Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 1 (34) ' 2017

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

ISSN 1729-3901

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Российской Федерации. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015.

Включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук ВАК РФ 12.07.2017 по группам специальностей 01.01.00 — математика, 01.02.00 — механика, 05.13.00 — информатика, вычислительная техника и управление.

Индексируется в базе РИНЦ (https://elibrary.ru).

Статьи проходят рецензирование в соответствии с требованиями к рецензируемым научным журналам.

T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2017, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

УЧРЕДИТЕЛЬ — ФГАОУ ВО “КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО”

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 10 от 23 ноября 2017 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 517.432

MSC2010: 47A48, 47A20

СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНОСТИ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

© А. В. Биданец, Ю. Л. Кудряшов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Таврическая академия

факультет математики и информатики

просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация

e-mail: *alexander.bidanets@yandex.ru*

Minimality of selfadjoint dilation of operator knot of dissipative operator.

Bidanets A. V., Kudryashov Yu. L.

Abstract. Let A is dissipative densely defined operator in the space $\mathfrak{H}$ and $-i \in \rho(A)$. Let denote $R = (A + iI)^{-1}$ and consider the defect operators

$$B = iR - iR^* - 2R^*R,$$

$$\widetilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*,$$

$$T = I - 2iR.$$

A set of linear bounded operators acting from an entire Hilbert space H_1 into a Hilbert space H_2 will be denoted by $L(H_1, H_2)$.

Definition 1. The assembly of Hilbert spaces $\mathfrak{H}$, E_- и E_+ and operators $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \Phi \in L(E_-, \mathfrak{H}), \Psi \in L(\mathfrak{H}, E_+), K \in L(E_-, E_+)$ is called the operator knot, which has been introduced in work of U. L. Kudryashov «Selfadjoint dilation of operator knot of dissipative operator» in «Dynamic systems», 3(31), №1-2, 2013, p. 45-48[1].

$Q = (A, \Phi, K, \Psi, \mathfrak{H}, E_-, E_+)$, if the following relations hold:

$$B = \Psi^*\Psi;$$

$$\widetilde{B} = \Phi\Phi^*;$$

$$T^*\Phi + \Psi^*K = 0;$$

$$T\Psi^* + \Phi K^* = 0;$$

$$2\Phi^*\Phi + K^*K = I;$$

$$2\Psi\Psi^* + KK^* = I.$$

Selfadjoint dilation S of dissipative operator A is constructed using the knot Θ in [1] in the following manner.

The spaces $H_- = L_2((-\infty,0],E_-)$, $H_+ = L_2([0,+\infty))$ and $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ are considered.

The vector $h = (h_-, h_0, h_+) \in \mathfrak{D}(S)$ if and only if

1. $\left\{h_\pm, \frac{dh_\pm(t)}{dt}\right\} \subset H_\pm$;
2. $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$;
3. $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\widetilde{h}$.

Theorem 1. *The dilation S is minimal, i.e.*

$$H = \overline{span\left\{R_{\pm i}(S)\,h \mid h \in \mathfrak{H}, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}}$$

if the spaces $E_+ = \overline{\Psi\mathfrak{H}}$, $E_- = \overline{\Phi^*\mathfrak{H}}$ are separable.

The following expressions was used for the proof:

$$R^n_{-i}(S)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\a_n\\b_n\end{pmatrix},$$

where $n \in \mathbb{N}$, $a_n = R^n h_0$,

$$b_n = e^{-t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!i^{n-k-1}}\Psi R^{k-1}h_0.$$

$$R^n_{i}(S)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_n\\d_n\\0\end{pmatrix},$$

where $d_n = R^{*n}h_0$,

$$c_n = e^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!(-i)^{n-k-1}}\Phi^* R^{*k-1}h_0,$$

where $h_0 \in \mathfrak{H}$.

Keywords: *dilation, self-adjoint operator, unbounded dissipative operator, minimality, operator knot*

Введение. Предварительные сведения

В [1] было введено понятие операторного узла для диссипативного оператора, вообще говоря, неограниченного. Понятие узла даёт больше возможностей для построения дилатаций конкретных операторов за счёт выбора операторов узла.

Пусть A - диссипативный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $-i \in \rho(A)$.

Обозначим $(A+iI)^{-1} = R$ и рассмотрим дефектные операторы

$B = iR - iR^* - 2R^*R$, $\widetilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*$ и оператор $T = I - 2iR$.

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из всего гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, обозначим $L(H_1, H_2)$.

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, E_- и E_+ и операторов $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \Phi \in L(E_-, \mathfrak{H}), \Psi \in L(\mathfrak{H}, E_+), K \in L(E_-, E_+)$, называется операторным узлом [1] $Q = (A, \Phi, K, \Psi, \mathfrak{H}, E_-, E_+)$, если выполняются следующие соотношения:

$$B = \Psi^*\Psi; \tag{1}$$

$$\widetilde{B} = \Phi\Phi^*; \tag{2}$$

$$T^*\Phi + \Psi^*K = 0; \tag{3}$$

$$T\Psi^* + \Phi K^* = 0; \tag{4}$$

$$2\Phi^*\Phi + K^*K = I; \tag{5}$$

$$2\Psi\Psi^* + KK^* = I. \tag{6}$$

Оператор A называется основным оператором узла, Ψ, Φ — каналовыми, K — деформирующим операторами узла Θ.

Определение 2. Пусть A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Оператор $\widetilde{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, называется дилатацией [2], [3] оператора A, если выполняются следующие условия:

1) существует $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A})$;

2) $H \subset \widetilde{H}$;

3) $R^n_{\lambda_0}(A)h = PR^n_{\lambda_0}(\widetilde{A})h$ для любого $h \in H$ и $n \in \mathbb{N}$, P — ортопроектор из $\widetilde{H}$ на H, $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$, $R_{\lambda_0}(\widetilde{A}) = (\widetilde{A} - \lambda_0 I)^{-1}$.

Определение 3. Оператор $\widetilde{A}$ называется дилатацией узла Θ [1], если $\widetilde{A}$ является дилатацией основного оператора узла при любых Φ, Ψ и K из узла Θ (дилатация строится при помощи операторов узла).

Самосопряжённая дилатация S узла Θ диссипативного оператора A была построена в [1] следующим образом.

Рассмотрим линейное многообразие вектор-функций $h(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E и $t \in [a, b]$. Обозначим $L_2([a, b], E)$ - гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного многообразия по норме

$$\|h\|^2_{L_2([a,b],E)} = \int_a^b \|h(t)\|^2_E dt < \infty.$$

Рассмотрим узел Θ и пространства

$$H_- = L_2\left((-\infty, 0]\,; E_-\right),$$
$$H_+ = L_2\left([0, +\infty)\,; E_+\right).$$

Введём пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ со скалярным произведением

$$\left(h, \widetilde{h}\right)_H = \left(h_-, \widetilde{h}_-\right)_{H_-} + \left(h_0, \widetilde{h}_0\right)_{\mathfrak{H}} + \left(h_+, \widetilde{h}_+\right)_{H_+},$$

где $h = (h_-, h_0, h_+)$, $\widetilde{h} = \left(\widetilde{h}_-, \widetilde{h}_0, \widetilde{h}_+\right)$.

Определим в H оператор S.

Вектор $h = (h_-, h_0, h_+) \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1. $\{h_\pm, \frac{dh_\pm(t)}{dt}\} \subset H_\pm$;
2. $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$;
3. $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}$.

$$S = \begin{pmatrix} h- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_- \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ \Gamma_+ h_+ \end{pmatrix},$$

где $\Gamma_\pm h_\pm = i\frac{dh_\pm(t)}{dt}$.

В [1] доказано, что S — самосопряжённая дилатация узла Θ диссипативного оператора A.

Заметим, что при $E_- = E_+ = \mathfrak{H}$, $\Psi = \sqrt{B}$, $\Phi = \sqrt{\widetilde{B}}$, $K = T^*$ самосопряженная дилатация диссипативного оператора A была построена в [2] и [3].

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если вектор* $h = (h_-, h_0, h_+) \in \mathfrak{D}(S)$, *то* $\hat{h} = h_0 + \Psi^* h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ *и имеет место равенство* $(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0$, *где* $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Доказательство. Запишем условие 3) на $\mathfrak{D}(S)$ $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}$.

Подействуем на это равенство оператором Ψ^* слева:

$$\Psi^* h_+(0) = -\Psi^* K h_-(0) + i\Psi^*\Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

Используем условие (1) узла

$$\Psi^* h_+(0) + \Psi^* K h_-(0) + \widetilde{h} = R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h}.$$

Преобразуем левую часть этого равенства, используя условие (3) узла

$$\Psi^* h_+(0) - T^*\Phi h_-(0) + h_0 + \Phi h_-(0) = \Psi^* h_+(0) + h_0 - 2iR^*\Phi h_-(0) = \hat{h} - 2iR^*\Phi h_-(0),$$

$$\hat{h} = 2iR^*\Phi h_-(0) + R^*(A+iI)\widetilde{h} - 2iR^*\hat{h}.$$

Таким образом, $\hat{h} \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Подействуем на это равенство слева оператором $(A^* - iI)$:

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A+iI)\widetilde{h} - 2i\widetilde{h},$$

$$(A+iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0.$$

□

Основной результат

Определение 4. Самосопряжённая дилатация S, действующая в пространстве $\widetilde{H}$ узла Θ называется минимальной, если существует $\lambda_0 \in \rho(S)$, что

$$\widetilde{H} = \overline{span\left\{R^n_{\lambda_0}(S)h, R^n_{\overline{\lambda_0}}(S)h \mid h \in \mathfrak{H}, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}}.$$

Теорема 1. *Если $E_+ = \overline{\Psi\mathfrak{H}}$, $E_- = \overline{\Phi^*\mathfrak{H}}$ и эти пространства являются сепарабельными, то самосопряжённая дилатация S узла Θ является минимальной.*

Доказательство. В нашем случае $\lambda_0 = -i$, поэтому надо доказать, что

$$H = \overline{span\left\{R^n_{\pm i}(S)h \mid h \in \mathfrak{H}, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\}}.$$

Для этого достаточно доказать равенства

1. $H_+ = \overline{span\left\{R^n_{-i}(S)h \mid h \in \mathfrak{H}, n \in \mathbb{N}\right\}}$,
2. $H_- = \overline{span\left\{R^n_{i}(S)h \mid h \in \mathfrak{H}, n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Непосредственными вычислениями можно доказать [1] следующее равенство

$$R_{-i}(S) = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- + iI)^{-1}h_- \\ Rh_0 - \Phi v_i(0) \\ (\Gamma_0 + iI)^{-1}h_+ + e^{-t}v_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $R = (A+iI)^{-1}_{,}$

$$v_-(0) = \left[(\Gamma_- + iI)^{-1}h_-(t)\right]_{t=0},$$

$$v_+ = -Kv_-(0) + i\Psi h_0,$$

$$(\Gamma_0 + iI)^{-1}g_+(x) = \frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{t-x}g_+(t)\,dt,$$

$$(\Gamma_- + iI)^{-1} g_- (x) = \frac{1}{i} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{t-x} g_- (t) \, dt \, (\forall g_\pm \in H_\pm) \, .$$

Из (7) следует, что

$$R_{-i} (S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Rh_0 \\ (\Gamma_0 - iI)^{-1} h_+ + ie^{-t} \Psi h_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

и

$$R_{-i} (S) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Rh_0 \\ ie^{-t} \Psi h_0 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Применяя метод математической индукции, докажем формулу:

$$R^n_{-i} (S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix} , \tag{10}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_n = R^n h_0$, $b_n = e^{-t} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k-1}} \Psi R^{k-1} h_0$.

Из (9) получаем, что формула верна при $n = 1$.

Пусть (10) верно для n и докажем формулу для $n + 1$, т.е. что

$$a_{n+1} = R^{n+1} h_0,$$

$$b_{n+1} = e^{-t} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)! i^{n-k}} \Psi R^{k-1} h_0.$$

Применяя формулу (8), получаем:

$$R^{n+1}_{-i} (S) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_{-i} (S) \, R^n_{-i} (S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a'_{n+1} \\ b'_{n+1} \end{pmatrix},$$

где

$$b'_{n+1} = \frac{1}{i} \int\limits_0^t e^{x-t} e^x \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k-1}} \Psi R^{k-1} h_0 dx + ie^{-t} \Psi R^n h_0,$$

$$a'_{n+1} = R^{n+1} h_0 = a_{n+1}.$$

Преобразуем b'_{n+1}:

$$b'_{n+1} = e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{x^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k}} dx \cdot \Psi R^{k-1} h_0 + ie^{-t} \Psi R^n h_0 =$$

$$= e^{-t}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!i^{n-k}}\Psi R^{k-1}h_0 = b_{n+1}.$$

Пусть $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$, тогда для $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(S) = \begin{pmatrix} 0 \\ (A+iI)\,h_0 \\ 0 \end{pmatrix} - R_{-i}^{n}(S)\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_n^{''} \\ b_n^{''} \end{pmatrix},$$

где $a_n^{''} = 0$,

$$b_n^{''} = e^{''}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!i^{n-k}}\Psi R^{k-2}h_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!i^{n-k-1}}\Psi R^{k-1}h_0\right) =$$

$$= e^{-t}\left(\frac{t^n}{n!i^{n-1}}\Psi\,(A+iI)\,h_0 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!i^{n-k}}\varphi R^{k-2}h_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!i^{n-k+1}}\Psi R^{k-1}h_0\right).$$

Производя в первой сумме замену $q = k-1$, получаем

$$b_n^{''} = \frac{e^{-t}t^n}{n!i^{n-1}}\Psi\,(A+iI)\,h_0.$$

Так как $\overline{\Psi\,(A+iI)\,\mathfrak{D}\,(A)} = \overline{\Psi\mathfrak{H}} = E_+$, то в силу сеперабельности пространств E_+ множество вектор-функций вида $t^n e^{-t}h$, где $h \in E_+$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ плотно в $L_2\left([0,\infty), E_+\right)$ и, следовательно, выполняется равенство 1).

Теперь докажем 2).

Используя лемму, можно доказать [3], что

$$R_i(S)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_{-0} - iI)^{-1}h_- + e^t u_-(0) \\ R^*h_0 - \Phi v_-(0) \\ (\Gamma_+ - iI)^{-1}h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_- \\ u_0 \\ u_+ \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $u_+(0) = \left[(\Gamma_+ - iI)^{-1}h_+(t)\right]_{t=0}$,

$$\Gamma_{-0} = \Gamma_-|_{M_-},$$

$$M_- = \{h_- \in \mathfrak{D}(\Gamma_-) \mid h_-(0) = 0\},$$

$u_-(0) = -K^*u_+(0) - i\Phi^*h_0$,

$$(\Gamma_{-0} - iI)^{-1}g_-(x) = \frac{1}{i}\int_x^0 e^{x-t}g_-(t)\,dt.$$

$$(\Gamma_+ - iI)^{-1}g_+(x) = \frac{1}{i}\int_x^\infty e^{x-t}g_+(t)\,dt.$$

По индукции докажем, что

$$R_i^n\left(S\right)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n\\d_n\\0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $d_n=R^{*n}h_0$,

$$c_n=e^t\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!(-i)^{n-k-1}}\Phi^*R^{*k-1}h_0.$$

При $n=1$ из (11), получаем

$$R_i\left(S\right)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ie^t\Phi^*h_0\\R^*h_0\\0\end{pmatrix}$$

и формула (12) справедлива.

Пусть (12) верно для n и докажем её праведливость для $n+1$ то есть, что

$$d_{n+1}=R^{*n+1}h_0,$$

$$c_{n+1}=e^t\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!(-i)^{n-k}}\Phi^*R^{*k-1}h_0,$$

Применяя формулу (11), получим

$$R_i^{n+1}\left(S\right)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix}=R_i\left(S\right)R_i^n\left(S\right)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{n+1}^{'}\\d_{n+1}^{'}\\0\end{pmatrix},$$

где $d_{n+1}^{'}=R^{*n-1}h_0=d_{n+1}$.

$$c_{n+1}^{'}=-ie^t\Phi^*R^{*n}h_0+\frac{1}{i}\int\limits_0^t e^{t-x}c_n\left(x\right)dx=$$

$$=e^t\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)!i^{n-k}}t^{n-k+1}\Phi^*R^{*k-1}h_0-ie^t\Phi^*R^{*n}h_0=c_{n+1}.$$

Формула (12) доказана.

Пусть $h_0\in\mathfrak{D}\left(A^*\right)$, тогда для $n=0,1,2,\ldots$ получаем

$$R_i^{n+1}(S)\begin{pmatrix}0\\(A^*-iI)\,h_0\\0\end{pmatrix}-R_i^n(S)\begin{pmatrix}0\\h_0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_n''\\0\\0\end{pmatrix},$$

где

$$c_n''=e^t\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{n-k}t^{n-k+1}}{(n-k+1)!i^{n-k}}\Phi^*R^{*k-2}h_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k-1}t^{n-k}}{(n-k)!i^{n-k-1}}\Phi^*R^{*k-1}h_0\right).$$

Производя в первой сумме замену $q=k-1$, имеем

$$c_n''=\frac{t^ne^t}{n!(-i)^{n-1}}\Phi^*(A^*-iI)\,h_0.$$

Так как $\overline{\Phi^*(A^*-iI)\,\mathfrak{D}(A^*)}=\overline{\Phi^*\mathfrak{H}}=E_-$, то в силу сепарабельности пространства E_- множество вектор-функций вида t^ne^th, где $h\in E_-$, $n=0,1,2,\ldots$ плотно в $L_2((-\infty,0]\,,E_-)$ и, следовательно, выполнено 2). $\square$

Заключение

Понятие минимальности дилатации позволяет производить построение функциональных моделей оператора и изучать структуру пространства минимальной дилатации, как это делалось в [5] для сжатий.

Список литературы

1. Кудряшов, Ю. Л. Самосопряженная дилатация операторного узла диссипативного оператора / Ю. Л. Кудряшов // Динамические системы. — 2013. — Том. 3 (31), № 1–2. — С. 45–48.

   KUDRYASHOV, YU. L. (2013) Selfadjoint dilation of operator knot of dissipative operator. *Dynamic systems.* Vol. 3 (31) No. 1–2. p. 45–48.

2. Кужель, А. В. Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов / А. В. Кужель, Ю. Л. Кудряшов // ДАН СССР. — 1980. — Том 253, № 4. — С. 812–815.

   KUZHEL, A. V., KUDRYASHOV, U. L. (1980) Symmetrical and selfadjoint dilations of dissipative operators. *Reports of the USSR Academy of Sciences.* Vol. 253 (4). p. 812–815.

3. Кудряшов, Ю. Л. Симметрические и самосопряжённые дилатации диссипативных операторов / Ю. Л. Кудряшов // Сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1982. — Вып. 37. — С. 51–54.

   KUDRYASHOV Yu. L. (1982) Symmetrical and selfadjoint dilations of dissipative operators. *Function theory, functional analysis and it's application.* 37. p. 51–54.

4. Кудряшов, Ю. Л. Минимальность самосопряжённой дилатации диссипативного оператора / Ю. Л. Кудряшов // Динамические системы. — 2014. — Том 4 (32) № 3–4. — С. 279–285.

   KUDRYASHOV, Yu. L. (2014) Minimality of selfadjoint dilation of dissipative operator. *Function theory, functional analysis and it's application.* Vol 4(32) No. 3–4. p. 279–285.

5. Сёкефальви-Надь, Б. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш. — Москва: Мир, 1970. — 431 с.

   SZOKEFALVI-NAGY B., FOYASH Ch. (1970) *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space.* Moscow: Mir.

УДК: 517.983

MSC2010: 47A06, 47A10, 34B27

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Политехническая, 77, Саратов, 410054,Российская Федерация
e-mail: *vladislavbruk@mail.ru*

On self-adjoint extensions of operators generated by integral equations.

Bruk V. M.

Abstract. In the present work, we prove the Lagrange formula for the integral equation

$$y(t)=y_0-iJ\int\limits_{[a,t)}d\mathbf{p}_1(s)y(s)-iJ\int\limits_{[a,t)}d\mathbf{q}(s)f(s),$$

where $t\in[a,b]$, $b>a$; y is an unknown function; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}$ are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta\subset[a,b]$ and taking values in the set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space H; J is a linear operator in H, $J=J^*$, $J^2=E$. We assume that $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}$ are measures with a bounded variation and $\mathbf{q}$ is a self-adjoint measure; a function f is integrable with respect to the measure $\mathbf{q}$. The Lagrange formula contains summands that are related to single-point atoms of the measures $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}$.

We use the obtained results to study of linear operators generated by the equation

$$y(t)=x_0-iJ\int\limits_{[a,t)}d\mathbf{p}(s)y(s)-iJ\int\limits_{[a,t)}f(s)ds,$$

where $\mathbf{p}$ is a self-adjoint operator-valued measure with bounded variation; $x_0\in H$; $f\in L_1(H;a,b)$. We introduce a minimal symmetric operator generated by this equation and construct a space of boundary values (boundary triplet) under the condition that the measure $\mathbf{p}$ has a finite number of single-point atoms. This allows us, with the aid of boundary values, to describe self-adjoint extensions of the symmetric operator generated by the integral equation.

Keywords: *Hilbert space, integral equation, operator measure, symmetric operator, self-adjont extension, linear relation, boundary value.*

Введение

При изучении расширений операторов, порожденных дифференциальными выражениями, часто возникает задача: выделить граничные условия, которые порождают расширения с некоторыми заданными свойствами. Классическим примером решения подобной задачи является описание самосопряженных расширений симметрического оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением. Такое описание дано М.Г. Крейном (см., например, [1, гл. 5, с. 209]). В методе М.Г. Крейна существенно использовалась конечномерность дефектных подпространств симметрического оператора. Поэтому применение этих результатов к операторам с бесконечными индексами дефекта затруднено. Значительным продвижением в преодолении этих трудностей явилась работа Ф.С. Рофе-Бекетова [2], в которой впервые были использованы линейные отношения для описания самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением с ограниченными операторными коэффициентами. Эта работа стимулировала появление многочисленных статей, обобщающих результаты [2] в различным направлениях. Среди них статьи [3], [4] (см. также [5]), где введены абстрактные пространства граничных значений.

В данной работе строится пространство граничных значений для интегральных уравнений с операторными мерами. В случае интегральных уравнений (в отличие от дифференциальных) формула Лагранжа содержит дополнительные слагаемые, связанные с наличием одноточечных атомов у операторных мер, и это затрудняет построение такого пространства. На отрезке $[a,b]$ рассматривается уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ\int\limits_{[a,t)}(d\mathbf{p})y(s) - iJ\int\limits_{[a,t)} f(s)ds,$$

где J — линейный ограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $J=J^*$, $J^2=E$ (E –тождественный оператор), $\mathbf{p}$ — самосопряженная мера с ограниченной вариацией, $f\in L_1(H;a,b)$, $x_0\in H$. Определяются различные операторы, порожденные этим уравнением, и в случае, когда мера $\mathbf{p}$ имеет конечное число одноточечных атомов, строится пространство граничных значений для симметрического оператора. Это позволяет с помощью граничных значений дать описание самосопряженных расширений симметрического оператора, порожденного интегральным уравнением.

1. Решение интегральных уравнений

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta\to\mathbf{P}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{P}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [6, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{P}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{P}$, определенную на борелевских множествах $\Delta\subset[a,b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0]\supset[a,b_0)\supset[a,b]$, полагая $\mathbf{P}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a,b_0]\setminus[a,b]$.

Обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})=\rho(\Delta)=\sup\sum_k\|\mathbf{P}(\Delta_k)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_k\subset\Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})$ называется вариацией меры $\mathbf{P}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{P}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi\in[a,b]$ существует такая операторная функция $\xi\to\Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\|=1$, что для любого борелевского множества $\Delta\subset[a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{P}(\Delta)=\int_\Delta\Psi(\xi)d\rho$. Этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов, а функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры [6, гл. 5, с. 325].

Далее символ $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0<t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0>t$; и 0, если $t_0=t$. Функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на множестве Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int_\Delta\Psi(t)h(t)d\rho=\int_\Delta(d\mathbf{P})h(t)$. Если функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на $[a,b_0]$, то функция $y(t)=\int_{t_0}^{t}(d\mathbf{P})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле. Далее $\mathscr{S}_\mathbf{P}$ обозначает множество одноточечных атомов меры $\mathbf{P}$ (т.е. множество таких $t\in[a,b]$, что $\mathbf{P}(\{t\})\neq 0$). Множество $\mathscr{S}_\mathbf{P}$ не более чем счетно.

В следующей лемме $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ — операторные меры, имеющие локально ограниченную вариацию на $[a,b]$, принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в H, причем мера $\mathbf{q}$ самосопряженная, т.е. $(\mathbf{q}(\Delta))^*=\mathbf{q}(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ продолжены на отрезок $[a,b_0]\supset[a,b_0)\supset[a,b]$ описанным выше способом.

Лемма 1. *Пусть f, g — интегрируемые на $[a,b_0]$ по мере $\mathbf{q}$ функции; $y_0,z_0\in H$. Тогда для любых функций y, z вида*

$$y(t)=y_0-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{p}_1(s)y(s)-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{q}(s)f(s), \tag{1}$$

$$z(t)=z_0-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{p}_2(s)z(s)-iJ\int_{t_0}^{t}d\mathbf{q}(s)g(s),\quad a\leqslant t_0<b_0,\ \ t_0\leqslant t\leqslant b_0, \tag{2}$$

справедлива формула (*аналог формулы Лагранжа*)

$$\int_{c_1}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t),z(t))-\int_{c_1}^{c_2}(y(t),d\mathbf{q}(t)g(t))=(iJy(c_2),z(c_2))-(iJy(c_1),z(c_1))+$$

$$+\int_{c_1}^{c_2}(y(t), d\mathbf{p}_2(t)z(t)) - \int_{c_1}^{c_2}(d\mathbf{p}_1(t)y(t), z(t)) - \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)}(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t), \mathbf{p}_2(\{t\})z(t)) -$$
$$- \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)}(iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t), \mathbf{p}_2(\{t\})z(t)) - \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)}(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})y(t), \mathbf{q}(\{t\})g(t)) -$$
$$- \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)}(iJ\mathbf{q}(\{t\})f(t), \mathbf{q}(\{t\})g(t)), \quad t_0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_0. \quad (3)$$

Доказательство. Для сокращения записи суммы в (3) обозначим соответственно в порядке следования через $\sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$, $\sum_{\mathbf{q}\mathbf{p}_2}$, $\sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{q}}$, $\sum_{\mathbf{q}\mathbf{q}}$. Предположим сначала, что $c_1 = t_0$. Равенства (1), (2) влекут

$$\int_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t), z(t)) = \int_{[t_0,c_2)}(d\mathbf{q}(t)f(t), z_0 - iJ\int_{[t_0,t)}d\mathbf{p}_2(s)z(s) - iJ\int_{[t_0,t)}d\mathbf{q}(s)g(s)) =$$
$$= \int_{[t_0,c_2)}(d\mathbf{q}(t)f(t), z_0) + \int_{[t_0,c_2)}(iJd\mathbf{q}(t)f(t), \int_{[t_0,t)}d\mathbf{p}_2(s)z(s)) +$$
$$+ \int_{[t_0,c_2)}(iJd\mathbf{q}(t)f(t), \int_{[t_0,t)}d\mathbf{q}(s)g(s)). \quad (4)$$

Из равенства (1) следует

$$\int_{[t_0,c_2)}(d\mathbf{q}(t)f(t), z_0) = (iJy(c_2) - iJy_0, z_0) - \int_{[t_0,c_2)}(d\mathbf{p}_1(s)y(s), z_0).$$

Сменим пределы интегрирования в последних двух слагаемых (4). Получим

$$\int_{[t_0,c_2)}(iJd\mathbf{q}(t)f(t), \int_{[t_0,t)}d\mathbf{p}_2(s)z(s)) = \int_{[t_0,c_2)}(iJ\int_{(s,c_2)}d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) =$$
$$= \int_{[t_0,c_2)}(iJ\int_{[s,c_2)}d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \int_{[t_0,c_2)}(iJ\int_{\{s\}}d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) =$$
$$= \int_{[t_0,c_2)}(iJ\int_{[s,c_2)}d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)}(iJ\mathbf{q}(\{s\})f(s), \mathbf{p}_2(\{s\})z(s)). \quad (5)$$

Здесь в последнем равенстве (5) учтено, что меры $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}_2$ имеют не более чем счетное число одноточечных атомов. Аналогично получим

$$\int\limits_{[t_0,c_2)} (iJd\mathbf{q}(t)f(t), \int\limits_{[t_0,t)} d\mathbf{q}(s)g(s)) =$$

$$= \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ \int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{q}(s)g(s)) - \sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)} (iJ\mathbf{q}(\{s\})f(s), \mathbf{q}(\{s\})g(s)) . \quad (6)$$

Из (4), (5), (6) получим

$$\int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t), z(t)) = (iJy(c_2) - iJy_0, z_0) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(s)y(s), z_0)+$$

$$+ \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ \int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) + \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ \int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{q}(s)g(s)) - \sum\nolimits_{\mathbf{qp_2}} - \sum\nolimits_{\mathbf{qq}} . \quad (7)$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(s)y(s), g(s)) = \int\limits_{[t_0,c_2)} (y_0 - iJ \int\limits_{[t_0,s)} d\mathbf{p}_1(t)y(t) - iJ \int\limits_{[t_0,s)} (d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{q}(s)g(s)) =$$

$$= (y_0, iJz(c_2) - iJz_0) - (y_0, \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(t)z(t)) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), -iJ \int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{q}(s)g(s)) -$$

$$- \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ \int\limits_{[t_0,s)} (d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{q}(s)g(s)) + \sum\nolimits_{\mathbf{p_1q}} . \quad (8)$$

Из (7), (8) следует

$$\int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t), z(t)) - \int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)y(t), g(t)) = (iJy(c_2), z_0) - (iJy_0, z_0) -$$

$$- (y_0, iJz(c_2)) + (y_0, iJz_0) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(s)y(s), z_0) + (y_0, \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(t)z(t)) +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ \int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) + \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), -iJ \int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{q}(s)g(s)) +$$

$$+ (iJ \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{q}(t)f(t), \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{q}(t)g(t)) - \sum\nolimits_{\mathbf{qp_2}} - \sum\nolimits_{\mathbf{qq}} - \sum\nolimits_{\mathbf{p_1q}} . \quad (9)$$

Из равенств (1), (2), учитывая, что $(iJ)^* = -iJ$ и $J^2 = E$, получим

$$iJ\int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t) = -y(c_2) + y(s) - iJ\int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{p}_1(t)y(t),$$

$$-iJ\int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{q}(s)g(s) = z(c_2) - z(t) + iJ\int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{p}_2(s)z(s),$$

$$(iJ\int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{q}(t)f(t), \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{q}(t)g(t)) =$$

$$= (iJy(c_2), z(c_2)) - (iJy_0, z(c_2)) - (\int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_1(s)y(s), z(c_2)) -$$

$$- (iJy(c_2), z_0) + (iJy_0, z_0) + (\int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_1(s)y(s), z_0) + (y(c_2), \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(s)z(s)) -$$

$$- (y_0, \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(s)z(s)) + (iJ\int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_1(t)y(t), \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(t)z(t)).$$

Отсюда и из (9) следует

$$\int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)f(t), z(t)) - \int\limits_{t_0}^{c_2}(d\mathbf{q}(t)y(t), g(t)) = (iJy(c_2), z(c_2)) - (iJy_0, z_0) +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,c_2)} (y(s), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), z(t)) +$$

$$+ (iJ\int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), \int\limits_{[t_0,c_2)} d\mathbf{p}_2(t)z(t)) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ\int\limits_{[s,c_2)} d\mathbf{p}_1(t)y(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) +$$

$$+ \int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), iJ\int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \sum\nolimits_{\mathbf{q}\mathbf{p}_2} - \sum\nolimits_{\mathbf{q}\mathbf{q}} - \sum\nolimits_{\mathbf{p}_1\mathbf{q}}. \quad (10)$$

В последнем интеграле сменим пределы интегрирования. Тогда этот интеграл примет вид

$$\int\limits_{[t_0,c_2)} (d\mathbf{p}_1(t)y(t), iJ\int\limits_{[t,c_2)} d\mathbf{p}_2(s)z(s)) = \int\limits_{[t_0,c_2)} (\int\limits_{[t_0,s]} d\mathbf{p}_1(t)y(t), iJd\mathbf{p}_2(s)z(s)) =$$

$$= -\int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ\int\limits_{[t_0,s)} d\mathbf{p}_1(t)y(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ\int\limits_{\{s\}} d\mathbf{p}_1(t)y(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) =$$

$$= -\int\limits_{[t_0,c_2)} (iJ\int\limits_{[t_0,s)} d\mathbf{p}_1(t)y(t), d\mathbf{p}_2(s)z(s)) - \sum\nolimits_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}. \quad (11)$$

Здесь в последнем равенстве использован тот факт, что число одноточечных атомов мер $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ не более чем счетно. Из (10), (11) следует требуемое утверждение при $c_1 = t_0$. Рассмотрим случай $c_1 > t_0$. Обозначим через $\mathscr{I}[c_1, c_2)$ левую часть равенства (3), а через $\mathscr{J}[c_1, c_2)$ правую. Используя аналогичные обозначения, получим $\mathscr{I}[t_0, c_2) = \mathscr{I}[t_0, c_1) + \mathscr{I}[c_1, c_2)$, $\mathscr{J}[t_0, c_2) = \mathscr{J}[t_0, c_1) + \mathscr{J}[c_1, c_2)$. Теперь требуемое утверждение следует из первой части доказательства. Лемма доказана. □

Доказанная лемма устраняет ошибку, допущенную автором при доказательстве аналогичной леммы в [7].

Пусть отрезок $[l_1, l_2] \subset [a, b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева на $(l_1, l_2]$ (в сильном смысле) и постоянных на $[l_1, l_2] \cap (b, b_0]$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(\xi)y(\xi) + g(t), \quad a \leqslant t_0 \leqslant b_0, \quad (12)$$

где мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ (как и выше, полагаем $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b, b_0]$). Следующее утверждение доказано в [8].

Теорема 1. *Для любой функции $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ существует единственное решение уравнения (12), принадлежащее пространству $\widetilde{C}[t_0 - \delta, b_0]$, где $\delta = \delta(t_0) > 0$ достаточно мало и $\delta = 0$ при $t_0 = a$.*

Следствие 1. *Пусть $t_0 = a$. Тогда для любой функции $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\widetilde{C}[a, b_0]$.*

Далее предполагаем, что мера $\mathbf{p}$ самосопряженная. Рассматриваем уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ\int\limits_{a}^{t} d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ\int\limits_{a}^{t} f(s)d\mu(s), \quad (13)$$

где J — оператор в H, $J = J^*$, $J^2 = E$, $\mathbf{p}$ — самосопряженная мера с ограниченной вариацией, μ — обычная мера Лебега (т.е. мера μ, для которой $\mu([\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$

при всех $\alpha, \beta \in [a, b]$), продолженная на отрезок на $[a, b_0)$ равенством $\mu(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества $\Delta \subset (b, b_0]$; $x_0 \in H$, $f \in L_1(H; a, b)$ и $f = 0$ на $(b, b_0]$.

По мере $\mathbf{p}$ построим непрерывную меру $\mathbf{p}_0$ (т.е. меру без одноточечных атомов) следующим образом. Для всех $t_k \in \mathscr{S}_{\mathbf{p}}$ полагаем $\mathbf{p}_0(\{t_k\}) = 0$, а для всех борелевских множеств Δ таких, что $\Delta \cap \mathscr{S}_{\mathbf{p}} = \varnothing$, полагаем $\mathbf{p}_0(\Delta) = \mathbf{p}(\Delta)$. Мера $\mathbf{p}_0$ самосопряженная.

Рассмотрим уравнение, которое получается из (13) заменой меры $\mathbf{p}$ на $\mathbf{p}_0$

$$y(t) = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}_0(s)y(s) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s). \tag{14}$$

Согласно следствию 1 уравнения (13), (14) имеют единственные решения.

Обозначим через W операторное решение уравнения

$$W(t,\lambda)x_0 = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}_0(\xi)W(\xi,\lambda)x_0 - i\lambda J\int_a^t W(\xi,\lambda)x_0 d\mu(\xi), \tag{15}$$

где $x_0 \in H$. В лемме 1 возьмем $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p_0} + \lambda\mu$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 + \overline{\lambda}\mu$, $\mathbf{q} = \mu$, $f = g = 0$, $y(t) = W(t,\lambda)x_0$, $z(t) = W(t,\overline{\lambda})z_0$, $z_0 \in H$. Учитывая самосопряженность меры $\mathbf{p}_0$ и равенство $\mathscr{S}_{\mathbf{p}_0} = \varnothing$, получим для всех c_1, c_2 ($a \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_0$) равенство

$$(iJW(c_2,\lambda)x_0, W(c_2,\overline{\lambda})z_0) - (iJW(c_1,\lambda)x_0, W(c_1,\overline{\lambda})z_0) = 0.$$

Полагая здесь $c_2 = t$, $c_1 = a$ и учитывая произвольность $x_0, z_0 \in H$, будем иметь

$$W^*(t,\overline{\lambda})JW(t,\lambda) = J. \tag{16}$$

Функция $(t,\lambda) \to W(t,\lambda)$ непрерывна по t в равномерной операторной топологии и голоморфна по λ.

Лемма 2. *Функция y тогда и только тогда является решением уравнения*

$$y(t) = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}_0(s)y(s)x - i\lambda J\int_a^t y(s)d\mu(s) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s), \tag{17}$$

где $x_0 \in H$, $a \leqslant t \leqslant b_0$, когда y имеет вид

$$y(t) = W(t,\lambda)x_0 - W(t,\lambda)iJ\int_a^t W^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi). \tag{18}$$

Доказательство. Из следствия 1 следует, что решение уравнения (17) единственно. При $t = a$ правые части (17), (18) равны x_0. Обозначим $\widetilde{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{p}_0 + \lambda\mu$. Для доказательства требуемого утверждения нужно убедиться в том, что при подстановке правой части равенства (18) вместо y в уравнение (17) получается тождество. При такой подстановке правая часть (17) примет вид

$$x_0 - iJ\int_a^t d\widetilde{\mathbf{p}}_0(s)\left(W(s,\lambda)x_0 - W(s,\lambda)iJ\int_a^s W^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\xi\right) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s) =$$

$$= x_0 - iJ\int_a^t d\widetilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s,\lambda)x_0 - J\int_a^t d\widetilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s,\lambda)J\int_a^s W^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s). \tag{19}$$

Все меры в равенстве (19) непрерывны. Поэтому в правой части равенства (19) можно сменить пределы интегрирования. Учитывая (15), продолжим равенство (19)

$$W(t,\lambda)x_0 - \int_a^t J\left(\int_\xi^t d\widetilde{\mathbf{p}}_0(s)W(s,\lambda)\right)JW^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s).$$

Из (15) следует, что это выражение равно

$$W(t,\lambda)x_0 - \int_a^t i((W(t,\lambda)-E) - (W(\xi,\lambda)-E))JW^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) -$$

$$- iJ\int_a^t f(s)d\mu(s) = W(t,\lambda)x_0 - i\int_a^t W(t,\lambda)JW^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) +$$

$$+ i\int_a^t W(\xi,\lambda)JW^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s).$$

Учитывая (16), продолжим последнее равенство

$$W(t,\lambda)x_0 - iW(t,\lambda)J\int_a^t W^*(\xi,\overline{\lambda})f(\xi)d\mu(\xi) + iJ\int_a^t f(\xi)d\mu(\xi) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s) = y(t).$$

Теорема доказана. □

2. Операторы, порожденные интегральными уравнениями

Операторы, рассматриваемые ниже, действуют в пространстве $\mathfrak{H}=L_2(H,\mu;a,b_0)$, которое состоит из измеримых функций, определенных на $[a,b]$, принимающих значения в H и имеющих интегрируемый квадрат нормы. Скалярное произведение функций $x,y\in\mathfrak{H}$ задается равенством $(x,y)_{\mathfrak{H}}=\int_a^{b_0}(x(t),y(t))d\mu(t)$. Это пространство совпадает с пространством $L_2(H;a,b)$, так как $\mu(\Delta)=0$ на всех борелевских множествах $\Delta\subset(b,b_0]$.

Введем операторы L и $\mathscr{L}$, порожденные уравнениями (13) и (14) соответственно, следующим образом. Области определения $\mathscr{D}(L)$, $\mathscr{D}(\mathscr{L})$, операторов L, $\mathscr{L}$ состоят из функций y, для каждой из которых существует функция $f\in\mathfrak{H}$ такая, что выполняются (13), (14) соответственно. При этом полагаем $Ly=f$, $\mathscr{L}y=f$. Отметим, что из леммы 2 следует, что $\mathscr{L}y-\lambda y=f$ тогда и только тогда, когда выполняется (18).

Операторы L_0 и $\mathscr{L}_0$, порожденные уравнениями (13) и (14) соответственно, определяются как сужения операторов L, $\mathscr{L}$ на множество функций y, удовлетворяющих соответственно равенствам (20), (21)

$$y(a)=y(b_0)=y(t_k)=0,\quad t_k\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}};\tag{20}$$

$$y(a)=y(b_0)=0.\tag{21}$$

Из леммы 1 следует, что операторы L_0, $\mathscr{L}_0$ симметрические.

Замечание 1. Не исключено, что $\mathscr{D}(L_0)=\{0\}$. Пусть, например, множество $\mathscr{S}_{\mathbf{p}}$ всюду плотно на $[a,b]$. Известным примером такой ситуации является функция скачков $\rho(x)=\sum_{x_n<x}h_n$, где $\{x_n\}$ — множество рациональных чисел, $h_n=1/2^n$. Если $y\in\mathscr{D}(L_0)$, то из равенств (20) и непрерывности слева функции y получаем, что $y(t)=0$ при всех t. В данном случае $L_0^*=\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, т.е. является линейным отношением.

Лемма 3. *Справедливы утверждения: операторы L_0, $\mathscr{L}_0$ замкнуты и $L_0\subset\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_0^*=\mathscr{L}$. Области определения операторов L_0, $\mathscr{L}_0$ состоят из тех и только тех функций y, для которых выполняются равенства*

$$y(t)=W(t,0)iJ\int_a^t W^*(\xi,0)f(\xi)d\mu(\xi),\quad y(t_k)=W(t_k,0)iJ\int_a^{t_k}W^*(\xi,0)f(\xi)d\mu(\xi)=0,$$

где $t_k\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}}\cup\{b_0\}$ для оператора L_0 и $t_k=b_0$ для оператора $\mathscr{L}_0$.

Доказательство. Установим сначала, что $L_0\subset\mathscr{L}_0$. Пусть $y\in\mathscr{D}(L_0)$ и $L_0y=f$. Тогда выполняются равенства (13) (где $x_0=0$) и (20). Введем меру $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}-\mathbf{p}_0$. Отсюда

$\mathbf{p}_1(\{t_k\}) = \mathbf{p}(\{t_k\})$, $t_k \in \mathscr{S}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{p}_1(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества Δ такого, что $\Delta \cap \mathscr{S}_{\mathbf{p}} = \varnothing$. Из (13) следует

$$y(t) = x_0 - iJ\int_a^t (d\mathbf{p}_0)y(s) - iJ\int_a^t (d\mathbf{p}_1)y(s) - iJ\int_a^t f(s)ds.$$

Равенства (20) влекут (14) (где $x_0 = 0$). Поэтому $y \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ и $\mathscr{L}_0 y = f$.

Из леммы 1 следует, что $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_0^*$. Докажем обратное включение. Операторы $W(t,\lambda)$ имеют ограниченные обратные, и функция $t \to W(t,\lambda)$ непрерывна в равномерной операторной топологии. Поэтому множество функций $W(\cdot)c$, где $c \in H$, замкнуто в $\mathfrak{H}$. Отсюда и из (18) получаем, что оператор $c \to W(t,\lambda)c$ осуществляет взаимно однозначное отображение H на $\ker(\mathscr{L} - \lambda E)$. Из (18), (21) следует, что $\mathfrak{N}_\lambda = \ker(\mathscr{L} - \overline{\lambda}E)$, где $\mathfrak{N}_\lambda$ — дефектное подпространство оператора $\mathscr{L}_0$, т.е. ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к области значений $\mathscr{R}(\mathscr{L}_0 - \lambda E)$. Пусть $\widehat{\mathfrak{R}}(\lambda)$ — множество пар вида $\{z, \overline{\lambda}z\}$, где $z \in \mathfrak{R}_\lambda$, $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$. Из равенства $\mathscr{L}_0^* = \mathscr{L}_0 \dotplus \widehat{\mathfrak{R}}_\lambda \dotplus \widehat{\mathfrak{R}}_{\overline{\lambda}}$ следует $\mathscr{L}_0^* \subset \mathscr{L}$.

Докажем замкнутость L_0, $\mathscr{L}_0$. Пусть последовательности $\{y_n\}$, $\{f_n\}$ сходятся в $\mathfrak{H}$ к y, f соответственно и выполняется одно из равенств $L_0 y_n = f_n$ или $\mathscr{L}_0 y_n = f_n$. Из включений $L_0 \subset \mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}$ и равенств (18), (20), (21) получаем

$$y_n(t) = W(t,0)iJ\int_a^t W^*(\xi,0)f_n(\xi)d\mu(\xi), \quad y_n(t_k) = W(t_k,0)iJ\int_a^{t_k} W^*(\xi,0)f_n(\xi)d\mu(\xi) = 0, \tag{22}$$

где $t_k \in \mathscr{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b_0\}$ для L_0 и $t_k = b_0$ для $\mathscr{L}_0$. Переходя в (22) к пределу при $n \to \infty$ получим, что $y \in \mathscr{D}(L_0)$, $L_0 y = f$ или $y \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$, $\mathscr{L}_0 y = f$. Лемма доказана. □

Следствие 2. *Области значений операторов L_0, $\mathscr{L}_0$ состоят из функций $f \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих при всех t_k условию*

$$\int_a^{t_k} W^*(\xi,0)f(\xi)d\mu(\xi) = 0, \tag{23}$$

где $t_k \in \mathscr{S}_{\mathbf{p}} \cup \{b_0\}$ для оператора L_0 и $t_k = b_0$ для оператора $\mathscr{L}_0$.

Далее предположим, что множество одноточечных атомов $\mathscr{S}_{\mathbf{p}}$ меры $\mathbf{p}$ конечно и состоит из $n \geqslant 0$ точек. При $n \geqslant 1$ обозначим эти точки как t_k и предположим, что $a < t_1 < ... < t_n < b$. Если $n = 0$, то $\mathscr{S}_{\mathbf{p}} = \varnothing$. Обозначим $W_k(t,\lambda) = \chi_{[t_{k-1},t_k]}(t)W(t,\lambda)$, где $k = 1, ..., n+1$; $t_0 = a_0$; $t_{n+1} = b_0$; $\chi_{[c,d]}$ — характеристическая функция отрезка $[c, d]$. Пусть $\overline{W}(t, \lambda) = (W_1(t, \lambda)...W_{n+1}(t, \lambda))$ — операторная однострочная матрица, которую при фиксированных t, λ удобно рассматривать как оператор, отображающий H^{n+1} в H и действующий по формуле $\overline{W}(t, \lambda)\overline{c} = \sum_{k=1}^{n+1} W_k(t, \lambda)c_k$, где $\overline{c} = (c_1, ..., c_{n+1}) \in H^{n+1}$. Положим $\overline{W}(t) = \overline{W}(t, 0)$ и обозначим через $\mathscr{W}$ оператор $\overline{c} \to \overline{W}(t)\overline{c}$. Оператор $\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H^{n+1} в $\mathfrak{H}$, и его область значений замкнута. Сопряженный оператор $\mathscr{V} = \mathscr{W}^*$ отображает $\mathfrak{H}$ на H^{n+1} и действует по формуле

$$\mathscr{V} f = \int_a^{b_0} \overline{W}^*(s) f(s) d\mu(s), \quad f \in \mathfrak{H}. \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть множество $\mathscr{S}_{\mathbf{p}}$ состоит из $n \geqslant 0$ точек и $\mathscr{S}_{\mathbf{p}} \cap \{a, b\} = \varnothing$. Тогда L_0^* является оператором с областью определения, состоящей из функций*

$$y = \overline{W}(t)\overline{c} - \overline{W}(t) i \widetilde{J} \int_a^t \overline{W}^*(s) f(s) d\mu(s), \tag{25}$$

где $f \in \mathfrak{H}$, $\overline{c} \in H^{n+1}$. При этом $L_0^* y = f$. (Здесь $\widetilde{J}$ — оператор в H^{n+1}, действующий по формуле $\widetilde{J}(d_1, ..., d_{n+1}) = (Jd_1, ..., Jd_{n+1})$, $d_k \in H$.)

Доказательство. Обозначим через L_1 оператор с областью определения (25) и действующий по формуле $L_1 y = f$. Докажем, что $L_1 = L_0^*$. Пусть $u(t) = \overline{W}(t)\overline{c}$ — первое слагаемое в правой части (25), а $v(t)$ — второе слагаемое. Тогда

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n+1} v_k(t), \quad v_k(t) = -W_k(t) i J \int_a^t W_k^*(s) f(s) ds.$$

Для произвольной функции $y_0 \in \mathscr{D}(L_0)$ из следствия 2 получим, что $(L_0 y_0, u)_{\mathfrak{H}} = 0$. Леммы 1, 2 и непрерывность меры $\mathbf{p}_0$ влекут $(L_0 y_0, v)_{\mathfrak{H}} = \sum_{k=1}^{n+1} (L_0 y_0, v_k)_{\mathfrak{H}} = (y_0, f)_{\mathfrak{H}}$. Поэтому $v \in \mathscr{D}(L_0^*)$ и $L_0^* v = f$. Таким образом, $L_1 \subset L_0^*$.

Докажем обратное включение. Пусть $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$ и $L_0^* y = f$. Тогда функция $y - v \in \ker L_0^*$. Из (23) следует, что область значений оператора L_0 состоит из функций, ортогональных линейным комбинациям функций вида $W_k(t)c_k$, где $c_k \in H$. Поэтому найдется такое $\overline{c} \in H^{n+1}$, что $y - v = \overline{W}(t)\overline{c}$. Отсюда вытекает, что y имеет вид (25). Таким образом, $L_0^* \subset L_1$. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Оператор $\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H^{n+1} на $\ker L_0^*$. Оператор $\mathscr{V}$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}$ на H^{n+1} и действует по формуле (24).*

3. Описание самосопряженных расширений оператора L_0

Пусть функция $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$ и $L_0^* y = f$. Тогда y имеет вид (25). Для функции y определим граничные значения $Y = \Gamma_1 y$, $Y' = \Gamma_2 y$ равенствами

$$Y = \overline{c} - (1/2)i\widetilde{J}\int\limits_a^{b_0} \overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s) = \overline{c} - (1/2)i\widetilde{J}\mathscr{V}f, \quad Y' = \int\limits_a^{b_0} \overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s) = \mathscr{V}f.$$

Обозначим через Γ оператор, отображающий $\mathscr{D}(L_0^*)$ в $H^{n+1}\times H^{n+1}$ согласно формуле $\Gamma y = \{\Gamma_1 y, \Gamma_2 y\}$ (здесь $\{\cdot,\cdot\}$ — упорядоченная пара).

Теорема 3. *Область значений $\mathscr{R}(\Gamma)$ оператора Γ совпадает с $H^{n+1}\times H^{n+1}$ и справедлива "формула Грина"*

$$(L_0^* y, z)_{\mathfrak{H}} - (y, L_0^* z)_{\mathfrak{H}} = (Y', Z) - (Y, Z'), \tag{26}$$

где $y, z \in \mathscr{D}(L_0^*)$, $\Gamma y = \{Y, Y'\}$, $\Gamma z = \{Z, Z'\}$.

Доказательство. Следствие 3 влечет равенство $\mathscr{R}(\Gamma) = H^{n+1}\times H^{n+1}$. Докажем (26). Согласно теореме 2, функции y, z представимы в виде $y = u + F$, $z = w + G$, где

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n+1} F_k(t), \quad F_k(t) = -W_k(t)iJ\int\limits_{t_{k-1}}^{t} W_k^*(s)f(s)d\mu(s);$$

$$G(t) = \sum_{k=1}^{n+1} G_k(t), \quad G_k(t) = -W_k(t)iJ\int\limits_{t_{k-1}}^{t} W_k^*(s)g(s)d\mu(s);$$

$f = L_0^* y; g = L_0^* z; u = \overline{W}(t)\overline{c}; w = \overline{W}(t)\overline{d}; \overline{c} = (c_1, ..., c_{n+1}), \overline{d} = (d_1, ..., d_{n+1})$. Обозначим

$$Y_k = c_k - (1/2)iJ\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_k^*(s)f(s)d\mu(s); \quad Y_k' = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_k^*(s)f(s)d\mu(s).$$

Тогда $Y = (Y_1, ..., Y_{n+1}), Y' = (Y_1', ..., Y_{n+1}')$. Из (3), (16), (18) и непрерывности $\mathbf{p}_0$ следует

$$(f, G)_{\mathfrak{H}} - (F, g)_{\mathfrak{H}} = \sum_{k=1}^{n+1}((f, G_k)_{\mathfrak{H}} - (F_k, g)_{\mathfrak{H}}) = \sum_{k=1}^{n+1}(iJW_k(t_k)iJY_k', W_k(t_k)iJZ_k') =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(iW_k^*(t_k)JW_k(t_k)iJY_k', iJZ_k') = -\sum_{k=1}^{n+1}(Y_k', iJZ_k') = -(Y', i\widetilde{J}Z'); \tag{27}$$

$$(f, w)_{\mathfrak{H}} = (f, w)_{\mathfrak{H}} - (F, 0)_{\mathfrak{H}} = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(f(s), W_k(s)d_k)ds - \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(F(s), 0)ds\right) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n+1}(iJW_k(t_k)iJ\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} W_k^*(s)f(s)d\mu(s), W_k(t_k)d_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n+1}(iW_k^*(t_k)JW(t_k)iJY_k', d_k) = \sum_{k=1}^{n+1}(Y_k', d_k) = (Y', \overline{d}). \quad (28)$$

Аналогично имеем

$$(u, g) = (\overline{c}, Z'). \quad (29)$$

Из равенств (27), (28), (29) следует

$$(f, z) - (y, g) = (f, v) + (f, G) - (u, g) - (F, g) = -(Y', i\widetilde{J}Z') + (Y', \overline{d}) - (\overline{c}, Z') =$$
$$= (Y', \overline{d} - (1/2)i\widetilde{J}Z') - (\overline{c} - (1/2)i\widetilde{J}Y', Z') = (Y', Z) - (Y, Z').$$

Теорема доказана. □

Из теоремы 3 следует, что тройка $(H^{n+1}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений (или граничной тройкой в другой терминологии) в смысле работ [3], [4] (см. также [5, гл. 3, с. 158]). Между линейными отношениями $\theta \subset H^{n+1} \times H^{n+1}$ и операторами $\widetilde{L}$ со свойством $L_0 \subset \widetilde{L} \subset L_0^*$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\Gamma\widetilde{L} = \theta$. В этом случае обозначаем $\widetilde{L} = L_\theta$. Отношение L_θ является самосопряженным тогда и только тогда, когда отношение θ самосопряженное (терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в работах [2], [5], [9]). Из [2], [3], [4], [5] вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Для любого унитарного оператора U в H^{n+1} сужение оператора L_0^* на множество функций $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, удовлетворяющих условию*

$$(U - E)\Gamma_2 y + i(U + E)\Gamma_1 y = 0, \quad (30)$$

представляет собой самосопряженное расширение оператора L_0. Обратно, всякое самосопряженное расширение оператора L_0 является сужением оператора L_0^* на множество функций $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, удовлетворяющих равенству (30), *причем унитарный оператор U определяется по расширению однозначно.*

Аналогичным образом могут быть описаны диссипативные и аккумулятивные расширения оператора L_0.

Список литературы

1. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

NAIMARK, M.A. (1969) *Linear differential operators.* Moscow: Nauka.

2. Рофе-Бекетов, Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций / Ф. С. Рофе-Бекетов // Доклады АН СССР. — М.: Наука, 1969. — Т. 184, № 5. — С. 1034–1037.

   ROFE-BEKETOV, F.S. (1969) Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector functions. *Soviet Math. Dokl.* 10, No 1. p. 188–192.

3. Кочубей, А. Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / А. Н. Кочубей // Математические заметки. — М.: Наука, 1975. — Т. 17, № 1. — С. 41–48.

   KOCHUBEI, A.N. (1975) Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. *Mathematical Notes.* 17 (No 1). p. 25–28.

4. Брук, В. М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии / В. М. Брук // Математический сборник. — М.: Наука, 1976. — Т. 100, № 2. — С. 210–216.

   BRUK, V.M. (1976) On a class of boundary value problems with spectral parameter in the boundary condition. *Sbornik: Mathematics.* 29 (No 2). p. 186–192.

5. Горбачук, В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. — Киев: Наукова Думка, 1984. — 284 с.

   GORBACHUK, V.I. and GORBACHUK, M.L. (1991) *Boundary value problems for differential-operator equations.* Dordrecht-Boston-London: Kluver Acad. Publ.

6. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова Думка, 1965. — 798 с.

   BEREZANSKI, Yu.M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

7. Брук, В. М. О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлиновской мерой / В. М. Брук // Известия вузов. Математика. — Казань, 2012. — № 10. — С. 3–199.

   BRUK, V.M. (2012) Linear relations generated by an integral equation with Nevanlinna operator measure. *Russian Math. (Iz. VUZ).* 56, No 10. p. 1–14.

8. Брук, В. М. О граничных задачах для интегральных уравнений с операторными мерами / В. М. Брук // Таврический Вестник Информатики и Математики. — Симферополь, 2016. — № 1 (30). — С. 38–48.

   BRUK, V.M. (2016) On boundary value problems for integral equations with operator measures. *Taurida Journal of Computer science theory and Mathematics.* No 1 (30). p. 38–48.

9. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Успехи матем. наук. — М., 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

   BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys.* 68 (No 1). p. 69–116.

УДК: 519.7

MSC2010: 68R01

КОЛМОГОРОВСКАЯ СЛОЖНОСТЬ И VC РАЗМЕРНОСТЬ СЕМЕЙСТВ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

© В. И. Донской

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *vidonskoy@mail.com*

Kolmogorov complexity and the VC dimension of families of recursive functions.

Donskoy V. I.

Abstract. Kolmogorov's definition of algorithmic complexity of constructive objects [7] is applicable not only to character strings, but also to the functions, function collections, and many other objects. If we define Kolmogorov complexity of a family of recursive functions, it will be its entropy characteristics. Introduced by different ways measures of a complexity of families of functions are of great theoretical and practical interest. In particular – combinatorial dimension or the dimension of Vapnik-Chervonenkis that for an arbitrary family $\mathfrak{F}$ is denoted as $VCD(\mathfrak{F})$ is a measure of the diversity or entropy of this family.

The main idea of this article consists in the following. According to Kolmogorov's approach it must be assumed that the complexity of a family of functions $\mathfrak{F}$ must be the smallest length of a binary word, which is received as input, the optimal machine-decompressor will allow to completely restore any function of the family $\mathfrak{F}$. So determined Kolmogorov complexity of the family, denoted further $KC(\mathfrak{F})$, will be a measure of its uncertainty – Kolmogorov entropy. If $\mathfrak{F}$ is a finite collection of computable functions and $KC(\mathfrak{F}) = len(p)$, where p – the binary word, $len(p)$ – the length of p, one can specify a constructive method of constructing upper bounds of the Kolmogorov complexity $KC(\mathfrak{F})$ consisting in the fact that on the basis of precise original description of the class $\mathfrak{F}$ it is constructed (encoded or, one might say, programmed) as short as possible description of this class in the form of word p'. In this way mathematicians do while programming data structures. It is necessary that the word p' would be possible by using some decompressor to recover any function of the family $\mathfrak{F}$, and then $KC(\mathfrak{F}) \leq len(p')$.

Previously [4], the author introduced the definition of the conditional Kolmogorov complexity $K_l(\mathfrak{F})$ of an arbitrary family of recursive functions $\mathfrak{F}$ relative of a set of training samples of the length l. By use this definition, the inequalities

$$VCD(\mathfrak{F}) \leq K_l(\mathfrak{F}) < VCD(\mathfrak{F}) \log l, \tag{1}$$

was proven, just in case when both the conditions

$$\text{i)}\ \ VCD(\mathfrak{F}) \geq 2;$$
$$\text{ii)}\ \ l > VCD(\mathfrak{F}) \qquad (2)$$

have a place. The result (1) was useful because it gave lower and upper estimates of the conditional Kolmogorov complexity of a family of functions and let to prove the theorem on non-computability of VC dimension of arbitrary family of recursive functions [5]. However, exhaustive justification of the $pVCD$ method [6] of estimation of VC dimension was prevented by the condition (2).

In the paper, a new definition of Kolmogorov complexity $KC(\mathfrak{F})$ is presented, and the inequality $VCD(\mathfrak{F}) \leq KC(\mathfrak{F})$ is proved. This inequality allows to use $len(p')$ as an estimation of the Kolmogorov complexity of the family $\mathfrak{F}$ and as the upper estimation of its capacity $VCD(\mathfrak{F})$. Estimations of VCD of some families of functions obtained by $pVCD$ method (and for the comparison – obtained by other methods) are given.

Keywords: *VC dimension, Kolmogorov complexity, recursive functions.*

Введение

Колмогоровское определение алгоритмической сложности конструктивных объектов [7] применимо не только к строкам символов, но и к функциям, к семействам функций, и ко многим другим объектам. Если определить колмогоровскую сложность семейства функций, то она будет являться его энтропийной характеристикой. Вводимые разными способами меры сложности семейств функций представляют большой теоретический и практический интерес. В частности – комбинаторная размерность или размерность Вапника-Червоненкиса, которая далее для произвольного семейства $\mathfrak{F}$ обозначается как $VCD(\mathfrak{F})$ и является одной из мер разнообразия или энтропией этого семейства.

Основная идея данной статьи состоит в следующем. Согласно колмогоровскому подходу следует полагать, что сложностью конечного семейства функций $\mathfrak{F}$ должна быть наименьшая длина двоичного слова, получив которое в качестве входа, оптимальная машина-декомпрессор позволит полностью восстановить любую функцию семейства $\mathfrak{F}$. Определённая таким образом колмогоровская сложность семейства, обозначаемая далее $KC(\mathfrak{F})$, будет являться мерой его неопределённости – колмогоровской энтропией. Если $\mathfrak{F}$ – конечное семейство вычислимых функций и $KC(\mathfrak{F}) = len(p)$, где p – двоичное слово, а $len(p)$ – его длина, то можно указать конструктивный метод построения верхней оценки колмогоровской сложности $KC(\mathfrak{F})$, состоящий в том, что на основе точного исходного описания класса $\mathfrak{F}$ строится (кодируется или, можно сказать, программируется) как можно более короткое его описание в виде слова p'. Подобным образом математики поступают при программировании структур данных. Необходимо, чтобы по слову p' можно было бы при помощи некоторой программы-декомпрессора восстановить любую функцию семейства $\mathfrak{F}$, и тогда $KC(\mathfrak{F}) \leq len(p')$. Если при этом доказать неравенство $VCD(\mathfrak{F}) \leq KC(\mathfrak{F})$, то $len(p')$ будет не только верхней оценкой колмогоровской сложности семейства $\mathfrak{F}$, но и верхней оценкой его вапниковской ёмкости $VCD(\mathfrak{F})$.

Определение колмогоровской сложности семейства функций можно дать только при наличии определения колмогоровской сложности любой одной функции из этого семейства. В работе [9, с. 13] было предложено определять колмогоровскую сложность $K(f)$ частично рекурсивной функции f как $K(f) = \min_i\{K(i) : \text{машина Тьюринга } T_i \text{ вычисляет} f\}$, или, иначе, если p_f есть кратчайшая программа для вычисления функции f, то $K(f) = len(p_f)$ (если программ вычисления функции f несколько, то программа p_f – первая по порядку номеров).

Ранее [4] автором было введено определение условной колмогоровской сложности $K_l(\mathfrak{F})$ произвольного семейства (подмножества) рекурсивных функций $\mathfrak{F}$ относительно множества всевозможных обучающих выборок длины l, на основе которого были получены неравенства

$$VCD(\mathfrak{F}) \leq K_l(\mathfrak{F}) < VCD(\mathfrak{F}) \log l, \tag{3}$$

справедливые в случае, когда одновременно выполнены условия

$$\text{i)}\ \ VCD(\mathfrak{F}) \geq 2;$$

$$\text{ii)}\ \ l > VCD(\mathfrak{F}). \tag{4}$$

Результат (3) оказался полезным, поскольку дал нижнюю и верхнюю оценку условной колмогоровской сложности семейства функций и позволил доказать теорему о невычислимости VC размерности произвольного семейства рекурсивных функций [5]. Однако исчерпывающему обоснованию $pVCD$ метода оценивания VC размерности препятствовало условие (4).

Целями данной статьи являются:

1) дать новое определение колмогоровской сложности $KC(\mathfrak{F})$ для любого семейства $\mathfrak{F} \subseteq P_{p.r.}$, где $P_{p.r.}$ класс частично рекурсивных функций;

2) доказать неравенство $VCD(\mathfrak{F}) \leq KC(\mathfrak{F})$, не содержащее дополнительных ограничений, для любого семейства функций $\mathfrak{F} \subseteq P_{p.r.}$;

3) обосновать на основе этого неравенства так называемый $pVCD$ метод оценивания размерности Вапника-Червоненкиса для любого конечного семейства функций $\mathfrak{F} \subset P_{p.r.}$, допускающего компьютерную реализацию;

Цели 1) и 2) направлены на получение новых теоретических результатов, а цель 3) – на практические приложения в области теории машинного обучения.

1. Основной результат

Пусть задано множество X^n, каждый элемент $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ которого будем называть точкой, и некоторое семейство индикаторных (классифицирующих) функций $\mathfrak{D} = \{\psi : X^n \to \{0,1\}\}$. Каждая функция $\psi \in \mathfrak{D}$ сопоставляет каждому элементу множества X^n значение 0 или 1. Тогда набору (выборке) из l точек $\tilde{X}_l = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$ может быть сопоставлено двоичное слово $(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_l)$, называемое разбиением точек этого набора на два класса (по значениям $\alpha_i = 0$ и $\alpha_i = 1$).

Определение 1. [1] VC-размерностью или $VCD(\mathfrak{D})$ семейства $\mathfrak{D}$ называется наибольшее число h такое, что существует выборка из h элементов множества X^n, которую функции семейства $\mathfrak{D}$ могут разбить на два класса всеми возможными способами, но никакую выборку длины $l > h$ при помощи функций семейства $\mathfrak{D}$ разбить на два класса всеми 2^l способами невозможно. Если же всевозможные разбиения выборок существуют для сколь угодно большого h, то $VCD(\mathfrak{D})$ полагается равной бесконечности.

Семейству вещественнозначных функций $\mathfrak{F} = \{f : X^n \to E(f)\}$ поставим в соответствие семейство $\hat{\mathfrak{F}} = \{I(f(\tilde{x}) > b_f), f \in \mathfrak{F}\}$ индикаторных функций, где b_f пробегает область значений $E(f)$,

$$I(f(\tilde{x}) > b_f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\tilde{x}) \le b_f; \\ 1, & \text{если } f(\tilde{x}) > b_f. \end{cases}$$

Определение 2. [1] VC-размерностью произвольного семейства функций $\mathfrak{F}$ называется VC размерность семейства индикаторных функций $\hat{\mathfrak{F}}$ этого семейства.

Определение 3. Колмогоровская сложность $n-$местной частично рекурсивной функции $f = f(x_1, ..., x_n)$ при заданном декомпрессоре D есть

$$K_D(f) = \min\{l(p) | D(p, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \ \ \forall (x_1, ..., x_n) \in Dom(f)\}.$$

$K_D(f)$ существует, поскольку существует универсальная частично рекурсивная $(n+1)$-местная функция $U = U(n, x_1, ..., x_n)$ такая, что для любой частично рекурсивной n-местной функции $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ выполняется равенство $U(n, x_1, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_n)$ для всех $(x_1, ..., x_n)$, когда значение $\varphi(x_1, ..., x_n)$ определено.

Определение 4. Колмогоровская сложность частично рекурсивной функции f есть

$$K(f) = \min_{D \in \mathscr{D}} K_D(f),$$

где $\mathscr{D}$ – множество всех таких декомпрессоров, что для каждого декомпрессора $D \in \mathscr{D}$ найдётся двоичное слово p, обеспечивающее для всех $(x_1, ..., x_n)$ из области определения функции f выполнение равенства $D(p, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$.

$K(f)$ существует, что следует из существования $K_D(f)$.

Определение 5. Колмогоровская сложность семейства $\mathfrak{F}_{(n)}$ n-местных частично рекурсивных функций есть

$$KC(\mathfrak{F}_{(n)}) = \sup_{f \in \mathfrak{F}_{(n)}} K\mathrm{C}(f).$$

Далее, чтобы упростить запись, не будем помечать обозначение семейства функций $\mathfrak{F}_{(n)}$ соответствующей этому семейству местностью n, имея в виду общий случай.

Для конечных семейств $\mathfrak{F}$ их колмогоровская сложность будет ограничена: $\sup_{f \in \mathfrak{F}} K\mathrm{C}(f) < \infty$, поскольку не превысит логарифма числа функций в классе $\mathfrak{F}$. Для бесконечных семейств функций $\mathfrak{F}$, в частности, для всего класса частично рекурсивных функций, $\sup_{f \in \mathfrak{F}} K\mathrm{C}(f) = +\infty$. Если $\mathfrak{F}$ – конечное семейство, то его колмогоровская сложность $KC(\mathfrak{F})$ является минимальной длиной, которая меньше или равна длине любого такого двоичного слова p, из которого можно "извлечь" любую функцию $f \in \mathfrak{F}$. Иначе говоря, найдётся машина Тьюринга, которая для любой функции $f \in \mathfrak{F}$, получив на вход двоичное слово p_f длины $KC(\mathfrak{F})$, даст описание другой машины Тьюринга, обеспечивающей вычисление функции f.

Аргументы и значения частично рекурсивных функций, принадлежащие расширенному натуральному ряду $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots, \}$, можно представить двоичными строками, например, $\{0, 1, 10, 11, 100, \dots\}$. Последовательность из l точек $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_j, \dots, \tilde{x}_l$, где $\tilde{x}_j = (x_1, \dots, x_n)$, $\overline{j = 1, n}$, также может быть представлена некоторой двоичной строкой $\tilde{X}_l$.

В приложениях, когда используются классы функций, реализуемые конечными компьютерами, большую роль играет параметр M – количество двоичных разрядов, которое может быть использовано для представления одного числа. В таком случае каждая переменная x_i, $i = \overline{1, n}$, может принимать только 2^M различных значений.

Условимся, что выборка $\tilde{X}_l$ из l точек представляется двоичным словом $\tilde{X}$ в подходящей кодировке, которое несёт в себе информацию о значениях M, n и l. Обозначим $\tilde{y}^l = (f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_j), \dots, f(\tilde{x}_l))$.

Теорема 1. *Если семейство рекурсивных функций $\mathfrak{F}$ имеет конечную ёмкость $VCD(\mathfrak{F})$, то выполняется неравенство $VCD(\mathfrak{F}) \leq KC(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Поскольку семейство $\mathfrak{F}$ имеет конечную ёмкость $VCD(\mathfrak{F})$, в нём должно содержаться не менее $2^{VCD(\mathfrak{F})}$ различных функций. Самое короткое двоичное слово, позволяющее выделить (как минимум – пронумеровать) каждую из указанного числа функций будет иметь длину $VCD(\mathfrak{F})$. В то же время колмогоровская сложность $KC(\mathfrak{F})$ семейства $\mathfrak{F}$ определяет минимальную длину $len(p)$ двоичного слова p, достаточную для того, чтобы иметь возможность указать значение этого слова – "программу" p_f для вычисления каждой функции f семейства $\mathfrak{F}$. Поэтому должно выполняться неравенство

$$2^{VCD(\mathfrak{F})} \leq 2^{len(p)} = 2^{KC(\mathfrak{F})},$$

выражающее тот факт, что ёмкость семейства $\mathfrak{F}$ не может превышать его колмогоровской сложности. Но для полноты доказательства следует уточнить: может ли для некоторого семейства функций $\mathfrak{F}$ иметь место равенство $VCD(\mathfrak{F}) = KC(\mathfrak{F})$ и может ли иметь место строгое неравенство $VCD(\mathfrak{F}) < KC(\mathfrak{F})$ при условии $KC(\mathfrak{F}) < \infty$.

Укажем такое параметрическое семейство $\mathfrak{F}_{M,n,l}$, для которого выполняется равенство $VCD(\mathfrak{F}_{M,n,l}) = KC(\mathfrak{F}_{M,n,l})$. Параметры M, n, l полагаются заданными, и их значениями располагает декомпрессор, что позволяет, получив входную строку, отсчитывать n раз по M бит для извлечения описания одной точки и l раз по $M \times n$ бит для извлечения выборки из l точек. Будем полагать, что все функции рассматриваемых семейств определены на множестве любых конечных двоичных строк и принимают в качестве значений некоторые двоичные строки. Определим конечное семейство $\mathfrak{F}_{M,n,l} = \{f_0, f_1, \ldots, f_{2^d-1}\}$ следующим образом. Каждая вычислимая функция $f_j,\ j \in 0, 1, \ldots, 2^d - 1$, реализует отображение на основе преобразования заданной фиксированной для этой функции строки длины d, представляющей собой двоичный код ω_j номера j функции f_j, при необходимости дополненный слева нулями для выравнивания по указанной длине d.

Алгоритм вычисления $f_j(\tilde{X})$ состоит в следующем. Получив входную строку $\tilde{X}$ длины $len(\tilde{X})$, алгоритм определяет число

$$l = \left\lfloor \frac{len(\tilde{X})}{nM} \right\rfloor^*$$

(функция в правой части последнего равенства является частично рекурсивной). Если $l = d$, то в качестве результата выдаётся строка ω_j длины d; если $l < d$, то в качестве результата выдаётся отрезок строки ω_j, являющийся её окончанием длины l. Если $l > d$, то выдаётся строка $\omega_j 0 \ldots 00$, являющаяся дополнением справа строки ω_j ровно $(l - d)$ нулями.

Очевидно, что все функции семейства $\mathfrak{F}_{M,n,l}$ попарно различны, их число равно 2^d, и эти функции в совокупности могут выдавать любые двоичные слова длины l только при $l \le d$. Сложность указанного семейства $KC(\mathfrak{F}_{M,n,l}) = d$, поскольку задание любого двоичного слова p длины d позволяет извлечь любую из функций семейства $\mathfrak{F}_{M,n,l}$ описанным выше алгоритмом. С другой стороны, если входное слово $\tilde{X}$ имеет длину $L = M \times n \times d$, что соответствует любой выборке, состоящей из d двоичных отрезков (блоков) длины $M \times n$, то для любого двоичного слова $\tilde{y}$ длины d в семействе $\mathfrak{F}_{M,n,l}$ найдется функция, которая поставит в соответствие этому входу $\tilde{X}$ указанное слово $\tilde{y}$. Иначе говоря, при помощи функций семейства $\mathfrak{F}_{M,n,l}$ можно любым способом классифицировать d блоков входной строки $\tilde{X}$. Но никакие $d+1$ блоков классифицировать всеми 2^{d+1} способами при помощи функций семейства $\mathfrak{F}_M$ не удастся, поскольку в этом семействе имеется только 2^d функций. Поэтому $VCD(\mathfrak{F}_M)$, как и колмогоровская сложность $K\mathrm{C}(\mathfrak{F}_M)$, равна d. Таким образом, $VCD(\mathfrak{F}_{M,n,l}) = K\mathrm{C}(\mathfrak{F}_{M,n,l})$.

Теперь укажем семейство линейных однородных функций $\mathfrak{L}_{M,n}$ вида

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \dots + a_ix_i,\dots,a_nx_n;\ a_i \in \{0,1,\dots,2^M-1\}, x_i \in \mathbb{N}_0,$$

которое содержит 2^{Mn} различных функций. Известно, что $VCD(\mathfrak{L}_{M,n}) = n$ [2, с. 48], поэтому $VCD(\mathfrak{L}_{M,n}) < KC(\mathfrak{L}_{M,n}) < \infty$. □

2. О методе программирования оценок VCD и колмогоровской сложности конечных семейств частично рекурсивных функций

Полученное в теореме 1 неравенство $VCD(\mathfrak{F}) \le KC(\mathfrak{F})$ позволяет применять для произвольного конечного семейства $\mathfrak{F}$ частично рекурсивных функций оценку $VCD(\mathfrak{F}) \le KC(\mathfrak{F}) \le len(p_{\mathfrak{F}})$, где $p_{\mathfrak{F}}$ – любое сконструированное (запрограммированное как структура данных) двоичное слово конечной длины такое, что можно точно определить машину Тьюринга $M_{\mathfrak{F}}$ (или компьютерную программу $\Pi_{\mathfrak{F}}$), которая, получив на вход слово $p_{\mathfrak{F}}$, может выдать точное описание любой функции семейства $\mathfrak{F}$ в виде рекурсивной функции или программы. Длина слова $p_{\mathfrak{F}}$, очевидно, и будет верхней оценкой и колмогоровской сложности, и комбинаторной размерности (VCD) семейства $\mathfrak{F}$. Такой метод оценивания VCD был предложен автором в работе [4] и назван $pVCD$ методом, однако его исчерпывающее теоретическое обоснование даётся теоремой 1, доказанной в данной статье.

Покажем, что оценка $KC(\mathfrak{F}) \le len(p_{\mathfrak{F}})$ является достижимой. Для этого рассмотрим конечный класс из четырёх линейных однородных булевых функций

$\mathfrak{L}_{1,2} \in P_2(2) = \{a_1{\cdot}x_1{\oplus}a_2{\cdot}x_2;\ a_i, x_i \in \{0,1\}, i = 1,2\}$. Двухбитовое слово $p_{\mathfrak{L}_{1,2}}$ позволяет закодировать все четыре комбинации пар значений коэффициентов a_1, a_2. Программа, извлекающая функции по заданному слову $p_{\mathfrak{L}_{1,2}} = \alpha_1, \alpha_2$, для любых входных значений булевых переменных x_1, x_2 просто вычисляет функцию $\alpha_1 \cdot x_1 \oplus \alpha_2 \cdot x_2$. Таким образом, в классе $\mathfrak{L}_{1,2}$ содержится ровно четыре функции, информацию о которых невозможно сжать в двоичную строку длины менее, чем 2. $VCD(\mathfrak{L}_{1,2})$ семейства линейных однородных функций, как уже отмечалось, равно размерности $n = 2$; $VCD(\mathfrak{L}_{1,2}) = KC(\mathfrak{L}_{1,2}) = len(p_{\mathfrak{L}_{1,2}}) = 2$.

В случае достаточно сложных семейств рекурсивных функций (алгоритмов и программ) получение оценок при помощи $pVCD$ метода требует изобретательности и навыков программирования структур данных, но оказывается существенно проще, и во многих случаях оценки получаются лучше, чем найденные комбинаторными методами. Однако нужно напомнить, что эти оценки предполагают компьютерную реализацию функций.

В табл. 1. приведены оценки VCD некоторых семейств функций, полученные $pVCD$ методом, и для сравнения – полученные другими методами и найденные в указанных источниках. Для всех приведенных в таблице оценок M обозначает разрядность компьютера, а n – число переменных. В табл. 1 включены следующие семейства функций.

$BFT_{n,\mu}$ – семейство булевых функций, зависящих от n переменных и представленных бинарными деревьями не более чем с μ листьями.

$DNF_{m,\mu,n}$ – семейство булевых функций, представленных в виде дизъюнктивных нормальных форм, содержащих не более μ конъюнкций над n переменными и не более m литералов.

$BSP_{n,\mu}$ – семейство решающих функций, представленных BSP-деревьями не более чем с μ листьями над n вещественными переменными, которые используются для задания линейных предикатов в вершинах бинарного дерева.

$NN_{k,1}$ – семейство решающих функций, определяемых нейронными сетями с единственным скрытым слоем, содержащим k узлов.

$NN_{k,m}$ – семейство решающих функций, определяемых нейронными сетями с k узлами в каждом из m скрытых слоёв.

$\mathfrak{F}_{IMA}$ – семейство решающих функций, определяемых интервальными множественными автоматами [8] с алфавитами данных из μ символов и с r состояниями.

Т а б л и ц а 1

Семейство функций	Оценка ёмкости семейства pVCD методом	Оценка ёмкости другими методами
$BFT_{n,\mu}$	$(\mu-1)(\lceil log_2 n\rceil + \lceil log_2(\mu+3)\rceil)$	$\mu log_2(n\mu)$ [3]
$DNF_{m,\mu,n}$	$m+(\mu-1+m)\lceil log_2(n+1)\rceil$	–
$BSP_{n,\mu}$	$(\mu-1)(\lceil log_2 n\rceil+\lceil log_2(\mu+3)\rceil+nM)$	–
$NN_{k,1}$	$M(nk+2k+1)$	$(2nk + 4k + 2) \times$ $\times log_2(e(nk+2k+1))$ [10]
$NN_{k,m}$	$M((n+m)k+mk^2)$	$O((n + m)k + mk^2) \times$ $\times log_2((n+m)k+mk^2)$ [2]
$\mathfrak{F}_{IMA}$	$\mu(M+r^2)+r$	$O(\mu(log_2\mu+r^2))$ [8]

Заключение

В работе получен следующий теоретический результат: размерность Вапника-Червоненкиса произвольного класса частично рекурсивных функций не превышает колмогоровской сложности этого класса: $VCD(\mathfrak{F}) \le KC(\mathfrak{F})$ для любого семейства функций $\mathfrak{F} \subseteq P_{p.r.}$. Это неравенство позволяет применять для произвольного конечного семейства $\mathfrak{F}$ частично рекурсивных функций оценку $VCD(\mathfrak{F}) \le KC(\mathfrak{F}) \le len(p_{\mathfrak{F}})$, где $p_{\mathfrak{F}}$ – любое сконструированное (запрограммированное как структура данных) двоичное слово конечной длины такое, что можно указать компьютерную программу $\Pi_{\mathfrak{F}}$, которая, получив на вход слово $p_{\mathfrak{F}}$, может выдать точное описание любой функции семейства $\mathfrak{F}$ в виде реализующей её программы. Длина слова $p_{\mathfrak{F}}$ будет верхней оценкой и колмогоровской сложности, и VC размерности семейства $\mathfrak{F}$. Такой метод оценивания VCD был предложен автором в работе [4] и назван $pVCD$ методом, однако его исчерпывающее теоретическое обоснование даётся теоремой 1, доказанной в данной статье.

Список литературы

1. Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. — М.: Наука, 1979. — 448 с.

   VAPNIK, V. (1979) *The restoration of dependencies from empirical data.* Moscow: Nauka.

2. Вьюгин, В. В. Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования / В. В. Вьюгин. — М.: МЦНМО, 2013. — 387 с.

   VJUGIN, V. (2013) *Mathematical foundation of machine learning theory and forecasting* . Moscow: MCCME.

3. Донской, В. И. Асимптотика числа бинарных решающих деревьев // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия "Математика". — 2001. — Т. 14, № 53. — С. 36–38.

   DONSKOY, V. (2001) The asymptotic number of binary decision trees. *Scientific notes of V. I. Vernadsky Taurida national University. Series "Mathematics"*. 14 (53). p. 36–38.

4. Донской, В. И. Колмогоровская сложность классов общерекурсивных функций с ограниченной ёмкостью // Таврический вестник информатики и математики. — 2005. — № 1. — С. 25–34.

   DONSKOY, V. (2005) Kolmogorov complexity of total recursive function classes with limited capacity. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 1. p. 25–34.

5. Донской, В. И. Невычислимость VC-размерности семейств классифицирующих функций // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1. — С. 5–13.

   DONSKOY, V. (2014) Non-computability of the VC dimension of classifiers families. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 1. p. 5–13.

6. Донской, В. И. Оценки ёмкости основных классов алгоритмов эмпирического обобщения, полученные pVCD методом // Ученые записки ТНУ им. В.И.Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — 2010. — Т. 23, № 62. — С. 56–65.

   DONSKOY, V. (2010) Estimations of the capacity of the basic classes of algorithms of empirical generalizations derived by the pVCD method. *Scientific notes of V. I. Vernadsky Taurida national University . Series "Phys.-Math. Sc."*. 23 (62). p. 56–65.

7. Колмогоров, А. Н. Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // УМН. — 1983. — Т. 38, вып.4(232). — С. 27—36.

   KOLMOGOROV, A. (1983) Combinatorial foundation of information theory and of the calculus of probability. *Successes of mathematical Sciences.* 38 (4,232). p. 27—36.

8. BEIMEL, P., KUSHILEVITZ, E. (2000) Learning Unions of High Dimensional Boxes over the Reals. *Inf. Proc. Letters.* 73(5-6). p. 213–220.

9. GRUNVALD, A., VITANYI, P. (2004) Shannon Information and Kolmogorov Complexity. *arxiv:cs, cs. IT.* 0410002. p. 51.

10. SONTAG, E. (2008) VC Dimension of Neural Networks. *In Neural Networks and Machine Learning.* Berlin: Springer. p. 69–95.

УДК: 519.872.1

MSC2010: 60K25

ПРИОРИТЕТНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ДВУХ НЕНАДЕЖНЫХ ЛИНИЙ

© А. И. Коваленко, В. П. Смолич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *email@gmail.com*

Priority repair of two unreliable lines.

Kovalenko A. I, Smolich V. P.

Abstract. The system under consideration consists of two unreliable lines. The first line is more effective then the second one. Both lines have Poisson failure flow. If the lines are in good working order, failure rate of the first line is α_1, failure rate of the second line is β_1. If one of the lines is down, failure rate of the other equals α_2 or β_2 respectively. The system is serviced by a single repairman. Repair times of the lines are absolutely continuous random variables ω_i, $(i = 1, 2)$ with finite expectations r_i, cumulative distribution functions $F_i(x) := \mathbb{P}\{\omega_i \leqslant x\}$, corresponding density functions $f_i(x)$, reliability functions $\Phi_i(x) := 1 - F_i(x)$, $i = 1, 2$. Repair of the first line is a priority, that is the repairman leaves the repair process of the second line (while preserving the setup time) and begins to service the first line. The equilibrium probabilities of the system in terms of Laplace transforms of the functions $f_i(x)$ and $\Phi_i(x)$ are obtained in the article. We deduce as well average number of faulty lines, probability of system failure, system availability factor, mean time between failures.

Keywords: *queueing systems, unreliable system, priority repair, equilibrium probabilities, queueing systems with breakdowns*

Введение

Рассматривается система, состоящая из двух ненадежных линий. При этом одна из линий является более эффективной при выполнении своих функций чем вторая. Назовём условно первую из них линией первого ранга, а вторую – второго ранга. Потоки отказов (поломок) линий будем предполагать простейшими с параметрами α_1 и α_2 для линии первого ранга соответственно когда обе линии исправны и исправна только линия первого ранга и с параметрами β_1 и β_2 для линии второго ранга соответственно когда обе линии исправны и исправна только линия второго ранга.

Обслуживание системы осуществляет один наладчик. Времена обслуживания линий ω_1 (первого ранга) и ω_2 (второго ранга) – произвольные непрерывные случайные величины, имеющие конечные математические ожидания. Обозначим через $\mu_i(x)$ $(i = 1, 2)$ – интенсивности случайных величин ω_i а через $f_i(x)$ и $\Phi_i(x)$ – функции плотности распределения и надежности.

Поскольку ω_i являются положительными случайными величинами, то при $x < 0$ $f_i(x) = 0,\ \Phi_i(x) = 1$. Обозначим через r_i $(i = 1, 2)$ математические ожидания величин ω_i. Заметим, что имеют место формулы

$$r_i = \int\limits_0^\infty x f_i(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \Phi_i(x)\,dx, \quad \Phi_i(x) = \exp\left(-\int\limits_0^x \mu_i(t)\,dt\right),$$
$$f_i(x) = \mu_i(x)\Phi_i(x) = -\Phi_i'(x).$$

Условия обслуживания системы наладчиком предполагают, что наладчик обязательно занят обслуживанием одной из вышедших из строя линий (разумеется, при наличии таково́й), при этом обслуживание линии первого ранга является приоритетным, то есть если во время обслуживания линии второго ранга происходит отказ линии первого ранга, то наладчик оставляет обслуживание линии второго ранга (с сохранением времени наладки) и приступает к обслуживанию линии первого ранга.

Целью данной работы является получение основных вероятностных характеристик системы в стационарном режиме: вероятности состояний системы, среднее количество неисправных линий, вероятность отказа системы (когда обе линии отказали), загрузка наладчика, коэффициент готовности системы, средняя наработка между отказами.

Математическое моделирование

Система может находиться в состояниях:

(0) – обе линии исправны;

$(1, \omega_1)$ – линия второго ранга исправна и функционирует, линия первого ранга вышла из строя, ω_1 – время, затраченное наладчиком на её восстановление;

$(2, \omega_2)$ – линия первого ранга исправна и функционирует, линия второго ранга вышла из строя, ω_2 – время, затраченное наладчиком на её восстановление.

Состояние системы, когда обе линии неисправны, разбивается на два подсостояния:

$(3, \omega_1, \omega_2)$ – обе линии неисправны, ω_1 – время, затраченное на наладку линии первого ранга (наладка продолжается), ω_2 – отложенное время наладки линии второго ранга;

$(4, \omega_1)$ – обе линии неисправны, ω_1 – время наладки линии первого ранга, к обслуживанию линии второго ранга наладчик не приступал.

Введем случайный процесс $\xi(t)$ с фазовым пространством состоящим из рассмотренных выше пяти состояний. Аргумент $t > 0$ трактуется как время.

Диаграмма переходов состояний системы имеет вид:

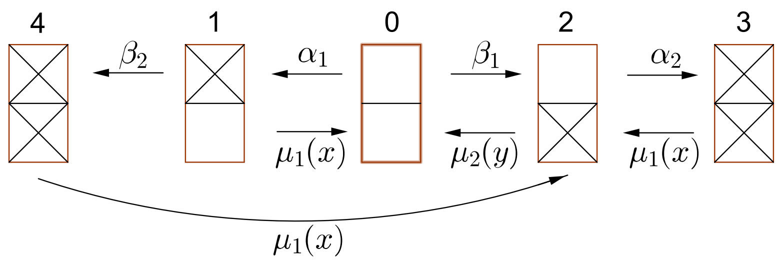

Рис. 1. Диаграмма переходов

Введём функции:

$$p_i(t) := \mathbb{P}\{\xi(t) = i\},\ i = \overline{0, 4},$$

$$Q_1(t, x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 1,\ \omega_1 < x\}, \quad q_1(t, x) := \frac{\partial Q_1(t, x)}{\partial x},$$

$$Q_2(t, y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2,\ \omega_2 < y\}, \quad q_2(t, y) := \frac{\partial Q_2(t, y)}{\partial y},$$

$$Q_3(t, x, y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 3,\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, \quad q_3(t, x, y) := \frac{\partial^2 Q_3(t, x, y)}{\partial x \partial y},$$

$$Q_4(t, x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 4,\ \omega_1 < x\}, \quad q_4(t, x) := \frac{\partial Q_4(t, x)}{\partial x}.$$

Заметим, что имеют место соотношения:

$$p_1(t) = Q_1(t, +\infty) = \int_0^\infty q_1(t, x)\, dx, \qquad p_2(t) = Q_2(t, +\infty) = \int_0^\infty q_2(t, y)\, dy,$$

$$p_3(t) = Q_3(t, +\infty, +\infty) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_3(t, x, y)\, dx\, dy, \qquad p_4(t) = Q_4(t, +\infty) = \int_0^\infty q_4(t, x)\, dx.$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы приводят к следующей системе интегро – дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$\begin{cases} {p_0}'(t) + (\alpha_1+\beta_1)p_0(t) = \int\limits_0^\infty q_1(t,x)\mu_1(x)\,dx + \int\limits_0^\infty q_2(t,y)\mu_2(y)\,dy, \\ \dfrac{\partial q_1(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial q_1(t,x)}{\partial x} + (\beta_2+\mu_1(x))q_1(t,x) = 0, \quad q_1(t,0) = \alpha_1 p_0(t), \\ \dfrac{\partial q_2(t,y)}{\partial t} + \dfrac{\partial q_2(t,y)}{\partial y} + (\alpha_2+\mu_2(y))q_2(t,y) = \int\limits_0^\infty q_3(t,x,y)\mu_1(x)\,dx, \\ q_2(t,0) = \beta_1 p_0(t) + \int\limits_0^\infty q_4(t,x)\mu_1(x)\,dx, \\ \dfrac{\partial q_3(t,x,y)}{\partial t} + \dfrac{\partial q_3(t,x,y)}{\partial x} + \mu_1(x)q_3(t,x,y) = 0, \quad q_3(t,0,y) = \alpha_2 q_2(t,y), \\ \dfrac{\partial q_4(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial q_4(t,x)}{\partial x} + \mu_1(x)q_4(t,x) = \beta_2 q_1(t,x), \quad q_4(t,0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагая, что при $t = 0$ обе линии работоспособны, выпишем начальные условия:

$$p_0(0) = 1,\ q_1(0,x) = q_2(0,y) = q_3(0,x,y) = q_4(0,x) = 0.$$

Для решения системы (1) будем использовать преобразование Лапласа. Обозначим:

$$p_i^*(s) := \int\limits_0^\infty \exp(-st)p_i(t)\,dt,\ (i=\overline{0,4}), \quad q_k^*(s,x) := \int\limits_0^\infty \exp(-st)q_k(t,x)\,dt,\ (k=1,2,4),$$

$$q_3^*(s,x,y) := \int\limits_0^\infty \exp(-st)q_3(t,x,y)\,dt,$$

$$f_k^*(s) := \int\limits_0^\infty \exp(-st)f_k(x)\,dx, \quad \Phi_k^*(s) := \int\limits_0^\infty \exp(-st)\Phi_k(x)\,dx\ (k=1,2).$$

Применим преобразование Лапласа ко всем соотношениям системы (1):

$$sp_0^*(s) - 1 = -(\alpha_1+\beta_1)p_0^*(s) + \int\limits_0^\infty q_1^*(s,x)\mu_1(x)\,dx + \int\limits_0^\infty q_2^*(s,y)\mu_2(y)\,dy, \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_1^*(s,x)}{\partial x} + (s+\beta_2+\mu_1(x))q_1^*(s,x) = 0, \quad q_1^*(s,0) = \alpha_1 p_0^*(s), \tag{3}$$

$$\frac{\partial q_2^*(s,y)}{\partial y} + (s+\alpha_2+\mu_2(y))q_2^*(s,y) = \int\limits_0^\infty q_3^*(s,x,y)\mu_1(x)\,dx, \tag{4}$$

$$q_2^*(s,0) = \beta_1 p_0^*(s) + \int\limits_0^\infty q_4^*(s,x)\mu_1(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial q_3^*(s,x,y)}{\partial x} + (s+\mu_1(x))q_3^*(s,x,y) = 0, \quad q_3^*(s,0,y) = \alpha_2 q_2^*(s,y), \tag{5}$$

$$\frac{\partial q_4^*(s,x)}{\partial x} + (s+\mu_1(x))q_4^*(s,x) = \beta_2 q_1^*(s,x), \quad q_4^*(s,0) = 0. \tag{6}$$

Решение системы (2)–(6).

Из уравнения (3) найдем

$$q_1^*(s,x) = \alpha_1 p_0^*(s)\exp(-(s+\beta_2)x)\Phi_1(x), \tag{7}$$

$$p_1^*(s) = \int\limits_0^\infty q_1^*(s,x)\,dx = \alpha_1 p_0^*(s)\Phi_1^*(s+\beta_2), \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty q_1^*(s,x)\mu_1(x)\,dx = \alpha_1 p_0^*(s) f_1^*(s+\beta_2). \tag{9}$$

Из (5) получаем

$$q_3^*(s,x,y) = \alpha_2 q_2^*(s,y)e^{-sx}\Phi_1(x), \tag{10}$$

$$p_3^*(s) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty q_3^*(s,x,y)\,dx\,dy = \alpha_2 p_2^*(s)\Phi_1^*(s), \tag{11}$$

$$\int\limits_0^\infty q_3^*(s,x,y)\mu_1(x)\,dx = \alpha_2 q_2^*(s,y) f_1^*(s). \tag{12}$$

Из (6) и (7) следует

$$q_4^*(s,x) = \alpha_1 p_0^*(s)\Phi_1(x)e^{-sx}(1-e^{-\beta_2 x}), \tag{13}$$

$$p_4^*(s) = \int\limits_0^\infty q_4^*(s,x)\,dx = \alpha_1 p_0^*(s)(\Phi_1^*(s) - \Phi_1^*(s+\beta_2)), \tag{14}$$

$$\int\limits_0^\infty q_4^*(s,x)\mu_1(x)\,dx = \alpha_1 p_0^*(s)(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2)). \tag{15}$$

Из (4), (12) и (15) находим

$$q_2^*(s,0) = \Big(\beta_1 + \alpha_1(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2))\Big)p_0^*(s), \tag{16}$$

$$q_2^*(s,y) = q_2^*(s,0)\exp(-(s+\alpha_2(1-f_1^*(s)))y)\Phi_2(y), \tag{17}$$

$$p_2^*(s) = \int\limits_0^\infty q_2^*(s,y)\,dy = q_2^*(s,0)\Phi_2^*(s+\alpha_2(1-f_1^*(s))), \tag{18}$$

$$\int\limits_0^\infty q_2^*(s,y)\mu_2(y)\,dy = q_2^*(s,0)f_2^*(s+\alpha_2(1-f_1^*(s))). \tag{19}$$

Наконец, из (2), (9), (16) и (19) следует

$$p_0^*(s) = \Big[s+\alpha_1+\beta_1-\alpha_1 f_1^*(s+\beta_2)-$$
$$-f_2^*\big(s+\alpha_2(1-f_1^*(s))\big)\Big(\beta_1+\alpha_1(f_1^*(s)-f_1^*(s+\beta_2))\Big)\Big]^{-1}. \tag{20}$$

Применив преобразование Лапласа к тождеству $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i(t) = 1$, получим $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i^*(s) = \dfrac{1}{s}$. Последнее равенство используем для контроля правильности вычислений. При проверке воспользуемся соотношением $\Phi_i^*(s) = \dfrac{1-f_i^*(s)}{s}$.

$$\sum_{i=0}^{4} p_i^*(s) = p_0^*(s) + \alpha_1 p_0^*(s)\Phi_1^*(s+\beta_2) + p_2^*(s) + \alpha_2 p_2^*(s)\Phi_1^*(s) +$$
$$+\alpha_1 p_0^*(s)(\Phi_1^*(s) - \Phi_1^*(s+\beta_2)) = p_0^*(s)(1+\alpha_1\Phi_1^*(s)) + p_2^*(s)(1+\alpha_2\Phi_1^*(s)) =$$
$$= p_0^*(s)(1+\alpha_1\Phi_1^*(s)) + p_0^*(s)\Phi_2^*(s+\alpha_2(1-f_1^*(s)))\Big(\beta_1+\alpha_1(f_1^*(s)-f_1^*(s+\beta_2))\Big)\times$$
$$\times(1+\alpha_2\Phi_1^*(s)) = p_0^*(s)\Bigg(1+\alpha_1\Phi_1^*(s) + \frac{1-f_2^*(s+\alpha_2(1-f_1^*(s)))}{s+\alpha_2(1-f_1^*(s))}\times$$
$$\times\Big(\beta_1+\alpha_1(f_1^*(s)-f_1^*(s+\beta_2))\Big)\Big(1+\alpha_2\frac{1-f_1^*(s)}{s}\Big)\Bigg) =$$
$$= \frac{p_0^*(s)}{s}\Bigg(s\Big(1+\alpha_1\frac{1-f_1^*(s)}{s}\Big) + \Big(1-f_2^*(s+\alpha_2(1-f_1^*(s)))\Big)\times$$
$$\times\Big(\beta_1+\alpha_1(f_1^*(s)-f_1^*(s+\beta_2))\Big)\Bigg) =$$

$$= \frac{p_0^*(s)}{s}\Bigg(s + \alpha_1 - \alpha_1 f_1^*(s) + \beta_1 + \alpha_1 f_1^*(s) - \alpha_1 f_1^*(s+\beta_2) - f_2^*\big(s + \alpha_2(1 - f_1^*(s))\big)\times$$

$$\times\Big(\beta_1 + \alpha_1(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2))\Big)\Bigg) = \frac{1}{s} \quad \text{(учитывая (20))}.$$

Основные результаты

Поскольку случайный процесс $\xi(t)$ имеет конечное число состояний и все состояния сообщающиеся, то он обладает свойством эргодичности. Обозначим финальные вероятности состояний системы

$$p_i := \lim_{t\to\infty} p_i(t) = \lim_{s\to 0} s p_i^*(s), \quad (i = \overline{0,4})$$

Заметим, что имеют место соотношения

$$f_i^*(0) = \int\limits_0^\infty f_i(t)\,dt = 1, \quad f_i^{*\prime}(0) = \frac{df_i^*(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \int\limits_0^\infty (-t)e^{-st} f_i(t)\,dt\bigg|_{s=0} = -r_i,$$

$$\Phi_i^*(0) = \lim_{s\to 0}\Phi_i^*(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1 - f_i^*(s)}{s} = -f_i^*(0) = r_i.$$

Найдем финальные вероятности состояний системы:

$$p_0 = \lim_{s\to 0} s p_0^*(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\Big[s + \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 f_1^*(s+\beta_2) -$$

$$- f_2^*\big(s + \alpha_2(1 - f_1^*(s))\big)\Big(\beta_1 + \alpha_1(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2))\Big)\Big]^{-1} =$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{s\to 0}\Big[1 - \alpha_1 f_1^{*\prime}(s+\beta_2) - f_2^{*\prime}\big(s + \alpha_2(1 - f_1^*(s))\big)\cdot$$

$$\cdot(1 - \alpha_2 f_1^{*\prime}(s))\cdot\Big(\beta_1 + \alpha_1(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2))\Big) -$$

$$- f_2^*\big(s + \alpha_2(1 - f_1^*(s))\big)\big(\alpha_1(f_1^{*\prime}(s) - f_1^{*\prime}(s+\beta_2))\big)\Big]^{-1} =$$

$$= \Big[1 - \alpha_1 f_1^{*\prime}(\beta_2) - f_2^{*\prime}(0)(1 - \alpha_2 f_1^{*\prime}(0))\big(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))\big) -$$

$$- \alpha_1\big(f_1^{*\prime}(0) - f_1^{*\prime}(\beta_2)\big)\Big]^{-1} = \frac{1}{1 + r_2(1 + \alpha_2 r_1)(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))) + \alpha_1 r_1},$$

$$p_1 = \lim_{s\to 0} s p_1^*(s) = \lim_{s\to 0}\alpha_1 s p_0^*(s)\Phi_1^*(s+\beta_2) = \alpha_1 p_0 \Phi_1^*(\beta_2),$$

$$p_2 = \lim_{s\to 0} s p_2^*(s) = \lim_{s\to 0} s p_0^*(s)\Phi_2^*(s + \alpha_2(1 - f_1^*(s)))\cdot$$

$$\cdot\Big(\beta_1 + \alpha_1(f_1^*(s) - f_1^*(s+\beta_2))\Big) =$$

$$= p_0\Phi_2^*(0)(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))) = p_0 r_2(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))),$$

$$p_3 = \lim_{s\to 0} sp_3^*(s) = \lim_{s\to 0} \alpha_2 sp_2^*(s)\Phi_1^*(s) = \alpha_2 p_0 r_1 r_2(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))),$$
$$p_4 = \lim_{s\to 0} sp_4^*(s) = \lim_{s\to 0} \alpha_1 sp_0^*(s)(\Phi_1^*(s) - \Phi_1^*(s+\beta_2)) = \alpha_1 p_0(r_1 - \Phi_1^*(\beta_2)).$$

Проверим выполнение равенства $\sum\limits_{i=0}^{4} p_i = 1$:

$$\sum_{i=0}^{4} p_i = p_0\Big(1 + \alpha_1\Phi_1^*(\beta_2) + \big(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))\big)r_2 +$$
$$+\alpha_2\big(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))\big)r_1 r_2 + \alpha_1(r_1 - \Phi_1^*(\beta_2))\Big) =$$
$$= p_0\Big(1 + \big(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))\big)r_2(1 + \alpha_2 r_1) + \alpha_1 r_1\Big) = 1.$$

Среднее количество неисправных линий $L = p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4$. Вероятность отказа системы (обе линии отказали) $P = p_3 + p_4$. Загрузка наладчика (вероятность того, что он занят = доля времени занятости наладчика) $1 - p_0$. Коэффициент готовности системы (вероятность того, что система работоспособна = вероятность того, что хотя бы одна линия исправна)

$$K = p_0 + p_1 + p_2 = p_0\big(1 + r_2\beta_1 + \alpha_1\Phi_1^*(\beta_2)(1 - r_2\beta_2)\big).$$

Для определения средней наработки T между отказами найдем интенсивность Λ потока отказов системы:

$$\Lambda = \sum_{j=3}^{4}\sum_{i=0}^{2} p_i\lambda_{ij},$$

где λ_{ij} – интенсивность перехода из состояния i в состояние j – определяется из соотношений:

$$\mathbb{P}\{\xi(t+h) = j|\xi(t) = i\} = \lambda_{ij}h + o(h),\ h \to 0.$$

В рассматриваемой задаче

$$\lambda_{03} = 0,\ \lambda_{04} = 0,\ \lambda_{13} = 0,\ \lambda_{24} = 0,\ \lambda_{14} = \beta_2,\ \lambda_{23} = \alpha_2.$$

$$\Lambda = p_1\beta_2 + p_2\alpha_2 = \alpha_1 p_0\Phi_1^*(\beta_2)\beta_2 + \big(\beta_1 + \alpha_1(1 - f_1^*(\beta_2))\big)p_0\alpha_2 r_2 =$$
$$= \alpha_1 p_0\Phi_1^*(\beta_2)\beta_2 + \big(\beta_1 + \alpha_1\beta_2\Phi_1^*(\beta_2)\big)p_0\alpha_2 r_2 = p_0\Big(\alpha_2\beta_1 r_2 + \alpha_1\beta_2(1 + \alpha_2 r_2)\Phi_1^*(\beta_2)\Big).$$

Величина T получается из соотношения

$$T = \frac{K}{\Lambda} = \frac{1 + r_2\beta_1 + \alpha_1\Phi_1^*(\beta_2)(1 - r_2\beta_2)}{\alpha_2\beta_1 r_2 + \alpha_1\beta_2(1 + \alpha_2 r_2)\Phi_1^*(\beta_2)}.$$

Список литературы

1. Коваленко, А. И., Марянин, Б. Д., Смолич, В. П. Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — №1. — С. 53–60.

   KOVALENKO, A. I, MARYANIN, B. D, SMOLICH, V. P. (2013) Queueing system with unreliable line and impatient customers. *TVIM*. 1. p. 53–60.

2. KOVALENKO, A. I, SMOLICH, V. P. (2015) $M/G/1$ queue with system disasters and impatient customers when system is down. *TVIM*. №4. p. 7–16.

3. Смолич, В. П., Коваленко, А. И. Метод дополнительной переменной в задачах ТМО и теории надежности. — Lambert Academic Publishing (Германия), 2014. — 232 с.

   KOVALENKO, A. SMOLICH, V. (2014) *The supplementary variable method applying to the problems in queueing systems and reliability*. Lambert Academic Publishing. Germany.

УДК: 519.58+517.22+517.91

MSC2010: 28C20+46G12

ГЛАДКИЕ МЕРЫ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Б. Д. Марянин, В. П. Смолич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *svp54@mail.ru*

Smooth measures in infinite-dimensional linear spaces.

Maryanin B. D, Smolich V. P.

Abstract. The branch of analysis, connected with the study of functions of an infinite-dimensional argument, has been recently intensively developing. This is due both to internal causes and to applications to theoretical and mathematical physics. It is well known which role in classical mathematical physics is played by distributions — linear continuous functionals on smooth basic functions. Therefore, it is natural to develop such a theory in infinite-dimensional spaces. In the infinite-dimensional case, in view of the absence of a standard measure of Lebesgue measure type, there are two ways of constructing a theory of generalized functions, each of which has its merits and demerits. One of them is that in an infinite-dimensional space a measure is fixed that has sufficiently good properties, by means of which a pairing between the basic and generalized functions is carried out. Very often, for these purposes, a Gaussian measure proves to be convenient. Such a theory of generalized functions was developed in the works of Yu. M. Berezansky, Yu. G. Kondratiev, Yu. S. Samoylenko. On the other hand, one can follow the path proposed by S. V. Fomin and developed in the works of V. I. Averbukh, O. G. Smolyanov, S. V. Fomin, Yu. L. Daletskiĭ, and others. This way is that distributions are considered as generalized measures. In particular, the distributions include the usual countably additive measures, but do not include functions. Therefore, it becomes necessary to construct an analysis of measures parallel to the analysis of functions.

However, in all these papers the differentiation of measures with respect to constant directions was considered. In the transition to non-linear manifolds, the concept of a constant direction loses its meaning. Therefore, it is necessary to construct a theory of differentiating measures along vector fields. In this paper we introduce and study the notion of a derivative of a measure along a finite collection of vector fields. The basic properties of the derivative of a smooth measure are established, the form of the logarithmic derivative is specified, the law of transformation of these objects is found under a smooth invertible mapping.

Keywords: *smooth measure, distribution, differentiation of a measure, derivative of a measure along vector field, logarithmic derivative of a measure.*

1. Меры и распределения в банаховых пространствах

Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в X, μ — вещественная борелевская мера на X, h — векторное поле в X, g_h^t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая векторному полю h, т.е.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_h^t(x) = h(x). \tag{1}$$

Определение 1. Мера μ называется дифференцируемой вдоль векторного поля h на множестве A, если функция $\varphi(t) = \mu(g_h^t(A))$ дифференцируема в точке $t = 0$. Значение $\varphi'(0)$ называется производной меры μ на множестве A вдоль векторного поля h и обозначается символом $\mu_h'(A)$.

Если производная меры μ вдоль векторного поля h существует на каждом множестве $A \in \mathfrak{B}$, то мы скажем, что мера μ дифференцируема вдоль векторного поля h. Выражение $\mu_h'(A)$ будет при каждом таком h представлять собой функцию множества, определенную на $\mathfrak{B}$. Эта функция — производная меры μ вдоль векторного поля h — является σ-аддитивной на $\mathfrak{B}$ в силу следующей теоремы, принадлежащей Никодиму.

Теорема. *Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность σ-аддитивных функций на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Если для каждого $A \in \mathfrak{A}$ существует предел*

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A),$$

то этот предел представляет собой σ-аддитивную функцию на $\mathfrak{A}$.

Итак, производная меры вдоль векторного поля есть мера. Рассмотрим совокупность тех векторных полей в X, вдоль которых мера μ дифференцируема. Наиболее интересен случай, когда совокупность таких векторных полей образует (топологическую) алгебру Ли W, являющуюся подалгеброй алгебры Ли векторных полей на X. Если отображение $h \to \mu_h'(A)$ является линейным непрерывным функционалом на W, то мы скажем, что мера μ слабо дифференцируема на множестве A по подалгебре Ли векторных полей W. При этом отображение $h \to \mu_h'(A)$ мы назовем (слабой) производной меры μ на множестве A по подалгебре Ли W и обозначим это отображение символом $\mu'(A)$.

Если мера μ слабо дифференцируема по подалгебре Ли W на каждом множестве $A \in \mathfrak{B}$, то мы будем говорить, что мера μ (слабо) дифференцируема по подалгебре Ли W. При этом отображение $A \to \mu'(A)$ σ-алгебры $\mathfrak{B}$ в пространстве W^* (линейных непрерывных функционалов на W) мы будем называть (слабой) производной меры μ по подалгебре Ли W и обозначать символом $\mu'(A)$.

Теорема. *Если мера μ слабо дифференцируема по (топологической) подалгебре Ли W, причем (топологическое линейное) пространство W является локально выпуклым и полурефлексивным, то производная меры μ по подалгебре Ли W представляет собой σ-аддитивную функцию множества на $\mathfrak{B}$ со значениями в пространстве W^*, наделенном сильной топологией.*

Наряду с понятием дифференцируемой меры рассмотрим более общее понятие дифференцируемого распределения (или, что то же самое, обобщенной меры) на X. Дифференцируемое распределение представляет собой линейный непрерывный функционал на некотором основном пространстве, состоящем из вещественных функций на X, удовлетворяющих тем или иным условиям гладкости. Различные линейные операции над распределениями вводятся, как сопряженные по отношению к соответствующим операциям над элементами основного пространства. При этом операции над гладкими мерами получаются, как частный случай операций над обобщенными мерами (распределениями).

Пусть X и Y — пара сепарабельных банаховых пространств с соотношением двойственности $< x, y >$ $(x \in X, y \in Y)$. Рассмотрим линейное топологическое пространство Φ, состоящее из вещественных функций на X, бесконечно дифференцируемых на X по любому конечному набору направлений из линейного подпространства $X_0 \subset X$ (возможно, совпадающим с X) и ограниченных вместе с каждой производной

$$|\varphi^{(k)}(x)(e_1, \dots, e_k)| \leq C_{k,e_1,\dots,e_k} \qquad (x \in X,\ e_1, \dots, e_k \in X_0, k = 1, 2, \dots)$$

Определение 2. Пространство Φ назовем основным пространством (пространством основных функций), если выполнены следующие условия.

1. Для любой σ-аддитивной вещественной борелевской меры μ на X из сходимости $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве Φ следует, что

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)\,\mu(dx)$$

2. При каждом $e \in X_0$ операция сдвига

$$\varphi \mapsto S_e\varphi \quad (S_e\varphi(x) = \varphi(x - e))$$

определена и непрерывна в Φ.

3. Для любого набора $e_1, \dots, e_k \in X_0$ операция дифференцирования

$$(D^k_{e_1,\dots,e_k}\varphi)(x) = \varphi^{(k)}(x)(e_1, \dots, e_k)$$

непрерывна в Φ.

Функцию $\psi(x)$ $(x \in X)$ назовем мультипликатором в Φ если умножение на нее определяет линейный непрерывный оператор в Φ:

$$(T_\psi\varphi)(x) = \psi(x)\varphi(x).$$

Множество мультипликаторов на Φ, очевидно образующее алгебру, обозначим $\widehat{\Phi}$. Заметим, что если Φ — алгебра с непрерывным умножением, то $\Phi \subset \widehat{\Phi}$, т. е. элементы из Φ сами являются мультипликаторами.

Ниже иногда будут использованы следующие дополнительные условия.

4. Функция $\psi_y(x) = e^{i<x,y>}$ $(y \in Y)$ является мультипликатором в Φ, непрерывно зависящим от $y \in Y$.
5. $1 \in \Phi$. При этом $\widehat{\Phi} \subset \Phi$ и в частности $e^{i<x,y>} \in \Phi$ и непрерывно зависит от $y \in Y$.

Пусть h — векторное поле на X со значениями в X_0. Легко видеть, что любая функция φ из Φ дифференцируема вдоль векторного поля h так как производная функции вдоль векторного поля выражается через производные этой функции по постоянным направлениям, которые определяются элементами счетного плотного подмножества в X_0.

Символом $W(X, X_0)$ обозначим пространство векторных полей на X со значениями в X_0.

Утверждение 1. *$W(X, X_0)$ является алгеброй Ли.*

Доказательство. В проверке нуждается лишь тот факт, что скобка векторных полей A и B из $W(X, X_0)$ также принадлежит $W(X, X_0)$. В самом деле,

$$\forall x \in X \quad [A, B](x) = ABx - BAx = Ax' - Bx'',$$

где элементы x' и x'' лежат в X (и даже в X_0), значит Ax' и Bx'' также лежат в X_0. $\square$

Распределения. Пусть Φ — некоторое основное пространство функций на X. Сопряженное к нему пространство с топологией слабой сходимости назовем соответствующим пространством распределений (или обобщенных мер) на X. Значение распределения $\xi \in \Phi^*$ на элементе $\varphi \in \Phi$ будем обозначать символом $< \varphi, \xi >$.

Из условия (1) определения 2 следует, что каждая вещественная борелевская мера μ на X порождает распределение, обозначаемое тем же символом μ при помощи соотношения

$$< \varphi, \mu >= \int\limits_X \varphi(x)\, \mu(dx) \qquad (2)$$

Распределения такого типа мы будем в дальнейшем называть распределениями типа меры.

Рассмотрим основные операции над распределениями. Эти операции определяются как сопряженные по отношению к соответствующим операциям в Φ, при этом сужение их на множество мер должно совпадать с естественно определенными для мер операциями.

Пусть ξ — распределение, $h \in W(X, X_0)$. Определим производную ξ'_h распределения ξ вдоль векторного поля h формулой

$$< \varphi, \xi'_h > = - < \varphi'_h, \xi > . \qquad (3)$$

Пусть α — мультипликатор в Φ. Определим распределение $\alpha\xi$ формулой

$$< \varphi, \alpha\xi > = < \alpha\varphi, \xi > \qquad (4)$$

Рассмотрим отображение $D : W(X, X_0) \times \Phi \mapsto \Phi$, определенное формулой $D(h, \varphi) = \varphi'_h$. Пусть α — гладкая функция, являющаяся мультипликатором в Φ. Тогда, как легко видеть, справедливы следующие формулы:

$$D(\alpha h, \varphi) = \alpha D(h, \varphi) \qquad (5)$$

$$D(h, \alpha\varphi) = \alpha D(h, \varphi) + \alpha'_h \varphi, \qquad (6)$$

то есть относительно умножения на гладкие функции, являющиеся мультипликаторами, отображение D является линейным по первому аргументу и дифференцированием по второму аргументу.

Рассмотрим отображение $D^* : W(X, X_0) \times \Phi^* \mapsto \Phi^*$, определенное формулой

$$< \varphi, D^*(h, \xi) > = - < D(h, \varphi), \xi > \quad \forall \varphi \in \Phi \qquad (7)$$

Утверждение 2. *Относительно умножения на гладкие функции, являющиеся мультипликаторами, отображение D^* является дифференцированием по каждой переменной.*

Доказательство. Действительно,

$$< \varphi, D^*(h, \alpha\xi) > = - < D(h, \varphi), \alpha\xi > = - < \alpha D(h, \varphi), \xi > =$$

$$- < D(h, \alpha\varphi - \alpha'_h \varphi, \xi) > = - < D(h, \alpha\varphi), \xi) > \; + \; < \alpha'_h \varphi, \xi >=$$

$$< \alpha\varphi, D^*(h,\xi) > \ + \ < \alpha'_h\varphi, \xi) > = < \varphi, \alpha D^*(h,\xi) + \alpha'_h\xi >$$

Получена формула

$$D^*(h, \alpha\xi) = \alpha D^*(h,\xi) + \alpha'_h\xi, \tag{8}$$

показывающая, что D^* является дифференцированием по переменной ξ. То, что отображение D^* является дифференцированием и по переменной h следует из формулы

$$D^*(h, \alpha\xi) = D^*(\alpha h, \xi), \tag{9}$$

показывающей, что гладкую функцию, являющуюся мультипликатором, можно "перебрасывать". Действительно,

$$\begin{aligned} < \varphi, D^*(h,\alpha\xi) > &= - < D(h,\varphi), \alpha\xi > = - < \alpha D(h,\varphi), \xi > = \\ &= - < D(\alpha h, \varphi), \xi > = < \varphi, D^*(\alpha h, \xi) > . \end{aligned} \tag{10}$$

Значит и по аргументу h отображение D^* ведет себя как дифференцирование, то есть справедлива формула

$$D^*(\alpha h, \xi) = \alpha D^*(h,\xi) + \alpha'_h\xi. \tag{11}$$

Старшие производные.

Определение 3. (Первой) производной функции $\varphi \in \Phi$ называется линейное непрерывное отображение $D\varphi$, действующее из $W(X, X_0)$ в Φ, заданное с помощью формулы

$$(D\varphi)(h) = \varphi'_h = L_h\varphi \quad \forall h \in W(X, X_0). \tag{12}$$

Пусть $f, g, h, \dots \in W(X, X_0)$ и $L_f, L_g, L_h, \dots$ — соответствующие дифференциальные операторы.

Определение 4. Второй производной функции $\varphi \in \Phi$ называется симметричное билинейное непрерывное отображение $D^2\varphi$, действующее из $W(X, X_0) \times W(X, X_0)$ в Φ, заданное с помощью формулы:

$$D^2\varphi(f,g) = L_g L_f\varphi - L_{f'_g}\varphi \quad \forall f, g \in W(X, X_0). \tag{13}$$

Проверим, что отображение $D^2\varphi$ действительно является симметричным:

$$D^2\varphi(f,g) - D^2\varphi(g,f) = L_g L_f\varphi - L_{f'_g}\varphi - (L_f L_g\varphi - L_{g'_f}\varphi) =$$
$$(L_g L_f\varphi - L_f L_g\varphi) - (L_{f'_g}\varphi - L_{g'_f}\varphi) = L_{[f,g]}\varphi - L_{[g,f]}\varphi = 0.$$

Прежде, чем дать определение третьей производной функции $\varphi \in \Phi$, проделаем некоторые вычисления. На обе части равенства

$$L_g L_f\varphi = D^2\varphi(f,g) + D\varphi(f'_g) \tag{14}$$

подействуем оператором L_h:

$$L_h L_g L_f \varphi = D^3\varphi(f,g,h) + D^2\varphi(f'_h, g) + D^2\varphi(f, g'_h) + D^2\varphi(f'_g, h) + D\varphi((f'_g)'_h).$$

Рассмотрим трилинейное непрерывное отображение

$$D^3\varphi(f,g,h) = L_h L_g L_f \varphi - D^2\varphi(f'_h, g) - D^2\varphi(f, g'_h) - D^2\varphi(f'_g, h) - D\varphi((f'_g)'_h) \qquad (15)$$

и покажем, что оно является симметричным. Для этого достаточно проверить справедливость равенств

$$\begin{aligned} D^3\varphi(f,g,h) &= D^3\varphi(g,f,h), \\ D^3\varphi(f,g,h) &= D^3\varphi(f,h,g). \end{aligned} \qquad (16)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} D^3\varphi(f,g,h) &= L_h L_g L_f \varphi - D^2\varphi(f'_h, g) - D^2\varphi(f, g'_h) - D^2\varphi(f'_g, h) - D\varphi((f'_g)'_h), \\ D^3\varphi(g,f,h) &= L_h L_f L_g \varphi - D^2\varphi(g'_h, f) - D^2\varphi(g, f'_h) - D^2\varphi(g'_f, h) - D\varphi((g'_f)'_h), \\ D^3\varphi(f,g,h) - D^3\varphi(g,f,h) &= (L_h L_g L_f \varphi - L_h L_f L_g \varphi) + (D^2\varphi(g'_h, f) - D^2\varphi(f, g'_h)) + \\ &+ (D^2\varphi(g, f'_h) - D^2\varphi(f'_h, g)) + (D^2\varphi(g'_f, h) - D^2\varphi(f'_g, h)) + D\varphi((g'_f - f'_g)'_h). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} L_h L_g L_f \varphi - L_h L_f L_g \varphi = L_h(L_g L_f \varphi - L_f L_g \varphi) = L_h L_{[f,g]}\varphi &= D^2\varphi([f,g],h) + D\varphi([f,g]'_h), \\ D^2\varphi(g'_h, f) - D^2\varphi(f, g'_h) = 0, \quad D^2\varphi(g, f'_h) &- D^2\varphi(f'_h, g) = 0, \\ D^2\varphi(g'_f, h) - D^2\varphi(f'_g, h) = D^2\varphi(g'_f - f'_g, h) = D^2\varphi([g,f],h) &= -D^2\varphi([f,g],h), \\ D\varphi((g'_f - f'_g)'_h) = D\varphi([g,f]'_h) &= -D\varphi([f,g]'_h). \end{aligned}$$

Складывая равенства выше, получаем

$$D^3\varphi(f,g,h) - D^3\varphi(g,f,h) = D^2\varphi([f,g],h) + D\varphi([f,g]'_h) - D^2\varphi([f,g],h) - D\varphi([f,g]'_h) = 0,$$

а это и означает справедливость равенства (15).

Аналогично,

$$\begin{aligned} D^3\varphi(f,g,h) &= L_h L_g L_f \varphi - D^2\varphi(f'_h, g) - D^2\varphi(f, g'_h) - D^2\varphi(f'_g, h) - D\varphi((f'_g)'_h), \\ D^3\varphi(f,h,g) &= L_g L_h L_f \varphi - D^2\varphi(f'_g, h) - D^2\varphi(f, h'_g) - D^2\varphi(f'_h, g) - D\varphi((f'_h)'_g), \\ L_h L_g L_f \varphi - L_g L_h L_f \varphi = (L_h L_g - L_g L_h) L_f \varphi = L_{[g,h]} L_f \varphi &= D^2\varphi(f,[g,h]) + D\varphi(f'_{[g,h]}), \\ D^2\varphi(f, h'_g) - D^2\varphi(f, g'_h) = D^2\varphi(f, h'_g - g'_h) = D^2\varphi(f,[h,g]) &= -D^2\varphi(f,[g,h]), \\ D\varphi((f'_h)'_g) - D\varphi((f'_g)'_h) = D\varphi((f'_h)'_g - (f'_g)'_h) = D\varphi(f'_{[h,g]}) &= -D\varphi(f'_{[g,h]}), \end{aligned}$$

$$D^3\varphi(f,g,h) - D^3\varphi(f,h,g) = D^2\varphi(f,[g,h]) + D\varphi(f'_{[g,h]}) - D^2\varphi(f,[g,h]) - D\varphi(f'_{[g,h]}) = 0,$$

что и означает справедливость формулы (16).

Вычисления, проведенные выше, являются мотивировкой определения третьей производной функции $\varphi \in \Phi$.

Определение 5. Третьей производной функции $\varphi \in \Phi$ называется симметричное трилинейное непрерывное отображение, действующее из $W(X, X_0) \times W(X, X_0) \times W(X, X_0)$ в Φ, заданное с помощью формулы:

$$D^3\varphi(f,g,h) = L_h L_g L_f \varphi - D^2\varphi(f'_h, g) - D^2\varphi(f, g'_h) - D^2\varphi(f'_g, h) - D\varphi((f'_g)'_h).$$

Определение 6. Производной порядка m распределения $\xi \in \Phi^*$ называется симметричное полилинейное непрерывное отображение $D^m\xi$, действующее из $W(X, X_0) \times \dots \times W(X, X_0)$ в Φ^*, определяемое соотношением

$$< \varphi, D^m\xi(h_1, \dots, h_m) > = \ (-1)^m < D^m\varphi(h_1, \dots, h_m), \xi > . \tag{17}$$

Пусть $h \in W(X, X_0)$, L_h — дифференциальный оператор, действующий в пространстве Φ, ему соответствует оператор L_h^*, действующий в пространстве Φ^* такой, что

$$< L_h\varphi, \xi > = \ - < \varphi, L_h^*\xi > . \tag{18}$$

В дальнейшем мы не будем различать в обозначениях операторы L_h и L_h^*, путаницы это не вызовет.

Старшие производные распределения ξ также могут быть введены с помощью дифференциальных операторов $L_h, L_f, L_g, \dots$, но соответствующие формулы будут несколько отличаться от формул (13) и (15).

Пусть $m = 2$. Легко видеть, что справедливо соотношение

$$< L_f L_g \varphi, \xi > = < \varphi, L_g L_f \xi > . \tag{19}$$

Здесь $L_f L_g \xi = L_f(L_g\xi)$. Выражение $L_g\xi$ корректно определено и представляет собой новое распределение, зависящее от распределения ξ и векторного поля $g \in W(X, X_0)$. Правила для дифференцирования таких распределений у нас пока нет. Формальное применение "обычных" правил дает, как мы сейчас увидим, неверные результаты. Это и не удивительно – ведь формула (10) говорит о том, что правила дифференциального исчисления для распределений, вообще говоря, не совпадают с соответствующими правилами для основных функций.

$$\begin{aligned} < \varphi, L_f L_g \xi > = < L_g L_f \varphi, \xi > = < D^2\varphi(f,g) + L_{f'_g}\varphi, \xi > = \\ = < D^2\varphi(f,g), \xi > \ + \ < L_{f'_g}\varphi, \xi > = < \varphi, D^2\xi(f,g) > \ + \ < \varphi, L_{f'_g}\xi > = \\ = < \varphi, D^2\xi(f,g) + L_{f'_g}\xi > . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D^2\xi(f,g) = L_f L_g \xi - L_{f'_g}\xi. \tag{20}$$

Аналогично могут быть получены соответствующие формулы для $D^m\xi$ при $m > 2$.

Замечание. Формула для производной порядка m функции $\varphi \in \Phi$ имеет вид

$$D^m\varphi(f_1,\dots,f_m) = L_{f_m}L_{f_{m-1}}\dots L_{f_1}\varphi-$$
$$-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_s=k}\sum_{*} D^{m-k}\varphi\Big(f_1,\dots,\Big[\Big((f_{i_1^{(1)}})'_{f_{i_2^{(1)}}}\Big)'\dots\Big]'_{f_{\lambda_1}^{(1)}},\dots,\Big[\Big((f_{i_1^{(s)}})'_{f_{i_2^{(s)}}}\Big)'\dots\Big]'_{f_{\lambda_s}^{(s)}},\dots,f_m\Big),$$

Где $*$ во внутренней сумме означает, что суммирование производится по всем наборам индексов $i_1^r,\dots,i_{\lambda_r}^r$ $(r = 1,\dots,s)$, таким, что

$$1 \le i_1^{(1)} < \dots < i_{\lambda_1}^{(1)}, \quad i_1^{(1)} < i_1^{(2)} < \dots < i_{\lambda_2}^{(2)}, \quad \dots, \quad i_1^{(s-1)} < i_1^{(s)} < \dots < i_{\lambda_s}^{(s)},$$

то есть “младшие”, (по номеру) векторные поля не дифференцируют “старшие”.

Преобразование распределений при нелинейных преобразованиях. Пусть X и Y — сепарабельные банаховы пространства, X_0 и Y_0 — подпространства X и Y, Φ_X и Φ_Y — основные пространства, состоящие из функций, определенных соответственно на X и на Y, $W(X,X_0)$ и $W(Y,Y_0)$ — соответствующие алгебры Ли векторных полей. Пусть $f : X \mapsto Y$ — диффеоморфизм, согласованный с парой основных пространств Φ_X и Φ_Y. Это означает, что $\forall\varphi \in \Phi_Y$ функция $\varphi^f(x) = \varphi(f(x)) \in \Phi_X$ и $\forall v \in W(X,X_0)$ векторное поле

$$v^{f^{-1}}(y) = f'(f^{-1}(y))v(f^{-1}(y)) = h(y) \in W(Y,Y_0). \tag{21}$$

Дополнительное требование: будем считать, что $W(Y,Y_0)$ состоит из векторных полей вида $v^{f^{-1}}(y)$ $(v \in W(X,X_0))$.

Пусть ξ — распределение на X. Определим распределение ξ^f — образ распределения ξ при отображении f — формулой

$$<\varphi,\xi^f> = <\varphi^f,\xi>. \tag{22}$$

Пусть $h \in W(X,X_0)$. Еще раз подчеркнем, что предполагается существование такого векторного поля $(v \in W(X,X_0))$, что $v^{f^{-1}} = h$ (см. (21)) Найдем производную распределения ξ^f вдоль векторного поля h.

$$<\varphi,(\xi^f)'_h> = \,-<\varphi'_h,\xi^f> = \,-<(\varphi'_h)^f,\xi>;$$
$$(\varphi'_h)^f(x) = \varphi'_h(f(x)) = \varphi'_h(y) = <\varphi'(y),h(y)>,$$
$$\varphi'(y) = \varphi'(f(x)) = (\varphi')^f(x), \quad (\varphi^f)'(x) = \varphi'(f(x))\cdot f'(x) = (\varphi')^f(x)\cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$(\varphi')^f(x) = (\varphi^f)'(x) \cdot [f'(x)]^{-1};$$

$$h(y) = v^{f^{-1}}(y) = f'(f^{-1}(y))v(f^{-1}(y)) = f'(x)v(x),$$

$$< \varphi'(y), h(y) > = < (\varphi^f)'(x) \cdot [f'(x)]^{-1}, f'(x)v(x) > = < (\varphi^f)'(x), v(x) > = (\varphi^f)'_v(x);$$

$$- < (\varphi'_h)^f, \xi > = < (\varphi^f)'_v, \xi > = < \varphi^f, \xi'_v > = < \varphi, (\xi'_v)^f > .$$

Получена формула

$$(\xi^f)'_h = (\xi'_v)^f, \tag{23}$$

которая позволяет вычислить производную распределения ξ^f вдоль векторного поля на Y с помощью производной распределения ξ вдоль соответствующего векторного поля на X.

Пусть $\psi \in \Phi_X$, тогда, в силу того, что диффеоморфизм f согласован с парой основных пространств Φ_X и Φ_Y, функция $\psi^{f^{-1}} \in \Phi_Y$ $(\psi^{f^{-1}}(y) = \psi(f^{-1}(y)))$.

Утверждение 3. *Пусть ν — мера на X, абсолютно непрерывная относительно меры μ: $\nu = \alpha\mu$, причем плотность α является мультипликатором в Φ_X, тогда мера ν^f абсолютно непрерывна относительно меры μ^f и справедлива формула*

$$\nu^f = (\alpha\mu)^f = \alpha^{f^{-1}}\mu^f. \tag{24}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $(\alpha\varphi)^f = \alpha^f\varphi^f$. Действительно,

$$(\alpha\varphi)^f(x) = (\alpha\varphi)(f(x)) = \alpha(f(x))\varphi(f(x)) = \alpha^f(x)\varphi^f(x) = \alpha^f\varphi^f(x).$$

Пусть ξ — распределение, α — мультипликатор в Φ_X, тогда

$$< \varphi, (\alpha\xi)^f > = < \varphi^f, \alpha\xi > = < \alpha\varphi^f, \xi > = < (\alpha^{f^{-1}}\varphi)^f, \xi > = < \varphi, \alpha^{f^{-1}}\xi^f >,$$

значит, $(\alpha\xi)^f = \alpha^{f^{-1}}\xi^f$. Если ξ — это распределение типа меры $(\xi = \mu)$, сразу получаем формулу (24): $(\alpha\mu)^f = \alpha^{f^{-1}}\mu^f$.

Вычислим производную меры ν^f вдоль векторного поля $h \in W(X, X_0)$.

$$< \varphi, (\nu^f)'_h > = < \varphi, [(\alpha\mu)^f]'_h > = < \varphi, [(\alpha\mu)'_v]^f > = < \varphi, [\alpha'_v\mu + \alpha\mu'_v]^f > =$$

$$= < \varphi^f, \alpha'_v\mu + \alpha\mu'_v > = < \varphi^f, \alpha'_v\mu > + < \varphi^f, \alpha\mu'_v > =$$

$$= < \varphi, (\alpha'_v\mu)^f > + < \varphi, (\alpha\mu'_v)^f > = < \varphi, (\alpha'_v)^{f^{-1}}\mu^f + \alpha^{f^{-1}}(\mu^f)'_h > .$$

Таким образом, справедлива формула

$$(\nu^f)'_h := [(\alpha\mu)^f]'_h = (\alpha'_v)^{f^{-1}}\mu^f + \alpha^{f^{-1}}(\mu^f)'_h. \tag{25}$$

Если мера $(\mu^f)'_h$ абсолютно непрерывна относительно μ^f, то есть $(\mu^f)'_h = \beta(h, y)\mu^f$, то

$$(\nu^f)'_h = [(\alpha\mu)^f]'_h = [(\alpha'_v)^{f^{-1}} + \alpha^{f^{-1}}\beta]\mu^f. \tag{26}$$

Рассмотрим вопрос о существовании (и вычислении) интересующей нас логарифмической производной $\beta(h, y)$.

Теорема 1. *Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на X дифференцируемая вдоль векторного поля v. Тогда ее производная вдоль векторного поля v есть мера, абсолютно непрерывная относительно μ и, следовательно, существует μ-интегрируемая функция $\rho_v(x)$ (логарифмическая производная меры μ вдоль векторного поля v) такая, что*

$$\mu'_v(A) = \int\limits_A \rho_v(x)\,\mu(dx).$$

Функция $\varphi(t) = \mu(g_h^t(A))$ неотрицательна и дифференцируема в нуле. Если $\mu(A) = 0$, то $\varphi(0) = 0$ и точка $t = 0$ есть точка минимума $\varphi(t)$. Поэтому $(\mu'_v)(A) = \varphi'(0) = 0$.

Это утверждение распространяется и на более общие меры, прежде всего благодаря следующему результату (см. [3]).

Теорема 2. *Пусть μ — вещественная борелевская мера на X и $\mu = \mu^+ - \mu^-$ — ее разложение Жордана-Хана. Если мера μ дифференцируема вдоль векторного поля v, то этим свойством обладают и неотрицательные меры μ^+ и μ^-.*

Следствие. *Вещественная борелевская мера μ на X, дифференцируемая вдоль векторного поля v, обладает логарифмической производной*

$$\mu'_v(A) = \int\limits_A \rho_v(x)\,\mu(dx).$$

Теорема 3. *Пусть μ — вещественная борелевская мера, дифференцируемая вдоль векторного поля v и $\rho_v(x)$ — ее логарифмическая производная. Тогда мера μ^f дифференцируема вдоль векторного поля h, такого, что $h = v^{f^{-1}}$, имеет логарифмическую производную $\beta_h(y)$, и имеет место формула*

$$\beta_h(y) = \rho_v^{f^{-1}}(y). \tag{27}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\mu'_v = \rho_v\mu$. Тогда $(\mu'_v)^f = (\mu^f)'_h$. С другой стороны $(\mu'_v)^f = (\rho_v\mu)^f = (\rho_v)^{f^{-1}}\mu^f$. Таким образом

$$(\mu^f)'_h = (\rho_v)^{f^{-1}}\mu^f. \tag{28}$$

Теорема доказана.

Замечание. После того как доказана теорема 3, естественно употреблять следующую терминологию: будем называть меру μ^f гладким образом меры μ при диффеоморфизме f.

1.1. **Вторая производная меры.** Пусть X и Y — сепарабельные банаховы пространства, Φ_X и Φ_Y — основные пространства, $f : X \mapsto Y$ — диффеоморфизм, согласованный с парой основных пространств Φ_X и Φ_Y, h и k — векторные поля на X, v и w — векторные поля на Y такие, что

$$f'(x)h(x) = v(f(x)), \tag{29}$$

$$f'(x)k(x) = w(f(x)). \tag{30}$$

Из формул (29) и (30) следует, что

$$f'(x)k'_h(x) = w'_v(f(x)). \tag{31}$$

Пусть μ — мера на X, μ^f — мера на Y — гладкий образ меры μ при диффеоморфизме f. С учетом формулы (20) определение второй производной меры μ^f формулируется так.

Определение 7. Второй производной меры μ^f называется симметричное билинейное непрерывное отображение $D^2\mu^f$, действующее из $W(Y, Y_0) \times W(Y, Y_0)$ в пространство мер на Y, заданное с помощью формулы

$$D^2\mu^f(v, w) = L_v L_w \mu^f + L_{v'_w}\mu^f \quad (\forall v, w \in W(Y, Y_0)).$$

Используя формулу (23), найдем:

$$L_v L_w \mu^f = [(\mu^f)'_w]'_v = [(\mu'_h)^f]'_w = [(\mu'_h)'_k]^f = (L_k L_h \mu)^f, \quad L_{v'_w}\mu^f = (\mu^f)'_{v'_w} = (\mu'_{k'_h})^f,$$
$$(D^2\mu^f)(v, w) = L_v L_w \mu^f + L_{v'_w}\mu^f = (L_k L_h \mu)^f + (L_{k'_h}\mu)^f = [D^2\mu(h, k)]^f.$$

В обозначениях (21) $h = v^{f^{-1}},\ k = w^{f^{-1}}$, значит

$$(D^2\mu^f)(v, w) = \left[D^2\mu(v^{f^{-1}}, w^{f^{-1}})\right]^f. \tag{32}$$

Ясно, что соотношение (32) может быть принято за определение второй производной гладкого образа меры μ^f с использованием понятия второй производной меры μ, которое уже определено. И вообще, определение m-ой производной гладкого образа меры μ можно дать следующим образом.

Определение. Пусть μ — мера на X, $f : X \mapsto Y$ — диффеоморфизм, согласованный с парой основных пространств Φ_X и Φ_Y, μ^f — гладкий образ меры μ. Производной порядка m меры μ называется симметричное полилинейное непрерывное отображение, действующее из $W(Y, Y_0) \times \cdots \times W(Y, Y_0)$ в пространство мер на Y, заданное с помощью формулы

$$D^m\mu^f(v_1,\ldots,v_m)=\left[D^m\mu(v_1^{f^{-1}},\ldots,v_m^{f^{-1}})\right]^f \qquad \forall v_1,\ldots,v_m\in W(Y,Y_0). \tag{33}$$

2. Дифференцирование мер в оснащенных гильбертовых пространствах

Пусть $H_+\subset H_0\subset H_-$ — тройка плотно вложенных сепарабельных гильбертовых пространств со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_+$, $(\cdot,\cdot)_0$, $(\cdot,\cdot)_-$ и нормами $\|\cdot\|_+$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_-$, соответственно. Они образуют оснащенное гильбертово пространство (оснащение пространства H_0), если выполнены следующие условия:

(а) при $y\in H_+$ функция $(y,x)_0$ подчиняется оценке $|(y,x)_0|\le\|y\|_+\cdot\|x\|_-$ и, следовательно, с сохранением этой оценки продолжается до линейного непрерывного функционала $<y,x>$ на H_-;

(б) Пространство H_+ отождествляется при этом с H_-^*;

(в) вложение $H_0\mapsto H_-$ является оператором Гильберта-Шмидта.

Мы будем рассматривать меры, областью определения которых является $\mathfrak{B}_-$ — борелевская σ-алгебра пространства H_-. В качестве X из параграфа 1 мы рассмотрим H_-, а в качестве X_0 — H_+. Основное пространство Φ_{H_-} состоит из функций, бесконечно дифференцируемых по любому конечному набору направлений из H_+, и, значит, вдоль любого векторного поля на H_- со значениями в H_+. Если $h\in W(H_-,H_+)$ то можно показать (см. [1]), что существует $\operatorname{tr}h'(x)=\operatorname{div}h(x)$ $(x\in H_-)$.

Пусть $h\in W(H_-,H_+)$, $\varphi\in\Phi_{H_-}$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортобазис пространства H_+, $\xi\in\Phi_{H_-}^*$. В силу формулы (11) имеем:

$$\xi'_h=\xi'_{\sum\limits_{k=1}^{\infty}h^k(x)e_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\xi'_{h^k(x)e_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\{h^k(x)\xi'_{e_k}+[h^k(x)]'_{e_k}\xi\}=\sum_{k=1}^{\infty}h^k(x)\xi'_{e_k}+\operatorname{div}h(x)\xi,$$

то есть справедлива формула

$$\xi'_h=\sum_{k=1}^{\infty}h^k(x)\xi'_{e_k}+\operatorname{div}h(x)\xi. \tag{34}$$

Если ξ — это распределение типа меры ($\xi=\mu$), то формула (34) перепишется в виде

$$\mu'_h=\sum_{k=1}^{\infty}h^k(x)\mu'_{e_k}+\operatorname{div}h(x)\mu. \tag{35}$$

Если мера μ дифференцируема по каждому направлению, определяемому векторами ортобазиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства H_+, то в силу следствия из теоремы 2 мера μ'_{e_k} абсолютно непрерывна относительно μ и, следовательно, существует логарифмическая производная, μ-интегрируемая функция $\rho_k(x)$ такая, что

$$\mu'_{e_k} = \rho_k(x)\mu \tag{36}$$

или, что то же самое,

$$\mu'_{e_k}(A) = \int\limits_A \rho_k(x)\,\mu(dx). \tag{37}$$

В этом случае формула (35) перепишется в виде

$$\mu'_h = \sum_{k=1}^{\infty} h^k(x)\rho_k(x)\mu + \operatorname{div} h(x)\mu = \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} h^k(x)\rho_k(x) + \operatorname{div} h(x)\Big\}\mu. \tag{38}$$

Пусть $\rho : H_- \mapsto H_-$ — вектор-функция такая, что

$$(\rho(x), e_k)_- = \rho_k(x). \tag{39}$$

Тогда

$$\mu'_h = \big\{(h,\rho)_- + \operatorname{div} h\big\}\mu. \tag{40}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $h \in W(H_-, H_+)$, μ — вещественная борелевская мера на H_-, дифференцируемая по каждому направлению, определяемому элементами ортобазиса пространства H_+. Тогда функция*

$$(h(x), \rho(x))_- + \operatorname{div} h(x),$$

где $\rho(x)$ определяется формулами (36) *и* (39), *является μ-интегрируемой и справедлива формула*

$$\mu'_h(A) = \int\limits_A \big\{(h(x), \rho(x))_- + \operatorname{div} h(x)\big\}\,\mu(dx). \tag{41}$$

3. Дифференцирование канонической гауссовской меры

С оснащением $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ канонически связывается гауссовская мера ν на σ-алгебре $\mathfrak{B}_-$, имеющая характеристический функционал

$$\chi_\nu(y) = \int\limits_{H_-} e^{i(y,x)}\nu(dx) = e^{-\|y\|_0^2/2} \quad (y \in H_0) \tag{42}$$

Эта формула непосредственно определяет χ_ν на H_+, но по непрерывности он распространяется и на H_0.

Известно (см. [7]), что в бесконечномерном случае, вообще говоря, не существует нетривиальных мер, дифференцируемых по всем направлениям. Однако возможна дифференцируемость по плотному множеству направлений. Например, каноническая гауссовская мера дифференцируема по всем направлениям из H_0 и имеет логарифмическую производную $-(h,x)$. В частности она дифференцируема по всем направлениям, определяемым векторами ортобазиса $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ пространства H_+ и имеет логарифмическую производную $-(e_k,x)$, то есть

$$\nu'_{e_k} = -(e_k,x)\nu. \tag{43}$$

Если $h\in W(H_-,H_+)$, то

$$\nu'_h = \Big\{-\sum_{k=1}^{\infty}(h(x),e_k)(e_k,x) + \operatorname{div} h(x)\Big\}\nu = -\big\{(h(x),x) + \operatorname{div} h(x)\big\}\nu.$$

Утверждение 4. *Каноническая гауссова мера дифференцируема вдоль любого векторного поля $h\in W(H_-,H_+)$ и имеет логарифмическую производную*

$$-(h(x),x) + \operatorname{div} h(x).$$

Сравнивая полученный результат с формулой (40), получаем, что в случае канонической гауссовой меры $\rho(x) = -x$.

Пусть f — диффеоморфизм пространства H_-, совместимый с основным пространством Φ_{H_-}, причем $\forall x\in H_-$ отображения $f'(x)$ и $[f(x)]^{-1}$ оставляют пространство H_- инвариантным, μ — борелевская мера на H_-, μ^f — ее гладкий образ, v и h — векторные поля на H_- со значениями в H_+ такие, что

$$f'(x)v(x) = h(f(x)) \quad \forall x\in H_-.$$

Вычислим производную образа меры μ вдоль векторного поля h. В силу формул (24), (25), (26)

$$\begin{aligned}(\mu^f)'_h = (\mu'_v)^f = \big\{[(v(x),\rho(x))_- + \operatorname{div} v(x)]\mu\big\}^f = \big\{[(v,\rho)_- + \operatorname{div} v]^{f^{-1}}(y)\big\}\mu^f =\\ = \big[\big(v(f^{-1}(y)),\rho(f^{-1}(y))\big)_- + \operatorname{div} v(f^{-1}(y))\big]\mu^f =\\ = \Big[\big([f'(y)]^{-1}h(y),\rho(f^{-1}(y))\big)_- + \operatorname{div}\big([f'(y)]^{-1}h(y)\big)\Big]\mu^f.\end{aligned} \tag{44}$$

Замечание. Формулы типа (25),(26),(44) конечно же справедливы и для распределений. В том случае, когда распределение порождается дифференцируемой мерой, мы получаем слабую производную соответствующей меры, которая снова является мерой, абсолютно непрерывной относительно исходной меры. Из этого следует (см. [3]), что соответствующая мера является дифференцируемой в смысле определения 1.

Замечание. Предположим, что гильбертово пространство H_- конечномерно и μ — это мера Лебега (более точно, сужение меры Лебега на σ-алгебру борелевских множеств в H_-). Тогда из формулы (35) сразу следует, что

$$\mu'_h = \operatorname{div} h \cdot \mu \tag{45}$$

(первое слагаемое правой части формулы (35) обратится в ноль в силу инвариантности меры Лебега относительно сдвигов). Таким образом мера Лебега дифференцируема вдоль любого гладкого векторного поля и имеет логарифмическую производную $\operatorname{div} h$. Формула (45) может быть получена, если мы будем вычислять μ'_h, пользуясь определением 1 (см.[4]), при дополнительном предположении: интегральные кривые векторного поля h продолжимы на всю ось времени.

Еще одно "конечномерное" утверждение.

Лемма. *Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задано векторное поле h и мера ν, удовлетворяющая условию $\nu'_h = 0$. Тогда для плотности α меры ν (относительно координат x) имеет место следующее равенство*

$$-\alpha'_h = \alpha \cdot \operatorname{div} h. \tag{46}$$

Доказательство. Действительно, обозначив через μ меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, в силу формулы (8) имеем

$$\nu'_h = (\alpha\mu)'_h = \alpha'_h \cdot \mu + \alpha \cdot \mu'_h = \alpha'_h \cdot \mu + \alpha \cdot \operatorname{div} h \cdot \mu = (\alpha'_h + \alpha \cdot \operatorname{div} h)\mu.$$

Приравнивая нулю плотность меры ν'_h, получаем формулу (46). □

Эта лемма известна в литературе под названием “лемма С.Л. Соболева”, (см., например, [5], стр. 82–183).

Список литературы

1. Далецкий, Ю. Л. Стохастическая дифференциальная геометрия // УМН. — 1983. — 38:3. — С. 87–111.

   DALETSKIĬ, Yu. L. (1983) Stochastic differential geometry. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 38 (3). p. 87–111.

2. Белопольская, Я. И., Далецкий, Ю. Л. Уравнения Ито и дифференциальная геометрия // УМН. — 1982. — 37:3. — С. 95–142.

   BELOPOL'SKAYA, Ja. I., DALETSKIĬ, Yu. L. (1982) Ito equations and differential geometry. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 37 (3). p. 95–142.

3. Далецкий, Ю. Л., Фомин, С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1978. — 383 с.

   DALETSKIĬ, Yu. L., FOMIN, S. V. (1978) *Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces.* Moscow: Nauka.

4. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979. — 478 с.

   ARNOLD, V. I. (1979) *Mathematical methods of classical mechanics.* Moscow: Nauka.

5. Мищенко, А. С., Стернин, Б. Ю., Шаталов, В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. — М.: Наука, 1978. — 354 с.

   Mistchenko, A. S., Sternin, B. Y., Shatalov, V. E. (1978) *Lagrangian manifolds and canonical operator's method.* Moscow: Nauka.

6. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. — 799 с.

   Berezansky, Yu. M. (1965) *Eigenfunction expansion of self-adjoint operators.* Kiev: Naukova dumka.

7. Авербух, В. И., Смолянов, О. Г., Фомин, С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. ММО. — 1971. — 24. — С. 133–174.

   Averbukh, V. I., Smolyanov, O. G., Fomin, S. V. (1971) Generalized functions and differential equations in linear spaces. 1. Differentiable measures. *Trans. Moscow Math. Soc.* 24. p. 133–174.

8. Данфорд, Н., Шварц, Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.

   Dunford, N., Schwartz J. T. (1962) *Linear operators. General theory.* Moscow: IL.

УДК: 330.131.7

MSC2010: 90B50, 91A40

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

© А. В. Сигал

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Институт экономики и управления
ул. Севастопольская, 21/4, Симферополь, 295015, Российская Федерация
e-mail: *ksavo3@gmail.com*

Game-Theoretic Modeling of Decision-Making in the Economy with Incomplete Information.

Sigal A. V.

Abstract. Decision-making in the economy should take into account the uncertainty, incompleteness of information, contingency, inconsistency, conflict, competition, multicriteria, alternatives and the resulting economic risk. As a game-theoretic model of decision-making in the economy with incomplete information, a model based on the concept of combined application of statistical and antagonistic games is proposed. The distinctive features of the proposed concept are a number of features, of which the most significant and characteristic are the following aspects: the use of neoclassical antagonistic games, antagonistic games defined by partially known payment matrices, and the use of simplified methods for solving neoclassical antagonistic games, based on the classification of information situations of incompleteness of information regarding the true values of the elements of the payment matrix.

Keywords: *incompleteness of information, economic risk, statistical game, antagonistic game, neoclassical antagonistic game.*

Введение. Постановка задачи

При первом систематическом изложении теории игр Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в монографии [1], она предлагалась ими как средство математического изучения явлений конкурентной экономики. Абрахам Вальд, создатель последовательного статистического анализа [2], считал, что основной моделью принятия решений является статистическая игра. Следуя за А. Вальдом, Д. Блекуэлл и М. А. Гиршик в своей монографии [3] излагают и используют теорию игр как основу для теории принятия статистических решений, т. е. теории статистических игр.

Моделирование принятия управленческих решений в экономике нуждается в учете ряда особенностей. В первую очередь, нужно учитывать, что экономика представляет собой динамическую, слабо структурированную сложную систему, которая состоит из многих элементов, в том числе из большого количества хозяйствующих единиц, которые находятся в довольно тесном, непрерывном взаимодействии. Всем социально-экономическим системам присущи такие характерные особенности, как хаотичность, непредсказуемость и случайность, одним словом — неопределенность.

Неопределенность — это недостаточность обеспеченности процесса принятия управленческих решений необходимой информацией или, в более общей трактовке, знаниями о проблемной ситуации. Неопределенность влияет на эффективность принимаемых управленческих решений и в целом на эффективность экономической деятельности. Фундаментальная неопределенность экономической деятельности – это неопределенность ее результатов. Неполное, недостоверное, неточное знание разнообразных параметров порождается разными причинами. Прежде всего, оно порождается неполной и недостоверной информацией об условиях реализации решений, о связанных с этими решениями возможных выгодах и затратах, наличием множественности целей и многокритериальности их оценки. Подчеркнем, в экономике приходится иметь дело с существованием некоторой неопределенности, которую невозможно устранить, и с неполнотой информации, которую невозможно преодолеть за приемлемую плату, а порой и абсолютно невозможно преодолеть.

Итак, в экономике приходится осуществлять выбор наилучших альтернатив и принимать управленческие решения в условиях неопределенности, а точнее в условиях неопределенности, неполноты информации, случайности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска. Согласно определению В. В. Витлинского [4, с. 10] экономический риск – это экономическая категория, отображающая характерные особенности восприятия лицом, принимающим решения, конфликтности, неопределенности, случайности, неполноты информации, объективно существующих и внутренне присущих процессам определения целей, управлению, оцениванию альтернативных вариантов действий и принятию решений. Все эти процессы отягощены возможными опасностями и неиспользованными возможностями. Экономический риск имеет диалектическую объективно-субъективную природу. Количественная оценка уровня экономического риска является многомерной величиной, характеризующей возможность отклонения от целей, от желательных (ожидаемых) результатов, возможность неудачи, в т. ч. возможность возникновения потерь. При этом важно учитывать влияние контролируемых (управляемых) и неконтролируемых (неуправляемых) факторов, прямых и обратных связей.

Перечисленные особенности социально-экономических систем и требование адекватности математических моделей, применяемых в экономике, заставляют разработать такой теоретико-игровой подход к моделированию процесса принятия управленческих решений, который бы, с одной стороны, давал возможность в достаточной мере учитывать неопределенность, неполноту информации, конфликтность, случайность и обусловленный ими экономический риск, а с другой стороны — характеризовался бы научной корректностью и практической реализуемостью.

Одной из концепций теоретико-игрового моделирования принятия решений в экономике, позволяющей учитывать указанные особенности социально-экономических систем, является концепция комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Суть концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений, с антагонистической игрой, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры. Для поиска оптимальной стратегии (наиболее эффективного управленческого решения) можно решить полученную антагонистическую игру.

Отметим, что в статье антагонистическими играми называются конечные игры двух лиц с нулевой суммой. При этом различаются два принципиально разных класса антагонистических игр. Первый класс образуют классические антагонистические игры, представляющие собой антагонистические игры с полной информацией. Второй класс образуют неоклассические антагонистические игры, представляющие собой антагонистические игры с неполной информацией.

Классические антагонистические игры принято называть матричными играми, поскольку любую такую игру однозначно задает ее полностью известная платежная матрица (матрица выигрышей первого игрока). Неоклассическая антагонистическая игра является простейшим обобщением классической антагонистической игры. Главная особенность неоклассической антагонистической игры состоит в том, что ее платежная матрица известна частично, т. е. не для всех элементов этой матрицы известны их точные истинные значения.

Антагонистические игры и статистические игры имеют одну и ту же формальную структуру. Это совпадение формальных структур и дает теоретическую и практическую возможность комбинировано применять статистические и антагонистические игры. Основными чертами, которые отличают подход к моделированию процесса принятия управленческих решений в экономике, основанный на комбинированном применении статистических и антагонистических игр, от других подходов, применяемых для теоретико-игрового моделирования экономики, являются следующие особенности. Во-первых, комбинированное применение статистических и антагонистических игр нацелено на принятие оптимальных решений, адекватно учитывающих неопределенность, неполноту информации, конфликтность, случайность и обусловленный ими экономический риск. Во-вторых, комбинированное применение статистических и антагонистических игр целесообразно использовать совместно с другими разделами математики, прежде всего с теорией вероятностей, математической статистикой, теорией случайных процессов, эконометрией, нечеткой математикой, энтропийным подходом, конкретной математикой. В-третьих, комбинированное применение статистических и антагонистических игр возможно и в тех случаях, когда антагонистическая игра не является непосредственной моделью рассматриваемого процесса принятия управленческих решений.

Целью работы является разработка концепции теоретико-игрового моделирования принятия решений в экономике при неполной информации на основе комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Отличительными чертами предлагаемой концепции является ряд особенностей, из которых наиболее существенными и характерными являются следующие аспекты: применение неоклассических антагонистических игр и применение упрощенных методов решения неоклассических антагонистических игр, основанных на классификации информационных ситуаций неполноты информации относительно истинных значений элементов платежной матрицы.

Первоначальный вариант классификации информационных ситуаций неполноты информации относительно истинных значений элементов платежной матрицы впервые был приведен в работе А. В. Сигала, В. Ф. Блыщика [5]. Классификация информационных ситуаций, предложенная в работе [5], в значительной мере повторяла классификацию информационных ситуаций относительно стратегии поведения экономической среды, которая была предложена Р. И. Трухаевым [6, с. 13]. Основы концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр наиболее полно изложены в монографии А. В. Сигала [7].

1. Основные понятия и определения

Как отмечалось выше, будем различать две разновидности антагонистических игр: классические антагонистические игры и неоклассические антагонистические игры.

Определение 1. Классической антагонистической игрой (КАИ) будем называть антагонистическую игру (АИ) $\Gamma_{corr} = \langle \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J}, \boldsymbol{R}_{corr} \rangle$, заданную своей полностью известной платежной матрицей $\boldsymbol{R}_{corr}$. Неоклассической антагонистической игрой (НАИ) будем называть АИ $\Gamma = \langle \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{R} \rangle$, заданную своей частично известной платежной матрицей $\boldsymbol{R}$.

Частичное знание платежной матрицы НАИ означает, что среди элементов r_{ij} матрицы $\mathbf{R}$ есть хотя бы один элемент, точное истинное значение которого неизвестно. Поэтому не для всех ситуаций $(i; j)$, возможных в отдельно взятой партии НАИ, известно точное истинное значение элемента r_{ij} частично известной платежной матрицы $\mathbf{R}$, т. е. точное истинное значение соответствующего выигрыша первого (проигрыша второго) игрока.

Термины «классическая антагонистическая игра» и «неоклассическая антагонистическая игра» в том смысле, в каком они заданы в приведенном определении, впервые были введены в статье В. В. Витлинского, А. В. Сигала [8]. В статьях [5, 9] вместо термина НАИ использовались его синонимы «антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности» и «антагонистическая игра, заданная в условиях частичной определенности», в статье [9] – синоним «антагонистическая игра с неполной информацией», а в работе [10] – синоним «антагонистическая игра, заданная в условиях неполной информации».

Хотя игры с неполной информацией изучаются с середины XX столетия, (см., например, [11]–[16]), методы их решения нуждаются в расширении и уточнении. Поиск оптимального решения НАИ усложняется тем, что игроки вынуждены принимать решение с учетом неопределенности, неполноты информации, конфликтности и обусловленного ими риска. В рамках теории принятия решений с учетом неопределенности, неполноты информации, конфликтности и обусловленного ими риска возможны разные концепции поиска оптимального решения НАИ. Методы решения НАИ, т. е., по сути, возможные методы преодоления неполноты информации, зависят от имеющейся информационной ситуации относительно неопределенности значений неизвестных элементов платежной матрицы. Одним из наиболее естественных и простейших методов решения НАИ является ее корректное приведение к КАИ.

Для оценки значений неизвестных элементов платежной матрицы возможно использование методов интерполяции, экстраполяции, регрессионного анализа, прогнозирования и т. п. Решение полученной КАИ можно интерпретировать как оптимальное решение исходной НАИ.

Определение 2. Информационной ситуацией (ИС) I_l будем называть определенную меру градации, характеризующую неопределенность значений неизвестных элементов r_{ij} частично известной платежной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k \times n} = (r_{ij})$ НАИ.

Классификацию ИС I_l можно представить в таком виде [9].

1. I_0: нулевая ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} измерены с существенными ошибками.

2. I_1: первая ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} являются возможными значениями (реализациями) заданных случайных величин (СВ).

3. I_2: вторая ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} являются возможными значениями заданных функций одной переменной или функций нескольких переменных.

4. I_3: третья ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} удовлетворяют заданным ограничениям, т. е. принадлежат заданным множествам.

5. I_4: четвертая ИС характеризуется тем, что о значениях всех неизвестных элементов r_{ij} нет никакой математической информации.

6. I_5: пятая ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} приобретают наихудшие для первого игрока (ЛПР) значения. Пятую ИС следует применять для моделирования экономики в условиях, когда лицо, принимающее решения (ЛПР) считает нецелесообразным рисковать. Например, в условиях жесткой конкуренции, в условиях кризиса, в условиях предкризисной ситуации или в случае, если отношение ЛПР к риску характеризуется существенной несклонностью к риску.

7. I_6: шестая ИС характеризуется тем, что значения всех неизвестных элементов r_{ij} принадлежат заданным нечетким множествам.

8. I_7: седьмая ИС – смешанная ИС, когда имеются хотя бы два неизвестных элемента r_{ij}, при этому все эти элементы могут быть распределены хотя бы на две группы, для каждой из которых имеет место своя собственная ИС, или когда значения всех неизвестных элементов r_{ij} являются возможными значениями заданных объектов двойной природы. К объектам двойной природы можно отнести, например, случайные функции и, в частности, случайные процессы, одновременно представляющие собой совокупность разных СВ и совокупность разных неслучайных (обычных) функций. Теория случайных процессов достаточно подробно изложена в работах [17, 18].

Приведенная классификация ИС относительно неопределенности значений неизвестных элементов платежной матрицы представляет собой расширенный (за счет введения нулевой ИС) и уточненный (для формулировки понятия седьмой ИС) вариант классификации, впервые предложенной в работе А. В. Сигала, В. Ф. Блыщика [5].

При решении НАИ во многих случаях неизвестные элементы платежной матрицы могут быть заменены их наиболее типичными (и/или наиболее важными) значениями, после чего следует решать полученную КАИ, заданную полученной полностью известной матрицей (или несколько соответствующих КАИ). Кратко перечислим возможные методы преодоления неполноты информации в поле каждой ИС.

1. В поле нулевой ИС I_0 целесообразно проведение дополнительного исследования, которое позволит оценить точные истинные значения неизвестных элементов с необходимой степенью точности.

2. В поле первой ИС I_1 все неизвестные элементы можно заменить значениями определенных (одних и тех же) числовых характеристик соответствующих СВ (например, их математическими ожиданиями, их модальными значениями и т. п.).

3. В поле второй ИС I_2 все неизвестные элементы можно заменить значениями соответствующих функций для наиболее типичных значений их аргументов.

4. В поле третьей ИС I_3 все неизвестные элементы можно заменить их наиболее типичными с экономической точки зрения значениями, удовлетворяющими заданным ограничениям (принадлежащих заданным множествам).

5. В поле четвертой ИС I_4 все неизвестные элементы можно заменить их наиболее типичными с экономической точки зрения значениями.

6. В поле пятой ИС I_5 неизвестные элементы можно заменить значениями, минимизирующими значение платежной функции соответствующей АИ, если эта функция ограничена на области допустимых значений неизвестных элементов платежной матрицы.

7. В поле шестой ИС I_6 нужно применить какой-нибудь метод дефаззификации, т. е. метод преобразования нечеткого множества в четкое число. Например, все неизвестные элементы можно заменить значениями, для которых их функции принадлежности приобретают наибольшие значения, или все неизвестные элементы можно заменить значениями соответствующих средневзвешенных величин.

8. В поле седьмой ИС I_7 для каждой отдельной группы неизвестных элементов нужно применять свой подход, характерный для соответствующей ИС. Особый интерес представляет случай, когда все неизвестные элементы являются возможными значениями заданных случайных функций. Замена всех случайных функций их конкретными сечениями переводит ситуацию в поле первой ИС I_1, а замена всех случайных функций их конкретными реализациями – в поле второй ИС I_2. Методы решения НАИ, разумеется, далеко не исчерпываются указанными простейшими методами преодоления неполноты информации. В частности, для решения НАИ можно использовать теорию, методы и алгоритмы решения задач линейной оптимизации с неточными входными данными [19], что было предложено в статье А. В. Сигала [20]. Следует учитывать, что во многих случаях поиск оптимального решения НАИ может включать решение нескольких КАИ. Для окончательного выбора оптимального

решения исходной НАИ может понадобиться применение методов исследования операций, теории распознавания образов, теории полезности и т. п. Кроме того, практически всегда целесообразно использовать имеющуюся информацию экономического и другого нематематического характера. Это может позволить привести решение исходной НАИ к решению одной единственной КАИ или найти оптимальное решение исходной НАИ, выбирая из оптимальных решений нескольких КАИ.

2. Теоретико-игровая модель принятия инвестиционных решений

Оценка экономической эффективности проектов в постсоветских странах требует учета разных методических особенностей. Учет этих особенностей современной экономики постсоветских стран, а также учет последствий и, особенно, причин мирового кризиса, начавшегося в 2008 году, требуют привлечения новых методов и моделей, позволяющих из всех имеющихся проектов выбрать наиболее надежные проекты, т. е. такие проекты, вероятности успешной реализации которых с точки зрения инвестора обладают наибольшими значениями. Само множество наиболее надежных проектов будем трактовать как нечеткое множество вида $\widetilde{\boldsymbol{I}} = \{(\mu_1/1)\,;(\mu_2/2)\,;...;(\mu_i/i)\,;...;(\mu_k/k)\}$, где μ_i – значение функции принадлежности i-го проекта нечеткому множеству $\widetilde{\boldsymbol{I}}$, $i = 1, \ldots, k$. Множество $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ – это нечеткое подмножество универсального множества $\boldsymbol{I} = \{1; 2; \ldots; i; \ldots; k\}$ всех проектов, рассматриваемых инвестором в настоящий момент времени. Здесь универсальное множество $\boldsymbol{I}$ – это обычное (не нечеткое) конечное множество, при этом главная задача инвестора заключается в корректном оценивании значений надежности проектов, т. е. значений функции принадлежности μ_i, $i = \overline{1, k}$, каждого проекта нечеткому множеству $\widetilde{\boldsymbol{I}}$. Рассмотрим комбинированное применение статистических и антагонистических игр совместно с нечеткой математикой для принятия инвестиционных решений, точнее для упорядочивания (по степени надежности) инвестиционных проектов, рассматриваемых инвестором к возможной реализации.

Пусть ситуация принятия инвестиционных решений характеризуется следующими составными частями:

1. $\boldsymbol{I} = \{1; 2; 3; 4\}$ – известное множество потенциальных проектов, возможность инвестирования которых рассматривает инвестор;

2. $\boldsymbol{J} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ – известное множество сценариев условий реализации потенциальных проектов, возможность инвестирования которых рассматривает инвестор;

3. $\mu = \mu_{4\times 5} = (\mu_{ij})$ – частично известная матрица, элементы которой μ_{ij} задают соответствующие значения оценок функции принадлежности i-го проекта множеству наиболее надежных проектов в условиях j-го сценария.

Точные истинные значения всех элементов μ_{ij} платежной матрицы неизвестны, но эксперты установили интервалы, которым принадлежат эти значения:

$$\mu_{11} \in [0,4;0,5],\ \mu_{12} \in [0,4;0,5],\ \mu_{13} \in [0,5;0,6],\ \mu_{14} \in [0,6;0,7],\ \mu_{15} \in [0,4;0,5],$$
$$\mu_{21} \in [0,5;0,6],\ \mu_{22} \in [0,2;0,3],\ \mu_{23} \in [0,3;0,4],\ \mu_{24} \in [0,1;0,2],\ \mu_{25} \in [0,6;0,7],$$
$$\mu_{31} \in [0,2;0,3],\ \mu_{32} \in [0,3;0,4],\ \mu_{33} \in [0,6;0,7],\ \mu_{34} \in [0,4;0,5],\ \mu_{35} \in [0,1;0,2],$$
$$\mu_{41} \in [0,6;0,7],\ \mu_{42} \in [0,5;0,6],\ \mu_{43} \in [0,6;0,7],\ \mu_{44} \in [0,7;0,8],\ \mu_{55} \in [0,6;0,7].$$

Очевидно, эту ситуацию принятия инвестиционных решений характеризует НАИ, заданная в поле третьей ИС I_3. Для определенности в качестве наиболее типичных значений элементов платежной матрицы выберем середины указанных интервалов. Получим КАИ, заданную полностью известной матрицей

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_{4\times 5} = (\bar{\mu}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,45 & 0,55 & 0,65 & 0,45 \\ 0,55 & 0,25 & 0,35 & 0,15 & 0,65 \\ 0,25 & 0,35 & 0,65 & 0,45 & 0,15 \\ 0,65 & 0,55 & 0,65 & 0,75 & 0,65 \end{pmatrix}.$$

КАИ, заданная полностью известной матрицей $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{4\times 5} = (\bar{\mu}_{ij})$, является игрой с седловой точкой. Применим к ней процедуру упорядочивания (ранжирования) альтернатив, предложенную в работе А. В. Сигала [21] и уточненную в публикации А. В. Сигала, С. А. Сигал [22].

Легко заметить, что справедливы неравенства $\bar{\mu}_{4j} \geq \bar{\mu}_{1j}$, $\bar{\mu}_{4j} \geq \bar{\mu}_{2j}$, $\bar{\mu}_{4j} \geq \bar{\mu}_{3j}$, где $j = 1, \ldots, 5$, и $\bar{\mu}_{4j} > \bar{\mu}_{1j}$, где $j = 1, \ldots, 5$. Эти неравенства означают, что четвертая чистая стратегия первого игрока доминирует все другие его чистые стратегии и строго доминирует его первую чистую стратегию. Это означает, что для четвертого потенциального проекта можно оценить его уровень надежности единицей: $\mu_4^* = \gamma_1 = 1$. Вычеркнув четвертую строку, упростим матрицу $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{4\times 5} = (\bar{\mu}_{i,j})$ к матрице меньшей размерности:

$$\bar{\mu}' = \bar{\mu}'_{3\times 5} = \left(\bar{\mu}'_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,45 & 0,55 & 0,65 & 0,45 \\ 0,55 & 0,25 & 0,35 & 0,15 & 0,65 \\ 0,25 & 0,35 & 0,65 & 0,45 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ни одна из трех чистых стратегий первого игрока, которые остались, не доминирует ни одну из его остальных чистых стратегий. Легко убедиться, что для полученной матрицы $\bar{\mu}' = \bar{\mu}'_{3\times 5} = \left(\bar{\mu}'_{ij}\right)$ справедливы равенства

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \bar{\mu}'_{ij} = 0,45 = \bar{\mu}'_{12}$, $\beta = \min\limits_j \max\limits_i \bar{\mu}'_{ij} = 0,45 = \bar{\mu}'_{12}$, $\alpha = \beta = 0,45$, т. е. эта матрица содержит седловой элемент $\bar{\mu}'_{12} = 0,45$, расположенный в ее первой строке. Пусть для первого потенциального проекта его уровень надежности оценен некоторым числом γ_2, значение которого удовлетворяет соотношениям $\mu_1^* = \gamma_2 < \gamma_1 = 1$.

Вычеркнув первую строку, упростим матрицу $\bar{\mu}' = \bar{\mu}'_{3\times5} = \left(\bar{\mu}'_{ij}\right)$ и получим матрицу

$$\bar{\mu}'' = \bar{\mu}''_{2\times5} = (\bar{\mu}''_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,25 & 0,35 & 0,15 & 0,65 \\ 0,25 & 0,35 & 0,65 & 0,45 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, для матрицы $\bar{\mu}'' = \bar{\mu}''_{2\times5} = (\bar{\mu}''_{ij})$ справедливы соотношения $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \bar{\mu}''_{ij} = 0,15$, $\beta = \min\limits_j \max\limits_i \bar{\mu}''_{ij} = 0,35$, $\alpha < \beta$. Итак, эта матрица не содержит седлового элемента. Решение КАИ, заданной полностью известной матрицей $\bar{\mu}'' = \bar{\mu}''_{2\times5} = \left(\bar{\mu}''_{ij}\right)$, имеет следующий вид: $V^*_{\bar{\mu}''} = \frac{19}{60}$, $\breve{\mathbf{p}}^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\breve{\mathbf{q}}^* = \left(0; \frac{5}{6}; 0; 0; \frac{1}{6}\right)$. Найденное оптимальное решение этой игры позволяет оценить уровни надежности всех оставшихся потенциальных проектов: $\mu_2^* = \breve{p}_1^* = \frac{1}{3}$, $\mu_3^* = \breve{p}_2^* = \frac{2}{3}$, откуда $\gamma_3 = \max\limits_i \breve{p}_i^* = \max\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, $\mu_1^* = \gamma_2 = \frac{\gamma_1+\gamma_3}{2} = \frac{1+2/3}{2} = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6}$.

Поскольку $\max \mu_i^* = \max\left\{\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\} = 1$, условие нормировки оценок μ_i^* выполняется, при этом нечеткое множество наиболее надежных проектов имеет вид $\widetilde{\boldsymbol{I}} = \{(\mu_1^*/1;)\,;(\mu_2^*/2;)\,;(\mu_3^*/3;)\,;(\mu_4^*/4;)\} = \left\{\left(\frac{5}{6}/1;\right); \left(\frac{1}{3}/2;\right); \left(\frac{2}{3}/3;\right); (1/4;)\right\}$. Это означает, в частности, что наибольшее значение уровня надежности имеет четвертый потенциальный проект, для которого уровень его надежности равняется $\mu_4^* = 1$, а наименьшее значение уровня надежности – второй потенциальный проект, для которого уровень его надежности равняется $\mu_2^* = \frac{1}{3}$.

Если инвестор считает, что потенциальный проект имеет достаточный уровень надежности и его следует реализовывать тогда и только тогда, когда найденная оценка μ_i^* его уровня надежности удовлетворяет, например, требованию $\mu_i^* \geq 0,5$, то, с учетом найденных значений μ_i^* оценок уровней надежности имеющихся потенциальных проектов, инвестору следует реализовывать только первый, третий и четвертый потенциальные проекты.

А если инвестор считает, что потенциальный проект имеет достаточный уровень надежности и его следует реализовывать тогда и только тогда, когда найденная оценка μ_i^* его уровня надежности удовлетворяет, например, требованию $\mu_i^* \geq 0,75$, то с учетом найденных значений μ_i^* оценок уровней надежности имеющихся потенциальных проектов, инвестору следует реализовывать только первый и четвертый потенциальные проекты.

Заключение

В статье рассмотрены основные положения теоретико-игрового моделирования принятия управленческих решений в экономике при неполной информации на основе концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Суть концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей принятие управленческих решений, с антагонистической игрой, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры.

Современной экономике внутренне присущи неопределенность, неполнота информации, случайность, противоречивость, конфликтность, конкуренция, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими риск. Как следствие, в случае принятия управленческих решений в экономике на основе применения антагонистических игр не для всех элементов платежной матрицы соответствующей игры окажутся известными их точные истинные значения. В таких случаях следует применять неоклассические антагонистические игры (НАИ), т. е. антагонистические игры, заданные частично известными платежными матрицами.

Применение НАИ позволяет принимать управленческие решения, учитывающие неопределенность, неполноту информации, случайность, противоречивость, конфликтность, конкуренцию, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими экономический риск.

Методы решения НАИ, по сути — возможные методы преодоления неполноты информации, зависят от имеющейся информационной ситуации относительно неопределенности значений неизвестных элементов платежной матрицы. Можно выделить восемь классов разных информационных ситуаций. Одним из наиболее естественных и простейших методов решения НАИ является ее корректное приведение к соответствующей классической антагонистической игре (КАИ).

Принятие управленческих решений в экономике — это, вообще говоря, искусство, поэтому, ориентируясь на найденную ситуацию равновесия в антагонистической игре, характеризующей процесс принятия управленческих решений, лицо, принимающее решения, не обязано строго придерживаться соответствующей оптимальной стратегии. Наиболее перспективным направлением дальнейших исследований теоретико-игрового моделирования принятия управленческих решений в экономике при неполной информации представляется моделирование принятия управленческих решений на основе концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр совместно с теорией случайных процессов.

Список литературы

1. NEUMANN, J. VON and MORGENSTERN, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton Univ. Press. — 625 p.

2. Вальд, А. Последовательный анализ / А. Вальд; пер. с англ. П. А. Бакута. — Москва: Физматгиз, 1960. — 328 с.

   WALD, A. (1960) *Sequential Analysis* / A. Wald: Translation from the English P. A. Bakuta. — Moscow: Fizmatgiz. — 328 p. (in Russian)

3. Блекуэлл, Д. Теория игр и статистических решений / Д. Блекуэлл, М. А. Гиршик; пер. с англ. И. В. Соловьева. — М.: ИЛ, 1958. — 318 с.

   BLACKWELL, D. (1958) *Theory of Games and Statistical Decisions* / D. Blackwell, M. A. Girshick; Translation from the English I. V. Solov'eva. — Moscow: Foreign literature. — 318 p. (in Russian)

4. Економічний ризик: ігрові моделі / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний / За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. — К.: КНЕУ, 2002. — 446 с.

   Economic Risk: Game Models (2002) / V. V. VITLINSKY, P. I. VERCHENKO, A. V. SIGAL, Ya. S. NAKONECHNYJ / Edited by Professor V. V. Vitlinsky. – Kiev: KNEU. — 446 p. (in Ukrainian)

5. Сигал, А. В. Антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности / А. В. Сигал, В. Ф. Блыщик // Экономическая кибернетика: Международный научный журнал. — 2005. — № 5-6. — С. 47-53.

   SIGAL, A. V. and BLYSCHIK, V. F. (2005) Antagonistic Game in the Conditions of Partial Definition. *Economic Cybernetics: International scientific magazine.* 5-6 (35-36). p. 47-53. (in Russian)

6. Трухаев, Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. — М.: Наука, 1981. — 258 с.

   TRUKHAEV, R. I. (1981) *Models Decision Making in the Conditions of Uncertainty.* Moscow: Science. — 258 p. (in Russian)

7. Сигал, А. В. Теория игр для принятия решений в экономике: монография / А. В. Сигал. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 308 с.

   SIGAL, A. V. (2014) *Game Theory for Decision-Making in the Economy: monograph.* Simferopol: DIAIPI. — 308 p. (in Russian)

8. Вітлінський, В. В. Концептуальні положення застосування інструментарію антагоністичних ігор в економіці з урахуванням ризику / В. В. Вітлінський, А. В. Сігал // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Зб. наук. пр. — К.: КНЕУ, 2011. — № 84. — С. 127-140.

   VITLINSKY, V. V., SIGAL, A. V. (2011) Conceptual Positions of Application Tools Antagonistic Games in the Economy, Taking into Account the Risk. *Modeling and Information Systems in Economics.* Kiev: KNEU. № 84. p. 181-187. (in Ukrainian)

9. Сигал, А. В. Теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля в условиях частичной определенности / А. В. Сигал // Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии: труды докладов 2-й междунар. науч. конф. — Кишинэу, 24-26 марта 2010. — С. 181-187.

   SIGAL, A. V. (2010) Game-Theoretic Optimization of Portfolio Structure under Conditions of Partial Certainty. *Mathematical Modeling, Optimization and Information Technologies: Proceedings of the 2nd International Scientific Conference, Chisinau.* 24-26 March. p. 181-187. (in Russian)

10. Сигал, А. В. Теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля в условиях неопределенности и риска / А. В. Сигал // Экономическая политика и фондовый рынок: модели и методы системного анализа. Труды ИСА РАН. — М.: Поли Принт Сервис, 2009. — Т. 47. — С. 126-136.

    SIGAL, A. V. (2009) Game-Theoretic Optimization of the Portfolio Structure in the Context of Uncertainty and Risk. *Economic Policy and Stock Market: Models and Methods of System Analysis. Proceedings of the ISA RAS.* Moscow: PolyPrintServis. Vol. 47. p. 126-136. (in Russian)

11. Орловский, С. А. Игры в нечетко определенной области / С. А. Орловский // ЖВМиМФ. — 1976. — № 16. — С. 1427-1435.

    ORLOVSKY, S. A. (1976) Games in an Indistinctly Defined Area. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* No. 16. p. 1427-1435. (in Russian)

12. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. — М.: Наука, 1981. — 208 с.

    ORLOVSKY, S. A. (1981) *Decision-Making Problems with Fuzzy Source Information.* Moscow: Science. — 208 p. (in Russian)

13. AUMANN, R. J., M. MASCHLER (1995) *Repeated Game with Incomplete Informatio.* Cambridge: MIT Press. — 360 p.

14. HARSANYI, J. C. (1995) A New Theory of Equilibrium Selection for Games with Incomplete Information. *Games and Economic Behavior.* Vol. 10 (2). p. 318-332.

15. HARSANYI, J. C. (1967-1968) Games with Incomplete Information Played by «Bayesian» Players. Parts I-III. *Management Science.* No. 14. p. 159-182, 320-334, 486-502.

16. MYERSON, R. B. (1984) Cooperative Games with Incomplete Information. *International Journal of Game Theory.* Vol. 13 (No. 2). p. 69-96.

17. Булинский, А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — М.: Физматлит, 2003. — 400 с.

    BULINSKY, A. V., SHIRYAEV, A. N. (2003) *Theory of Random Processes.* Moscow: Fizmatlit. — 400 p. (in Russian)

18. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с.

    WENTZELL, E. S., OVCHAROV, L. A. (2000) *The Theory of Stochastic Processes and its Engineering Applications.* Moscow: High School. — 323 p. (in Russian)

19. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / [Фидлер М., Недома Й., Рамик Я. и др.]; пер. с англ. С. И. Кумкова под ред. С. П. Шарого. — М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотичная динамика, Институт компьютерных исследований, 2008. — 288 с.

    Linear Optimization Problems with Inexact Data (2008) / [Fiedler M., Nedoma J., Ramik J. and et al.]; Translation from the English S. I. Kumkova Edited by S. P. Sharogo. — Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute for Computer Research. — 288 p. (in Russian)

20. Сигал, А. В. О возможности применения задач линейной оптимизации с неточными данными при теоретико-игровом моделировании экономического риска / А. В. Сигал // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2012): сб. научных трудов VI Междунар. школы-симпозиума АМУР-2012 (Севастополь, 17-23 сентября 2012). — Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2012. — С. 324-326.

    SIGAL, A. V. (2012) On the Possibility of Applying Linear Optimization Problems with Inaccurate Data in the Game-Theoretic Modeling of Economic Risk. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the VI International School-Symposium, Sevastopol.* Simferopol: TNU. p. 324-326.

21. Сигал, А. В. Игровой метод ранжирования экономических объектов / А. В. Сигал // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2011): сб. научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011 (Севастополь, 12-18 сентября 2011). — Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2011. — С. 324-326.

    SIGAL, A. V. (2011) Game Method of Ranking Economic Objects. *Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems: Proceedings of the V International School-Symposium, Sevastopol.* Simferopol: TNU. p. 327-333.

22. Сигал, А. В. Игровой метод ранжирования альтернатив / А. В. Сигал, С. А. Сигал // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики Украины: материалы X Юбилейной Междунар. научно-практ. конф. Алушта, 2-4 октября 2011. — Симферополь, 2011. — С. 47-49.

    SIGAL, A. V. and SIGAL, S. A. (2011) Game Method of Ranking Alternatives. *Actual Problems and Prospects for the Development of the Ukrainian Economy: Proceedings of the X International Scientific and Practical Conference, Alushta.* Simferopol. p. 47-49.

УДК: 517.98

MSC2010: 46A20, 46A22, 46A25

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МНОГОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ

© Ф. С. Стонякин

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
проспект Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *fedyor@mail.ru*

On some problem of set-valued analysis in asymmetric normed spaces.

Stonyakin F. S.

Abstract.

The Schauder theorem, which claims the existence of a fixed point of every mapping $f : B \to B$, where B is a compact convex set in a normed space E, is well known. If a convex set B is closed and bounded in E, then the result remains valid for the case in which $f(B)$ is precompact.

In recent papers [1, 2] we suggest an approach to fixed-point theorems for mappings of a bounded closed set B in a normed space without the assumption that the image $f(B)$ is precompact (which leads naturally to conditions of new type). This approach is based on injective and compact embeddings of E in some another Banach space E'. Note that such a method is applicable if and only if the space E admits a countable total set of continuous linear functionals:

$$T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^* : \quad \forall x, y \in E \quad \ell_n(x) = \ell_n(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y.$$

In ([2], Section 3) new analogues of Shauder fixed-point theorem were obtained for a special class of set-valued mappings in normed space.

This paper is devoted to some generalizations of these results to the class of asymmetric normed spaces. We note some applications of asymmetric normed spaces to theoretical computer science and approximation theory.

For asymmetric normed space E we consider the family $CL(E)$ of bounded closed convex sets in E. $CL(E)$ is a convex normed cone and it is injectively isometrically embedded in some linear normed space $L(E)$. Let E^* be a collection of linear bounded functionals $\ell : E \to \mathbb{R}$. Generally, E^* is a convex normed cone with a norm

$$\|\ell\|_* := \sup_{x \neq 0} \frac{\ell(x)}{\|x|}.$$

The following result holds.

Theorem 1. *For each $\ell \in E^*$ there is a functional $\varphi_\ell : L(E) \to \mathbb{R}$: contained in the conjugate space $L^*(E)$ and the set $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in E^*}$ is total in $L(E)$.*

Theorem 2. *If the conjugate cone E^* is separable and E_0^* is a countable dense subset of E^*, then $\Phi = \{\varphi_\ell \mid \ell \in E_0^*\}$ is a total set in $L(E)$.*

Let us consider one corollary of Theorem 2. We introduce following class of Φ-*uniformly continuous* mappings $f : CL(E) \to CL(E)$:

$$\forall L > 0\, \exists \delta > 0 : |\max \ell(x) - \max \ell(y)| < \delta \Rightarrow |\max \ell(f(x)) - \max \ell(f(y))| < L \quad \forall \ell \in E_0^*.$$

Note that $\ell(x)$ and $\ell(y)$ are segments in $\mathbb{R}$.

Corollary 1. *If B is a convex and bounded set in $L(E)$, E^* is a separable normed cone and a mapping $f : CL(E) \to CL(E)$ is Φ-uniformly continuous, then there is a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in B$ such that*

$$\lim_{n\to\infty} \max \ell(x_n) = \lim_{n\to\infty} \max \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in E_0^*.$$

Keywords: *asymmetric normed space, conjugate cone, compact embedding, Hausdorff metric, Shauder theorem.*

Введение

Хорошо известна теорема Шаудера, утверждающая существование неподвижной точки всякого отображения $f : B \to B$, где B — выпуклый компакт в нормированном пространстве E. Если же выпуклое множество B замкнуто и ограничено в E, то результат остаётся верным в случае предкомпактности образа $f(B)$.

Ранее в [1, 2] нами был предложен подход к теоремам о неподвижных точках для ограниченных замкнутых множеств B в нормированном пространстве, но без требования предкомпактности образа $f(B)$. Этот подход основан на понятии *антикомпакта* в нормированных пространствах, которое предложено нами в [3]: замкнутое выпуклое симметричное множество C' в нормированном пространстве E называется антикомпактом, если в пространстве $E_{C'} = (sp\, C', ||\cdot||_{C'})$ содержится и предкомпактно всякое ограниченное множество $B \subset E$ ($||\cdot||_{C'} = p_{C'}(\cdot)$ — функционал Минковского; $E_{C'}$ пополнено относительно $||\cdot||_{C'}$). Иными словами, E инъективно компактно вложено в другое банахово пространство $E_{C'}$. Здесь и всюду далее под $\mathscr{C}'(E)$ мы понимаем набор антикомпактов в пространстве E. Известно [2], что нормированное пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда в пространстве E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T = \{\ell_n\}_{n=1}^\infty \subset E^*$: $\ell_n(x) = \ell_n(y)\, \forall n \in \mathbb{N} \iff x = y$ (здесь и всюду далее будем полагать, что $||\ell_n||_{E^*} \leqslant 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$). Примером антикомпактов, соответствующих T_0 в таких пространствах E может служить система множеств:

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_k \left| \frac{\ell_k(x)}{\varepsilon_k} \right| \leqslant 1 \right\}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$.

В [2] показано, как с использованием антикомпактов (иными словами, компактных вложений в другие банаховы пространства) можно получить аналоги теоремы Шаудера для специального класса многозначных отображений в нормированных пространствах. Точнее говоря, в [2] рассмотрена схема построения антикомпактов в специальном банаховом пространстве $L(E)$, связанном с конусом выпуклых компактов исходного нормированного пространства E [4]. Как оказалось, систему антикомпактов и соответствующие аналоги теоремы Шаудера в $L(E)$ можно построить в случае, если сопряжённое пространство E^* сепарабельно ([2], теорема 3).

Цель данной работы — обобщить эти результаты на более широкий класс пространств с так называемой *несимметричной нормой* (см. например [5, 6]).

Напомним, что несимметричная норма $||\cdot|$ в линейном пространстве отличается от обычной тем, что вместо стандартной однородности требуется лишь $||\lambda x| = \lambda||x|$ при неотрицательных λ. При этом, вообще говоря, $||-x| \neq ||x|$. Отметим, что пространства с несимметричными нормами были введены М. Г. Кейном (см., например [5]) в связи с известной проблемой моментов. Несимметричные нормы и расстояния активно исследовались Е. П. Долженко, А. Р. Алимовым, П. А. Бородиным и другими отечественными математиками (см., например [7, 8, 9]. Важный и естественный пример несимметричной нормы — функционал Минковского выпуклого несимметричного множества, содержащего 0.

Работа состоит из введения, трёх основных разделов и заключения.

В первом разделе мы рассматриваем конус $CL(E)$ выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $(E, \|\cdot|)$ с несимметричной нормой (или несимметрично нормированного пространства) и вводим специальное нормированное пространство $L(E)$ (см. замечание 2), в которое линейно инъективно изометрично вложен конус $CL(E)$. Как известно [8, 10], аналогом сопряжённого пространства для несимметрично нормированных пространств в общем случае может быть только некоторый выпуклый конус с нормой. Мы рассматриваем соответствующее понятие сопряжённого конуса E^* (определение 2). Для сепарабельных сопряжённых конусов

E^* в разделе 1 настоящей работы доказано существование счётного набора линейных непрерывных функционалов из сопряжённого пространства $L^*(E)$, разделяющих элементы $L(E) \supset CL(E)$ (теорема 4).

Следующие 2 раздела работы посвящены приложениям полученных в первом разделе результатов к аналогам теоремы Шаудера о неподвижных точках в пространстве $L(E)$. Во втором разделе мы приводим краткий обзор полученных ранее в [1, 2] аналогов теоремы о неподвижных точках с использованием антикомпактов. В третьем разделе на базе теоремы 4 выводятся аналоги соответствующих результатов из ([2], п.3) в нормированном пространстве $L(E)$, где E — несимметрично нормированное пространство с сепарабельным сопряжённым конусом E^*.

1. Конус выпуклых замкнутых ограниченных множеств в пространствах с несимметричной нормой

Пусть E — линейное пространство с несимметричной нормой $||\cdot|$. Будем рассматривать в E стандартную транзитивную топологию, базой которой является система окрестностей $\{U_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ точки $x \in E$ вида

$$U_\varepsilon(x) = x + U_\varepsilon(0), \text{ где } U_\varepsilon(0) = \{h \in E \mid ||h| \leqslant \varepsilon\}.$$

Замечание 1. Отметим, что $y \in U_\varepsilon(x)$ тогда и только тогда, когда $||y-x| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ означает $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x| = 0$. Вообще говоря, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} ||x - x_n| \neq 0$.

Определение 1. Множество $A \subset E$ называется *замкнутым*, если

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} \{A + U_\varepsilon(0)\}.$$

В несимметрично нормированных пространствах можно ввести такой аналог сопряжённого пространства (см., например [6]).

Определение 2. *Сопряжённым конусом* E^* к несимметрично нормированному пространству $(E, \|\cdot|)$ назовём набор линейных функционалов $\ell : E \to \mathbb{R}$ таких, что $\ell(x) \leqslant C||x|$ $\forall x \in E$ при некотором $C > 0$.

Известно, что для $\ell \in E^*$ возможно $-\ell \notin E^*$. Поэтому, вообще говоря, E^* — не нормированное пространство, а нормированный конус. В E^* можно ввести норму

$$||\ell||_* = \sup_{x\neq 0} \frac{\ell(x)}{||x|}.$$

Действительно, если $\ell \not\equiv 0$, то $\ell(x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in E$ и $\ell(\pm x_0) = \pm\ell(x_0) > 0$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется аналог теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в несимметрично нормированных пространствах (см. теорему 2 далее). Для доказательства теоремы 2 будем использовать ранее полученный в [10] аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала с подконуса $Y \subset X$ на весь конус X в классе выпуклых конусов X с законом сокращения.

Определение 3. Будем говорить, что выпуклый конус Y есть *подконус* X, если $Y \subset X$, а также для произвольных $x \in X$ и $y, z \in Y \subset X$ условие $z = x + y$ означает, что $x \in Y$.

Сформулируем упомянутый выше аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала в классе выпуклых конусов ([10], Theorem 2.1).

Теорема 1. *Пусть X — выпуклый конус с законом сокращения и $p : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал на X, Y — подконус X, а также существует линейный функционал $\ell : Y \to \mathbb{R}$ с оценкой $\ell(y) \leqslant p(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда существует такой линейный функционал $L : X \to \mathbb{R}$, что $L(x) \leqslant p(x)$ для любого $x \in X$ и $L(y) = \ell(y)$ при всех $y \in Y$.*

Ясно, что всякое несимметрично нормированное пространство будет выпуклым конусом с нормой, а всякое его подпространство — подконусом. Поэтому верна следующая

Теорема 2. *Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество E, $x_0 \in E \setminus A$. Тогда существует $\ell \in E^*$, $||\ell||_* = 1$ такой, что $\ell(x_0) > \sup \ell(A)$.*

Доказательство. 1) Пусть $0 \in A$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$: $x_0 \notin B = A + U_{\varepsilon_0(0)}$, B — поглощающее подмножество E. Это означает, что $p_B(\cdot)$ — эквивалентная норма (возможно, несимметричная) в E (здесь $p_B(\cdot)$ — функционал Минковского множества B). Поскольку $B \supset U_{\varepsilon_0}(0)$, то для некоторого $C > 0$ справедливо неравенство $p_B(x) \leqslant C \cdot \|x| \ \forall x \in E$. При этом $p_B(x_0) > 1$, а $p_B(b) \leqslant 1 \ \forall b \in B$. Далее достаточно применить теорему 1 для подпространства $\{\lambda x_0\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ и нормы $p_B(\cdot)$.

2) Если $0 \notin A$, то выберем $a_0 \in A$ и рассмотрим выпуклое замкнутое множество $A - a_0$ и точку $X_0 - a_0$. Применим к $x_0 - a_0$ и $A - a_0$ утверждение, доказанное выше в пункте 1. □

Рассмотрим набор $CL(E)$ выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства E с несимметричной нормой с операциями сложения:

$$A \oplus B := \overline{A + B},$$

умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot A := \{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Ясно, что $CL(E)$ с введёнными операциями будет выпуклым конусом. Рассмотрим вопрос о его вложении в линейное пространство. Для этого потребуется понятие расстояния между множествами в несимметрично нормированных пространствах, которое вводится стандартно.

Определение 4. Метрикой Хаусдорфа $h(A, B)$ для множеств $A, B \subset E$ будем называть величину

$$h(A, B) := \inf \{d > 0 \mid A \subset U_d(0) + B \text{ и } B \subset U_d(0) + A\}.$$

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $||x|| = \begin{cases} 2x \,, x \geqslant 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$
Тогда $U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x|| \leqslant \varepsilon\} = \left[-\varepsilon; \frac{\varepsilon}{2}\right]$ для всякого $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} A \subset U_\varepsilon(0) + B \\ B \subset U_\varepsilon(0) + A \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A \subset B + \left[-\varepsilon; \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ B \subset A + \left[-\varepsilon; \frac{\varepsilon}{2}\right] \end{cases} \tag{2}$$

Ясно, что $\forall A, B \in CL(\mathbb{R})$ $A = [a; b]$ и $B = [c; d]$ для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Тогда система 2 имеет вид

$$\begin{cases} [a; b] \subset [c; d] + [-\varepsilon; \frac{\varepsilon}{2}] = [c - \varepsilon; d + \frac{\varepsilon}{2}], \\ [c; d] \subset [a; b] + [-\varepsilon; \frac{\varepsilon}{2}] = [a - \varepsilon; b + \frac{\varepsilon}{2}], \end{cases}$$

откуда

$$h(A, B) = h([a; b]; [c; d]) = \max\{|a - c|, 2|b - d|\}.$$

Отметим следующее

Предложение 1. $h(A, 0) = ||A| = \max\{||a| \mid a \in A\}$ для всякого замкнутого множества $A \subset E$.

Доказательство. Достаточно лишь заметить, что условие $A \subset U_\varepsilon(0)$ влечет $0 \in A + U_\varepsilon(0)$. ☐

Напомним, что согласно известной теореме Рэдстрома [11] выпуклый конус с нормой $(X, || \cdot ||)$ линейно инъективно изометрично вложен в некоторое линейное пространство тогда и только тогда, когда существует однородная и инвариантная относительно сдвигов метрика $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ такая, что $d(x, 0) = ||x|| \; \forall x \in X$.

Ясно, что метрика $h : CL(E) \times CL(E) \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям однородности и инвариантности относительно сдвигов:

$$h(\lambda A, \lambda B) = \lambda h(A, B) \ \forall \lambda \geqslant 0, \quad h(A \oplus C, B \oplus C) = h(A, B) \ \forall A, B, C \in CL(E).$$

Поэтому ввиду предложения 1 верна следующая

Теорема 3. *Конус $CL(E)$ линейно инъективно изометрично вложен в некоторое нормированное пространство $L(E)$.*

Замечание 2. Приведем одну из возможных конструкций $L(E)$. Мы отправляемся от стандартной схемы построения такой конструкции в нормированных пространствах, которая изложена к примеру в [4]. Всюду далее под $L(E)$ будем понимать набор пар (A, B) выпуклых замкнутых подмножеств E со следующими операциями:

$$(A, B) \oplus (C, D) := (\overline{A + C}, \overline{B + D}), \quad \lambda \cdot (A, B) := (\lambda A, \lambda B),$$
$$-(A, B) := (B, A)$$

для всяких $A, B, C, D \in CL(E)$ и $\lambda \geqslant 0$.

Введем отношение эквивалентности в $L(E)$: $(A, B) \sim (C, D)$, если $A \oplus D = B \oplus C$ и полагать равными все эквивалентные пары множеств $(A, B) \in L(E)$. Таким образом, под нулем в $L(E)$ будем понимать множество

$$O_{L(E)} := \{(A, A) \mid A \in CL(E)\}.$$

Указанные соглашения позволяют ввести норму в $L(E)$: $||(A, B)|| := h(A, B)$.

С использованием теоремы 2 опишем подмножество функционалов $L^*(E)$, разделяющих точки $L(E)$.

Теорема 4. *Для всякого $\ell \in E^*$ функционал $\varphi_\ell : L(E) \to \mathbb{R}$:*

$$\varphi_\ell((A, B)) := \max \ell(A) - \max \ell(B)$$

принадлежит сопряжённому пространству $L^*(E)$. Система функционалов $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in E^*}$ разделяет точки $L(E)$.

Доказательство. 1) Для произвольных (A, B) и $(C, D) \in L(E)$ и всякого $\ell \in E^*$ верно

$$\varphi_\ell((A, B) \oplus (C, D)) = \varphi_\ell((A \oplus C, B \oplus D)) = \varphi_\ell((\overline{A + C}, \overline{B + D})) = \max \ell(\overline{A + C}) -$$
$$- \max \ell(\overline{B + D}) = \max \ell(A) + \max \ell(C) - (\max \ell(B) + \max \ell(D)) =$$
$$= \max \ell(A) - \max \ell(B) + \max \ell(C) - \max \ell(D) = \varphi_\ell((A, B)) + \varphi_\ell((C, D));$$

$$\varphi_\ell(\lambda(A,B)) = \varphi_\ell((\lambda A, \lambda B)) = \lambda \varphi_\ell((A,B)) \text{ при } \lambda \geqslant 0.$$

Также отметим, что

$$\varphi_\ell((B,A)) = \max \ell(B) - \max \ell(A) = -\varphi_\ell((A,B)).$$

Итак, функционал φ_ℓ линеен $\forall \ell \in E^*$.

Покажем, что $|\varphi_\ell((A,B))| \leqslant C_\ell \cdot h(A,B)$ $\forall A,B \in CL(E)$. Пусть $h(A,B) = d$. Тогда $A \subset B + U_d(0)$ и $B \subset A + U_d(0)$, откуда

$$\ell(A) \subset \ell(B) + \ell(U_d(0)) \text{ и } \ell(B) \subset \ell(A) + \ell(U_d(0)),$$

где $\ell(U_d(0)) = \{\ell(u) \mid u \in U_d(0)\}$. Поэтому $\max \ell(A) \leqslant \max \ell(B) + d \cdot ||\ell||_{E^*}$ и $\max \ell(B) \leqslant \max \ell(A) + d \cdot ||\ell||_{E^*}$. Итак,

$$|\max \ell(A) - \max \ell(B)| = |\varphi_\ell((A,B))| \leqslant ||\ell||_{E^*} \cdot h(A,B),$$

то есть $\varphi_\ell \in L^*(E)$ для всякого $\ell \in E^*$.

2) Покажем, что функционалы $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in E^*}$ разделяют точки $L(E)$. Пусть $(A,B) \neq (C,D)$ (или $A \oplus D \neq B \oplus C$). Тогда существует $x_0 \in A \oplus D \setminus (B \oplus C)$ и по теореме 2 для некоторого $\ell \in E^*$ $\ell(x_0) > \max \ell(B \oplus C)$, то есть $\max \ell(A \oplus D) > \max \ell(B \oplus C)$, откуда $\max \ell(A) - \max \ell(B) > \max \ell(C) - \max \ell(D)$, или $\varphi_\ell((A,B)) > \varphi_\ell((C,D))$, что и требовалось доказать. □

Теперь сформулируем аналог результата о существовании счетного тотального для $L(E)$ множества функционалов из $L^*(E)$ в случае сепарабельного сопряженного конуса E^* для нормированного пространства E.

В нашем случае $(E^*, ||\cdot||_*)$ — нормированный конус. Введем в нем стандартную транзитивную топологию, образованную окрестностями элементов $\ell \in E^*$ вида

$$U^*_\varepsilon(\ell) := \ell + U^*_\varepsilon(0) = \{g \in E^* \mid g = \ell + h, ||h||_* \leqslant \varepsilon\}.$$

Определение 5. Будем говорить, что сопряжённый конус E^* *сепарабелен*, если существует последовательность $E^*_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^\infty \subset E^*$ такая, что для всякого $\ell \in E^*$ найдется подпоследовательность $\{\ell_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset E^*_0$ функционалов, сходящаяся к ℓ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant k_\varepsilon \; \ell_{n_k} \in U^*_\varepsilon(\ell).$$

Поскольку функционалы $\ell \in E^*$ разделяют выпуклые замкнутые подмножества E и для любых $A, B \in CL(E)$ значения ℓ в точках A и B близки к значениям ℓ_{n_k} при достаточно больших k, то верно следующее

Следствие 1. *Если сопряжённый конус E^* сепарабелен и $E_0^* = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счётное плотное множество, то множество функционалов $\{\varphi_{\ell_n}\}_{n=1}^{\infty}$ тотально (разделяет точки) в $L(E)$.*

Комбинируя полученный результат с условиями существования антикомпакта в нормированном пространстве [2] (см. также введение к настоящей статье), получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Если сопряжённый конус E^* сепарабелен, то в $L(E)$ существует антикомпакт*

$$C_\varepsilon = \left\{ (A,B) \in L(E) \,\middle|\, \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{\varphi_{\ell_k}((A,B))}{\varepsilon_k} \right| \leqslant 1 \right\}, \tag{3}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_k = +\infty$.

2. Аналоги теоремы Шаудера с использованием антикомпактов в нормированных пространствах: обзор

В данном пункте мы приводим обзор полученных в [1] аналогов теоремы Шаудера с использованием антикомпактов в нормированных пространствах. Условимся всюду далее через $\overline{B_{E_{C'}}}$ мы будем обозначать замыкание множества $B \subset E \subset E_{C'}$ в пространстве $E_{C'}$. Сначала отметим практически очевидный факт, вытекающий из обычной теоремы Шаудера в пространстве $E_{C'}$.

Предложение 2. Пусть B — ограниченное выпуклое подмножество в банаховом пространстве $E, f : B \to B$ и существует антикомпакт $C' \in \mathscr{C}'(E)$: $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и $f : B \to B$ непрерывно в пространстве $E_{C'}$. Тогда существует $x_0 \in B$: $f(x_0) = x_0$.

Однако условия $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и непрерывности f в пространстве $E_{C'}$ выглядят несколько искусственными и трудно проверяемыми. Введём следующее понятие.

Определение 6. Будем называть отображение $f : B \to B$ *$E_{C'}$-равномерно непрерывным*, если $\forall x, y \in B$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, ||x-y||_{C'} < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_{C'} < \varepsilon.$$

Теорема 6. *Пусть B — выпукло и ограничено в нормированном пространстве E, $\mathscr{C}'(E) \neq \varnothing, f : B \to B$ $E_{C'}$-равномерно непрерывно при некотором $C' \in \mathscr{C}'(E)$. Тогда f можно единственным образом по непрерывности продолжить на $\overline{B_{E_{C'}}} \subset E_{C'}$ (продолжение будем обозначать через f) и существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C'}}} : f(x_0) = x_0$.*

Отметим, что в [1, 2] построены конкретные примеры отображений f, к которым применима теорема 6. Оказывается, при выборе системы антикомпактов (1) можно в теореме 6 заменить условие E_{C_ε}-равномерной непрерывности $f : B \to B$ (где B — ограниченное множество в пространстве E) на следующее условие
T_0-равномерной непрерывности в E, связанное с соответствующим (1) счётным тотальным в E множеством $T_0 \subset E^*$.

Определение 7. Пусть $B \subset E$ ограничено. Будем называть $f : B \to B$
T_0-равномерно непрерывным, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует $m_n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall L > 0\, \exists \delta > 0 : |\ell_{m_n}(x - y)| < \delta \Rightarrow |\ell_n(f(x) - f(y))| < L.$$

Переформулируем теорему 6 в терминах T_0-равномерной непрерывности f.

Теорема 7. *Если нормированное пространство E имеет антикомпакт, множество B выпукло и ограничено в $E, f : B \to B$ T_0-равномерно непрерывно, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in T_0$;

(ii) *для любой возрастающей последовательности ε из (1) f можно единственным образом по непрерывности продолжить (продолжение мы тоже обозначим f) на $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}} \subset E_{C_\varepsilon}$. При этом существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ и верно $f(x_0) = x_0$.*

3. Аналог теоремы Шаудера для специального класса многозначных отображений в пространствах с несимметричной нормой

Теорема 5 означает, что в пространстве $L(E)$ при условии сепарабельности сопряжённого конуса E^* можно сформулировать аналог теоремы 6.

Теорема 8. *Пусть B — выпукло и ограничено в $L(E)$ и сопряжённый конус E^* сепарабелен. Если $f : B \to B$ $(L(E))_{C'}$-равномерно непрерывно при некотором $C' \in \mathscr{C}'(L(E))$, то f можно единственным образом по непрерывности продолжить на $\overline{B_{(L(E))_{C'}}} \subset (L(E))_{C'}$ (продолжение будем также обозначать через f) и существует $x_0 \in \overline{B_{(L(E))_{C'}}} : f(x_0) = x_0$.*

Теперь сформулируем аналог теоремы 7 с естественной заменой T_0-равномерной непрерывности на Φ-равномерную непрерывность для системы функционалов $\Phi = \{\varphi_{\ell_n}\} \in (L(E))^*$ из теоремы 4.

Определение 8. Пусть $B \subset L(E)$ ограничено, сопряжённый конус E^* сепарабелен. Будем называть $f : B \to B$ *Ф-равномерно непрерывным*, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $\forall L > 0\, \exists \delta > 0$:

$$|\varphi_{\ell_n}(x) - \varphi_{\ell_n}(y)| < \delta \Rightarrow |\varphi_{\ell_n}(f(x)) - \varphi_{\ell_n}(f(y))| < L.$$

Теорема 9. *Если B выпукло и ограничено в $L(E)$, сопряжённый конус E^* сепарабелен и $f : B \to B$ Ф-равномерно непрерывно, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_\ell(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_\ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in \Phi$;

(ii) *найдётся возрастающая последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)$, сходящаяся к $+\infty$ такая, что f можно единственным образом по непрерывности продолжить (продолжение мы тоже обозначим f) на $\overline{B_{(L(E))_{C_\varepsilon}}} \subset (L(E))_{C_\varepsilon}$, C_ε удовлетворяет* (3). *При этом существует $x_0 \in \overline{B_{(L(E))_{C_\varepsilon}}}$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ и верно $f(x_0) = x_0$.*

Для отображений $f : K(E) \to K(E)$ при любом $x \in K(E)$ $\varphi_\ell(x) = \max \ell(x)$. Поэтому условие Ф-равномерной непрерывности можно сформулировать так:

$$\forall L > 0\, \exists \delta > 0 : |\max \ell(x) - \max \ell(y)| < \delta \Rightarrow |\max \ell(f(x)) - \max \ell(f(y))| < L \quad \forall \ell \in E_0^*,$$

где E_0^* — счётное плотное в E^* множество. Иными словами, верно

Следствие 2. *Если B выпукло и ограничено в $L(E)$, сопряжённый конус E^* сепарабелен, отображение $f : B \to B$ Ф-равномерно непрерывно, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

$$\lim_{n\to\infty} \max \ell(x_n) = \lim_{n\to\infty} \max \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in E_0^*,$$

где E_0^* — счётное плотное в E^* множество.

Заключение

В работе получено одно обобщение теоремы Шаудера о неподвижной точке для специального класса многозначных отображений в пространствах с несимметричной нормой, исследован ряд смежных вопросов.

Рассмотрен конус $CL(E)$ выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $(E, \|\cdot|)$ с несимметричной нормой. Введено специальное нормированное пространство $L(E)$ и доказано, что конус $CL(E)$ линейно инъективно изометрично вложен в $L(E)$ (теорема 3) В случае сепарабельности сопряжённого конуса E^* к несимметрично нормированному пространству E доказано существование счётного набора линейных непрерывных функционалов из сопряжённого пространства $L^*(E)$, разделяющих элементы $L(E) \supset CL(E)$ (теорема 4). Рассмотрены приложения этих результатов к аналогам теоремы Шаудера о неподвижных точках для отображений $F : B \to B$, где множество B ограничено и замкнуто, но необязательно компактно в пространстве $L(E)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, код проекта MK-176.2017.1.

Список литературы

1. Стонякин, Ф. С. Аналоги теоремы Шаудера с использованием специальных свойств непрерывности / Ф. С. Стонякин // Динамические системы. — 2015. — Т. 3(31): 3–4. — С. 281–288.

   STONYAKIN, F. S. (2015) Analogues of Schauder's theorem using special properties of continuity. *Dynamic systems*. Vol. 3(31) 3–4. p. 281–288.

2. STONYAKIN, F. S. (2016) Analogs of the Shauder theorem that use anticompacta. *Math. Notes*. No. 6 (Serie 99). p. 954–958.

3. Стонякин, Ф. С. Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры / Ф. С. Стонякин // Динамические системы. — 2013. — Т. 3(31): 3–4. — С. 281–288.

   STONYAKIN, F. S. (2013) An analogue of Ul's theorem on the convexity of the image of a vector measure. *Dynamic systems*. Vol. 3(31) 3–4. p. 281–288.

4. Половинкин, Е. С. Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е. С. Половинкин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 608 с.

   POLOVINKIN, E. S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions*. Moscow: FIZMATLIT. 608 p.

5. Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А Нудельман. — М.: Наука, 1973. — 552 с.

   KREIN, M. G., NUDELMAN, A. A. (1973) *Markov moments problem and extremal problems*. Moscow: Nauka. 552 p.

6. COBZAS, S. (2013) *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*. Basel: Birkhauser/Springer.

7. Алимов, А. Р. Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричным расстоянием / А. Р. Алимов // Усп. мат. наук. — 2003. — Т. 58 (350). — С. 159–160.

   ALIMOV, A. R. (2003) The Banach-Mazur theorem for spaces with an asymmetric distance. *Usp. Mat. Nauk*. Vol. 58(350). p. 159–160.

8. Бородин, П. А. Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе / П. А. Бородин // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69: 3. — С. 329–337.

   BORODIN, P. A. (2001) The Banach-Mazur theorem for spaces with an asymmetric norm and its applications in convex analysis. *Math. Notes*. Vol. 69: 3. p. 329–337.

9. Долженко, Е. П. Аппроксимации со знакочувствительным весом / Е. П. Долженко, Е. А. Савостьянов // Изв. РАН. Сер. матем. — 1999. — Т. 63: 6. — С. 77–118.

   DOLZHENKO, E. P., SAVOSTYANOV, E. A. (1999) Approximations with sign-sensitive weight. *Izv. RAS. Ser. Math.* Vol. 69: 3. p. 77–118.

10. STONYAKIN, F. S. (2016) An analogue of the Hahn-Banach Theorem for functionals on abstract convex cone. *Eurasian. Math. J.* No. 3 (Serie 7). p. 89–99.

11. RÄDSTRÖM, J. H. (1952) An embedding theorem for space of convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* No. 1 (Serie 3). p. 165–169.

УДК: 512.745

MSC2010: 53A15, 53A55, 53B30

КЛАССИФИКАЦИЯ ПУТЕЙ В ГЕОМЕТРИИ ГАЛИЛЕЯ

© В. И. Чилин, К. К. Муминов

Национальный университет Узбекистана

Вузгородок, Ташкент, 100174, Узбекистан

e-mail: *chilin@ucd.uz, vladimirchil@gmail.com, m.muminov@rambler.ru*

The classification of paths in the Galilean geometry.

Chilin V. I., Muminov K. K.

Abstract. Let X be n-dimensional linear space over field $\mathbb{R}$ of real numbers and let $GL(n,\mathbb{R})$ be the group of all invertible linear transformations of the space X. Two paths $x(t),\ y(t) \subset X,\ t \in (0,1)$, are called G-equivalent with respect to the action of the subgroup G of the group $GL(n,\mathbb{R})$ if $g(x(t)) = y(t)$ for some $g \in G$ and all $t \in (0,1)$. One of the important problems of differential geometry is finding necessary and sufficient conditions such that the paths $x(t),\ y(t)$ are G-equivalent. The solutions of this problem use methods of the theory of differential invariants, giving a description of finite rational bases of differential fields of G-invariant differential rational functions. These bases provide effective criteria for G-equivalence of paths. This approach was used in for solving the problem of the equivalence of paths with respect to the action of the symplectic, orthogonal and pseudo-orthogonal groups.

An important example of a non-Euclidean geometry is the Galileo geometry. The group $\Gamma(n,\mathbb{R})$ of all invertible linear transformations of the space X, preserving the Galilean metric, are called Galileo's group. We give the following description of a finite rational basis in the differential field $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ of all $\Gamma(n,\mathbb{R})$-invariant differential rational functions:

In the field $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ the following differential polynomials form its a rational basis:

$$\varphi_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=2}^{n}(x_i^{(k)})^2,\ k = 0,\ldots,n-2;$$

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = x_1.$$

Using this rational basis, the following necessary and sufficient conditions for the $\Gamma(n,\mathbb{R})$-equivalence of two regular paths are established:

Two regular paths $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$ and $y(t) = \{y_i(t)\}_{i=1}^n$ are $\Gamma(n,\mathbb{R})$-equivalent if and only if $y_1(t) = \pm x_1(t)$ and $\sum\limits_{i=2}^{n}\left(x_i^{(m)}(t)\right)^2 = \sum\limits_{i=2}^{n}\left(y_i^{(m)}(t)\right)^2$ for all $t \in (0,1)$ and $m = 0,1,\ldots,n-2$.

Keywords: *Galileo space, a group of movements, differential invariant.*

1. Введение

Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ и пусть $GL(n,\mathbb{R})$ — группа всех обратимых линейных преобразований пространства X. Две кривые α и β, лежащие в X, называются *G-эквивалентными* при действии подгруппы G группы $GL(n,\mathbb{R})$, если $g(\alpha) = \beta$ для некоторого $g \in G$. Одной из важных задач дифференциальной геометрии является нахождение необходимых и достаточных условий, обеспечивающих G-эквивалентность кривых α и β. Для решения этой задачи в последние годы используют методы теории инвариантов, дающие возможность описать конечные рациональные базисы дифференциальных полей G-инвариантных дифференциальных рациональных функций. В случае колец G-инвариантных многочленов, их конечные рациональные базисы для действия классических подгрупп группы $GL(n,\mathbb{R})$ хорошо известны (см., например, [16], а также обзор [15]). Для дифференциальных полей G-инвариантных дифференциальных рациональных функций конечные рациональные базисы для отдельных примеров подгрупп группы $GL(n,\mathbb{R})$ описаны в книгах [6] и [8]. Знание этих базисов позволяет дать эффективные критерии для G-эквивалентности путей и кривых. Такой подход использовался в работах [13] и [14] при решении задачи об эквивалентности кривых относительно действия групп движений в $\mathbb{R}^n$, в частности, для действия полупрямого произведения $\mathbb{R}^n \lhd SL(n,\mathbb{R})$ аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ и специальной линейной группы $SL(n,\mathbb{R})$. В работе [4] таким же методом была решена задача об эквивалентности кривых в случае действия симплектической группы, а в [2] — для действия полупрямого произведения $\mathbb{R}^n \lhd O(n,\mathbb{R})$ группы $\mathbb{R}^n$ и ортогональной группы $O(n,\mathbb{R})$. Укажем также на работы [3], [5], [9], в которых даны необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей при действии псевдоортогональной и специальной псевдоортогональной групп.

Одним из важных примеров неевклидовых геометрий является геометрия Галилея, основные свойства которой изложены в книге [7, глава 5, §4] (см. также книгу [10]). Группу $\Gamma(n,\mathbb{R})$ всех обратимых линейных преобразований пространства X, сохраняющих метрику пространства Галилея, называют *группой Галилея*. Соответствующая группа движений пространства Галилея есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$ групп $\mathbb{R}^n$ и $\Gamma(n,\mathbb{R})$. Естественно возникает задача о нахождении конечного рационального базиса в дифференциальном поле $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных дифференциальных рациональных функций, что даст возможность установить необходимые и достаточные условия, обеспечивающие $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентность и $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентность путей, лежащих в X.

Настоящая работа посвящена решению указанных задач. В разделе 2 приводятся необходимые сведения, относящиеся к теории дифференциальных полей G-инвариантных дифференциальных рациональных функций. Указываются известные необходимые и достаточные условия, обеспечивающие $O(n, \mathbb{R})$ - эквивалентность путей, лежащих в X. В разделе 3 напоминаются определения метрики Галилея для n-мерного действительного пространства и группы Галилея линейных преобразований из $GL(n, \mathbb{R})$, сохраняющих эту метрику. Центральной в этом разделе является теорема 5, дающая явное описание конечного рационального базиса дифференциального поля $\Gamma(n, \mathbb{R})$-инвариантных дифференциальных рациональных функций. В последнем, четвертом, разделе устанавливаются необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей, лежащих в X, относительно действия группы Галилея $\Gamma(n, \mathbb{R})$ и специальной группы Галилея $S\Gamma(n, \mathbb{R})$ (теоремы 6 и 7), а также критерий для эквивалентности путей относительно действия группы движений $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n, \mathbb{R})$ в пространстве Галилея (теорема 8).

2. Предварительные сведения

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел и для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим n-мерное линейное пространство $\mathbb{R}^n$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $GL(n, \mathbb{R})$ группа всех обратимых линейных преобразований в $\mathbb{R}^n$. Элементы из $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде n-мерных вектор-столбцов $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n, \mathbb{R})$ — в виде $n \times n$ матриц $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, где $x_j, g_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. При этом, действие $g \in GL(n, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^n$ отождествляем с обычным умножением матрицы g на вектор-столбец x (запись gx).

Обозначим через $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ алгебру всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ от счетного числа переменных $x_i^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots,$ $x_i^{(0)} = x_i$, $i = 1, ..., n$. Положим $d(x_i^{(m)}) = x_i^{(m+1)}$, $d(\lambda) = 0$, для всех $i = 1, \ldots, n$, $m = 0, 1, \ldots,$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Отображение d однозначно продолжается до дифференцирования δ в алгебре $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, наделяя эту алгебру структурой дифференциального кольца [12]. Обозначим через $\mathbb{R}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ поле частных для кольца $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. $\mathbb{R}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ является полем всех рациональных функций от тех же переменных $x_i^{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots,$ $i = 1, ..., n$. Согласно теореме 1.1. из [12], дифференцирование δ естественным образом продолжается с кольца $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ до дифференцирования на поле $\mathbb{R}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, превращая это поле в дифференциальное поле (сокращенно d-поле).

Элементы из d-поля $\mathbb{R}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ называют d-рациональными функциями и записывают в виде $f\langle x \rangle = f\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, где $x = \{x_j\}_{j=1}^n$. Если G — подгруппа в $GL(n, R)$, и $f\langle gx\rangle = f\langle x\rangle$ для всех $g \in G$, то d-рациональная функция $f\langle x\rangle$ называется G-инвариантной. Множество всех G-инвариантных d-рациональных функций обозначается через $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$. Известно, что $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$ является дифференциальным подполем в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ [8].

Набор элементов $\{f_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$, $m \in \mathbb{N}$, называется конечной системой образующих дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$, если любой элемент $f \in \mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$ может быть получен из множества $\{f_j\}_{j=1}^m$ применением конечного число раз операций d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$. В этом случае говорят, что набор $\{f_j\}_{j=1}^m$ есть d-рациональный базис d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ билинейную форму $(x,y) = x_1y_1+\dots+x_ny_n$ и соответствующую этой форме евклидову метрику $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^n (x_j-y_j)^2}$. Обозначим через E единицу группы $GL(n,\mathbb{R})$.

Ортогональная подгруппа $O(n,\mathbb{R})$ в $GL(n,\mathbb{R})$ определяется равенством

$$O(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) : g^T g = E\},$$

где g^T — транспонированная матрица к матрице g. Ясно, что

$$O(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) : (gx,gy) = (x,y) \text{ для любых } x,y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Через $SO(n,\mathbb{R})$ обозначается специальная ортогональная подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$, т. е. $SO(n,\mathbb{R}) = \{g \in O(n,\mathbb{R}) : \det g = 1\}$.

Для каждого $x = \{x_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ через $M(x)$ обозначим $n \times n$ матрицу $\left(x_i^{(j-1)}\right)_{i,j=1}^n$, где j-ый столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}$, $i,j = 1,\dots,n$.

Известно следующее описание d-рациональных базисов дифференциальных полей $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,\mathbb{R})}$ и $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{SO(n,\mathbb{R})}$ (см., например, [8], §12, теоремы 12.5 и 12.7).

Теорема 1. (i). *В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,\mathbb{R})}$ его d-рациональный базис образуют многочлены $\left(x^{(j-1)},x^{(j-1)}\right)$, $j = 1,\dots,n$;*

(ii). *В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{SO(n,\mathbb{R})}$ его образующими являются многочлены $\det M(x)$ и $\left(x^{(j-1)},x^{(j-1)}\right)$, $j = 1,\dots,n-1$.*

Путем в $\mathbb{R}^n$ называют вектор-функцию

$$x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

у которой все координатные функции $x_j : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ являются бесконечно дифференцируемыми. Производная r-го порядка от пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ есть вектор-функция $x^{(r)}(t) = \{x_j^{(r)}(t)\}_{j=1}^n$, где $x_j^{(r)}(t)$ — r-ая производная координатной функции $x_j(t),\ t \in (0,1),\ j = 1,\dots,n,\ r = 1,2,\dots$ Ясно, что вектор-функция $x^{(r)}(t)$ также является путем при каждом $r = 1,2,\dots$

Для каждого пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ рассмотрим матрицу $M(x(t))$ и через $M'(x(t))$ обозначим матрицу $\left(x_i^{(j)}(t)\right)_{i,j=1}^n$.

Путь $x(t)$ называется *сильно регулярным*, если определитель $\det M(x(t))$ не равен нулю при всех $t \in (0,1)$. Каждый сильно регулярный путь $x(t)$, очевидно, является регулярным путем, т. е. $x^{(1)}(t) \neq 0$ для всех $t \in (0,1)$. Заметим, что в работах [3], [4], [5], [13], [14] термин "регулярный путь" использовался для понятия сильно регулярного пути в приведенном выше смысле.

Пусть G — подгруппа группы $GL(n,\mathbb{R})$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются *G-эквивалентными*, если существует такой элемент $g \in G$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0,1)$. Ясно, что в этом случае, $y^{(j)}(t) = gx^{(j)}(t),\ j = 1,2,\dots,$ и поэтому G-эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$ равносильна выполнению равенства $M(y)(t) = gM(x)(t)$ при всех $t \in (0,1)$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия G-эквивалентности сильно регулярных путей $x(t)$ и $y(t)$, описываемые с помощью матриц $M(x(t))$ и $M(y(t))$, в случае когда G есть одна из групп $O(n,\mathbb{R})$ и $SO(n,\mathbb{R})$ [9, Теорема 2].

Теорема 2. *(i). Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$(M(x(t)))^{-1}(t)M'(x(t)) = (M(y(t)))^{-1}M'(y(t)); \tag{1}$$

$$M^T(x(t))M(x(t)) = M^T(y(t))M(y(t)) \tag{2}$$

для всех $t \in (0,1)$.

(ii). Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $SO(n,\mathbb{R})$- эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (1), (2) и равенство

$$\det M(x(t)) = \det M(y(t))$$

для всех $t \in (0,1)$.

В следующей теореме приводится известный критерий $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентности (соответственно, $SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентности) путей, использующий билинейную форму (x,y) (см., например, [2], [9]).

Теорема 3. *Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ — $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентны (соответственно, $SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентны) тогда и только тогда, когда*

$$(x^{(j-1)}(t), x^{(j-1)}(t)) = (y^{(j-1)}(t), y^{(j-1)}(t))$$

для всех $t \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, n$ *(соответственно*

$$(x^{(j-1)}(t), x^{(j-1)}(t)) = (y^{(j-1)}(t), y^{(j-1)}(t)) \quad \text{и} \quad \det M(x(t)) = \det M(y(t))$$

для всех $t \in (0,1)$ *и* $j = 1, \ldots, n-1$*).*

Пусть $Aff(\mathbb{R}^n)$ группа всех аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Каждое преобразование из $Aff(\mathbb{R}^n)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL(n, \mathbb{R})$ и сдвига, порожденного элементом $u = \{u_i\}_{i=1}^n$ из $\mathbb{R}^n$, т. е. аффинное преобразование $(u, g) \in Aff(\mathbb{R}^n)$ действует в $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$(u, g)(x) = gx + u, \tag{3}$$

где $x, u \in \mathbb{R}^n$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$.

Операция умножения в группе $Aff(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$(u, g)(v, h) = (u + gv, gh),$$

где $u, v \in \mathbb{R}^n$, $g, h \in GL(n, \mathbb{R})$. В этом случае, говорят, что группа $Aff(\mathbb{R}^n)$ есть *полупрямое произведение групп* $\mathbb{R}^n$ *и* $GL(n, \mathbb{R})$, что записывается в виде $Aff(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \lhd GL(n, \mathbb{R})$. Если G — подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$, то множество

$$\mathbb{R} \lhd G = \{(u, g) \in \mathbb{R}^n \lhd GL(n, \mathbb{R}) : g \in G\}$$

является подгруппой в $\mathbb{R}^n \lhd GL(n, \mathbb{R})$, которая называется *полупрямым произведением групп* $\mathbb{R}^n$ и G. Известно (см., например, [1, глава XVII, §2]), что группа $\mathbb{R}^n \lhd O(n, \mathbb{R})$ совпадает с группой всех движений евклидова пространства $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$, т. е. с группой всех биекций U из $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$\rho(Ux, Uy) = \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

при всех $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, $y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$.

Пусть H — подгруппа в $\mathbb{R}^n \lhd GL(n, \mathbb{R})$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в $\mathbb{R}^n$, называются *H-эквивалентными*, если существует такое $(u, g) \in H$, что $y(t) = gx(t) + u$ для всех $t \in (0,1)$. Следующее утверждение из [9] сводит задачу о $\mathbb{R}^n \lhd G$-эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$ к задаче G-эквивалентности путей $x'(t)$ и $y'(t)$.

Утверждение 5. *Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в $\mathbb{R}^n$, являются $\mathbb{R}^n \lhd G$- эквивалентными тогда и только тогда, когда пути $x'(t)$ и $y'(t)$ — G-эквивалентны.*

Непосредственно из утверждения 5 и теоремы 3 вытекает следующий критерий $\mathbb{R}^n \lhd G$-эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n, \mathbb{R})$ и $SO(n, \mathbb{R})$.

Теорема 4. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ такие пути в $\mathbb{R}^n$, для которых пути $x'(t)$ и $y'(t)$ — сильно регулярны. Тогда пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \lhd O(n,\mathbb{R})$-эквивалентными (соответственно $\mathbb{R}^n \lhd SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентными) тогда и только тогда, когда $(x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)) = (y^{(m)}(t), y^{(m)}(t))$ для всех $t \in (0,1)$ и $m = 1,\ldots,n$ (соответственно $(x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)) = (y^{(m)}(t), y^{(m)}(t))$ и $\det M'(x(t)) = \det M'(y(t))$ для всех $t \in (0,1)$ и $m = 1,\ldots,n-1$).*

3. Группы Галилея

В этом разделе напоминаются определения n-мерного пространства Галилея Γ_n и соответствующей группы $\Gamma(n,\mathbb{R})$ обратимых линейных преобразований в Γ_n, сохраняющих метрику Галилея. (см., например, [7, глава 5, п.4]). Центральной в этом разделе является теорема 5, дающая явное описание конечного рационального базиса дифференциального поля $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных дифференциальных рациональных функций.

Определим в $\mathbb{R}^n$ метрику Галилея $d(x,y)$, полагая для элементов $x = \{x_j\}_{j=1}^n$ и $y = \{y_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1|, \text{ в случае } x_1 \neq y_1, \\ \sqrt{\sum_{j=2}^{n} (x_j - y_j)^2}, \text{ если } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Очевидно, что

1) $d(x,y) \geq 0$ и $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

В то же время, при $n \geq 2$ неравенство треугольника

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

вообще говоря, неверно.

Действительно, если $x = \{1,0,\ldots,0\}, y = \{1,4,\ldots,4\},\ z = \{0,0,\ldots,0\}$, то

$$d(x,y) = 4\sqrt{n-1},\ d(x,z) = 1 = d(y,z)$$

и поэтому

$$d(x,y) = 4\sqrt{n-1} > 2 = d(x,z) + d(z,y)$$

при всех $n \geq 2$.

Пару $(\mathbb{R}^n, d)$ обычно называют *пространством Галилея* (обозначение Γ_n).

Пусть $e_i = (0,\ldots 0,1,0,\ldots,0)$ стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, где единица стоит на i-ом месте, $i = 1,\ldots,n$. Положим

$$U_n = \{\alpha_1 e_1 : \alpha_1 \in \mathbb{R}\};$$

$$V_n = Lin(\{e_i\}_{i=2}^n) = \left\{\sum_{i=2}^n \alpha_i e_i : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 2, \ldots, n\right\}.$$

Ясно, что $U_n \oplus V_n = \mathbb{R}^n$, при этом $(x, y) = 0$ для всех $x \in U_n, \ y \in V_n$. Согласно определению метрики Галилея $d(x, y)$, для любых $x, y, z \in U_n$ (соответственно $x, y, z \in V_n$) неравенство треугольника выполняется.

Каждая матрица $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, \mathbb{R})$ определяет линейное преобразование $T_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, для которого

$$T_g(\{x_j\}_{j=1}^n) = \left\{\sum_{j=1}^n g_{ij} x_j\right\}_{i=1}^n,$$

при этом, $g_{ij} = (T_g(e_j), e_i)$. Таким образом, как уже отмечалось в разделе 2, действие оператора T_g на вектор x отождествляется с произведением матрицы $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n$ на вектор-столбец $x = \{x_j\}_{j=1}^n$. В дальнейшем будем писать gx вместо $T_g(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n, \ g \in GL(n, \mathbb{R})$.

Рассмотрим в $GL(n, \mathbb{R})$ подгруппу $G_n = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : \ gU_n = U_n, \ gV_n = V_n\}$. Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G_n$, то $ge_1 = \{y_1, 0, \ldots, 0\} \in U_n$, и поэтому $g_{i1} = (ge_1, e_i) = 0$ при $i = 2, \ldots, n$. Таким образом, матрица $g \in G_n$ обязательно имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n-1,2} & \cdots & g_{n-1,n} \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \ g_{11} \neq 0 \tag{4}$$

Очевидно, что для любого $g \in GL(n, \mathbb{R})$, имеющего вид (4), верно равенство $gU_n = U_n$.

Рассмотрим множество $\Gamma(n, \mathbb{R})$ тех $g \in G_n$, для которых $g_{11} = \pm 1$ и сужение $g|_{V_n}$ преобразования g на подпространство V_n есть ортогональное преобразование. Если $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$ и $x = \{0, x_2, \ldots, x_n\}, \ y = \{0, y_2, \ldots, y_n\} \in V_n$, то $gx = \{0, u_2, \ldots, u_n\}$ и $gy = \{0, v_2, \ldots, v_n\}$.

Взяв в V_n, базис $e_2, \ldots, e_n$ и отождествляя V_n с $\mathbb{R}^{n-1}$, получим, что для любого $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$ преобразование $h = (h_{ij})_{i,j=2}^n = g|_{V_n}$ есть элемент группы $O(n-1, \mathbb{R})$, при этом,

$$h_{ij} = (he_j, e_i) = (ge_j, e_i) = g_{ij}$$

для всех $i, j = 2, \dots, n$. Таким образом,

$$g|_{V_n} = \begin{pmatrix} g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in O(n-1, \mathbb{R}).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\Gamma(n, \mathbb{R}) = \{g = (g_{ij})_{i,j}^n \in GL(n, \mathbb{R}) :\ g_{11} = \pm 1,\ g_{i1} = 0,\ i = 2, \dots, n, \\ gV_n = V_n,\ (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, \mathbb{R})\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Ясно, что для любых $x, y \in V_n$ и $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$ верны равенства

$$\rho(gx, gy) = \rho(x, y) = d(x, y). \tag{6}$$

Утверждение 6. *Для $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G_n$ следующие условия эквивалентны:*

1) $d(gx, gy) = d(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$;

2) $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $g \in G_n$, то $gU_n = U_n$, т.е. $g\{x_1, 0, \dots, 0\} = \{y_1, 0, \dots, 0\}$, и поэтому $\{g_{i1}x_1\}_{i=1}^n = \{y_1, 0, 0, \dots, 0\}$, что влечет равенства

$$g_{21} = g_{31} = \dots = g_{n1} = 0.$$

Если $x = \{x_1, 0, \dots, 0\},\ z = \{z_1, 0, \dots, 0\} \in U_n$, то $d(x, z) = |x_1 - z_1|$ и

$$d(gx, gz) = d(\{g_{11}x_1, 0, \dots, 0\},\ \{g_{11}z_1, 0, \dots, 0\}) = |g_{11}x_1 - g_{11}z_1| = |g_{11}||x_1 - z_1|.$$

Следовательно, взяв $x_1 = 0,\ z_1 = 1$, имеем $|g_{11}| = 1$, т.е. $g_{11} = \pm 1$.

Если теперь $x = \{0, x_2, \dots, x_n\},\ y = \{0, y_2, \dots, y_n)\} \in V_n$, то $gx, gy \in V_n$ и

$$\rho(gx, gy) = d(gx, gy) = d(x, y) = \rho(x, y).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Если $x = \{x_i\}_{i=1}^n,\ y = \{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ и $x_i = y_i$ для всех $i = 2, \dots, n$, то $d(x, y) = |x_1 - y_1|$. Так как $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$, то $g_{i1} = 0$ при $i = 2, \dots, n$ и $g_{11} = \pm 1$. Используя равенства

$$gx = \left\{\sum_{j=1}^n g_{ij}x_j\right\}_{i=1}^n = \left\{g_{i1}x_1 + \sum_{j=2}^n g_{ij}x_j\right\}_{i=1}^n =$$

$$= \left\{\pm x_1 + \sum_{j=2}^n g_{1j}x_j, \sum_{j=2}^n g_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=2}^n g_{nj}x_j\right\};$$

$$gy = \left\{\pm y_1 + \sum_{j=2}^n g_{1j}y_j, \sum_{j=2}^n g_{2j}y_j, \dots, \sum_{j=2}^n g_{nj}y_j\right\},$$

а также равенства $x_i = y_i,\ i = 2, \dots, n$, получим, что $d(gx, gy) = |x_1 - y_1| = d(x, y)$.

Если теперь $\{0, x_2, \dots, x_n\} \neq \{0, y_2, \dots, y_n\}$, то из равенства (6), следует что $d(gx, gy) = d(x, y)$. $\square$

В следующем утверждении устанавливается, что $\Gamma(n, \mathbb{R})$ является группой относительно алгебраической операции, индуцируемой из группы $GL(n, \mathbb{R})$.

Утверждение 7. $\Gamma(n, \mathbb{R})$ *есть подгруппа в* $GL(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \Gamma(n, \mathbb{R})$, т. е.

$$g_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & g_{12}^{(i)} & \cdots & g_{1n}^{(i)} \\ 0 & g_{22}^{(i)} & \cdots & g_{2n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n2}^{(i)} & \cdots & g_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} g_{22}^{(i)} & \cdots & g_{2n}^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n2}^{(i)} & \cdots & g_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} \in O(n-1, \mathbb{R}),\ i = 1, 2.$$

Если $g = g_1 g_2$, то $gU_n = g_1 g_2 U_n = g_1 U_n = U_n$ и аналогично $g_1 g_2 (V_n) = V_n$, т. е. $g_1 g_2 \in G_n$. Кроме того,

$$g_{i1} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^{(1)} g_{j1}^{(2)} = \begin{cases} g_{11}^{(1)} g_{11}^{(2)} = \pm 1, \text{ если } i = 1; \\ 0, \text{ если } i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Далее, если $x, y \in V_n$, то $gx \in g_1 g_2 V_n = g_1 V_n = V_n$, и аналогично $gy \in V_n$. Следовательно,

$$\rho(gx, gy) = \rho(g_1 g_2 x, g_1 g_2 y) = \rho(g_2 x, g_2 y) = \rho(x, y),$$

т. е. $g|_{V_n}$ есть ортогональное преобразование. Это означает, что $g_1 g_2 \in \Gamma(n, \mathbb{R})$.

Осталось показать, что $h^{-1} \in \Gamma(n, \mathbb{R})$ для любого $h = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \Gamma(n, \mathbb{R})$. Имеем, что $h^{-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где $a_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det h}$ и A_{ji} есть алгебраическое дополнение минора d_{ij}, получаемого при вычёркивании i-й строки и j-го столбца. Поскольку,

$$d_{1j} = \det \begin{pmatrix} 0 & h_{22} & \cdots & h_{2,j-1} & h_{2,j+1} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & h_{n2} & \cdots & h_{n,j-1} & h_{n,j+1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} = 0,\ j = 2, \dots, n,$$

то верны равенства $a_{i1} = 0$ при $i = 2, \dots, n$. Кроме того,

$$\det h = h_{11} \det \begin{pmatrix} h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix},$$

т. е. $a_{11} = \frac{A_{11}}{\det h} = \frac{1}{h_{11}}$, что влечет равенство $a_{11} = \pm 1$.

Так как h^{-1} есть биекция, то $h^{-1} V_n = V_n$, и поскольку сужение $h|_{V_n}$ на V_n принадлежит группе $O(n-1, \mathbb{R})$, то сужение $h^{-1}|_{V_n}$ также принадлежит группе $O(n-1, \mathbb{R})$.

Это означает, что $h^{-1} \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ (см. равенство (5)). Следовательно, $\Gamma(n,\mathbb{R})$ есть подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$. $\square$

Группу $\Gamma(n,\mathbb{R})$ называют *галилеевой группой линейных преобразований*, а группу $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$ — *галилеевой группой движений* в пространстве Галилея Γ_n.

Ясно, что множество

$$S\Gamma(n,\mathbb{R}) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R}): \; g_{11} = 1, \; g|_{V_n} \in SO(n-1,\mathbb{R})\}$$

является подгруппой в $GL(n,\mathbb{R})$, которую называют *специальной галилеевой группой*.

Обозначим через $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ (соответственно, $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$) d-поле всех $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных (соответственно, $S\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных) d- рациональных функций. Для каждого $x = \{x_j\}_{j=2}^n \in \mathbb{R}^{n-1}$ положим $M_{n-1}(x) = \left(x_i^{(j-2)}\right)_{i,j=2}^n$.

Следующая теорема дает пример d-рационального базиса дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ (соответственно, d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$).

Теорема 5. *(i). В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ его d-рациональный базис образуют многочлены*

$$\varphi_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=2}^n (x_i^{(k)})^2, \; k = 0,\ldots,n-2; \tag{7}$$

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = x_1. \tag{8}$$

(ii). В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$ его d-рациональный базис составляют многочлены $\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)$, $k = 0,\ldots,n-3$, $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ и $\det M_{n-1}(x)$.

Доказательство. (i). Используя предложение 1 из [11, глава 1, §2] или доказательство теоремы 2.1.1 из [6, глава 2, §2], получим, что любая $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантная d-рациональная функция есть отношение двух $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных d-многочленов. Поэтому для доказательства теоремы $5(i)$ достаточно установить, что любой $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантный d-многочлен выражается через d-многочлены (7) и (8) с помощью конечного числа операций d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$.

Каждый d-многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ есть конечная сумма мономов вида

$$q(x_1,\ldots,x_n) = (x_1^{(i_1)} \cdot \dots \cdot x_1^{(i_k)})\varphi(x_2,\ldots,x_n),$$

где $0 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$, и $\varphi(x_2,\ldots,x_n)$ — d-многочлен от переменных $x_2,\ldots,x_n$.

Положив

$$r(x_1) = x_1^{(i_1)} \cdot \dots \cdot x_1^{(i_k)}, \tag{9}$$

имеем, что

$$q(x_1,\ldots,x_n) = r(x_1) \cdot \varphi(x_2,\ldots,x_n). \tag{10}$$

Таким образом каждый d-многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ имеет вид

$$p(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{s=1}^{m} r_s(x_1)\cdot\varphi_s(x_2,\ldots,x_n), \tag{11}$$

где $r_s(x_1)$ имеют вид (9), $\varphi_s(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle$, $s=1,\ldots,m$, $m\in\mathbb{N}$.

Пусть $g=(g_{ij})_{i,j=1}^n\in\Gamma(n,\mathbb{R})$, где $g_{11}=1$ и $h=(g_{ij})_{i,j=2}^n\in O(n-1,\mathbb{R})$. Поскольку $gU_n=U_n$, $gV_n=V_n$, то $g\{x_1,\ldots,x_n\}=\{x_1,y_2,\ldots,y_n\}$, где $\{y_2,\ldots,y_n\}=h\{x_2,\ldots,y_n\}$. Используя $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантность d-многочлена $p(x_1,\ldots,x_n)$, согласно (11), получим, что

$$\sum_{s=1}^{m} r_s(x_1)\cdot\varphi_s(x_2,\ldots,x_n)=p(x_1,\ldots,x_n)=p(g\{x_1,\ldots,x_n\})=p(x_1,y_2,\ldots,x_n)=$$

$$\sum_{s=1}^{m} r_s(x_1)\cdot\varphi_s(y_2,\ldots,y_n)=\sum_{s=1}^{m} r_s(x_1)\cdot\varphi_s(h\{x_2,\ldots,x_n\}). \tag{12}$$

Поскольку равенство (12) верно для любых значений $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, то

$$\varphi_s(x_2,\ldots,x_n)=\varphi_s(h\{x_2,\ldots,x_n\})\ \text{ при каждом }\ h\in O(n-1,\mathbb{R}).$$

Следовательно, $\varphi_s\in\mathbb{R}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle^{O(n-1,\mathbb{R})}$ для всех $s=1,\ldots,m$.

Согласно теореме $1(i)$, d-многочлены $\varphi_s(x_2,\ldots,x_n)$, $s=1,\ldots,m$ выражаются через многочлены (7) с помощью конечного числа операций d-поля

$$\mathbb{R}\langle x_2,\ldots,x_n\rangle^{O(n-1,\mathbb{R})}\subset\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}.$$

Поэтому из равенств (11) следует, что d-многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ выражается через многочлены (7) и (8) с помощью конечного числа операций d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$. Это означает, что система d-многочленов (7), (8) есть конечный d-рациональный базис в d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$.

Доказательство пункта (ii) использует теорему $1(ii)$ и аналогично доказательству пункта (i). □

4. Эквивалентность путей при действии группы Галилея

В этом разделе устанавливаются необходимые и достаточные условия для эквивалентность путей, лежащих в X, относительно действия группы Галилея $\Gamma(n,\mathbb{R})$ и специальной группы Галилея $S\Gamma(n,\mathbb{R})$ (теоремы 6 и 7), а также необходимые и достаточные условия для эквивалентность путей относительно действия группы движений $\mathbb{R}^n\lhd\Gamma(n,\mathbb{R})$ в пространстве Галилея (теорема 8).

Рассмотрим произвольный путь $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n,\ t \in (0,1)$, в пространстве Галилея Γ_n и положим $M_{n-1}(x(t)) = \left(x_i^{(j-2)}(t)\right)_{i,j=2}^n$. Будем говорить, что путь $x(t)$ является Γ_n*-регулярным*, если $\det M_{n-1}(x(t)) \neq 0$ при всех $t \in (0,1)$.

Предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ два Γ_n-регулярных пути, и пусть существует такое $g = (g_{ij}) \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, что $y(t) = gx(t),\ t \in (0,1)$. Так как $g_{11} = \pm 1,\ g_{i1} = 0$ для всех $i = 2,\dots,n$, и $gV_n = V_n$, то

$$g\{x_1(t), 0, \dots, 0\} = \{\pm x_1(t), 0, \dots, 0\},$$

$$g\{0, x_2(t), \dots, x_n(t)\} = \{0, z_2(t), \dots, z_n(t)\}.$$

Поэтому

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} = g\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} =$$
$$= g\{x_1(t), 0, \dots, 0\} + g\{0, x_2(t), \dots, x_n(t)\} =$$
$$\{\pm x_1(t), 0, \dots, 0\} + \{0, z_2(t), \dots, z_n(t)\} = \{\pm x_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\},$$

т. е.

$$y_1(t) = \pm x_1(t) \tag{13}$$

для всех $t \in (0,1)$.

Кроме того, из включения $g|_{V_{n-1}} \in O(n-1,\mathbb{R})$, в силу теоремы 2($i$), следуют равенства

$$M_{n-1}^{-1}(x(t))M'_{n-1}(x(t)) = M_{n-1}^{-1}(y(t))M'_{n-1}(y(t)); \tag{14}$$

и

$$M_{n-1}^T(x(t))M_{n-1}(x(t)) = M_{n-1}^T(y(t))M_{n-1}(y(t)). \tag{15}$$

для всех $t \in (0,1)$.

Следующая теорема является вариантом теоремы 2 для групп $\Gamma(n,\mathbb{R})$ и $S\Gamma(n,\mathbb{R})$.

Теорема 6. (i). *Два Γ_n-регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (13) — (15).*

(ii). *Два Γ_n-регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (14),(15) и равенства*

$$x_1(t) = y_1(t), \tag{16}$$

$$\det M_{n-1}(x(t)) = \det M_{n-1}(y(t)) \tag{17}$$

для всех $t \in (0,1)$.

Доказательство. (i). Пусть пути $x(t)$ и $y(t)$ — $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентны, т. е. существует такое $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0,1)$. Как было показано перед формулировкой теоремы 6, условия (13) — (15) автоматически выполняются.

Пусть теперь выполнены условия (13) — (15). Из теоремы 2(i) и условий (14), (15) вытекает существование такого $h = \begin{pmatrix} g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in O(n-1, \mathbb{R})$, для которого $\{y_2(t), \dots, y_n(t)\} = h(\{x_2(t), \dots, x_n(t)\})$. Если

$$(g_{ij})_{i,j=1}^n = g = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$g \in GL(n, \mathbb{R}),\ gU_n = U_n,\ gV_n = V_n,\ (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, \mathbb{R}).$$

Это означает, что $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$, при этом,

$$g(\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}) = \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j(t) \right\}_{i=1}^n =$$

$$= \left\{ g_{11} x_1(t), \sum_{j=2}^n g_{2j} x_j(t), \dots, \sum_{j=2}^n g_{nj} x_j(t) \right\} = \{\pm x_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}.$$

Согласно условию (13), имеем, что $y_1(t) = \pm x_1(t)$. Если $y_1(t) = -x_1(t)$, то берем $g_{11} = -1$; если же $y_1(t) = x_1(t)$, то полагаем $g_{11} = 1$. В обоих случаях получим, что $g \in \Gamma(n, \mathbb{R})$ и $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство пункта (ii) аналогично доказательству пункту (i) с использованием теоремы 2(ii). □

С помощью теорем 3 и 6 устанавливаются следующие необходимые и достаточные условия для $\Gamma(n, \mathbb{R})$-эквивалентности Γ_n-регулярных путей, использующие билинейную форму $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$.

Теорема 7. *Γ_n-регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma(n, \mathbb{R})$-эквивалентными ($S\Gamma(n, \mathbb{R})$-эквивалентными) в том и только в том случае, когда выполнены условие (13) и равенства*

$$(x^{(m)}(t), x^{(m)}(t)) = \sum_{i=2}^n \left(x_i^{(m)}(t) \right)^2 = \sum_{i=2}^n \left(y_i^{(m)}(t) \right)^2 = (y^{(m)}(t), y^{(m)}(t)) \tag{18}$$

для всех $t \in (0, 1)$ и $m = 0, 1, \dots, n-2$, (соответственно, выполнены условия (16), (17) и условие (18) для всех $t \in (0, 1)$ и $m = 0, 1, \dots, n-3$).

Доказательство. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентны, т. е. существует такое $g=(g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, что $y(t)=gx(t)$. Поскольку $h=(g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1,\mathbb{R})$ и $\{y_2(t),\dots,y_n(t)\}=h(\{x_2(t),\dots,x_n(t)\})$, то, в силу теоремы 3, верны равенства (18) для всех $t\in(0,1)$, $m=0,1,\dots,n-2$. Кроме того, согласно теореме 6(i), справедливо равенство (13).

Обратно, если верны равенства (18), то в силу теоремы 3 существует такое $h=(h_{ij})_{i,j=1}^n$ из $O(n-1,\mathbb{R})$, что $\{y_2(t),\dots,y_n(t)\}=h\{x_2(t),\dots,x_n(t)\}$.

Рассмотрим матрицу

$$(g_{ij})_{i,j=1}^n = g = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{11} & \cdots & h_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

из $GL(n,\mathbb{R})$. Повторяя конец доказательства теоремы 6(i), получим, что матрица g принадлежит группе $\Gamma(n,\mathbb{R})$ и верно равенство $y(t)=gx(t)$ при всех $t\in(0,1)$.

Доказательство теоремы 7 для случая группы $S\Gamma(n,\mathbb{R})$ использует теоремы 3 и 6(ii) и повторяет предыдущее доказательство для группы $\Gamma(n,\mathbb{R})$. $\square$

Из утверждения 5 и теоремы 7, вытекает следующий критерий $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентности путей.

Теорема 8. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — такие пути в пространстве Галилея Γ_n, что пути $x'(t)$ и $y'(t)$ — Γ_n-регулярны. Тогда*

(i). *Пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$\begin{gathered} y_1'(t) = \pm x_1'(t); \\ \sum_{i=2}^n \left(x_i^{(m)}(t)\right)^2 = \sum_{i=2}^n \left(y_i^{(m)}(t)\right)^2 \end{gathered} \tag{19}$$

для всех $t\in(0,1)$ и $m=1,\dots,n-1$.

(ii). *Пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \lhd S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (19) при $m=1,\dots,n-2$ и равенство*

$$\det M'_{n-1}(x)(t) = \det M'_{n-1}(y)(t)$$

при каждом $t\in(0,1)$.

Список литературы

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. — Москва: Наука, 1979. — 512 с.

   ALEXANDROV, P. S. (1979) *Course of analytic geometry and linear algebra.* Moscow: Nauka.

2. Арипов, Р. Г., Хаджиев, Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии // Известия ВУЗов. Математика. — 2007. — Т. 51 (7). — С. 3–15.

   ARIPOV, R.G., KHADZHIEV, D. (2007) The complete system of global differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* 51 (7). p. 3–15.

3. Муминов, К. К. Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы // Узбекский математический журнал. — 2005. — № 2. — С. 35–43.

   MUMINOV, K. K. (2005) Equivalence of paths and surfaces with respect to the action of the pseudoorthogonal group. *Uzbek Math. Journal.* No 2. p. 35–43.

4. Муминов, К. К. Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы // Известия ВУЗов. Математика. — 2009. — 53 (6). — С. 31–36.

   MUMINOV, K. K. (2009) Equivalence of curves with respect to the action of the symplectic group. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* 53 (6). p. 31–36.

5. Муминов, К. К., Гаффоров, Р. А. Эквивалентность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Узбекский математический журнал. — 2010. — № 4. — С. 135–141.

   MUMINOV, K. K. and GAFFAROV, R. A. (2010) Equivalence of paths with respect to the action group of special pseudoorthogonal group. *Uzbek Math. J.* No 4. p. 135–141.

6. Муминов, К. К., Чилин, В. И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. — LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия), 2015. — 122 с.

   MUMINOV, K. K. and CHILIN, V. I. (2015) *Equivalence of curves in finite-dimensional spaces.* LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland.

7. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства. — Москва: Наука, 1969. — 549 с.

   ROSENFELD, B. A. (1969) *Non-Euclidean spaces.* Moscow, Nauka.

8. Хаджиев, Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент. ФАН, 1998. — 136 с.

   KHADJIEV, DJ. (1988) *The application of theory invariants to differential geometry of curves.* Tashkent. FAN.

9. Чилин, В. И., Муминов, К. К. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве // Динамические системы. — 2013. — Т. 3 (31), № 1–2. — С. 135–149.

   CHILIN, V. I. and MUMINOV, K. K. (2013) The complete system of differential invariants of a curve in pseudo-euclidean space. *Din. Sist., Simferopol.* 3 (31), No. 1–2. p. 135–149.

10. Яглом, И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — Москва: Наука, 1969. — 304 с.

    YAGLOM, I. M. (1969) *The principle of relativity of Galileo and non-Euclidean geometry*. Nauka. Moscow.

11. DIEUDONNE, J. A. and CARRELL, J. B. (1971) *Invariant theory. Old and new*. Academic Press. New York–London.
12. KAPLANSKY, I. (1957) *An introduction to differential algebra*. Hermann, Paris.
13. KHADJIEV, DJ. and PEKSEN, O. (2004) On invariants of curves in Centra-affine geometry. *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)*. 44 (3). p. 603–613.
14. KHADJIEV, DJ. and PEKSEN, O. (2004) The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves. *Differential Geometry and Applications*. 20 (2). p. 167–175.
15. VINBERG, E. B. and POPOV, V. L. (1994) *Invariant theory in Algebraic geometry*. IV. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (translated from 1989. Russian edition). 55. Springer-Verlag. Berlin.
16. WEYL, Hermann (1997) *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton University.

Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л. Свойство минимальности самосопряженной дилатации операторного узла диссипативного оператора / А. В. Биданец, Ю. Л. Кудряшов // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 7 – 16.

УДК: 517.432

Рассматривается построенная ранее самосопряжённая дилатация узла диссипативного оператора. При условии сепарабельности вспомогательных пространств доказывается минимальность построенной дилатации, т.е. что всё пространство дилатации является замкнутой линейной оболочкой степеней резольвенты в точках i и $-i$ дилатации на исходном пространстве.

Ключевые слова: *дилатация, самосопряженный оператор, неограниченный диссипативный оператор, минимальность, операторный узел.*

Брук В. М. О самосопряженных расширениях операторов, порожденных интегральными уравнениями / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 17 – 31.

УДК: 517.983

В статье доказывается формула Лагранжа для интегрального уравнения с операторными мерами, имеющими ограниченную вариацию. Эта формула учитывает наличие одноточечных атомов у операторных мер. С помощью формулы Лагранжа строится пространство граничных значений (граничная тройка) и дается описание самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного интегральным уравнением в случае конечного числа одноточечных атомов.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, интегральное уравнение, операторная мера, симметрический оператор, самосопряженное расширение, линейное отношение, граничное значение*

Донской В. И. Колмогоровская сложность и VC размерность семейств рекурсивных функций / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 32 – 41.

УДК: 519.7

Изучается связь между комбинаторной размерностью (VCD) Вапника-Червоненкиса и колмогоровской сложностью семейств частично рекурсивных функций. Для произвольного семейства частично рекурсивных функций $\mathfrak{F}$ дано определение колмогоровской сложности $KC(\mathfrak{F})$. Доказано неравенство $VCD(\mathfrak{F}) \leq KC(\mathfrak{F})$, на основе которого

обоснован $pVCD$ метод получения оценок размерности Вапника-Червоненкиса для произвольных семейств частично рекурсивных функций. Приведены примеры оценивания при помощи $pVCD$ метода.

Ключевые слова: *VC размерность, колмогоровская сложность, рекурсивные функции.*

Коваленко А. И., Смолич В. П. Приоритетное обслуживание двух ненадежных линий / А. И. Коваленко, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 42 – 50.

УДК: 519.872.1

Рассматривается система, состоящая из двух ненадежных линий. При этом одна из линий является более эффективной при выполнении своих функций, чем вторая. Потоки отказов (поломок) линий — пуассоновские. Обслуживание системы осуществляет один наладчик. Времена обслуживания линий — произвольные непрерывные случайные величины, имеющие конечные математические ожидания. Обслуживание одной из линий (линии первого ранга) является приоритетным, то есть если во время обслуживания линии второго ранга происходит отказ линии первого ранга, то наладчик оставляет обслуживание линии второго ранга (с сохранением времени наладки) и приступает к обслуживанию линии первого ранга. В работе получены основные вероятностные характеристики системы в стационарном режиме: вероятности состояний системы, среднее количество неисправных линий, вероятность отказа системы (обе линии отказали), загрузка наладчика, коэффициент готовности системы, средняя наработка между отказами.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, ненадежная линия обслуживания, стационарный режим работы СМО, вероятностные характеристики СМО, приоритетное обслуживание.*

Марянин Б. Д., Смолич В. П. Гладкие меры в бесконечномерных линейных пространствах / Б. Д. Марянин, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 51 – 67.

УДК: 519.58+517.22+517.91

В бесконечномерном случае ввиду отсутствия стандартной меры типа меры Лебега имеется два пути построения теории обобщенных функций. Один из них состоит в том, что в бесконечномерном пространстве фиксируется мера, обладающая

достаточно хорошими свойствами, с помощью которой осуществляется связь между основными и обобщенными функциями. Очень часто для этих целей оказывается удобной гауссовская мера. Такая теория обобщенных функций была развита в работах Ю. М. Березанского, Ю. С. Самойленко. С другой стороны, можно пойти по пути, предложенному С. В. Фоминым и развитому в работах В. И. Авербуха, О. Г. Смолянова, С. В. Далецкого и др. Этот путь состоит в том, что распределения рассматриваются как обобщенные меры. Однако во всех этих работах рассматривалось дифференцирование мер по постоянным направлениям. При переходе к нелинейным многообразиям понятие постоянного направления теряет смысл. Поэтому необходимо строить теорию дифференцирования мер вдоль векторных полей. В работе вводится и изучается понятие производной меры вдоль конечного набора векторных полей, установлены основные свойства производной гладкой меры, указан вид логарифмической производной, найден закон преобразования указанных объектов при гладком обратимом отображении.

Ключевые слова: *гладкая мера, распределение, дифференцирование меры, производная меры вдоль векторного поля, логарифмическая производная меры.*

Сигал, А. В. Теоретико-игровое моделирование принятия решений в экономике при неполной информации / А. В. , Сигал // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 68 – 81.

УДК: 330.131.7

Принятие решений в экономике должно учитывать неопределенность, неполноту информации, случайность, противоречивость, конфликтность, конкуренцию, многокритериальность, альтернативность и обусловленный ими экономический риск. В качестве теоретико-игровой модели принятия управленческих решений в экономике при неполной информации предлагается модель, основанная на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Отличительными чертами предлагаемой концепции является ряд особенностей, из которых наиболее существенными и характерными являются следующие аспекты: применение неоклассических антагонистических игр, т. е. антагонистические игр, заданных частично известными платежными матрицами, и применение упрощенных методов решения неоклассических антагонистических игр, основанных на классификации информационных ситуаций неполноты информации относительно истинных значений элементов платежной матрицы.

Ключевые слова: *неполнота информации, экономический риск, статистическая игра, антагонистическая игра, неоклассическая антагонистическая игра.*

Стонякин Ф. С. Об одной задаче многозначного анализа в пространствах с несимметричной нормой / Ф. С. Стонякин // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 82 – 94.

УДК: 517.98

В работе получены обобщения теоремы Шаудера о неподвижной точке для специального класса многозначных отображений в пространствах с несимметричной нормой E. Рассмотрен конус выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств пространства с несимметричной нормой E. Введено специальное нормированное пространство $L(E)$, в которое линейно инъективно изометрично вложен этот конус. Для несимметрично нормированных пространств E с сепарабельным сопряжённым конусом доказано существование счётного тотального множества функционалов из сопряжённого пространства $L^*(E)$. На базе этого результата получены новые аналоги теоремы Шаудера о неподвижных точках для отображений $F : B \to B$, где множество B ограничено и замкнуто, но необязательно компактно в $L(E)$.

Ключевые слова: *несимметрично нормированное пространство, сопряженный конус, компактное вложение, метрика Хаусдорфа, теорема Шаудера*

Чилин В. И., Муминов К. К. Классификация путей в геометрии Галилея / В. И. Чилин, К. К. Муминов // Таврический вестник информатики и математики. — 2017. — № 1 (34). — С. 95 – 111.

УДК: 517.98

Дается явное описание конечного рационального базиса в дифференциальном поле инвариантных дифференциальных рациональных функций относительно действия группы преобразований Галилея в конечномерном действительном пространстве. С помощью полученного рационального базиса устанавливаются необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей в n-мерном пространстве Галилея.

Ключевые слова: *пространство Галилея, группа движений, дифференциальный инвариант, дифференциальная рациональная функция, рациональный базис, дифференциальный инвариант, регулярный путь*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Биданец Александр Владимирович — студент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: alexander.bidanets@yandex.ru

Брук Владислав Моисеевич — д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и моделирования Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Российская Федерация
e-mail: vladislavbruk@mail.ru

Донской Владимир Иосифович — д. ф.-м. н., профессор кафедры информатики факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: vidonskoy@mail.ru

Коваленко Александр Ильич — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: alexandkoval@mail.ru

Кудряшов Юрий Леонтьевич — к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: kudryashov_2889@mail.ru

Марянин Борис Давыдович	к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: marjaninbd@mail.ru*
Муминов Кабилжон Кадырович	д. ф.-м. н., профессор кафедры алгебры и функционального анализа механико-математического факультета Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан *e-mail: m.muminov@rambler.ru*
Сигал Анатолий Викторович	д. э. н, профессор кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Института экономики и управления (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: ksavo3@gmail.com*
Смолич Владимир Павлович	к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: svp54@mail.ru*
Стонякин Федор Сергеевич	к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация *e-mail: fedyor@mail.ru*
Чилин Владимир Иванович	д. ф.-м. н., профессор кафедры алгебры и функционального анализа механико-математического факультета Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан *e-mail: chilin@ucd.uz, vladimirchil@gmail.com*

Подписано к печати 23.11.2017. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/45. Распространяется бесплатно. Дата выхода в свет: 15.12.2017.
Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского.
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4.