$$z := (z_1; z_2)^\tau, \ z_1 := (z_{1,1}; z_{1,2})^\tau, \ z_{1,1} = (\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1)^\tau, \ z_{1,2} = (\vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2)^\tau,$$

$$z_2 := (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau,\ z_{2,1} = (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1)^\tau,\ z_{2,2} = (\zeta_2; P_2\vec{\delta}_2)^\tau \tag{3.23}$$

и будем считать, что они являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned}&\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2, \quad \mathscr{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3),\\ &\mathscr{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Тогда уравнения (3.10), (3.11), (2.1), (3.13), (3.14), (2.4) с учетом (3.5) и (3.22) можно в векторно-матричной форме переписать в терминах (3.23) в следующем виде

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t). \tag{3.25}$$

Здесь C_1, A_1 и B_{12} — операторные матрицы вида 6×6, 6×6 и 6×4, отвечающие ортогональным разложениям (3.24). При этом

$$\begin{aligned}C_1 z_1 = \Big(&\rho_1\vec{w}_1 + \rho_1 P_{0,1}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1); \quad \rho_1\nabla\Phi_1 + \rho_1 P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1);\\ &\rho_1\int\limits_{\Omega_1}(\vec{r}_1\times\vec{w}_1)\,d\Omega_1 + \rho_1\int\limits_{\Omega_1}(\vec{r}_1\times\nabla\Phi_1)\,d\Omega_1 + \vec{J}_1\omega_1 + \int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,dm_2 +\\ &+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\vec{w}_2\,dm_2 + \int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\nabla\Phi_2\,dm_2 + \int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\,dm_2;\\ &\rho_2\vec{w}_2 + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1) + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2); \quad \rho_2\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1) + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2);\\ &\rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{r}_2\times\vec{w}_2)\,d\Omega_2 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{r}_2\times\nabla\Phi_2)\,d\Omega_2 + \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,dm_2\Big)^\tau,\end{aligned} \tag{3.26}$$

где $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ — тензоры инерции маятников вместе с жидкостью:

$$\vec{J}_k\vec{\omega}_k := \rho_{0k}\int\limits_{\Omega_{0k}}\vec{r}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)\,d\Omega_{0k} + \rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{r}_k\times(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)\,d\Omega_k, \quad k=1,2. \tag{3.27}$$

Операторная матрица B_{12} действует по закону

$$\begin{aligned}B_{12}z_2 = \Big(&0; \quad \rho_1 V_1(\zeta_1 + \theta_1(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}); \quad -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1 + (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2\vec{\delta}_1;\\ &0; \quad \rho_2 V_2(\zeta_2 + \theta_2(P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}); \quad -\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2 + m_2 l_2 P_2\vec{\delta}_2\Big)^\tau.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Операторная матрица A_1 из (3.25) имеет ненулевые элементы лишь следующего вида

$$A_{1,33} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad A_{1,36} = -\alpha_2 = A_{1,63}, \quad A_{1,66} = \alpha_2. \tag{3.29}$$

Лемма 1. *Операторная матрица C_1 из (3.26) является ограниченным самосопряжённым и положительно определенным оператором, действующим в $\mathscr{H}_1$. Квадратичная форма $(C_1 z_1, z_1)_{\mathscr{H}_1}$ равна удвоенной кинетической энергии гидромеханической системы (см. (2.12)), т. е. C_1 является оператором кинетической энергии.*

Лемма 2. *Операторная матрица A_1 с элементами (3.29) является ограниченным самосопряжённым неотрицательным оператором. Квадратичная форма оператора A_1 равна*

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathscr{H}_1} = \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \geqslant 0, \tag{3.30}$$

и потому A_1 можно назвать оператором диссипации энергии гидромеханической системы.

Лемма 3. *Оператор $B_{12} : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$, определенный формулой (3.28), является блочно-диагональным неограниченным оператором, заданным на области определения*

$$\mathscr{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2), \tag{3.31}$$

плотной в $\mathscr{H}_2$.

Дальнейшее применение операторного подхода в исследуемой задаче основано на том, что кинематические условия на Γ_k (см. (2.8), (3.16), (3.17)), т. е. условия

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k} \nabla \Phi_k, \quad \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad k = 1, 2, \tag{3.32}$$

можно переписать в эквивалентной форме, позволяющей ввести в рассмотрение оператор потенциальной энергии системы.

Очевидно, если выполнены условия (3.32), то справедливы также условия

$$\begin{gathered}
\rho_1 g \frac{d\zeta_1}{dt} + \rho_1 g \frac{d}{dt}(\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1)) - \rho_1 g \gamma_{n,1} \nabla \Phi_1 - \rho_1 g \theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1) = 0, \\
-\rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1) \frac{d\zeta_1}{dt}\, d\Gamma_1 + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 + \\
+\rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1) \gamma_{n,1} \nabla \Phi_1 \, d\Gamma_1 - g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\omega}_1 = 0, \\
\rho_2 g \frac{d\zeta_2}{dt} + \rho_2 g \frac{d}{dt}(\theta_2((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}^{\,3}_2)) - \rho_2 g \gamma_{n,2} \nabla \Phi_2 - \rho_2 g \theta_2((P_2 \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}^{\,3}_2) = 0, \\
-\rho_2 g \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}^{\,3}_2 \times \vec{r}_2) \frac{d\zeta_2}{dt}\, d\Gamma_2 + g m_2 l_2 \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_2 + \rho_2 g \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}^{\,3}_2 \times \vec{r}_2) \gamma_{n,2} \nabla \Phi_2 \, d\Gamma_2 - g m_2 l_2 P_2 \vec{\omega}_2 = 0.
\end{gathered} \tag{3.33}$$

Коротко эти условия можно переписать в виде

$$gC_2\frac{d\zeta_2}{dt}+gB_{21}z_1=0, \tag{3.34}$$

$$C_2z_2=\Big(\rho_1\zeta_1+\rho_1\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1+(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1;$$

$$\rho_2\zeta_2+\rho_2\theta_2((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ -\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2+m_2l_2P_2\vec{\delta}_2\Big)^{\tau}, \tag{3.35}$$

$$B_{21}z_1=\Big(-\rho_1\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1-\rho_1\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1\,d\Gamma_1-(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\omega}_1;$$

$$-\rho_2\gamma_{n,2}\nabla\Phi_2-\rho_2\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ \rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\nabla\Phi_2\,d\Gamma_2-m_2l_2P_2\vec{\omega}_2\Big)^{\tau}. \tag{3.36}$$

Здесь оператор $C_2:\ (L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2)\oplus(L_{2,\Gamma_2}\oplus\mathbb{C}^2)=\mathscr{H}_2\to\mathscr{H}_2$ — блочно диагональный, а оператор $B_{21}:\ \mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_1$ — аналогичного вида с размерами матрицы 4×6.

Лемма 4. *Оператор $C_2:\ \mathscr{H}_2\to\mathscr{H}_2$ — ограничен и самосопряжён. Квадратичная форма $g(C_2z_2,z_2)_{\mathscr{H}_2}$ равна удвоенной потенциальной энергии гидромеханической системы.*

Выясним теперь, когда соотношения (3.32) и (3.33) эквивалентны. Введем обозначения, имеющие смысл осевых моментов инерции:

$$\beta_{jl}^{(k)}:=\int\limits_{\Gamma_k}x_j^1(\theta_kx_l^1)\,d\Gamma_k=\beta_{lj}^{(k)},\quad j,l=1,2,\quad k=1,2. \tag{3.37}$$

Введем также определители:

$$\begin{gathered}\Delta_2^{(1)}:=\det\begin{pmatrix}m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{22}^{(1)} & \rho_1\beta_{21}^{(1)}\\ \rho_1\beta_{12}^{(1)} & m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{11}^{(1)}\end{pmatrix},\\ \Delta_2^{(2)}:=\det\begin{pmatrix}m_2l_2-\rho_2\beta_{22}^{(2)} & \rho_2\beta_{21}^{(2)}\\ \rho_2\beta_{12}^{(2)} & m_2l_2-\rho_2\beta_{11}^{(2)}\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{3.38}$$

Лемма 5. *Если выполнены условия общего положения*

$$\Delta_2^{(1)}\neq 0,\quad \Delta_2^{(2)}\neq 0, \tag{3.39}$$

то соотношения (3.32) и (3.33) эквивалентны.

Далее будем предполагать, что в исследуемой проблеме выполнены условия общего положения (3.39). Тогда исходная начально-краевая задача о малых колебаниях двух сочленённых маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, будет равносильна совокупности соотношений (3.8), (3.12), тривиальным связям (см. (2.8))

$$\frac{d\delta_k^3}{dt} = \omega_k^3, \quad k = 1, 2, \tag{3.40}$$

а также задаче Коши для системы уравнений (см. (3.25), (3.34))

$$\begin{gathered} C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \\ z_1 = \Big(\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1; \vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2\Big)^\tau \in \mathscr{H}_1, \quad z_2 = \Big(\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta}_2\Big)^\tau \in \mathscr{H}_2. \end{gathered} \tag{3.41}$$

Дальнейшее изучение свойств решений исходной задачи основано на изучении свойств решений задачи Коши (3.41).

3.4. **Свойства матричных операторных коэффициентов задачи Коши.** Рассмотрим дополнительные свойства оператора потенциальной энергии C_2, а также операторов B_{12} и B_{21}. Для оператора C_2 выяснение этих свойств проводится по схеме из [9], с. 151–152.

Воспользуемся ортогональным разложением

$$\mathscr{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2) = \mathscr{H}_{21} \oplus \mathscr{H}_{22}, \tag{3.42}$$

$$\begin{gathered} \mathscr{H}_{21} = \mathscr{H}_{21,1} \oplus \mathscr{H}_{21,2}, \quad \mathscr{H}_{21,k} := \Big\{(\zeta_k; 0)^\tau : \int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k x_k^j \, d\Gamma_k = 0, \ j = 1, 2\Big\}, k = 1, 2, \\ \mathscr{H}_{22} = \mathscr{H}_{22,1} \oplus \mathscr{H}_{22,2}, \quad \mathscr{H}_{22,k} := \mathrm{Lin}\Big\{(0; \vec{e}_k^{\,1})^\tau; (0; \vec{e}_k^{\,2})^\tau; (\theta_k x_k^1; 0)^\tau; (\theta_k x_k^2; 0)^\tau\Big\}, \end{gathered} \tag{3.43}$$

где Lin — обозначение линейной оболочки элементов.

Лемма 6. *Если выполнено первое условие* (3.39), *т. е. условие*

$$\Delta_2^{(1)} = (m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1\beta_{22}^{(1)})(m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1\beta_{11}^{(1)}) - \rho_1^2|\beta_{12}^{(1)}|^2 \neq 0, \tag{3.44}$$

то оператор C_{21} *из блочно-диагонального представления* (3.35)

$$C_2 = \mathrm{diag}(C_{21}; C_{22})$$

ограниченно обратим и обладает следующими свойствами.

1°. *На подпространстве* $\mathscr{H}_{21,1}$ *из* (3.43) *оператор* C_{21} *положительно определен:*

$$(C_{21}z_2, z_2)_{\mathscr{H}_{21}} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} |\eta_1|^2 \, d\Gamma_1 = \rho_1 \|z_2\|^2_{\mathscr{H}_{21}}, \quad \forall z_2 = (\eta_1; 0)^\tau \in \mathscr{H}_{21,1}. \tag{3.45}$$

2°. *Оператор* C_{21} *неотрицателен на подпространстве* $\mathscr{H}_{21,2}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(1)} := m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{11}^{(1)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(1)} \geqslant 0, \tag{3.46}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(1)} > 0, \quad \Delta_2^{(1)} > 0. \tag{3.47}$$

Аналогичные свойства имеют место для оператора C_{22} *из* (3.44).

1°. *На подпространстве* $\mathscr{H}_{22,1}$ *оператор* C_{22} *положительно определен:*

$$(C_{22}z_2, z_2)_{\mathscr{H}_2} = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} |\eta_2|^2 \, d\Gamma_2 = \rho_2 \|z_2\|^2_{\mathscr{H}_{22}}, \quad \forall z_2 = (\eta_2; 0)^\tau \in \mathscr{H}_{22,1}. \tag{3.48}$$

2°. *Оператор* C_{22} *неотрицателен на подпространстве* $\mathscr{H}_{22,2}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(2)} := m_2 l_2 - \rho_2 \beta_{11}^{(2)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(2)} \geqslant 0, \tag{3.49}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(2)} > 0, \quad \Delta_2^{(2)} > 0. \tag{3.50}$$

Можно доказать, что ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2z_1, z_2)_{\mathscr{H}_2}$ не может превышать $\varkappa = 4$, т. е. в $\mathscr{H}_2$ может быть не более чем четырехмерное подпространство элементов, на котором квадратичная форма принимает отрицательные значения.

Определение 1. Будем говорить, что рассматриваемая гидромеханическая система статически устойчива по линейному приближению, если оператор C_2 потенциальной энергии системы положительно определен, и тогда выполнены условия (3.47), (3.50). □

Формулы (3.38) и (3.46), (3.49), определяющие $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, показывают, что условия статической устойчивости системы выполнены для тел достаточно большой массы с расположенными достаточно далеко от точек подвеса центрами масс этих тел-маятников.

Лемма 7. *Задача Неймана*

$$\Delta\Phi_k = 0 \quad (\textit{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\textit{на } S_k),$$
$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \psi_k \quad (\textit{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k \, d\Gamma_k = 0, \tag{3.51}$$

имеет единственное слабое решение $\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_k \in (H^{1/2}_{\Gamma_k})^* = \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k}$. *Если* ψ_k *— любой элемент из* L_{2,Γ_k}, *то* $\nabla\Phi_k \in \mathscr{D}(\gamma_{n,k})$, *т. е.*

$$\mathscr{D}(\gamma_{n,k}) = \{\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) : \ \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|_{\Gamma_k} = \psi_k, \ \forall\psi_k \in L_{2,\Gamma_k}\}. \tag{3.52}$$

При этом оператор $\gamma_{n,k}$, *заданный на области определения* (3.52), *является замкнутым неограниченным оператором, действующим из* $\mathscr{D}(\gamma_{n,k})$ *на* L_{2,Γ_k}. *Его область определения* $\mathscr{D}(\gamma_{n,k})$ *плотна в* $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, *а элементы* $\nabla\Phi_k$ *являются обобщенными решениями задачи* (3.51).

Лемма 8. *Операторы*

$$V_k : \ \mathscr{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k} \subset L_{2,\Gamma_k} \to \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$$

и

$$\gamma_{n,k} : \ \mathscr{D}(\gamma_{n,k}) \subset \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \to L_{2,\Gamma_k}, \quad k = 1, 2,$$

см. (3.21), (3.16), (3.17), *взаимно сопряжены:*

$$(V_k\zeta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k)_{L_{2,\Gamma_k}}, \quad \forall\zeta_k \in \mathscr{D}(V_k), \ \forall\nabla\Phi_k \in \mathscr{D}(\gamma_{n,k}), \quad k = 1, 2.$$

Опираясь на лемму 8, теперь легко установить следующее основное свойство операторных матриц B_{12} и B_{21}. Напомним (лемма 3), что оператор B_{12} задан на области определения (3.31), он неограничен, замкнут и действует из плотной в $\mathscr{H}_2$ области определения $\mathscr{D}(B_{12})$ на пространство $\mathscr{H}_1$. Что касается матричного оператора B_{21} из (3.36), то он также неограничен, поскольку неограниченными являются операторы $\gamma_{n,k}$, $k = 1, 2$. Поэтому естественно B_{21} задать на области определения

$$\mathscr{D}(B_{21}) = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathscr{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathscr{D}(\gamma_{n,2}) \oplus \mathbb{C}^3). \tag{3.53}$$

Здесь под $\gamma_{n,k}$ понимается оператор нормального следа (см. (3.16), (3.17)), суженный на подпространство $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$.

Лемма 9. *Операторы* B_{12} *и* B_{21}, *заданные формулами* (3.28), (3.36) *на областях определения* (3.31) *и* (3.53) *соответственно, являются кососамосопряжёнными:* $B_{12}^* = -B_{21}$, *т. е.*

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathscr{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathscr{H}_2}, \quad \forall z_1 \in \mathscr{D}(B_{21}), \ \forall z_2 \in \mathscr{D}(B_{12}). \tag{3.54}$$

Итогом рассмотрения свойств операторных матриц изучаемой задачи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Исходная задача о малых колебаниях двух сочленённых маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, равносильна, после отделения тривиальных соотношений* (3.9), (3.12), (2.8) *(для* δ_k^3*), задаче Коши*

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) = (f_1(t); 0)^\tau \tag{3.55}$$

в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, *где*

$$C = \operatorname{diag}(C_1; gC_2) = C^* \in \mathscr{L}(H) \tag{3.56}$$

является оператором полной энергии гидромеханической системы, оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = -B^*, \quad \mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(B_{21}) \oplus \mathscr{D}(B_{12}), \tag{3.57}$$

оператор диссипации энергии, учитывающий трение в шарнирах,

$$0 \leqslant A = \operatorname{diag}(A_1; 0) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}). \tag{3.58}$$

Если выполнено условие (3.39), *то оператор* C *ограниченно обратим, а если система статически устойчива по линейному приближению* ($C_2 \gg 0$), *т. е. выполнены условия* (3.50), *то оператор* C *положительно определен.*

4. Теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи

4.1. **О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения.** Перейдем к исследованию задачи Коши (3.55) как в случае статической устойчивости по линейному приближению, так и при её отсутствии.

Определение 2. Сильным решением задачи Коши (3.55) на отрезке $[0; T]$ назовем такую функцию $z(t)$ со значениями в $\mathscr{H}$, для которой выполнены следующие условия.

1°. При любом $t \in [0; T]$ элемент $z(t) \in \mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(B_{21}) \oplus \mathscr{D}(B_{12})$ и функция $Bz(t)$ непрерывна по t, т. е. $Bz(t) \in C([0; T]; \mathscr{H})$.

2°. Функция dz/dt непрерывна по t, т. е. $z(t) \in C^1([0; T]; \mathscr{H})$.

3°. При любом $t \in [0; T]$ выполнено уравнение (3.55), а также выполнено начальное условие. □

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.55) на отрезке $[0;T]$ являются условия

$$z^0 \in \mathscr{D}(B), \quad f(t) \in C([0;T];\mathscr{H}). \tag{4.1}$$

С помощью использования теории сжимающих полугрупп операторов доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для исследуемой гидромеханической системы выполнены условия* (3.47), (3.50) *статической устойчивости по линейному приближению, а также условия*

$$z^0 \in \mathscr{D}(B), \quad f(t) \in C^1([0;T];\mathscr{H}). \tag{4.2}$$

Тогда задача (3.55) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Следствием теоремы 2 является такой факт: для сильного решения $z(t)$ задачи (3.55) выполнен закон баланса полной энергии (в дифференциальной форме):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Cz(t),z(t))_{\mathscr{H}} = -(Az,z)_{\mathscr{H}} + \mathrm{Re}(f(t),z(t))_{\mathscr{H}}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению и для нее выполнены лишь условия (3.39). Тогда можно использовать теорию J-самосопряженных операторов в пространстве Понтрягина. Исходная проблема сводится к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка с главным оператором, являющимся генератором C_0 полугруппы. Отсюда следует такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3.39) *и условия* (4.2)*. Тогда задача* (3.55) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Замечание 1. Если трение в шарнирах отсутствует, то оператор A является нулевым, и задача (3.55) распадаётся на две независимые задачи Коши, каждая из которых при выполнении условий (4.2) имеет сильное решение. □

4.2. **О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях гидромеханической системы.** Установленные выше общие теоремы позволяют доказать теорему о существовании и единственности решений исходной начально-краевой задачи (2.1), (2.4)–(2.11).

Определение 3. Будем говорить, что задача (2.1), (2.4)–(2.11) имеет сильное по переменной t решение на отрезке $[0;T]$, если выполнены следующие условия.

1°. Функции $\vec{u}_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, функции $\nabla p_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{G}(\Omega_k))$, а $\vec{\omega}(t) \in C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

2°. Функции $\zeta_k(t,x_1,x_2)\in C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, $(x_1,x_2)\in\Gamma_k$, а $\vec{\delta}_k(t)\in C^2([0;T];\mathbb{C}^3)$.

3°. При любом $t\in[0;T]$ выполнены первые уравнения Эйлера (2.5) и (2.6), где слагаемые непрерывны по t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ соответственно; выполнены соотношения (2.9), где слагаемые из $C^1([0;T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$; выполнены кинематические условия для ζ_k из (2.8), где слагаемые из $C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, а также кинематические условия для $\vec{\delta}_k$, где слагаемые из $C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

4°. При любом $t\in[0;T]$ выполнены уравнения (2.1), (2.4), где слагаемые — элементы из $C([0;T];\mathbb{C}^3)$.

5°. Выполнены начальные условия (2.11). $\square$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{gathered}\vec{u}^0_k\in\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k),\quad P_{h,S_k}\vec{u}^0_k=:\nabla\Phi^0_k\in\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k):\ \frac{\partial\Phi^0_k}{\partial n_k}\Big|_{\Gamma_k}\in L_{2,\Gamma_k},\\ \zeta^0_k\in H^{1/2}_{\Gamma_k},\quad \vec{\omega}^0_k\in\mathbb{C}^3,\quad \vec{\delta}^0_k\in\mathbb{C}^3,\quad \vec{f}_k(t,x)\in C^1([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k)),\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{4.4}$$

Тогда начально-краевая задача (2.1), (2.4)–(2.11) *о малых движениях двух сочленённых маятников с полостями, частично заполненными тяжелой однородной идеальной жидкостью, имеет единственное сильное по t решение на отрезке $[0;T]$. Для этого решения выполнен закон баланса полной энергии в форме* (2.12), *где все слагаемые являются непрерывными функциями переменной t.*

5. Проблема собственных колебаний

5.1. Случай нулевого собственного значения. Рассмотрим решения однородной задачи (3.55) при $A=0$, зависящие от t по закону

$$z(t)=e^{i\lambda t}z,\quad z\in\mathscr{H},\tag{5.1}$$

где λ — частота колебаний гидромеханической системы, а $z=(z_1;z_2)^\tau$ — амплитудный элемент. Для элементов $z_1,\ z_2$ с учетом формул (3.56), (3.57) приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}gB_{12}z_2+i\lambda C_1z_1=0,\quad gB_{21}z_1+i\lambda gC_2z_2=0,\\ z_1=(\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1;\ \vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau,\quad z_2=(\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau.\end{gathered}\tag{5.2}$$

Отметим предварительно, что операторные блоки B_{12}, B_{22} и C_2 обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered}B_{12}=\operatorname{diag}(B_{12,1};B_{12,2}),\quad B_{21}=\operatorname{diag}(B_{21,1};B_{21,2}),\\ B_{12,k}=\begin{pmatrix}0&0\\ \widetilde{B}_{12,k}\end{pmatrix},\quad B_{21,k}=\begin{pmatrix}0&\widetilde{B}_{21,k}\\ 0\end{pmatrix},\quad k=1,2,\end{gathered}\tag{5.3}$$

$$\widetilde{B}_{12,1} = \begin{pmatrix} \rho_1 V_1(\ldots) & \rho_1 V_1(\theta_1((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)(\ldots)\,d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2(\ldots) \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{B}_{12,2} = \begin{pmatrix} \rho_2 V_2(\ldots) & \rho_2 V_2(\theta_2((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)(\ldots)\,d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

$$\widetilde{B}_{21,1} = \begin{pmatrix} -\rho_1 \gamma_{n,1}(\ldots) & -\rho_1\theta_1(((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ \rho_1 \int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}(\ldots)\,d\Gamma_1 & -(m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2(\ldots) \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{B}_{21,2} = \begin{pmatrix} -\rho_2 \gamma_{n,2}(\ldots) & -\rho_2\theta_2(((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ \rho_2 \int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}(\ldots)\,d\Gamma_2 & -m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

$$C_2 = \operatorname{diag}(C_{21}; C_{22}),$$
$$C_{21} = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 & \rho_1\theta_1(((\ldots)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)(\ldots)\,d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,1} = -C_{21}\widetilde{\gamma}_{n,1},$$
$$C_{22} = \begin{pmatrix} \rho_2 I_2 & \rho_2\theta_2(((\ldots)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)(\ldots)\,d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,2} = -C_{22}\widetilde{\gamma}_{n,2}, \tag{5.6}$$
$$\widetilde{\gamma}_{n,1} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,1}; P_2), \quad \widetilde{\gamma}_{n,2} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,2}; P_2),$$

$$\widetilde{B}_{12,1} = \widetilde{V}_1 C_{21}, \quad \widetilde{B}_{12,2} = \widetilde{V}_2 C_{22}, \quad \widetilde{V}_1 = \operatorname{diag}(V_1; I_1), \quad \widetilde{V}_2 = \operatorname{diag}(V_2; I_1). \tag{5.7}$$

Эти формулы непосредственно следуют из определений (3.28), (3.35), (3.36) операторных матриц B_{12}, B_{21} и C_1.

Лемма 10. *Спектральная задача* (5.2) *имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, которому отвечают решения вида*

$$z_1 = (\vec{w}_1;\ \vec{0};\ \vec{0};\ \vec{w}_2;\ \vec{0};\ \vec{0})^\tau,\ z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau = 0,\ \forall\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k),\ \forall\delta_1^3,\ \delta_2^3 \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Замечание 2. Решениям вида (5.8) отвечают стационарные по времени движения идеальной жидкости в каждой полости маятников без отклонения свободных поверхностей Γ_k. При этом тела остаются неподвижными, т. е. маятники с полостями не покачиваются.

5.2. **Собственные колебания при условиях статической устойчивости.** Рассмотрим теперь в задаче (5.2) случай $\lambda \neq 0$ в предположении, что выполнены условия (3.47), (3.50) статической устойчивости по линейному приближению.

Первое уравнение (5.2) с учетом (5.7) и формулы (3.26) приводит к соотношению

$$\vec{w}_k = -P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k), \quad k = 1, 2, \tag{5.9}$$

а также связи

$$g\widetilde{V}_k C_{2k} z_{2,k} + i\lambda \widetilde{C}_{1k} \widetilde{z}_{1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{5.10}$$

$$\widetilde{C}_{1k}\widetilde{z}_{1,k} = \begin{pmatrix} \rho_k \nabla\Phi_k + \rho_k P_{h,S_k}(\omega_k \times \vec{r}_k) \\ \rho_k \int_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times \nabla\Phi_k)\, d\Omega_k + (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

где уже учтены соотношения (5.9) и определения присоединенных элементов инерции (см., например, [9], с. 141–143):

$$\vec{J}_k\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k =$$

$$= \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k =$$

$$= \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k. \tag{5.12}$$

Здесь $\vec{J}_{t,k}$ — момент инерции для k-того тела, а $\vec{J}_{pr,k}$ — присоединенный момент инерции для $k-$той жидкости.

Второе уравнение (5.2) с учетом (5.5), (5.6) приводит к уравнению

$$\widetilde{\gamma}_{n,k}\widetilde{z}_{1,k} = i\lambda z_{2k}, \quad k = 1, 2, \tag{5.13}$$

так как $C_2 = \operatorname{diag}(C_{21}; C_{22})$ обратим. Таким образом, при $\lambda \neq 0$ следует рассматривать систему уравнений (5.10), (5.13).

Лемма 11. *Операторная матрица* $\widetilde{C}_1 = \operatorname{diag}(\widetilde{C}_{1,1}; \widetilde{C}_{1,2})$ *(см.* (5.11)*) является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве*

$$\widetilde{\mathscr{H}_1} := (\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3) =: \widetilde{\mathscr{H}_{1,1}} \oplus \widetilde{\mathscr{H}_{1,2}}. \tag{5.14}$$

Возвращаясь к системе уравнений (5.10), (5.13), исключим в них переменную $z_2 = (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau$ (при $\lambda \neq 0$). Это даёт уравнение

$$\widetilde{V} C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 = \mu \widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2/g, \tag{5.15}$$

$$\widetilde{V} := \operatorname{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n := \operatorname{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.16}$$

Здесь $\widetilde{V}$ и $\widetilde{\gamma}_n$, в силу леммы 8, — это неограниченные взаимно сопряжённые операторы, а C_2 и $\widetilde{C}_1$, согласно леммам 7 и 11, — ограниченные положительно определенные операторы, так как выполнены условия (3.47), (3.50).

Из (5.15) следует, что по решению $\widetilde{z}_1$ число μ можно найти по формуле

$$\mu = \frac{(C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1)_{\mathscr{H}_2}}{(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathscr{H}_1}}}, \tag{5.17}$$

где

$$(C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathscr{H}_2} = \rho_1\Big[\int\limits_{\Gamma_1}|\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} + \theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1}|\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1\Big] +$$

$$+\rho_2\left[\int\limits_{\Gamma_2}|\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} + \theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2 - \int\limits_{\Gamma_2}|\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\,d\Gamma_2\right] +$$

$$+(m_1l_1 + m_2h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2l_2|P_2\vec{\omega}_2|^2. \tag{5.18}$$

Введем еще в рассмотрение потенциальные поля и соответствующие потенциалы Н. Е. Жуковского $\psi_{k,j}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$ (см. [1]). Так как $\operatorname{div}(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k) = 0$, то поле $\nabla\psi_k = (I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)$ находится с помощью решения задачи

$$\Delta\psi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = (\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{n}_k \quad (\text{на } \partial\Omega_k). \tag{5.19}$$

Тогда

$$P_{0,k}(\vec{\omega}_k\times\vec{r}_k) = \vec{\omega}_k\times\vec{r}_k - \nabla\psi_k, \quad \nabla\psi_k = \sum_{j=1}^{3}\omega_{k,j}\nabla\psi_{k,j}, \tag{5.20}$$

$$\Delta\psi_{k,j} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_{k,j}}{\partial n_k} = (\vec{e}_k^{\,j}\times\vec{r}_k)\cdot\vec{n}_k \ (\text{на } \partial\Omega_k), \quad j = 1, 2, 3, \ k = 1, 2. \tag{5.21}$$

Решение каждой из задач (5.21) зависит лишь от формы области Ω_k, заполненной жидкостью.

С помощью потенциалов Жуковского квадратичная форма оператора $\widetilde{C}_1$ представляется в виде

$$(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathscr{H}_1}} = \rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1 + \sum_{j=1}^{3}\omega_{1,j}\nabla\psi_{1,j}|^2\,d\Omega_1 + \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01} +$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + \sum_{j=1}^{3}\omega_{2,j}\nabla\psi_{2,j}|^2\,d\Omega_2 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}, \tag{5.22}$$

поэтому соотношение (5.17) принимает форму

$$\mu = \Big\{\rho_1\left[\int\limits_{\Gamma_1}|\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} + \theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1}|\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\,d\Gamma_1\right] +$$

$$+\rho_2 \left[\int\limits_{\Gamma_2} |\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} + \theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2\, d\Gamma_2 - \int\limits_{\Gamma_2} |\theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2\, d\Gamma_2 \right] +$$

$$+(m_1 l_l + m_2 h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2\vec{\omega}_2|^2 \Big\} \Big/$$

$$\Big\{ \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{1,j} \nabla \psi_{1,j}|^2\, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{01} +$$

$$+\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{2,j}\nabla\psi_{2,j}|^2\, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{02} \Big\}. \quad (5.23)$$

Теорема 5. *Задача (5.15), (5.16) имеет дискретный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, состоящий из конечнократных положительных собственных значений μ_j с предельной точкой $\mu = +\infty$. Соответствующая им система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $\widetilde{z}_{1,j} = (\nabla\Phi_{1,j};\ \vec{\omega}_{1,j};\ \nabla\Phi_{2,j};\ \vec{\omega}_{2,j})^{\tau}$, образует базис в пространстве $\widetilde{\mathscr{H}_1} = \widetilde{\mathscr{H}_{1,1}} \oplus \widetilde{\mathscr{H}_{1,2}} = (\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)$, ортогональный по формам (5.18), (5.22).*

Собственные значения и собственные элементы задачи (5.15), (5.16) можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения (5.23) или последовательные минимумы функционала (5.18) при дополнительном условии, что функционал (5.22) равен единице. При этом для функций сравнения Φ_k должны иметь место соотношения

$$\Delta\Phi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k} = 0 \ (\text{на } S_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k\, d\Gamma_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (5.24)$$

Для нахождения приближенных решений задачи (5.15), (5.16) можно применить метод Ритца к функционалу

$$F(\widetilde{z}_1) := (C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1)_{\mathscr{H}_2} - \mu(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathscr{H}_1}}, \quad (5.25)$$

и этот метод сходится.

Наконец, асимптотическое поведение собственных значений μ_j при $j \to \infty$ таково:

$$\mu_j = \left(\frac{1}{4\pi} (|\Gamma_1| + |\Gamma_2|)^{-1/2} \right) j^{1/2} [1 + o(1)]. \quad (5.26)$$

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность элементов $\widetilde{z}_1$, для которых при условиях (5.24) конечна квадратичная форма (5.22), компактна в $\widetilde{\mathscr{H}_1}$, а так как норма, задаваемая формой (5.22), эквивалентна стандартной норме пространства $\widetilde{\mathscr{H}_1}$, то указанная совокупность элементов компактна и по форме (5.22). Поэтому по теореме С. Г. Михлина (см., например, [15]) задача (5.15), (5.16) имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu_j \to +\infty$ $(j \to \infty)$, а система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, образует ортогональный базис как по форме (5.22), так и по форме (5.18). В частности, при соответствующей нормировке выполнены свойства

$$(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{z}_{1,l})_{\widetilde{\mathscr{H}}_1} = \delta_{jl}, \quad (C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_{1,l})_{\mathscr{H}_2} = \mu_j\delta_{jl}. \tag{5.27}$$

Остальные утверждения теоремы также следуют из [15]. Наконец, последнее утверждение (асимптотика спектра) следует из такого рассуждения. Квадратичная форма (5.18) отличается от «невозмущенной» квадратичной формы $\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|^2\,d\Gamma_k$ тем, что (5.18) является расширением этой формы на дополнительное конечномерное (шестимерное) пространство. Далее, квадратичная форма (5.22) является расширением формы $\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k$ на это же дополнительное пространство. Отсюда и из общих результатов М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка (см., например, [16]) следует, что асимптотическое поведение чисел μ_j такое же, как и для вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|^2\,d\Gamma_k \;/\; \sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k \tag{5.28}$$

при дополнительных условиях (5.24). Однако этому отношению отвечают две независимые спектральные задачи для отношений

$$\int\limits_{\Gamma_k}|\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|^2\,d\Gamma_k \;/\; \int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k$$

или, что равносильно, для отношений

$$\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k \;/\; \int\limits_{\Gamma_k}|\Phi_k|^2\,d\Gamma_k$$

при условиях (5.24).

Отсюда, а также из результатов И. Л. Вулис и М. З. Соломяка (см. [17]) получаем, что для задачи (5.15), (5.16) имеет место асимптотическая формула (5.26). □

Замечание 3. Вариационная задача (5.23), (5.24) обобщает задачу (5.28), (5.24), которая соответствует проблеме собственных колебаний идеальных жидкостей в двух неподвижных сосудах, т. е. в полостях без маятников. При $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\vec{\omega}_2 = \vec{0}$ первая проблема переходит во вторую. $\square$

5.3. **Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.** Будем теперь считать, что условия (3.47), (3.50) статической устойчивости по линейному приближению не выполнены, и снова рассмотрим спектральную задачу (5.15), (5.16):

$$\widetilde{V} C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 = \mu \widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2/g, \quad \widetilde{z}_1 \in \widetilde{\mathscr{H}_1}, \quad \widetilde{V} = \operatorname{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n = \operatorname{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.29}$$

Здесь все операторы, кроме C_2, имеют прежние свойства, а оператор C_2, согласно лемме 6, при выполнении условий (3.39), а также из замечаний после её доказательства ограниченно обратим, причем ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2 z_2, z_2)_{\mathscr{H}_2}$ равен $\varkappa$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Отсюда следует, что

$$C_2 = J_\varkappa |C_2| = |C_2|^{1/2} J_\varkappa |C_2|^{1/2}, \quad J_\varkappa = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*, \quad 0 \ll |C_2| \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_2), \tag{5.30}$$

где $J_\varkappa$ – каноническая симметрия.

Отметим еще, что в (5.29) операторы $\widetilde{\gamma}_n$ и $\widetilde{V}$ взаимно сопряжены и имеют ограниченные (и даже компактные) обратные. Учитывая эти свойства, выполним в (5.29) замену по формуле

$$|C_2|^{1/2} \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 =: v \in \mathscr{H}_2. \tag{5.31}$$

Тогда вместо (5.29) придем к задаче

$$v = \mu J_\varkappa C v, \quad C := |C_2|^{-1/2} \widetilde{V}^{-1} \widetilde{C}_1 \widetilde{\gamma}_n^{-1} |C_2|^{-1/2}, \tag{5.32}$$

где C — компактный положительный оператор, действующий в пространстве $\mathscr{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)$. Свойство положительности оператора C проверяется непосредственно с учетом того, что $\widetilde{C}_1 \gg 0$ (лемма 11) и $(\widetilde{V})^* = \widetilde{\gamma}_n$. Отсюда на основании теоремы Л. С. Понтрягина из [18] (см. также [19]) получаем такой результат.

Теорема 6. *Задача* (5.29) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений* $\mu_j \in \mathbb{R}$ *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *При этом первые* $\varkappa$ *собственных значений отрицательны, а остальные – положительны. Собственные элементы* $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ *задачи* (5.29) *образуют базис, ортогональный по форме* $(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathscr{H}_1}}$. *При этом выполнены формулы ортогональности* (5.27), *где теперь* $\mu_j < 0$ *при* $j \leqslant \varkappa$; $\mu_j > 0$, $j \geqslant \varkappa + 1$.

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j *при* $j \to \infty$ *по-прежнему имеет вид* (5.26).

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (3.39) *и не выполнены условия* (3.47), (3.50), *т. е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т. е. имеются решения однородной начально-краевой задачи* (2.1), (2.4)–(2.11), *экспоненциально возрастающие по* t *при* $t \to +\infty$.

Список литературы

1. Жуковский, Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Избранные сочинения. — 1948. — Т. 1. — С. 31–52.

   ZHUKOVSKIY, N. E. (1948) On motions of rigid body with cavities filled with homogeneous capel dlfuid. *Selected works.* Vol. 1. p. 31–52.

2. Крейн, С. Г. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей / С. Г. Крейн, Н. Н. Моисеев // Прикладная математика и механика. — 1957. — Т. 21, вып. 2. — С. 169–174.

   KREIN, S. G., MOISEEV, N. N. (1957) On oscillations of rigid body containing fluid with free boundary. *App. math and mechanics.* Vol. 1 (2). p. 169–174.

3. Батыр, Э. И. Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость / Э. И. Батыр // Динамические системы. — 2001. — вып. 17. — С. 120–125.

   BATYR, E. I. (2001) Small motions of a system of joined bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Dynamic systems.* Vol. 17. p. 120–125.

4. Батыр, Э. И. Малые движения системы последовательно сочленённых тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость / Э. И. Батыр // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. — 2002. — Т. 15(54), № 2. — С. 5–10.

   BATYR, E. I. (2002) Small motions of a system of joined bodies with cavities filled with a ideal incompressible fluid. *Uch. zap. TNU.* Vol. 15(54) (2). p. 5–10.

5. Батыр, Э. И. Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью / Э. И. Батыр, О. А. Дудик, Н. Д. Копачевский // Известия вузов. Северо – Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. — 2009. — Т. 49. — С. 15–29.

   BATYR, E. I., DUDIK, O. A., KOPACHEVSKY, N. D. (2009) Small oscillations of bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Izv. vuzov. North-Caucasus region. Actual problems of mathematical hydrodynamics.* Vol. 49. p. 15–29.

6. Батыр, Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы трех сочленённых тел с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью / Э. И. Батыр // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. — 2010. — Т. 23(62), № 2. — С. 19–38.

   BATYR, E. I. (2010) Small motions of a system of three joined bodies with cavities filled with a ideal incompressible fluid. *Uch. zap. TNU.* Vol. 23(62) (2). p. 19–38.

7. Батыр, Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундам. направления. — 2013. — Т. 49. — С. 5–88.

   BATYR, E. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2013) Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* Vol. 49. p. 5–88.

8. Войтицкий, В. И. О малых движениях системы двух сочленённых тел с полостями, частично заполненными тяжёлой вязкой жидкостью / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Таврический вестник математики и информатики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 7–32.

   VOYTITSKY, V. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2017) On small motions of systems of two joined bodies with cavities partially filled with a heavy viscous fluid. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* No. 2 (35). p. 7–32.

9. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — Москва: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka. 416 p.

10. KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. (2001) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self–adjoint Problems for an Ideal Fluid (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128).* Birkhäuser Verlag. – Basel. – Boston. – Berlin. 384 p.

11. KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).* Birkhäuser Verlag. – Basel. – Boston. – Berlin. 444 p.

12. Копачевский, Н. Д. О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений / Н. Д. Копачевский // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 158–194.

    KOPACHEVSKY, N. D. (2005) On oscillations of body with cavity partially filled with a heavy ideal fluid: theorems on existance, uniqueness, stability of strong solutions . *Problems of dynamics and stability of multidimentional systems. – Proceedings of Math Institute NASU.* Vol. 1, No. 1. p. 158–194.

13. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм / Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 71—105.

KOPACHEVSKY, N. D. (2015) On abstract Green's formula for triple of Hilbert spaces and sesqulinear forms. *Contemporary mathematics. Fundamental directions.* Vol. 57. p. 71—105.

14. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФОРМА, 2016. — 280 с.

    KOPACHEVSKY, N. D. (2016) *Abstract Green's formula and its some applications.* Simferopol: FORMA. 280 p.

15. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — Москва: Наука, 1970. — 512 с.

    MIHLIN, S. G. (1970) *Variational methods in mathematical physics.* Moscow: Nauka. 512 p.

16. Бирман, М. Ш. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // Итоги науки и техники. Математический анализ. – М.: ВИНИТИ. — 1977. — Т. 14, № 6. — С. 5–52.

    BIRMAN, M. Sh., SOLOMYAK, M. Z. (1977) Spectral asymptotics for differential equations. *Itogi nauki i tehniki. Math analysis.* Vol. 14, No. 6. p. 5–52.

17. Вулис, И. Л. Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка / И. Л. Вулис, М. З. Соломяк // Известия АН СССР. Серия математика. — 1974. — Т. 38, № 6.. — С. 1362–1392.

    VULIS, I. L., SOLOMYAK, M. Z. (1974) Spectral asymptotics for degenerated elliptic operators of second order. *Izvestiya Academy of science USSR. Math series.* Vol. 38, No. 6. p. 1362–1392.

18. Понтрягин, Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой / Л. С. Понтрягин // Известия АН СССР. Серия «математика». — 1944. — Т. 8, № 6. — С. 243–280.

    PONTRYAGIN, L. S. (1944) Hermitian operators in space with indefinite metrics. *Izv. Academy of sciencs USSR. Math series.* Vol. 8, No. 6. p. 243–280.

19. Азизов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — Москва: Наука, 1986. — 352 с.

    AZIZOV, T. Ya., IOHVIDOV, I. S. (1986) *Foundation of theory of linear operators in spaces with indefinite metrics.* Moscow: Nauka. 352 p.

УДК: 517.927.4

MSC2010: 34M35

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

© С. В. Пикулин

ВЦ ФИЦ ИУ РАН,

ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Российская Федерация

e-mail: *spikulin@gmail.com*

On the intermediate asymptotic solutions in some models of the combustion theory.

Pikulin S. V.

Abstract. We consider the travelling wave solutions of a nonlinear parabolic equation of the second order, namely the equation of the Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov type with the heat release function on the right–hand side being analytical. We found a new analytic representation for such a solution or, more accurately, for its inverse function which is represented as a sum of an explicitly calculated summand and an auxiliary function defined on the unit interval. An algorithm for calculating the Taylor coefficients of that function at the right endpoint and at the interior points of the interval is constructed.

We establish a sufficient condition for for the mentioned auxiliary function to be analytical on the entire unit interval including its both endpoints. The obtained criterion for the analyticity allowed us to distinguish a countable dense set of values among the spectrum of the permissible values for the traveling wave velocity (the spectrum being a numerical ray defined by A.Kolmogorov, I.Petrovskii and N.Piskunov) for which the auxiliary function is analytic and consequently the inverse of the traveling wave solution is approximately representable by an explicit formula up to a term uniformly bounded on the unit interval.

There is a result of the analytical theory of the Abel defferential equation. In the proof of the criterion of analyticity we use a kind of Painlevé test (or Fuchs – Kovalevskaya – Painlevé test) applied to an accessorial equation namely to the Abel equation of the second kind. It became apparent that this equation satisfies the Painlevé test when some additional parameter (defined in the text) takes the prescribed values. Moreover the family of solutions passed through the corresponding singular point of the equation consist of analytical functions when the conditions of test gets satisfied.

In the second part of the paper an analytic–numerical method is developed based on the representation described above. The method is applied to the problem of intermediate asymptotic regimes of the thermal combustion of a gas mixture reacting at the initial temperature under the condition of similarity of concentration and temperature fields. Some numerical results of the constructed method are presented.

Keywords: *travelling wave solutions, flame propagation, intermediate asymptotics, Kolmogorov – Petrovskii – Piskunov equation, Abel equation of the second kind, Painlevé test.*

Введение

Процесс горения газовой смеси может быть при определенных условиях приближенно описан (см. [1, с. 202]) следующей задачей Коши для нелинейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(t,\mathbf{x}) = F\big(u(t,\mathbf{x})\big), \tag{1}$$

$$u(t,\mathbf{x})|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $t \geq 0$ — время, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка пространства $\mathbb{R}^3$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, искомая функция $u(t,\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, непрерывной при $t \geq 0$, непрерывно дифференцируемой по t и дважды непрерывно дифференцируемой по $\mathbf{x}$ при $t > 0$ и удовлетворяющей уравнению (1) в классическом смысле при $t > 0$. Непрерывная функция $u_0(\mathbf{x})$ в начальном условии (2) принимает значения в диапазоне $[0,1]$. Заданная функция $F(\xi)$ в правой части уравнения (1) определена на отрезке $\xi \in [0,1]$, принадлежит классу $C^1([0,1])$ и отвечает условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \qquad f_1 := F'(0) > 0, \qquad F(\xi) > 0, \quad \xi \in (0,1). \tag{3}$$

Известно (см. [2]), что при сделанных предположениях решение $u(t,\mathbf{x})$ принимает значения также в диапазоне $[0,1]$ для всех $t, \mathbf{x}$.

Важным свойством уравнения (1) является возможность существования квазистационарных решений типа бегущей плоской волны, то есть имеющих вид

$$u(t,\mathbf{x}) = \psi\big(\omega\, t - (\mathbf{x},\mathbf{n})\big), \tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, задающий направление движения волны, $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, скорость ω распространения волны — числовой параметр, подлежащий определению вместе с функцией $\psi(\eta)$ класса $C^2(\mathbb{R})$. Подставляя решение $u(t,\mathbf{x})$ в виде (4) с некоторым фиксированным значением $\omega = \mathrm{const} > 0$ в уравнение (1), получим относительно $\psi(\eta)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} - \omega\frac{d\psi}{d\eta} + F\big(\psi(\eta)\big) = 0, \qquad \eta \in (-\infty, +\infty), \qquad \psi(\eta) \in (0,1). \tag{5}$$

Уравнение (5) дополним условием стремления при $\eta \to \pm\infty$ функции профиля бегущей волны $\psi(\eta)$ к одному из указанных выше стационарных решений:

$$\lim_{\eta\to-\infty}\psi(\eta) = 0, \qquad \lim_{\eta\to+\infty}\psi(\eta) = 1. \tag{6}$$

Задача (1), (2) и ее автомодельный вариант (5), (6) впервые были рассмотрены в связи с некоторыми моделями популяционной динамики в работе [2] при следующем ограничении на функцию $F(\xi)$:

$$F'(\xi) < F'(0), \qquad \xi \in (0,1), \tag{7}$$

а также (независимо) в работе [3] для конкретной функции $F(\xi) = \xi\,(1-\xi)$. Позднее постановка (1), (2) нашла применение при моделировании процессов горения газовых смесей [1, 4, 5]. В частности, модель изотермического распространения пламени при автокаталитической цепной реакции (см. [1, гл. I, § 4]) приводит к задаче (1), (2) при выполненных ограничениях (3), (7). Известно (см. [2]), что в этом случае спектр возможных значений скорости ω бегущей волны заполняет числовой луч

$$\omega \in [\omega_{\min}, +\infty), \qquad \omega_{\min} = 2\sqrt{f_0}, \tag{8}$$

причем для каждого ω из указанного промежутка существует решение задачи (5), (6), единственное с точностью до сдвига $\eta \mapsto \eta + \mathrm{const}$ вдоль горизонтальной оси.

Теория распространения ламинарного пламени при тепловом механизме протекания реакции в газовой смеси, реагирующей при начальной температуре (см. [1, гл. IV, § 4], [6]) также приводит к задаче (5), (6) с аналитической эффективной функцией тепловыделения $F(\xi)$, удовлетворяющей условиям (3); однако условие (7) оказывается при этом нарушенным ввиду того, что $F(\xi)$ имеет характерный максимум вблизи $\xi = 1$ (безразмерной температуры горения). В таком случае спектр возможных скоростей для решения вида (4) также имеет вид луча $[\omega_{\min}, +\infty)$, где для $\omega_{\min}$, в отличие от формулы (8), справедливо неравенство $\omega_{\min} \geq 2\sqrt{f_0}$.

Решение задачи (1), (2) типа бегущей волны (4) эффективно описывает протекание моделируемого процесса в некотором объеме реагирующей смеси в тот промежуток времени, когда влияние конкретного вида начальных данных $u_0(\mathbf{x})$ уже стерлось, но процесс еще далек от завершения; такой этап протекания процесса называют промежуточным асимптотическим режимом (см. [7]). В работе [8] при анализе процесса горения неравномерно нагретой газовой смеси были рассмотрены различные физически возможные промежуточные асимптотические режимы (т. е. режимы распространения пламени); в частности, были выделены «причинный» (поджигание соседних объемов смеси один от другого) и «спонтанный» (независимое последовательное воспламенение соседних объемов газа) режимы горения. Теория бегущих волн для уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова дает удобную математическую модель для исследования промежуточных асимптотических режимов: минимальная скорость волны $\omega = \omega_{\min}$ соответствует причинному режиму, другие значения $\omega > \omega_{\min}$ — спонтанным режимам.

В раделе 1 настоящей работы получено новое представление решения задачи (5), (6), точнее обратной к решению функции $\eta(\psi), \psi \in (0,1)$, при заданной аналитической функции $F(\xi)$ с условиями (3) и при заданном значении параметра ω (теорема 1). С помощью модификации теста Фукса—Ковалевской—Пенлеве получено условие аналитичности входящей в это представление вспомогательной функции. Указано счетное плотное на луче $[\omega_{\min}, +\infty)$ множество значений скорости бегущей волны, при которых данное условие аналитичности выполнено (теорема 2). Следствием доказанного критерия является тот факт, что в указанном классе случаев обратная к решению функция приближенно представима явной формулой с точностью до слагаемого, равномерно ограниченного на отрезке $\psi \in [0,1]$. Аналогичные результаты для уравнения (5) с функцией $F(\xi)$, теряющей аналитичность в точке $\xi = 0$, рассмотрены в работах [9, 10]. В разделе 2 построенный на основе результатов раздела 1 аналитико-численный метод расчета профиля бегущей волны применен к задаче о промежуточных асимптотических режимах теплового горения газовой смеси, реагирующей при начальной температуре.

1. Представление решения типа бегущей плоской волны

Рассмотрим задачу (5), (6), где функция $F(\xi)$ удовлетворяет условиям (3), является аналитической на отрезке $\xi \in [0,1]$ и имеет в окрестности точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ следующие разложения:

$$F(\xi) =: \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, \xi^k, \quad f_1 > 0, \qquad F(\xi) =: \xi \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot (1-\xi)^k, \quad g_1 > 0. \tag{9}$$

Зафиксируем значение $\omega \geq \omega_{\min}$, при котором решение $\psi(\eta)$ определено.

Заметим, что решение $\psi(\eta)$ задачи (5), (6) строго возрастает при $\eta \in (-\infty, +\infty)$. В самом деле, из уравнения (5) вытекает, что $\psi(\eta)$ не имеет ни одного локального минимума. Тогда из краевых условий (6) следует, что локальных максимумов у этой функции также нет, таким образом, функция $\psi(\eta)$ монотонна и выполнены равенства

$$\frac{d\psi}{d\eta} > 0, \quad \eta \in (-\infty, +\infty), \qquad \lim_{\eta \to -\infty} \frac{d\psi}{d\eta} = \lim_{\eta \to +\infty} \frac{d\psi}{d\eta} = 0. \tag{10}$$

Это позволяет рассматривать корректно определенную (с точностью до аддитивной константы) обратную функцию $\eta = \eta(\psi)$. Отметим, что обе функции $\psi(\eta)$ и $\eta(\psi)$ являются монотонно возрастающими в области своего определения.

Теорема 1. *Рассмотрим задачу (5), (6) с аналитической функцией $F(\xi)$ при условиях (3), (9) и при $\omega \geq \omega_{\min}$. Пусть γ — произвольное положительное число. Для* *функции* $\eta = \eta(\psi)$, *обратной к ее решению* $\psi(\eta)$, *справедливо следующее представление:*

$$\eta(\psi) = \ln \frac{\psi^b}{\left(1 - \psi^\gamma\right)^a} + H_\gamma\left(\psi^\gamma\right) + \mathrm{const}, \qquad \psi \in (0,1), \tag{11}$$

$$a = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + 4\,g_1}}{2\,g_1} > 0, \qquad b = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\,f_1}}{2\,f_1} > 0, \tag{12}$$

где функция $H_\gamma(z)$, *зависящая от* γ *как от параметра, является аналитической на полуинтервале* $z \in (0,1]$ *и удовлетворяет следующему условию:*

$$H_\gamma(z) = o\big(\ln z\big), \qquad z \to 0. \tag{13}$$

Коэффициенты h_k *ряда Тейлора в точке* $z = 1$ *функции* $H_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,(1-z)^k$ *могут быть выражены через известные величины* $\omega, \gamma, f_1, g_1, \ldots, g_k$ *с помощью конечного числа арифметических операций.*

Доказательство. Введем новую переменную (см., например, [2])

$$p := \frac{d\psi}{d\eta} \tag{14}$$

для того, чтобы понизить порядок уравнения (5) и привести его к виду уравнения Абеля второго рода (см. [11])

$$p(\psi)\,\frac{dp}{d\psi} - \omega\,p(\psi) + F(\psi) = 0, \qquad \psi \in (0,1), \tag{15}$$

свободного от переменной η. Переход к ψ как независимой переменной корректен, поскольку соответствия между η и ψ является взаимно однозначным ввиду монотонности (10) функции $\psi(\eta)$. Задача (5), (6) с учетом (10) принимает следующий вид:

$$\frac{dp}{d\psi} = \omega - \frac{F(\psi)}{p(\psi)}, \qquad p(\psi) > 0, \qquad \psi \in (0,1), \tag{16}$$

$$p(0) = p(1) = 0. \tag{17}$$

Проанализируем фазовый портрет уравнения (16). Условие $\omega \geq \omega_{\min}$ означает, что существует единственное (с точностью до сдвига) решение задачи (5), (6). Этому решению соответствует лежащая в полуполосе $\psi \in [0,1], p > 0$ интегральная кривая $\mathscr{J}$ уравнения (16), соединяющая две особые точки этого уравнения — седло $A(\psi = 1, p = 0)$ и узел $B(\psi = 0, p = 0)$, характеристические полиномы которых равны соответственно $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \omega\,\lambda - g_1$ и $P_B(\lambda) = \lambda^2 - \omega\,\lambda + f_1$.

Кривая $\mathscr{J}$ выходит из точки A как сепаратриса седла, величина наклона которой к горизонтальной оси

$$\frac{dp}{d\psi}(1) = \alpha := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 + 4\,g_1}}{2} < 0 \tag{18}$$

является отрицательным корнем квадратного уравнения $P_A(\lambda) = 0$.

Обозначим корни квадратного уравнения $P_B(\lambda) = 0$ следующим образом:

$$\beta' := \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\,f_1}}{2}, \qquad \beta := \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\,f_1}}{2}, \qquad \beta' \geq \beta > 0. \tag{19}$$

Кривая $\mathscr{J}$ может входить в точку B с одного из двух направлений: $p = \beta\psi$ или $p = \beta'\psi$; покажем, что реализуется только первая возможность $p = \beta\psi$. Для этого рассмотрим зависимость $\alpha, \beta, \beta', \mathscr{J}$ от ω как от параметра. При увеличении ω от значения $\omega_{\min}$ числа $|\alpha|, \beta$ уменьшаются, β' растет. При этом в каждой фиксированной точке (ψ, p) значение $dp/d\psi$ производной решения, проходящего через эту точку, увеличивается. Следовательно, если $\omega_1 < \omega_2$ — два допустимых значения параметра ω, то соответствующие им кривые $\mathscr{J}_1$ и $\mathscr{J}_2$ не пересекаются нигде, кроме точек A и B, причем кривая $\mathscr{J}_2$ расположена ниже $\mathscr{J}_1$. Таким образом, $\mathscr{J}_2$ входит в B в направлении $\beta = \beta(\omega_2)$ (меньшего по модулю корня характеристического уравнения); тогда это верно и для всех допустимых значений ω.

Введем новые переменные z, q по следующим формулам:

$$\psi =: z^{1/\gamma}, \qquad p =: \psi\, q(\psi), \tag{20}$$

где $\gamma > 0$ — параметр из условия теоремы. Подставив $q(\psi)$ в уравнение (15), получим уравнение

$$\psi\, q(\psi) \left(\psi \frac{dq}{d\psi} + q(\psi)\right) - \omega\, \psi\, q(\psi) + F(\psi) = 0, \tag{21}$$

обе части которого можно сократить на ψ, поскольку функция

$$f(\psi) := \frac{F(\psi)}{\psi} \tag{22}$$

является аналитической на отрезке $\psi \in [0,1]$, причем $f(0) = f_1$. Переходя в уравнении (21) к независимой переменной z, получим:

$$\frac{\gamma}{2}\, z\, \frac{dq^2}{dz} + q^2(z) - \omega\, q(z) + f(z) = 0. \tag{23}$$

Из равенств (20), (18) вытекают условия

$$q(0) = \beta, \qquad q(1) = 0, \qquad \frac{dq}{dz}(1) = \frac{\alpha}{\gamma}, \tag{24}$$

однозначно определяющие решение $q(z)$ уравнения (23). Коэффициенты ряда Тейлора

$$q(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k\, \tau^k, \qquad \tau = 1 - z \tag{25}$$

функции $q(z)$ в точке $z = 1$ найдем методом неопределенных коэффициентов из уравнения (23), записанного в следующем виде с учетом условий (24) и разложения (9):

$$\frac{\gamma}{2}\,(\tau - 1)\,\frac{dq^2}{d\tau} + q^2(\tau) - \omega\, q(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{g}_k\, \tau^k = 0, \qquad q_1 = -\frac{\alpha}{\gamma} > 0, \tag{26}$$

где ряд в последнем слагаемом левой части получается путем раскрытия скобок при подстановке $\xi = (1-\tau)^{1/\gamma}$ согласно (20) в разложение (9):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{g}_k\, \tau^k = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(1 - (1-\tau)^{1/\gamma}\right)^k, \qquad 1 - (1-\tau)^{1/\gamma} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \binom{1/\gamma}{j}\, \tau^j.$$

Последовательно вычисляя коэффициенты $q_1, \ldots, q_k$, получим q_k как результат конечного числа арифметических действий над известными величинами $\gamma, \alpha,\, g_j, j = 1, \ldots, k$.

Выразим решение задачи (5), (6) через функцию $q(z)$, считая ее известной. Из подстановки (14) найдем с учетом (24) следующее выражение для $\eta(z)$:

$$\eta = \int^{\psi} \frac{d\psi}{p(\psi)} = \int^{\psi} \frac{d\psi}{\psi\, q(\psi)} = \frac{1}{\gamma} \int^{z} \frac{dz}{z\, q(z)} = \frac{1}{\gamma} \int^{z} \left(\frac{1}{z\, q(z)} - \frac{1}{\beta z} + \frac{\gamma}{\alpha\,(1-z)} \right) dz +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \int^{z} \left(\frac{1}{\beta z} - \frac{\gamma}{\alpha\,(1-z)} \right) dz = H_\gamma(z) + \frac{1}{\beta\,\gamma} \ln z + \frac{1}{\alpha} \ln(1-z) + \mathrm{const}, \tag{27}$$

где

$$H_\gamma(z) = \int_1^z h_\gamma(y)\, dy, \qquad h_\gamma(z) := \frac{1}{\gamma\, z\, q(z)} - \frac{1}{\beta\,\gamma\, z} + \frac{1}{\alpha\,(1-z)}, \qquad z \in (0, 1], \tag{28}$$

что соответствует формулам (11), (12) с показателями $a = -1/\alpha$ и $b = 1/\beta$.

Осталось исследовать свойства построенной функции $H_\gamma(z)$. Заданная формулой (28) функция $h_\gamma(z)$, продолженная аналитически по переменной z в комплексную область, формально имеет в точке $z = 1$ полюс порядка не выше первого. Пользуясь последним из равенств (24), найдем соответствующий вычет

$$\mathrm{Res}_{z=1}\, h(z) = \mathrm{Res}_{z=1} \frac{1}{\gamma\, z\, q(z)} + \mathrm{Res}_{z=1} \frac{1}{\alpha\,(1-z)} = \frac{\gamma}{\alpha\,\gamma} - \frac{1}{\alpha} = 0;$$

следовательно, функции $h_\gamma(z), H_\gamma(z)$ голоморфны при $z = 1$.

Из (28), (24) получаем $h_\gamma(z) = o\big(z^{-1}\big)$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{R}$. Это означает, что для любого $C > 0$ для всех достаточно малых $z > 0$ справедливо неравенство $|h_\gamma(z)| < C\, z^{-1}$, из которого интегрированием получаем оценку

$$|H_\gamma(z)| \le \int\limits_1^z |h(y)|\, dy < C|\ln z| + C_1, \qquad z \in (0,1)$$

при некотором $C_1 \in \mathbb{R}$. Из последней формулы и из произвольности C вытекает соотношение (13). Теорема доказана. □

Вспомогательная функция $H_\gamma(z)$, входящая в представление (11), вообще говоря, имеет особенность в точке $z = 0$, причем характер поведения функции в окрестности этой точки описывается формулой (13). Однако при некоторых значениях ω и при подходящем выборе параметра γ эта особая точка может оказаться устранимой. Так, известное частное решение (см. [12]) уравнения Фишера (т. е. решение задачи (5), (6), при $F(\xi) = \xi\,(1-\xi)$) при специальном значении скорости $\omega = 5/\sqrt{6}$ выражается формулой (11) при $\gamma = 1/2$ и $H_\gamma(z) \equiv 0$. Следующая теорема описывает другие возможные сочетания ω и γ, для которых соответствующая функция $H_\gamma(z)$ обладает аналитичностью при $z = 0$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 допустим, что значение ω в уравнении* (5) *задано формулой*

$$\omega = \Omega(\Upsilon) := \frac{\Upsilon + 2}{\sqrt{\Upsilon + 1}}\,\sqrt{f_1}, \tag{29}$$

при некотором Υ вида

$$\Upsilon \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}, \qquad \Upsilon > 0. \tag{30}$$

Тогда в представлении (11) *при функция $H_\gamma(z)$ является аналитической на всем отрезке $z \in [0,1]$ при выполнении условий $\gamma^{-1} \in \mathbb{N}$ и $\big(\gamma^{-1}\,\Upsilon\big) \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Из конструкции (28) функции $H_\gamma(z)$ вытекает, что ее аналитичность при $z = 0$ равносильна аналитичности решения $q(z)$ уравнения (23) в той же точке $z = 0$. Для того, чтобы указанное условие выполнялось, необходимо, чтобы последнее слагаемое левой части уравнения (23) было представлено в окрестности $z = 0$ сходящимся рядом по целым неотрицательным степеням z:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1}\, z^{k/\gamma} =: \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}_k\, z^k, \qquad \widetilde{f}_k := \begin{cases} f_{\gamma\, k+1}, & k \equiv 0 \pmod{\gamma^{-1}}, \\ 0, & k \not\equiv 0 \pmod{\gamma^{-1}}, \end{cases} \tag{31}$$

где включение $\gamma^{-1} \in \mathbb{N}$ будем считать выполненным по условию теоремы. Подставим предполагаемое разложение $q(z)$ в ряд Тейлора

$$q(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, z^k, \qquad b_0 = \beta \tag{32}$$

и ряд (31) в уравнение (23); приравнивая нулю получаемые коэффициенты при z^k в левой части уравнения, найдем

$$\big((\gamma\, k + 2)\, \beta - \omega\big)\, b_k + \frac{1}{2}\,\big(\gamma\, k + 2\big) \sum_{j=1}^{k-1} b_j\, b_{k-j} + \widetilde{f}_k = 0, \qquad k \geq 1. \tag{33}$$

Если коэффициент при b_k в левой части равенств (33) не обращается в нуль ни при каком $k \geq 1$, то из этих равенств можно последовательно найти однозначным образом определенные коэффициенты b_k. Если при этом ряд (32) окажется сходящимся, тем самым будет определено единственное аналитическое решение уравнения (23), проходящее через точку $z = 0, q = \beta$; однако мало надежды, что это решение удовлетворит условию $q(1) = 0$ — второму из условий (24).

Допустим, что при некотором $k = m$ коэффициент при b_k в левой части равенств (33) обращается в нуль, а само это равенство превращается в тождество:

$$(\gamma\, m + 2)\, \beta - \omega = 0, \tag{34}$$

$$\frac{1}{2}\,\big(\gamma\, m + 2\big) \sum_{j=1}^{m-1} b_j\, b_{m-j} + \widetilde{f_m} = 0; \tag{35}$$

тогда формулы (33) однозначно определяют коэффициенты b_k при $1 \leq k < m$, не накладывают никаких ограничений на b_m и, после произвольного выбора значения b_m, однозначно определяют b_k при $k > m$ (в зависимости от выбранного b_m). Таким образом, получаем семейство последовательностей $\{b_k, k = 1, \ldots\}$, параметризованное величиной $b_m \in \mathbb{R}$.

Выразим ω из формулы (34), учитывая равенства (19) и полагая $\Upsilon = \gamma\, m$. Подставляя $\omega = \beta + \beta'$ в (34), найдем $\beta' = (\Upsilon + 1)\, \beta$. Затем из (34) и равенства $\beta\beta' = f_1$ получаем

$$\omega^2 = \frac{(\Upsilon + 2)^2\, \beta^2 \beta'}{\beta'} = \frac{(\Upsilon + 2)^2\, \beta\, f_1}{(\Upsilon + 1)\, \beta} = \frac{(\Upsilon + 2)^2}{\Upsilon + 1}\, f_1, \tag{36}$$

что соответствует (29).

Из условия (30) теоремы следует выполнение равенства (35), поскольку при этом $m \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} \gamma^{-1})$ и $\widetilde{f_m} = 0$ в силу (31) и, кроме того, по крайней мере одно из чисел b_j, b_{m-j} равно нулю при каждом $j < m$, т. к. $b_k = 0$ при $k < m, k \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} \gamma^{-1})$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что при выполнении условий (34), (35) при любом выборе $b_m \in \mathbb{R}$ ряд (32) с коэффициентами b_k, определенными по формулам (33), сходится в окрестности $z = 0$, и что всякое решение уравнения (23), проходящее через точку $z = 0, q = \beta$, представляется в виде такого ряда при подходящем значении b_m.

Определим многочлен $Q(z)$, не зависящий от выбора b_m, и новую неизвестную функцию $\mathscr{P}(z)$ по следующим формулам:

$$Q(z) := \sum_{k=0}^{m-1} b_k\, z^k, \qquad q(z) =: Q(z) + z^m\, \mathscr{P}(z). \tag{37}$$

В силу вышесказанного в полином $Q(z)$ входят только степени z, кратные γ^{-1}; кроме того, $Q(0) = \beta$.

Подставляя (37) в уравнение (23), после приведения подобных членов и сокращения на z^{m+1} получаем

$$\frac{d\mathscr{P}}{dz} = -\gamma^{-1}\, \frac{\mathscr{A}(z)\, \mathscr{P}^2(z) + \mathscr{B}(z)\, \mathscr{P}(z) + \mathscr{C}(z)}{Q(z) + z^m\, \mathscr{P}(z)}, \tag{38}$$

где коэффициенты $\mathscr{A}(z), \mathscr{B}(z), \mathscr{C}(z)$ с учетом (34), (19) имеют вид

$$\mathscr{A}(z) = \big(\Upsilon + 1\big)\, z^{m-1}, \qquad \mathscr{B}(z) = \gamma\, \frac{dQ}{dz} + \frac{\omega}{\beta}\, \frac{Q(z) - \beta}{z},$$
$$\mathscr{C}(z) = z^{-(m+1)}\, \left(\frac{\gamma}{2}\, z\, \frac{dQ^2}{dz} + Q^2(z) - \omega\, Q(z) + f(z)\right)$$

и являются голоморфными функциями на отрезке $z \in [0, 1]$.

Правая часть уравнения (38) является аналитической по z и по $\mathscr{P}$ в окрестности точки $z = 0, \mathscr{P} = c$ при любом $c \in \mathbb{C}$. Согласно теореме Коши (см. [13]) существует единственное аналитическое в окрестности $z = 0$ решение $\mathscr{P}(z)$ с условием $\mathscr{P}(0) = c$, которое определяет по формуле (37) решение $q(z)$ уравнения (23) вида (32) при $b_m = c$. Выбирая $c \in \mathbb{R}$, получаем вещественные аналитические решения. Таким образом, доказано, что при любом выборе $b_m \in \mathbb{R}$ ряд (32) с коэффициентами b_k, определенными по формулам (33), сходится в окрестности $z = 0$ к решению уравнения (23).

Покажем, что любое решение $q(z)$ уравнения (23), проходящее через точку $z = 0, q = \beta$, представляется (при соблюдении условий (34), (35)) в виде (37) для некоторой функции $\mathscr{P}(z)$, аналитической в окрестности $z = 0$. В силу сказанного выше достаточно показать, что определенное подстановкой (37) решение $\mathscr{P}(z) = z^{-m}\, \big(q(z) - Q(z)\big)$ уравнения (38) стремится к конечному пределу при $z \to 0$.

Нулевая изоклина $\{d\mathscr{P}/dz = 0\}$ уравнения (38) на фазовой плоскости $(z, \mathscr{P})$ задается квадратным алгебраическим уравнением $\mathscr{A}(z)\,\mathscr{P}^2 + \mathscr{B}(z)\,\mathscr{P} + \mathscr{C}(z) = 0$, решения которого определяют две ветви вида $\mathscr{P}_0^{\pm}(z) = z^k\,g^{\pm}(\sqrt{z})$, где $k \in \mathbb{Z}$, $g^{\pm}(w)$ — аналитические в окрестности $w = 0$ функции переменной $w = \sqrt{z}$. Если функции $\mathscr{P}_0^{\pm}(z)$ в окрестности $z = 0$, $z \in \mathbb{R}$ принимают вещественные значения, то эти функции монотонны при достаточно малых z. При подходе к $z = 0$ вдоль интегральной кривой уравнения (38) знак производной меняется при пересечении нулевой изоклины, но ни одну из ее ветвей $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0^{\pm}(z)$ эта кривая не может пересечь более одного раза в достаточно малой окрестности вертикальной оси. Следовательно, функция $\mathscr{P}(z)$ монотонна в окрестности $z = 0$.

Докажем от противного, что монотонная функция $\mathscr{P}(z)$ ограничена в окрестности $z = 0$. Предположим, что $\mathscr{P}(z) \to \infty$ при $z \to 0$. Из равенств $Q(0) = \beta = q(0)$ следует соотношение

$$\mathscr{P}(z) = o\big(z^{-m}\big), \qquad z \to 0. \tag{39}$$

Числитель дроби в правой части уравнения (38) содержит три слагаемых, одно из которых, $\mathscr{C}(z)$, заведомо ограничено в окрестности $z = 0$, тогда как поведение двух других слагаемых допускает две возможности:

$$|\mathscr{A}(z)\,\mathscr{P}^2(z)| = O\big(|\mathscr{B}(z)|\,|\mathscr{P}(z)|\big), \qquad z \to 0, \tag{40}$$

$$|\mathscr{B}(z)|\,|\mathscr{P}(z)| = o\big(\mathscr{A}(z)\,\mathscr{P}^2(z)\big), \qquad z \to 0. \tag{41}$$

В случае справедливости условия (40) имеем неравенство

$$\left|\frac{d\mathscr{P}}{dz}\right| \le C_1\,|\mathscr{B}(z)|\,|\mathscr{P}(z)|, \qquad C_1 > 0 \tag{42}$$

при достаточно малых z. Из (42) следует ограниченность функции $\mathscr{P}(z)$ вблизи нуля, что противоречит предположению $\mathscr{P}(z) \to \infty$ при $z \to 0$. В случае (41) имеем

$$\left|\frac{d\mathscr{P}}{dz}\right| \ge C_2\,\mathscr{A}(z)\,\mathscr{P}^2(z), \quad C_2 > 0,$$

откуда $|\mathscr{P}(z)| \ge C_3\,z^{-m}$, $C_3 > 0$, что противоречит предположению (39).

Таким образом, сделанное предположение не верно, и всякое решение уравнения (38) с условием роста (39) имеет конечный предел при $z \to 0$ и, следовательно, является аналитическим в окрестности $z = 0$. Таким образом, все вещественные решения $q(z)$ уравнения (23) с условием $q(0) = \beta$ имеют вид (32) при подходящих значениях $b_m \in \mathbb{R}$. Теорема доказана. $\square$

2. Тепловое распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре

В этом разделе рассмотрим пример вычисления профиля бегущей волны на основе формул (11), (12), (27) в задаче о структуре пламени в модели реакции экзотермического горения первого порядка при тепловыделении, зависящем от температуры по закону Аррениуса, и при соблюдении условия подобия полей концентрации и температуры. Уравнение (1) реакции принимает в этом случае следующий вид (см. [14]):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta(t,\mathbf{x}) = \Phi\big(\theta(t,\mathbf{x})\big), \qquad \theta \in (\theta_*, 0), \tag{43}$$

$$\Phi(\theta) = -\theta\,\exp\frac{\theta}{1-\theta/\theta_*}, \tag{44}$$

где θ — безразмерная температура по шкале, в которой $\theta = 0$ является температурой горения, $\theta = \theta_* < 0$ — абсолютным нулем.

Ламинарное пламя в такой модели описывается (см. [6]) решением задачи (5), (6) с эффективной функцией тепловыделения $F(\xi) = F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0)$, зависящей (как от параметра) от температуры θ_0 на переднем крае фронта пламени:

$$\xi = 1 - \frac{\theta}{\theta_0}, \qquad F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0) = \Phi\big((1-\xi)\,\theta_0\big) - \Phi(\theta_0)\,(1-\xi). \tag{45}$$

Отметим, что функция $F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0)$ удовлетворяет условиям (3) в отличие от функций $\Phi(\theta)$ и $\Phi_0(\theta)$, не обращающихся в нуль ни при какой температуре выше абсолютного нуля. К задаче (5), (6) применимы в этом случае теоремы 1 и 2, сформулированные в разделе 1.

Для простоты будем считать, что величина θ/θ_* в правой части определения (44) является малой (так называемое приближение Д. А. Франк–Каменецкого), полагая

$$\Phi(\xi) \approx \Phi_0(\xi) = -\theta\,\exp\theta, \tag{46}$$

хотя рассматриваемый метод применим и для функции $F(\theta)$ в ее исходном виде (44).

Как непосредственно видно из анализа графиков на рисунке 1, для эффективных функций тепловыделения, вообще говоря, не выполнено требование (7) при θ_0 ниже определенного значения, однако численный расчет показывает, что формула (8) для минимальной скорости бегущей волны остается справедливой (см. [15], [1, гл. 4, § 4]).

Зафиксируем некоторое значение $\theta_0 < 0$ и найдем величину $f_1 = F'(0)$, где $F(\xi) = F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0)$ определено равенством (45) при $\Phi = \Phi_0$, и коэффициенты g_k разложения (9) функции $\big(\xi^{-1}\,F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0)\big)$ по степеням $\tau := 1-\xi = \theta/\theta_0$:

$$f_1 = -\frac{d}{d\tau}\left[-\theta_0\,\tau\,\exp\big(\theta_0\,\tau\big) - \Phi_0(\theta_0)\,\tau\right]_{\tau=1} = \theta_0^2\,\exp\theta_0,$$

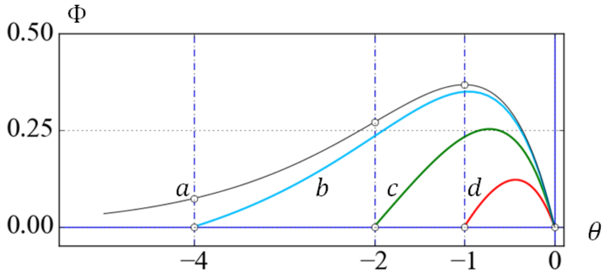

Рис. 1. Графики функций тепловыделения: a) $\Phi(\theta) = \Phi_0(\theta)$, см. (46); b, c, d) $\Phi(\theta) = F_{\mathrm{eff}}\big(\xi,\ \theta_0\big)$, $\theta = (1-\xi)\,\theta_0$, $\theta_0 = -1, -2, -4$; см. (45).

$$\xi^{-1}\, F_{\mathrm{eff}}(\xi,\theta_0) = \frac{\Phi_0(\tau\,\theta_0) - \tau\,\Phi_0(\theta_0)}{1-\tau} =$$

$$= \left(-\big(\theta_0 + \Phi_0(\theta_0)\big)\,\tau - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\theta_0^k}{(k-1)!}\,\tau^k\right)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_k\,\tau^k, \qquad g_k = -\left(\theta_0 + \Phi_0(\theta_0) + \sum_{j=2}^{k} \frac{\theta_0^k}{(k-1)!}\right), \quad k \ge 1.$$

Зафиксируем значение скорости $\omega \ge -2\,\theta_0\,\exp\left(\theta_0/2\right)$ и связанное с ним по формуле (29) значение параметра

$$\Upsilon = \frac{2\,\sqrt{\omega^2 - 4\,f_1}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\,f_1}}, \tag{47}$$

найдем α согласно (18), а также зафиксируем величину $\gamma > 0$.

Найдем коэффициенты q_k ряда Тейлора (25), подставив его в уравнение (26), затем по формулам (28), записанным в виде

$$H_\gamma(\tau) = -\int_0^\tau h_\gamma(y)\,dy, \qquad h_\gamma(\tau) := \frac{1}{\gamma\,(1-\tau)\,q(\tau)} + \frac{1}{\alpha\,\tau} - \frac{1}{\beta\,\gamma\,(1-\tau)}, \tag{48}$$

вычислим коэффициенты $h_k, k = 1, \ldots$ ряда Тейлора

$$H_\gamma(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,\tau^k. \tag{49}$$

Теперь решение задачи (5), (6) в виде $\eta = \eta(\psi)$ можно найти по формулам (11), (12), по крайней мере, вблизи точки $\psi = 1$.

На рис. 2 представлены результаты вычислений при $\theta_0 = -1$ для трех значений скорости (параметр γ был принят равным $\gamma = 1$ в случае a и $\gamma = 1/2$ в случаях b, c). Поведение коэффициентов h_k при $\omega = \Omega(1/2)$ и $\omega = \Omega(200001/2)$ (кривые b

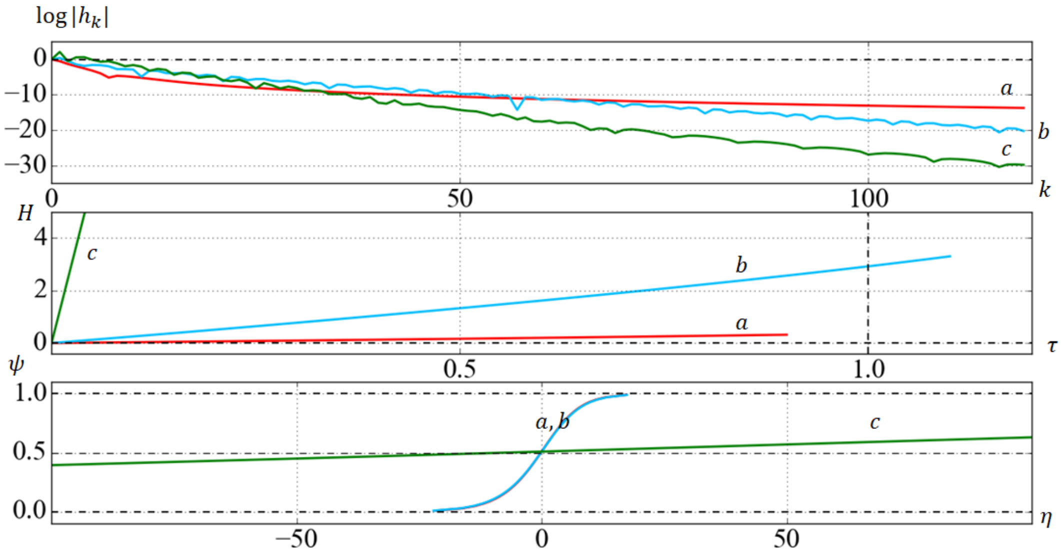

Рис. 2. Решения задачи (5), (6) при $F(\xi) = F_{\text{eff}}(\xi, -1)$. Сверху вниз: поведение коэффициентов ряда Тейлора функции $H(z)$; график функции $H(z)$; профиль бегущей волны $\psi = \psi(\eta)$. Значения параметра скорости ω: a) $\omega = \Omega\big(0\big) = \omega_{\min}$; b) $\omega = \Omega\big(1/2\big) \approx 1.02 \cdot \omega_{\min}$; c) $\omega = \Omega\big(20001/2\big) \approx 50.01 \cdot \omega_{\min}$; см. (29).

и c на верхнем графике) является характерным для степенных рядов с радиусом сходимости, превышающим 1, и тем самым иллюстрирует утверждение теоремы 2: если Υ является рациональным, но не целым числом и представлено несократимой дробью m/d, $d \geq 2$, то при $\gamma = 1/d$ функция $H_\gamma(\tau)$ оказывается голоморфной в точке $\tau = 1$. В том случае, когда весь отрезок $\tau \in [0, 1]$ попадает внутрь круга сходимости ряда (49), найденных коэффициентов h_k и показателей a, b достаточно для вычисления решения $\eta = \eta(\psi)$ во всем диапазоне значений $\psi \in (0, 1)$.

На рис. 3 приведен результат расчета двух профилей бегущих волн при $\theta_0 = -4$ и $\gamma = 1$. На левом графике видно, что последовательность коэффициентов $\{h_k\}$ ведет себя как возрастающая геометрическая прогрессия, т. е. радиус сходимости ряда (49) меньше единицы. В этом случае для получения решения можно дополнительно построить разложение в ряд Тейлора функции $H_\gamma(\tau)$ в нескольких внутренних точках отрезка $\tau \in [0, 1]$, пользуясь, как и ранее, уравнением (26) и формулами (48). В данном случае были задействованы 4 дополнительные точки, равномерно расположенные внутри отрезка. Совпадение вычисленного значения $q(\tau)$ при $\tau = 1$ с ожидаемым (24) значением β составила 17 знаков в случае a) и 38 знаков в случае b) при 50-значной мантиссе и суммировании первых 100 членов разложений в ряды Тейлора.

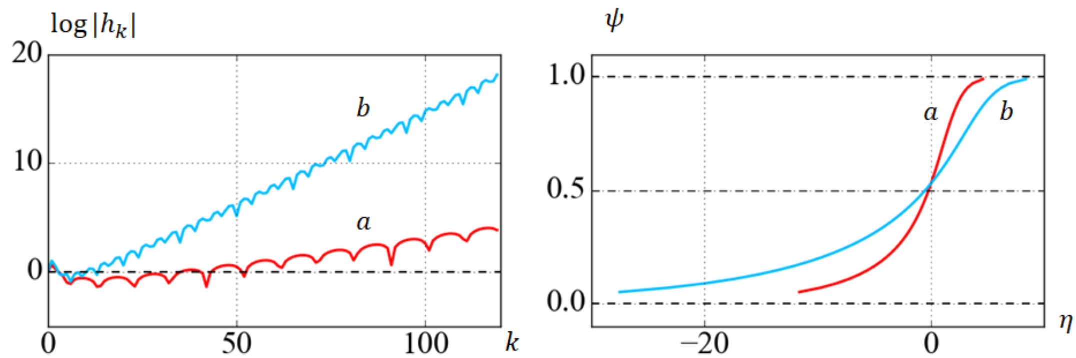

Рис. 3. Решения задачи (5), (6) при $F(\xi) = F_{\mathrm{eff}}(\xi, -4)$. Слева: поведение коэффициентов ряда Тейлора функции $H(z)$; справа: профиль бегущей волны $\psi = \psi(\eta)$. Значения параметра скорости ω: a) $\omega = \Omega\big(0\big) = \omega_{\min}$; b) $\omega = \Omega\big(15\big) \approx 2.13 \cdot \omega_{\min}$.

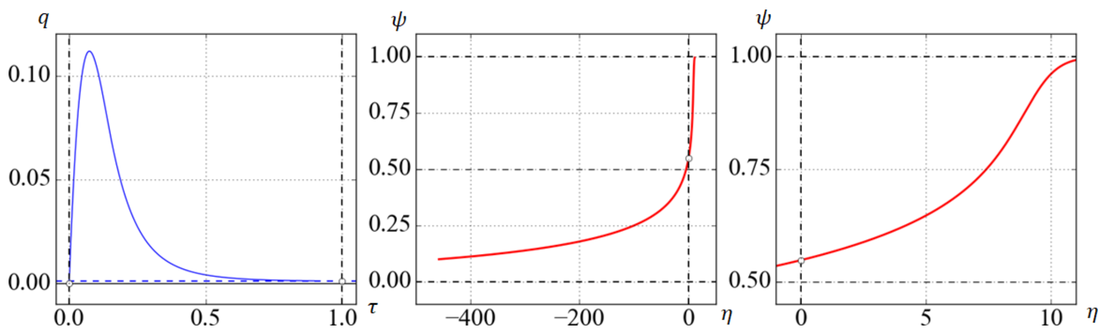

Рис. 4. Решение задачи (5), (6) при $F(\xi) = F_{\mathrm{eff}}(\xi, -10)$. Слева направо: график функции $q(\tau)$; профиль бегущей волны $\psi = \psi(\eta)$; верхняя часть профиля в увеличенном масштабе. Значение параметра скорости $\omega = \Omega\big(21/2\big) \approx 1.84 \cdot 2\sqrt{f_1}$, $\gamma = 1/2$.

На рис. 4 представлен результат расчета в случае θ_0, когда эффективная функция тепловыделения имеет узкий пик вблизи $\xi = 1$ и близка к нулю в остальной части отрезка $\xi \in [0, 1]$. Первый график демонстрирует стремление функции $q(\tau)$ к пределу β при $\tau \to 1$; это отвечает существованию решения типа бегущей волны для заданного значения скорости $\omega = \Omega(21/2)$. На среднем графике можно видеть, что профиль волны делится на две части: левая часть ($\eta < 0$) соответствует периоду разогрева смеси в результате протекания реакции при температуре ниже температуры горения; правая часть графика, расположенная почти вертикально, отвечает собственно горению. На третьем графике показана правая часть профиля бегущей волны в увеличенном масштабе.

Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

1) найдено новое аналитическое представление (11) решения квазистационарной задачи (5), (6) для уравнения (1) типа Колмогорова – Петровского – Пискунова с аналитической функцией тепловыделения $F(\xi)$ в правой части: решение представлено в виде суммы явно вычисляемого слагаемого и некоторой вспомогательной функции $H(\tau)$, $\tau \in [0, 1)$, для которой построен алгоритм вычисления коэффициентов ряда Тейлора в точке $\tau = 0$ и во внутренних точках единичного отрезка;

2) для вспомогательной функции $H(\tau)$ найдено достаточное условие аналитичности в концевой точке $\tau = 1$ промежутка изменения переменной τ; полученный критерий аналитичности $H(\tau)$ позволил выделить среди спектра допустимых значений скорости бегущей волны (представляющего собой числовой луч $\omega \geq \omega_{\min}$) счетное всюду плотное множество значений ω, при которых функция $H(\tau)$ является аналитической;

3) на основе полученных теоретических результатов построен аналитико-численный метод вычисления профиля бегущей волны, т. е. решения задачи (5), (6) с аналитической функцией $F(\xi)$; проведена численная реализация построенного метода для задачи о горении газовой смеси, реагирующей при начальной температуре, при условии подобия полей концентрации и температуры.

Примененную в доказательстве теоремы 2 технику получения семейства решений дифференциального уравнения или системы уравнений называют тестом Пенлеве или тестом Фукса – Ковалевской – Пенлеве (см. [16]); тест заключается в проверке условий типа (34), (35) обращения в тождество одного или нескольких линейных алгебраических уравнений, возникающих в ходе применения метода неопределенных коэффициентов к этому уравнению или системе. Новыми результатами, полученными в настоящей работе, являются обнаруженное прохождение некоторой модификации теста Пенлеве для уравнения Абеля второго рода (23), а также проведенное доказательство аналитичности всех решений этого уравнения, проходящих через особую точку $\tau = 1$, $q = \beta$ при выполнении условий теоремы 2.

Список литературы

1. Зельдович, Я. Б. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблатт, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. — М.: Наука, 1980. — 478 с.

ZELDOVICH, Ya. & BARENBLATT, G. & LIBROVICH, V. & MAKHVILADZE, G. (1985) *The Mathematical Theory of Combustion and Explosions.* New York: Consultants Bureau.

2. Колмогоров, А. Н., Петровский, И. Г., Пискунов, И. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–25.

   KOLMOGOROV, A. & PETROVSKII, I. & PISKUNOV, N. (1937) Etude de l'Equation de la Diffusion avec Croissance de la Quantite de la Matiere et Son Application a un Probleme Biologique. *Moscow Univ. Bull. Math. ser. A.* 1. p. 1–25.

3. FISHER R. (1937) The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eug.* no. 7. p. 355–369.

4. Зельдович Я. Б., Франк–Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени // Журнал физ. химии. — 1938. — Т. 12, № 1. — С. 100–105.

   ZELDOVICH, YA. & FRANK–KAMENETSKII D. (1938) The Theory of the Heat Flame Propagation. *J. Phys. Chem.* 12, no. 7. p. 100–105.

5. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени // Журнал физ. химии. — 1948. — Т. 22, № 1. — С. 27–48.

   ZELDOVICH, Ya. (1948) To The Theory of the Flame Propagation. *J. Phys. Chem.* 2, no. 1. p. 27–48.

6. Зельдович, Я. Б. Распространение пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре. Препринт / Я. Б. Зельдович. — Черноголовка: Инст. хим.физики РАН, 1978. — 7 с.

   ZELDOVICH, Ya. (1980) Flame Propagation in a Substance Reacting at Initial Temperature. *Combustion and Flame.* 39, no. 3. p. 219–224.

7. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Промежуточные асимптотики в математической физике // УМН. — 1971. — Т. 26, № 2(158). — С. 115–129.

   BARENBLATT, G, & ZELDOVICH, Ya. (1971) Intermediate Asymptotics In Mathematical Physics. *Russian Mathematical Surveys.* 26(2), no. 45. p. 45–61.

8. Зельдович, Я. Б. Классификация режимов экзотермической реакции в зависимости от начальных условий. Препринт / Я. Б. Зельдович. — Черноголовка: Инст. хим.физики РАН, 1978. — 8 с.

   ZELDOVICH, YA. (1980) Regime Classification of an Exothermic Reaction with Nonuniform Initial Conditions. *Combustion and Flame.* 39, no. 2. p. 211–214.

9. Пикулин, С. В. О решениях типа бегущей волны для нелинейного параболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2015. — № 6 (128). — С. 110–116.

   PIKULIN, S. (2015) On Solutions of Traveling Wave Type for a Nonlinear Parabolic Equation. *Bulletin of the Samara St. Univ. Natural science series.* 6 (128). p. 110–116.

10. Пикулин, С. В. О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 2. — С. 1–9 (в печати).

   PIKULIN, S. (2018) On the Traveling Wave Solutions of The Kolmogorov – Petrovskii – Piskunov Equation *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* (In press.)

11. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1971. — 576 с.

    KAMKE, E. (1977) *Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen, I, Gewohnliche Differentialgleichungen.* Leipzig: B.G. Teubner.

12. ABLOWITZ M. & ZEPPETELLA A. (1979) Explicit Solutions of Fisher's Equation for a Special Wave Speed. *Bulletin of Mathematical Biology.* 41, no. 6. p. 835–840.

13. Голубев, В. В. Курс аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. — М. : Гостехиздат, 1950. — 436 с.

    GOLUBEV, V. (1950) *Lectures on Analytical Theory of Differential Equations.* Moscow: Gostekhizdat.

14. Худяев С. И. Пороговые явления в нелинейных уравнениях / С.И.Худяев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

    KHUDYAEV, S. I. (2003) *Threshold Phenomena in Nonlinear Equations.* Moscow: Fizmatlit.

15. Алдушин, А. П., Зельдович, Я. Б., Худяев, С. И. Численное исследование распространения пламени по смеси, реагирующей при начальной температуре // Физ. гор. и взрыва. — 1979. — 6. — С. 20–27.

    ALDUSHIN A. & KHUDYAEV S. & ZELDOVICH Ya. (1981) Flame Propagation in the Reacting Gaseous Mixture. *Archivum Combustionis.* 1, no. 1/2. p. 9–21.

16. CONTE R. M. & MUSETTE M. (2008) *The Painlevé Handbook.* Dordrecht : Springer Science+Business Media B.V.

УДК: 514.7

MSC2010: 51F15, 14L24

КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ГРУПП СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКОВ ГЕССЕ

© О. И. Рудницкий

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *oirud58@gmail.com*

Canonical systems of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons.

Rudnitskii O. I.

Abstract. Let G be a finite unitary reflection group acting on the n-dimensional unitary space U^n. The algebra I^G of G-invariant polynomials is generated by n algebraically independent homogeneous polynomials $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$ of degrees $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n$ (a system of basic invariants of group G) [1]. According to [4] (cf. [2]) a system $\{f_1,\dots,f_n\}$ of basic invariants is said to be canonical if it satisfies the following system of partial differential equations:

$$\bar{f}_i(\partial)f_j = 0$$

where a differential operator $\bar{f}_i(\partial)$ is obtained from polynomial f_i if coefficients of polynomial to substitute by the complex conjugate and variables x_i to substitute by $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

In this paper, canonical systems of basic invariants were constructed in explicit form for symmetry groups of Hessian polyhedrons — groups $W(L_3)$, $W(M_3)$ generated by reflections in unitary space U^3.

Keywords: *unitary space, reflection, reflection groups, algebra of invariants, basic invariant, canonical system of basic invariants.*

Введение

Пусть U^n есть n-мерное унитарное пространство, G — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей с общей точкой O. Группа G естественным образом действует в кольце многочленов $R = \mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$. Множество всех многочленов $f(\vec{x}) = f(x_1,\dots,x_n) \in R$, инвариантных относительно G, образует алгебру I^G, порожденную n алгебраически независимыми однородными многочленами f_i степеней m_i (показатели G) [1]; не нарушая общности, будем считать, что $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$. Такая система образующих называется системой базисных инвариантов группы G.

Л. Флатто (см., например, [2]), при решении «проблемы среднего значения» для вещественных многогранников, ввел понятие и доказал существование «канонической системы базисных инвариантов» для вещественных групп G. Позднее, в работе [3], было дано новое определение канонической системы. В работе [4] это понятие было перенесено на невещественные группы G пространства U^n, а также предложен метод построения канонических систем, который в [5] был реализован для построения канонической системы бесконечного семейства импримитивных групп $G(m,p,n)$.

В настоящей статье другим способом построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе пространства U^3.

1. Постановка задачи

Пусть в n-мерном унитарном пространстве U^n задана координатная система началом O и ортонормированным базисом $\vec{e}_i$ $(i=\overline{1,n})$; вектор $\vec{x}=(x_i)$.

Определим в $R=\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ внутреннее произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle : R\times R\to\mathbf{C}$ формулой [4]

$$\langle f,g\rangle = \bar{f}(\partial)g\big|_{\vec{x}=\vec{0}},$$

где $f,g\in R$, дифференциальный оператор $\bar{f}(\partial)$ получается из многочлена f, если коэффициенты многочлена заменить на комплексно сопряженные, а переменных x_i на $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Система $\{f_1,\dots,f_n\}$ базисных инвариантов группы G называется *канонической системой*, если она удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [4]:

$$\bar{f}_i(\partial)f_j = \langle f_i,f_j\rangle\delta_{ij}, \tag{1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $i,j=\overline{1,n}$ $(i\leqslant j)$.

Отметим, что каноническую систему можно в определенном смысле рассматривать как *ортогональную* систему относительно введенного внутреннего произведения.

Целью настоящей работы является построение в явном виде канонических систем для примитивных групп $W(L_3)$ и $W(M_3)$, порожденных отражениями в пространстве U^3 (групп симметрий многогранников Гессе).

2. Канонические системы для групп $W(L_3)$ и $W(M_3)$

В пространстве U^3 существуют три различных типа правильных комплексных многогранников, отличных от обобщенного куба и взаимного ему многогранника [6]. Это многогранник Гессе 3(3)3(3)3 с группой симметрий $W(L_3)$, а также «двойной» многогранник Гессе 2(4)3(3)3 и двойственный к нему многогранник 3(3)3(4)2 с общей группой симметрий $W(M_3)$. Рассмотрим каждый из них.

1. Правильный комплексный многогранник 3(3)3(3)3 имеет 27 вершин, 72 ребра и 27 граней. Каждая грань содержит 8 вершин, образующих правильный комплексный многоугольник 3(3)3 [6]. Зададим вершины многогранника следующими векторами [6]:

$$\omega^l(\vec{e}_1 - \omega^k \vec{e}_2), \omega^l(\vec{e}_2 - \omega^k \vec{e}_3), \omega^l(-\omega^k \vec{e}_1 + \vec{e}_3), \tag{2}$$

где $\omega = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ – первообразный корень третьей степени из единицы, $k, l = \overline{1,3}$.

Отметим, что координаты векторов (2) при $l = 3$ определяют в однородных координатах на проективной плоскости конфигурацию Гессе: девять точек расположены по три на двенадцати различных прямых таким образом, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит третью из данных девяти [6]. Конфигурация Гессе интересна тем, что показывает нарушение известной теоремы Сильвестра на комплексной проективной плоскости.

Многогранник 3(3)3(3)3 имеет 12 плоскостей симметрии, которые зададим уравнениями [7]

$$x_i = 0, \ x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0, \ \ i, \ j, \ k = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Отражения третьего порядка относительно плоскостей (3) порождают группу $W(L_3)$ симметрий многогранника Гессе. Она имеет порядок 648, степени $m_i = 6, 9, 12$ [1]. Используя многочлены Погорелова, в [7] построена следующая система базисных инвариантов группы $W(L_3)$:

$$J_6 = \sum {x_i}^6 - 10 \sum_{i<j} {x_i}^3 {x_j}^3, \tag{4}$$

$$J_9 = ({x_1}^3 - {x_2}^3)({x_1}^3 - {x_3}^3)({x_2}^3 - {x_3}^3), \tag{5}$$

$$J_{12} = \sum {x_i}^{12} - 110 \sum {x_i}^9 {x_j}^3 + 462 \sum_{i<j} {x_i}^6 {x_j}^6 \tag{6}$$

(здесь и далее в записи многочленов индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы).

Используем эту систему базисных инвариантов для построения канонической системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ базисных инвариантов группы $W(L_3)$.

Введем обозначение $f_1 = J_6$. Тогда базисный инвариант f_2 определяется условием $\bar{f}_1(\partial)J_9 = 0$, которое выполняется тождественно. Следовательно, $f_2 = J_9$.

Далее, семейство всех инвариантов двенадцатой степени группы $W(L_3)$ можно записать в виде:

$$I_{12} = a_1 J_{12} + a_2 {J_6}^2,$$

где $a_1,\ a_2$ – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов $a_1,\ a_2$, воспользуемся условием (1), которое запишем в виде

$$\bar{f}_1(\partial)I_{12} = 0, \bar{f}_2(\partial)I_{12} = 0.$$

Второе соотношение выполняется тождественно, а первое приводит к уравнению $616a_1 + 151a_2 = 0$. Таким образом, $a_1 = 151c$ и $a_2 = -616c$, а f_3, с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$f_3 = 31\sum x_i^{12} + 286\sum x_i^9 x_j^3 - 462\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 7392\sum_{j<k} x_i^6 x_j^3 x_k^3. \tag{7}$$

Следовательно, каноническая система базисных инвариантов для группы $W(L_3)$ состоит из форм (4), (5) и (7).

2. «Двойной» многогранник Гессе 2(4)3(3)3 имеет 54 вершины, 216 ребер и 72 грани; взаимный ему многогранник 3(3)3(4)2 имеет соответственно 72, 216 и 54 вершин, ребер и граней, каждая из которых правильный комплексный многоугольник 3(3)3 [6]. Вершины многогранника 2(4)3(3)3 задаются векторами (2), умноженными на ± 1, а вершины многогранника 3(3)3(4)2 — векторами

$$\pm\omega^l \vec{e}_i, \frac{\pm\omega^l\sqrt{-3}}{3}(\vec{e}_1 + \omega^j \vec{e}_2 + \omega^{kj}\vec{e}_3),\ i, j, k, l = \overline{1, 3}.$$

Тогда плоскости симметрии многогранников определяются уравнениями (3) и уравнениями

$$x_i - \omega^k x_j = 0,\ i, j, k = \overline{1, 3}\ (i < j). \tag{8}$$

Группа $W(M_3)$ симметрий этих многогранников порождается отражениями третьего порядка относительно двенадцати плоскостей (3) и отражениями второго порядка относительно девяти плоскостей (8). Ее порядок 1296, показатели $m_i = 6, 12, 18$ [1].

Система базисных инвариантов группы $W(M_3)$ найдена в [7]. Она задается формами (4), (6) и формой

$$J_{18} = \sum {x_i}^{18} - 408\sum {x_i}^{15}{x_j}^3 + 9282\sum {x_i}^{12}{x_j}^6 - 24310\sum_{i<j} x_i^9 x_j^9.$$

Построим каноническую систему для группы $W(M_3)$. Как и ранее, введем обозначение $f_1 = J_6$. Используя ранее полученные результаты (см. **п.1**), имеем: форма f_2 совпадает с (7).

Совокупность всех инвариантов восемнадцатой степени группы $W(M_3)$ запишем в виде

$$I_{18} = a_1 J_{18} + a_2 {J_6}^3 + a_3 J_6 J_{12}.$$

При этом I_{18} принадлежит канонической системе, если удовлетворяет следующей системе

$$\bar{f}_1(\partial) I_{18} = 0, \bar{f}_2(\partial) I_{18} = 0.$$

Эта система приводит к системе 6 линейных однородных уравнений, которую можно привести к виду

$$\begin{cases} 24752a_1 + 3615a_2 + 8355a_3 = 0, \\ 272272a_1 + 10515a_2 + 51711a_3 = 0, \\ 1905904a_1 + 83355a_2 + 375375a_3 = 0, \\ 24752a_1 + 365a_2 + 3889a_3 = 0, \\ 3625a_2 + 2233a_3 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $a_1 = -1376145c$, $a_2 = -13817804c$, $a_1 = 10055500c$. Поэтому, с точностью до постоянного множителя,

$$\begin{gathered} f_3 = 4181 \sum {x_i}^{18} + 18780 \sum {x_i}^{15} {x_j}^3 + 1011738 \sum x_i^{12} {x_j}^6 + \\ +461890 \sum_{i<j} x_i^9 x_j^9 - 11509680 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^3 x_k^3 + \\ +2042040 \sum x_i^9 x_j^6 x_k^3 - 68612544 x_1^6 x_2^6 x_3^6. \end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, найдена каноническая система базисных инвариантов для группы $W(M_3)$. Она состоит из форм (4), (7) и (9).

Заключение

В статье, используя полученные ранее автором системы базисных инвариантов для групп $W(L_3)$ и $W(M_3)$, порожденных отражениями в трехмерном унитарном пространстве, построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для этих групп.

Список литературы

1. SHEPHARD, G. C. (1954) Finite unitary reflection groups. *Can. J. Mathe.* 6 (2). p. 274–304.
2. FLATTO, L. (1978) Invariants of finite reflection groups. *Enseign. Math.* 24 (3–4). p. 237–292.
3. IWASAKI, K. (1997) Basic invariants of finite reflection groups. *J. Algebra.* 195 (2). p. 538–547.
4. NAKASHIMA, N., TERAO, N. and TSUJIE, S. (2016) Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. *Canad. Math. Bull.* 59 (3). p. 617–623.
5. TSUJIE, S. (2014) *Construction of canonical systems of basic invariants for finite reflection groups. The thesis (doctoral).* Hokkaido.
6. COXETER, H. S. M. (1974) *Regular complex polytopes.* London Cambridge Univ. Press.
7. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1990. — 115 с.

   RUDNITSKY, O. I. (1990) *Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space. The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences.* Minsk.

УДК: 517.98

MSC2010: 35P05, 35P10

НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ПОКРЫТОЙ УПРУГИМ ЛЬДОМ

© Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

Таврическая академия

факультет математики и информатики

просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация

e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Normal oscillations of ideal stratified fluid with a free surface completely covered with the elastic ice.

Tsvetkov D. O.

Abstract.

Let a rigid immovable vessel be partially filled with an ideal incompressible stratified fluid. We assume that in an equilibrium state the density of a fluid is a function of the vertical variable x_3, i.e., $\rho_0 = \rho_0(x_3)$. In this case the gravitational field with constant acceleration $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ acts on the fluid, here $g > 0$ and $\vec{e}_3$ is unit vector of the vertical axis Ox_3, which is directed opposite to $\vec{g}$. Let Ω be the domain filled with a fluid in equilibrium state, S be rigid wall of the vessel adherent to the fluid, Γ be a free surface completely covered with the elastic ice.

Let us consider the basic case of stable stratification of the fluid on density:

$$0 < N^2_{min} \leq N^2(x_3) \leq N^2_{max} =: N^2_0 < \infty,$$
$$N^2(x_3) := -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0,$$

where $N^2(x_3)$ is square frequency of buoyancy.

The initial boundary value problem is reduced to a Cauchy problem

$$\mathscr{A}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathscr{C}x = f(t), \quad x(0) = x^0, \quad x^{'}(0) = x^1,$$
$$0 << \mathscr{A} = \mathscr{A}^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \quad \mathscr{C} = \mathscr{C}^* \geq 0.$$

in some Hilbert space $\mathscr{H}$.

The spectrum of normal oscillations, basic properties of eigenfunctions and other questions are studied.

Keywords: *stratification effect in ideal fluids, differential equation in Hilbert space, normal oscillations, spectral problem, eigenvalues, Riesz basis.*

1. Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложение в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1, 2] и работы [3, 4], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Так, в океанах эти силы порождают внутренние инерционные волны большой амплитуды, которые могут привести к катастрофам. В танкерах, заполненных нефтью, могут возникнуть колебания, приводящие к неустойчивым движениям корабля.

Ледяной покров является важным компонентом гидрологического режима замерзающих морей и океанов. Наличие плавающего льда на поверхности морей и океанов существенным образом влияет на характер их поведения. Рассмотрение таких проблем является одним из важных разделов океанологии, практическая эффективность которого несомненна.

В данной работе разбирается случай, когда поверхность жидкости покрыта упругим льдом, который моделируется упругой пластиной. Близкая задача о колебаниях однородной жидкости с упругим льдом рассматривалась ранее в работе [5]. Отметим, что наличие условия стратификации приводит к усложнению структуры спектра.

2. Постановка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ, полностью покрытой упругим льдом. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \le N^2(x_3) \le N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0. \qquad (1)$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля – Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3),\ \rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см., [4], [5]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),\\
&\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\,\text{на}\,S\,), \quad u_n = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,),\\
&p = \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + K\zeta \quad (\,\text{на}\,\Gamma\,), \quad \int\limits_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0,\\
&\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (\,x\in\Omega\,), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,).
\end{aligned} \tag{2}$$

Последние три условия — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0$ есть условия сохранения объема. Линейный дифференциальный оператор K задается дифференциальным выражением

$$K\zeta := d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta \tag{3}$$

на области определения

$$\mathscr{D}(K) = \left\{\zeta \in C^4\left(\overline{\Gamma}\right)\ \mid \zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0 \quad (\text{на}\ \partial\Gamma)\right\}, \tag{4}$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma,\ d > 0$ — коэффициент жесткости льда, ρ_1 — поверхностная плотность льда.

Лемма 1. *Для* $u = u\,(\hat{x}) \in \mathscr{D}(K),\ v = v\,(\hat{x}) \in \mathscr{D}(K)$ *(см.* (3), (4)*) имеет место тождество*

$$\int\limits_\Gamma (Ku)\,v\,d\Gamma = \int\limits_\Gamma u\,(Kv)\ d\Gamma = (u,v)_K := \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma uv\,d\Gamma + \tag{5}$$

$$+\,d\int\limits_\Gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\,(1-\sigma)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\right] d\Gamma\,,$$

где σ — постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластину, причем $0 \le \sigma < 1$ *(см., например,* [6, с.427]*).*

Доказательство леммы следует из определений (3), (4) и преобразований, приведенных на стр. 269–276 книги [6].

Свяжем с поверхностью Γ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_\Gamma := \int\limits_\Gamma \varphi(\hat{x})\, \psi(\hat{x})\, d\Gamma \tag{6}$$

и соответствующей нормой.

Лемма 2. *Оператор $K : \mathscr{D}(K) \subset L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ является неограниченным симметричным положительно определенным оператором, действующим в $L_2(\Gamma)$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathscr{D}(K)$ плотна в $L_2(\Gamma)$, так как в нее входят все финитные (бесконечно дифференцируемые) функции, заданные на Γ. Очевидно также (и это будет видно из дальнейшего), что K — неограниченный оператор.

Далее, из тождества (5) следует симметрия оператора K. Полагая в (5) $u = v$, получим

$$\begin{aligned}
&(Ku, v) = \rho_0(0) g \int\limits_\Gamma |u|^2\, d\Gamma + \\
&+ d \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] d\Gamma \ge \\
&\ge d \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] d\Gamma + \rho_0(0) g \int\limits_\Gamma |u|^2\, d\Gamma \ge \\
&\ge d \int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 - 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| \right] d\Gamma + \rho_0(0) g \int\limits_\Gamma |u|^2\, d\Gamma = \\
&= d \int\limits_\Gamma \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right| - \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| \right]^2 d\Gamma + \rho_0(0) g \int\limits_\Gamma |u|^2\, d\Gamma \ge \rho_0(0) g \int\limits_\Gamma |u|^2\, d\Gamma = \rho_0(0) g \|u\|^2_{L_2(\Gamma)}\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следует, что оператор K положительно определен в $L_2(\Gamma)$. □

Как известно, симметричный положительно определенный оператор, действующий в (вещественном) гильбертовом пространстве и заданный на плотном в этом пространстве множестве, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного положительно определенного оператора с той же нижней гранью. Поэтому далее будем считать, в силу леммы 2, что оператор K уже расширен по Фридрихсу с $\mathscr{K}$ из (4) на более широкое множество, обеспечивающее самосопряженность расширенного оператора, который снова будем обозначать через K. Кроме того, $\mathscr{D}(K) \subset H_K$, где H_K — энергетическое пространство оператора K.

Теорема 1. *Оператор* $K : \mathscr{D}(K) \subset L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma)$ *(после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, то есть его спектр состоит из конечнократных положительных собственных значений* $\{\lambda_k(K)\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$*, а собственные функции* $\{u_k(K)\}_{k=1}^{\infty}$ *образуют ортогональный базис в* $L_2(\Gamma)$*:*

$$(u_k(K), u_l(K))_\Gamma = \delta_{kl}, \quad (u_k(K), u_l(K))_K = \lambda_k(K)\,\delta_{kl}.$$

Обратный оператор K^{-1} *является компактным и положительным в* $L_2(\Gamma)$*. Энергетическое пространство* $H_K \subset L_2(\Gamma)$ *оператора* K *состоит из тех элементов из* $L_2(\Gamma)$*, для которых конечна квадратичная форма (см.* (7)*)*

$$\|u\|_K^2 = \rho_0(0)g \int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma +$$
$$+ d \int_\Gamma \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2(1-\sigma) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] d\Gamma\,, \quad (8)$$

причем $\mathscr{D}(K^{1/2}) = H_K$*.*

Доказательство. Доказательство основано на положениях общей теории положительно определенных операторов, теоремах вложения функциональных пространств и понятии эквивалентных норм.

Введем в рассмотрение энергетическую норму (8) оператора K и покажем, что норма $\|\cdot\|_K$ эквивалентна стандартной норме пространства $H^2(\Gamma) = W_2^2(\Gamma)$:

$$\|u\|_{W_2^2(\Gamma)}^2 = \int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma + \int_\Gamma \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 + \sum_{i,k=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right|^2 \right] d\Gamma\,. \quad (9)$$

Как известно (см., например, [7], стр. 347–350), норма (9) эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_2^2(\Gamma)}$, которая задается по следующему закону:

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^2(\Gamma)}^2 = \int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma + \int_\Gamma \left[\sum_{i,k=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right|^2 \right] d\Gamma\,. \quad (10)$$

Поэтому достаточно доказать, что нормы (8) и (10) эквивалентны.

Оценим сверху величину $\|u\|_K^2$, используя очевидное неравенство

$$2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\cdot\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right| \le \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2,$$

из (8) имеем для любых $u\in H_K,\ 0\le\sigma<1$,

$$\|u\|_K^2 \le \rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma + d\int\limits_\Gamma\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2+2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|\cdot\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|\right]d\Gamma\le$$

$$\le\rho_0(0)g\int\limits_\Gamma |u|^2\,d\Gamma+2d\int\limits_\Gamma\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2\right]d\Gamma\le$$

$$\le\max\left(\rho_0(0)g;2d\right)\|u\|^2_{\widetilde{W}_2^2(\Gamma)}\ .$$

Проведем теперь оценку снизу величины $\|u\|_K^2$; имеем

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=\sigma\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right]+$$

$$+\left(1-\sigma\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left(1-\sigma\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2\ge\left(1-\sigma\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left(1-\sigma\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2.$$

Тогда для энергетической нормы получаем

$$\|u\|_K^2\ge\rho_0(0)g\int\limits_\Gamma|u|^2\,d\Gamma+$$

$$+d\int\limits_\Gamma\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2+2\left(1-\sigma\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|^2-\sigma\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|^2-\sigma\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|^2\right]d\Gamma=$$

$$=d\left(1-\sigma\right)\int\limits_\Gamma\left(\sum_{i,k=1}^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\right|^2\right)d\Gamma+\rho_0(0)g\int\limits_\Gamma|u|^2\,d\Gamma\ge$$

$$\ge\min\left(d\left(1-\sigma\right);\rho_0(0)g\right)\|u\|^2_{\widetilde{W}_2^2(\Gamma)}\ .$$

Итак, нормы $\|\cdot\|_K^2$ и $\|\cdot\|^2_{\widetilde{W}_2^2(\Gamma)}$ эквивалентны, а следовательно, и нормы $\|\cdot\|_K^2$ и $\|\cdot\|^2_{W_2^2(\Gamma)}$ эквивалентны. Так как согласно теореме вложения С. Л. Соболева (см., например, [7, с. 358–362]) пространство $W_2^2(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$ (то есть всякое множество элементов, ограниченное в $W_2^2(\Gamma)$, компактно в $L_2(\Gamma)$, или, иначе, оператор вложения из $W_2^2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ компактен), то H_K также компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Поэтому, по теореме С. Г. Михлина (см., например, [8, с.145]) оператор K

имеет дискретный спектр со свойствами, описанными в формулировке данной теоремы, а обратный оператор K^{-1} является компактным положительным оператором: $0 < K^{-1} = (K^{-1})^*$. $\square$

Начально-краевая задача (2) после отделения тривиальных соотношений сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\mathscr{A}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{X} + \mathscr{K}_{\mathscr{B}}\mathscr{X} = \mathscr{F}, \qquad \mathscr{X}(0) = \mathscr{X}^0, \qquad \mathscr{X}'(0) = \mathscr{X}^1, \qquad \mathscr{X} = (\vec{w};\psi)^t, \quad (11)$$

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C+\rho_1 I \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}C^{1/2} \\ C^{1/2}B_{21} & C^{1/2}B_{22}C^{1/2} + P_{H_0}KP_{H_0} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$, а через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ обозначено подпространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ множества гладких функций $\{\, \vec{v} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega),\ v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \,\}$; $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\vec{v}(x)\, d\Omega.$$

1. Оператор C является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве H_0, обратный оператор C^{-1} является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathscr{D}(C^{-1}) = \mathscr{R}(C)$, плотной в H_0.

Доказательство этого утверждения следует из общих рассуждений на стр. 41, 45 и 138 книги [9].

2. Оператор-матрица $\mathscr{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ обладает свойствами $\mathscr{O} \le \mathscr{B} \le N_0^2\mathscr{I}$, где N_0^2 — константа из (1), $\mathscr{O}$ и $\mathscr{I}$ — нулевой и единичный операторы в $\mathscr{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$.

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с соответствующим оператором из работы [3].

Лемма 3. *Оператор $\widetilde{K} := P_{H_0}KP_{H_0}$ — положительно определенный неограниченный в H_0 оператор с компактным положительным обратным оператором $\widetilde{K}^{-1}$.*

Доказательство. В силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования P_{H_0}, для $\forall u, v \in \mathscr{D}(\widetilde{K}) = \mathscr{D}(K) \ominus \{1_\Gamma\} \subset H_0$ имеем:

$$(\widetilde{K}u, v) = (P_{H_0} K P_{H_0} u, v) = (K P_{H_0} u, P_{H_0} v) = (Ku, v) = \\ = (u, Kv) = (P_{H_0} u, K P_{H_0} v) = (u, P_{H_0} K P_{H_0} v) = (u, \widetilde{K} v),$$

откуда следует, что оператор $\widetilde{K}$ — самосопряженный. Далее имеем:

$$(\widetilde{K}u, u) = (Ku, u) \geq c \left\| u \right\|^2, \tag{13}$$

значит, $\widetilde{K}$ — положительно определенный оператор. Следовательно, он ограниченно обратим. Обратный $\widetilde{K}^{-1}$ при этом является положительным оператором.

Покажем, что обратный к $\widetilde{K}$ оператор является компактным. Для этого достаточно доказать, что $H_{\widetilde{K}}$ компактно вложено в H_0. Любое ограниченное множество X из $H_{\widetilde{K}}$, в силу (13), будет ограниченным и в H_K. Как было показано ранее (см. теорему 1), H_K компактно вложено в $L_2(\Gamma)$. Но в силу вложения $X \subset H_{\widetilde{K}} \subset H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\} \subset L_2(\Gamma)$ получаем, что X компактно в H_0. Таким образом, любое ограниченное множество в $H_{\widetilde{K}}$ компактно в H_0, а следовательно, $\widetilde{K}^{-1}$ — компактный оператор, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях, положим $\mathscr{F} = 0$ в уравнении (11) и будем считать, что $\mathscr{X}(t) = e^{i\omega t}\mathscr{X}$, где ω — частота, а $\mathscr{X} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$ — мода колебаний. Задача (11) переходит в спектральную задачу

$$\lambda \mathscr{A} \mathscr{X} = \mathscr{K}_{\mathscr{B}} \mathscr{X}, \quad \lambda := \omega^2. \tag{14}$$

Прежде чем исследовать задачу (14), отметим несколько предварительных соображений.

1. Поскольку оператор $\mathscr{K}_{\mathscr{B}}$ обладает свойствам $\mathscr{K}_{\mathscr{B}} = \mathscr{K}_{\mathscr{B}}^* \geq 0$ и существует $\mathscr{A}^{-1}$: $0 \leq \mathscr{A}^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^* \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, тогда из (14) приходим к задаче $\lambda \mathscr{I} \mathscr{X} = \mathscr{A}^{-1} \mathscr{K}_{\mathscr{B}} \mathscr{X}$. Спектр оператора $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{K}_{\mathscr{B}}$ вещественный и неотрицательный: $\sigma(\mathscr{A}^{-1}\mathscr{K}_{\mathscr{B}}) \subset \mathbb{R}_+$.

2. В случае, когда идеальная стратифицированная жидкость полностью заполняет произвольный сосуд, соответствующая спектральная задача может быть приведена к задаче

$$B_{11}\vec{w} = \lambda \vec{w}, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

При этом спектр задачи точечный, плотный на отрезке $[0; N_0^2]$, а моды собственных колебаний дают внутренние волны, обусловленные наличием стратифицированной жидкости.

3. О существовании внутренних волн

Рассмотрим случай $\lambda \in [0; N_0^2]$ и установим наличия внутренних волн в стратифицированной жидкости.

Записав уравнение (14) в компонентах, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda I \vec{w} = B_{11}\vec{w} + B_{12}C^{1/2}\psi, \\ \lambda\left(C + \rho_1 I\right)\psi = C^{1/2}B_{21}\vec{w} + C^{1/2}B_{22}C^{1/2}\psi + \widetilde{K}\psi. \end{cases} \tag{15}$$

Систему уравнений (15) перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda I \vec{w} = B_{11}\vec{w} + B_{12}C^{1/2}\psi, \\ -C^{1/2}B_{21}\vec{w} = \left(-\lambda\left(C + \rho_1 I\right) + C^{1/2}B_{22}C^{1/2} + \widetilde{K}\right)\psi =: T(\lambda)\psi. \end{cases} \tag{16}$$

Сделаем предположение

$$N_0^2\left(C + \rho_1 I\right) < C^{1/2}B_{22}C^{1/2} + \widetilde{K}, \tag{17}$$

тогда оператор-функция $T(\lambda)$ при любых $\lambda \in [0; N_0^2]$ положительно определена, поэтому при этих λ существует обратный оператор $T^{-1}(\lambda) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Выразим из второго уравнения системы (16) величину ψ и подставим в первое, получим

$$R(\lambda)\vec{w} := \left(\lambda I - B_{11} + B_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda)C^{1/2}B_{21}\right)\vec{w} = 0, \qquad \lambda \in [0; N_0^2]. \tag{18}$$

Теорема 2. *Предельный спектр пучка $R(\lambda)$ совпадает с отрезком $[0; N_0^2]$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (17). Зафиксируем произвольное $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ и рассмотрим задачу

$$\left(\lambda I - B_{11} + B_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}B_{21}\right)\vec{w} = 0, \qquad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0).$$

Эта — задача на собственные значения для самосопряженного оператора B_{11}, возмущенного компактным оператором $B_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}B_{21}$. Весь спектр оператора B_{11} (см., например, [3]) является предельным и заполняет весь отрезок $[0; N_0^2]$. Согласно теореме Вейля, для каждого $\lambda_2 \in [0; N_0^2]$ существует ортонормированная последовательность Вейля $\{\vec{w}_i\}_{i=1}^{\infty}$, зависящая от λ_1 и λ_2, для которой

$$\|\left(\lambda_2 I - B_{11} + B_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}B_{21}\right)\vec{w}_i\| \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Выбирая $\lambda_2 = \lambda_1$ и соответствующую последовательность Вейля, приходим к выводу, что для нее

$$\|\left(\lambda_1 I - B_{11} + B_{12}C^{1/2}T^{-1}(\lambda_1)C^{1/2}B_{21}\right)\vec{w}_i\| \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Это означает, что произвольно выбранная точка $\lambda_1 \in [0; N_0^2]$ принадлежит предельному спектру задачи (18). Поскольку точки, лежащие вне отрезка $[0; N_0^2]$, могут быть только конечнократными собственными значениями, указанный отрезок совпадает с предельным спектром пучка $R(\lambda)$. $\square$

Важным следствием полученной теоремы является такое утверждение: в устойчиво стратифицированной идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд произвольной формы со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом, существуют внутренние волны, обусловленные наличием сил плавучести; квадрат частот внутренних волн образуют множество $[0; N_0^2]$.

4. О свойствах мод поверхностных волн

Рассмотрим случай $\lambda > N_0^2$, когда ожидаются поверхностные волны.

Осуществляя замену $\widetilde{K}^{-1/2}z = \psi$ и применив оператор $\widetilde{K}^{-1/2}$ ко второму уравнению (15), получим

$$\begin{cases} (I - \lambda^{-1}B_{11})\,\vec{w} - \lambda^{-1}B_{12}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}z = 0, \\ I\psi - \lambda\widetilde{K}^{-1/2}\,(C + \rho_1 I)\,\widetilde{K}^{-1/2}z + \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{21}\vec{w} + \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{22}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}z = 0. \end{cases}$$

В силу предположения $|\lambda| > N_0^2$ и оценки $\|B_{11}\| \le N_0^2$, оператор $I - \lambda^{-1}B_{11}$ обратим, с учетом этого перепишем последнюю систему

$$\begin{cases} I\vec{w} - \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}B_{11})^{-1}B_{12}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}z = 0, \\ Iz - \lambda\widetilde{K}^{-1/2}\,(C + \rho_1 I)\,\widetilde{K}^{-1/2}z + \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{21}\vec{w} + \\ \qquad\qquad + \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{22}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}z = 0. \end{cases} \tag{19}$$

В системе (19), исключая $\vec{w}$, приходим к спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &L(\lambda)z := \left(I - \lambda K_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda)\right)z = 0, \qquad \lambda > N_0^2, \\ &K_C := \widetilde{K}^{-1/2}(\rho_1 I + C)\widetilde{K}^{-1/2}, \qquad B_0 := \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{22}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}, \\ &F(\lambda) := \widetilde{K}^{-1/2}C^{1/2}B_{21}R(\lambda)B_{12}C^{1/2}\widetilde{K}^{-1/2}, \qquad R(\lambda) := (I - \lambda^{-1}B_{11})^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Дальнейшее исследование основано на идее факторизации пучка $L(\lambda)$, т. е. на разложении его на операторные множители определенного вида. Для этого понадобится следующий результат (см., [10, с. 81]).

Теорема 3. *Пусть для самосопряженного операторного пучка*

$$M(\mu) := \mu I - A - B(\mu) \tag{21}$$

выполнены условия

$$\begin{aligned}
&1.\ B(\mu) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k, \quad |\mu| < r, \quad 0 < r < \infty; \quad A = A^*, \quad B_k = B_k^*, \quad k = 1, 2, \ldots \\
&2.\ \exists\, t \in (0, r)\ :\quad \|A\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} < 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Тогда

1. Пучок $M(\mu)$ допускает факторизацию $M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z)$, т. е. такое разложение на множители, при котором $M_+(\mu)$ голоморфна и голоморфна обратима в круге $|\mu| \le t$, $t \in (0, r)$, а спектр $\sigma(Z) \subset (-t; t)$ и оператор Z подобен самосопряженному оператору.

2. Если дополнительно выполнены условия

$$A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H}), \quad kerA = \{0\}, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathscr{H}), \tag{23}$$

то задача $M(\mu)z = 0$ имеет на промежутке $(-t, t)$ дискретный спектр

$$\sigma(Z) = \{0\} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \mu_j \to 0 \quad (j \to \infty),$$

где $\mu_j = \mu_j(Z)$ — изолированные конечнократные собственные значения оператора Z. Этим значениям отвечает совокупность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ собственных элементов (присоединенных нет), образующих базис Рисса в $\mathscr{H}$: $\varphi_j = F^{1/2} z_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, составленный из элементов самосопряженного компактного оператора $F^{-1/2}(ZF)F^{-1/2}$.

Чтобы воспользоваться этой теоремой, осуществим в (20) замену $\lambda = \mu^{-1}$ и умножим обе части уравнения на μ:

$$\begin{aligned}
&G(\mu)z := \mu L(\mu^{-1})z = (\mu I - K_C - B(\mu))\, z = 0, \\
&B(\mu) := -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}), \quad \mu < N_0^{-2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Задача (24) есть задача для пучка вида (21), так как $F(\mu^{-1})$ является голоморфной функцией относительно μ:

$$F(\mu^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k, \quad F_k = \widetilde{K}^{-1/2} C^{1/2} B_{21} B_{11}^k B_{12} C^{1/2} \widetilde{K}^{-1/2}.$$

При этом справедливо

$$B(\mu) := -\mu B_0 - \mu^2 F(\mu^{-1}) = -\mu B_0 - \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k F_k = -\mu \widetilde{K}^{-1/2} C^{1/2} B_{22} C^{1/2} \widetilde{K}^{-1/2} -$$

$$- \mu^2 \widetilde{K}^{-1/2} C^{1/2} B_{21} B_{12} C^{1/2} \widetilde{K}^{-1/2} - \mu^3 \widetilde{K}^{-1/2} C^{1/2} B_{21} B_{11}^2 B_{12} C^{1/2} \widetilde{K}^{-1/2} - \ldots =$$

$$=: -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k B_k, \qquad \text{где} \quad \|B_k\| \leq (N_0^2)^k \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\|.$$

Лемма 4. *При* $|\mu| = t < N_0^{-2}$ *для* $G(\mu)$ *имеет место оценка*

$$\|K_C\| \cdot t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| \cdot t^{k-1} < \frac{\rho_1 \|\widetilde{K}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}.$$

Доказательство.

$$\|K_C\| t^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| t^{k-1} = \frac{\|\widetilde{K}^{-1/2}(\rho_1 I + C)\widetilde{K}^{-1/2}\|}{t} + \|B_1\| + \|B_2\| t + \|B_3\| t^2 + \ldots \leq$$

$$\leq \frac{\rho_1 \|\widetilde{K}^{-1}\| + \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} + N_0^2 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\| + (N_0^2)^2 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\| t + \ldots =$$

$$= \frac{\rho_1 \|\widetilde{K}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t} \cdot \left(1 + N_0^2 t + (N_0^2)^2 t^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\rho_1 \|\widetilde{K}^{-1}\|}{t} + \frac{\|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\|}{t \cdot (1 - tN_0^2)}.$$

□

Следствием леммы 4 и теоремы 3 является

Лемма 5. *Пусть*

$$D := \left(\rho_1 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot N_0^2 - 1\right)^2 - 4 \cdot N_0^2 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot \|C\| > 0. \tag{25}$$

Тогда пучок $G(\mu)$ *из* (24) *допускает спектральную факторизацию*

$$G(\mu) = G_+(\mu)(\mu I - Z), \quad |\mu| < t \in (t_-, t_+),$$
$$t_\pm := \frac{\left(\rho_1 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1\right) \pm \sqrt{D}}{2N_0^2}, \quad t_+ < N_0^{-2}. \tag{26}$$

При этом $G_+(\mu)$ *голоморфна и голоморфна обратима для* $|\mu| \leq t \in (t_-, t_+)$, *а спектр* $\sigma(Z) \subset (-t; t)$.

Полученные факты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если выполнено условие* (25), *тогда операторный пучок* $L(\lambda)$ *из* (20) *допускает спектральную факторизацию*

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(I - \lambda Z); \tag{27}$$

при этом $L_+(\lambda)$ *голоморфна и голоморфна обратима для*

$$\lambda \geq (t_-)^{-1} > N_0^2, \quad t_- = \frac{\left(\rho_1 \cdot \|\widetilde{K}^{-1}\| \cdot N_0^2 + 1\right) - \sqrt{D}}{2N_0^2},$$

а также задача (20) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\lambda_k = [\lambda_k(Z)]^{-1}$, *состоящий из изолированных конечнократных собственных значений с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k = z_k(Z)$, *отвечающие собственным значениям* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [(t_-)^{-1}, +\infty)$, *образуют базис Рисса в* H_0.

5. Об асимптотике спектра поверхностных волн

Лемма 6. *На промежутке* $((t_-)^{-1}; +\infty)$ *собственные значения* λ_k *задачи* (20) *при* $k \to \infty$ *имеют асимптотическое поведение:*

$$\lambda_k = \left(\frac{d_1}{\rho_1}\right)\left(\frac{4\pi}{mes\,\Gamma}\right)^2 k^2[1 + o(1)] \qquad (k \to +\infty). \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу (20) для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)z := \left(I - \lambda K_C + B_0 + \lambda^{-1}F(\lambda)\right) z = 0,$$

где $\lambda^{-1}F(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция при $\lambda \to +\infty$, и при этом $\lambda^{-1}F(\lambda) \to 0$; оператор B_0 — компактный оператор. Тогда для операторного пучка (20) справедлива теорема Маркуса – Мацаева (см., например, [9, с. 78–79]) и асимптотика задачи определяется асимптотикой укороченного пучка $(I - \lambda K_C)z = 0$. Известно, что при $k \to \infty$ асимптотическое поведение собственных чисел $\lambda_k(K_C)$ имеет вид (см., [9, с. 178–181])

$$\lambda_k(K_C) = \left(\frac{d_1}{\rho_1}\right)\left(\frac{4\pi}{\mathrm{mes}\,\Gamma}\right)^2 k^2[1 + o(1)] \qquad (k \to +\infty).$$

□

В заключении заметим, что (28) не содержит информации, связанной с наличием жидкости в сосуде. Таким образом, большие по номеру k моды собственных колебаний z_k задачи (20) связаны главным образом с колебаниями упругого льда и влияние наличия жидкости на них незначительно. Физически такой вывод очевиден, так как большим номерам k отвечают колебания жидкости лишь в окрестности Γ;

эти колебания быстро (в примерах — экспоненциально быстро) затухают при отходе от Г вглубь жидкости. Поэтому при больших k вовлекаемый в колебания льда примыкающий слой жидкости становится пренебрежимо малым, то есть не влияет на асимптотическое поведение чисел λ_k.

Автор приносит благодарность Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

Список литературы

1. Краусс В. К. Внутренние волны / В. К Краусс . — Л.: Гидрометеоиздат, 1968. — 272 с.

   KRAUSS, V. K. (1968) *Internal waves.* Leningrad.

2. Габов С. А. Задачи динамики стратифицированных жидкостей / С. А. Габов, А. Г. Свешников. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

   GABOV, S. A. and SVESHNIKOV A. G (1986) *Problems of dynamics of stratified fluids.* Moscow.

3. Копачевский Н. Д. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы / Н. Д. Копачевский, А. Н. Темнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. — 1986. — Т. 26, № 5. — С. 734–755.

   KOPACHEVSKY, N. D. and TEMNOV A. N. (1986) Oscillations of a stratified fluid in a basin of arbitrary shape. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* Vol. 164, no. 5 pp. 734–755.

4. Копачевский Н. Д. Колебания стратифицированных жидкостей / Н. Д. Копачевский, Д. О. Цветков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 2. — С. 103–130.

   KOPACHEVSKY, N. D. and TSVETKOV D. O. (2010) Oscillations of stratificated fluids. Journal of Math Sciences. Vol. 164, no. 4, pp. 574–602.

5. Солдатов М. А. Математические аспекты теории колебания жидкости в бассейне, частично покрытым льдом: дис...канд. физ.-мат. наук (01.01.03): защищена 04.09.2003 / Солдатов Максим Александрович ФТИНТ НАНУ. — Харьков, 2003. — 207 с.

   SOLDATOV M.A. (2003) *Mathematical aspects oscillations theory of an fluid in a basin partially closed by ice.* The thesis for obtaining the Candidate of physical and mathematical degree on the speciality 01.01.03 — mathematical physics. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov.

6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. — М.: Мир, 1985. — 590 с.

   REKTORYS, K. (1985) *Variational methods in mathematical physics and engineering.* Moscow.

7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 5 / В. И. Смирнов. — М.: Наука, 1960. — 656 с.

   SMIRNOV, V. I. (1960) *The course of higher mathematics.* Moscow.

8. Михлин С. Г. Курс математической физики / С. Г Михлин. — М.: Наука, 1968. — 576 с.

   MICHLIN, S. G. (1968) *The course of mathematical physics.* Moscow.

9. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. and NGO ZUY CAN (1989) *Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Moscow.

10. Копачевский Н.Д. Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО «Форма», 2009. — 128 с.

    KOPACHEVSKY, N. D. (2009) *Spectral theory of operator pencil.* Simferopol.

Жуковский В. И. Существование равновесия по Бержу / В. И. Жуковский, Т. В. Макаркина, Ю. А. Бельских // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 7 – 16.

УДК: 519.833

В статье рассматривается способ построения равновесной по Бержу ситуации, сводящейся к нахождению минимаксной стратегии в специальной гермейеровской свертке, эффективно строящейся по исходной математической модели бескоалиционной игры. Кроме того, доказано существование равновесной по Бержу ситуации в смешанных стратегиях, если множества стратегий суть компакты, а функции выигрыша непрерывны на ситуациях.

Ключевые слова: *бескоалиционная игра, функция выигрыша, выигрыш, равновесие по Нэшу и Бержу, гермейеровская свертка, смешанные стратегии.*

Калитвин А. С. Об операторах с частными интегралами в пространствах функций двух переменных / А. С. Калитвин, В. А. Калитвин // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 17 – 27.

УДК: 517.984

Изучаются линейные операторы с частными интегралами. С использованием теоремы Банаха о замкнутом графике доказывается общая теорема о непрерывности действия из пространства X в пространство Y линейного оператора K с частными интегралами. Здесь X и Y являются полными метрическими пространствами измеримых функций с метрикой, инвариантной относительно сдвигов, и пространство X содержит вместе с каждой функцией ее модуль. С применением этой теоремы устанавливается непрерывность действия оператора K в различных пространствах функций. Условия этой теоремы не выполняются для пространств непрерывно дифференцируемых функций. В связи с этим установлена теорема о непрерывности действия оператора K в пространствах непрерывно дифференцируемых функций. Получены условия непрерывности действия оператора K из пространств непрерывно дифференцируемых функций в различные классы пространств функций. Доказана непрерывность оператора K, определенного на пространстве BV функций ограниченной вариации двух переменных, установлены условия действия этого оператора, определенного на конечном прямоугольнике.

Ключевые слова: *линейные операторы с частными интегралами, теорема Банаха о замкнутом графике, действие и непрерывность операторов, пространства функций, пространство BV функций ограниченной вариации, условия действия в BV.*

Копачевский Н. Д. О колебаниях двух сочленённых маятников, содержащих полости, частично заполненные идеальной несжимаемой жидкостью / Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий, З. З. Ситшаева // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 28 – 54.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

Рассматривается линеаризованная задача о малых колебаниях двух маятников, присоединённых один к другому с помощью сферического шарнира. Каждый маятник имеет полость, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью. В работе изучается начально-краевая проблема, а также соответствующая спектральная проблема о нормальных движениях гидромеханической системы. Доказаны теоремы о корректной разрешимости задачи на произвольном отрезке времени, а также изучены соответствующие спектральные вопросы.

Ключевые слова: *уравнение изменения кинетического момента, операторная матрица, самосопряженный оператор, сильное решение, дискретный спектр.*

Пикулин С. В. О промежуточных асимптотических режимах в некоторых моделях теории горения / С. В. Пикулин // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 55 – 72.

УДК: 517.927.4

Рассматриваются квазистационарные режимы протекания процесса в модели «реакция – дифузия», задаваемой параболическим нелинейным уравнением типа Колмогорова — Петровского — Пискунова с аналитической функцией в правой части. Для решений типа бегущей плоской волны получено новое представление обратной к решению функции в виде суммы явно вычисляемого слагаемого и некоторого добавочного члена. Выделен новый класс таких решений, для которых этот добавочный член является аналитической функцией и, следовательно, равномерно ограничен. На основе полученных результатов сконструирован аналитико-численный метод построения профиля бегущей волны, проведена его численная реализация для задачи о промежуточных асимптотических режимах реакции теплового горения газовой смеси при условии подобия полей концентрации и температуры. Для уравнения Абеля второго рода специального вида, возникающего при анализе исходной задачи, получен результат о частичном прохождении некоторой модификации теста Пенлеве.

Ключевые слова: *бегущие волны, тепловое распространение пламени, уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова, уравнение Абеля второго рода, тест Фукса – Ковалевской – Пенлеве, автомодельные решения, бегущие волны, промежуточный асимптотический режим.*

Рудницкий О. И. Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 73 – 78.

УДК: 514.7

Построены в явном виде канонические системы базисных инвариантов для групп $W(L_3)$ и $W(M_3)$, порожденных отражениями в трехмерном унитарном пространстве (группы симметрий многогранников Гессе).

Ключевые слова: *унитарное пространство, отражение, группа отражений, алгебра инвариантов, базисный инвариант, каноническая система.*

Цветков Д. О. Нормальные колебания стратифицированной жидкости, покрытой льдом / Д. О. Цветков // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 3 (36). — С. 79 – 93.

УДК: 517.98

В данной работе рассматривается задача о нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом. Исследованы свойства поверхностных волн, а также асимптотика их частот, вопросы базисности мод собственных колебаний. Установлено, что предельным спектром внутренних волн является отрезок, определенный максимальным значением частоты плавучести.

Ключевые слова: *стратифицированная жидкость, спектральная задача, мода колебаний, операторный пучок, предельный спектр.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Бельских Юлия Анатольевна

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: fizmat@ggtu.ru

Войтицкий Виктор Иванович

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Жуковский Владислав Иосифович

д. ф.-м. н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Калитвин Анатолий Семенович

д. ф.-м. н, профессор, зав. кафедрой математики и физики Института естественных, математических и технических наук Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Российская Федерация
e-mail: kalitvinas@mail.ru

Калитвин Владимир Анатольевич

к. ф.-м. н, доцент кафедры математики и физики Института естественных, математических и технических наук Липецкого государственного педагогического университета имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Российская Федерация
e-mail: kalitvin@gmail.com

Копачевский Николай Дмитриевич д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: kopachevsky@list.ru

Макаркина Татьяна Владимировна к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: tatmak147@yandex.ru

Пикулин Сергей Владимирович к. ф.-м. н, старший научный сотрудник сектора аналитико-численных методов математической физики Вычислительного центра ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: spikulin@gmail.com

Рудницкий Олег Иванович к. ф.-м. н., доцент, заместитель директора Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: oirud58@gmail.com

Ситшаева Зера Зекерьяевна к. ф.-м. н., доцент кафедры математики Крымского инженерно-педагогический университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: szz2008@mail.ru

Подписано к печати 21.12.2017. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 10,5 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/146. Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 18.01.2018.
Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4.