

**Т** А В Р И Ч Е С К И Й  
**В** Е С Т Н И К  
**И** Н Ф О Р М А Т И К И И  
**М** А Т Е М А Т И К И

**№ 2 (35) ' 2017**

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

**ISSN 1729-3901**

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей: 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Механика», 05.13.00 «Информатика, вычислительная техника и управление».

Индексируется в базе РИНЦ (<https://elibrary.ru>).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

**T** AURIDA  
**J** OURNAL OF  
**C** OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
**M** ATHEMATICS

**2017, No. 2**

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

The State Registration Certificate  
ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

**ISSN 1729-3901**

**Key title:** Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

**УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО «КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО»**

**ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ**

<b>В. И. ДОНСКОЙ</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ</b>	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. М. ГУПАЛ</b>	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
<b>Ю. И. ЖУРАВЛЕВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. Н. КАРАПЕТАНЦ</b>	доцент, доктор физико-математических наук
<b>В. В. КРАСНОПРОШИН</b>	профессор, доктор технических наук
<b>М. А. МУРАТОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>И. В. ОРЛОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>К. В. РУДАКОВ</b>	академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>А. А. САПОЖЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. Н. ЧЕХОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:**

к. ф.-м. н., доцент	<b>А. С. АНАФИЕВ</b> — ответственный редактор (раздел «Информатика»)
к. ф.-м. н., доцент	<b>В. И. ВОЙТИЦКИЙ</b> — ответственный редактор (раздел «Математика»)
к. ф.-м. н., доцент	<b>В. Ф. БЛЫЩИК</b> — редактор сайта журнала
к. ф.-м. н., доцент	<b>М. Г. КОЗЛОВА</b> — ученый секретарь журнала

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Таврический вестник информатики и математики  
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского  
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

#### EDITORIAL BOARD

<b>Vladimir DONSKOY</b>	<b>Editor-in-Chief</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Nikolay KOPACHEVSKY</b>	<b>Vice Chief Editor</b> , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Anatoliy GUPAL</b>	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Yuri ZHURAVLEV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexey KARAPETYANTS</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor KRASNOPROSHIN</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>Mustafa MURATOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Olexander NAKONECHNY</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Igor ORLOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Konstantin RUDAKOV</b>	Full member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Alexander SAPOJENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Valeriy CHEHOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

#### EDITORIAL BOARD

<b>Ayder ANAFIYEV</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Computer Science Theory” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Victor VOYTITSKY</b>	<b>Managing Editor</b> of the “Mathematics” Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Vladimir BLYSCHIK</b>	<b>The Editor of the Cite</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>Margarita KOZLOVA</b>	<b>Scientific Secretary of the Journal</b> Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

#### OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE:** [www.tvim.info](http://www.tvim.info)

#### FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**Tel.** +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

**Email:** [vidonskoy@mail.ru](mailto:vidonskoy@mail.ru) — editor-in-chief

[article@tvim.info](mailto:article@tvim.info) — for correspondence

**Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics** is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

#### THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.</b> О малых движениях системы двух сочлененных тел с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью .....	7
<b>Закора Д. А.</b> О корневых элементах операторной матрицы .....	33
<b>Копачевский Н. Д., Сёмкина Е. В.</b> Формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трёх вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд .....	48
<b>Лукьянова Е. А., Дереза А. В.</b> О структурировании задействованной дискретной информации моделей Петри с целью ускорения вычисления инвариантов .....	62
<b>Радомирская К. А.</b> О некоторых начально-краевых задачах сопряжения ..	72
<b>Рудницкий О. И.</b> О базисных инвариантах унитарной группы $W(J_3(4))$ .....	97
Рефераты .....	104
Список авторов номера .....	107

---

**TABLE OF CONTENTS**

<b>Voytitsky V. I. and Kopachevsky N. D.</b> On small motions of a two joined bodies system with cavities partially filled with a heavy viscous fluid.....	7
<b>Zakora D. A.</b> On root elements of an operator matrix.....	33
<b>Kopachevsky N. D. and Syomkina E. V.</b> Formulas for orthogonal projectors generated by the problem on small motions of three viscoelastic fluids in a stationary container.....	48
<b>Lukyanova E. A. and Dereza A. V.</b> On the structuring of the involve discrete information of Petri model for acceleration computation of invariants purpose	62
<b>Radomirskaya K. A.</b> On Some Initial Boundary Value Transmission Problems	72
<b>Rudnitskii O. I.</b> On basis invariants of unitary group $W(J_3(4))$ .....	97
Abstracts.....	104
Authors.....	107

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

MSC2010: 70E55, 35M33

## О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ТЯЖЕЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР-Т. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [victor.voytitsky@gmail.com](mailto:victor.voytitsky@gmail.com), [kopachevsky@list.ru](mailto:kopachevsky@list.ru)

ON SMALL MOTIONS OF A TWO JOINED BODIES SYSTEM WITH CAVITIES PARTIALLY FILLED WITH A HEAVY VISCOUS FLUID.

Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.

**Abstract.** Let  $G_1$  and  $G_2$  be two joined bodies with masses  $m_1$  and  $m_2$ . Each of them has a cavity partially filled with homogeneous incompressible viscous fluids situated in domains  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  with free boundaries  $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)$  and rigid parts  $S_1, S_2$ . Let  $\rho_1, \rho_2$  be densities of fluids. We suppose that the system oscillates (with friction) near the points  $O_1, O_2$  which are spherical hinges.

We use the vectors of small angular displacement

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^3 \delta_k^j(t) \vec{e}_k^j, \quad k = 1, 2,$$

to determine motions of the removable coordinate systems  $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$  (connected with bodies) with respect to stable coordinate system  $O_1 x^1 x^2 x^3$ . Then angular velocities  $\vec{\omega}_k(t)$  of bodies  $G_k$  is equal to  $d\vec{\delta}_k/dt$ .

Let  $\vec{u}_k(x, t)$  and  $p_k(x, t)$  be fields of fluids velocities and dynamical pressures in  $\Omega_k$  (in removable coordinate systems),  $\zeta_k(x, t)$  are functions of normal deviation of  $\Gamma_k(t)$  from equilibrium plane surfaces  $\Gamma_k(0) = \Gamma_k$ . Then we consider initial boundary value problem (25), (26), (28)–(30) with conditions (34)–(39).

We obtain the law of full energy balance (44). Using the method of orthogonal projections initial problem can be reduced to the Cauchy problem for the differential equation

$$\mathcal{C} \frac{d^2 X}{dt^2} + \mathcal{A} \frac{dX}{dt} + \mathcal{B} X = \mathcal{F}$$

in Hilbert space  $\mathcal{H} := H_1 \oplus H_2 := (\vec{J}_{0, S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0, S_2}(\Omega_2)) \oplus (\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3)$ . Here operator  $\mathcal{C}$  is bounded and positive definite, operator  $\mathcal{A}$  is positive definite,  $\mathcal{B}$  is bounded below self-adjoint operator. General properties of such problem is known. It has a unique strong solution for  $t \in [0; T]$  if the

natural conditions for initial data and function  $\mathcal{F}$  are satisfied. As a corollary we obtain theorem on solvability of initial Cauchy problem.

Corresponding spectral problem reduces to the operator pencil of S. G. Krein. The spectrum consists of  $\lambda = 0$ , two branches of positive eigenvalues with limit point  $+0$  and  $+\infty$ , and probably finite number of negative and complex eigenvalues. The systems of eigenelements corresponding to each of positive branches of eigenvalues form so called  $p$ -basis in Hilbert space  $H$  (probably with finite defect). We obtain sufficient conditions for absence of negative eigenvalues (stability of hydromechanics system) and for equality of negative eigenvalues of the problem and the operator of potential energy  $B$ .

**Keywords:** *equation of angular momentum deviation, operator matrix, self-adjoint operator, discrete spectrum,  $p$ -basis.*

## ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению (методами теории операторов) проблемы малых движений и нормальных колебаний двух сочленённых тел, частично заполненных тяжёлой вязкой жидкостью. Данная линейная постановка задачи является новой и осуществляется на основе работ Н. Д. Копачевского и Э. И. Батыра, см. [1]–[5], посвящённых проблемам малых движений сочленённых тел-гиростатов, целиком заполненных идеальной либо вязкой жидкостью. Важные результаты в теории колебаний тел, соединённых сферическими или цилиндрическими шарнирами в произвольном порядке, получил П. В. Харламов. Близкие задачи исследовал в докторской диссертации Ю. Н. Кононов. При частичном заполнении жидкостью тела не являются гиростатами, что вносит дополнительные трудности в исследуемую проблему.

Исследованию малых колебаний маятника с полостью, полностью либо частично заполненной идеальной или вязкой жидкостью либо системой из несмешивающихся жидкостей, посвящено большое количество работ. В качестве основных можно отметить работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева, Г. А. Моисеева, Н. Д. Копачевского, О. Б. Иевлевой, П. С. Краснощекова, Ф. Л. Черноусько, И. А. Луковского, М. Я. Барняка и др. Операторный подход к изучению линейных проблем гидродинамики вязкой жидкости изложен в монографиях Н. Д. Копачевского с соавторами [4], [5].

Данная работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Пусть имеется два сочленённых тела  $G_1$  и  $G_2$ , имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ . Внутри каждого тела имеется по одной полости, частично заполненной однородной несжимаемой вязкой жидкостью. Пусть жидкости занимают области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  со свободными границами  $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)$  и твёрдыми стенками  $S_1, S_2$ , плотности жидкостей  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ . Массой воздуха над жидкостями пренебрегаем. Тела совершают малые свободные колебания относительно точек закрепления  $O_1, O_2$  (сферические шарниры), см. рисунок.

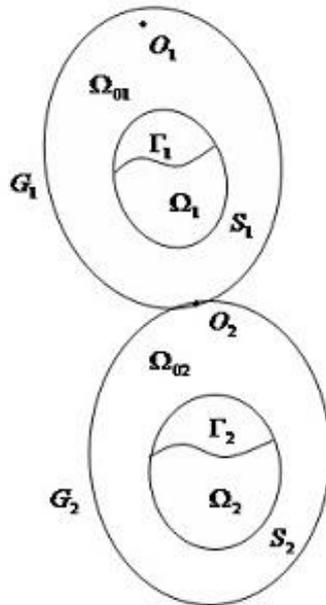


Рис. 1

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле  $\vec{g}$ , а в процессе малых движений — силовое поле

$$\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x),$$

где  $\vec{f}(t, x)$  — малая динамическая добавка к гравитационному полю. Предполагаем также, что в шарнире  $O_k$  сила трения пропорциональна разности угловых скоростей соединяющихся тел  $G_k$  и  $G_{k-1}$ , причем коэффициент пропорциональности  $\alpha_k > 0, k = 1, 2$ .

Для описания малых движений системы введем неподвижную систему координат  $O_1x^1x^2x^3$  с осями  $\vec{e}^j, j = 1, 2, 3$  так, чтобы  $\vec{g} = -g\vec{e}^3$ . Кроме того, введем подвижные

системы координат  $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ , жестко связанные с  $G_k$ . Единичные векторы вдоль осей  $O_k x_k^j$  обозначим через  $\vec{e}_k^j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Кроме того, будем считать, что в состоянии покоя центры масс  $C_k$  тел  $G_k$ , а также точки  $O_k$  находятся на одной оси  $O_1 x_1^3 = O_2 x_2^3$ .

Положение подвижной системы координат  $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$  относительно неподвижной системы  $O_1 x^1 x^2 x^3$  в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^3 \delta_k^j(t) \vec{e}_k^j, \quad k = 1, 2.$$

Тогда угловая скорость  $\vec{\omega}_k(t)$  тела  $G_k$  будет равна  $d\vec{\delta}_k/dt$ , а угловое ускорение этого тела – величине  $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$ .

Обозначим через  $\vec{R}_k$  радиус-вектор, идущий из полюса  $O_1$  в любую точку тела  $G_k$ ,  $\vec{r}_k$  ( $k = 1, 2$ ) – радиус-вектор, идущий из полюса  $O_k$  в любую точку тела  $G_k$ . Введем также вектор  $\vec{h}_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$ . Тогда, очевидно, что  $\vec{R}_1 = \vec{r}_1$ ,  $\vec{R}_2 = \vec{h}_1 + \vec{r}_2$ . Как известно из курса теоретической механики (см., например [4], с. 123), скорость изменения переменного вектора  $\vec{a}(t)$  в неподвижной системе координат  $d'\vec{a}/dt$  и скорость его изменения в подвижной системе координат  $d\vec{a}/dt$  связаны соотношением

$$\frac{d'\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}(t) \times \vec{a}(t), \quad (1)$$

где  $\vec{\omega}(t)$  – мгновенная угловая скорость подвижной системы координат. Отсюда следует, что векторы абсолютных скоростей  $\vec{v}_k$  произвольной точки тела  $G_k$  связаны с малыми векторами относительных скоростей  $\vec{u}_k$  по формулам:

$$\vec{v}_1 = \frac{d'\vec{R}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1; \quad (2)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d'\vec{R}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2. \quad (3)$$

Аналогично получаем формулы для абсолютного ускорения:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \frac{d'}{dt}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{u}_1}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{u}_1 = \\ &= \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) + \frac{d\vec{u}_1}{dt}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= \frac{d'}{dt}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{u}_2 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) + \frac{d\vec{u}_2}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1). \quad (5) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\int_{G_k} (\dots) dm_k := \int_{\Omega_{0k}} (\dots) \rho_{0k} d\Omega_k + \int_{\Omega_k} (\dots) \rho_k d\Omega_k, \quad (6)$$

где  $\Omega_{0k} \subset G_k$  — область, занятая твердым телом плотности  $\rho_{0k}$ , а  $\Omega_k$  — область, занятая жидкостью,  $k = 1, 2$ .

Уравнение изменения кинетического момента системы сочлененных тел относительно точки  $O_1$  в движущейся системе координат  $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$  имеет вид:

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} = \vec{M}_1^{tr} + \vec{M}_1^{vn} + \vec{M}_1^e + \vec{M}_1^{cor}, \quad (7)$$

где  $\vec{K}_1$  — кинетический момент системы в ее движении относительно неподвижной системы координат;  $\vec{M}_1^{tr}$  — момент сил трения;  $\vec{M}_1^{vn}$  — главный момент всех внешних сил (силы тяжести и других малых сил), действующих на систему тел;  $\vec{M}_1^e$  — момент переносных сил инерции;  $\vec{M}_1^{cor}$  — момент кориолисовых сил.

Имеем

$$\begin{aligned} \vec{K}_1 &= \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{v}_2 dm_2 = \\ &= \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\vec{M}_{1,tr} = -\alpha_1 \vec{\omega}_1. \quad (9)$$

С точностью до малых второго порядка имеет место формула (см. [4], с. 132)

$$\vec{g} = -g\vec{e}_k^3 + g\delta_k^2\vec{e}_k^1 - g\delta_k^1\vec{e}_k^2, \quad (10)$$

где  $\vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^3 \delta_k^j \vec{e}_k^j$ .

Пусть  $\zeta_k(x, t)$  ( $x \in \Gamma_k$ ) — функции, описывающие малые отклонения свободных поверхностей  $\Gamma_k(t)$  вдоль нормалей, относительно плоских равновесных поверхностей  $\Gamma_k$ . Из условия сохранения объёмов жидкостей во время колебаний следует, что  $\int_{\Gamma_k} \zeta_k d\Gamma_k = 0$ , тогда с точностью до малых более высоких порядков справедливы соотношения

$$\int_{G_k} \vec{r}_k \times \vec{g} dm_k = m_k \vec{r}_{k,c} \times \vec{g} + \int_{\Gamma_k} (\vec{r}_k \times \vec{g}) \zeta_k \rho_k d\Gamma_k =$$

$$\begin{aligned}
&= m_k[-l_k \vec{e}_k^3] \times [-g(\vec{e}_k^3 - \delta_k^2 \vec{e}_k^1 + \delta_k^1 \vec{e}_k^2)] - \rho_k g \int_{\Gamma_k} (\vec{r}_k \times \vec{e}_k^3) \zeta_k d\Gamma_k = \\
&= gm_k l_k \vec{e}_k^3 \times (\vec{e}_k^3 - \delta_k^2 \vec{e}_k^1 + \delta_k^1 \vec{e}_k^2) - \rho_k g \int_{\Gamma_k} (\vec{r}_k \times \vec{e}_k^3) \zeta_k d\Gamma_k = -gm_k l_k P_2 \vec{\delta}_k + \rho_k g \int_{\Gamma_k} (\vec{e}_k^3 \times \vec{r}_k) \zeta_k d\Gamma_k,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{g} dm_2 &= m_k \vec{r}_{k,c} \times \vec{g} + \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{h}_1 \times \vec{g}) \zeta_2 d\Gamma_2 = \\
&= m_2[-h_1 \vec{e}_1^3] \times [-g(\vec{e}_1^3 - \delta_1^2 \vec{e}_1^1 + \delta_1^1 \vec{e}_1^2)] + \rho_2 (\vec{h}_1 \times \vec{g}) \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 = -gm_2 h_1 P_2 \vec{\delta}_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

В последнем соотношении предполагается, что  $\vec{h}_1 = -h_1 \vec{e}_1^3$  (с точностью до малых более высокого порядка), где  $h_1 := |\overrightarrow{O_1 O_2}|$  — расстояние между шарнирами. Также введены обозначения  $\vec{r}_{k,c}$  — радиус вектор центра тяжести тела  $G_k$ ,  $l_k := |\overrightarrow{O_k C_k}|$  — расстояние от  $O_k$  до центра масс  $C_k$  тела  $G_k$ ,  $P_2 \vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^2 \delta_k^j \vec{e}_k^j$ .

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\vec{M}_1^{vn} &= \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{g} + \vec{f}_1) dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{g} + \vec{f}_2) dm_2 = \\
&= -gm_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - gm_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - gm_2 h_1 P_2 \vec{\delta}_1 + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{f}_2 dm_2 + \\
&\quad + \rho_1 g \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 + \rho_2 g \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2,
\end{aligned} \tag{13}$$

где  $\vec{f}_k(t, x) := \vec{f}(t, x)|_{G_k}$ .

Очевидно,  $\vec{M}_1^e = 0$ . При этом

$$\vec{M}_1^{cor} = - \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (2\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_1) dm_1 - \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (2\vec{\omega}_2 \times \vec{u}_2) dm_2 \tag{14}$$

является величиной второго порядка малости, поэтому мы ею пренебрегаем.

Вычислим теперь производную по времени от кинетического момента  $\vec{K}_1$ :

$$\frac{d' \vec{K}_1}{dt} = \int_{G_1} \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) dm_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_1 \times \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{u}_1}{dt} \right) dm_1 + \vec{\omega}_1 \times \int_{G_1} \vec{r}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1) dm_1 + \\
 & \quad + \int_{G_2} \frac{d}{dt} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2 + \\
 & + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2 + \vec{\omega}_2 \times \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку мы предполагаем, что поля  $d\vec{r}_k/dt = \vec{u}_k$  и  $\vec{\omega}_k$  являются бесконечно малыми, то с учётом формулы

$$\frac{d\vec{u}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + (\vec{u}_k \cdot \nabla) \vec{u}_k, \quad k = 1, 2, \tag{16}$$

можно пренебречь вторым слагаемым. Отсюда после линеаризации (15) получаем уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O_1$  системы тел в подвижной системе координат  $O_1 x_1^1 x_1^2 x_1^3$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{K}_1}{dt} & = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) dm_1 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \\
 & \quad + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right) dm_2 = -\alpha_1 \vec{\omega}_1 - \\
 & - g \left( m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 + m_2 h_1 P_2 \vec{\delta}_1 + m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - \rho_1 \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 - \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 \right) + \\
 & \quad + \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int_{G_2} (\vec{h}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{f}_2 dm_2. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Аналогично выводится уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O_2$  тела  $G_2$  в подвижной системе координат  $O_2 x_2^1 x_2^2 x_2^3$ .

Имеем

$$\vec{K}_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2. \tag{18}$$

$$\vec{M}_2^{tr} = -\alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1). \tag{19}$$

$$\vec{M}_2^{vn} = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{g} + \vec{f}_2) dm_2 = -g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 + g \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2. \tag{20}$$

$$\vec{M}_2^e = - \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{a}_2^e dm_2, \quad (21)$$

где

$$\vec{a}_2^e = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \quad (22)$$

есть ускорение точки  $O_2$ . Моментом кориолисовых сил пренебрегаем.

Вычислим производную по времени от величины  $\vec{K}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d'\vec{K}_2}{dt} = \int_{G_2} \vec{u}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \frac{d\vec{u}_2}{dt} \right) dm_2 + \\ + \vec{\omega}_2 \times \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2) dm_2. \quad (23) \end{aligned}$$

После линеаризации (23) получаем искомое уравнение изменения кинетического момента относительно точки  $O_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 = \\ = -\alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 + g \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 - \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 \right) dm_2. \quad (24) \end{aligned}$$

Вычитая теперь из левой и правой части уравнения (17) соответственно левую и правую часть уравнения (24), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) dm_1 + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \right) dm_2 + \\ + \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\delta}_1 - g \rho_1 \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \zeta_1 d\Gamma_1 = \\ = \int_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 =: \vec{M}_1(t). \quad (25) \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (24) в эквивалентной форме

$$\int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 \right) dm_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \alpha_2 (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) +$$

$$+ gm_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g\rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \zeta_2 d\Gamma_2 = \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 =: M_2(t). \quad (26)$$

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ вязкой жидкости. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Для вязкой жидкости, имеющей постоянные плотности  $\rho_k > 0$  и кинематические вязкости  $\nu_k > 0$ , уравнениями движения являются линейаризованные уравнения Навье–Стокса (см. [4], с. 124):

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\rho^{-1} \nabla P_k + \nu_k \Delta \vec{v}_k + \vec{F}_k, \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0, \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1, 2, \quad (27)$$

записанные в неподвижной системе координат  $O_1 x^1 x^2 x^3$ .

Для записи этих уравнений в подвижной системе координат подставим в них формулы для вычисления поля абсолютной скорости  $\vec{v}_k$  и абсолютного ускорения  $\vec{w}_k$  (см. (2)–(5)).

Воспользовавшись инвариантностью операций  $\operatorname{div}$ ,  $\nabla$ ,  $\Delta$  при линейных заменах переменных, после линейаризации получаем уравнения Навье–Стокса в подвижных системах координат  $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$ :

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_1^{-1} \nabla p_1 + \nu_1 \Delta \vec{u}_1 + \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 = -\rho_2^{-1} \nabla p_2 + \nu_2 \Delta \vec{u}_2 + \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (29)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1, 2. \quad (30)$$

Будем предполагать выполненными условия прилипания вязкой жидкости к твёрдым стенкам, т. е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2. \quad (31)$$

Предполагая, что капиллярными силами можно пренебречь, считаем, что в состоянии равновесия свободные поверхности  $\Gamma_k(t)$  являются плоскостями, ортогональными вектору  $\vec{e}^3$ . Они могут быть заданы уравнениями  $x_3' = -b_k < 0$ , где  $b_k = \operatorname{const}$ .

На поверхностях  $\Gamma_k(t)$  жидкости контактируют с газом постоянного давления  $p_a$ , отсюда следует, что напряжения в жидкости и газе должны совпадать, т. е.

$$\sum_{j=1}^3 \tilde{\tau}'_{ij}(\vec{v}_k) n'^j_k := \sum_{j=1}^3 \left( -P_k \delta_{ij} + \rho_k \nu_k \left( \frac{\partial v_k^j}{\partial x_k^i} + \frac{\partial v_k^i}{\partial x_k^j} \right) \right) n'^j_k = -p_a n^i_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (32)$$

где  $\tilde{\tau}'_{ij}(\vec{v}_k)$  — компоненты тензора напряжений в  $k$ -той жидкости, построенного по абсолютным скоростям  $\vec{v}_k$ , а  $\vec{n}_k = \sum_{j=1}^3 n'^j_k \vec{e}^j$  — вектор внешней нормали к  $\Gamma_k(t)$ .

Давление  $P_k$  на границе жидкости раскладывается в сумму,  $P_k = P_{0k} + p_k$ , где

$$P_{0k}(t, x) = \rho_k \vec{g} \cdot \vec{r}_k + p_a + \rho_k g b_k$$

есть равновесное давление с учётом отклонения тела  $G_k$  на  $\vec{\delta}_k(t)$ , а  $p_k$  — малая динамическая добавка. С учётом формулы (10) отсюда получаем, что

$$P_{0k}(t, x) = -\rho_k g (x_k^3 - \delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) + p_a + \rho_k g b_k. \quad (33)$$

Предполагая, что  $\Gamma_k(t)$  отклоняются незначительно от равновесных  $\Gamma_k$ , будем считать, что  $n_k^1 = n_k^2 = 0$ . Так как для чистого вращения  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  все напряжения равны нулю, то с учётом формул (2), (3) линеаризация касательных динамических напряжений (32) приводит к условиям

$$\tilde{\tau}_{i3}(\vec{u}_k) = \rho_k \nu_k \left( \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^i} + \frac{\partial u_k^i}{\partial x_k^3} \right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad i = 1, 2. \quad (34)$$

Так как  $x_k^3 = b_k + \zeta_k(t, x_k^1, x_k^2)$ , то с учётом формулы (33) линеаризация (32) приводит к условию для нормального напряжения

$$-P_k + 2\rho_k \nu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = \rho_k g (b_k + \zeta_k - \delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) - p_a - \rho_k g b_k - p_k + 2\rho_k \nu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -p_a.$$

Отсюда следует, что

$$-p_k + 2\rho_k \nu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -\rho_k g (\zeta_k - \delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (35)$$

Также на  $\Gamma_k$  должно быть выполнено линеаризованное кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = u_k^3|_{\Gamma_k} \quad (36)$$

с условием нормировки

$$\int_{\Gamma_k} \zeta_k d\Gamma_k = 0. \quad (37)$$

Для полной постановки задачи еще необходимо задать условия связи

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = 1, 2, \quad (38)$$

и начальные данные

$$\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad (39)$$

$$\zeta_k(0, x) = \zeta_k^0(x), \quad x \in \Gamma_k, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = 1, 2. \quad (40)$$

Таким образом, полная постановка начально-краевой задачи состоит в решении уравнений (25), (26), (28)–(30) с краевыми и начальными условиями (34)–(39).

### 3. ЗАКОН БАЛАНСА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

Будем считать, что поставленная задача имеет классическое решение, т.е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных. Выведем закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

Для этого обе части уравнений (24), (26) умножим скалярно на  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$  соответственно, а обе части уравнений (28)–(29) умножим скалярно на  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , а затем проинтегрируем по областям  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Левые и правые части полученных четырех соотношений сложим.

Заметим, что некоторые группы слагаемых можно переписать в виде производных по  $t$  от квадратичных функционалов в виде интегралов по областям  $\Omega_k$  и  $G_k$  (с учетом введенного выше правила для интегралов  $\int_{G_k} (\dots) dm_k$ ). Так, слагаемые, содержащие множитель  $\rho_1$ , имеют вид

$$\rho_1 \left\{ \left( \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 \right) \cdot \vec{\omega}_1 + \left( \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left( \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) d\Omega_1 \right) \cdot \vec{\omega}_1 + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) \cdot \vec{u}_1 d\Omega_1 \right\} = \frac{1}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 d\Omega_1,$$

а соответствующий интеграл по  $G_1$  приобретает окончательно такой вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{G_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 dm_1.$$

Соответственно преобразуются группы слагаемых по областям  $\Omega_k$  и  $G_k$  при  $k = 2$ . В сумме они образуют слагаемое

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{G_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \omega_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 dm_2.$$

Будем использовать первую формулу Грина для векторного оператора Лапласа и соленоидальных векторных полей в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma \cup S$  (см. [4], с. 115, а также [6], с. 62):

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot (-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p) d\Omega = \mu E(\vec{v}, \vec{u}) - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 v^j |_{\Gamma} (\tau_{j3}(\mu \vec{u}) - p \delta_{j3}) d\Gamma, \quad \vec{v}, \vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega). \quad (41)$$

Здесь билинейная форма

$$E(\vec{v}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \sum_{j,k=1}^3 \tau_{jk}(\vec{v}) \tau_{jk}(\vec{u}) \right] d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{v}) := \frac{\partial v^j}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j}, \quad (42)$$

задаёт скалярное произведение и порождает норму, эквивалентную стандартной (согласно неравенству Корна) в пространстве  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0, \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S)\}$ . Эта норма определяет скорость диссипации энергии в  $k$ -той жидкости.

С учётом формулы Грина (42) для решений задачи  $\vec{u}_k$  будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k &= \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \rho_k g \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} (\zeta_k - \delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) d\Gamma_k = \\ &= \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \frac{\rho_k g}{2} \left( \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_k} |\zeta_k|^2 d\Gamma_k \right) + \rho_k g \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} (-\delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) d\Gamma_k, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\mu_k := \rho_k \nu_k > 0$  — коэффициенты динамических вязкостей жидкостей.

Учитывая также формулы (38) и соотношение

$$\int_{\Gamma_k} (\vec{e}_k^3 \times \vec{r}_k) \zeta_k d\Gamma_k \cdot \frac{d\vec{\delta}_k}{dt} + \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} (-\delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) d\Gamma_k = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_k} \zeta_k (-\delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) d\Gamma_k \right),$$

после преобразований получаем закон баланса полной энергии

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{G_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 dm_1 + \int_{G_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 dm_2 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} g \frac{d}{dt} \left\{ (m_1 l_1 + m_2 h_1) |P_2 \vec{\delta}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2 \vec{\delta}_2|^2 + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Gamma_k} (|\zeta_k|^2 + 2\zeta_k (-\delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2)) d\Gamma_k \right\} = \\ &= - \left\{ \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \right\} + \sum_{k=1}^2 \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k d\Omega_k. \end{aligned} \quad (44)$$

Первое слагаемое в левой части, стоящее в фигурных скобках, есть кинетическая энергия системы, так как  $\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_1$ ,  $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2 = \vec{v}_2$ . Второе слагаемое слева в фигурных скобках — потенциальная энергия системы сочленённых тел, отсчитываемая от состояния покоя. Справа в (44) стоит мощность сил трения, мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным

силам  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  соответственно, а также мощность моментов  $\vec{M}_1, \vec{M}_2$  и  $\vec{M}_3$ , которые выражаются через эти силы.

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Введём вместо неизвестных полей скоростей поля перемещений  $\vec{w}_k$  :  $\frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t} = \vec{u}_k$ . Также всюду заменим угловые скорости  $\vec{\omega}_k$  на производные от угловых перемещений  $\frac{d\vec{\delta}_k}{dt}$ . Тогда с учётом кинематического условия (36) от уравнений (25), (26) приходим к уравнениям в  $\mathbb{C}^3$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{G_1} (\vec{r}_1 \times \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) dm_1 + \rho_1 \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \vec{w}_1 d\Omega_1 + \\ & \quad + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 + \frac{d^2 \vec{\delta}_2}{dt^2} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} \right) dm_2 + \\ & \quad + \alpha_1 \frac{d}{dt} \vec{\delta}_1 - \alpha_2 \frac{d}{dt} (\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_1) + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\delta}_1 - g \rho_1 \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) w_1^3 d\Gamma_1 = M_1(t). \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 \right) dm_2 + \rho_2 \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \vec{w}_2 d\Omega_2 + \alpha_2 \frac{d}{dt} (\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_1) + \\ & \quad + g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) w_2^3 d\Gamma_2 = M_2(t). \end{aligned} \quad (46)$$

Уравнения (28)–(30) можно переписать в следующей форме.

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{r}_1 = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} + \rho_1 \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (47)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} + \rho_2 \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 + \frac{d^2 \vec{\delta}_2}{dt^2} \times \vec{r}_2 \right) = -\nabla p_2 + \mu_2 \Delta \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} + \rho_2 \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (48)$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = 1, 2. \quad (49)$$

Граничные условия (31), (34)–(36) можно переписать следующим образом:

$$\vec{w}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2. \quad (50)$$

$$\mu_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w_k^3}{\partial x_k^i} + \frac{\partial w_k^i}{\partial x_k^3} \right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k, \quad i = 1, 2). \quad (51)$$

$$p_k - 2\mu_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_k^3}{\partial x_k^3} = \rho_k g (\zeta_k - \delta_k^2 x_k^1 + \delta_k^1 x_k^2) \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (52)$$

$$\zeta_k = w_k^3|_{\Gamma_k} =: \gamma_{nk} \vec{w}_k \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (53)$$

Для полной постановки задачи еще необходимо задать условие нормировки (37) и начальные условия:

$$\vec{w}_k(0, x) = \vec{w}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad (54)$$

$$\frac{d\vec{w}_k}{dt}(0) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad (55)$$

$$\frac{d\vec{\delta}_k}{dt}(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0. \quad (56)$$

Отметим, что начальное условие для функции  $\zeta(t, x)$  задавать не нужно, поскольку  $\zeta_k(0, x) = \gamma_{nk} \vec{w}_k^0(x)$ ,  $x \in \Gamma_k$ .

Естественное физическое требование конечности кинетической энергии приводит к тому, что поля скоростей  $\vec{u}_k$  (и перемещений  $\vec{w}_k$ ) должны принадлежать гильбертову пространству вектор-функций  $\vec{L}_2(\Omega_k)$ .

В связи с наличием свободных поверхностей  $\Gamma_k$  и твердых стенок  $S_k$  удобно использовать ортогональное разложение пространств  $\vec{L}_2(\Omega_k)$  на следующие подпространства (см. [4], с. 106):

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad (57)$$

где

$$\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \{ \vec{w}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \vec{w}_k = \nabla \varphi_k, \quad \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k) \} \quad (58)$$

есть подпространство потенциальных полей с потенциалами, обращаемыми в нуль на свободной поверхности  $\Gamma_k$ , а

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \{ \vec{w}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{w}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k) \}, \quad (59)$$

является подпространством соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке  $S_k$ . Здесь операции  $\operatorname{div} \vec{w}_k$  и  $\vec{w}_k \cdot \vec{n}_k$  понимаются в смысле обобщенных функций (см. [4], с. 100–102). Обозначим через  $P_{0,\Gamma_k}$  и  $P_{0,S_k}$  ортопроекторы, действующие из  $\vec{L}_2(\Omega_k)$  на  $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$  и  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  соответственно.

Пусть  $\nabla p_k = P_{0,\Gamma_k} \nabla p_k + P_{0,S_k} \nabla p_k =: \nabla \varphi_k + \nabla \tilde{p}_k$ , где  $\nabla \varphi_k \in \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ ,  $\nabla \tilde{p}_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ . Тогда, действуя на обе части уравнений (47), (48) проекторами  $P_{0,\Gamma_k}$  и  $P_{0,S_k}$ , получим, что поля  $\nabla \varphi_k$  однозначно определяются полями  $\vec{w}_k$  и  $\tilde{p}_k$  в силу того, что составляющая  $\varphi_k$  не входит в граничные условия ( $\varphi_k|_{\Gamma_k} = 0$ ). При

этом поля  $\vec{w}_k$  и  $\tilde{p}_k$  удовлетворяют уравнениям

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} + \rho_1 P_{0,S_1} \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{r}_1 = -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \frac{\partial \vec{w}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (60)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} + \rho_2 P_{0,S_2} \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 + \frac{d^2 \vec{\delta}_2}{dt^2} \times \vec{r}_2 \right) = -\nabla \tilde{p}_2 + \mu_2 P_{0,S_2} \Delta \frac{\partial \vec{w}_2}{\partial t} + \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \quad (61)$$

Так как давление определяется с точностью до константы, то для определённости положим, что  $\int_{\Gamma_k} \tilde{p}_k d\Gamma_k = 0$ . В силу условия нормировки (37) и кинематического условия (53) отсюда получаем, что  $\int_{\Gamma_k} \zeta_k d\Gamma_k = \int_{\Gamma_k} w_k^3|_{\Gamma_k} d\Gamma_k = 0$ . Можно доказать (см. [4], с. 114–115), что тогда  $\int_{\Gamma_k} \frac{\partial w_k^3}{\partial x^3}|_{\Gamma_k} d\Gamma_k = 0$ . Все данные подын-

тегральные функции принадлежат подпространству  $L_{2,\Gamma_k} := L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}$ , где  $L_2(\Gamma_k) := \{p : \|p\|^2 := \int_{\Gamma_k} |p|^2 d\Gamma_k < \infty\}$ . Обозначим через  $\theta_k$  ортопроекторы из  $L_2(\Gamma_k)$  на  $L_{2,\Gamma_k}$ , тогда краевые условия (52) после действия этих ортопроекторов можно записать в виде

$$\tilde{p}_k - 2\mu_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_k^3}{\partial x^3} = \rho_k g (\zeta_k + \theta_k ((P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3)) \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (62)$$

Будем искать неизвестное поле  $\nabla \tilde{p}_k$  в виде суммы  $\nabla p_{k1} + \nabla p_{k2}$ , где первая компонента давления удовлетворяет уравнению (для удобства вновь на время вернёмся к полям скоростей  $\vec{u}_k = \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t}$ )

$$A_k \vec{u}_k := -\mu_k P_{0,S_k} \Delta \vec{u}_k + \nabla p_{k1} = \vec{\psi}_k, \quad (63)$$

причём

$$\vec{\psi}_1 := -\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} - \rho_1 P_{0,S_1} \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{r}_1 - \nabla p_{12} + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1, \quad (64)$$

$$\vec{\psi}_2 := -\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} - \rho_2 P_{0,S_2} \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_2}{dt^2} \times \vec{r}_2 + \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 \right) - \nabla p_{22} + \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2, \quad (65)$$

а также краевым условиям

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad (66)$$

$$\mu_k \left( \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^i} + \frac{\partial u_k^i}{\partial x_k^3} \right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k, \quad i = 1, 2), \quad (67)$$

$$p_{k1} - 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (68)$$

При этом вторая компонента  $\nabla p_{k2}$  является решением задачи

$$\Delta p_{k2} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad (69)$$

$$\frac{\partial p_{k2}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad (70)$$

$$p_{k2}|_{\Gamma_k} = \phi_k := \rho_k g (\zeta_k + \theta_k ((P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3)) \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (71)$$

Операторы  $A_k$ , действующие по закону (63), являются самосопряжёнными положительно определёнными операторами (операторами первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна), порождёнными гильбертовой парой пространств  $(\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k); \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$  (см. [4], с. 115–119). При этом для функций из областей определения этих операторов выполнены краевые условия (66)–(68) и соотношение

$$\mathcal{D}(A_k) \subset \mathcal{D}(A_k^{1/2}) = \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) = \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : E(\vec{u}_k, \vec{u}_k) < \infty, \operatorname{div} \vec{u}_k = 0, \vec{u}_k|_{S_k} = \vec{0} \right\}. \quad (72)$$

Согласно лемме 2.4 из статьи [7], с. 9, задачи (69)–(71) имеют единственное решение  $p_{k2} = V_k \phi_k \in H_{h,S_k}^1(\Omega_k) := \{p_k \in H^1(\Omega_k) : \int_{\Gamma_k} p_k d\Gamma_k = 0, \Delta p_k = 0, \frac{\partial p_k}{\partial n_k} = 0\}$

тогда, как только правые части  $\phi_k \in H_{\Gamma_k}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma_k) \cap L_{2,\Gamma_k}$ , при этом оператор  $V_k : H_{\Gamma_k}^{1/2} \rightarrow H_{h,S_k}^1(\Omega_k)$  является ограниченным. Отсюда следует, что оператор  $G_k \phi_k := \nabla V_k \phi_k$  действует ограниченным образом из  $H_{\Gamma_k}^{1/2}$  в  $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ .

Таким образом, при условии  $\phi_k = \rho_k g (\zeta_k + \theta_k ((P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3)) \in H_{\Gamma_k}^{1/2}$  уравнения (60), (61) можно записать как дифференциальные уравнения в пространствах  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d^2 \vec{w}_1}{dt^2} + \rho_1 P_{0,S_1} \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{r}_1 \right) + A_1 \frac{d \vec{w}_1}{dt} + \rho_1 g G_1 (\gamma_{n1} \vec{w}_1 + \theta_1 ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3)) = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (73) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d^2 \vec{w}_2}{dt^2} + \rho_2 P_{0,S_2} \left( \frac{d^2 \vec{\delta}_2}{dt^2} \times \vec{r}_2 + \frac{d^2 \vec{\delta}_1}{dt^2} \times \vec{h}_1 \right) + A_2 \frac{d \vec{w}_2}{dt} + \\ + \rho_2 g G_2 (\gamma_{n2} \vec{w}_2 + \theta_2 ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3)) = \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \quad (74) \end{aligned}$$

**5. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ОПЕРАТОРНО-МАТРИЧНОМУ УРАВНЕНИЮ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Запишем сейчас уравнения (73), (74) и (45), (46) в виде одного операторно-матричного уравнения. Для этого введём новые неизвестные элементы  $\vec{w} := (\vec{w}_1; \vec{w}_2)^t \in H_1 := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$  и  $\vec{\delta} := (\vec{\delta}_1; \vec{\delta}_2)^t \in H_2 := \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$ .

Введём вспомогательные операторы

$$C_{11}\vec{w} := (\rho_1\vec{w}_1; \rho_2\vec{w}_2)^t, \tag{75}$$

$$C_{12}\vec{\delta} := \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,S_1}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \\ \rho_2 P_{0,S_2}(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1) \end{pmatrix}, \tag{76}$$

$$C_{21}\vec{w} := \begin{pmatrix} \rho_1 \int_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \vec{w}_1) d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \vec{w}_2) d\Omega_2 \\ \rho_2 \int_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \vec{w}_2) d\Omega_2 \end{pmatrix}, \tag{77}$$

$$C_{22}\vec{\delta} := \begin{pmatrix} \int_{G_1} (\vec{r}_1 \times (\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)) dm_1 + \int_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) dm_2 \\ \int_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) dm_2 + \int_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 dm_2 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

$$A_{11}\vec{w} := (A_1\vec{w}_1; A_2\vec{w}_2)^t, \tag{79}$$

$$A_{22}\vec{\delta} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\delta}_1 \\ \vec{\delta}_2 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$B_{11}\vec{w} := (\rho_1 g G_1 \gamma_{n1} \vec{w}_1; \rho_2 g G_2 \gamma_{n2} \vec{w}_2)^t, \tag{81}$$

$$B_{12}\vec{\delta} := \begin{pmatrix} \rho_1 g G_1 \theta_1 ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^3) \\ \rho_2 g G_2 \theta_2 ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^3) \end{pmatrix}, \tag{82}$$

$$B_{21}\vec{w} := \begin{pmatrix} -g \rho_1 \int_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^3 \times \vec{r}_1) \gamma_{n1} \vec{w}_1 d\Gamma_1 \\ -g \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^3 \times \vec{r}_2) \gamma_{n2} \vec{w}_2 d\Gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{83}$$

$$B_{22}\vec{\delta} := (g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\delta}_1; g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2)^t. \tag{84}$$

С помощью введённых операторов задача сводится к исследованию дифференциально-операторного уравнения второго порядка в пространстве  $\mathcal{H} := H_1 \oplus H_2$ :

$$\mathcal{C} \frac{d^2 X}{dt^2} + \mathcal{A} \frac{dX}{dt} + \mathcal{B} X = \mathcal{F}, \tag{85}$$

где неизвестным является вектор-столбец  $X = (\vec{w}; \vec{\delta})^t$ , удовлетворяющий начальным условиям

$$X(0) = (\vec{w}_1^0; \vec{w}_2^0; \vec{\delta}_1^0; \vec{\delta}_2^0)^t =: X^0, \quad X'(0) = (\vec{u}_1^0; \vec{u}_2^0; \vec{\omega}_1^0; \vec{\omega}_2^0)^t =: X^1. \quad (86)$$

Здесь введены элемент  $\mathcal{F} := (\rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1; \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2; \vec{M}_1(t); \vec{M}_2(t))^t$  и операторные матрицы

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \quad (87)$$

**Лемма 1.** *Оператор  $\mathcal{A}$  на области определения  $\mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_2) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$  является самосопряжённым положительно определённым оператором с дискретным спектром.*

*Доказательство.* Действительно, в разложении  $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus (\mathbb{C}^3)^2$  оператор имеет диагональный вид. Так как операторы  $A_k$  являются самосопряжёнными положительно определёнными операторами с дискретным спектром, то для доказательства достаточно проверить, что таковым является оператор  $A_{22}$ . Поскольку он действует в конечномерном пространстве, то достаточно доказать его положительность. Последнее следует из тождества  $(A_{22}\vec{\delta}, \vec{\delta}) = \alpha_1 |\vec{\delta}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_1|^2 \geq 0$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Оператор  $\mathcal{C}$  является положительным ограниченным и ограниченно обратимым оператором в  $\mathcal{H}$ .*

*Доказательство.* Ограниченность оператора  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{H}$  следует непосредственно из определений операторов  $C_{jk}$ . Свойство положительной определённости можно установить, преобразуя выражение для его квадратичной формы.

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}X, X) &= \rho_{01} \int_{\Omega_{01}} |\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1|^2 d\Omega_{01} + \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{w}_1|^2 d\Omega_1 + \\ &+ \rho_{02} \int_{\Omega_{02}} |\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2|^2 d\Omega_{02} + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{w}_2|^2 d\Omega_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Можно заметить, что форма обращается в нуль лишь при  $X = 0$ , т. е.  $\mathcal{C}$  – положительный оператор. В силу того, что  $C_{11} \gg 0$ , а остальные компоненты операторной матрицы  $\mathcal{C}$  являются конечномерными, оператор  $\mathcal{C}$  положительно определён.  $\square$

**Лемма 3.** *Операторы  $\gamma_{nk} : \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \rightarrow H_{\Gamma_k}^{1/2}$  и  $G_k : H_{\Gamma_k}^{1/2} \rightarrow \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  являются ограниченными. При этом  $\gamma_{nk}$  можно рассматривать как неограниченный оператор, действующий из  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  в  $L_{2,\Gamma_k}$ , полагая его равным нулю на  $\vec{J}_0(\Omega_k)$ .*

Тогда сопряжённый к нему оператор, переводящий  $L_{2,\Gamma_k}$  в  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ , будет расширением оператора  $G_k$ .

*Доказательство.* Его можно найти, например, в [5], с. 151–152. □

**Следствие 1.** Оператор  $G_k\gamma_{nk}$  является неограниченным неотрицательным оператором, действующим в  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ , при этом его область определения совпадает с  $\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ .

**Лемма 4.** Операторы  $B_{12}$  и  $B_{21}$  являются взаимносопряженными ограниченными операторами.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно доказать взаимную сопряжённость операторов  $Q_k$  и  $R_k$ , действующих по закону  $Q_k\vec{\delta}_k := G_k\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3)$  и переводящих  $\mathbb{C}^3$  в  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ , и  $R_k\vec{w}_k := -\int_{\Gamma_k} (\vec{e}_k^3 \times \vec{r}_k)\gamma_{nk}\vec{w}_k d\Gamma_k = -\int_{\Gamma_k} \theta_k(\vec{e}_k^3 \times \vec{r}_k)\gamma_{nk}\vec{w}_k d\Gamma_k = P_2R_k\vec{w}_k$ , переводящих  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  в  $\mathbb{C}^3$ . Согласно лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} (Q_k\vec{\delta}_k, \vec{w}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} &= \int_{\Omega_k} \left( G_k\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3) \right) \cdot \vec{w}_k d\Omega_k = \\ &= \int_{\Gamma_k} \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3) \overline{\gamma_{nk}\vec{w}_k} d\Gamma_k = - \int_{\Gamma_k} \theta_k((P_2\vec{\delta}_k) \cdot (\vec{r}_k \times \vec{e}_k^3)) \overline{\gamma_{nk}\vec{w}_k} d\Gamma_k = \\ &= -P_2\vec{\delta}_k \cdot \int_{\Gamma_k} \theta_k(\vec{r}_k \times \vec{e}_k^3) \overline{\gamma_{nk}\vec{w}_k} d\Gamma_k = (P_2\vec{\delta}_k, R_k\vec{w}_k)_{\mathbb{C}^3} = (\vec{\delta}_k, R_k\vec{w}_k)_{\mathbb{C}^3}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 5.** Оператор  $\mathcal{B}$  с областью определения  $\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$  является самосопряжённым неограниченным оператором, действующим в  $\mathcal{H}$ . Он имеет вещественный спектр, состоящий не более чем из конечного числа отрицательных собственных значений. Оператор является неотрицательным, если выполнены условия

$$g(m_1l_1 + m_2h_2) \geq \int_{\Gamma_1} |\theta_1(\vec{r}_1 \times \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_k, \quad gm_2l_2 \geq \int_{\Gamma_2} |\theta_2(\vec{r}_2 \times \vec{e}_2^3)|^2 d\Gamma_2. \quad (88)$$

*Доказательство.* Все компоненты оператора  $\mathcal{B}$ , кроме  $B_{11}$ , являются ограниченными операторами. В силу следствия 1 и леммы 4 оператор  $\mathcal{B}$  является самосопряжённым на  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ .

Рассмотрим квадратичную форму оператора  $\mathcal{B}$ . После преобразований получаем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}X, X) &= \sum_{k=1}^2 (\rho_k g G_k \gamma_{nk} \vec{w}_k, \vec{w}_k) + g(m_1 l_1 + m_2 h_2) (P_2 \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_1) + g m_2 l_2 (P_2 \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_2) + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \rho_k g (G_k \theta_k ((P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^3), \vec{w}_k) - \sum_{k=1}^2 \rho_k g \left( \int_{\Gamma_k} (\vec{e}_k^3 \times \vec{r}_k) \gamma_{nk} \vec{w}_k d\Gamma_k, \vec{\delta}_k \right) = \\
&= \sum_{k=1}^2 \rho_k g \int_{\Gamma_k} |\gamma_{nk} \vec{w}_k + P_2 \vec{\delta}_k \cdot \theta_k (\vec{r}_k \times \vec{e}_k^3)|^2 d\Gamma_k + \\
&+ |P_2 \vec{\delta}_1|^2 (g(m_1 l_1 + m_2 h_2) - \int_{\Gamma_1} |\theta_1 (\vec{r}_1 \times \vec{e}_1^3)|^2 d\Gamma_k) + |P_2 \vec{\delta}_2|^2 (g m_2 l_2 - \int_{\Gamma_2} |\theta_2 (\vec{r}_2 \times \vec{e}_2^3)|^2 d\Gamma_k).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что квадратичная форма не принимает отрицательных значений при выполнении условий (88), то есть оператор  $\mathcal{B}$  является неотрицательным. В общем случае форма может принимать отрицательные значения на подпространстве конечной размерности. Следовательно, отрицательных собственных у  $\mathcal{B}$  может быть не более конечного числа.  $\square$

**Лемма 6.** Оператор  $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2}$  является ограниченным оператором в  $\mathcal{H}$ .

*Доказательство.* Действительно, в разложении  $\mathcal{H} = [\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)] \oplus [\mathbb{C}^3]^2$  имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2} &= \left( \begin{pmatrix} \rho_1 g G_1 \gamma_{n1} & 0 \\ 0 & \rho_2 g G_2 \gamma_{n2} \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{12} \\ B_{22} \end{matrix} \right) \left( \begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ A_{22}^{-1/2} \end{matrix} \right) = \\
&= \left( \begin{pmatrix} \rho_1 g G_1 \gamma_{n1} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2 g G_2 \gamma_{n2} A_2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{12} A_{22}^{-1/2} \\ B_{22} A_{22}^{-1/2} \end{matrix} \right).
\end{aligned}$$

Операторы  $G_k \gamma_{nk} A_k^{-1/2}$  являются ограниченными в  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  в силу того, что  $A_k^{-1/2}$  ограничено переводит  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  в  $\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ , а согласно лемме 3 операторы  $G_k \gamma_{nk}$  действуют ограниченно из  $\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$  в  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ . Остальные компоненты операторной матрицы  $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2}$ , очевидно, ограничены.  $\square$

## 6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для дальнейшего исследования уравнения (85) перепишем его в форме

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \mathcal{A}_0 \frac{dX}{dt} + \mathcal{B}_0 X + \mathcal{C}^{-1} \mathcal{F}, \quad (89)$$

где  $\mathcal{A}_0 := -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_0 := -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}$ . Будем рассматривать уравнение (89) в пространстве  $\mathcal{H}_\mathcal{C}$  с эквивалентным скалярным произведением

$$[X_1, X_2]_{\mathcal{H}_\mathcal{C}} := (CX_1, X_2)_{\mathcal{H}}. \tag{90}$$

Из леммы 6 следует, что в уравнении (89) главным является оператор  $\mathcal{A}_0$ , который является генератором сжимающей полугруппы (выполнено свойство  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B}_0)$ ). Данное дифференциальное уравнение (следуя терминологии С. Г. Крейна) является абстрактным параболическим. Его разрешимость можно доказать, основываясь на абстрактных результатах монографии [8], гл. 3. Также оно попадает в класс сильно демпфированных линейных динамических систем, которые рассматривались в [9] и [10].

**Определение 1.** Будем назвать сильным решением на отрезке  $[0; T]$  задачи Коши (89) с заданными начальными данными  $X(0), X'(0)$  такую функцию  $X(t)$ , что  $X(t) \in C^2([0; T]; \mathcal{H}_\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{A}_0 X'(t), \mathcal{B}_0 X(t) \in C([0; T]; \mathcal{H}_\mathcal{C})$ , выполнены начальные условия и уравнение (89) для любого  $t \in [0; T]$ .

**Теорема 1.** *Задача Коши (89) имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0; T]$ , если выполнены условия*

$$X^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_0), \quad X^1 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad \mathcal{C}^{-1}\mathcal{F} \in W_p^1([0; T]; \mathcal{H}), \tag{91}$$

где  $W_p^1([0; T]; \mathcal{H})$  является банаховым пространством с нормой  $\|f(t)\| := \left( \sum_{k=0}^1 \left( \int_0^T \|f^{(k)}(t)\|^p dt \right)^{1/p}$ , заключенным между  $C([0; T]; \mathcal{H})$  и  $C^1([0; T]; \mathcal{H})$ .

*Доказательство.* Доказательство можно найти в [10], п 3.1.3. Там установлен более общий результат о разрешимости задачи Коши с ограниченными снизу операторными коэффициентами и главным оператором при первой производной.  $\square$

**Теорема 2.** *Исходная начально-краевая задача (45)–(56) имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0; T]$  (все слагаемые в уравнениях являются непрерывными функциями времени в соответствующем гильбертовом пространстве), как только  $\vec{w}_k^0, \vec{u}_k^0 \in \mathcal{D}(A_k)$ ,  $\vec{\delta}_k^0, \vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3$ . При этом достаточно, чтобы правые части удовлетворяли условиям:  $P_{0, S_k} \vec{f}_k \in C^1([0; T]; \vec{J}_{0, S_k}(\Omega_k))$ ,  $\vec{M}_k(t) \in C^1([0; T]; \mathbb{C}^3)$ .*

## 7. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ

Будем искать нетривиальные решения соответствующей однородной задачи (85) в виде  $X(t) = e^{-\lambda t} X$ . Тогда собственные значения задачи являются таковыми для

пучка

$$L_0(\lambda)X := (\lambda^2\mathcal{C} - \lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})X = 0. \quad (92)$$

Отметим сразу, что  $\lambda = 0$  может являться собственным значением задачи, если  $\text{Ker}\mathcal{B} \neq \{0\}$ . В силу дискретности спектра оператора  $\mathcal{B}$  нулевое собственное значение может иметь лишь конечную кратность.

Если  $\lambda \neq 0$ , то от пучка  $L_0(\lambda)$  (с неограниченными операторами) после замены  $Y := \mathcal{A}^{1/2}X$  можно перейти к задаче для пучка

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{I} - \lambda\mathcal{C}_{\mathcal{A}} - \frac{1}{\lambda}\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = 0, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1/2}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2}. \quad (93)$$

Так как оператор  $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2}$  ограничен, а  $\mathcal{A}^{-1/2}$  компактен в  $\mathcal{H}$ , то операторы  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  являются компактными самосопряжёнными операторами в  $\mathcal{H}$ . Следовательно, пучок  $\mathcal{L}(\lambda)$  является хорошо известным пучком С. Г. Крейна.

Для операторов  $A_k$  известна асимптотическая формула для собственных значений,

$$\lambda_n(A_k) = \frac{|\Omega_k|^{-2/3}}{3\pi^2} n^{2/3}[1 + o(1)], \quad n \rightarrow \infty, \quad (94)$$

доказанная Ж. Метевье в [11]. Отсюда следует, что операторы  $A_k^{-1/2} \in \mathfrak{S}_p$  при  $p > 3$ . Тогда при тех же  $p > 3$  имеем

$$\mathcal{A}_{11}^{-1/2} = \begin{pmatrix} A_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_2^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_p, \quad \mathcal{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1/2} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1/2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_p. \quad (95)$$

Последнее верно в силу того, что оператор  $A_{22}^{-1/2}$  является конечномерным, т. е. имеет конечное число собственных значений. Так как  $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , то оператор  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \in \mathfrak{S}_p$  при  $p > 3$ . При этом  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_p$  при  $p > 3/2$ .

Используя теорему о локализации и асимптотике собственных значений пучка С. Г. Крейна (см. [4], п. 7.2, [12], а также [13]), получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Спектр пучка (93) состоит из двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками 0 и  $+\infty$ , не более чем из конечного числа не вещественных пар комплексно сопряженных собственных значений в правой полуплоскости, а также конечного числа нулевых и отрицательных собственных значений. При выполнении условий (88) задача не имеет отрицательных собственных значений, т. е. гидромеханическая система является устойчивой.*

1. Если

$$4\|\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\| \cdot \|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\| < 1, \quad (96)$$

то задача не имеет не вещественных собственных значений, для ветвей положительных собственных значений выполнены асимптотические формулы

$$\lambda_k^+ = \lambda_k(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^{-1})[1 + o(1)] \quad k \rightarrow \infty, \quad \lambda_k^- = \lambda_k(\mathcal{B}_{\mathcal{A}})[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (97)$$

При этом  $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty \subset [r_+, +\infty)$ ,  $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty \subset (0, r_-]$ , где

$$r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\| \cdot \|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\|}) / (2\|\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\|). \quad (98)$$

При этом число отрицательных собственных значений совпадает с учетом кратности соответственно с количеством отрицательных собственных значений операторов  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathcal{B}$ .

2. Если  $1 \leq 4\|\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\| \cdot \|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\|$ , то задача может иметь конечное число не вещественных собственных значений, расположенных зеркально относительно вещественной оси в секторе  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq r_+, |\lambda| \leq r_-\}$ .

*Доказательство.* Доказательство основных результатов теоремы можно найти в [12] (теоремы 2.3.6. и 3.2.7). Количество нулевых собственных значений совпадает с конечной размерностью  $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{B}$ . Утверждение о том, что все не вещественные собственные значения лежат в правой комплексной полуплоскости, а число отрицательных собственных значений конечно, доказано в работах [16], [17]. Там же на основе теоремы Ю. Ш. Абрамова (см. [14] и [15]) доказано, что при выполнении условия (96) число отрицательных собственных значений задачи совпадает с учетом кратности с количеством отрицательных собственных значений операторов  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  и  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Определение 2.** Будем говорить, следуя В. А. Пригорскому (см. [18]), что базис Рисса  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$  является  $p$ -базисом ( $0 < p \leq \infty$ ) гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , если

$$\psi_n = (I + T)\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $T \in \mathfrak{S}_p$ , а  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  — ортонормированный базис  $\mathcal{H}$ .

Справедливо утверждение, доказанное Н. Д. Копачевским (см. [19], [20], [12]).

**Теорема 4** (о  $p$ -базисности собственных элементов пучка С. Г. Крейна). Пусть для пучка С. Г. Крейна  $L(\lambda) = I - \lambda A - \lambda^{-1}B$  выполнены условия

$$A = A^* \in \mathfrak{S}_{p_A}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_{p_B}(\mathcal{H}),$$

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \quad \dim \mathcal{H}_0 := \dim \operatorname{Ker} B \geq 0, \quad \dim \mathcal{H}_1 := \dim\{\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0\} = \infty,$$

$$4\|A\| \cdot \|B\| < 1, \quad r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|}) / (2\|A\|).$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка  $[-r_-, r_-]$ , после проектирования на  $\mathcal{H}_1$  образует  $p$ -базис в  $\mathcal{H}_1$  при

$$p \geq p_0, \quad p_0^{-1} = p_A^{-1} + p_B^{-1}.$$

При тех же  $p$  система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала  $(-r_+, r_+)$ , образует  $p$ -базис в  $\mathcal{H}$ .

**Следствие 2.** Пусть числа  $r_{\pm}$  заданы формулами (98). Если для пучка (93) выполнено свойство

$$4\|\mathcal{C}_{\mathcal{A}}\| \cdot \|\mathcal{B}_{\mathcal{A}}\| < 1, \quad (99)$$

то система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка  $[-r_-, r_-]$ , после проектирования на  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \ominus \text{Ker } \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$  образует  $p$ -базис в  $\mathcal{H}_1$  при

$$p > p_0 = (3^{-1} + (3/2)^{-1})^{-1} = 1.$$

При тех же  $p$  система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала  $(-r_+, r_+)$ , образует  $p$ -базис в  $\mathcal{H}$  (отметим, что при невыполнении свойства (99) соответствующие системы собственных элементов образуют  $p$ -базисы с конечным дефектом).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батыр, Э. И. Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость / Э. И. Батыр // Динамические системы. — 2001. — вып. 17. — С. 120–125.  
BATYR, E. I. (2013) Small motions of a system of joined bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Dynamic systems*. Vol. 17. p. 120–125.
2. Батыр, Э. И. Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью / Э. И. Батыр, О. А. Дудик, Н. Д. Копачевский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. — 2009. — Т. 49. — С. 15–29.  
BATYR, E. I., DUDIK, O. A., KOPACHEVSKY, N. D. (2009) Small oscillations of bodies with cavities filled with a viscous incompressible fluid. *Izvestiya VUZ. North-Caucasus region. Actual problems of mathematical hydrodynamics*. Vol. 49. p. 15–29.
3. Батыр, Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гироскопов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундам. направления. — 2013. — Т. 49. — С. 5–88.  
BATYR, E. I., KOPACHEVSKY, N. D. (2009) Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. Vol. 49. p. 5–88.

4. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — Москва: Наука, 1989. — 416 с.  
КОПАЧЕВСКИЙ, N. D., KREIN, S. G. (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems*. Moscow: Nauka. 416 p.
5. КОПАЧЕВСКИЙ, N. D., KREIN, S. G. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146)*. Birkhäuser Verlag. — Basel. — Boston. — Berlin. 444 p.
6. Азизов, Т. Я. Абстрактная формула Грина и её приложения / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ТНУ, 2011. — 136 с.  
AZIZOV, T. Ya., КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. (2011) *Abstract Green's formula and its applications*. Simferopol: TNU. 136 p.
7. AZIZOV, T. Ya., HARDT V., КОПАЧЕВСКИЙ, N. D., MENNICKEN R. (2003) On the Problem of Small Motions and Normal Oscillations of a Viscous Fluid in a Partially Filled Container. *Math. Nachr.* Vol. 248-249. p. 3–39.
8. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — Москва: Наука, 1967. — 464 с.  
KREIN, S. G. (1967) *Linear differential equations in Banach space*. Moscow: Nauka. 464 p.
9. Азизов, Т. Я. Приложения индефинитной метрики / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.  
AZIZOV, T. Ya., КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. (2014) *Applications of indefinite metrics*. Simferopol: DIAIPI. 276 p.
10. Копачевский, Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012. — 152 с.  
КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. (2012) *Integrodifferential equations of Volterra in Hilbert space: special course of lectures*. Simferopol: FLP “Bondarenko O.A.”. 152 p.
11. MOTIVIER, G. (1978) Valeurs propres d'operateurs definis par le restriction de systemes variationnelles a des sousespaces. *J. Math. Pures et Appl.* Vol. 57(2). p. 133-156.
12. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: Форма, 2009. — 127 с.  
КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. (2009) *Spectral theory of operator pencils*. Simferopol: Forma. 127 p.
13. Кожевников, А. Н. Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи / А. Н. Кожевников // Матем. заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 699–710.  
KOZHEVNIKOV, A. N. (1977) Splitted asymptotics of two sets of eigenvalues of an elliptic boundary value problem. *Mathematical Notes*. Vol. 22, no. 5. p. 699–710.

14. Абрамов, Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация / Ю. Ш. Абрамов. — Л.: Издательство ЛГУ, 1983. — 180 с.  
 ABRAMOV, Yu. Sh. (1983) *Variational methods in theory of operator pencils. Spectral optimizations*. Leningrad: LSU. 180 p.
15. Абрамов, Ю. Ш. Вариационные принципы для нелинейных задач на собственные значения / Ю. Ш. Абрамов // Функци. анализ и его прил. — 1973. — Т. 7, вып. 4. — С. 76–77.  
 ABRAMOV, Yu. Sh. (1973) Variational principles for nonlinear eigenvalue problems. *Functional analysis and its applications*. Vol. 7, no. 4. p. 76-77.
16. Войтицкий, В. И. О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченным снизу оператором потенциальной энергии / В. И. Войтицкий // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов конференции МИКМО – 2017. – 2017. (в печати)  
 VOYTITSKY, V. I. (2017) On full linear differential equation of second order in Hilbert space with main operator of dissipation and bounded below operator of potential energy *Proceedings of the conference MICMO-2017: mathematics, informatics, computer science, modelling*. (in print)
17. Войтицкий, В. И. Спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений линейных сильно демпфированных динамических систем / В. И. Войтицкий // Сборник материалов международной конференции «XXVIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017)». Секции 1–4. — 2017. — С. 32–34.  
 VOYTITSKY, V. I. (2017) Spectral problems generated by the problem of small motions of strong damped dynamical systems. *Materials of the conference XXVIII Crimean Autumn Mathematical School-symposium on spectral and evolution problems (KROMSH-2017)*. Sections 1–4. p. 32–34.
18. Пригорский, В. А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства / В. А. Пригорский // Успехи мат. наук.. — 1965. — Т. 20, № 5, вып. 125. — С. 231–236.  
 PRIGORSKY, V. A. (1965) On some classes of basis in Hilbert space. *Russian Mathematical Surveys*. Vol. 20, no. 5, issue 125. p. 231–236.
19. Копачевский, Н. Д. О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка  $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$  / Н. Д. Копачевский // Функциональный анализ и его приложения. — 1981. — Т. 15, вып. 2. — С. 77–78.  
 KOPACHEVSKY, N. D. (1981) On basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil  $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ . *Functional analysis and its applications*. Vol. 15, issue 2. p. 5–88.
20. Копачевский, Н. Д. О  $p$ -базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка  $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$  / Н. Д. Копачевский // Сборник научных трудов «Функциональный анализ и прикл. математика». — К.: Наукова думка, 1982. — С. 43–55.  
 KOPACHEVSKY, N. D. (1982) On  $p$ -basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil  $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ . *Proceedings "Functional analysis and applied mathematics"*. Kiev: Naukova dumka. p. 43–55.

УДК: 517.984.26, 517.984.5

MSC2010: 47A10, 35P10

## О КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

© Д. А. Загора

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО  
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295000, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
E-MAIL: dmitry.zkr@gmail.com

### ON ROOT ELEMENTS OF AN OPERATOR MATRIX.

Zakora D. A.

**Abstract.** Let  $H$  be a Hilbert space and let  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  be a selfadjoint positive definite operator,  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$  ( $q > 0$ ),  $\beta_l > 0$  ( $l = \overline{0, m}$ ),  $0 =: b_0 < b_1 < \dots < b_m$ .

Define  $\mathcal{H} := H \oplus (\oplus_{l=0}^m H)$ . The Hilbert space  $\mathcal{H}$  consists of elements of the form  $\xi := (v; w)^\tau := (v; (v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau)^\tau$ . Let an operator  $\mathcal{A}$  be given by the following formulae:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \\ \mathcal{Q} &:= (\beta_0^{1/2}I, \beta_1^{1/2}I, \dots, \beta_m^{1/2}I)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1I, \dots, b_mI), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^*w = \sum_{l=0}^m \beta_l^{1/2}v_l \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \end{aligned}$$

Let us denote by  $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$  and  $u_k = u_k(A^{-1})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) the  $k$ -th eigenvalue and corresponding eigenelement of the operator  $A^{-1}$  (i.e. the system  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  is an orthonormal basis of the Hilbert space  $H$ ).

Let  $g_k(\lambda)$  and  $g_\infty(\lambda)$  be given by

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{l=0}^m \beta_l - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

Let us denote by  $\gamma_p$  ( $p = \overline{1, m}$ ) the roots of the equation  $g_\infty(\lambda) = 0$ . Let  $\lambda_k^{(p)}$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ) denote the roots of the equation  $g_k(\lambda) = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

In non-degenerate case we prove the following theorem.

**Theorem.** Suppose that  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). Then the system  $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$  of eigenelements of the operator  $\mathcal{A}$  is defined by the following formulae

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

and forms a  $p$ -basis ( $p \geq 2q$ ) in the Hilbert space  $\mathcal{H}$ . The biorthogonal system has the form

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}; -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

In degenerate case we prove that the system of the root elements of the operator  $\mathcal{A}$  also forms a  $p$ -basis ( $p \geq 2q$ ) in the Hilbert space  $\mathcal{H}$ .

**Keywords:** operator matrix, spectrum, root element, basis, biorthogonal system.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  — самосопряженный и положительно определенный оператор,  $\beta_l > 0$  ( $l = \overline{0, m}$ ),  $0 =: b_0 < b_1 < \dots < b_m$ .

Определим гильбертово пространство  $\mathcal{H} := H \oplus (\oplus_{l=0}^m H)$ , состоящее из элементов вида  $\xi := (v; w)^\tau := (v; (v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau)^\tau$  (символ  $\tau$  означает транспонирование). В гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  определим оператор  $\mathcal{A}$  по следующей формуле:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \quad (1)$$

$$\mathcal{Q} := (\beta_0^{1/2} I, \beta_1^{1/2} I, \dots, \beta_m^{1/2} I)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi \in \mathcal{H} \mid v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w = \sum_{l=0}^m \beta_l^{1/2} v_l \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\},$$

где  $I, \mathcal{I}$  — единичные операторы в соответствующих пространствах. Всюду далее мы будем предполагать, что  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$  при некотором  $q > 0$ , где  $\mathfrak{S}_q(H)$  — множество компактных операторов, для которых  $s$ -числа суммируются со степенью  $q$ .

Операторы вида (1) возникают при изучении интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа с ядрами специального вида. Подобные уравнения применяются в некоторых задачах теории вязкоупругости. Например, в задаче о продольных колебаниях однородного стержня, в задаче о поперечных колебаниях неоднородной по толщине балки или пластины, в задаче о поперечных колебаниях ортотропной пластины из гомогенного полимера, армированного упругими нитями или

пленками (см. [1, гл. 6, § 23], а также указанную там литературу), в задаче о колебаниях идеальной релаксирующей жидкости, находящейся в невесомости (см. [2, гл. 11, § 11.6], [3]). Отметим здесь недавнюю монографию [4], которая, в частности, посвящена спектральному анализу функционально-дифференциальных уравнений.

### 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу о спектре оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad (2)$$

При  $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ , где  $\sigma(\mathcal{G})$  — спектр оператора  $\mathcal{G}$ , с задачей (2) свяжем спектральную задачу для операторного пучка  $L(\lambda)$ :

$$L(\lambda)u := [-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}]u = 0, \quad u \in H. \quad (3)$$

Можно проверить, что  $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$ , где  $\rho(\mathcal{A})$  — резольвентное множество оператора  $\mathcal{A}$ . Таким образом, задачи (2) и (3) эквивалентны.

**Определение 1.** (см. [5, гл. 2, § 11, с. 61]) Пусть  $\lambda_0$  — собственное значение (с.з.), а  $u_0$  — отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции  $L(\lambda)$ , то есть  $L(\lambda_0)u_0 = 0$ . Элементы  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  называют присоединенными к с.э.  $u_0$ , если  $\sum_{k=0}^j (k!)^{-1} L^{(k)}(\lambda_0)u_{j-k} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ). Число  $n$  называют длиной цепочки  $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$  из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Следующая лемма по аналогии с [5, гл. 2, § 12, следствие 12.4] установлена в [6].

**Лемма 1.** Пусть набор элементов  $\{\xi_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$  является цепочкой из с.п.э. задачи (2), отвечающей с.з.  $\lambda_0$ , тогда  $\{u_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}v_k\}_{k=0}^{n-1}$  — цепочка из с.п.э. задачи (3), отвечающая собственному значению  $\lambda_0$ .

Обратно, пусть набор элементов  $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$  — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (3), отвечающая с.з.  $\lambda_0$ , тогда набор  $\{\xi_k = (A^{-1/2}u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ , где  $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q}u_l$ , — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (2).

Пусть  $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$ ,  $u_k = u_k(A^{-1})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) —  $k$ -е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора  $A^{-1}$ . Тогда  $u_k$  — собственный элемент операторного пучка  $L(\lambda)$  и спектр задачи (3), а значит, и задачи (2), который может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Здесь и далее  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q}^*$  и  $\mathcal{G}$  мы будем понимать так же, как и вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в  $\mathbb{C}^{m+1}$ .

Определим характеристические функции

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{l=0}^m \beta_l - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через  $\gamma_p$  ( $p = \overline{1, m}$ ) корни уравнения  $g_\infty(\lambda) = 0$ . Простые геометрические рассуждения показывают, что  $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$  ( $p = \overline{1, m}$ ,  $b_0 := 0$ ),  $g'_\infty(\gamma_p) > 0$  ( $p = \overline{1, m}$ ).

Обозначим через  $\lambda_k^{(p)}$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ) корни уравнения  $g_k(\lambda) = 0$  при каждом  $k \in \mathbb{N}$ . Можно проверить, что это уравнение всегда имеет  $m$  действительных корней  $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$  ( $p = \overline{1, m}$ ) и еще два корня. Если  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m}$ ), то  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$ . Оставшиеся два корня  $\lambda_k^{(m+1)}$  и  $\lambda_k^{(m+2)}$  являются комплексно сопряженными, начиная с некоторого номера  $k_0$ . В силу конечной кратности собственных значений оператора  $A^{-1}$  легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров  $k \in \mathbb{N}$ , при которых характеристическое уравнение  $g_k(\lambda) = 0$  имеет кратные (действительные) корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (5) приводит к теореме.

**Теорема 1.** *Спектр оператора  $\mathcal{A}$  (или пучка  $L(\lambda)$ ) расположен в правой открытой полуплоскости и в  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на  $(m+2)$ -е серии  $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^\infty$  ( $p = \overline{1, m}$ ),  $\{\lambda_k^{(m+1)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(+i\infty)}\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\lambda_k^{(m+2)}\}_{k=1}^\infty := \{\lambda_k^{(-i\infty)}\}_{k=1}^\infty$  со следующим асимптотическим поведением:*

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(p)} &= \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} \lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad p = 1, 2, \dots, m, \\ \lambda_k^{(\pm i\infty)} &= \pm i\alpha^{1/2} \lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad \alpha := \sum_{l=0}^m \beta_l. \end{aligned}$$

## 2. О КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАТОРНОГО БЛОКА

2.1. **Некоторые леммы о системах векторов в  $\mathbb{C}^{m+2}$ .** В соответствии с леммой 1 собственные элементы оператора  $\mathcal{A}$ , после группировки по сериям (см. теорему 1),

могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_k^{(p)} &= (A^{-1/2}u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q}u_k)^\tau = (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k \equiv \\ &\equiv \left( \lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1 - \lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m - \lambda_k^{(p)}} \right)^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.** Пусть  $J := \text{diag}(1, -I)$  – матрица в  $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} &:= R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ R_{k,p} &:= \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

При всех  $p, q = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  имеют место следующие формулы:

$$(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0 \quad (\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}), \quad (J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \quad (7)$$

*Доказательство.* При  $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$  из (4), (5),  $g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$  и тождества Гильберта найдем, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= R_{k,p}R_{k,q} \left[ \lambda_k - ((\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(q)})^{-1} \mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[ \lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[ \lambda_k - \frac{1}{\lambda_k^{(q)} - \lambda_k^{(p)}} \left[ \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1} \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} \right] \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[ \lambda_k - \frac{1}{\lambda_k^{(q)} - \lambda_k^{(p)}} \left[ \overline{\lambda_k^{(q)}} \lambda_k - \lambda_k^{(p)} \lambda_k \right] \right] = 0. \end{aligned}$$

Далее, из (4) имеем

$$(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2 \left[ \lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2} \mathcal{Q} \right] = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. □

**Лемма 3.** Пусть  $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots, \varphi_k^{(m+2)})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) – матрица, столбцами которой являются векторы  $\varphi_k^{(p)}$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ). Имеют место следующие утверждения.

- 1) Существует  $C_1 > 0$  такое, что  $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_1$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ .
- 2) Если  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ), то  $\det M_k \neq 0$ .
- 3) В условиях пункта 2) существует  $C_2 > 0$  такое, что  $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_2$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Из теоремы 1 несложно вывести, что нормы  $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$  равномерно ограничены при  $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда и из оценки

$$\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[ \sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}$$

следует первое утверждение леммы.

Далее, с помощью формул (6), (7) из леммы 2 найдем, что

$$M_k^T J M_k = -\text{diag}(g'_k(\lambda_k^{(1)})R_{k,1}^2, g'_k(\lambda_k^{(2)})R_{k,2}^2, \dots, g'_k(\lambda_k^{(m+2)})R_{k,m+2}^2).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1} (\det M_k)^2 = \det M_k^T J M_k = (-1)^{m+2} \prod_{p=1}^{m+2} g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (6) и  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ), что

$$(\det M_k)^2 = -1 \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} \cdot \prod_{p=1}^m \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \neq 0.$$

Далее, с использованием (4), (5), теоремы 1 и (4) вычислим

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\det M_k)^2 = - \prod_{p=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} = -1.$$

Отсюда, из 1) и оценки  $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq |\det M_k|^{-1} \|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$  (см. [7, гл. 1, § 4, п. 2, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме.  $\square$

**Лемма 4.** Система векторов

$$\begin{aligned} \varphi_\infty^{(p)} &:= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} (0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m}, \\ \varphi_\infty^{(m+1)} &\equiv \varphi_\infty^{(+i\infty)} := 2^{-1/2} (1; +i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, \\ \varphi_\infty^{(m+2)} &\equiv \varphi_\infty^{(-i\infty)} := 2^{-1/2} (1; -i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, \quad \alpha = \sum_{l=0}^m \beta_l. \end{aligned} \tag{8}$$

является ортонормированным базисом в  $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится, как и в лемме 2, прямой проверкой с учетом (4), (5),  $g_\infty(\gamma_p) = 0$  и тождества Гильберта.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \dots, \varphi_\infty^{(m+2)})$  — матрица, столбцами которой являются векторы  $\varphi_\infty^{(p)}$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ). Тогда  $M_\infty^* = M_\infty^{-1}$ .

*Доказательство.* Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 4.  $\square$

**Замечание.** Система (8) является предельной для системы (6) при  $k \rightarrow +\infty$ . Далее из системы (8) и собственных элементов оператора  $A$  будет сконструирован ортонормированный базис пространства  $\mathcal{H}$ . Дальнейшая идея состоит в том, чтобы оценить уклонение системы собственных (а в вырожденном случае — системы корневых) элементов оператора  $\mathcal{A}$  от построенного ортонормированного базиса пространства  $\mathcal{H}$ .

В связи с этим замечанием докажем следующую вспомогательную лемму.

**Лемма 6.** *Существует  $C > 0$  такое, что при всех  $k \in \mathbb{N}$*

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C[\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}.$$

*Доказательство.* Как и в лемме 3, воспользуемся следующей формулой

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[ \sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Из (6), (8), теоремы 1 при  $p = \overline{1, m}$  и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)} &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left( \lambda_k^{1/2}; \left[ (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} - (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left( \lambda_k^{1/2}; [\lambda_k^{(p)} - \gamma_p] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2} \cdot [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left( 1; \lambda_k^{1/2} \left[ \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} + O(\lambda_k) \right] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow +\infty$ . Отсюда следует, что

$$\exists C_p > 0: \quad \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}} \leq C_p [\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Из (6), (8), теоремы 1 при  $p = m + 1$  и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(m+1)} - \varphi_\infty^{(m+1)} &= \frac{1}{2^{1/2}} \left( 0; \left[ \frac{1}{\lambda_k^{1/2}} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})^{-1} - i\alpha^{-1/2} I \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}} \left( 0; \left[ I - i\alpha^{-1/2} \lambda_k^{1/2} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \left( 0; \left[ \frac{i\alpha^{-3/2}}{2} \sum_{l=1}^m k_l I - i\alpha^{-1/2} \mathcal{G} + O(\lambda_k^{1/2}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow +\infty$ . Аналогичные вычисления справедливы и при  $p = m + 2$ . Таким образом, имеют место неравенства (10) при  $p = m + 1$  и  $p = m + 2$ . Теперь из (9) и (10) следует утверждение леммы.  $\square$

2.2. О  $p$ -базисности системы корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$ . Следствием лемм 4 и 5 является следующее утверждение.

**Лемма 7.** Система элементов  $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_{\infty}^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$  является ортонормированным базисом пространства  $\mathcal{H}$ .

*Доказательство.* Ортонормированность введенной системы следует из леммы 4 и ортонормированности системы  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Покажем, что введенная система полна в  $\mathcal{H}$ . Пусть существует  $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^T \in \mathcal{H}$  такой, что  $(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0$  при всех  $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Последнее означает, что

$$M_{\infty}^T ((u_k, v)_H; (u_k, v_0)_H; (u_k, v_1)_H; \dots; (u_k, v_m)_H)^T = 0$$

при  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда, из леммы 5 и из полноты системы  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  в пространстве  $H$  тогда получим, что  $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$ . То есть  $\xi = 0$ .  $\square$

С помощью набора матриц  $S_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), действующих в  $\mathbb{C}^{m+2}$ , определим оператор

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} (\xi_{k,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{k,\infty}^{(m+2)}) S_k \begin{pmatrix} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(1)})_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ (\xi, \xi_{k,\infty}^{(m+2)})_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \sum_{p=1}^{m+2} \xi_{k,\infty}^{(p)} \sum_{q=1}^{m+2} S_k^{pq} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(q)})_{\mathcal{H}} \right]$$

и будем писать при этом  $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$ .

**Лемма 8.** Имеют место следующие утверждения.

- 1)  $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$ .
- 2) Пусть  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Если  $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$ , то  $\mathcal{S}^* \longleftrightarrow S_k^*$ .
- 3) Пусть  $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , тогда  $\mathcal{S}\mathcal{T} \longleftrightarrow S_k T_k$ . В частности,  $\mathcal{S}^{-1} \longleftrightarrow S_k^{-1}$ .

*Доказательство.* Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы  $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы. О  $p$ -базисности специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора  $\mathcal{A}$  в невырожденном случае. И о  $p$ -базисности системы корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  в вырожденном случае.

**Теорема 2.** Пусть  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). Тогда система собственных элементов  $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$  оператора  $\mathcal{A}$  образует  $p$ -базис пространства  $\mathcal{H}$  при  $p \geq 2q$  (напомним, что  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$  при  $q > 0$ ).

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_{\infty}^* M_k$  и покажем, что  $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} = \xi_l^{(q)}$  при  $q = \overline{1, m+2}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Учитывая, что  $S_k^{pq} = (\varphi_{\infty}^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}$  и  $(\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} = 0$  при  $l \neq k$ ,

ВЫЧИСЛИМ

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} &= \left(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\right) M_\infty^* M_l \left(0; \dots; 0; 1_q; 0; \dots; 0\right)^\tau = \\ &= \left(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\right) \left(\overline{(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}; \dots; \overline{(\varphi_\infty^{(m+2)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\right)^\tau = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} \overline{(\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{p=1}^{m+2} (\varphi_l^{(q)}, \varphi_\infty^{(p)})_{\mathbb{C}^{m+2}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{l,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{k,\infty}^{(p)} = \xi_l^{(q)}. \end{aligned}$$

Из леммы 8, условия  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ), лемм 3 и 5 следует, что оператор  $\mathcal{S}$  непрерывно обратим:  $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Отсюда и из леммы 7 тогда следует, что система элементов  $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$  — базис Рисса пространства  $\mathcal{H}$ . Для доказательства теоремы остается показать, что  $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$ , где  $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  при  $p \geq 2q$ .

Положим  $T_k := M_k - M_\infty$ , тогда с учетом лемм 5 и 8 получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longleftrightarrow M_\infty^* M_k = M_\infty^* (M_\infty + T_k) = I + M_\infty^* T_k \longleftrightarrow \mathcal{I} + \mathcal{T}, \\ \mathcal{T}^* \mathcal{T} &\longleftrightarrow (T_k^* M_\infty) (M_\infty^* T_k) = T_k^* T_k. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\lambda_k((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2})$  и  $\lambda_k((T^* T)^{1/2})$  собственные значения оператора  $(\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}$  и матрицы  $(T^* T)^{1/2}$  соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 7 получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_r^p((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} \lambda_l^p((T_k^* T_k)^{1/2}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} [\lambda_l(T_k^* T_k)]^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_{\max}(T_k^* T_k)]^{p/2} = (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k^* T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^p \leq (m+2) C^p \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_k(A^{-1})]^{p/2} < +\infty \end{aligned}$$

при  $p/2 \geq q$ , так как  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ . Следовательно,  $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  при  $p \geq 2q$ .  $\square$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором  $k \in \mathbb{N}$  уравнение  $g_k(\lambda) = 0$  имеет кратный корень. В этом случае может быть один либо два двукратных корня, либо один трехкратный корень.

Разберем случай двукратного корня. В этом случае при некоторых  $k \in \mathbb{N}$  (таких номеров конечное количество) будет либо  $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$ , либо  $\lambda_k^{(p_1)} = \lambda_k^{(m+1)}$ ,

$\lambda_k^{(p_2)} = \lambda_k^{(m+2)}$  при некоторых  $p_1, p_2 \in \{1, \dots, m\}$ . Не ограничивая общности, предположим первую ситуацию. Пусть  $u$  — это первый присоединенный элемент к собственному элементу  $u_k$  пучка  $L(\lambda)$  в точке  $\lambda_k^{(m+2)}$  (см. определение 1). Тогда  $L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k = 0$  и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = L(\lambda_k^{(m+2)})u = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к  $u_k$  элемента можно взять элемент  $u_k$ .

Пусть  $\xi_{k0}^{(m+2)} = (\lambda_k^{1/2} u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q} u_k)^\tau$  — собственный элемент оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_k^{(m+2)}$  (см. лемму 1). Вычислим в соответствии с леммой 1 присоединенный элемент  $\eta_1$  оператора  $\mathcal{A}$ . Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что  $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q} u_k)^\tau$ . Следовательно, оператор  $\mathcal{A}$  имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)} u_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)} u_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором  $k \in \mathbb{N}$  уравнение  $g_k(\lambda) = 0$  имеет трехкратный корень. В этом случае при некотором  $p \in \{1, \dots, m\}$  будет  $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$ . Пусть  $u$  — это второй присоединенный элемент к собственному элементу  $u_k$  пучка  $L(\lambda)$  в точке  $\lambda_k^{(p)}$ . Тогда  $L''(\lambda_k^{(p)})u_k = g''_k(\lambda_k^{(p)})u_k = g''_\infty(\lambda_k^{(p)})u_k = 0$ ,  $L'(\lambda_k^{(p)})u_k = g'_k(\lambda_k^{(p)})u_k = 0$  и

$$\begin{aligned} 2^{-1} L''(\lambda_k^{(p)})u_k + L'(\lambda_k^{(p)})u_k + L(\lambda_k^{(p)})u &= \\ &= 2^{-1} g''_\infty(\lambda_k^{(p)})u_k + g'_k(\lambda_k^{(p)})u_k + L(\lambda_k^{(p)})u = L(\lambda_k^{(p)})u = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к  $u_k$  элемента можно взять элемент  $u_k$ .

Вычислим, в соответствии с леммой 1, первый  $\eta_1$  и второй  $\eta_2$  присоединенные элементы оператора  $\mathcal{A}$ . Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также  $\xi_{k0}^{(p)}$ ,  $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$ ,  $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k2}^{(p)} u_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  нормируется следующим образом. Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из леммы 1. Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (11) или (12) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора  $\mathcal{A}$ , имеющих один или два присоединенных элемента, может быть лишь конечное количество.

**Теорема 3.** Система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$ , нормированных специальным образом, образует  $p$ -базис пространства  $\mathcal{H}$  при  $p \geq 2q$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  полна в  $\mathcal{H}$ . Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора  $\mathcal{A}$  есть одно собственное значение  $\lambda_s^{(p)}$ , которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Пусть собственному значению  $\lambda_s^{(m+2)}$  оператора  $\mathcal{A}$  отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (11). Предположим, что рассматриваемая система не полна в  $\mathcal{H}$  и существует  $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^T \in \mathcal{H}$  такой, что

$$\begin{aligned} (\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\ (\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m}, \quad (\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Первая строчка в (13) означает, что

$$M_k^T((u_k, v)_H; (u_k, v_0)_H; (u_k, v_1)_H; \dots; (u_k, v_m)_H)^T = 0$$

при  $k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$  (см. лемму 3). Отсюда следует, что

$$(u_k, v)_H = (u_k, v_0)_H = \dots = (u_k, v_m)_H = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{s\}. \tag{14}$$

Вторая строчка в (13) означает, что

$$M_{s,1}^T((u_s, v)_H; (u_s, v_0)_H; (u_s, v_1)_H; \dots; (u_s, v_m)_H)^T = 0,$$

где  $M_{s,1} = M_{s,1}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \dots, \varphi_s^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})$  — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что  $\det M_{s,1} \neq 0$ , тогда из последней системы, соотношений (14) и полноты в  $H$  системы  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  получим, что  $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$ . То есть  $\xi = 0$ .

Пусть, как и в лемме 2,  $J = \text{diag}(1, -I)$ . Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s0}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, & (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{2}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G} - \lambda)^{-n}(\mathcal{G} - \mu)^{-1} &= \frac{1}{(\mu - \lambda)^n}(\mathcal{G} - \mu)^{-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mu - \lambda)^{k+1}}(\mathcal{G} - \lambda)^{-(n-k)}, \\ \mu, \lambda &\in \rho(\mathcal{G}), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

С использованием соотношений  $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0 \quad (p = \overline{1, m})$  (см. (5)),  $g_s(\lambda_s^{(m+2)}) = g_s'(\lambda_s^{(m+2)}) = 0$ , формулы (16) при  $n = 2$  можно найти, что при всех  $p = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^* \left[ \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} \right] \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \left[ \frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15) и (17) найдем, что

$$M_{s,1}^\tau J M_{s,1} = \begin{pmatrix} -g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}) \end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}(\det M_{s,1})^2 = \det M_{s,1}^\tau J M_{s,1} = (-1)^{m+1} \left[ \frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \right]^2 \prod_{p=1}^m g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.$$

Следовательно,  $\det M_{s,1} \neq 0$ .

2. Пусть теперь собственному значению  $\lambda_s^{(p)}$  оператора  $\mathcal{A}$  отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (12). Не ограничивая общности, можно считать, что  $p = m$ . Предположим, что система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  не полна в  $\mathcal{H}$  и существует  $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau \in \mathcal{H}$  такой, что

$$\begin{aligned} (\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\ (\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (\xi_{s0}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s2}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Первая строчка в (18), как и выше, влечет (14). Вторая строчка в (18) означает, что

$$M_{s,2}^\tau ((u_s, v)_H; (u_s, v_0)_H; (u_s, v_1)_H; \dots; (u_s, v_m)_H)^\tau = 0,$$

где  $M_{s,2} = M_{s,2}(\varphi_s^{(1)}, \dots, \varphi_s^{(m-1)}, \varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})$  — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что  $\det M_{s,2} \neq 0$ , тогда из последней системы, соотношений (14) и полноты в  $H$  системы  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  получим, как и выше, что  $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$  и, значит,  $\xi = 0$ .

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \\ (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}), \quad (J\varphi_{s2}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}), \\ (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь последнее соотношение выводится так же, как и в (17). Далее, с использованием соотношений  $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$  ( $p = \overline{1, m-1}$ ) (см. (5)),  $g_s(\lambda_s^{(m)}) = g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$ , формулы (16) при  $n = 3$  можно найти, что при всех  $p = \overline{1, m-1}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3} \mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3} (\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* \left[ \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} \right] \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \left[ \frac{\lambda_s^{(p)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) найдем, что

$$M_{s,2}^T J M_{s,2} = \begin{pmatrix} -g'_s(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g'_s(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}) \end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}(\det M_{s,2})^2 = \det M_{s,2}^T J M_{s,2} = (-1)^{m-1} \left[ \frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \right]^3 \prod_{p=1}^{m-1} g'_s(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.$$

Таким образом,  $\det M_{s,2} \neq 0$  и система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  полна в  $\mathcal{H}$ .

**3.** Построим теперь, как и в теореме 2, оператор  $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$  с заменой вырожденных матриц  $M_s$  на какие либо невырожденные. При этом оператор  $\mathcal{S}$  будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде  $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$ , где  $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  ( $p \geq 2q$ ), так как вырожденных матриц  $M_s$  может быть лишь конечное количество. Таким образом, система  $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$  есть  $p$ -базис ( $p \geq 2q$ ) пространства  $\mathcal{H}$ , который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$  лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора  $\mathcal{A}$ , учитывая ее полноту, есть также  $p$ -базис ( $p \geq 2q$ ) пространства  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**2.3. Построение биортогональной системы в невырожденном случае.** В качестве следствия из леммы 2 и теоремы 2 сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть  $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$  ( $p = \overline{1, m+2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ). Тогда система

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора  $\mathcal{A}$  образует  $p$ -базис пространства  $\mathcal{H}$  при  $p \geq 2q$ , согласно теореме 2, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}; -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Доказательство.* Теорема доказывается непосредственной проверкой.  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказаны теоремы о  $p$ -базисности системы корневых элементов операторного блока специального вида. В случае, когда собственные элементы изучаемого оператора не имеют присоединенных элементов, построена система, биортогональная к системе собственных элементов.

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — М.: Наука, 1970. — 280 с.  
ILUSHIN, A. A. and POBEDRIA, B. E. (1970) *Basic Mathematical Thermo-viscoelasticity*. Moscow: Nauka.
2. КОПАЧЕВСКИЙ, N. D. and КРЕЙН, S. G. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag.
3. ЗАКОРА, D. A. (2011) A symmetric model of ideal rotating relaxing fluid. *Journal of Mathematical Sciences*. 174, No. 4. p. 515-536.
4. Власов, В. В. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В. В. Власов, Н. А. Раутиан. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 488 с.  
VLASOV, V. V. and RAUTIAN, N. A. (2016) *Spectral Analysis of Functional Differential Equations*. Moscow: MAKS Press.
5. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.  
MARKUS, A. S. (1986) *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*. Kishinev: Shtiinca.
6. Загора, Д. А. Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: РУДН, 2015. — Т. 57. — С. 31–64.  
ZAKORA, D. A. (2015) Operator approach to the Illushin model of viscoelastic body of parabolic type. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. Vol. 57. p. 31-64.
7. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.  
KATO, T. (1972) *Perturbation Theory for Linear Operators*. Moscow: Mir.

УДК: 517.958

MSC2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРТОПРОЕКТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМОЙ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ТРЕХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД

© Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *kopachevsky@crimea.edu, kozirno@gmail.com*

**FORMULAS FOR ORTHOGONAL PROJECTORS GENERATED BY THE PROBLEM ON  
SMALL MOTIONS OF THREE VISCOELASTIC FLUIDS IN A STATIONARY CONTAINER.**

**Kopachevsky N. D., Syomkina E. V.**

**Abstract.** In the paper, we consider the problem on small motions of three viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the [1]. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky and his co-authors works [2, 3, 4]. Namely, problem on small movements of two viscoelastic fluids has already investigated in [2].

We can apply an operator approach of mentioned work to the initial-boundary-value problem generated by the problem of small motions of three(or more) viscoelastic fluids in a stationary container.

Studying of this problem shows us that some complications appear when we use the method of orthogonal projection. This complications arise for the reason that fluid with two (lower and upper) free boundaries appears in the case of problem for three fluids. Existence of such fluid lead us to new more complicated auxiliary problems.

The aim of this paper is to get the formulas for orthogonal projectors on the spaces generated by the problem.

This paper is organized as follows. After introduction in section 2 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness conditions, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section, we receive the law of full energy balance and choose the functional spaces generated by the problem. To apply of orthogonal projection method we need to get orthogonal projectors on corresponding spaces. The law of action of the first of them we receive in section 3. To get this formula we need to solve the auxiliary transmission problem. This problem lead us to three Zaremba problems (a separate problem for each fluid). Let us remark that Zaremba problem corresponding to the fluid with two free boundaries is more complicated then others two. To solve this problem we need to search solution as the sum of two functions. In other words, we have to solve two Zaremba problems instead of one. In section 4

we obtain the law of action of the second orthogonal projector. The three second type auxiliary S.G. Krein problems appear in the process of reasoning. It is obvious that the problem for the fluid with two free boundaries is more complicated as before. In section 5 we conclude that operator approach lets us to realize the transition from the initial-boundary-value problem to an operator differential equation in sum of Hilbert spaces. Note that properties of main operator of this problem are exactly the same that the properties of main operator arising for problem of two fluids. This fact lets us to consider that all solvability statements proved for the problem of two fluids are true for the problem of three fluids, too.

Finally, note also that this results can be extend to the case of any number of viscoelastic fluids in a stationary container.

**Keywords:** *orthogonal projector, viscoelastic fluid, space of solenoidal fields, hydrodynamic system.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [2] изучена проблема малых движений двух вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта (см., например, [1]), заполняющих неподвижный сосуд. Для исследования этой задачи используется метод ортогонального проектирования, который позволяет осуществить в операторной форме переход от исходной начально-краевой задачи к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра, а затем и для дифференциального уравнения в сумме гильбертовых пространств. Далее, к полученной задаче применяется операторный подход (см. [5]), который позволяет доказать теоремы о существовании и единственности обобщённого решения для исходной начально-краевой задачи. Схема рассуждений, использованная в [2], может быть применена и для случая, когда в сосуде находится больше двух жидкостей.

Исследование проблемы малых движений трёх вязкоупругих жидкостей показывает, что некоторые усложнения возникают уже на этапе ортогонального проектирования исходной задачи. А именно, наличие жидкости с двумя свободными границами (которой не было в случае двух жидкостей) приводит к возникновению новых более сложных задач в процессе получения формул для ортопроекторов.

Целью данной работы — получить формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трёх вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫБОР ПРОСТРАНСТВ

Будем считать, что три вязкоупругие жидкости модели Олдройта заполняют произвольный сосуд  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  соответственно с горизонтальными границами раздела  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (см. рисунок 1). Обозначим через  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  те части границы  $\partial\Omega$ , которые примыкают к первой, второй и третьей жидкостям соответственно.

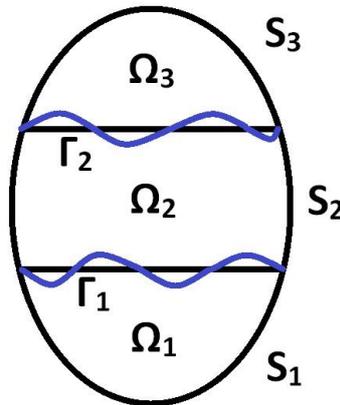


Рис. 1

Введём декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  таким образом, чтобы ось  $Ox_3$  была направлена вверх, т. е. против действия однородного гравитационного поля. Тогда ускорение гравитационного поля  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ ,  $g > 0$ , а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_{0j} - \rho_k g x_3, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

где  $\rho_k$  — плотности жидкостей, а  $p_{0j}$  — давления на границах раздела  $\Gamma_j$ .

Рассмотрим малые движения системы из трёх жидкостей, близкие к состоянию покоя. Пусть  $\vec{u}_k(t, x)$  — поля малых скоростей, а  $p_k(t, x)$  — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см. (1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил  $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ .

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [4, с. 318, 342–343]):

$$\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{v}_k + \rho_k \vec{f}_k(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad (2)$$

$$\vec{v}_k(t, x) = \vec{u}_k(t, x) + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \vec{u}_k(s, x) ds =: I_{0,k}(t) \vec{u}_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

где  $\mu_k > 0$  — динамические вязкости жидкостей,  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\beta_k > 0$  — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта,  $\vec{f}_k(t, x) := \vec{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$ , а  $\Delta$  — трёхмерный оператор Лапласа. Для вязких жидкостей, как известно, на твёрдых стенках  $S_k$  сосуда должны выполняться условия прилипания, т. е.

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = \overline{1, 3}; \quad (4)$$

кроме того, для каждой жидкости задано поле скоростей в начальный момент времени

$$\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x) \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

Выясним, какие условия выполняются на границах раздела  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Для этого введём функции вертикального отклонения  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , которые описывают малые перемещения границ раздела  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  между жидкостями. Тогда, учитывая условия сохранения объёма жидкостей, на границе  $\Gamma_1$  имеем

$$x_3 =: \zeta_1(t, x_1, x_2), \quad \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 = 0, \quad (6)$$

кроме того, на  $\Gamma_1$  выполнено условие непрерывности полей скоростей:

$$\vec{u}_1(t, x) = \vec{u}_2(t, x). \quad (7)$$

Кинематическое условие на  $\Gamma_1$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = (\vec{u}_1 \cdot \vec{n})_{\Gamma_1} =: \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = (\vec{u}_2 \cdot \vec{n})_{\Gamma_1} =: \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \quad \vec{n} = \vec{e}_3; \quad (8)$$

символом  $\gamma_{n,k}$ ,  $k = 1, 2$ , обозначена операция взятия нормального следа на  $\Gamma_1$ , т. е. следа нормальной компоненты поля скорости.

Сформулируем теперь динамические условия на  $\Gamma_1$ . Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на  $\Gamma_1$  приводят к следующим соотношениям: на  $\Gamma_1$  касательные напряжения (т. е. вдоль  $\Gamma_1$ ) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т. е. вдоль оси  $Ox_3$ ) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad j = 1, 2, \quad \tau_{kl}(\vec{u}) := \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}, \quad k, l = \overline{1, 3} \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим ещё, что на  $\Gamma_1$  выполняются начальное условие для функции  $\zeta_1$  и условие непрерывности полей скоростей в начальный момент времени:

$$\vec{u}_1^0(x) \equiv \vec{u}_2^0(x), \quad \zeta_1(0, x) = \zeta_1^0(x). \quad (10)$$

Рассуждая аналогичным образом, выпишем условия на границе раздела  $\Gamma_2$ .

Условия непрерывности полей скоростей и сохранения объёма:

$$\vec{u}_2(t, x) = \vec{u}_3(t, x), \quad x_3 =: \zeta_2(t, x_1, x_2), \quad \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 = 0. \quad (11)$$

Кинематическое условие:

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = (\vec{u}_2 \cdot \vec{n})_{\Gamma_2} =: \gamma_{n,2} \vec{u}_2 = (\vec{u}_3 \cdot \vec{n})_{\Gamma_2} =: \gamma_{n,3} \vec{u}_3, \quad \vec{n} = \vec{e}_3. \quad (12)$$

Динамические условия:

$$\begin{aligned} \mu_2 \tau_{j3}(\vec{v}_2) &= \mu_3 \tau_{j3}(\vec{v}_3), \quad j = 1, 2, \\ [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{v}_2)] - [-p_3 + \mu_3 \tau_{33}(\vec{v}_3)] &= -g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Начальное условие для  $\zeta_2$  и условие непрерывности полей скоростей в начальный момент времени:

$$\vec{u}_2^0(x) \equiv \vec{u}_3^0(x), \quad \zeta_2(0, x) = \zeta_2^0(x). \quad (14)$$

Будем считать, что задача (2)-(14) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Учтём, что направление внешней нормали на  $\Gamma_1$  для области  $\Omega_1$  и на  $\Gamma_2$  для области  $\Omega_2$  будет  $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$ , а на  $\Gamma_1$  для  $\Omega_2$  и на  $\Gamma_2$  для области  $\Omega_3$  — соответственно  $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{e}_3$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) &:= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega_1} \left( \sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\vec{\eta}_1) \overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \vec{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \Delta \vec{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^3 \eta_{1,j} \overline{(\mu_1 \tau_{j,3}(\vec{u}_1) - p_1 \delta_{j3})} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \vec{\eta}_1 = \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1);$$

$$\begin{aligned} \mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{u}_2) &:= \frac{1}{2} \mu_2 \int_{\Omega_2} \left( \sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\vec{\eta}_2) \overline{\tau_{jl}(\vec{u}_2)} \right) d\Omega_2 = \\ &= \int_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{(-\mu_2 \Delta \vec{u}_2 + \nabla p_2)} d\Omega_2 - \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^3 \eta_{2,j} \overline{(\mu_2 \tau_{j,3}(\vec{u}_2) - p_2 \delta_{j3})} d\Gamma_1 + \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^3 \eta_{2,j} \overline{(\mu_2 \tau_{j,3}(\vec{u}_2) - p_2 \delta_{j3})} d\Gamma_2, \quad \operatorname{div} \vec{\eta}_2 = \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_2); \\
 & \mu_3 E_3(\vec{\eta}_3, \vec{u}_3) := \frac{1}{2} \mu_3 \int_{\Omega_3} \left( \sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\vec{\eta}_1) \overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_3 = \\
 & = \int_{\Omega_3} \vec{\eta}_3 \cdot \overline{(-\mu_3 \Delta \vec{u}_3 + \nabla p_3)} d\Omega_3 - \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^3 \eta_{1,j} \overline{(\mu_3 \tau_{j,3}(\vec{u}_3) - p_3 \delta_{j3})} d\Gamma_2, \quad (17) \\
 & \operatorname{div} \vec{\eta}_3 = \operatorname{div} \vec{u}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \vec{\eta}_3 = \vec{u}_3 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_3).
 \end{aligned}$$

Далее, умножая обе части (2) слева на  $\vec{u}_k$ , интегрируя полученные соотношения по  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , и складывая результаты, а затем используя формулы Грина (15)-(17), а также граничные условия задачи (4)-(14), получаем соотношение

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 \right\} = \\
 & = - \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k.
 \end{aligned}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Исходя из того, что все слагаемые в (2) должны быть конечны, учитывая кинематические условия и условия непрерывности полей скоростей на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , осуществим выбор функциональных пространств для решения задачи.

С учётом условий (8), (12) будем рассматривать пространство, составленное из набора троек векторных полей  $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$ :

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \left\{ \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) : \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = \gamma_{n,2} \vec{u}_2 \quad (\Gamma_1), \quad \gamma_{n,2} \vec{u}_2 = \gamma_{n,3} \vec{u}_3 \quad (\Gamma_2) \right\}, \quad (18)$$

которое является подпространством в пространстве  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  с нормой

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k d\Omega_k.$$

Отметим, что  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  — ортогональная сумма трёх пространств

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k),$$

где каждое  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$  — пространство соленоидальных функций с нулевыми нормальными компонентами полей скоростей на твёрдой стенке  $S_k$ :

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \gamma_{n,k} \vec{u}_k := \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \text{ (на } S_k) \right\}.$$

Принимая во внимание также условия (6), (11), введём ещё пространство

$$\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) := \left\{ \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_1 \vec{u}_1 = \gamma_2 \vec{u}_2 \text{ (}\Gamma_1), \gamma_2 \vec{u}_2 = \gamma_3 \vec{u}_3 \text{ (}\Gamma_2) \right\}, \quad (19)$$

$$\gamma_1 \vec{u}_1 := \vec{u}_1|_{\Gamma_1} = \vec{u}_2|_{\Gamma_1} =: \gamma_2 \vec{u}_2, \quad \gamma_3 \vec{u}_3 := \vec{u}_3|_{\Gamma_2}.$$

Оно является подпространством пространства  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  с нормой

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k).$$

Здесь  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  — также ортогональная сумма пространств

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k),$$

каждое из которых является пространством соленоидальных функций, равных нулю на твёрдой стенке:

$$\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) := \left\{ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \vec{u}_k = \vec{0} \text{ (на } S_k) \right\}.$$

Будем также считать, что вертикальные отклонения границ разделов жидкостей

$$\zeta_1 \in L_{2,\Gamma_1} := L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}, \quad \zeta_2 \in L_{2,\Gamma_2} := L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}.$$

**Замечание 1.** Отметим, что пространства  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  и  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ , а также  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  и  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$  образуют гильбертовы пары пространств.  $\square$

### 3. ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРВОГО ОРТОПРОЕКТОРА

Получим закон действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega). \quad (20)$$

Для этого выясним, каково ортогональное дополнение в  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  к подпространству  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ . Учтём структуру подпространства  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ :

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{J}_0(\Omega_3) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_3}(\Omega_3)$$

и заметим, что для элементов из  $\vec{J}_0(\Omega_1)$ ,  $\vec{J}_0(\Omega_2)$  и  $\vec{J}_0(\Omega_3)$  нормальные компоненты полей равны нулю на всей границе. Отсюда получаем, что  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$  имеет структуру

$$\begin{aligned} \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) &= \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{J}_0(\Omega_3) \oplus \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega) \\ \vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega) &:= \left\{ \vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} : \vec{u}_k = \frac{1}{\rho_k} \nabla \varphi_k, k = \overline{1,3}, \right. \\ &\quad \Delta \varphi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_k) \\ &\quad \left. \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_1) \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_2) \right\}. \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в [2, п. п. 4.1], позволяют доказать следующее утверждение.

**Лемма 1.** Элементы из  $(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega))^\perp$  образуют множество

$$\begin{aligned} (\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega))^\perp &:= \left\{ (\nabla \psi_1; \nabla \psi_2; \nabla \psi_3) : \Delta \psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k) \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_k) \right. \\ &\quad \left. \rho_1 \psi_1 - \rho_2 \psi_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2 \psi_2 - \rho_3 \psi_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2) \right\}. \quad \square \end{aligned} \tag{21}$$

Опираясь на представление (21), получим закон действия ортопроектора  $P_0$  из (20). Для любого  $\vec{u} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$  должно быть

$$P_0 \vec{u} = P_0 \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} - \{\nabla \psi_1; \nabla \psi_2; \nabla \psi_3\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega). \tag{22}$$

Для отыскания  $\{\nabla \psi_1; \nabla \psi_2; \nabla \psi_3\}$  сформулируем следующую вспомогательную задачу сопряжения для элементов из  $(\vec{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega))^\perp$ :

$$\Delta \psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_k), \tag{23}$$

$$\rho_1 \psi_1 = \rho_2 \psi_2 =: \tilde{\psi}_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2 \psi_2 = \rho_3 \psi_3 =: \tilde{\psi}_2 \text{ (на } \Gamma_2), \tag{24}$$

где  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$  — заданные функции.

Введём операторы следов  $\gamma_1, \gamma_{21}, \gamma_{22}$  и  $\gamma_3$ , действующие по законам:

$$\psi_1|_{\Gamma_1} = \gamma_1 \psi_1, \quad \gamma_1 : \Omega_1 \rightarrow \Gamma_1, \quad \psi_2|_{\Gamma_1} = \gamma_{21} \psi_2, \quad \gamma_{21} : \Omega_2 \rightarrow \Gamma_1,$$

$$\psi_2|_{\Gamma_2} = \gamma_{22} \psi_2, \quad \gamma_{22} : \Omega_2 \rightarrow \Gamma_2, \quad \psi_3|_{\Gamma_2} = \gamma_3 \psi_3, \quad \gamma_3 : \Omega_3 \rightarrow \Gamma_2.$$

Тогда условия (24) примут вид

$$\rho_1 \gamma_1 \psi_1 = \rho_2 \gamma_{21} \psi_2 =: \tilde{\psi}_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2 \gamma_{22} \psi_2 = \rho_3 \gamma_3 \psi_3 =: \tilde{\psi}_2 \text{ (на } \Gamma_2). \tag{25}$$

Будем рассматривать задачу (23),(25) как задачу Зарембы для каждой из областей  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Тогда задача

$$\Delta\psi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \gamma_1\psi_1 = \rho_1^{-1}\tilde{\psi}_1, \quad \int_{\Gamma_1} \tilde{\psi}_1 d\Gamma_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1),$$

при условии  $\tilde{\psi}_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$ , имеет единственное решение

$$\nabla\psi_1 = G_1(\rho_1^{-1}\tilde{\psi}_1), \quad (26)$$

где  $G_1$  — линейный ограниченный оператор, действующий из  $H_{\Gamma_1}^{1/2}$  в  $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ . Аналогичным образом для задачи

$$\Delta\psi_3 = 0 \text{ (в } \Omega_3), \quad \frac{\partial\psi_3}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_3), \quad \gamma_3\psi_3 = \rho_3^{-1}\tilde{\psi}_2, \quad \int_{\Gamma_2} \tilde{\psi}_2 d\Gamma_2 = 0,$$

при условии  $\tilde{\psi}_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$ , имеется решение

$$\nabla\psi_3 = -G_3(\rho_3^{-1}\tilde{\psi}_2), \quad G_3 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_2}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_3}(\Omega_3)). \quad (27)$$

Решение задачи в области  $\Omega_2$  будем искать в виде суммы

$$\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22}.$$

Тогда задача для  $\psi_{21}$

$$\Delta\psi_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\psi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \gamma_{21}\psi_{21} = \rho_2^{-1}\tilde{\psi}_1 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \gamma_{22}\psi_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$

будет иметь решение

$$\nabla\psi_{21} = -G_{21}(\rho_2^{-1}\tilde{\psi}_1), \quad G_{21} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)), \quad (28)$$

при условии  $\tilde{\psi}_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$ , а задача для  $\psi_{22}$

$$\Delta\psi_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\psi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \gamma_{22}\psi_{22} = \rho_2^{-1}\tilde{\psi}_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \gamma_{21}\psi_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_1),$$

является решением

$$\nabla\psi_{22} = G_{22}(\rho_2^{-1}\tilde{\psi}_2), \quad G_{22} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_2}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)), \quad (29)$$

при условии  $\tilde{\psi}_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$ .

Из представления (22), а также с учётом (18) получим условия:

$$\gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_1 = \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 = \gamma_{n,3}(P_0\vec{u})_3 \text{ (на } \Gamma_2),$$

из которых следует, что

$$\gamma_{n,1}\nabla\psi_1 - \gamma_{n,2}\nabla\psi_2 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_{n,2}\nabla\psi_2 - \gamma_{n,3}\nabla\psi_3 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3 \text{ (на } \Gamma_2).$$

Подставляя решения (26), (27), (28), (29) вспомогательных задач Зарембы в эти условия и считая функции  $\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2$  и  $\gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3$  заданными, получим систему уравнений относительно  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ :

$$\begin{aligned} \rho_1^{-1}\gamma_{n,1}G_1\tilde{\psi}_1 + \rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{21}\tilde{\psi}_1 - \rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{22}\tilde{\psi}_2 &= \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \\ -\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{21}\tilde{\psi}_1 + \rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{22}\tilde{\psi}_2 + \rho_3^{-1}\gamma_{n,3}G_3\tilde{\psi}_2 &= \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3. \end{aligned}$$

Удаётся выяснить, что операторная матрица этой системы — положительный оператор, что позволяет получить представление для ортопроектора  $P_0$ .

**Лемма 2.** Ортопроектор  $P_0 := P_{0,S,\Gamma} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$  действует по закону

$$\begin{aligned} P_0\vec{u} = \vec{u} - \{ &G_1\rho_1^{-1}p_1G^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3)^\tau; \\ &-G_{21}\rho_2^{-1}p_1G^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3)^\tau + \\ &+G_{22}\rho_2^{-1}p_2G^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3)^\tau; \\ &-G_3\rho_3^{-1}p_2G^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3)^\tau \}, \end{aligned}$$

где

$$0 < G = \begin{pmatrix} \rho_1^{-1}\gamma_{n,1}G_1 + \rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{21} & -\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{22} \\ -\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{21} & \rho_2^{-1}\gamma_{n,2}G_{22} + \rho_3^{-1}\gamma_{n,3}G_3 \end{pmatrix},$$

$G_1, G_{21}, G_{22}, G_3$  — операторы вспомогательных задач Зарембы, а  $p_k(v_1; v_2)^\tau := v_k$ ,  $k = 1, 2$  — операторы взятия  $k$ -й компоненты.  $\square$

#### 4. ФОРМУЛА ДЛЯ ВТОРОГО ОРТОПРОЕКТОРА

Получим теперь формулу для второго ортопроектора

$$P_1 := P_{0,S,\Gamma}^1 : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (30)$$

Проведём рассуждения аналогично пункту 3, то есть сначала выясним, что представляет собой ортогональное дополнение пространства  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  в  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ . Действуя по схеме работы [2, п. п. 4.2], используем обобщённую формулу Грина и общие приёмы вариационного исчисления, в результате чего получим, после проектирования на  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ , следующее утверждение.

**Лемма 3.** Ортогональное дополнение  $\left(\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)\right)^\perp$  к подпространству  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  в пространстве  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  состоит из слабых решений  $\vec{v} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3) \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  краевых задач

$$\begin{aligned} P_{0,S_k}(-\mu_k\Delta\vec{v}_k) + \nabla\tilde{p}_k = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{v}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = \overline{1,3}, \\ -\tilde{p}_1\delta_{i3} + \mu_1\tau_{i3}(\vec{v}_1) = -\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2), \quad i = \overline{1,3} \quad (\text{на } \Gamma_1), \end{aligned} \quad (31)$$

$$-\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2) = -\tilde{p}_3\delta_{i3} + \mu_3\tau_{i3}(\vec{v}_3), \quad i = \overline{1,3} \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Здесь операторы  $P_{0,S_k}$  — ортогональные проекторы на пространства  $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ , а  $\nabla\tilde{p}_k := P_{0,S_k}\nabla p \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ .  $\square$

Опираясь на (30), (31), для любого  $\vec{u}$  из  $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  получим

$$P_1\vec{u} = P_1\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} = \{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\} - \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\} \in \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (32)$$

Чтобы найти набор  $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3\}$ , сформулируем с учётом (31) вспомогательные задачи С. Г. Крейна (вторые) для каждой области  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ :

$$P_{0,S_1}(-\mu_1\Delta\vec{v}_1) + \nabla\tilde{p}_1 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad (33)$$

$$-\tilde{p}_1\delta_{i3} + \mu_1\tau_{i3}(\vec{v}_1) = \psi_{1i}, \quad i = \overline{1,3} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad (34)$$

$$P_{0,S_3}(-\mu_3\Delta\vec{v}_3) + \nabla\tilde{p}_3 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (\text{на } S_3), \quad (35)$$

$$-\tilde{p}_3\delta_{i3} + \mu_3\tau_{i3}(\vec{v}_3) = \psi_{2i}, \quad i = \overline{1,3} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad (36)$$

$$P_{0,S_2}(-\mu_2\Delta\vec{v}_2) + \nabla\tilde{p}_2 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2) \quad \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (\text{на } S_2), \quad (37)$$

$$-\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2) = \psi_{1i} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad -\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2) = \psi_{2i} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad i = \overline{1,3}. \quad (38)$$

Здесь  $\psi_{1i}$  и  $\psi_{2i}$ ,  $i = \overline{1,3}$ , —  $i$ -тые компоненты заданных векторов  $\vec{\psi}_1$  и  $\vec{\psi}_2$  соответственно:

$$\vec{\psi}_1|_{\Gamma_1} := \{-\tilde{p}_1\delta_{i3} + \mu_1\tau_{i3}(\vec{v}_1)\}_{i=1}^3 = \{-\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2)\}_{i=1}^3 \in (\tilde{H}_{\Gamma_1}^{1/2})^* = \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$$

$$\vec{\psi}_2|_{\Gamma_2} := \{-\tilde{p}_2\delta_{i3} + \mu_2\tau_{i3}(\vec{v}_2)\}_{i=1}^3 = \{-\tilde{p}_3\delta_{i3} + \mu_3\tau_{i3}(\vec{v}_3)\}_{i=1}^3 \in (\tilde{H}_{\Gamma_2}^{1/2})^* = \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}.$$

$$\tilde{H}_{\Gamma_k}^{1/2} := \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)(\dot{+})\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)(\dot{+})\tilde{H}_{\Gamma_k}^{1/2}, \quad k = 1, 2.$$

**Замечание 2.** Здесь и далее  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1) := (H^{1/2}(\Gamma_1))^*$ ,  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2) := (H^{1/2}(\Gamma_2))^*$ , символом ” $\sim$ ” обозначен класс функций, продолжимых нулём на всю границу  $\partial\Omega_k$  до элементов из  $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ .  $\square$

Тогда задача (33),(34) имеет слабое решение

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1}V_1\vec{\psi}_1, \quad (39)$$

где  $V_1$  — линейный ограниченный оператор, действующий из  $(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*$  в  $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ .

Аналогично задача (35),(36) имеет слабое решение вида

$$\vec{v}_3 = -\mu_3^{-1}V_3\vec{\psi}_2, \quad V_3 : \mathcal{L}(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_2))^* \rightarrow \vec{J}_{0,S_3}^1(\Omega_3). \quad (40)$$

Для задачи (37),(38) будем искать решение в виде суммы:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}, \quad \nabla\tilde{p}_2 = \nabla\tilde{p}_{21} + \nabla\tilde{p}_{22}. \quad (41)$$

Тогда задача для  $\vec{v}_{21}, \nabla \tilde{p}_{21}$  такова:

$$\begin{aligned} P_{0,S_2}(-\mu_2 \Delta \vec{v}_{21}) + \nabla \tilde{p}_{21} &= \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{v}_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \vec{v}_{21} = \vec{0} \text{ (на } S_2), \\ -\tilde{p}_{21} \delta_{i3} + \mu_2 \tau_{i3}(v_{21}) &= \psi_{1i} \text{ (на } \Gamma_1), \quad -\tilde{p}_{21} \delta_{i3} + \mu_2 \tau_{i3}(v_{21}) = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \quad i = \overline{1, 3}; \end{aligned}$$

она будет иметь слабое решение

$$\vec{v}_{21} = -\mu_2^{-1} V_{21} \vec{\psi}_1, \quad V_{21} : \mathcal{L}(\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow \vec{J}_{0,S_2,\Gamma_2}^1(\Omega_2). \quad (42)$$

Аналогично задача для  $\vec{v}_{22}, \nabla \tilde{p}_{22}$ , т. е.

$$\begin{aligned} P_{0,S_2}(-\mu_2 \Delta \vec{v}_{22}) + \nabla \tilde{p}_{22} &= \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{v}_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \vec{v}_{22} = \vec{0} \text{ (на } S_2), \\ -\tilde{p}_{22} \delta_{i3} + \mu_2 \tau_{i3}(v_{22}) &= 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad -\tilde{p}_{22} \delta_{i3} + \mu_2 \tau_{i3}(v_{22}) = \psi_{2i} \text{ (на } \Gamma_2), \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

будет иметь слабое решение

$$\vec{v}_{22} = \mu_2^{-1} V_{22} \vec{\psi}_2, \quad V_{22} : \mathcal{L}(\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^* \rightarrow \vec{J}_{0,S_2,\Gamma_1}^1(\Omega_2). \quad (43)$$

Подставляя выражения для решений (42),(43) в представление (41), получим решение задачи (37),(38):

$$\vec{v}_2 = \mu_2^{-1} \left( -V_{21} \vec{\psi}_1 + V_{22} \vec{\psi}_2 \right). \quad (44)$$

Из представления (32), принимая во внимание описание пространства  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  (см. (19)), получим следующие условия:

$$\gamma_1(P_1 \vec{u})_1 = \gamma_2(P_1 \vec{u}) \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_2(P_1 \vec{u})_2 = \gamma_3(P_1 \vec{u}) \text{ (на } \Gamma_2),$$

из которых следует, что

$$\gamma_1 \vec{v}_1 - \gamma_2 \vec{v}_2 = \gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_3 \vec{v}_3 = \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3 \text{ (на } \Gamma_2). \quad (45)$$

Перед постановкой решений (39), (40), (44) в эти условия введём следующие операторы

$$\begin{aligned} C_1 &:= \gamma_1 V_1, \quad C_1 : (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow \vec{H}_{\Gamma_1}^{1/2}, \\ C_3 &:= \gamma_3 V_3, \quad C_3 : (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^* \rightarrow \vec{H}_{\Gamma_2}^{1/2}, \\ C_{21} &:= \gamma_2 V_{21}, \quad C_{22} := \gamma_2 V_{22}, \\ C_{21} &: (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow \vec{H}_{\Gamma_1}^{1/2}, \quad C_{22} : (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^* \rightarrow \vec{H}_{\Gamma_2}^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь, считая в (45) функции  $\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2$  и  $\gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3$  заданными, получим систему операторных уравнений относительно функций  $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2$ :

$$\begin{aligned} \mu_1^{-1} C_1 \vec{\psi}_1 + \mu_2^{-1} C_{21} \vec{\psi}_1 - \mu_2^{-1} C_{22} \vec{\psi}_2 &= \gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2, \\ -\mu_2^{-1} C_{21} \vec{\psi}_1 + \mu_2^{-1} C_{22} \vec{\psi}_2 + \mu_3^{-1} C_3 \vec{\psi}_2 &= \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3. \end{aligned}$$

Нетрудно установить, что матрица этой системы является положительным оператором, что позволяет сформулировать следующую лемму.

**Лемма 4.** Ортопроектор  $P_1 := P_{0,S,\Gamma}^1 : \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \vec{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$  действует по закону

$$\begin{aligned} P_1 \vec{u} = & \vec{u} - (\mu_1^{-1} V_1 p_1 C^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2; \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3)^\tau; \\ & -\mu_2^{-1} V_{21} p_1 C^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2; \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3)^\tau + \\ & +\mu_2^{-1} V_{22} p_2 C^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2; \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3)^\tau; \\ & -\mu_3^{-1} V_3 p_2 C^{-1} (\gamma_1 \vec{u}_1 - \gamma_2 \vec{u}_2; \gamma_2 \vec{u}_2 - \gamma_3 \vec{u}_3)^\tau), \end{aligned}$$

где

$$0 < C = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_{21} & -\mu_2^{-1} C_{22} \\ -\mu_2^{-1} C_{21} & \mu_2^{-1} C_{22} + \mu_3^{-1} C_3 \end{pmatrix},$$

$C_1, C_{21}, C_{22}, C_3$  — операторы вспомогательных задач С. Г. Крейна, а  $p_k(v_1; v_2)^\tau := v_k, k = 1, 2$ , — операторы взятия  $k$ -й компоненты.  $\square$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для дальнейшего исследования задачи (2)–(14) необходимо, действуя по схеме работы [2], переписать уравнения (2) в виде одного уравнения для тройки  $\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\}$ . Это уравнение после последовательного проектирования на пространства  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  и  $\vec{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$  удаётся переписать в виде дифференциального операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Отметим, что свойства операторных коэффициентов полученной задачи полностью совпадают со свойствами операторных коэффициентов соответствующей задачи Коши, возникшей в [2] при рассмотрении проблемы для системы из двух вязкоупругих жидкостей. Этот результат позволяет считать утверждения о разрешимости исходной начально-краевой задачи, порождённой проблемой малых движений двух жидкостей, справедливыми и в случае трёх жидкостей тоже.

Стоит отметить, что эти результаты можно распространить также на случай, когда сосуд заполнен системой из любого конечного числа вязкоупругих жидкостей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. EIRICH, F. (1956) *Rheology. Theory and Applications*. New York: Academic Press.
2. Копачевский, Н. Д. О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд // *Динамические системы*. — 2017. — Т. 7(35), № 1. — С. 17–51.  
КОРАСЧЕВСКИЙ, N. (2017) Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers. *Dynamical Systems*. 7 (1). p. 17–51.

3. AZIZOV, T., KOPACHEVSKII, N., ORLOVA, L. (2000) Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid. *Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2)*. 199. p. 1–24.
4. KOPACHEVSKY, N., KREIN, S. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 146. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
5. Копачевский, Н. Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012. — 152 с.  
KOPACHEVSKY, N. (2012) *Volterra integro-differential equations in Hilbert space: special lecture course*. Simferopol: FLP "Bondarenko O. A."

УДК: 519.711, 519.17

MSC2010: 05C50, 05C51

## О СТРУКТУРИРОВАНИИ ЗАДЕЙСТВОВАННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПЕТРИ С ЦЕЛЬЮ УСКОРЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ

© Е. А. Лукьянова, А. В. Дереза

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *lukyanovaea@mail.ru, alena-dereza@mail.ru*

ON THE STRUCTURING OF THE INVOLVE DISCRETE INFORMATION OF PETRI  
MODEL FOR ACCELERATION COMPUTATION OF INVARIANTS PURPOSE.

Lukyanova E. A., Dereza A. V.

**Abstract.** The present work is devoted to one of the tasks of modern scientific research related to the construction and verification of models that allow to organize and systematize a significant amount of information (Big Data) of real systems for making decisions on development and optimization.

To build an adequate and informative model for systematic analysis of huge volumes, tools of qualitative ordering are needed. At present, the various extensions of Petri nets is actively used to implement these tasks. In this direction, we consider that the joint application of component modeling [5] and the truncated incidence matrix [7] to structure information in the time Petri model of system, based on Big Data, is efficient.

To achieve the stated result, the model for solving problems of this type is constructed in the form of a component time Petri net [11], in which the time characteristic is associated with transitions. This model is a compact-descriptive model with time, structuring information understood by a person, into a system that adequately represents this information in data. To verify the obtained model, in the fundamental equation of the time component Petri net the truncated incidence matrix is used to find its structural invariants (complete invariants of behavior and state). The truncated incidence matrix takes into account the functioning logic of time Petri model and reduces the amount of computation by the number of parallel and synchronized processes. Considering the elements of the incidence matrix as the accumulated discrete information, involved in the process of finding invariants, we can, with a joint application of the truncated incidence matrix and component modeling, obtain the compression ratio of the involved discrete information.

In this paper the computable efficiency of the joint application of the truncated incidence matrix and component modeling is considered using the example of the task of extracting, organizing and using information from three distributed databases. When the task under study

is modeled by the component time Petri net, the compression ratio of the involved discrete information is  $k = 4.2$ . The ratio  $k$  for the detailed time model is 2.5 as the truncated incidence matrix instead of the incidence matrix. As a result of the joint application of the component time model and the truncated incidence matrix we have the 8.3 time decrease in the amount of involved discrete information.

**Keywords:** *Time Petri net, Big Data, component modelling, incidence matrix, invariants of the time Petri net.*

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из востребованных тем в научных исследованиях является построение и верификация моделей, позволяющих упорядочивать и систематизировать значительный объем информации (Big Data) реальных систем с целью принятия решений по развитию и оптимизации. Являясь подробными, Big Data представляют информативную, но громоздкую структуру. Для систематического анализа такой структуры необходимо иметь инструменты качественного упорядочивания для построения адекватной и информативной модели.

В настоящее время при реализации данных задач активно используется аппарат различных расширений сетей Петри [1], [2], [3], [4]. Считаем, что модели такого типа являются эффективным инструментом для организации труда специалиста, решающего задачи по извлечению, систематизации и применению проблемно-ориентированной информации из нескольких распределённых баз данных. Такие модели естественны для образного восприятия человека и тем самым дают заказчику понятное визуализированное представление о ключевых параметрах интересующей решаемой задачи по принятию обоснованных решений (например, по эффективности, экономической целесообразности и т. д.).

*Цель работы:* показать эффективность совместного применения компонентного моделирования и усеченной матрицы инцидентности для структурирования информации в модели Петри системы, построенной на основе Big Data.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для построения модели решения задач рассматриваемого типа, которые требуют извлечения, систематизации и использования информации из нескольких распределённых баз данных, будет использовано компонентное моделирование [5], позволяющее получить компактно-образную модель, структурирующую информацию, понимаемую человеком, в систему, которая адекватно представляет эту информацию в

данные. В этой модели одинаково и однотипно функционирующие части моделируемой задачи выделяются в элементы — компоненты-переходы и компоненты-места [6], что даёт наглядное видение распараллеливания структуры задачи, не застилающее проблемные зоны распределения ресурсов и иерархии исполнения процессов при параллельной программной реализации.

Время является необходимым атрибутом строящейся модели, так как его параметры могут существенно повлиять на очередность и иерархию этапов решения поставленной задачи, а следовательно, на скорость и экономичность принятия взвешенного решения по заявленной проблематике. Различные способы введения временной характеристики в компонентную сеть Петри предложены и проиллюстрированы в работе [7].

В работе [8] обосновано применение нового элемента — усеченной матрицы инцидентности (УМИ) в фундаментальном уравнении временной сети Петри для нахождения её структурных инвариантов с помощью алгоритма *TSS* [9]. Усеченная матрица инцидентности учитывает логику срабатывания временной модели Петри и уменьшает объем вычислений на количество распараллеленных и синхронизированных процессов.

В данной работе вычисляемая эффективность совместного применения УМИ и компонентного моделирования рассматривается на примере задачи извлечения, систематизации и использования информации из трех распределенных баз данных.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Определение 1.** Временная сеть Петри (ВСП) — пятерка  $N = (P, T, F, W, D)$ , где  $P = \{p_i\}$  — конечное множество позиций,  $T = \{t_i\}$  — конечное множество переходов,  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  — конечное множество дуг,  $W : F \rightarrow \mathbb{N}$  — кратность дуг,  $D : T \rightarrow \mathbb{N}$  — времена срабатывания переходов,  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.

В графическом отображении временная сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, дополненный характеристиками дуг и вершин, представленными натуральными числами.

Анализ модели ВСП [10], [11] осуществляется за счет анализа полных инвариантов поведения и состояния, вычисляемых из фундаментального уравнения временной сети Петри

$$Ax = d, \quad (1)$$

где  $d = M_k - M_0$  ( $M_0, M_k$  — соответственно начальная и конечная разметки ВСП),  $x = \sum_{j=1}^k u_j$ , где  $u_k$  — вектор контроля, состоящий из  $n - 1$  нулевых компонент и одной  $j$ -й компоненты, равной 1, сигнализирующей о срабатывании на  $k$ -м шаге

перехода  $t_j$ ,  $A = \|(a_{ij}^+); (-a_{ij}^-)\|$  — матрица инцидентности размера  $n \times 2m$  с целыми коэффициентами  $a_{ij}^+ = I(t_j, p_i)$  и  $a_{ij}^- = -I(p_i, t_j)$ , где  $I$  — отношение инцидентности данной ВСП.

Коэффициенты  $a_{ij}^+$  представляют число фишек, которые добавляются в выходное место  $p_i$  при завершении срабатывания перехода  $t_j$ , а коэффициенты  $a_{ij}^-$  представляют число фишек, которые отнимаются переходом  $t_j$  из входного места  $p_i$ , если его срабатывание в модели  $N = (P, T, F, W, D)$  возможно.

В случае достижимости разметки  $M_k$  из разметки  $M_0$  система (1) всегда имеет решение [9].

**Определение 2.** Полным инвариантом состояния временной сети Петри называется целый неотрицательный вектор  $z$ , являющийся решением системы линейных однородных диофантовых уравнений (СЛОДУ)

$$z \cdot H = 0, \tag{2}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} A \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+, -A^- \\ -E, E \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -E, E \end{pmatrix},$$

$E$  — единичная  $n \times n$  матрица.

Рис. 1. Матрица инцидентности временной модели Петри.

**Определение 3.** Полным инвариантом поведения временной сети Петри называется инвариант переходов соответствующей не временной сети Петри, являющийся целым неотрицательным решением  $y$  СЛОДУ

$$B \cdot y = 0, \tag{3}$$

где  $B = A^+ - A^-$ .

**Определение 4.** Временная компонентная модель Петри (ВКСП), в которой временная характеристика ассоциируется с переходами, а время срабатывания внутренних для компонент-мест переходов увеличивает время срабатывания следующих за компонентой-местом переходов, представляет кортеж  $(P, T, F, W, D, M_0)$ , где  $P = P_1^* \cup P_2$  — конечное множество мест ( $P_1^*$  — конечное множество компонент-мест),  $T$  — конечное множество переходов,  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  — отношение инцидентности,  $M_0$  — начальная разметка, отображение  $W : F \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  определяет кратность дуг, связывающих места и переходы. Временное отображение  $D$  имеет вид:

$D : T \rightarrow \tau_k + [\tau_l, \sum_{\tau_l \in P_m^* F_{t_k}} \tau_l]$ , где  $\tau_k$  — конкретная временная задержка перехода  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — число переходов ВКСП,  $m = 1, 2, \dots, s$ , где  $s$  — число компонент-мест ВКСП, где  $\tau_l$  — известная или планируемая временная задержка внутренних переходов компоненты-места.

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПОНЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И УСЕЧЕННОЙ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Рассмотрим сеть Петри, показанную на рис. 2. Данная сеть представляет собой временную модель Петри, в которой такты времени, затрачиваемые переходами на работу, отмечены соответственно  $k_1, k_2, \dots, k_5$  и записаны над соответствующими переходами. Рассматриваемая сеть Петри моделирует задачу извлечения и систематизации информации, хранящейся в трех распределенных базах данных (БД), с целью принятия обоснованного решения.

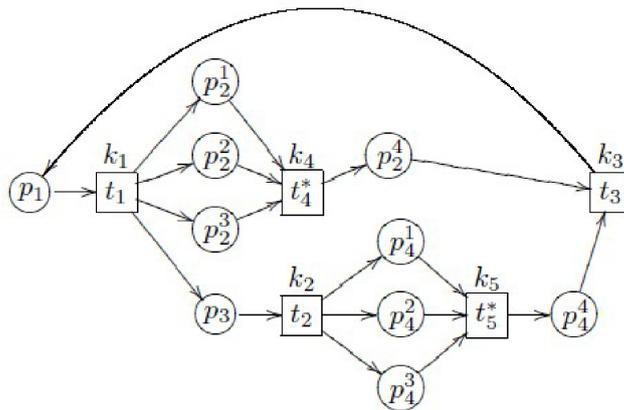


Рис. 2. Временная модель Петри для задачи извлечения и систематизации информации.

Эту модель можно представить в виде компонентной модели, показанной на рис. 3, в которой выделены две одинаковые компоненты-места  $P_2^*$  и  $P_4^*$ .

При этом согласно [7] время, затрачиваемое на работу компонент  $P_2^*$  и  $P_4^*$ , добавляется следующему за ними переходу  $t_3$ .

В модели, показанной на рис. 3, имеет место следующая интерпретация для мест и переходов. Место  $p_1$  — начальная информация, необходимая для постановки задачи осуществления события — срабатывания перехода  $t_1$ , требующего  $k_1$  единицы

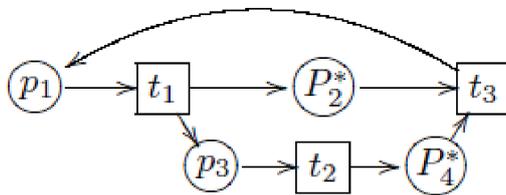


Рис. 3. Временная компонентная модель Петри.

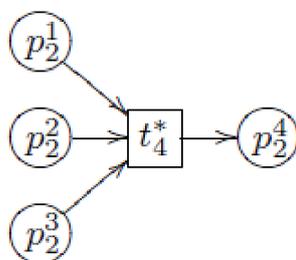


Рис. 4. Компонента-место временной компонентной модели Петри.

времени. Места  $P_2^*$  и  $P_4^*$  — данные из распределенных баз данных, место  $p_3$  — дополнительно требуемые вычислительные ресурсы (например, мощные серверы, программное обеспечение). Переход  $t_2$  — разработка конкретной программы, занимающая  $k_2$  единицы времени. Переход  $t_3$  — решение поставленной задачи — получение систематизированной, согласно спецификации  $p_1$ , информации.

Места  $P_2^*$ ,  $P_4^*$  — условия-ресурсы — в модели с рис. 3, являясь одинаковыми компонентами-местами, одинаково моделируют (рис. 4) извлечение запрашиваемой информации из трех распределенных БД. При этом извлечение запрашиваемой информации, вообще говоря, может происходить по разным запросам-программам: так, для компонент-мест  $P_2^*$  и  $P_4^*$  это соответственно интерпретировано переходами  $t_2^*$  и  $t_4^*$  для трех распределенных БД:  $p_2^1, p_2^2, p_2^3$  и  $p_4^1, p_4^2, p_4^3$  в детальной модели с рис. 1.

На рис. 5, 6 показаны матрицы инцидентности рассматриваемых временных сетей Петри: на рис. 5 — матрица инцидентности детальной временной модели Петри размера  $10 \times 10$ , на рис. 6 — матрица инцидентности соответствующей компонентной модели Петри со временем размера  $4 \times 6$ .

	$t_1^+$	$t_2^+$	$t_3^+$	$t_4^+$	$t_5^+$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_4^-$	$t_5^-$
$p_1$	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
$p_2^1$	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
$p_2^2$	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
$p_2^3$	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
$p_2^4$	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
$p_3$	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
$p_4^1$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
$p_4^2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
$p_4^3$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
$p_4^4$	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0

Рис. 5. Матрица инцидентности детальной временной модели Петри.

	$t_1^+$	$t_2^+$	$t_3^+$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$
$p_1$	0	0	1	-1	0	0
$p_2^*$	1	0	0	0	0	-1
$p_3$	1	0	0	0	-1	0
$p_4^*$	0	1	0	0	0	-1

Рис. 6. Матрица инцидентности временной компонентной модели Петри.

На рис. 7, 8 показаны усечённые матрицы инцидентности рассматриваемых временных сетей Петри: на рис. 7 — усечённая матрица инцидентности детальной временной модели Петри размера  $4 \times 10$ , на рис. 8 — усечённая матрица инцидентности соответствующей временной компонентной модели Петри размера  $2 \times 6$ .

	$t_1^+$	$t_2^+$	$t_3^+$	$t_4^+$	$t_5^+$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$	$t_4^-$	$t_5^-$
$p_1$	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
$p_2^{1+2+3}, p_3$	4	0	0	0	0	0	-1	0	-3	0
$p_4^{1+2+3}$	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-3
$p_2^4, p_4^4$	0	0	0	1	1	0	0	-2	0	0

Рис. 7. Усечённая матрица инцидентности детальной временной модели Петри.

	$t_1^+$	$t_2^+$	$t_3^+$	$t_1^-$	$t_2^-$	$t_3^-$
$p_1$	0	0	1	-1	0	0
$p_{234}$	2	1	0	0	-1	-2

Рис. 8. Усечённая матрица инцидентности временной компонентной модели Петри.

#### 4. ОБЪЕМ ЗАДЕЙСТВОВАННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Элементы матрицы инцидентности можно рассматривать как аккумулярованную дискретную информацию, задействованную в процессе нахождения инвариантов [12]. Это даёт возможность получить коэффициент сжатия задействованной дискретной информации. При моделировании исследуемой задачи временной компонентной сетью Петри относительно моделирования детальной временной сетью Петри коэффициент сжатия задействованной дискретной информации  $k$  равен 4,2. Применение в качестве матрицы инцидентности УМИ коэффициент  $k$  для детальной временной модели равен 2,5. В случае совместного применения компонентной временной модели и УМИ имеем уменьшение объёма задействованной дискретной информации в 8,3 раза.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на задаче получения информации от нескольких баз данных реализовано одновременное использование моделирующих возможностей временной компонентной сети Петри и УМИ, правила построения которой позволяют отображать принципы срабатывания временной сети Петри согласно условиям распараллеливания и синхронизации моделируемых процессов. В результате имеем систематизацию исходных данных моделируемой задачи в полученной для дальнейшего нахождения полных инвариантов ВКСП матрице инцидентности. Для рассматриваемой задачи эта итоговая матрица инцидентности показана на рис. 7. При использовании полученной матрицы инцидентности в системах уравнений (2) и (3) будем иметь значительное ускорение при вычислении полных инвариантов состояния и поведения временной компонентной сети Петри.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. VAN DER AALST, W. (2013) A general divide and conquer approach for process mining. *Federated Conference on Computer Science and Information Systems, FedCSIS*. [Online] IEEE Xplore. 1. p. 1–10. Available from: <http://ieeexplore.ieee.org/document/6643968/>. [Accessed: 07 November 2013].
2. BARBIERATO, E. & GRIBAUDO, M. & IACONO, M. (2013) Modeling apache hive based applications in big data architectures. *7th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools, VALUETOOLS 2013*. [Online] ICST 1. p. 30–38. Available from: <http://eudl.eu/doi/10.4108/icst.valuetools.2013.254398>. [Accessed: 09 January 2014].
3. CAMILLI, M. & BELLETTINI, C. & CAPRA, L. & MONGA, M. (2014) CTL model checking in the cloud using mapreduce. *Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), 2014 16th International Symposium on*. [Online] IEEE Conference Publications 1. p. 333–340. Available

from:

<http://ieeexplore.ieee.org/>. [Accessed: 09 February 2015].

4. RUIZ, M. & CALLEJA, J. & CAZAROLA, D. (2015) Petri Nets Formalization of Map/Reduce Paradigm to Optimise the Performance-Cost Tradeoff. *Proceedings – 14th IEEE International Conference on Trust, Security and Privacy in Computing and Communications, TrustCom*. [Online] 2015 IEEE Trustcom/BigDataSE/ISPA 3. p. 92–99. Available from: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7345633/>. [Accessed: 03 December 2015].
5. Лук'янова, Е. А. Про компонентне моделювання систем з паралелізмом // Наукові записки. Комп'ютерні науки / Національний університет «Києво-Могилянська академія». — ВПЦ НАУКМА, 2012. — Т. 138. — С. 47–52.  
 LUKYANOVA, E. (2012) About the component modelling systems with parallelism. *Science articles. Computer science / National university "Kiyv-mogilyanska academia" NaUKMA*. 138. p. 47–52.
6. Лукьянова, Е. А. О структурных элементах компонентной сети Петри // Проблемы программирования. — Институт программных систем НАН Украины, 2012. — Т. 2–3. — С. 25–32.  
 LUKYANOVA, E. (2012) About structural elements of component Petri net. *Problems of programming*. 2-3. p. 25–32.
7. Дереза, А. В. Определение временной компонентной сети Петри для различных путей ее построения // Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского. — Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, 2014. — Т. 27 (67) № 1. — С. 211–221.  
 DEREZA, A. (2014) Definition of time component Petri net for different ways of it construction. *Science articles of V. I. Vernadsky Tavrida National university*. 27(67) № 1. p. 211–221.
8. Дереза, А. В. Об отображении логики функционирования временной модели Петри в фундаментальном уравнении состояния сети [Электронный ресурс] / А. В. Дереза // Материалы Международной молодежной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». — 2017. — № 1. — Режим доступа:  
[https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2017/data/section\\_19\\_10843.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/section_19_10843.htm)  
 DEREZA, A. (2017) About mapping of functioning logic of time Petri net in fundamental state equation. *Materials of international youth science conference students, graduate students and young scientists "Lomonosov"*. [Online] М.: MAKS Press 1. p. 2. Available from:  
[https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2017/data/section\\_19\\_10843.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/section_19_10843.htm). [Accessed: 14 April 2017].
9. Кривый, С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях // Кибернетика и системный анализ. — Институт кибернетики имени В. М. Глушкова, 2006. — №. 2. — С. 3–17.  
 KRIVIJ, S. (2006) Algorithms of solving systems of linear diophantine equations in integer domains. *Cybernetics and system analysis*. 2. p. 3–17.

10. Зайцев, Д. А. Инварианты временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. — Институт кибернетики имени В. М. Глушкова, 2004. — №. 2. — С. 92–106.  
ZAITSEV, D. (2004) Invariants of time Petri nets. *Cybernetics and system analysis*. 2. p. 92–106.
11. Лукьянова, Е. А. О компонентном анализе параллельных распределенных систем // Таврический вестник математики и информатики Таврического национального университета имени В. И. Вернадского. — Симферополь, 2011. — Т. 2. — С. 71–81.  
LUKYANOVA, E. (2011) About component analysis of Parallel and distributed systems. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics of Tavrida National university named V. I. Vernadsky*. 2. p. 71–81.
12. Лук'янова, Е. А. Про прискорення обчислень знаходження структурних інваріантів при компонентному аналізу СNi-мереж // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — КНУ імені Тараса Шевченка, 2012. — Т. 2. — С. 155–160.  
LUKYANOVA, E. (2012) About acceleration of calculations of finding of structural invariants by component analysis CNI-nets. *Visnik T. I. Shevchenko KNU*. 2. p. 155–160.

УДК: 517.28, 517.984.46, 517.91

MSC2010: 34B05, 34B27, 46C07, 47A68

## О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ

© К. А. Радомирская

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: [radomirskaya@mail.ru](mailto:radomirskaya@mail.ru)

### ON SOME INITIAL-BOUNDARY TRANSMISSION PROBLEMS.

Radomirskaya K. A.

**Abstract.** A general approach to transmission problems was considered in the author's previous work ([14], [15]). It consists in the fact that the solution of an inhomogeneous problem is sought in the form of a sum of solutions of auxiliary homogeneous problems. In these auxiliary problems, the inhomogeneity is contained only in one place, that is, either in the equation or in the boundary condition. The solution of each of the auxiliary problems is found by means of the corresponding Green's formulas ([10], [14]). The solution of the original problem is the sum of the solutions of the auxiliary problems. This general scheme is applied to various configurations of Lipschitz domains with Lipschitz boundaries. Theorems on the existence and uniqueness of a weak solution for each problem are obtained.

The approach described above is also applied to spectral conjugation problems for one, two, and three adjacent regions. As a result of studying these problems, the same operator bundle is obtained. It was investigated by the methods of the spectral theory of operator pencils ([9]).

The general scheme is used for initial-boundary value problems that generate the spectral in this paper. The derivatives with respect to time enter not only into the equation, but also into the boundary conditions in these problems. Four problems for one domain are considered, theorems on the existence and uniqueness of a strong solution with values in the corresponding Hilbert space are obtained. Similar problems for two and three adjacent regions are also studied. The equations satisfied by their solutions are reduced to the same Cauchy problems as in the case of one region. Therefore, the same theorems on existence and uniqueness are valid for them.

**Keywords:** *Hilbert space, strong solution, basicity, asymptotics, transmission problem, initial-boundary problem, operator pencil.*

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи сопряжения с 60-х годов XX века рассматривались во многих работах (см., например, [2], [18]). Такими задачами занимались Б. З. Каценеленбаум,

Н. Н. Войтович, А. Н. Сивов ([7], [21]). Эти задачи не всегда являлись самосопряжёнными, но иногда они были «бесконечно близкими» к самосопряжённым задачам.

Исходным для исследования краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения стали работы М. С. Аграновича (см. [1], [2], [21]) и его лекции в ежегодной Крымской осенней математической школе (Ласпи – Батилиман). С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался научный руководитель автора, Копачевский Н. Д. (см. [3], [23], [11], [24], [25]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, например в липшицевых областях.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Один из первых вариантов формулы Грина доказал Ж.-П. Обэн (см. [16], глава 6, а также [22]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [26] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [16] или [22]. Дальнейшее исследование в этом направлении, а также применение этой теории в приложениях отражено, в частности, в работах [4]–[6], [12], [13], [19]–[20].

В предыдущих работах автора (см. [14], [15]) подробно рассматривался общий поход к смешанным задачам сопряжения. Он заключается в том, что решение исходной неоднородной задачи разыскивается в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте — либо в уравнении, либо в краевом условии. С помощью соответствующих формул Грина (см. [10], [14]) находится решение каждой из вспомогательных задач (при определённых необходимых и достаточных условиях). Решением исходной (неоднородной) задачи сопряжения является сумма решений вспомогательных задач. Эта общая схема рассмотрения задач сопряжения применена к различным конфигурациям липшицевых областей с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски, и с её помощью для каждой задачи получены теоремы о существовании и единственности слабого решения.

Описанный выше подход также применён к спектральным задачам сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей (см. [14], [17]). В результате изучения этих задач получается один и тот же операторный пучок, который далее исследован методами спектральной теории операторных пучков (см. [9]).

В данной работе общая схема решения задач сопряжения применяется для начально-краевых задач, порождающих изученные спектральные. В этих задачах производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Рассмотрены четыре задачи для одной области, получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве. Также изучены аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Уравнения, которым удовлетворяют их решения, приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы те же теоремы о существовании сильного решения.

## 1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДАЮЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ

Спектральные задачи, которые подробно описаны в работах [14], [17], порождаются начально-краевыми задачами, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Здесь будет рассмотрено несколько таких примеров.

**1.1. Первая задача.** В области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$ , разбитой на 3 липшицевых куска  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  с липшицевыми контурами  $\partial\Gamma_1$ ,  $\partial\Gamma_2$  и  $\partial\Gamma_3$ , сформулируем сначала спектральную проблему

$$\begin{aligned} L_0 u &= \lambda u \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u = \mu \gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \\ L_0 u &= u - \Delta u, \quad \partial_k u = (\partial u / \partial n)_{\Gamma_k}, \quad \gamma_k u = u|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Нетрудно видеть, что если рассматривать начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + L_0 u &= f \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u = \mu \gamma_2 u + \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3 u) &= \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \quad u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

и разыскивать её решения при  $f \equiv 0$ ,  $\psi_2 \equiv 0$ ,  $\psi_3 \equiv 0$  в виде

$$u(t, x) = \exp(-\lambda t)u(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

то для амплитудной функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$  возникает спектральная проблема (1), где  $\lambda$  — искомый спектральный параметр.

Опираясь на построения и методы, которые были использованы для краевых и спектральных задач сопряжения (см. [14], [17]), а также на операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (2) и доказать теорему о её сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим решение  $u(t, x)$  задачи (1) в виде суммы решений трех вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в краевое условие лишь в одном месте. Не выписывая формулировки этих задач, сразу представим решение в виде

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \quad (4)$$

где  $A$  — оператор гильбертовой пары  $(H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega); L_2(\Omega))$ , а  $V_2$  и  $V_3$  — операторы вспомогательных задач Неймана. Тогда возникает дифференциальное уравнение для функции  $u = u(t)$  со значениями в пространстве  $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ :

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{du}{dt} + (I - \mu V_2\gamma_2)u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3. \quad (5)$$

Если здесь ещё сделать замену искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \quad \eta \in L_2(\Omega), \quad (6)$$

то получаем задачу Коши

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d\eta}{dt} + (I - \mu B_2)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f_1(t), \quad \eta(0) = A^{1/2}u^0, \quad (7)$$

$$B_k = (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = (\gamma_k A^{-1/2})^*(\gamma_k A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \rightarrow L_{2,h}(\Omega) \subset L_2(\Omega), \quad k = \overline{1, 3},$$

$$0 \leq B_k \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad k = \overline{2, 4}, \quad 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

Осуществим в (7) ещё одну замену

$$(A^{-1} + B_3)\eta =: w. \quad (8)$$

Тогда возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}w = f_1(t), \quad w(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}u^0. \quad (9)$$

**Определение 1.** Назовём функцию  $w(t)$  со значениями в  $L_2(\Omega)$  сильным решением задачи (9) на отрезке  $[0, T]$ , если

$$w(t) \in C^1([0, T]; L_2(\Omega)) \cap C([0, T]; \mathcal{D}((A^{-1} + B_3)^{-1})) \quad (10)$$

и для неё выполнено уравнение (9), где все слагаемые принадлежат  $C([0, T]; L_2(\Omega))$ , а также выполнено условие  $w(0) = u^0$ .  $\square$

Далее будем полагать, что

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \quad (11)$$

**Теорема 1.** Пусть в исходной задаче (2) выполнены условия

$$\begin{aligned} f(t, x) \in C^\beta([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*), \quad \psi_2(t, x) \in C^\beta([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)), \\ \psi_3(t, x) \in C^\beta([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad u^0(x) \in \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (12)$$

а также условие (11).

Тогда задача (9) имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0, T]$  в смысле определения 1. При этом исходная начальнo-краевая задача имеет единственное решение на отрезке  $[0, T]$ ,

$$u(t, x) \in C([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega)), \quad (13)$$

причём для этого решения выполнено уравнение в  $\Omega$ , где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ , граничные условия на  $\Gamma_k$ ,  $k = 2, 3$ , где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ , а также начальное условие.

*Доказательство.* Если выполнены условия (12), то в силу свойств операторов  $A^{-1}$  и  $B_k$ ,  $k = 2, 3$ , функция  $f_1(t)$  в (9) является элементом из  $C^\beta([0, T]; L_2(\Omega))$ , а  $w^0 \in \mathcal{D}((A^{-1} + B_3)^{-1})$ . Далее, так как  $(A^{-1} + B_3)^{-1}$  — самосопряжённый положительно определённый оператор, действующий в  $L_2(\Omega)$ , а  $B_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$ , то оператор  $-(I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}$  является генератором аналитической полугруппы, а уравнение (9) — абстрактное параболическое. Поэтому при сформулированных свойствах для  $f_1(t)$  и  $w^0$  задача Коши (9) имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0, T]$ . Отсюда следует, что существует единственное сильное решение задачи Коши (7), где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; L_2(\Omega))$ . Тогда в силу (11) получаем, что

$$\eta(t) \in C([0, T]; L_2(\Omega)),$$

а потому ввиду замены (6) имеем в задаче (5) (либо (4))

$$u(t) \in C([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega)). \quad (14)$$

Далее, соотношение (4), в свою очередь, показывает, что  $u = u_1 + u_2 + u_3$ , причём

$$\begin{aligned} L_0 u_1 &= f - \frac{du}{dt} \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \\ L_0 u_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_2 = \mu \gamma_2 u + \psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \\ L_0 u_3 &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u_3 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_3 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u_3 = \psi_3 - \frac{d}{dt}(\gamma_3 u) \quad (\text{на } \Gamma_3). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к выводу, что для функции  $u$  выполнены все уравнения и краевые условия задачи (2).

При этом из (14) и свойств дифференциального выражения  $L_0u$  получаем, что  $L_0u \in (\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega))^*$ , а потому в уравнении в  $\Omega$  из (2) все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega))$ . Аналогично из (14) получаем, что  $\partial_k u \in C([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3$ , а потому все слагаемые в граничных условиях на  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  являются элементами из  $C([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3$ , соответственно.  $\square$

**1.2. Вторая задача.** Будем теперь считать, что  $\mu$  — спектральный, а  $\lambda$  — фиксированный параметр в проблеме (1), и приведём постановку начально-краевой проблемы, отвечающей этому случаю. Тогда будем иметь следующее уравнение и краевые условия:

$$\begin{aligned} L_0u &= \lambda u + f(\Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \\ \partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t} \gamma_2 u &= \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u + \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3). \end{aligned} \quad (15)$$

Снова считаем, что  $u \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  есть сумма решений трёх вспомогательных задач, приходим для искомой функции  $u = u(t, x)$  к уравнению (см. (4))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt} \gamma_2 u) + V_3(\lambda \gamma_3 u + \psi_3) \quad (16)$$

и соответствующей задаче Коши

$$V_2 \gamma_2 \frac{du}{dt} + (I - \lambda(A^1 + V_3 \gamma_3))u = A^{-1}f + V_2 \psi_2 + V_3 \psi_3, \quad u(0) = u^0. \quad (17)$$

Отсюда после замены

$$u = A^{-1/2} \eta, \quad \eta \in L_2(\Omega) \quad (18)$$

получаем задачу

$$\begin{aligned} B_2 \frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3))\eta &= A^{-1/2} f + A^{1/2} V_2 \psi_2 + A^{1/2} V_3 \psi_3 =: f(t), \\ \eta(0) &= \eta^0 = A^{1/2} u^0. \end{aligned} \quad (19)$$

Особенностью этой задачи, в отличие аналогичной проблемы (7), является тот факт, что оператор  $B_2 = (A^{1/2} V_2)(\gamma_2 A^{-1/2}) = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$  лишь неотрицательный и имеет бесконечномерное ядро  $\ker B_2$ .

Учитывая это обстоятельство, рассмотрим проблему вида (19) в абстрактной форме. Будем считать, что исследуется в произвольном гильбертовом пространстве  $H$  задача Коши

$$B \frac{d\eta}{dt} + (I - \Phi)\eta = f(t), \quad \eta(0) = \eta^0, \quad (20)$$

где  $B$  — неотрицательный компактный оператор, имеющий ненулевое ядро:

$$H_0 := \ker B \neq \{0\}, \quad (21)$$

а  $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ .

Воспользуемся разложением  $H = H_0 \oplus H_1$ ,  $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$  и преобразуем задачу (20) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве  $H_1$ . С этой целью представим  $\eta = \eta_0 + \eta_1$ ,  $\eta_0 = P_0\eta = P_0\eta_0 \in H_0$ ,  $\eta_1 = P_1\eta = P_1\eta_1 \in H_1$ , где  $P_0$  и  $P_1$  — ортопроекторы на  $H_0$  и  $H_1$  соответственно.

Будем далее предполагать, что выполнены условия

$$\ker(I - \Phi) = \{0\}, \quad \ker(I_0 - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \quad (22)$$

Тогда в силу второго условия оператор  $(I_0 - P_0\Phi P_0)$  обратим, и возникает задача Коши

$$\begin{aligned} B_1 \frac{d\eta_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)\eta_1 &= f_1(t), \quad \eta_1(0) = \eta_1^0 = P_1\eta^0, \\ B_1 &:= P_1BP_1, \quad \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1), \\ f_1 &:= P_1f + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f, \\ \eta_0 &= (I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}[(P_0\Phi P_1)\eta_1 + P_0f]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь оператор  $B_1 : H_1 \rightarrow H_1$  положительный и компактный, а  $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ .

Осуществляя ещё в (23) замену искомой функции

$$B_1\eta_1 = \xi_1, \quad (24)$$

придём к задаче Коши

$$\frac{d\xi_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)B_1^{-1}\xi_1 = f_1(t), \quad \xi_1(0) = B_1\eta_1(0) = B_1P_1\eta^0. \quad (25)$$

**Лемма 1.** Пусть в задаче (20), (21) выполнены условия (22), а также условия

$$f(t) \in C^\beta([0, T]; H_1), \quad \eta^0 \in H. \quad (26)$$

Тогда эта задача имеет единственное решение  $\eta(t) \in C([0, T]; H)$ , для которого все слагаемые в уравнении (20) являются непрерывными функциями  $t$  со значениями в  $H$  и выполнено начальное условие (20).

*Доказательство.* Если выполнены условия (26), то в задаче (25)

$$f_1(t) \in C^\beta([0, T]; H_1), \quad \xi_1(0) \in \mathcal{D}((B_1)^{-1}). \quad (27)$$

Далее, уравнение (25) является абстрактным параболическим, так как  $B_1^{-1}$  — положительно определённый самосопряжённый неограниченный оператор, а

$\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ . Отсюда следует, что задача (25) имеет единственное сильное решение на промежутке  $[0, T]$ , т.е.  $\xi_1(t) \in C^1([0, T], H_1) \cap C([0, T], \mathcal{D}(B_1^{-1}))$ . Отсюда получаем, что существует единственное решение  $\eta(t)$  задачи (23), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из  $C([0, T]; H_1)$ . Так как  $I_1 - \Phi_1$  обратим в силу условий (22), то получаем свойство  $\eta_1(t) \in C([0, T]; H_1)$ .

Возвращаясь теперь от (23) к исходной задаче (20) (см. соотношения для  $f_1$  и  $\eta_0$  в (23)), получаем утверждение леммы.  $\square$

Следствием леммы 1 является такое утверждение относительно разрешимости задачи (15).

**Теорема 2.** Пусть в задаче (15) выполнены условия

$$f \in C^\beta([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad k = 1, 2, \quad (28)$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega),$$

а также условия

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3)) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0), \quad P_0 H := \ker B_2. \quad (29)$$

Тогда эта задача имеет единственное решение  $u \in C([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))$ , для которого каждое слагаемое в уравнении в  $\Omega$  является элементом из  $C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ , а в граничных условиях — элементом из  $C([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3$ .

*Доказательство.* Оно проводится по тому же плану, что и в теореме 1, с учётом утверждения леммы 1.

Именно при выполнении условий (28), (29) из леммы 3.1 получаем, что задача (23) имеет единственное решение  $\eta_1(t) \in C([0, T]; H_1)$ ,  $H_1 := L_2(\Omega) \ominus \ker B_1$ . Возвращаясь теперь от (23) к (17), (16) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, приходим к утверждению данной теоремы.  $\square$

**Следствие 1.** Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия (29). Что касается первого из них, то, очевидно, здесь исключительные значения таковы:

$$\lambda = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_3), \quad k = 1, 2, \dots$$

Это характеристические числа компактного положительного оператора  $A^{-1} + B_3$ , они образуют счётное множество на положительной оси и имеют предельную точку  $\lambda = +\infty$ . В терминах исходной задачи (1) можно проверить, что эти исключительные значения  $\lambda$  суть собственные значения задачи Стеффана

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3). \quad (30)$$

Что касается второго условия (29), то оказывается, что здесь исключительными являются собственные значения следующей видоизменённой задачи Стефана:

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \gamma_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3). \quad (31)$$

В самом деле, легко устанавливаем, что для  $B_2 = (\gamma_2 A^{-1/2})^* (\gamma_2 A^{-1/2})$

$$\ker B_2 = \{\eta_0 \in L_2(\Omega) : \eta_0 = A^{1/2} u_0, u_0 \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega), \gamma_2 u_0 = 0\}. \quad (32)$$

Поэтому здесь вместо (30) возникает задача на собственные значения

$$P_0 \eta = \lambda P_0 (A^{-1} + B_3) P_0 \eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \quad (33)$$

которая имеет дискретный положительный спектр  $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$  с предельной точкой  $\lambda = +\infty$ . Они являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\|u_0\|_{\check{H}^1(\Omega)}^2 / (\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\gamma_3 u_0\|_{L_2(\Gamma_3)}^2), \quad u_0 \in \check{H}_{0,\Gamma_1 \cup \Gamma_2}^1(\Omega). \quad (34)$$

Таким образом, в начально-краевой задаче (15) множество исключительных значений  $\lambda$  представляют собой объединение спектров вспомогательных задач Стефана (30) и (31).  $\square$

**1.3. Третья задача.** Рассмотрим, наконец, вариант, когда граница  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  разбита не на три липшицевых куска, как в проблеме (15), а на четыре с дополнительным краевым условием на  $\Gamma_4$ :

$$\begin{aligned} L_0 u &= \lambda u \text{ (в } \Omega), \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \partial_2 u = \mu \gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u &= \lambda \gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \lambda \partial_4 u = \gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь (при спектральном параметре  $\mu$ ) порождающая её начально-краевая задача выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} L_0 u &= \lambda u + f \text{ (в } \Omega), \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_2 u) = \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u &= \lambda \gamma_3 u + \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \partial_4 u = \lambda^{-1} \gamma_4 u + \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), u(0) = u^0. \end{aligned} \quad (36)$$

Проводя те же рассуждения, как и во второй задаче (см. (16)–(19)), приходим по аналогии с (19) к задаче Коши

$$B_2 \frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4) \eta = f(t), \quad \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2} u^0, \quad (37)$$

$$f(t) = A^{-1/2} f + \sum_{k=2}^4 A^{1/2} V_k \psi_k.$$

Не приводя подробных обсуждений, сформулируем сразу итоговый результат; он получается так же, как в проблеме (19), но с некоторыми усложнениями.

**Теорема 3.** Пусть в задаче (36) выполнены условия

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0 - \lambda^{-1}P_0B_4P_0), \quad (38)$$

где  $P_0 : L_2(\Omega) \rightarrow \ker B_2 =: H_0$  — ортопроектор на  $H_0$ , а также условия

$$f \in C^\beta([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad k = 2, 3, 4, \quad (39)$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega).$$

Тогда эта задача имеет единственное решение  $u \in C([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))$ , для которого каждое слагаемое в уравнении в  $\Omega$  (см. (36)) является элементом из  $C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ , а в граничных условиях — элементом из  $C([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3, 4$ , соответственно.

**Следствие 2.** Можно убедиться, что первое условие (38) требует, чтобы  $\lambda$  не являлось собственным значением задачи С. Крейна – Стефана

$$\begin{aligned} L_0 u &= \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u &= \lambda \gamma_3 u \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \lambda \partial_4 u = \gamma_4 u \quad (\text{на } \Gamma_4), \end{aligned} \quad (40)$$

которая, как известно, имеет две ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками  $\lambda = 0$  и  $\lambda = +\infty$ , а также не более конечного числа не вещественных комплексно сопряжённых пар конечнократных собственных значений.

Что касается второго требования в (38), то, по аналогии с рассуждениями из замечания 1, можно убедиться, что здесь исключительными числами являются собственные значения модифицированной задачи С. Крейна – Стефана (см. (31))

$$\begin{aligned} L_0 u &= \lambda u \quad (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \gamma_2 u = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u &= \lambda \gamma_3 u \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \lambda \partial_4 u = \gamma_4 u \quad (\text{на } \Gamma_4). \end{aligned} \quad (41)$$

Общие свойства спектра этой задачи такие же, как у задачи (40).  $\square$

**1.4. Четвёртая задача.** Эта задача порождает спектральную проблему (35), если  $\mu$  — фиксированный, а  $\lambda$  — спектральный параметр. Здесь предварительно удобно, как и в задаче гидродинамики (проблема С. Крейна), ввести вместо поля скоростей  $u(t, x)$  поле перемещений сплошной среды  $w(t, x)$ ,  $u(t, x) = \partial w / \partial t$ . Тогда

начально-краевая задача, отвечающая проблеме (35), формируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= f; \text{ (в } \Omega), w = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \\ \partial_2 \frac{\partial w}{\partial t} &= \mu \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \partial_3 \frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \\ \partial_4 \frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_4 w &= \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), w(0) = w^0, \frac{\partial w}{\partial t}(0) = w^1 = u^0. \end{aligned} \quad (42)$$

Пользуясь теми же общими приёмами, которые были использованы выше, приходим к выводу, что искомое решение  $w = w(t)$  со значениями в  $\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(f - \frac{d^2 w}{dt^2}) + V_2(\psi_2 + \mu \gamma_2 \frac{dw}{dt}) + V_3(\psi_3 - \gamma_3 \frac{d^2 w}{dt^2}) + V_4(\psi_4 - \gamma_4 w). \quad (43)$$

Тогда возникает задача Коши

$$\begin{aligned} (A^{-1} + V_3 \gamma_3) \frac{d^2 w}{dt^2} + (I - \mu V_2 \gamma_2) \frac{dw}{dt} + V_4 \gamma_4 w &= A^{-1} f + \sum_{k=2}^4 V_k \psi_k, \\ w(0) = w^0, \frac{dw}{dt}(0) &= w^1 = u^0. \end{aligned} \quad (44)$$

Эта задача после замены  $w = A^{-1/2} \eta$  переходит в проблему

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B_3) \frac{d^2 \eta}{dt^2} + (I - \mu B_2) \frac{d\eta}{dt} + B_4 \eta &= A^{-1/2} f + \sum_{k=2}^4 A^{1/2} V_k \psi_k =: f(t), \\ \eta(0) = A^{1/2} w^0, \frac{d\eta}{dt}(0) &= A^{1/2} w^1 = A^{1/2} u^0. \end{aligned} \quad (45)$$

Осуществляя здесь ещё одну замену

$$\frac{d\eta}{dt} = (A^{-1} + B_3)^{-1} \varphi, \quad (46)$$

приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1} \varphi + \int_0^t B_4 (A^{-1} + B_3)^{-1} \varphi(s) ds &= -B_4 A^{1/2} w^0 + A^{-1/2} f + \\ + \sum_{k=2}^4 A^{1/2} V_k \psi_k &= -B_4 A^{1/2} w^0 + A^{-1/2} f + \sum_{k=2}^4 A^{1/2} V_k \psi_k, \quad \varphi(0) = (A^{-1} + B_3) A^{1/2} w^1. \end{aligned} \quad (47)$$

Чтобы исследовать проблему разрешимости задачи (47), сейчас понадобится одно утверждение, доказательство которого можно найти в [8], с. 21–25, теоремы 1.3.2, 1.3.4. В несколько ослабленной форме оно выглядит следующим образом.

**Лемма 2.** Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве  $H$ , т. е. в задаче

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + \int_0^t G(t, s) A_1 u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad (48)$$

выполнены следующие условия: 1°.  $A_0$  является генератором аналитической полугруппы;

2°.  $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A_0)$ ;

3°.  $G(t, s), \partial G(t, s)/\partial t \in C(\Delta_T; H)$ ,  $\Delta_T := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \in T\}$ ;

4°.  $f(t) \in C^\beta([0, T]; H)$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ;

5°.  $u^0 \in \mathcal{D}(A_0)$ .

Тогда задача (48) имеет единственное сильное решение

$$u(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_0)) \cap C^1([0, T]; H), \quad (49)$$

для которого все слагаемые в (48) являются элементами из  $C([0, T]; H)$  и выполнено начальное условие.  $\square$

Воспользуемся леммой 2 применительно к задаче (47). В этой задаче оператор  $-(I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}$  является генератором аналитической полугруппы, причём области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (47)  $G(t, s) \equiv I$  и потому выполнено условие 3° леммы 2.

Отсюда приходим к следующему выводу.

**Лемма 3.** Если в задаче (48) выполнены условия

$$w^0 \in \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega), \quad w^1 \in \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega), \quad (50)$$

$$f(t) \in C^\beta([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta([0, T]; \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \quad k = 2, 3, 4, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (51)$$

то эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0, T]$ , и для этого решения все слагаемые в уравнении (47) являются непрерывными функциями  $t \in [0, T]$  со значениями в  $L_2(\Omega)$ .  $\square$

Это утверждение позволяет установить такой факт.

**Теорема 4.** Пусть в задаче (42) выполнены условия (50), (51), а также условие

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \quad (52)$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w \in C^2([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*) \cap C^1([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega)), \quad (53)$$

для которого выполнены уравнение (42), где все слагаемые являются элементами из  $C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ , граничные условия (42), где все слагаемые на  $\Gamma_k$  являются элементами из  $C([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3, 4$ , а также начальные условия (42).

*Доказательство.* При выполнении условий (50), (51) по лемме 3 задача (47), а потому и задача (45) имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из  $C([0, T]; L_2(\Omega))$ . Тогда в силу условия (52) имеем  $d\eta/dt \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ . Отсюда получаем, что в задаче (44), а потому и в (43)  $dw/dt \in C([0, T]; \check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))$ . Следовательно,  $L_0(dw/dt) \in C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ ,  $\partial_k(dw/dt) \in C([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ .

Далее, устанавливаем, опираясь на представление (43), как и выше, что для  $w(t, x)$  выполнены уравнение и краевые условия (42), а потому, в силу доказанных свойств, в уравнении (42) все слагаемые — элементы из  $C([0, T]; (\check{H}_{0, \Gamma_1}^1(\Omega))^*)$ , а в граничных условиях — элементы из  $C([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$ ,  $k = 2, 3, 4$ .

Отсюда также приходим к выводу, что имеет место свойство (53) и, кроме того, свойство  $\gamma_3 w \in C^2([0, T]; \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3))$ . Наконец, выполнены также начальные условия (50).  $\square$

## 2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ПРИМЫКАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

Рассмотрим две примыкающие области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с липшицевыми границами, только для начала каждую из внешних границ разобьем не на 4, а на 3 липшицевых куска, а внутреннюю границу не на 7, а на 5. Сформулируем начально-краевую задачу, которая порождает соответствующую спектральную. В ней параметр  $\lambda$  является искомым спектральным, а  $\mu$  — фиксированным.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + L_0 u_1 = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + L_0 u_2 = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (54)$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11,1}), \quad \gamma_{22,1} u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22,1}), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \partial_{11,2}u_1 &= \mu\gamma_{11,2}u_1 + \psi_{11,2} \quad (\text{на } \Gamma_{11,2}), & \partial_{22,2}u_2 &= \mu\gamma_{22,2}u_2 + \psi_{22,2} \quad (\text{на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3}u_1 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,3}u_1) &= \psi_{11,3} \quad (\text{на } \Gamma_{11,3}), & \partial_{22,3}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,3}u_2) &= \psi_{22,3} \quad (\text{на } \Gamma_{22,3}); \end{aligned} \quad (56)$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21,1}), \quad (57)$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \quad \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 = \mu\gamma_{21,2}u_1 + \psi_{21,2} \quad (\text{на } \Gamma_{21,2}), \quad (58)$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \quad \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,3}u_1) = \psi_{21,3} \quad (\text{на } \Gamma_{21,3}), \quad (59)$$

$$\partial_{21,4}u_1 = -\partial_{12,4}u_2 = \mu(\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2) + \psi_{21,4} \quad (\text{на } \Gamma_{21,4}), \quad (60)$$

$$\partial_{21,5}u_1 = -\partial_{12,5}u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,5}u_1 - \gamma_{12,5}u_2) + \psi_{21,5} \quad (\text{на } \Gamma_{21,5}); \quad (61)$$

$$u_i(0, x) = u_i^0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Как и в случае с одной областью (см. п. п. 1.1), представляем решение этой задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, с помощью формул Грина находим их слабые решения и получаем решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач. Объединяя вместе краевые задачи, для которых неоднородности в уравнениях имеют одинаковый смысл (например, коэффициенты при  $\lambda$  и  $\mu$ ), мы видим, что решение такого набора задач может быть представлено в форме

$$u = A^{-1}\left(f - \frac{\partial u}{\partial t}\right) + V_2(\mu\gamma_2u + \psi_2) + V_3\left(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3u\right), \quad (62)$$

где  $u = (u_1; u_2)$ ,  $f = (f_1; f_2)$ ,  $A$  — оператор гильбертовой пары  $(H_{0,\Gamma_{11,1}}^1(\Omega_1) \oplus H_{0,\Gamma_{22,1}}^1(\Omega_2); L_2(\Omega))$ ;

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,4}V_{21,4}^*;$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,4}\psi_{21,4};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*;$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,5}\psi_{21,5}.$$

То есть мы получили такое же уравнение, что и в случае аналогичной задачи для одной области (см. пп. 1.1, (4)). Операторы, входящие в уравнение (62), обладают теми же свойствами, что и операторы из (4). Таким образом, все дальнейшие преобразования (см. (5)–(9)) и выводы (см. теорему 1) из пп. 1.1 справедливы и в этом случае.

Далее перейдём ко второй начально-краевой задаче для двух примыкающих областей. В отличие от первой, в этой задаче параметр  $\mu$  — искомый спектральный, а  $\lambda$  — фиксированный. Получаем начально-краевую задачу для двух примыкающих

областей в следующем виде

$$L_0 u_1 = \lambda u_1 + f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad L_0 u_2 = \lambda u_2 + f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (63)$$

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11,1}), \quad \gamma_{22,1} u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22,1}), \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \partial_{11,2} u_1 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,2} u_1) &= \psi_{11,2} \quad (\text{на } \Gamma_{11,2}), & \partial_{22,2} u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,2} u_2) &= \psi_{22,2} \quad (\text{на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3} u_1 &= \lambda \gamma_{11,3} u_1 + \psi_{11,3} \quad (\text{на } \Gamma_{11,3}), & \partial_{22,3} u_2 &= \lambda \gamma_{22,3} u_2 + \psi_{22,3} \quad (\text{на } \Gamma_{22,3}); \end{aligned} \quad (65)$$

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21,1}), \quad (66)$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0, \quad \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,2} u_1) = \psi_{21,2} \quad (\text{на } \Gamma_{21,2}), \quad (67)$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0, \quad \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 = \lambda \gamma_{21,3} u_1 + \psi_{21,3} \quad (\text{на } \Gamma_{21,3}), \quad (68)$$

$$\partial_{21,4} u_1 = -\partial_{12,4} u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2) + \psi_{21,4} \quad (\text{на } \Gamma_{21,4}), \quad (69)$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = \lambda(\gamma_{21,5} u_1 - \gamma_{12,5} u_2) + \psi_{21,5} \quad (\text{на } \Gamma_{21,5}); \quad (70)$$

$$u_i(0, x) = u_i^0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

И снова мы получаем аналогичное уравнение, как и в случае с одной областью (см. (16))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda \gamma_3 u + \psi_3), \quad (71)$$

где  $u = (u_1; u_2)$ ,  $f = (f_1; f_2)$ ;

$$V_2 \gamma_2 = V_{11,2} V_{11,2}^* + V_{22,2} V_{22,2}^* + V_{21,2} V_{21,2}^* + V_{21,4} V_{21,4}^*;$$

$$V_2 \psi_2 = V_{11,2} \psi_{11,2} + V_{22,2} \psi_{22,2} + V_{21,2} \psi_{21,2} + V_{21,4} \psi_{21,4};$$

$$V_3 \gamma_3 = V_{11,3} V_{11,3}^* + V_{22,3} V_{22,3}^* + V_{21,3} V_{21,3}^* + V_{21,5} V_{21,5}^*;$$

$$V_3 \psi_3 = V_{11,3} \psi_{11,3} + V_{22,3} \psi_{22,3} + V_{21,3} \psi_{21,3} + V_{21,5} \psi_{21,5}.$$

Затем, как и в случае с одной областью, получаем задачу Коши с оператором  $B_2 \geq 0$ , у которого ядро бесконечномерно. Проектируем на подпространства  $H_0$  и  $H_1$  и можем сделать аналогичные выводы, что и в пп. 1.2.

Третья начально-краевая задача для двух областей снова формулируется для случая, когда  $\mu$  — спектральный параметр, а  $\lambda$  — фиксированный. Но теперь каждая из внешних границ разделена не на 3, а на 4 части, а внутренняя — не на 5, а на 7 липшицевых кусков. Получаем уравнения в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$

$$L_0 u_1 = \lambda u_1 + f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad L_0 u_2 = \lambda u_2 + f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (72)$$

условия на внешних границах:

$$\begin{aligned} \gamma_{11,1}u_1 &= 0 \text{ (на } \Gamma_{11,1}), \quad \gamma_{22,1}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{22,1}), & (73) \\ \partial_{11,2}u_1 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,2}u_1) &= \psi_{11,2} \text{ (на } \Gamma_{11,2}), \quad \partial_{22,2}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,2}u_2) = \psi_{22,2} \text{ (на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3}u_1 &= \lambda\gamma_{11,3}u_1 + \psi_{11,3} \text{ (на } \Gamma_{11,3}), \quad \partial_{22,3}u_2 = \lambda\gamma_{22,3}u_2 + \psi_{22,3} \text{ (на } \Gamma_{22,3}), \\ \partial_{11,4}u_1 &= \lambda^{-1}\gamma_{11,4}u_1 + \psi_{11,4} \text{ (на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22,4}u_2 + \psi_{22,4} \text{ (на } \Gamma_{22,4}); & (74) \end{aligned}$$

условия на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{21,1}), \quad (75)$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \quad \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,2}u_1) = \psi_{21,2} \text{ (на } \Gamma_{21,2}), \quad (76)$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \quad \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \lambda\gamma_{21,3}u_1 + \psi_{21,3} \text{ (на } \Gamma_{21,3}), \quad (77)$$

$$\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2 = 0, \quad \partial_{21,4}u_1 + \partial_{12,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{21,4}u_1 + \psi_{21,4} \text{ (на } \Gamma_{21,4}), \quad (78)$$

$$\partial_{21,5}u_1 = -\partial_{12,5}u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,5}u_1 - \gamma_{12,5}u_2) + \psi_{21,5} \text{ (на } \Gamma_{21,5}), \quad (79)$$

$$\partial_{21,6}u_1 = -\partial_{12,6}u_2 = \lambda(\gamma_{21,6}u_1 - \gamma_{12,6}u_2) + \psi_{21,6} \text{ (на } \Gamma_{21,6}), \quad (80)$$

$$\partial_{21,7}u_1 = -\partial_{12,7}u_2 = \lambda^{-1}(\gamma_{21,7}u_1 - \gamma_{12,7}u_2) + \psi_{21,7} \text{ (на } \Gamma_{21,7}); \quad (81)$$

$$u_i(0, x) = u_i^0(x), \quad x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

И снова с помощью общего сформулированного выше подхода находим решения вспомогательных задач и приходим к выводу, что искомое решение удовлетворяет уравнению

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3) + V_4(\lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4), \quad (82)$$

где  $u = (u_1; u_2)$ ,  $f = (f_1; f_2)$ ;

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*;$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,5}\psi_{21,5};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*;$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,6}\psi_{21,6};$$

$$V_4\gamma_4 = V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*;$$

$$V_4\psi_4 = V_{11,4}\psi_{11,4} + V_{22,4}\psi_{22,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{21,7}\psi_{21,7}.$$

Уравнение (82) аналогично соответствующему уравнению для одной области, операторы из уравнений обладают одинаковыми свойствами. Значит, и выводы, сформулированные в пп. 1.3, применимы к этой проблеме.

Наконец, рассмотрим четвёртую начально-краевую задачу для двух сопряжённых областей. Здесь, как и в первой задаче, параметр  $\lambda$  — спектральный,  $\mu$  — фиксирован. Однако внешняя граница разделена на 4 липшицевых кусков каждая, а внутренняя — на 7 липшицевых кусков. Получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w_2}{\partial t} = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \quad (83)$$

на внешних границах заданы условия:

$$w_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11,1}), \quad w_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22,1}), \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \partial_{11,2} \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \mu \gamma_{11,2} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \psi_{11,2} \quad (\text{на } \Gamma_{11,2}), & \partial_{22,2} \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \mu \gamma_{22,2} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \psi_{22,2} \quad (\text{на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \gamma_{11,3} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= \psi_{11,3} \quad (\text{на } \Gamma_{11,3}), & \partial_{22,3} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{22,3} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= \psi_{22,3} \quad (\text{на } \Gamma_{22,3}), \\ \partial_{11,4} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \gamma_{11,4} w_1 &= \psi_{11,4} \quad (\text{на } \Gamma_{11,4}), & \partial_{22,4} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{22,4} w_2 &= \psi_{22,4} \quad (\text{на } \Gamma_{22,4}); \end{aligned} \quad (85)$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,1} \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_{21,1} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,1} \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21,1}), \quad (86)$$

$$\gamma_{21,2} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,2} \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_{21,2} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,2} \frac{\partial w_2}{\partial t} = \mu \gamma_{21,2} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \psi_{21,2} \quad (\text{на } \Gamma_{21,2}), \quad (87)$$

$$\gamma_{21,3} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,3} \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_{21,3} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,3} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{21,3} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \psi_{21,3} \quad (\text{на } \Gamma_{21,3}), \quad (88)$$

$$\gamma_{21,4} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,4} \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_{21,4} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,4} \frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{21,4} w_1 = \psi_{21,4} \quad (\text{на } \Gamma_{21,4}), \quad (89)$$

$$\partial_{21,5} \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,5} \frac{\partial w_2}{\partial t} = \mu \left( \gamma_{21,5} \frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,5} \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) + \psi_{21,5} \quad (\text{на } \Gamma_{21,5}), \quad (90)$$

$$\partial_{21,6} \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,6} \frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) + \psi_{21,6} \quad (\text{на } \Gamma_{21,6}), \quad (91)$$

$$\partial_{21,7} \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,7} \frac{\partial w_2}{\partial t} = -(\gamma_{21,7} p_1 - \gamma_{12,7} p_2) w + \psi_{21,7} \quad (\text{на } \Gamma_{21,7}); \quad (92)$$

$$w_i(0) = w_i^0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0) = w^1 = u^0, \quad i = \overline{1,2}.$$

И снова, как и в случае с одной областью, мы приходим к выводу, что искомое решение  $w = w(t)$  со значениями в  $\tilde{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1} \left( f - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + V_2 (\psi_2 + \mu \gamma_2 \frac{dw}{dt}) + V_3 (\psi_3 - \gamma_3 \frac{d^2 w}{dt^2}) + V_4 (\psi_4 - \gamma_4 w), \quad (93)$$

где  $w = (w_1; w_2)$ ,  $f = (f_1; f_2)$ ;

$$V_2 \gamma_2 = V_{11,2} V_{11,2}^* + V_{22,2} V_{22,2}^* + V_{21,2} V_{21,2}^* + V_{21,5} V_{21,5}^*;$$

$$V_2 \psi_2 = V_{11,2} \psi_{11,2} + V_{22,2} \psi_{22,2} + V_{21,2} \psi_{21,2} + V_{21,5} \psi_{21,5};$$

$$\begin{aligned} V_3\gamma_3 &= V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*; \\ V_3\psi_3 &= V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,6}\psi_{21,6}; \\ V_4\gamma_4 &= V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*; \\ V_4\psi_4 &= V_{11,4}\psi_{11,4} + V_{22,4}\psi_{22,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{21,7}\psi_{21,7}. \end{aligned}$$

А значит, для этой задачи справедливы все дальнейшие выводы из пп. 1.4.

### 3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЁХ ПРИМЫКАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

Наконец, рассмотрим эти же задачи, но для трёх примыкающих областей. В областях  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$  из  $\mathbb{R}^m$  уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + L_0 u_k = f_k \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, 3}; \quad (94)$$

условия на внешних границах:

$$\gamma_{kk,1} u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \partial_{kk,2} u_k &= \mu \gamma_{kk,2} u_k + \psi_{kk,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\ \partial_{kk,3} u_i + \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{kk,3} u_k) &= \psi_{kk,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,3}), \quad k = \overline{1, 3}; \end{aligned} \quad (96)$$

на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1} u_j - \gamma_{jk,1} u_k = 0, \quad \partial_{kj,1} u_j + \partial_{jk,1} u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \quad (97)$$

$$\gamma_{kj,2} u_j - \gamma_{jk,2} u_k = 0, \quad \partial_{kj,2} u_j + \partial_{jk,2} u_k = \mu \gamma_{kj,2} u_j + \psi_{kj,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \quad (98)$$

$$\gamma_{kj,3} u_j - \gamma_{jk,3} u_k = 0, \quad \partial_{kj,3} u_j + \partial_{jk,3} u_k + \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{kj,3} u_j) = \psi_{kj,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,3}), \quad k, j = \overline{1, 3}, \quad k \neq j; \quad (99)$$

$$u_k(0, x) = u_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}.$$

И снова с помощью много раз описанного выше подхода разбиваем эту задачу на вспомогательные, находим решение исходной задачи в виде суммы решений вспомогательных задач. Краевые задачи, для которых неоднородности имеют один смысл, объединяем и получаем уравнения того же вида, что и в более простых случаях с одной и двумя примыкающими областями (см. (4), (62))

$$u = A^{-1} \left( f - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + V_2 (\mu \gamma_2 u + \psi_2) + V_3 (\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t} \gamma_3 u), \quad (100)$$

где  $u = (u_1; u_2; u_3)$ ,  $f = (f_1; f_2; f_3)$ ,  $A$  — оператор гильбертовой пары  $(H_{0,\Gamma_{11,1}}^1(\Omega_1) \oplus H_{0,\Gamma_{22,1}}^1(\Omega_2) \oplus H_{0,\Gamma_{33,1}}^1(\Omega_3); L_2(\Omega))$ ,

$$V_2 \gamma_2 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,2} V_{kk,2}^* + V_{21,2} V_{21,2}^* + V_{32,2} V_{32,2}^* + V_{13,2} V_{13,2}^*;$$

$$\begin{aligned}
V_2\psi_2 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}\psi_{kk,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2}; \\
V_3\gamma_3 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}V_{kk,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{32,3}V_{32,3}^* + V_{13,3}V_{13,3}^*; \\
V_3\psi_3 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}\psi_{kk,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{32,3}\psi_{32,3} + V_{13,3}\psi_{13,3}.
\end{aligned}$$

Значит, как и в случае с двумя областями, все выводы из пп. 1.1 справедливы и в этом случае.

Рассмотрим вторую начально-краевую задачу для двух примыкающих областей.

$$L_0u_k = \lambda u_k + f_k \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1, 3}; \quad (101)$$

$$\gamma_{kk,1}u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \quad (102)$$

$$\begin{aligned}
\partial_{kk,2}u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kk,2}u_k) &= \psi_{kk,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\
\partial_{kk,3}u_k &= \lambda\gamma_{kk,3}u_k + \psi_{kk,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,3}), \quad k = \overline{1, 3};
\end{aligned} \quad (103)$$

$$\gamma_{kj,1}u_j - \gamma_{jk,1}u_k = 0, \quad \partial_{kj,1}u_j + \partial_{jk,1}u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \quad (104)$$

$$\gamma_{kj,2}u_j - \gamma_{jk,2}u_k = 0, \quad \partial_{kj,2}u_j + \partial_{jk,2}u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kj,2}u_j) = \psi_{kj,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \quad (105)$$

$$\gamma_{kj,3}u_j - \gamma_{jk,3}u_k = 0, \quad \partial_{kj,3}u_j + \partial_{jk,3}u_k = \lambda\gamma_{kj,3}u_j + \psi_{kj,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,3}), \quad k, j = \overline{1, 3}, \quad k \neq j; \quad (106)$$

$$u_k(0, x) = u_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, 3}.$$

И снова мы получаем аналогичное уравнение, как и в случае с одной и двумя областями (см. (16), (71))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2u) + V_3(\lambda\gamma_3u + \psi_3), \quad (107)$$

где  $u = (u_1; u_2; u_3)$ ,  $f = (f_1; f_2; f_3)$ ;

$$\begin{aligned}
V_2\gamma_2 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}V_{kk,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*; \\
V_2\psi_2 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}\psi_{kk,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2}; \\
V_3\gamma_3 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}V_{kk,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{32,3}V_{32,3}^* + V_{13,3}V_{13,3}^*;
\end{aligned}$$

$$V_3\psi_3 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}\psi_{kk,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{32,3}\psi_{32,3} + V_{13,3}\psi_{13,3}.$$

Поэтому можно сделать аналогичные выводы, что и в пп. 1.2.

Третья начально-краевая задача для трёх областей имеет следующий вид

$$L_0u_k = \lambda u_k + f_k \quad (\text{в } \Omega_k), \quad k = \overline{1,3}; \quad (108)$$

условия на внешних границах:

$$\gamma_{kk,1}u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \partial_{kk,2}u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kk,2}u_k) &= \psi_{kk,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\ \partial_{kk,3}u_k &= \lambda\gamma_{kk,3}u_k + \psi_{kk,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,3}), \end{aligned} \quad (110)$$

$$\partial_{kk,4}u_k = \lambda^{-1}\gamma_{kk,4}u_k + \psi_{kk,4} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,4}), \quad k = \overline{1,3};$$

условия на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1}u_j - \gamma_{jk,1}u_k = 0, \quad \partial_{kj,1}u_j + \partial_{jk,1}u_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \quad (111)$$

$$\gamma_{kj,2}u_j - \gamma_{jk,2}u_k = 0, \quad \partial_{kj,2}u_j + \partial_{jk,2}u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kj,2}u_j) = \psi_{kj,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \quad (112)$$

$$\gamma_{kj,3}u_j - \gamma_{jk,3}u_k = 0, \quad \partial_{kj,3}u_j + \partial_{jk,3}u_k = \lambda\gamma_{kj,3}u_j + \psi_{kj,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,3}), \quad (113)$$

$$\gamma_{kj,4}u_j - \gamma_{jk,4}u_k = 0, \quad \partial_{kj,4}u_j + \partial_{jk,4}u_k = \lambda^{-1}\gamma_{kj,4}u_j + \psi_{kj,4} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,4}), \quad k, j = \overline{1,3}, \quad k \neq j; \quad (114)$$

$$u_k(0, x) = u_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = \overline{1,3}.$$

Находим решения вспомогательных задач и приходим к выводу, что искомое решение удовлетворяет уравнению

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3) + V_4(\lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4), \quad (115)$$

где  $u = (u_1; u_2; u_3)$ ,  $f = (f_1; f_2; f_3)$ ;

$$V_2\gamma_2 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}V_{kk,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_2\psi_2 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}\psi_{kk,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2};$$

$$V_3\gamma_3 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}V_{kk,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{32,3}V_{32,3}^* + V_{13,3}V_{13,3}^*;$$

$$V_3\psi_3 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}\psi_{kk,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{32,3}\psi_{32,3} + V_{13,3}\psi_{13,3};$$

$$V_4\gamma_4 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,4}V_{kk,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_4\psi_4 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,4}\psi_{kk,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2}.$$

Задача получилась такая же, как и третьи задачи для одной и двух областей. Поэтому справедливы выводы из пп. 1.3 о существовании и единственности сильного решения.

Четвёртая начально-краевая задача для трёх примыкающих областей выглядит следующим образом

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w_k}{\partial t} = f_k \quad (\text{в } \Omega_k); \quad (116)$$

условия на внешних границах:

$$w_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \partial_{kk,2} \frac{\partial w_k}{\partial t} &= \mu \gamma_{kk,2} \frac{\partial w_k}{\partial t} + \psi_{kk,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\ \partial_{kk,3} \frac{\partial w_k}{\partial t} + \gamma_{kk,3} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} &= \psi_{kk,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,3}), \\ \partial_{kk,4} \frac{\partial w_k}{\partial t} + \gamma_{kk,4} w_k &= \psi_{kk,4} \quad (\text{на } \Gamma_{kk,4}), \quad k = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (118)$$

на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \gamma_{jk,1} \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0, \quad \partial_{kj,1} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \partial_{jk,1} \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \quad (119)$$

$$\gamma_{kj,2} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \gamma_{jk,2} \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0, \quad \partial_{kj,2} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \partial_{jk,2} \frac{\partial w_k}{\partial t} = \mu \gamma_{kj,2} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \psi_{kj,2} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \quad (120)$$

$$\gamma_{kj,3} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \gamma_{jk,3} \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0, \quad \partial_{kj,3} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \partial_{jk,3} \frac{\partial w_k}{\partial t} + \gamma_{kj,3} \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = \psi_{kj,3} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,3}), \quad (121)$$

$$\gamma_{kj,4} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \gamma_{jk,4} \frac{\partial w_k}{\partial t} = 0, \quad \partial_{kj,4} \frac{\partial w_j}{\partial t} + \partial_{jk,4} \frac{\partial w_k}{\partial t} + \gamma_{kj,4} w_j = \psi_{kj,4} \quad (\text{на } \Gamma_{kj,4}), \quad k, j = \overline{1,3}, \quad k \neq j; \quad (122)$$

$$w_k(0) = w_k^0, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t}(0) = w^1 = u^0, \quad k = \overline{1,3}.$$

Как и в случаях с одной и двумя областями, мы приходим к выводу, что искомое решение  $w = w(t)$  со значениями в  $\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1} \left( f - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + V_2 \left( \psi_2 + \mu \gamma_2 \frac{dw}{dt} \right) + V_3 \left( \psi_3 - \gamma_3 \frac{d^2 w}{dt^2} \right) + V_4 \left( \psi_4 - \gamma_4 w \right), \quad (123)$$

где  $w = (w_1; w_2; w_3)$ ,  $f = (f_1; f_2; f_3)$ ;

$$V_2 \gamma_2 = \sum_{k=1}^3 V_{kk,2} V_{kk,2}^* + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,2} V_{kj,2}^*;$$

$$\begin{aligned}
V_2\psi_2 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,2}\psi_{kk,2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,2}\psi_{kj,2}; \\
V_3\gamma_3 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}V_{kk,3}^* + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,3}V_{kj,3}^*; \\
V_3\psi_3 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,3}\psi_{kk,3} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,3}\psi_{kj,3}; \\
V_4\gamma_4 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,4}V_{kk,4}^* + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,4}V_{kj,4}^*; \\
V_4\psi_4 &= \sum_{k=1}^3 V_{kk,4}\psi_{kk,4} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 V_{kj,4}\psi_{kj,4}.
\end{aligned}$$

И снова общие свойства полученной задачи подробно описаны в пп. 1.4 для одной области.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе применена общая схема решения задач сопряжения (подробно изученная в предыдущих работах автора, см. [14], [15]) для начально-краевых задач, порождающих рассмотренные ранее спектральные (см. [17]), в них производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Подробно рассмотрены четыре задачи для одной области, получены теоремы об их сильной разрешимости. Также изучены аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Уравнения, которым удовлетворяют их решения, приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы те же теоремы о существовании сильного решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии. / М. С. Агранович, Г. А. Амосов, М. Левитин // Российский журнал матем. физ. — 1999. — Т. 6, № 3. — С. 247–281.  
 AGRANOVICH M., AMOSOV G., LEVITIN, M. (1999) Spectral problems for the Lamé system in smooth and non-smooth domains with a spectral parameter in the condition. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 3. p. 247–281.
2. Агранович М. С. Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности. / М. С. Агранович, Р. Менникен // Математич. сборник. — 1999. — Т. 30, № 1. — С. 29–68.

- AGRANOVICH M., MENNIKEN P. (1999) Spectral problems for the Helmholtz equation with a spectral parameter in boundary conditions on a nonsmooth surface. *Mathematical collection*. 30. p. 29–68.
3. Бабский В. Г. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. / В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тющов // К.: Наукова думка. — 1992. — 592 с.
- BABSKY, V., ZHUKOV, M., KOPACHEVSKY, N., MISHKIS A., SLOBOGANIN A., TUPTSOV A. (1992) *Methods of hydromechanics problem solving for weightlessness*. Kiev: Naukova Dumka. 592
4. Войтицкий В. И. Абстрактная спектральная задача Стефана. / В. И. Войтицкий // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатики и кибернетика». — 2006. — Т. 19 (58), № 2. — С. 20–28.
- VOYTITSKY, V. (2006) Abstract Stefan's problem. *Scientific notes of TNU. Mathematics and Mechanics*. 58 (19). p. 20–28.
5. Войтицкий В. И. О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса–Томсона. / В. И. Войтицкий // Нелинейные граничные задачи. — 2007. — Т. 17. — С. 31–49.
- VOYTITSKY, V. (2007) Abstract Stefan's problem. *Scientific notes of TNU. Mathematics and Mechanics*. (17). p. 31–49.
6. Войтицкий В. И. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи. / Н. Д. Копачевский, П. А. Старков, В. И. Войтицкий // Совр. мат. фундам. направл. — 2009. — Т. 34. — С. 5–44.
- VOYTITSKY, V., KOPACHEVSKY, N., STARKOV, P. (2010) Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems. *Journal of Math. Sciences (Springer)*. 170 (2). p. 131–172.
7. Войтович Н. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции / Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов // М.: Наука. — 1977. — 416 с.
- VOITOVICH, N., KACENELENBAUM, A., SIVOV, A. (1977) *Generalized method of eigen oscillations in the theory of diffraction*. M.: Nauka. 416
8. Копачевский, Н. Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012. — 152 с.
- KOPACHEVSKY, N. (2012) *Volterra Integro-Differential Equations in Hilbert Space*. Simferopol.
9. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2009. — 128 с.
- KOPACHEVSKY, N. (2009) *Spectral Theory of Operator Pencils*. Simferopol. 128.
10. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм. / Н. Д. Копачевский // Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — Т. 57. — С. 71–107.

- КОРАСНЕВСКИЙ, Н. (2015) Abstract Green Formulas for Triples of Hilbert Spaces and Sesquilinear Forms. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 57. p. 71-107.
11. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан // М.: Наука. — 1989. — 416 с.
- КОРАСНЕВСКИЙ, Н., КРЕЙН, С., НГО ЗУЙ КАН (1989) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics*. М.: Наука. 416.
12. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых её приложениях. / Н. Д. Копачевский // Спектральные и эволюционные задачи (Симферополь). — 2011. — Т. 21, № 1. — С. 2–39.
- КОРАСНЕВСКИЙ, Н. (2011) On the abstract Green's formula for mixed boundary-value problems. *Spectral and evolutionary problems*. 21 (1). p. 2-39.
13. Копачевский Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса. / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (Симферополь). — 2004. — Т. 2. — С. 52–80.
- КОРАСНЕВСКИЙ, Н. (2011) On the abstract Green's formula for mixed boundary-value problems and its applications to Stokes problem. *TVIM*. 2. p. 52–80.
14. Копачевский Н. Д. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения. / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2016. — Т. 61. — С. 67–102.
- КОРАСНЕВСКИЙ, Н. & РАДОМИРСКАЯ, К. (2016) Abstract Mixed Boundary and Spectral Transmission Problems and their Applications. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 61. p. 67–102.
15. Копачевский Н. Д. Смешанные краевые задачи сопряжения. / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2016. — № 1 (30). — С. 89–108.
- КОРАСНЕВСКИЙ, Н. & РАДОМИРСКАЯ, К. (2016) Mixed Boundary Value Transmission Problems. *TVIM*. 30. p. 89–108.
16. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. // М.: Мир. — 1977.
- OBEN G-P (1977) *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems*. М.: Mir. 384.
17. Радомирская К. А. Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения. / К. А. Радомирская // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2017. — Т. 63. — С. 316–339.
- РАДОМИРСКАЯ, К. (2017) The Spectral and Initial-Boundary Transmission Problems. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 63. p. 316–339.
18. Ройтберг Б. Я. Задачи трансмиссии в областях с негладкими границами. // Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Москва. — 1985. — Т. 8. — 428 с.

- ROITBERG, B. (1985) *Transmission problems in domains with nonsmooth boundaries*. Kiev: Naukova Dumka. 8.428
19. Старков П. А. О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения. // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — Т. 1. — С. 118–131.
- STAROKOV, P. (2003) On the basis property of a system of eigenelements in transmission problems. *TVIM*. (1). p. 118–131.
20. Старков П. А. Примеры многокомпонентных задач сопряжения. / П. А. Старков // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2005. — Т. 18 (57), № 1. — С. 89–94.
- STAROKOV, P. (2005) Examples of multicomponent transmission problems.. *Scientific notes of TNU. Mathematics and Mechanics*. 57 (1). p. 89–94.
21. AGRANOVICH, M. S., KATSENELENBAUM, B. Z., SIVOV, A. N., VOITOVICH, N. N. (1999) *Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory*. Berlin: Wiley–VCN.
22. AUBIN, J.-P. (1970) Abstract boundary-value operators and their adjoint. *Rend. Semin. Math. Univ. Padova*. 43. p. 1–33.
23. BABSKY, V. G., KOPACHEVSKY, N. D., MYSHKIS, A. D., SLOBOZHANIN, L. A., TYUPTSOV, A. D. (1987) *Low-Gravity Fluid Mechanics*. Springer-Verlag.
24. KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. (2001) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid*. Birkhauser Verlag.
25. KOPACHEVSKY, N. D. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*. Birkhauser Verlag.
26. SHOWALTER, R. E. (1994) *Hilbert space methods for partial differential equations*. Election. J. Differ. Equ.

УДК: 514.7

MSC2010: 51F15, 14L24

## О БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТАХ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ $W(J_3(4))$

© О. И. Рудницкий

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: oirud58@gmail.com

ON BASIS INVARIANTS OF UNITARY GROUP  $W(J_3(4))$ .

Rudnitskii O. I.

**Abstract.** In this paper, some properties of basis invariants of the unitary group  $W(J_3(4))$  of order 336 generated by reflections in 3-dimensional unitary space are studied. There is developed a new method of finding in explicit form the basic invariants of group  $W(J_3(4))$ . This method is based on the following property of group  $W(J_3(4))$  – group  $W(J_3(4))$  contains group  $B_3$  of symmetries of the cube, and Pogorelov polynomials of the form

$$J_{m_i}(G) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^{m_i},$$

where  $G$  is a reflection group,  $\sigma$  is reflection with respect to planes of symmetry,  $\vec{s}$  is the unit normal vector (with origin  $O$ ) of one of them, vector  $\vec{x}$  is given by  $\vec{x} = (x_i)$ ,  $m_i$  are degrees of the basic invariants of group  $G$ . In the present paper, using that method, the basis invariants of group  $W(J_3(4))$  in explicit form were constructed.

**Keywords:** Unitary space, reflection, reflection group, invariant, algebra of invariants.

### ВВЕДЕНИЕ

Группа  $W(J_3(4))$  порядка 336, порожденная отражениями в трехмерном унитарном пространстве, и ее инварианты исследовались в большом числе работ, см., например, [1]–[7]. При этом особый интерес представляет алгебраическая кривая  $\gamma$  четвертого порядка, которая на комплексной проективной плоскости задается уравнением  $J_4 = 0$ , где  $J_4$  – базисный инвариант четвертой степени группы  $W(J_3(4))$ .

В частности, кривая  $\gamma$  имеет 28 двойных касательных [2], является единственной кривой рода три с группой автоморфизмов порядка 168, а сам этот порядок реализует оценку, даваемую теоремой Гурвица для максимального порядка группы автоморфизмов кривой рода три [3].

В рамках этой статьи рассматривается новый подход к построению в явном виде базисных инвариантов группы  $W(J_3(4))$ .

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в  $n$ -мерном унитарном пространстве  $U^n$  задана координатная система началом  $O$  и ортонормированным базисом  $\vec{e}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $G$  – конечная не вещественная и неприводимая группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей с общей точкой  $O$ . Множество всех многочленов, инвариантных относительно  $G$ , образуют алгебру  $I^G$ , порожденную  $n$  алгебраически независимыми многочленами степеней  $m_i$  (показатели  $G$ ) [8]. В. Ф. Игнатенко [4] поставил задачу нахождения в явном виде всех образующих алгебры  $I^G$  на основе многочленов Погорелова

$$J_{m_i}(G) = \sum_{\sigma \in G} (\vec{x}, \sigma \vec{s})^{m_i}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – отражения относительно гиперплоскостей,  $\vec{s}$  – единичный вектор нормали (с началом  $O$ ) одной из них, вектор  $\vec{x} = (x_i)$ . Эта задача была решена в работе [5].

Целью настоящей работы является построение новым способом (с использованием многочленов Погорелова) в явном виде образующих алгебры  $I^{W(J_3(4))}$ .

## 2. БАЗИСНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУППЫ $W(J_3(4))$

Группа  $W(J_3(4))$  порядка 336 порождена в пространстве  $U^3$  отражениями второго порядка относительно плоскостей с уравнениями

$$x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0 \quad (2)$$

и

$$x_2 + x_3 = 0, \quad (3)$$

где  $\alpha = \frac{1-\varepsilon\sqrt{7}}{2}$ , (корень уравнения  $z^2 - z + 2 = 0$ ),  $\varepsilon = \sqrt{-1}$  [9]. Все 21 плоскости отражения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x_i = 0, \quad x_i \pm x_j = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (i < j), \\ x_i \pm x_j \pm \alpha x_k = 0 \quad ((i, j, k) = (1, 2, 3) - \text{циклически}). \end{aligned} \quad (4)$$

Множество их нормальных векторов  $\sigma \vec{s}$  (система корней группы  $W(J_3(4))$ ) состоит из 42 векторов

$$\pm \vec{e}_i, \quad \pm \frac{\alpha}{2}(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j), \quad \pm \frac{1}{2}(\vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \alpha \vec{e}_k).$$

Оно инвариантно относительно группы  $W(J_3(4))$ . Степени  $m_i = 4, 6, 14$  [8].

В работе [5] найдены все образующие алгебры  $I^{W(J_3(4))}$  вида (1). Рассмотрим еще один способ нахождения базисных инвариантов группы  $W(J_3(4))$ .

В [9] доказано, что при  $n \geq 3$  каждая примитивная группа  $G$ , порожденная отражениями второго порядка, содержит неприводимую вещественную подгруппу, порожденную отражениями. В частности,  $W(J_3(4))$  содержит группу  $B_3$  симметрий куба.

Выберем среди плоскостей (4) три плоскости, определяющие фундаментальную область группы  $B_3$ . Они имеют уравнения (2) и  $x_1 - x_2 = 0$ . При этом система корней группы  $B_3$  (множество  $\sigma \vec{s}$ ) состоит из векторов  $\pm \vec{e}_1, \pm \vec{e}_2, \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \vec{e}_3, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2), \pm \frac{1}{2}(\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2 \pm \alpha \vec{e}_3)$ . Степени образующих алгебры  $I^{B_3}$  равны 2, 4, 6.

Введем обозначения  $P_{m_i} = J_{m_i}(B_3)$ . Тогда, используя (1), с точностью до постоянного множителя, имеем:

$$P_2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + \alpha^2 x_3^2,$$

$$P_4 = 7(x_1^4 + x_2^4) + 2\alpha^4 x_3^4 + 18x_1^2 x_2^2 + 6\alpha^2 x_3^2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$P_6 = 7(x_1^6 + x_2^6) + \alpha^6 x_3^6 + 25x_1^2 x_2^2(x_1^2 + x_2^2) + 5\alpha^2 x_3^2(x_1^4 + x_2^4) + 5\alpha^4 x_3^4(x_1^2 + x_2^2) + 30\alpha^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2.$$

Поскольку  $W(J_3(4)) \supset B_3$ , алгебра  $I^{W(J_3(4))} \subset I^{B_3}$ . Таким образом, многочлен  $f \in I^{B_3}$ , если  $f \in I^{W(J_3(4))}$ . При этом, в силу выбора фундаментальной области группы  $B_3$ , элемент  $f$  алгебры  $I^{B_3}$  принадлежит алгебре  $I^{W(J_3(4))}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию

$$\delta(f) = f, \tag{5}$$

где  $\delta$  – отражение второго порядка относительно плоскости с уравнением  $x_2 + x_3 = 0$ .

Так как любой элемент  $f$  алгебры  $I^{B_3}$  представим в виде  $f = \phi_t(P_{m_i})$ , где  $\phi_t(P_{m_i})$  – некоторый многочлен подходящей степени  $t$ , от образующих  $P_{m_i}$ , то  $f \in I^{W(J_3(4))}$ , если многочлен  $\phi_t(P_{m_i})$  инвариантен относительно отражения  $\delta$ .

Получим теперь явный вид многочленов  $\phi_t(P_{m_i})$  и найдем образующие алгебры  $I^{W(J_3(4))}$ . Так как степени базисных инвариантов группы  $W(J_3(4))$  равны 4, 6, 14, нас будут интересовать только многочлены  $\phi_t(P_{m_i})$  степеней  $t = 2, 3, 7$ .

1. Пусть  $t = 2$ . Тогда

$$F_4 = \phi_2(P_2, P_4) = a_1 P_4 + a_2 P_2^2,$$

где  $a_1, a_2$  – неопределенные коэффициенты.

Если  $F_4$  удовлетворяет условию (5), то он должен оставаться неизменным при следующей замене переменных  $x_1 = x'_1, x_2 = -x'_3, x_3 = -x'_2$ . Отсюда для коэффициентов  $a_1, a_2$  получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7a_1 + 4a_2 = 2\alpha^4 a_1 + \alpha^4 a_2, \\ 9a_1 + 4a_2 = 3\alpha^2 a_1 + 2\alpha^2 a_2. \end{cases}$$

Ее решения  $a_1 = c$ ,  $a_2 = \frac{\alpha^4 - 53}{28}c$ . Обозначим через  $I_4$  многочлен  $F_4$  при найденных значениях коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ . Имеем

$$I_4 = -\frac{\varepsilon\alpha^2 c}{\sqrt{7}} \left( \sum x_i^4 - 3\bar{\alpha} \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2 \right).$$

Здесь и далее в записи многочленов индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Многочлен  $I_4$ , определяемый однозначно с точностью до постоянного множителя, является образующей четвертой степени алгебры  $I^{W(J_3(4))}$ . Отметим, что он совпадает с базисным инвариантом четвертой степени группы  $W(J_3(4))$ , полученным в работе [5] (смотри также [2, 3]).

**2.** Если  $t = 3$ , то многочлен

$$F_6 = \phi_3(P_2, P_4, P_6) = a_1 P_6 + a_2 P_2 P_4 + a_3 P_2^3.$$

Как и в случае  $t = 2$ , из соотношения (5), получаем линейную систему из трех уравнений

$$\begin{cases} 7a_1 + 14a_2 + 8a_3 = \alpha^6 a_1 + 2\alpha^6 a_2 + \alpha^6 a_3, \\ 25a_1 + 50a_2 + 24a_3 = 5\alpha^2 a_1 + 19\alpha^2 a_2 + 12\alpha^2 a_3, \\ 25a_1 + 50a_2 + 24a_3 = 5\alpha^4 a_1 + 10\alpha^4 a_2 + 6\alpha^4 a_3. \end{cases}$$

Общее решение этой системы:  $a_1 = \frac{91+49\varepsilon\sqrt{7}}{180}c$ ,  $a_2 = -\frac{2\varepsilon\sqrt{7}\alpha}{9}c$ ,  $a_3 = c$ . Таким образом, многочлен  $F_6$ , при найденных значениях коэффициентов  $a_i$ , имеет вид

$$I_6 = F_6 = -\frac{\alpha^7}{20}c \left( 2 \sum x_i^6 + 5\bar{\alpha} \sum x_i^4 x_j^2 + 20\alpha^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 \right).$$

Форма  $I_6$  является образующей шестой степени алгебры  $I^{W(J_3(4))}$  и, с точностью до постоянного множителя, совпадает с базисным инвариантом шестой степени группы  $W(J_3(4))$ , полученным в работе [5].

**3.** Пусть  $t = 7$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_{14} = \phi_7(P_2, P_4, P_6) = & a_1 P_2^7 + a_2 P_2^5 P_4 + a_3 P_2^4 P_6 + a_4 P_2^3 P_4^2 + a_5 P_2^2 P_4 P_6 + \\ & + a_6 P_2 P_6^2 + a_7 P_2 P_4^3 + a_8 P_6 P_4^2. \end{aligned}$$

Как и ранее, соотношение (5) приводит к линейной системе 15 уравнений относительно 8 неизвестных коэффициентов  $a_l$ , которую мы не приводим здесь вследствие

ее громоздкости. Общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= (-329459886 + 6528438\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (-177558885 + 6627825\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_2 &= (587493144 - 504504\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (229020120 + 5733000\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_3 &= (-120121344 - 12644352\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (97969032 - 24008040\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_4 &= (-320663840 - 3742816\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (-74389840 - 8165360\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_5 &= (89739776 + 14576128\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (-137090240 + 24081344\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_6 &= (-20590976 - 7068544\varepsilon\sqrt{7})c_1 + (-6146560 - 9658880\varepsilon\sqrt{7})c_2, \\ a_7 &= 49787136c_1, \\ a_8 &= 49787136c_2, \end{aligned}$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные числа.

Тогда многочлен  $F_{14}$ , при найденных значениях неопределенных коэффициентов  $a_l$ , может быть приведен к следующему виду

$$\begin{aligned} I_{14} = F_{14} &= 3^4 2^7 \alpha^2 (c_1 (-224\alpha^2 \sum x_i^{14} - 784(14 + \alpha) \sum x_i^{12} x_j^2 + \\ &+ (48216 + 21560\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^{10} x_j^4 - (26656 + 10976\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^8 x_j^6 - \\ &- (354956 + 70364\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 - (219912 + 36456\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + \\ &+ (554680 + 67032\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 - (648368 - 276752\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4) + \\ &+ c_2 ((1743 - 461\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^{14} - (5243 - 497\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^{12} x_j^2 + \\ &+ (28959 + 23443\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^{10} x_j^4 + (10045 + 26201\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^8 x_j^6 - \\ &- (135142 + 107758\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{j < k} x_i^{10} x_j^2 x_k^2 - (463197 + 7833\varepsilon\sqrt{7}) \sum x_i^8 x_j^4 x_k^2 + \\ &+ (870044 + 200844\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 x_k^2 - (272146 + 56042\varepsilon\sqrt{7}) \sum_{j < k} x_i^6 x_j^4 x_k^4)). \end{aligned}$$

Эта форма при любых значениях  $c_1, c_2$  есть инвариант 14-й степени группы  $W(J_3(4))$ . Если  $c_1 = 40$  и  $c_2 = -35 + 9\varepsilon\sqrt{7}$ , то  $I_{14}$ , с точностью до постоянного множителя, совпадает с  $I_4^2 I_6$ . Следовательно,  $I_{14}$  – образующая алгебры  $I^{W(J_3(4))}$ , только для значений  $c_1, c_2$ , удовлетворяющих условию  $\frac{c_2}{c_1} \neq \frac{-35+9\varepsilon\sqrt{7}}{40}$ .

Отметим, что при значениях

$$c_1 = -182973 + 290537\varepsilon\sqrt{7} \text{ и } c_2 = -213528 - 427336\varepsilon\sqrt{7}$$

форма  $I_{14}$ , с точностью до постоянного множителя  $c = 2^{16}3^27^4$ , совпадает с базисным инвариантом четырнадцатой степени группы  $W(J_3(4))$ , полученным в работе [5].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен и реализован новый метод построения в явном виде, на основе многочленов Погорелова, базисных инвариантов группы  $W(J_3(4))$ , порожденной отражениями в трехмерном унитарном пространстве. Преимущество предложенного метода состоит в возможности при проведении вычислений рассматривать не все множество плоскостей отражения (их 21), а только его подмножество, состоящее из 9 плоскостей.

Отметим также, что возможна модификация указанного метода, основанная на следующем свойстве группы  $B_3$  симметрий куба.

Так как  $B_3 \supset A_3$ , где  $A_3$  – группа симметрий правильного тетраэдра, то  $W(J_3(4)) \supset A_3$  и  $I^{W(J_3(4))} \subset I^{A_3}$ . Плоскости, определяющие фундаментальную область группы  $A_3$ , можно задать уравнениями (2) и  $x_1 = 0$ . Следовательно, элемент  $f$  алгебры  $I^{A_3}$  принадлежит алгебре  $I^{W(J_3(4))}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию (5).

Поскольку степени  $m_i$  базисных инвариантов группы  $A_3$  равны 2, 3, 4, то для нахождения базисных инвариантов удобнее использовать многочлены вида

$$H_{m_i} = \sum_r (\vec{x}, \overrightarrow{OV_r})^{m_i},$$

где  $\overrightarrow{OV_r}$  – радиус-векторы 4 вершин правильного тетраэдра.

Метод нахождения вершин правильного тетраэдра по его плоскостям симметрии приведен в работе [10]. Используя этот метод, получим: для выбранной фундаментальной области вершины тетраэдра определяются векторами  $\pm \vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2} \vec{e}_3$ ,  $\pm \vec{e}_2 - \frac{\alpha}{2} \vec{e}_3$ .

Тогда базисные инварианты группы  $A_3$  имеют вид:

$$\begin{aligned} H_2 &= 2(x_1^2 + x_2^2) + \alpha^2 x_3^2, \\ H_3 &= x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3, \\ H_4 &= 8(x_1^4 + x_2^4) + \alpha^4 x_3^4 + 12\alpha^2(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2). \end{aligned}$$

Реализуя рассмотренный в данной статье метод для форм  $H_{m_i}$ , можно построить все базисные инварианты группы  $W(J_3(4))$ , при этом будет использоваться еще меньшее число плоскостей, а базисные инварианты четвертой и шестой степеней будут, с точностью до постоянного множителя, совпадать с полученными ранее базисными инвариантами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. KLEIN, F. (1879) Ueber die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen. *Math. Ann.* Vol. 14. p. 428–471.
2. COXETER, H. S. M. (1983) My graph. *Proc. London Math. Soc.* Vol. 46 (3). p. 117–136.
3. COXETER, H. S. M., EDGE W. L. (1983) My graph. *Math. Repts. Acad. Sci. Can.* Vol. 5. p. 201–206.
4. Игнатенко, В. Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями / В. Ф. Игнатенко // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1989. — Т. 21. — С. 155–208.  
IGNATENKO, V. F. (1989) Geometric theory of invariants of groups generated by reflections. *Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* Vol. 21. p. 155–208.
5. Рудницкий, О. И. Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве / О. И. Рудницкий // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — 1990. — С. 115.  
RUDNITSKII, O. I. (1990) *Algebraic surfaces with finite symmetry groups in unitary space*. The thesis for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences.
6. Спрингер, Т. Теория инвариантов / Т. Спрингер. — М.: Мир, 1981. — 191 с.  
SPRINGER, T. (1981) *Invariant theory*. Moscow: Mir.
7. КАТО, М. (2004) Differential equations for invariant curves under Klein's simple groups of order 168. *Kyushu J. Math.* Vol. 58. p. 323–336.
8. SHEPHARD, G. C. (1954) Finite unitary reflection groups. *Can. J. Math.* Vol. 6 (2). p. 274–304.
9. СОХЕН, А. М. (1976) Finite complex reflection groups. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* Vol. 4. p. 379–436.
10. Игнатенко, В. Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями / В. Ф. Игнатенко // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1980. — Т. 11. — С. 203–240.  
IGNATENKO, V. F. (1980) The geometry of algebraic surfaces with symmetries. *Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* Vol. 11. p. 203–240.

Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д. О малых движениях системы двух сочленённых тел с полостями, частично заполненными тяжёлой вязкой жидкостью / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 7–32.

УДК: 517.98, 517.955, 532.5

В работе изучается линеаризованная начальнo-краевая задача, порожденная проблемой малых движений системы двух сочленённых маятников с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью. Приводится вывод уравнений движения, выводится закон баланса полной энергии, изучается операторная постановка задачи в терминах неизвестных полей перемещений жидкостей. Финальное дифференциальное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве попадает в класс сильно демпфированных линейных динамических систем. Отсюда следует теорема о существовании и единственности сильного решения задачи Коши на произвольном отрезке времени  $[0; T]$ . Соответствующая спектральная задача сводится к изучению обобщённого пучка С. Г. Крейна, возможно, с конечным числом отрицательных собственных значений.

*Ключевые слова:* уравнение изменения кинетического момента, операторная матрица, самосопряженный оператор, дискретный спектр,  $p$ -базис.

---

Закора Д. А. О корневых элементах операторной матрицы / Д. А. Загора // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 33–47.

УДК: 517.984.26, 517.984.5

В работе изучаются собственные и присоединенные элементы операторного блока специального вида. Доказано, что система корневых элементов этого операторного блока образует  $p$ -базис в основном гильбертовом пространстве при некотором  $p > 0$ . В случае, когда изучаемый оператор не имеет присоединенных элементов, строится система, биортогональная к системе собственных элементов.

*Ключевые слова:* операторная матрица, спектр, корневой элемент, базис, биортогональная система.

Копачевский Н. Д., Сёмкина Е. В. Формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трёх вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд / Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 48 – 61.

**УДК: 517.958**

В работе изучается проблема малых движений трёх вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта, заполняющих неподвижный сосуд. В процессе решения применяется метод ортогонального проектирования исходного уравнения на порождённые задачей пространства. Выясняется, что уже на этом этапе возникают некоторые усложнения по сравнению с задачей для двух вязкоупругих жидкостей, которая была рассмотрена ранее. Эти трудности появляются в связи с наличием жидкости с двумя свободными границами. Цель данной работы — получить формулы для ортопроекторов, связанных с проблемой малых движений трёх вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд.

*Ключевые слова:* ортопроектор, пространство соленоидальных векторных полей, вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система.

---

---

Лукьянова Е. А., Дереза А. В. О структурировании задействованной дискретной информации моделей Петри с целью ускорения вычисления инвариантов / Е. А. Лукьянова, А. В. Дереза // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 62 – 71.

**УДК: 519.711, 519.17**

В работе на примере моделирования задачи получения информации из нескольких баз данных реализовано совместное применение аппарата компонентного моделирования и усеченной матрицы инцидентности для структурирования задействованной дискретной информации, требуемой в процессе нахождения инвариантов временной модели Петри, с целью дальнейшего ускорения её анализа.

*Ключевые слова:* модели Петри со временем, большие данные, компонентное моделирование, матрица инцидентности, инварианты временной сети Петри.

Радомирская К. А. О некоторых начально-краевых задачах сопряжения / К. А. Радомирская // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 72–96.

УДК: 517.28, 517.984.46, 517.91

В работе изучается общая схема решения начально-краевых задач сопряжения, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Рассмотрены четыре задачи для одной области, получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве. Также изучены аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Уравнения, которым удовлетворяют их решения, приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы стандартные теоремы о существовании сильного решения.

*Ключевые слова:* гильбертово пространство, сильное решение, базисность, задача сопряжения, начально-краевая задача, операторный пучок.

---

---

Рудницкий О. И. О базисных инвариантах унитарной группы  $W(J_3(4))$  / О. И. Рудницкий // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 2 (35). — С. 97–103.

УДК: 514.7

Предложен и реализован новый способ построения в явном виде базисных инвариантов группы  $W(J_3(4))$  порядка 336, порожденной отражениями в трехмерном унитарном пространстве.

*Ключевые слова:* унитарное пространство, отражение, группа отражений, инвариант, алгебра инвариантов.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

---

*Войтицкий Виктор  
Иванович*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

*e-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

*Дереза Алёна  
Владиславовна*

аспирант кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

*e-mail: alena-dereza@mail.ru*

*Загора Дмитрий  
Александрович*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

*e-mail: dmitry.zkr@gmail.com*

*Копачевский Николай  
Дмитриевич*

д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

*e-mail: kopachevsky@list.ru*

*Лукьянова Елена  
Александровна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

*e-mail: lukyanovaea@mail.ru*

*Радомирская Карина  
Александровна*

аспирантка кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: radomirskaya@mail.ru*

*Рудницкий Олег  
Иванович*

к. ф.-м. н., доцент, заместитель директора Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: oirud58@gmail.com*

*Сёмкина Екатерина  
Владимировна*

к. ф.-м. н., преподаватель кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация  
*e-mail: kozirno@gmail.com*

Подписано к печати 23.11.2017. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,5 п. л. Тираж 50 экз.  
Заказ № НП/142. Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 18.12.2017.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.  
295007, г. Симферополь, пр-т Академика Вернадского, 4.