Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 3 (32) ' 2016

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2016, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 11 от 30 ноября 2016 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

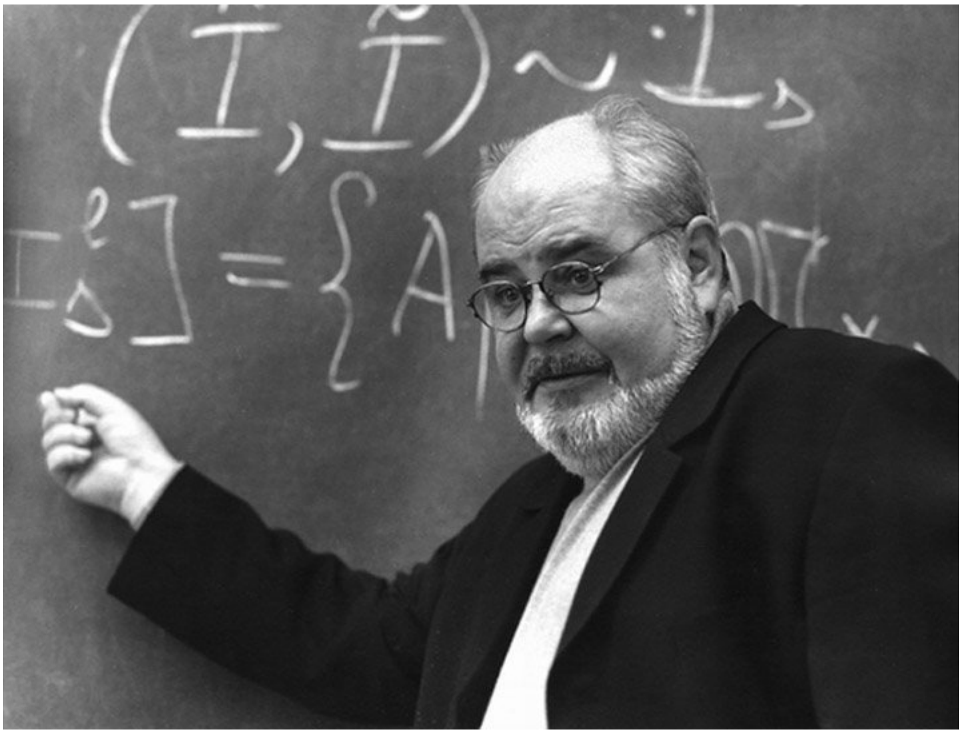
Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral and Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

Поздравляем Константина Владимировича Рудакова
с избранием действительным членом (академиком)
Российской академии наук!



Константин Владимирович Рудаков родился 21 июня 1954 в г. Верея Московской области. Окончив в 1971 году школу № 17 в городе Мытищи, поступил в Московский физико-технический институт на факультет Управления и прикладной математики. Во время учёбы в МФТИ углублённо занимался изучением функционального анализа, топологии, алгебры, математической логики, дискретного анализа. Со студенческой скамьи Константин Владимирович увлёкся математической теорией распознавания образов, становление которой происходило в то время, и сразу после окончания института в 1978 году поступил в аспирантуру Вычислительного центра АН СССР, начав исследования в этом направлении. Уже в июне 1981 года Константин Владимирович защитил кандидатскую диссертацию на тему «О некоторых классах алгоритмов распознавания».

С января 1982 года Константин Владимирович начал научную деятельность в Вычислительном центре АН СССР. Глубокая математическая эрудиция, умноженная на блестящие способности, позволила ему получить замечательные научные результаты на основе применении категорного подхода в алгебраической теории распознавания. В 1984 году он стал Лауреатом премии Ленинского комсомола в области науки и техники. Докторскую диссертацию "Теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания"Константин Владимирович защитил в ВЦ РАН в январе 1992 года. В мае 1997 года был избран членом-корреспондентом РАН. В 2003 году совместно с академиком Ю. И. Журавлёвым стал Лауреатом Ломоносовской премии I-й степени.

В настоящее время Константин Владимирович Рудаков — академик Российской академии наук, заместитель директора и заведующий отделом Интеллектуальных систем Федерального исследовательского центра «Информатика и Управление» РАН, заведующий кафедрой «Интеллектуальные системы» Московского физико-технического института, профессор кафедры математических методов прогнозирования факультета ВМК МГУ, член редколлегий ряда научных журналов, включая наш ТВИМ.

Доброго здоровья Вам, дорогой Константин Владимирович, и новых достижений в науке!

Редколлегия ТВИМ и все математики и информатики
Крымского федерального университета.

УДК: 517.984

MSC2010: 47B38, 37A56

ОБ ОПЕРАТОРАХ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РОСТОМ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

© А. Б. Антоневич, А. А. Шукур

Белорусский государственный университет
механико математический факультет
просп. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь
e-mail: *antonevich@bsu.by*, *shukur.math@gmail.com*

On operators with exponential growth of the resolvent.

Antonevich Anatolij B., Shukur Ali A.

Abstract. Let B linear bounded operator and let spectral radius is $R(B) = 1$. Well-known that the resolvent operator can be represented by power series $(B - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} B^{n-1}$ and the norm of the resolvent holds

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq \varphi_B(\frac{1}{|\lambda|}) \quad (|\lambda| > 1),$$

where $\varphi_B(z) = \sum_1^{\infty} \|B^{n-1}\| z^n$ is an analytical function on the unit disc $\mathbb{D} = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.

Describing the growth of the resolvent and the behavior of powers of operators and also the relation between them are classical problems in spectral theory of linear operators.

One of the most known results discussed the behavior of function $\varphi_B(z)$ was obtained by H.-O. Kreiss in [2]. There were shown at the finite-dimentional space that if the spectrum is belongs to the unit disc and the resolvent for $|\lambda| > 1$ holds

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda| - 1},$$

then the operator is power-bounded i.e.

$$\sup_{n \geq 0} \|B^n\| = C < \infty$$

and this proposition is not true at the infinite-dimentional space.

In this paper we considered more rapidly growth for the resolvent which we called *generalized Kriess* $(\gamma, \rho)-$*condition* such that

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq C \exp \frac{\rho}{(|\lambda| - 1)^{\gamma}},$$

where C is constant and γ, ρ are the order and type of the growth of the resolvent, respectively .

For an arbitrary operator B the relation between the mentioned above condition and the behavior of power of operator is obtained. As an example, for the discrete weighted shift operators the relation between the behavior of coefficient and the fulfilment of generalized Kriess $(\gamma, \rho)-$condition is given.

Keywords: *resolvent, Kriess resolvent condition, power-bounded operator, analytical function on the disc, discrete weighed shift operators.*

Введение

Пусть B — линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве X. Одной из характеристик оператора является поведение резольвенты $R(B;\lambda) = (B-\lambda I)^{-1}$ при стремлении λ к спектру $\sigma(B)$ данного оператора. Например, если пространство конечномерно и λ_0 есть одно из собственных значений для B, то при $\lambda \to \lambda_0$

$$\|R(B;\lambda)\| \sim \frac{C}{|\lambda-\lambda_0|^{\nu-1}},$$

где есть ν есть наибольшая из размерностей клеток Жордана, соответствующих λ_0.

Как известно, для резольвенты справедлива оценка снизу

$$\|R(B;\lambda)\| \geq \frac{1}{d(\lambda,\sigma(B))}, \tag{1}$$

где $d(\lambda,\sigma(B))$ есть расстояние от λ до спектра $\sigma(B)$. Для нормальных операторов в гильбертовом пространстве в (1) имеет место равенство, но для произвольных операторов резольвента может сколь угодно быстро возрастать при приближении λ к спектру [1].

Пусть $R(B)$ есть спектральный радиус оператора B; ниже для упрощения формул и без ограничения общности будем считать, что $R(B) = 1$. Тогда при $|\lambda| > 1$ резольвента задается в виде ряда по степеням $1/\lambda$:

$$(B-\lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n,$$

откуда следует оценка резольвенты сверху

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \leq \varphi_B(\frac{1}{|\lambda|}), \tag{2}$$

где

$$\varphi_B(z) = \sum_{0}^{\infty} \|B^{n-1}\| z^n \tag{3}$$

функция, аналитическая в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, коэффициенты в разложении которой $\|B^{n-1}\|$ — нормы степеней рассматриваемого оператора.

В общем случае оценка снизу (1) и оценка сверху (2) довольно грубые и норма резольвенты лежит между двумя указанными функциями.

Исследованию связей между поведением резольвенты при приближении к спектру, поведением функции $\varphi_B(z)$ и поведением последовательности $\|B^n\|$ посвящены работы многих авторов (см. [2–8]).

В частности, работы [2–6] посвящены исследованию так называемого условия Крейса. Говорят, что для оператора B выполнено *условие Крейса*, если существует постоянная C, при которой имеет место оценка резольвенты

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|-1} \quad \text{при} \quad (|\lambda|>1). \tag{4}$$

Если $\|B^{n-1}\|$ ограничены постоянной C, то оценка (4) имеет место для функции $\varphi_B(z)$ и для резольвенты. Тонкий результат в этом направлении заключается в том, что из условия Крейса не следует ограниченность степеней. В [6] построен пример оператора B в специально сконструированном банаховом пространстве, для которого выполнено условие Крейса и при этом нормы $\|B^n\|$ возрастают как n.

Для такого оператора функция $\varphi_B(z)$ при $\lambda \to 1$ возрастает как $\dfrac{1}{(|\lambda|-1)^2}$, в то время как резольвента имеет первый порядок степенного роста. Из этого следует, в частности, что в общем случае по степенному порядку роста последовательности $\|B^n\|$ нельзя однозначно определить порядок роста резольвенты.

В данной работе рассмотрены аналогичные вопросы для операторов, резольвенты которых могут иметь экспоненциальный рост при $|\lambda| \to 1$.

Будем говорить, что для оператора B выполнено (γ,ρ)*–условие Крейса*, если для некоторой константы C справедливо неравенство

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \leq C\exp[\frac{\rho}{(|\lambda|-1)^{\gamma}}] \quad (|\lambda|>1). \tag{5}$$

Заметим, что оценки такого вида возникают при исследовании известных классов операторов. Например, в [4] показано, что если A есть квазинильпотентный оператор из класса Шатенна–фон Неймана $\mathscr{S}_p$ и $B=I-A$, то для резольвенты выполнена оценка вида (5).

Целью данной работы является выявление связей между выполнением $(\gamma,\rho)-$ условия Крейса и поведением последовательности $\|B^n\|$. Заметим, что такая последовательность может быть быстро возрастающей – как показано в [9], для любой последовательности положительных чисел b_n, такой, что $b_{n+m} \leq b_n b_m$ и $\lim b_n^{1/n}=1$, существует такой оператор, что $R(B)=1$ и $\|B^n\|=b_n$.

1. Порядок и тип функции в круге

Дальнейшее изложение связано с вопросами зависимости между ростом аналитической функции и поведением коэффициентов ее разложения в степенной ряд.

Сначала напомним некоторые классические понятия и результаты в этом направлении из теории целых функций.

Говорят, что непрерывная функция $\varphi(z)$, определенная на плоскости, имеет *конечный (экспоненциальный) порядок роста* на бесконечности и порядок ее роста не превосходит α, если существуют такие C и r_0, что при $r > r_0$ выполнено неравенство

$$|\varphi(z)| \leq Ce^{r^\alpha}.$$

Точная нижняя грань таких α называется порядком функции, обозначим его через $\gamma = \gamma(\varphi)$. Порядок функции может быть найден по формуле

$$\gamma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_\varphi(r)}{\ln r},$$

где

$$M_\varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|.$$

Говорят, что функция $\varphi(z)$ конечного порядка γ имеет *нормальный тип*, если существует η $(0 < \eta < \infty)$, такое, что

$$|M_\varphi(r)| \leq C\exp(\eta r^\gamma).$$

Точная нижняя грань таких η называется типом функции, будем обозначать его $\rho = \rho(\varphi)$.

Тип функции может быть найден по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_\varphi(r)}{r^\gamma}.$$

Хорошо известен следующий классический результат (см. [10], [11]):

Теорема 1. *Порядок и тип целой функции*

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \varphi_n z^n$$

выражаются через коэффициенты степенного ряда формулами

$$\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\frac{1}{|\varphi_n|}}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e\gamma}\varphi_n^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Пусть теперь $\varphi(z)$ есть функция, определенная в открытом единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ имеет конечный экспоненциальный тип роста при $|z| \to 1$ и тип ее роста не превосходит α, если существует постоянная C, при которой выполнено неравенство

$$|\varphi(z)| \leq C \exp \frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}},$$

для $r_0 \leq |z| < 1$. Инфинум таких α называется *порядком (экспоненциального) роста* функции при $|z| \to 1$, обозначим его через $\gamma = \gamma(\varphi)$.

Говорят, что функция $\varphi(z)$ конечного порядка γ имеет *нормальный тип*, если существует η $(0 < \eta < \infty)$, такое, что

$$|\varphi(z)| \leq C \exp \frac{\eta}{(1-|z|)^{\gamma}},$$

Инфинум таких η называется *типом функции*, будем обозначать его $\rho = \rho(\varphi)$.

Определим порядок и тип роста для числовой последовательности. Будем говорить, что последовательность φ_n имеет конечный (экспоненциальный) порядок роста, если существует μ такое, что

$$|\varphi_n| \leq Ce^{n^{\mu}}.$$

Инфимум таких чисел ($\beta = \inf \mu$) будем называть (экспоненциальным) порядком роста последовательности. Эта величина может быть найдена по формуле

$$\beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \ln |\varphi_n|}{\ln n}.$$

Будем говорить, что последовательность φ_n конечного порядка β имеет нормальный тип, если существует τ такое, что

$$|\varphi_n| \leq Ce^{\tau n^{\beta}}.$$

Точная нижняя грань ($\omega = \inf \tau$) таких называется типом последовательности. Тип может быть определен как

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \varphi_n}{n^{\mu}}.$$

Известен ряд результатов о соотношение между поведением аналитической функции и поведением коэффициентов ее разложения, но нам не удалось найти в литературе аналог теоремы 1 для функций, аналитических в круге. Таким аналогом является следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция*

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} \varphi_n z^n,$$

аналитическая в единичном круге имеет порядок γ, $0 < \gamma < \infty$, *и нормальный тип* $\rho > 0$, *тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов* φ_n *имеет порядок* $\beta(0 < \beta < 1)$ *и тип* ω $(\omega > 0)$, *где указанные величины связаны соотношениями*

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\beta}, \quad \beta = \frac{\gamma}{\gamma+1}; \tag{6}$$

$$\rho = \frac{(\beta\omega)^{\beta}}{\gamma}, \quad \omega = \frac{(\rho\gamma)^{\frac{1}{\gamma+1}}}{\beta}. \tag{7}$$

Утверждение о порядке получено в [12], утверждение о типе функции получается в результате некоторого технического усовершенствования доказательства теоремы из [12].

Отметим два родственных результата в этом направлении. В книге [10] рассмотрены функции φ, аналитические в круге, у которых коэффициенты разложения имеют степенной рост: $\varphi_n \sim n^{\xi}$. Показано, что это имеет место тогда и только тогда, когда функция имеет степенной рост, а именно, когда

$$M_{\varphi}(r) \sim \frac{C}{(1-r)^{\xi+1}}.$$

Другой результат в родственном направлении был получен Г. Фабером еще в 1911 году (см. [13], [14]). Он рассматривал функции, представимые в виде

$$\varphi(z) = F(\frac{1}{1-\lambda}),$$

где F есть целая аналитическая функция. Фабер построил т.н. функцию коэффициентов – целую аналитическую функцию Φ такую, что $\Phi(n) = \varphi_n$, и установил соотношения между порядком функции F и порядком функции Φ, имеющее тот же вид, что и в теореме 2. При этом оказалось, что порядок целой функции F может быть больше, чем порядок роста коэффициентов φ_n разложения функции φ, и, следовательно, невозможно определить порядок целой функции F, имея информацию только о порядке роста φ_n.

Таким образом, результат Фабера дает описание поведения функции $\varphi(z)$ рассматриваемого вида в окрестности точки 1 с использованием дополнительной информации, а теорема 2 дает описание поведения этой функции только в единичном круге, в частности, в той части окрестности точки 1, которая принадлежит единичному кругу, но эта теорема использует только информацию о порядке роста коэффициентов φ_n.

2. Порядок и тип резольвенты

На основе теоремы 2 и аналога неравенства Коши

$$\max_{|\lambda|=r} \|R(B;\lambda)\| \geq \frac{1}{r^{m+1}} \|B^m\| \tag{8}$$

получаем следующее описание поведения резольвенты.

Теорема 3. *Пусть B есть ограниченный линейный оператор, у которого спектральный радиус $R(B) = 1$ и резольвента определена при $|\lambda| > 1$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *норма резольвенты, как функция от $z = \lambda^{-1}$, имеет порядок γ и тип ρ;*
2. *мажорирующая аналитическая функция φ_B имеет порядок γ и тип ρ;*
3. *последовательность $\|B^n\|$ имеет порядок β и тип ω, где указанные величины связаны соотношениями* (6) *и* (7).

Приведем примеры операторов, для которых выполнены утверждения теоремы 3. Для построения таких примеров используем дискретные операторы взвешенного сдвига (см. [15], [16], [8]).

Пусть $l_p(\mathbb{N})(1 \leq p < \infty)$ есть пространство последовательностей комплексных чисел

$$u = (u(k)) \quad k \in \mathbb{N}, \quad u(k) \in \mathbb{C},$$

для которых конечна норма

$$\|u\|_p = (\sum_k |u(k)|^p)^{1/p}.$$

$l_\infty(\mathbb{N})$ есть пространство ограниченных последовательностей с нормой

$$\|u\|_\infty = \sup |u(k)|.$$

Оператор сдвига W действует по формуле

$$(Wu)(k) = u(k+1),$$

Дискретным оператором взвешенного сдвига называется оператор B, действующий в пространстве $l_p(\mathbb{N})$ по формуле

$$B(u)(k) = a(k)u(k+1) \tag{9}$$

где $a(k)$ есть заданная ограниченная последовательность. Если $a(k) \to 1$ при $k \to +\infty$, то спектр оператора $B = aW$ есть замкнутый единичный круг и к нему применимы сформулированные выше утверждения.

Рассматриваемый оператор B задается с помощью последовательности коэффициентов $a(k)$, задача заключается в том, чтобы выяснить, с какими свойствами этой последовательности связан порядок роста резольвенты. Приведенный ниже результат для модельного класса показывает, что поведение резольвенты определяется скоростью сходимости последовательности коэффициентов к 1.

Теорема 4. *Пусть B есть дискретный оператор взвешенного сдвига в пространстве $l_p(\mathbb{N})$ с коэффициентом вида*

$$a(k) = \exp\frac{\xi}{k^\nu},\ \xi > 0,\ \nu > 0. \tag{10}$$

1. *Если $\nu > 1$, то нормы степеней оператора B ограничены и выполнено условие Крейса (4).*
2. *Если $\nu = 1$, то нормы степеней растут как n^ξ, а мажорирующая функция $\varphi_B(|\lambda|^{-1})$ растет как $\frac{C}{(|\lambda|-1)^{\xi+1}}$.*
3. *Если $\nu < 1$, то нормы степеней растут как $\exp[\frac{\xi}{1-\nu}n^{1-\nu}]$, а мажорирующая функция φ_B и резольвента при $|\lambda| > 1$ имеют порядок γ и тип ρ, заданные равенствами*
$$\gamma = \frac{1-\nu}{\nu},\quad \rho = \frac{1}{1-\nu}\xi^{\frac{2-\nu}{\nu}}.$$

Доказательство. Норма степени оператора B в каждом из пространств задается формулой (см. [8])

$$\|B^n\| = \sup_k \prod_{j=0}^{n-1} |a(k+j)|. \tag{11}$$

Для коэффициентов вида (10) получаем

$$\|B^n\| = exp[\xi \sum_1^n \frac{1}{k^\nu}]. \tag{12}$$

Как известно,

$$\sum_1^n \frac{1}{k^\nu} \sim \int_1^n x^{-\nu} d\nu = \begin{cases} \frac{1}{(\nu-1)}[1 - n^{1-\nu}], & \nu > 1; \\ \ln n, & \nu = 1; \\ \frac{n^{1-\nu}}{(1-\nu)}, & 0 < \nu < 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем утверждение о поведении $\|B^n\|$ в каждом из рассматриваемых случаев.

При $\nu > 1$ получаем ограниченность норм числом $C = \frac{\xi}{\nu-1}$ и выполнение условия Крейса.

При $\nu < 1$ получаем, что

$$\|B^n\| \sim \exp[\frac{\xi}{1-\nu} n^{1-\nu}],$$

т. е. последовательность норм имеет экспоненциальный порядок роста $1-\nu$ и тип $\frac{\xi}{1-\nu}$. Вторая часть утверждения непосредственно следует из теорем 2 и 3.

При $\nu = 1$ получаем степенной рост последовательности норм

$$\|B^n\| \ \sim \exp[\xi \ln n] = n^{\xi}.$$

Утверждение, что мажорирующая функция $\varphi_B(|\lambda|^{-1})$ растет как $\frac{C}{(|\lambda|-1)^{\xi+1}}$ в этом случае следует из результата, полученного в книге [10] (пример 1, стр. 124). □

В доказательстве теоремы 4 существенно только асимптотическое поведение коэффициентов. Поэтому аналогичный результат получаем для операторов взвешенного сдвига, у которых последовательность коэффициентов имеет такую же асимптотику, как в рассмотренном примере:

$$a(k) \sim \exp\frac{\xi}{k^{\nu}} \sim 1 + \frac{\xi}{k^{\nu}}.$$

Обратим внимание на то, что из определения порядка функции не следует, что при показателе α, меньшем порядка γ, выполнено противоположное неравенство. Иначе говоря, теорема не дает оценок снизу для нормы резольвенты. Ниже мы рассматриваем модельный класс дискретных операторов взвешенного сдвига и для них получаем более явные оценки, в том числе оценки снизу.

Теорема 5. *Если коэффициенты $a(k) > 0$ монотонно убывают и $a(k) \to 1$, то в пространстве $l_1(\mathbb{N})$ и в пространстве $l_\infty(\mathbb{N})$ норма резольвенты $R(B;\lambda)$ совпадает со значением мажорирующей функции:*

$$\|R(B;\lambda)\| = \varphi_B(\frac{1}{|\lambda|}).$$

Это равенство выполнено, в частности, для оператора с коэффициентами вида (10).

Доказательство. В случае монотонно убывающих коэффициентов из формулы (11) получаем, что

$$\|B^n\| = \prod_{k=1}^{n} a(k).$$

Пусть

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Прямые вычисления показывают, что в пространстве $l_1(\mathbb{N})$ выполнено

$$\|(B-\lambda I)^{-1}e_n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} \|B^{k-1}\| \frac{1}{|\lambda|^k}.$$

Поэтому

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \geq \sup_n \sum_{k=0}^{n} \|B^{k-1}\| \frac{1}{|\lambda|^k} = \varphi_B(\frac{1}{|\lambda|}).$$

В пространстве $l_\infty(\mathbb{N})$ получаем

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \geq \|(B-\lambda I)^{-1}e_1\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \|B^{k-1}\| \frac{1}{|\lambda|^k} = \varphi_B(\frac{1}{|\lambda|}).$$

Полученные оценки снизу совпадает с оценкой сверху (2), откуда следует равенство. □

В случае пространства $l_p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$ нормы степеней совпадают с нормами степеней в пространстве $l_1(\mathbb{N})$ и следовательно, мажорирующая функция φ_B в $l_p(\mathbb{N})$ та же, что и в пространстве $l_1(\mathbb{N})$. Но норма резольвенты при $1 < p < \infty$ может быть меньше ее нормы в $l_1(\mathbb{N})$. Поэтому в общем случае функция φ_B не дает оценки снизу нормы резольвенты.

Оценку снизу для нормы резольвенты оператора взвешенного сдвига может быть получена на основе следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть B есть произвольный оператор взвешенного сдвига, у которого $R(B) = 1$ и резольвента определена при $|\lambda| > 1$. В пространстве $l_p(\mathbb{N})$ при любом p имеет место усиленное неравенство Коши: для любого числа $m \geq 0$ выполнено*

$$\|R(B;\lambda)\| = \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n \| \geq \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \|B^m\|. \tag{13}$$

Эта лемма описывает специфическое свойство операторов взвешенного сдвига – для произвольного B выполнено (8), но (13) может не выполняться. Из неё следует оценку снизу для нормы резольвенты оператора взвешенного сдвига

$$\|R(B;\lambda)\| \geq \psi_B(\frac{1}{|\lambda|}) := \sup_m \frac{1}{|\lambda|^{m+1}} \|B^m\|, \tag{14}$$

выполненная в каждом из пространств $l_p(\mathbb{N})$.

Построенная функция $\psi_B(z)$ меньше мажорирующей функции φ_B, поэтому ее порядок не превосходит порядка γ функции φ_B, в случае равенства порядков тип функции $\psi_B(z)$ не превосходит типа ρ функции φ_B. Аналогично доказательству теоремы 2 можно показать, что, если последовательность $\|B^n\|$ имеет порядок β и тип ω, то функция $\psi_B(z)$ имеет тот же порядок γ и тип ρ, что и мажорирующая функция. Это утверждение показывает, что оценка снизу (14) является точной по порядку и типу. Еще раз отметим, что для произвольных операторов оценка снизу (14) не выполнена.

Список литературы

1. DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J. (1988) *Linear operators. General theory.* John Weily and Sons, Inc., Hoboken: New Jersey. 858 p.
2. KREISS, H.-O. (1962) *Über die stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren.* BIT. 153-181 p.
3. NEVANLINNA, O. (1997) On the growth of the resolvent operators for power bounded operators. *Banach center publiction.* 28 p. 247–264.
4. OSCAR, F. (1997) Estimates for norms of resolvents and an application to the perturbation of spectra. *Mathematische Nachrichten.* 276 (1). p. 3–11.
5. NAGY, B. & ZEMANEK, J. (1999) A resolvent condition implying power boundedness. *Studia Math.* 134 p. 143–151.
6. BOROVYKH, N. & DISSI, D. & SPIJKER, M. (2000) A note about Ritt's condition, related resolvent conditions and power bounded operators. *Numer.Funct. Anal. AND Optimiz.* 21 p. 425–438.
7. NEVANLINNA, O. (2011) Resolvent conditions and powers of operators. *Studia Math.* 145 p. 113–134.
8. Антоневич, А. Оценки резольвент для дискретных операторов взвешенного сдвига / А. Антоневич, А. Шукур // ПФМТ. — 22, 2015. — С. 48–52.

   ANTONEVICH, A. & SHUKUR, A. (2015) Estimation of resolvent for discrete weighted shift operators. *J. PFMT.* 22 p. 48–52.
9. ANTONEVICH, A. & APPEL, J. & ZABREIKO, P. (1994) Some remarks on the asymptotic behaviuor of the iterates of a bounded linear operator. *Studia Math.* 112 p. 1–11.
10. Евграфов, М. Асимптотические оценки и целые функции / М. Евграфов. — Москва, 1957. — 160 с.

    EVGRAFOV, M. (1957) *Asmyptotic estimates and Entire functions.* Moscow. 160 p.
11. Левин, Б. Распределение корней целых функций / Б. Левин. — Москва, 1956. — 632 р с.

    LEVIN, B. (1956) *Distribution of the roots of entire functions.* Moscow. 632.
12. Антоневич, А. О росте аналитических функции в круге / А. Антоневич, А. Шукур // Доклады НАН Беларуси. — 60, 2016. — С. 41–46.

    ANTONEVICH, A. & SHUKUR, A. (2016) On the growth of analytical functions on the disc. *Doklady National Academy of Sciences of Belarus.* 60 (6). p. 41–46.

13. FABER, G. (1911) Eitrag zur Theorie der ganzen funktionen. *Math. Ann.* 70 p. 48–68.

14. BIBERBACH, L. (1955) *Analytische Fortsetzung.* Spring-Verlag:Berlin. 398 p.

15. ANTONEVICH, A. B. (1996) *Linear functional equation. Operator approach.* Birkhauser: Berlin. 179 p.

16. Антоневич, А. О спектральных свойствах операторов со сдвигом / А. Антоневич, А. Лебедев // Изв.АН ССРю сер. мат. / 47. — 1983. — С. 915–941.

    ANTONEVICH, A. & LEBEDEV, A. (1983) Spectral properties of the operators with shift. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.* 47 p. 915–941.

УДК: 517.432

MSC2010: 47A48, 47A20

J-ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ И J-УНИТАРНАЯ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

© А. В. Биданец, Ю. Л. Кудряшов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *alexander.bidanets@yandex.ru*

J-isometric and J-unitary dilations of operator knot.

Bidanets A. V., Kudryashov Yu. L.

Abstract. The method of dilations is used in the study of the non-unitary operators. Herewith, the theory of the unitary dilations of the contractions has been full enough developed in the works of B. Szokefalvi-Nagy and Ch. Foyash. Further, the J-unitary dilation of an arbitrary bounded operator was constructed by Ch. Davis and A. V. Kuzhel.

In the work "The point spectrum of unitary dilations in krein spaces" of Temme, D., and after that in the work "Analytic methods of spectral representations of non-self-adjoint and non-unitary operators" of V. A. Zolotarev the term of the operator knot has been introduced. Using this term, the J-unitary dilation of an arbitrary bounded operator has been constructed. Along with the open system construction has been used.

This paper provides a direct proof that the operator, built by the knot, is the J-unitary dilation of the main operator of the knot and its minimality.

Following the work "Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space" of B. Szokefalvi-Nagy and Ch. Foyash the J-isometric dilation is built preliminarily and some of its properties are proved.

A set of linear bounded operators acting from an entire Hilbert space H_1 into a Hilbert space H_2, will be denoted by $[H_1, H_2]$.

Definition 1. The assembly of Hilbert spaces H, H_-, H_+ and operators $T \in [H,H], \Psi \in [H,H_+], \Phi \in [H_-,H], K \in [H_-,H_+], J_- \in [H_-,H_-], J_+ \in [H_+,H_+]$, $J_- = J_-^* = J_-^{-1}$, $J_+ = J_+^* = J_+^{-1}$ is called the unitary metric knot [6] Δ (further, knot) $\Delta = \left(J_-, H \oplus H_-, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}, H \oplus H_+, J_+\right)$ if the following relations hold:

$$T^*T + \Psi^* J_+ \Psi = I \tag{1}$$

$$T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0 \tag{2}$$

$$(\Phi^*T + K^* J_+ \Psi = 0) \tag{2*}$$

$$\Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_- \tag{3}$$

$$TT^* + \Phi J_- \Phi^* = I \tag{4}$$

$$T\Psi + \Psi J_- K^* = 0 \qquad (5) \qquad\qquad \Psi\Psi^* + KJ_-K^* = J_+ \qquad (6)$$
$$(\Psi T^* + KJ_-\Phi^* = 0) \qquad (5^*)$$

These relations $(1) - (6)$ can be written in a more compact form.

Let us introduce the spaces $H \oplus H_-$, $H \oplus H_+$ and the operator $V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \in [H \oplus H_-, H \oplus H_+]$. Then the conditions $(1) - (3)$ can be written in the following form:

$V^* \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix}$, and conditions $(4) - (6)$ can be written in the following form: $V \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix}$.

Moreover, the operator T is called the main operator of the knot, Φ, Ψ are the canal operators, K are the deforming operator, and J_+, J_- are the metric operators of the knot Δ.

Let $T \in [H, H]$ be included in the knot Δ.

Form the Hilbert space $\mathfrak{H}$ consists of the vectors $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$ with components $h_0 \in H, h_n \in H_+ \, (n \geq 1)$. Every such $h \in \mathfrak{H}$ if (and only if) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| h_n \right\|^2 < \infty$ and $\left(h, h'\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(h_k, h_k^{'}\right)$, where $h' = \left(h_0^{'}, h_1^{'}, h_2^{'}, ...\right)$. Let identify the vector $\left(h_0, 0, 0, ...\right) \equiv h_0$, then $H \subset \mathfrak{H}$ and the operator $Ph = \left(h_0, 0, 0, ...\right) = h_0$ is orthogonal projection from $\mathfrak{H}$ onto H.

Let us introduce J-metric by use of the operator J in the space $\mathfrak{H}$: $J\left(h_0, h_1, h_2, ...\right) = \left(h_0, J_+h_1, J_+h_2, ...\right)$, where $J = J^* = J^{-1}$ и $[h, h^{'}] = \left(Jh, h^{'}\right)$.

Let consider the operator V: $Vh = V\left(h_0, h_1, h_2, ...\right) = \left(Th_0, \Psi h_1, h_2, ...\right)$ in the space $\mathfrak{H}$, where the operator Ψ from the knot Δ.

Theorem 1. *The operator V is the J-isometric dilation of the operator T (and hence, of the knot Δ).*

Definition 2. The J-isometric dilation $V \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ of the operator $T \in [H, H]$ is called minimal if $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{V^n H \mid n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\right\}}$

Theorem 2. *The J-isometric dilation V is minimal if $H_+ = \overline{\Psi H}$.*

Theorem 3. *The minimal J-isometric dilation of the operator T is determined up to J-unitary isomorphism.*

Let $T \in [H, H]$ and T be inclueded in the knot Δ.

Form the Hilbert space $\mathfrak{H}$, whose elements are the vectors $h = \left(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots\right)$ (a frame indicates, that the element, which placed in it, is situated on zero position), where $h_0 \in H, h_n \in H_+, h_{-n} \in H_- \, (n \in \mathbb{N})$.

$h \in \mathfrak{H}$ if (and only if) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\| h_k \right\|^2 < \infty$ и $\left(h, h'\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(h_k, h_k^{'}\right)$, where $h' = \left(h_{-2}^{'}, h_{-1}^{'}, \boxed{h_0^{'}}, h_1^{'}, h_2^{'}, ...\right)$. Let identify the vector $\left(\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, ...\right) \equiv h_0$, thus we obtain $H \subset \mathfrak{H}$ and the operator $Ph = \left(\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, ...\right) = h_0$ is the orthogonal projection from $\mathfrak{H}$ onto H.

Let consider the operator U:

$Uh = \left(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + Kh_{-1}, h_1, \ldots\right)$.

Theorem 4. *The operator U is the J-unitary dilation of the operator knot Δ.*

Definition 3. The J-unitary dilation $U \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ of operator the $T \in [H, H]$ is called minimal if $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{U^n H \mid n \in \mathbb{Z}\right\}}$, where $U^{-1} = JU^*J$.

Theorem 5. *If $H_+ = \overline{\Psi H}, H_- = \overline{J_- \Phi^* H}$, then the J-unitary dilation U is minimal.*

Theorem 6. *The minimal J-unitary dilation of the operator $T \in [H, H]$ is determined up to J-unitary isomorphism.*

Keywords: *minimal J-isometric dilatation, minimal J-unitary dilatation, J-unitary isomorphism of dilatations*

Введение. Предварительные сведения

При изучении неунитарных операторов используется метод дилатаций. При этом теория унитарных дилатаций сжатий довольно полно развита в работах Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша [1],[2]. Затем Ч. Дэвис [3] и А. В. Кужель [4] построили J-унитарную дилатацию произвольного ограниченного оператора.

В [5], а затем в [6] было введено понятие операторного узла. С помощью этого понятия строится J-унитарная дилатация произвольного ограниченного оператора. При этом использовалась конструкция открытой системы.

В данной работе приводится непосредственное доказательство того, что построенный с помощью узла оператор является J-унитарной дилатацией основного оператора узла и ее минимальность.

Следуя работе [1] предварительно строится J-изометрическая дилатация и доказываются некоторые ее свойства.

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из всего гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, обозначим через $[H_1, H_2]$.

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств H, H_- и H_+ и операторов $T \in [H, H], \Psi \in [H, H_+], \Phi \in [H_-, H], K \in [H_-, H_+], J_- \in [H_-, H_-], J_+ \in [H_+, H_+]$,

$J_- = J_-^* = J_-^{-1}$, $J_+ = J_+^* = J_+^{-1}$ называется унитарным метрическим узлом [6] Δ (в дальнейшем узлом) $\Delta = \left(J_-, H \oplus H_-, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}, H \oplus H_+, J_+\right)$, если выполняются следующие соотношения:

$$T^*T + \Psi^* J_+ \Psi = I \qquad (1)$$

$$T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0 \qquad (2)$$

$$(\Phi^* T + K^* J_+ \Psi = 0) \qquad (2^*)$$

$$\Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_- \qquad (3)$$

$$TT^* + \Phi J_- \Phi^* = I \qquad (4)$$

$$T\Psi + \Psi J_- K^* = 0 \qquad (5)$$

$$(\Psi T^* + K J_- \Phi^* = 0) \qquad (5^*)$$

$$\Psi\Psi^* + K J_- K^* = J_+ \qquad (6)$$

Соотношения (1) – (6) можно записать в более компактном виде.

Введем пространства $H \oplus H_-$, $H \oplus H_+$ и оператор $V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \in [H \oplus H_-, H \oplus H_+]$. Тогда условия (1) – (3) можно записать в виде:

$V^* \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix}$, а условия (4)–(6) в виде: $V \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_- \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix}$.

При этом оператор T называется основным оператором узла, Φ, Ψ - каналовыми, K - деформирующим, а J_+ и J_- - метрическими операторами узла Δ.

Произвольный оператор T$\in [H, H]$ может быть включен в узел Δ, например, так:

Пусть $\mathfrak{D}_T = I - T^*T$, $\mathfrak{D}_{T^*} = I - TT^*$, $E_+ = \overline{\mathfrak{D}_T H}$, $E_- = \overline{\mathfrak{D}_{T^*} H}$, $Q_T = |\mathfrak{D}_T|^{\frac{1}{2}}$, $Q_{T^*} = |\mathfrak{D}_{T^*}|^{\frac{1}{2}}$, $J_+ = sign \mathfrak{D}_T$, $J_- = sign \mathfrak{D}_{T^*}$, $\Phi = Q_{T^*}, \Psi = Q_T, K = T^*$.

Определение 2. Оператор $B \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ называется дилатацией оператора $T \in [H, H]$, если

$$H \subset \mathfrak{H} \text{ и } P_H B^n h = T^n h \,(\forall h \in H, n \in \mathbb{N}), \qquad (7)$$

где P_H - ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на H.

Условие (7) можно записать равносильным условием:

$$\left(T^n h, h'\right) = \left(B^n h, h'\right), \forall n \in \mathbb{N}, \forall \left\{h, h'\right\} \subset H. \qquad (8)$$

Определение 3. Оператор B называется дилатацией операторного узла Δ, если B является дилатацией основного оператора узла при любых операторах Ψ, Φ, K, J_-, J_+, образующих узел Δ.

Определение 4. Дилатации B_1 и B_2, $B_i \in [\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_i]$, $i = 1, 2$ оператора $T \in [H, H]$ называются J-унитарно изоморфными, если существует J-унитарное отображение Φ пространства $\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1$, такое, что

1. $\Phi h = h, \forall h \in H$
2. $B_2 = \Phi^{-1} B_1 \Phi$.

1. J-ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ДИЛАТАЦИЯ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

Пусть оператор $T \in [H, H]$ включен в узел Δ.

Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ из векторов $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$ с компонентами $h_0 \in H, h_n \in H_+ \, (n \geq 1)$. При этом $h \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| h_n \right\|^2 < \infty$ и $\left(h, h'\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(h_k, h_k'\right)$, где $h' = \left(h_0', h_1', h_2', ...\right)$. Отождествим вектор $\left(h_0, 0, 0, ...\right) \equiv h_0$, тогда $H \subset \mathfrak{H}$ и оператор $Ph = \left(h_0, 0, 0, ...\right) = h_0$ является ортопроектором из $\mathfrak{H}$ на H.

Введем в пространстве $\mathfrak{H}$ J-метрику с помощью оператора J: $J\left(h_0, h_1, h_2, ...\right) = \left(h_0, J_+ h_1, J_+ h_2, ...\right)$, где $J = J^* = J^{-1}$ и $[h, h'] = \left(Jh, h'\right)$.

Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{H}$ оператор V:

$Vh = V\left(h_0, h_1, h_2, ...\right) = \left(Th_0, \Psi h_1, h_2, ...\right)$, где оператор Ψ из узла Δ.

Теорема 1. *Оператор V является J-изометрической дилатацией оператора T (и, следовательно, узла Δ).*

Доказательство.

$$[Vh, Vh] = (JVh, h) = ((Th_0, J_+ \Psi h_0, J_+ h_1, J_+ h_2, \ldots), (Th_0, \Psi h_0, h_1, h_2, \ldots)) =$$
$$= (Th_0, Th_0) + (J_+ \Psi h_0, \Psi h_0) + (J_+ h_1, h_1) + ... =$$
$$= (h_0, T^* T h_0) + (h_0, \Psi^* J_+ \Psi h_0) + (J_+ h_1, h_1) + \ldots;$$

Используя (1), получаем

$[Vh, Vh] = (h_0, T^* T h_0) + ((I - T^* T) h_0, h_0) + (J_+ h_1, h_1) + \cdots = [h, h]$, т.е. V — J-изометрический оператор.

Найдем n-ую степень оператора V на векторе $h_0 \in H$.

$$Vh_0 = (Th_0, \Psi h_0, 0, 0, \ldots),$$
$$V^2 h_0 = \left(T^2 h_0, \Psi T h_0, \Psi h_0, 0, 0, \ldots\right),$$
$$V^n h_0 = (T^n h_0, \Psi T^{n-1} h_0, \Psi T^{n-2} h_0, \ldots, \underset{n}{\boxed{\Psi h_0}}, 0, 0, \ldots),$$
$$PV^n h_0 = T^n h_0, \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } h_0 \in H.$$

Теорема доказана. □

Определение 5. J-изометрическая дилатация $V \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ оператора $T \in [H, H]$ называется минимальной, если $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{V^n H \mid n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\right\}}$

Теорема 2. *J-изометрическая дилатация V является минимальной, если $H_+ = \overline{\Psi H}$.*

Доказательство. Обозначим $\hat{H} = \overline{span\left\{V^n H \mid n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\right\}}$. Надо доказать, что $\mathfrak{H} = \hat{H}$.

Очевидно, что $\hat{H} \subset \mathfrak{H}$. Докажем, что и $\mathfrak{H} \subset \hat{H}$.

Пусть $h = (h_0, h_1, h_2, \dots) \in \mathfrak{H}$, где $h_0 \in H, h_k \in \overline{\Psi H}, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$V^n h_0 = \left(T^n h_0, \Psi T^{n-1} h_0, \Psi T^{n-2} h_0, \dots, \underset{n}{\boxed{\Psi h_0}}, 0, 0, \dots\right),$$

$$V^{n-1} h_0 = \left(T^n h_0, \Psi T^{n-1} h_0, \Psi T^{n-2} h_0, \dots, \underset{n-1}{\boxed{\Psi T h_0}}, 0, 0, \dots\right),$$

$V^n h_0 - V^{n-1} T h_0 = \left(0, 0, \dots, \underset{n}{\boxed{\Psi h_0}}, 0, 0, \dots\right) \in \hat{H},$ при $n \geq 1$, следовательно $\mathfrak{H} \subset \hat{H}$.
Теорема доказана. □

Теорема 3. *Минимальная J-изометрическая дилатация оператора T определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $n > m$

$$\left[V^n h, V^m h^{'}\right] = \left[V^{n-1} h, V^{m-1} h^{'}\right] = \dots = \left(J V^{n-m} h, h^{'}\right) = \left(V^{n-m} h, J h^{'}\right) =$$
$$= \left(T^{n-m} h, J h^{'}\right) = \left[T^{n-m} h, h^{'}\right].$$

Мы использовали определение дилатации (8) и доказали, что $\left[V^n h, V^m h^{'}\right]$ не зависит от оператора V. Поэтому можно рассмотреть отображение $\Phi\left(V_1^n h\right) = V_2^n h$, где V_1 и V_2 минимальные J-изометрические дилатации оператора T.

Φ-изоморфизм J-унитарный, т.е. $[V_1^n h, V_1^n h] = [V_2^n h, V_2^n h]$.

Теорема доказана. □

2. J-унитарная дилатация

Пусть $T \in [H, H]$ и T включен в узел Δ.

Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ из векторов $h = \left(\dots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \dots\right)$ (рамка обозначает, что помещенный в ней элемент расположен на нулевом месте), где $h_0 \in H, h_n \in H_+, h_{-n} \in H_-$ $(n \in \mathbb{N})$.

$h \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\|h_k\right\|^2 < \infty$ и $\left(h, h'\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(h_k, h_k^{'}\right)$, где $h' = \left(h_{-2}^{'}, h_{-1}^{'}, \boxed{h_0^{'}}, h_1^{'}, h_2^{'}, \dots\right)$. Отождествим вектор $\left(\dots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, \dots\right) \equiv h_0$, получим вложение $H \subset \mathfrak{H}$ и оператор $Ph = \Big(\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, ...\Big) = h_0$ является ортопроектором из $\mathfrak{H}$ на H.

Рассмотрим оператор U:

$$Uh = \Big(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + Kh_{-1}, h_1, \ldots\Big).$$

Теорема 4. *Оператор U является J-унитарной дилатацией узла Δ.*

Доказательство. Найдем оператор U^*.

$$\Big(Uh, h'\Big) = \cdots + \Big(h_{-3}, h'_{-2}\Big) + \Big(h_{-2}, h'_{-1}\Big) + \Big(Th_0 + \Phi h_{-1}, h'_0\Big) + \Big(\Psi h_0 + Kh_{-1}, h'_1\Big) +$$
$$+ \Big(h_1, h'_2\Big) + \Big(h_2, h'_3\Big) + \cdots = \cdots + \Big(h_{-3}, h'_{-2}\Big) + \Big(h_{-2}, h'_{-1}\Big) + \Big(Th_0, h'_0\Big) + \Big(\Phi h_{-1}, h'_0\Big) +$$
$$+ \Big(\Psi h_0, h'_1\Big) + \Big(Kh_{-1}, h'_1\Big) + \Big(h_1, h'_2\Big) + \Big(h_2, h'_3\Big) + \cdots = \cdots + \Big(h_{-3}, h'_{-2}\Big) + \Big(h_{-2}, h'_{-1}\Big) +$$
$$+ \Big(h_0, T^*h'_0 + \Psi^* h'_1\Big) + \Big(h_{-1}, \Psi^* h'_0 + K^* h'_1\Big) + \Big(h_1, h'_2\Big) + \Big(h_2, h'_3\Big) + \cdots =$$
$$= \Big(h, \Big(\ldots, h'_{-2}, h'_{-1}, \Psi^* h'_0 + K^* h'_1, \boxed{T^* h'_0 + \Psi^* h'_1}, h'_2, \ldots\Big)\Big).$$

Таким образом:

$$U^*h = \Big(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \Phi^* h_0 + K^* h_1, \boxed{T^* h_0 + \Psi^* h_1}, h_2, h_3, \ldots\Big).$$

Рассмотрим оператор JU^*J:

$$JU^*Jh = \Big(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, J_- \left(\Phi^* h_0 + K^* J_+ h_1\right), \boxed{T^* h_0, + \Psi^* J_+ h_1}, h_2, h_3, \ldots\Big). \quad (9)$$

Докажем, что $U^{-1} = JU^*J$. Обозначим $JU^*J = C$.

Надо доказать, что $CU = UC = I$.

$$CUh = C\Big(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + Kh_{-1}, h_1, h_2, \ldots\Big) =$$
$$= \Big(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, J_- \left(\Psi^* \left(Th_0 + \Phi h_{-1}\right) + K^* J_+ \left(\Psi h_0 + Kh_{-1}\right)\right),$$
$$\boxed{T^* \left(Th_0 + \Phi h_{-1}\right) + \Psi^* J_+ \left(\Psi h_0 + Kh_{-1}\right)}, h_1, h_2, h_3, \ldots\Big) =$$
$$= \Big(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \left(J_- \Phi^* T h_0 + J_- K^* J_+ \Psi h_0\right) + \left(J_- \Phi^* \Phi h_{-1} + J_- K^* J_+ K h_{-1}\right),$$
$$\boxed{\left(T^* T h_0 + \Psi^* J_+ \Psi h_0\right) + \left(T^* \Phi h_{-1} + \Psi^* J_+ K h_{-1}\right)}, h_1, h_2, h_3, \ldots\Big) = h.$$

Используем соотношения для узла: $(2^*), (3), (1), (2)$.

Теперь рассмотрим $U \cdot C$:

$$UCh = U\Big(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, J_- \left(\Phi^* h_0 + K^* J_+ h_1\right), \boxed{T^* h_0 + \Psi^* J_+ h_1}, h_2, h_3, \ldots\Big) =$$

$$= \Big(\dots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{T\left(T^* h_0 + \Psi^* J_+ h_1\right) + \Phi\left(J_-\left(\Phi^* h_0 + K^* J_+ h_1\right)\right)},$$
$$\Psi\left(T^* h_0 + \Psi^* J_+ h_1\right) + K\left(J_-\left(\Phi^* h_0 K^* J_+ h_1\right)\right), h_2, h_3, \dots \Big) =$$
$$= \Big(\dots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{\left(TT^* + \Phi J_- \Phi^*\right) h_0 + \left(T\Phi^* J_+ + \Phi J_- K^* J_+\right) h_1},$$
$$\left(\Psi T^* + K J_- \Phi^*\right) h_0 + \left(\Psi\Psi^* J_+ + K J_- K^* J_+\right) h_1, h_2, h_3, \dots \Big) = h.$$

Используем соотношения для узла $(4), (5), (5^*)$ (6).

Теперь докажем, что оператор U является дилатацией оператора T.

$$U h_0 = \Big(\dots, 0, 0, \boxed{T h_0}, \Psi h_0, 0, 0, \dots \Big),$$

$$U^2 h_0 = \Big(\dots, 0, 0, \boxed{T^2 h_0}, \Psi T h_0, \Psi h_0, 0, 0, \dots \Big),$$

$$U^3 h_0 = \Big(\dots, 0, 0, \boxed{T^3 h_0}, \Psi T^2 h_0, \Psi T h_0, \Psi h_0, 0, 0, \dots \Big),$$

$$U^n h_0 = \Big(\dots, 0, 0, \boxed{T^n h_0}, \Psi T^{n-1} h_0, \dots, \Psi T^2 h_0, \Psi T h_0, \Psi h_0, 0, 0, \dots \Big). \qquad (10)$$

$PU^n h_0 = T^n h_0$ ч.т.д. □

Определение 6. J-унитарная дилатация $U \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$ оператора $T \in [H, H]$ называется минимальной, если $\mathfrak{H} = \overline{span\left\{U^n H \mid n \in \mathbb{Z}\right\}}$, где $U^{-1} = JU^*J$.

Теорема 5. *Если $H_+ = \overline{\Psi H}, H_- = \overline{J_- \Phi^* H}$, то J-унитарная дилатация U является минимальной.*

Доказательство. Как и в случае J-изометрической дилатации, обозначим $\hat{H} = \overline{span\left\{U^n H \mid n \in \mathbb{Z}\right\}}$.

Надо доказать, что $\hat{H} \subset \mathfrak{H}$. Докажем, что $\mathfrak{H} \subset \hat{H}$.

Пусть $h = (\dots, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \dots) \in \mathfrak{H}$, где $h_0 \in H, h_k \in \overline{\Psi H}, k > 0$ и $h_k \in \overline{J_- \Psi^* H}$, при $k < 0$.

Используя (9), получаем:

$$U^{-1} h = \Big(\dots, h_{-2}, h_{-1}, J_-\left(\Psi^* h_0 + K^* J_+ h_1\right), \boxed{T^* h_0 + \Psi^* J_+ h_1}, h_2, h_3, \dots \Big),$$

$$U^{-1} h_0 = \Big(\dots, 0, 0, J_- \Psi^* h_0, \boxed{T^* h_0}, 0, 0, \dots \Big),$$

$$U^{-2} h_0 = \Big(\dots, 0, 0, J_- \Psi^* h_0, J_- \Psi^* T^* h_0, \boxed{T^{*2} h_0}, 0, 0, \dots \Big),$$

$$U^{-n} h_0 = \Big(\dots, 0, 0, J_- \Psi^* h_0, J_- \Psi^* T^* h_0, \dots, J_- \Psi^* T^{*n-1} h_0, \boxed{T^{*n} h_0}, 0, 0, \dots \Big).$$

Из формул для $U^n h_0$ и $U^{-n}h_0, n \geq 1$, получаем:

$$U^n h_0 - U^{n-1}Th_0 = \left(\ldots, 0, 0, \boxed{T^n h_0}, \Psi T^{n-1}h_0, \ldots, \underset{n}{\boxed{\Psi h_0}}, 0, \ldots\right) -$$

$$-\left(\ldots, 0, 0, \boxed{T^n h_0}, \Psi T^{n-1}h_0, \ldots, \Psi T h_0, \underset{n}{\boxed{0}}, 0, \ldots\right) = \left(\ldots, \boxed{0}, \ldots, 0, \underset{n}{\boxed{\Psi h_0}}, 0, 0, \ldots\right).$$

$$U^{-n}h_0 - U^{-n+1}T^*h_0 =$$

$$= \left(\ldots, 0, \underset{-n}{\boxed{J\_\Phi^* h_0}}, J\_\Phi^* T^* h_0, \ldots, J\_\Phi^* T^{*n-1}h_0, \boxed{T^{*n}h_0}, 0, 0, \ldots\right) -$$

$$-\left(\ldots, 0, 0, \underset{-n+1}{\boxed{J\_\Phi^* T^* h_0}}, \ldots, J\_\Phi^* T^{*n-1}h_0, \boxed{T^{*n}h_0}, 0, 0, \ldots\right) =$$

$$= \left(\ldots, 0, 0, \underset{-n}{\boxed{J\_\Phi^* h_0}}, 0, 0, \ldots\right).$$

Эти формулы показывают, что $\mathfrak{H} \subset \hat{H}$. □

Теорема 6. *Минимальная J-унитарная дилатация оператора $T \in [H, H]$ определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $h \in H$, тогда при $n \geq m$

$$\left[U^n h, U^m h'\right] = \left[U^{n-1}h, U^{m-1}h'\right] = \cdots = \left(JU^{n-m}h, h'\right) = \left(U^{n-m}h, Jh'\right) =$$
$$= \left(T^{n-m}h, Jh'\right) = \left[T^{n-m}h, h'\right].$$

При $n \leq m$

$$\left[U^n h, U^m h'\right] = \left(Jh, U^{m-n}h'\right) = \overline{\left(U^{m-n}h', Jh\right)} = \overline{\left(T^{m-n}h', Jh\right)} = \left(Jh, T^{m-n}h'\right)$$

и скалярное произведение не зависит от дилатации U. Поэтому мы можем построить J-унитарный изоморфизм Φ:

$\Phi\left(U^n h\right) = \left(\tilde{U}^n h\right), \forall n \in H, n \in \mathbb{Z}$, где U и $\tilde{U}$ — две минимальные J-унитарные дилатации оператора T. □

Заключение

Нами показано, что при приведении доказательств были использованы все условия (1-6) операторного узла. Кроме этого, явно построена минимальная J-унитарная дилатация узла.

Список литературы

1. Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. Сёкефальви-Надь, Ч. Фояш. — Москва: Мир, 1970. — 432 с.
   SZOKEFALVI-NAGY B., FOYASH Ch. (1970) *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space.* Moscow: Mir. 432 p.

2. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — Москва: Мир, 1979. — 592 с.
   RIESZ F., SZOKEFALVI-NAGY B. (1979) *Functional analysis.* Moscow: Mir. 592 p.

3. DAVIS Ch. (1970) J-unitary dilation of a general operators. *Mathematical Problems of Cybernetics.* Acta Sci. Math. 31, № 1–2 (1970). p. 75–86.

4. Кужель А. В. Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов / А. В. Кужель // Теория функций, функциональный анализ и их приложения / Вып. 37. — 1982. — С. 54-62.
   KUZHEL A. V. (1982) Self-adjoint and J-self-adjoint dilations of linear operators. *Function theory, functional analysis and their applications.* Vol. 37 p. 54-62.

5. TEMME D. (1995) The point spectrum of unitary dilations in krein spaces. *Mathematische Nachriehten.* p. 1–20.

6. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов / В. А. Золотарев. — Харьков: ХНУ, 2003. — 342 с.
   ZOLOTAREV V. A. (2003) *Analytic Methods of Spectral Representations of Nonself-Adjoint and Nonunitary Operators.* Kharkov University. 342.

УДК: 517.977

MSC2010: 90B50

ОДНА ЗАДАЧА ОБ ИНВЕСТИЦИЯХ С УЧЕТОМ РИСКОВ

© В. Г. Задорожний

Воронежский гос. ун-т

Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Российская Федерация

e-mail: *zador@amm.vsu.ru*

One problem of the investment, taking into account the risks.

Zadorozhniy V. G.

Abstract. We study the problem of optimal investment the initial capital into two kinds of investments in order to get the most benefit. Change in share capital is described by system of two ordinary linear nonhomogeneous differential equations with the random coefficients

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1(t,\omega)x_1 + \varepsilon_3(t,\omega),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon_2(t,\omega)x_2 + \varepsilon_4(t,\omega).$$

Here x_1, x_2 — change in share capital,$\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ - stochastic processes ω - random event, $x_1(0) + x_2(0) = 1$ - the initial share capital. You want $x_1(0), x_2(0)$ to choose so the value $I = M(x_1(1) + x_2(1))$ in was the greatest for a given level of risk $0 \le r = D(x_1(1) + x_2(1))$. Here $M(x_1(1)+x_2(1))$ denotes the mathematical expectation and $D(x_1(1)+x_2(1))$ - dispersion of the $x_1(1) + x_2(1)$.

It is assumed that stochastic processes$\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ specified characteristic functional

$$\psi(u_1,u_2,u_3,u_4) = M\exp\Big(i\int\limits_0^1 \sum_1^4 \varepsilon_j(s)u_j(s)ds\Big).$$

Here u_1, u_2, u_3, u_4 - functions of set $L_1(0,1)$ integrable on the segment [0,1] functions, i - the imaginary unit.

Let

$$y_j = y_j(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = M(x_j(t)e(u_1,u_2,u_3,u_4)), j = 1,2.$$

Note that $y(t,0,0,0,0) = Mx_j(t), j = 1,2$. For $y_j, j = 1,2$ received the deterministic equations

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -i\frac{\delta_p y_1}{\delta u_1(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta u_3(t)},$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = -i\frac{\delta_p y_2}{\delta u_2(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta u_4(t)},$$

and initial conditions

$$y_j(0,u_1,u_2,u_3,u_4) = x_{j0}\psi(u_1,u_2,u_3,u_4), j = 1,2.$$

Here $\frac{\delta_p y_1}{\delta u_1(t)}$ is the partial variational derivative.

The solution of this problem is given by

$$y_1 = x_{10}\psi(u_1 - i\chi(0,t), u_2, u_3, u_4) - i\int\limits_0^t \frac{\delta_p\psi(u_1 - i\chi(s,t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)}ds,$$

$$y_2 = x_{20}\psi(u_1, u_2 - i\chi(0,t), u_3, u_4) - i\int\limits_0^t \frac{\delta_p\psi(u_1, u_2 - i\chi(s,t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)}ds.$$

The mathematical expectation od the capital for $t = 1$ is given by

$$M(x_1(1) + x_2(1)) = x_{10}\psi(-i\chi(0,1), 0, 0, 0) + (1 - x_{10})\psi(0, -i\chi(0,1), 0, 0) -$$
$$-i\int\limits_0^1 \left(\frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,1), 0, 0, 0)}{\delta u_3(s)} + \frac{\delta_p\psi(0, -i\chi(s,1), 0, 0)}{\delta u_4(s)}\right)ds.$$

The first two moment functions of solutions are find. The resulting algorithm for determining the optimal allocation of the initial capital for a given risk. Bibl. 6.

Keywords: *Problem about investments, risks, differential equations with random coefficients, characteristic functional, variational derivative.*

Введение

Задача о вложении капитала в ценные бумаги (задача о портфеле) пользуется большой популярностью у исследователей и имеет много разновидностей (см., например, [1, 2]). За исследования рисков, связанных с вложением капитала, Г. Марковиц [3] удостоен нобелевской премии. Блэк и Шоулс [4] усовершенствовали математическую модель и методы расчета рисков в экономике и также заслужили нобелевскую премию.

В статье рассматривается математическая модель в виде системы двух обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются случайными процессами. Задача состоит в оптимальном распределении начального капитала с целью получения наибольшей выгоды в конечный заданный момент времени. Методами теории дифференциальных уравнений с вариационными производными находятся первые две моментные функции решения. При этом в явном виде находится дисперсия величины капитала в конечный момент времени и дается алгоритм нахождения оптимального распределения капитала с риском, не превосходящем заданную величину.

1. Постановка задачи

Пусть $x_1(t), x_2(t)$ - доли стоимости ценных бумаг в момент времени $t \in \mathbb{R}$, изменение которых описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1(t,\omega)x_1 + \varepsilon_3(t,\omega),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon_2(t,\omega)x_2 + \varepsilon_4(t,\omega). \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ - случайные процессы ω - случайное событие (в дальнейшем зависимость от случайного события ω в записи не отражается), $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ - баланс скоростей изменения долей поступающих и выбывающих средств, $x_1(0) + x_2(0) = 1$ - начальная доля капитала, выбранная в качестве единицы. Рассматривается задача о вкладе капитала на заданный промежуток времени, который обозначен [0,1].

Задача. Требуется выбрать $x_1(0), x_2(0)$ таким образом, чтобы величина $I = M(x_1(1) + x_2(1))$ была наибольшей при заданном уровне риска [3] $0 \le r = D(x_1(1) + x_2(1))$, где $M(x_1(1) + x_2(1))$ обозначает математическое ожидание, а $D(x_1(1) + x_2(1))$ - дисперсию величины $x_1(1) + x_2(1)$. Предполагается, что случайные процессы $\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ заданы характеристическим функционалом [5, стр. 30] $\psi(u_1,u_2,u_3,u_4) = M\exp(i\int_0^1 \sum_1^4 \varepsilon_j(s)u_j(s)ds)$. Здесь u_1,u_2,u_3,u_4 - функции из пространства $L_1(0,1)$ [6, стр. стр.315] суммируемых на отрезке [0,1] функций, i - мнимая единица. Предполагается, что реализации случайных процессов $\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ лежат в пространстве $L_\infty(0,1)$ существенно ограниченных функций [6, стр. 262] на отрезке [0,1].

Введем в рассмотрение функцию $\chi(\tau) = \chi(s,t,\tau) = sign(\tau - s)$ при τ принадлежащем отрезку $[min\{s,t\}, max\{s,t\}]$ и равную нулю при τ не принадлежащем этому отрезку. Введем обозначение $e = e(u_1,u_2,u_3,u_4) = \exp(i\int_0^1 \sum_1^4 \varepsilon_j(s)u_j(s)ds)$.

В дальнейшем используется понятие вариационной (функциональной) производной [5, стр. 13] функционала.

Пусть $y : L_1(0,1) \to \mathbb{C}, h \in L_1(0,1)$.

Определение 1. Если приращение $\Delta y(u) = y(u+h) - y(u)$ записывается в виде

$$\Delta y(u) = \int\limits_0^1 \varphi(s,u)h(s)ds + o(h),$$

где интеграл Лебега является линейным ограниченным на $L_1(0,1)$ функционалом относительно переменной h , а $o(h)$ - бесконечно малая высшего порядка относительно h, то $\varphi : [0,1] \times L_1(0,1) \to \mathbb{C}$ называется вариационной (функциональной) производной функционала y в точке u и обозначается $\frac{\delta y(u)}{\delta u(s)}$. Техника вариационного дифференцирования во многом аналогична технике традиционного дифференцирования [5].

2. Детерминированная задача

Умножив уравнения (1) на e и усреднив полученные равенства, находим

$$M(\frac{dx_1}{dt}e) = M(\varepsilon_1(t)x_1e) + M(\varepsilon_3(t)e), \tag{2}$$

$$M(\frac{dx_2}{dt}e) = M(\varepsilon_2(t)x_1e) + M(\varepsilon_4(t)e). \tag{3}$$

Введем отображения

$$y_j = y_j(t, u_1, u_2, u_3, u_4) = M(x_j(t)e(u_1, u_2, u_3, u_4)), j = 1, 2.$$

Отметим, что $y(t, 0, 0, 0, 0) = Mx_j(t), j = 1, 2$ и (формально)

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} = M(\frac{dx_j}{dt}e), \frac{\delta_p y_j}{\delta u_j(t)} = iM(\varepsilon_j(t)x_je), j = 1, 2, \frac{\delta_p \psi}{\delta u_j(t)} = iM(\varepsilon_j(t)e), j = 3, 4, \frac{\delta_p \psi}{\delta u_j(t)}$$

обозначает частную вариационную производную. Тогда уравнения (2), (3) (формально) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial t} &= -i\frac{\delta_p y_1}{\delta u_1(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta u_3(t)}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} &= -i\frac{\delta_p y_2}{\delta u_2(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta u_4(t)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Умножив начальные условия $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$, где x_{10}, x_{20} - заданные числа, на e и усреднив, получаем начальные условия для системы уравнений (4)

$$y_j(0, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{j0}\psi(u_1, u_2, u_3, u_4), j = 1, 2. \tag{5}$$

Переход от системы уравнений (1) к детерминированной задаче (4), (5) произведен формально, но это служит основанием для следующего

Определение 2. Математическим ожиданием решения системы уравнений (1) с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ называется $y_1(t, 0, 0, 0, 0), y_2(t, 0, 0, 0, 0)$, где y_1, y_2 - решение задачи (4), (5) в некоторой окрестности точки с компонентами $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$.

Отметим, что задача нахождения математического ожидания решения системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой являются случайными процессами, сведена к детерминированной задаче (4), (5).

3. Линейное неоднородное уравнение с обычной и вариационной производными

Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с обычной и вариационной производными

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a(t)\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} + b(t,u), \tag{6}$$

$$y(0,u) = y_0(u). \tag{7}$$

Здесь $t \in [0,1], a : [0,1] \to \mathbb{C}$ - заданная функция, $b : [0,1] \times L_1(0,1) \to \mathbb{C}$, $y_0 : L_1(0,1) \to \mathbb{C}$ заданы.

Теорема 1 ([5, стр. 183]). *Если a — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, существует вариационная производная $\frac{\delta y_0}{\delta u(t)}$ и частная вариационная производная $\frac{\delta_p b}{\delta u(t)}$, то задача Коши (6), (7) имеет единственное решение, в классе аналитических по переменной t функций, которое имеет вид*

$$y(t,u) = y_0(u + a\chi(0,t)) + \int_0^t b(s, u + a\chi(s,t))ds. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если функционал ψ имеет частные вариационные производные по всем переменным и вторые частные вариационные производные $\frac{\delta_p^2\psi}{\delta u_1(t)\delta u_3(\tau)}, \frac{\delta_p^2\psi}{\delta u_2(t)\delta u_4(\tau)}$, то задача (4), (5) имеет единственное решение, в классе аналитических по переменной t функций, которое записывается в виде*

$$y_1 = x_{10}\psi(u_1 - i\chi(0,t), u_2, u_3, u_4) - i\int_0^t \frac{\delta_p\psi(u_1 - i\chi(s,t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)}ds,$$

$$y_2 = x_{20}\psi(u_1, u_2 - i\chi(0,t), u_3, u_4) - i\int_0^t \frac{\delta_p\psi(u_1, u_2 - i\chi(s,t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)}ds. \tag{9}$$

Доказательство. Уравнения (4) имеют вид уравнения (6). В первом из них переменные u_2, u_4 являются параметрами, а во втором параметрами являются u_1, u_3. Используя теорему 1, по формуле (8) находим решение (9). □

4. Математическое ожидание доли капитала в конечный момент времени

Используя (9) при $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, находим выражение для математического ожидания доли капитала в момент времени t

$$M(x_1(t) + x_2(t)) = x_{10}\psi(-i\chi(0,t),0,0,0) - i\int\limits_0^t \frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,t),0,0,0)}{\delta u_3(s)}ds+$$

$$+x_{20}\psi(0,-i\chi(0,t),0,0) - i\int\limits_0^t \frac{\delta_p\psi(o,-i\chi(s,t),0,0)}{\delta u_4(s)}ds.$$

Отсюда находим при $t = 1$ математическое ожидание доли капитала в конечный момент времени

$$M(x_1(1) + x_2(1)) = x_{10}\psi(-i\chi(0,1),0,0,0) + (1 - x_{10})\psi(0,-i\chi(0,1),0,0)-$$

$$-i\int\limits_0^1 (\frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,1),0,0,0)}{\delta u_3(s)} + \frac{\delta_p\psi(0,-i\chi(s,1),0,0)}{\delta u_4(s)})ds = Ax_{10} + B, \qquad (10)$$

где

$$A = \psi(-i\chi(0,1),0,0,0) - \psi(0,-i\chi(0,1),0,0),$$

$$B = \psi(0,-i\chi(0,1),0,0) - i\int\limits_0^1 (\frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,1),0,0,0)}{\delta u_3(s)} + \frac{\delta_p\psi(0,-i\chi(s,1),0,0)}{\delta u_4(s)})ds.$$

5. Оптимальное распределение начального капитала без учета рисков

Задача без учета рисков принимает вид: требуется найти $0 \le x_{10} \le 1$, при котором выражение (10) принимает наибольшее значение.

Теорема 3. *Оптимальное распределение начального капитала без учета рисков имеет вид: Если* $A > 0$, *то* $x_{10} = 1, x_{20} = 0$ *при этом* $I = A + B$;

Если $A \le 0$, *то* $x_{10} = 0, x_{20} = 1$, *при этом* $I = B$.

Доказательство. Выражение (10) линейно зависит от x_{10}, поэтому при $A > 0$ максимум на отрезке $[0,1]$ достигается при $x_{10} = 1$ и этот максимум равен $A + B$. Если $A < 0$, то функция (10) убывающая и максимум на отрезке $[0,1]$ достигается в точке $x_{10} = 0$, при этом $I = B$. При $A = 0$ получаем $I = B$. □

Полученный результат носит довольно общий характер, нужно только знать характеристический функционал ψ. Рассмотрим конкретный функционал, определяющий гауссовы случайные процессы. Пусть характеристический функционал ψ имеет вид

$$\psi = \exp(i\int_0^1 \sum_{j=1}^4 a_j(s)u_j(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \sum_{j=1}^4 b_{jj}(s_1,s_2)u_j(s_1)u_j(s_2)ds_1ds_2 -$$

$$-\int_0^1\int_0^1 b_{12}(s_1,s_2)u_1(s_1)u_2(s_2))ds_1ds_2). \tag{11}$$

Здесь $a_j(s) = M\varepsilon_j(s), b_{jj}(s_1,s_2) = M(\varepsilon_j(s_1)\varepsilon_j(s_2)) - M(\varepsilon_j(s_1))M(\varepsilon_j(s_2)), j = 1,2,3,4.$ - ковариационные функции процессов $\varepsilon_j, j = 1,2,3,4, b_{12}(s_1,s_2) = M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_2(s_2)) - M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_2(s_2))$.

Учитывая определение функции χ, находим

$$A = \exp(\int_0^1 a_1(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2) - \exp(\int_0^1 a_2(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2). \tag{12}$$

Далее

$$\frac{\delta_p\psi(u_1,u_2,u_3,u_4)}{\delta u_3(s)} = \psi(u_1,u_2,u_3,u_4)(ia_3(s) - \int_0^1 b_{33}(s,s_2)u_3(s_2)ds_2),$$

$$\frac{\delta_p\psi(u_1,u_2,u_3,u_4)}{\delta u_4(s)} = \psi(u_1,u_2,u_3,u_4)(ia_4(s) - \int_0^1 b_{44}(s,s_2)u_4(s_2)ds_2).$$

Используя свойства функции χ, находим

$$B = \exp(\int_0^1 a_2(s)ds) + \int_0^1 [\exp(\int_s^1 a_1(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_3(s) -$$

$$-\exp(\int_s^1 a_2(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_4(s)]ds. \tag{13}$$

Поскольку экспонента является монотонно возрастающей функцией, то условие $A > 0$ равносильно неравенству

$$\int_0^1 (a_1(s) - a_2(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 (b_{11}(s_1, s_2) - b_{22}(s_1, s_2))ds_1 ds_2 > 0. \quad (14)$$

Сформулируем результат в виде

Теорема 4. *Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ заданы гауссовым характеристическим функционалом (11), то оптимальное распределение начального капитала без учета рисков имеет вид:*

Если выполнено неравенство (14), то $x_{10} = 1, x_{20} = 0$, при этом $I = A + B$;

Если (14) не выполняется, то $x_{10} = 0, x_{20} = 1$, при этом $I = B$, где A и B вычисляются по формулам (12), (13).

Отметим, что при $b_{12} = 0$ случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы. Если $b_{12} \neq 0$, то случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ статистически зависимы, при этом процессы $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ не зависят от $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и не зависят один от другого. Поскольку b_{12} не входит в выражения (12), (13), то утверждение теоремы 4 верно как для статистически независимых случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, так и для статистически зависимых.

6. Нахождение вторых моментных функций

Умножим первое из уравнений (1) на $x_1(\tau)e$ второе уравнение умножим на $x_2(\tau)e$ и запишем математические ожидания от полученных равенств

$$M(\frac{dx_j}{dt}x_j(\tau)e) = M(\varepsilon_j(t)x_j(t)x_j(\tau)e) + M(\varepsilon_{j+2}(t)x_j(\tau)e), j = 1, 2.$$

Теперь первое из уравнений системы (1) умножим на $x_2(\tau)e$, а второе умножим на $x_1(\tau)e$ и запишем математические ожидания этих равенств, получим

$$M(\frac{dx_1}{dt}x_2(\tau)e) = M(\varepsilon_1(t)x_1(t)x_2(\tau)e) + M(\varepsilon_3(t)x_2(\tau)e),$$

$$M(\frac{dx_2}{dt}x_1(\tau)e) = M(\varepsilon_2(t)x_2(t)x_1(\tau)e) + M(\varepsilon_4(t)x_1(\tau)e).$$

Введем отображения

$$z_j = z_j(t, \tau, u_1, u_2, u_3, u_4) = M(x_j(t)x_j(\tau)e), j = 1, 2,$$

$$z_3 = z_3(t, \tau, u_1, u_2, u_3, u_4) = M(x_1(t)x_2(\tau)e),$$

$$z_4 = z_3(\tau, t, u_1, u_2, u_3, u_4) = M(x_2(t)x_1(\tau)e).$$

Используя эти отображения, полученные выше уравнения (формально) записываются в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial z_j}{dt} = -i\frac{\delta_p z_j}{\delta u_j(t)} - i\frac{\delta_p y_j(\tau, u_1, u_2, u_3, u_4)}{\delta u_{j+2}(t)}, j = 1, 2,\\ \frac{\partial z_3}{dt} = -i\frac{\delta_p z_3}{\delta u_1(t)} - i\frac{\delta_p y_2(\tau, u_1, u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(t)},\\ \frac{\partial z_4}{dt} = -i\frac{\delta_p z_4}{\delta u_2(t)} - i\frac{\delta_p y_1(\tau, u_1, u_2, u_3, u_4)}{\delta u_4(t)}.\end{gathered} \tag{15}$$

Умножая начальное условие $x_1(0) = x_{10}$ на $x_{10}e$ и вычисляя математическое ожидание, находим

$$z_1(0, 0, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{10}^2\psi(u_1, u_2, u_3, u_4). \tag{16}$$

Аналогичным образом находим условия

$$\begin{gathered}z_2(0, 0, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{20}^2\psi(u_1, u_2, u_3, u_4),\\ z_j(0, 0, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{10}x_{20}\psi(u_1, u_2, u_3, u_4), j = 3, 4.\end{gathered} \tag{17}$$

Определение 3. Если z_1, z_2, z_3, z_4 - решение системы уравнений (15) с начальными условиями (16), (17), причем z_1, z_2 симметричны по переменным t, τ, то $M(x_1(t)x_1(\tau)) = z_1(t, \tau, 0, 0, 0, 0), M(x_2(t)x_2(\tau)) = z_2(t, \tau, 0, 0, 0, 0), M(x_1(t)x_2(\tau)) = z_3(t, \tau, 0, 0, 0, 0)$ называются вторыми моментными функциями решения задачи Коши (1).

Теорема 5. *Решение задачи Коши (15), (16), (17) имеет вид*

$$\begin{gathered}z_1(t, \tau, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{10}^2\psi(u_1 - i\chi(0, t) - i\chi(0, \tau), u_2, u_3, u_4)-\\ -i\int_0^\tau \frac{\delta_p y_1(0, u_1 - i\chi(s, \tau) - i\chi(0, t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)}ds - i\int_0^t \frac{\delta_p y_1(\tau, u_1 - i\chi(s, t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)}ds,\\ z_2(t, \tau, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{20}^2\psi(u_1, u_2 - i\chi(0, t) - i\chi(0, \tau), u_3, u_4)-\\ -i\int_0^\tau \frac{\delta_p y_2(0, u_1, u_2 - i\chi(s, \tau) - i\chi(0, t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)}ds - i\int_0^t \frac{\delta_p y_2(\tau, u_1, u_2 - i\chi(s, t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)}ds,\\ z_3(t, \tau, u_1, u_2, u_3, u_4) = x_{10}x_{20}\psi(u_1 - i\chi(0, t), u_2 - i\chi(0, \tau), u_3, u_4)-\\ -i\int_0^\tau \frac{\delta_p y_1(0, u_1 - i\chi(0, t), u_2 - i\chi(s, \tau), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)}ds - i\int_0^t \frac{\delta_p y_2(\tau, u_1 - i\chi(s, t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)}ds =\\ = z_4(\tau, t, u_1, u_2, u_3, u_4).\end{gathered}$$

Доказательство. Полагая в уравнениях (15) $\tau = 0$, получаем систему уравнений с начальными условиями (16), (17). Это система четырех задач Коши вида (6), (7).

Используя формулу (8), находим (используя обозначение $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$)

$$z_1(t,0,u) = x_{10}^2 \psi(u_1 - i\chi(0,t), u_2, u_3, u_4) - i \int\limits_0^t \frac{\delta_p y_1(0, u_1 - i\chi(s,t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)} ds,$$

$$z_2(t,0,u) = x_{20}^2 \psi(u_1, u_2 - i\chi(0,t), u_3, u_4) - i \int\limits_0^t \frac{\delta_p y_2(0, u_1, u_2 - i\chi(s,t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)} ds,$$

$$z_3(t,0,u) = x_{10}x_{20} \psi(u_1 - i\chi(0,t), u_2, u_3, u_4) - i \int\limits_0^t \frac{\delta_p y_2(0, u_1 - i\chi(s,t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)} ds,$$

$$z_4(t,0,u) = x_{10}x_{20} \psi(u_1, u_2 - i\chi(0,t), u_3, u_4) - i \int\limits_0^t \frac{\delta_p y_1(0, u_1, u_2 - i\chi(s,t), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)} ds.$$

Из определения z_1, z_2 следует их симметричность по переменным t, τ , тогда

$$z_1(0,\tau,u) = x_{10}^2 \psi(u_1 - i\chi(0,\tau), u_2, u_3, u_4) - i \int\limits_0^\tau \frac{\delta_p y_1(0, u_1 - i\chi(s,\tau), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)} ds,$$

$$z_2(0,\tau,u) = x_{20}^2 \psi(u_1, u_2 - i\chi(0,\tau), u_3, u_4) - i \int\limits_0^\tau \frac{\delta_p y_2(0, u_1, u_2 - i\chi(s,\tau), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)} ds,$$

$$z_3(0,\tau,u) = z_4(\tau,0,u) = x_{10}x_{20} \psi(u_1, u_2 - i\chi(0,\tau), u_3, u_4) -$$
$$- i \int\limits_0^\tau \frac{\delta_p y_1(0, u_1, u_2 - i\chi(s,\tau), u_3, u_4)}{\delta u_4(s)} ds.$$

Мы получили начальные условия для системы уравнений (15). Все уравнения системы (15) имеют вид уравнения (6). Тогда все решения находятся по формуле (8) и имеют указанный в теореме вид. □

Нам потребуются следующие выражения

$$\frac{\delta y_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s)} = x_{10} \psi(u_1 - i\chi(0,t), u_2, u_3, u_4)(i a_3(s) - \int\limits_0^t b_{33}(s, s_2) u_3(s_2) ds_2) -$$
$$- i \int\limits_0^t \frac{\delta_p^2 \psi(u_1 - i\chi(s_1,t), u_2, u_3, u_4)}{\delta u_3(s_1) \delta u_3(s)} ds_1,$$

$$\frac{\delta y_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4)}{\delta u_4(s)} = x_{20} \psi(u_1, u_2 - i\chi(0,t), u_3, u_4)(i a_4(s) - \int\limits_0^t b_{44}(s, s_2) u_4(s_2) ds_2) -$$

$$-i\int\limits_0^t \frac{\delta_p^2\psi(u_1,u_2-i\chi(s_1,t),u_3,u_4)}{\delta u_4(s_1)\delta u_4(s)}ds_1,$$

$$\frac{\delta y_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4)}{\delta u_4(s)} = x_{10}\psi(u_1-i\chi(0,t),u_2,u_3,u_4)(ia_4(s)-\int\limits_0^t b_{44}(s,s_2)u_4(s_2)ds_2)-$$

$$-i\int\limits_0^t \frac{\delta_p^2\psi(u_1-i\chi(s_1,t),u_2,u_3,u_4)}{\delta u_3(s_1)\delta u_4(s)}ds_1,$$

$$\frac{\delta y_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4)}{\delta u_3(s)} = x_{20}\psi(u_1,u_2-i\chi(0,t),u_3,u_4)(ia_3(s)-\int\limits_0^t b_{33}(s,s_2)u_3(s_2)ds_2)-$$

$$-i\int\limits_0^t \frac{\delta_p^2\psi(u_1,u_2-i\chi(s_1,t),u_3,u_4)}{\delta u_4(s_1)\delta u_3(s)}ds_1,$$

$$\frac{\delta_p\psi(u_1-i\chi(s_1,t),u_2,u_3,u_4)}{\delta u_3(s_1)} = \psi(u_1-i\chi(s_1,t),u_2,u_3,u_4)(ia_3(s_1)+\int\limits_0^1 b_{33}(s_1,s_2)u_3(s_2)ds_2),$$

$$\frac{\delta_p^2\psi(u_1-i\chi(s_1,t),u_2,u_3,u_4)}{\delta u_3(s_1)\delta u_3(s)} =$$

$$=\psi(u_1-i\chi(s_1,t),u_2,u_3,u_4)[(ia_3(s)+\int\limits_0^1 b_{33}(s,s_2)u_3(s_2)ds_2)(ia_3(s_1)+$$

$$+\int\limits_0^1 b_{33}(s_1,s_2)u_3(s_2)ds_2)+b_{33}(s_1,s)].$$

Из выражений для z_1, z_2, z_3 при $t=\tau=1, u_1=u_2=u_3=u_4=0$ находим

$$M(x_1^2(1)) = x_{10}^2\psi(-2i\chi(0,1),0,0,0)+x_{10}\int\limits_0^1 a_3(s)\psi(-i\chi(s,1)-i\chi(0,1),0,0,0)ds+$$

$$+x_{10}\int\limits_0^1 \psi(-i\chi(s,1)-\chi(0,1),0,0,0)a_3(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \psi(-i\chi(s_1,1)-i\chi(s,1),0,0,0)(a_3(s_1)a_3(s)-b_{33}(s_1,s))ds_1ds.$$

$$M(x_2^2(1)) = x_{20}^2\psi(0,-2i\chi(0,1),0,0) + x_{20}\int\limits_0^1 a_4(s)\psi(0,-i\chi(s,1)-i\chi(0,1),0,0)ds+$$

$$+x_{20}\int\limits_0^1 \psi(0,-i\chi(s,1)-\chi(0,1),0,0)a_4(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \psi(0,-i\chi(s_1,1)-i\chi(s,1),0,0)(a_4(s_1)a_4(s)-b_{44}(s_1,s))ds_1ds.$$

$$M(x_1(1)x_2(1)) = x_{10}x_{20}\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1),0,0)+$$

$$+x_{10}\int\limits_0^1 a_4(s)\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(s,1),0,0)ds + x_{20}\int\limits_0^1 \psi(-i\chi(s,1),-\chi(0,1),0,0)a_3(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \psi(-i\chi(s,1),-i\chi(s_1,1),0,0)a_3(s)a_4(s_1)ds_1ds.$$

7. Вычисление дисперсии $D(x_1(1)+x_2(1))$

Теперь все готово для нахождения дисперсии $D(x_1(1)+x_2(1))$. Сначала отметим, что

$$D(x_1(1)+x_2(1)) = M(x_1(1)+x_2(1))^2 - M^2(x_1(1)+x_2(1)) =$$

$$= M(x_1^2(1))+M(x_2^2(1))+2M(x_1(1)x_2(1))-M^2(x_1(1))-2M(x_1(1))M(x_2(1))-M^2x_2(1) =$$

$$= D(x_1(1)) + D(x_2(1)) + 2[M(x_1(1)x_2(1)) - M(x_1(1))M(x_2(1))]. \tag{18}$$

Теорема 6. *Если случайные процессы $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ заданы характеристическим функционалом (11), то дисперсия $D(x_1(1)+x_2(1))$ вычисляется по формуле*

$$D(x_1(1)+x_2(1)) = Cx_{10}^2 + 2Ex_{10} + F,$$

где

$$C = \psi(-2i\chi(0,1),0,0,0) + \psi(0,-2i\chi(0,1),0,0) - 2\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1),0,0) - A^2,$$

$$E = \int\limits_0^1 \psi(-i\chi(s,1)-i\chi(0,1),0,0,0)a_3(s)ds - \psi(0,-2i\chi(0,1),0,0)-$$

$$-\int\limits_0^1 \psi(0,-\chi(0,1)-i\chi(s,1),0,0)a_4(s)ds + \psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1),0,0)+$$

$$+\int_0^1 \psi(-\chi(0,1),-i\chi(s,1),0,0)a_4(s)ds-\int_0^1 \psi(-i\chi(s,1),-\chi(0,1),0,0)a_3(s)ds-AB,$$

$$F=\psi(0,-2i\chi(0,1),0,0)+2\int_0^1 \psi(0,-\chi(0,1)-i\chi(s,1),0,0)a_4(s)ds+$$

$$+2\int_0^1 \psi(-i\chi(s,1),-\chi(0,1),0,0)a_3(s)ds-$$

$$-\int_0^1\int_0^1 \psi(-i\chi(s_1,1)-\chi(s,1),0,0,0)(a_3(s_1)a_3(s)-b_{33}(s_1,s))ds_1ds-$$

$$-\int_0^1\int_0^1 \psi(0,-i\chi(s_1,1)-\chi(s,1),0,0)(a_4(s_1)a_4(s)-b_{44}(s,s_1))ds_1ds-$$

$$-2\int_0^1\int_0^1 \psi(-i\chi(s,1),-\chi(s_1,1),0,0)a_3(s)a_4(s_1)dsds_1-B^2.$$

Доказательство. Подставляя полученные выше выражения $M(x_1^2(1)), M(x_2^2(1)), M(x_1(1)x_2(1))$ в формулу (18) и $x_{20}=1-x_{10}$, получаем утверждение теоремы. □

8. Оптимальное распределение начального капитала с учетом рисков

Г. Марковиц называет риском дисперсию $D(x_1(1)+x_2(1))$. Пусть γ - минимальное значение функции $Cx_{10}^2+2Ex_{10}+F$, на отрезке $0\le x_{10}\le 1$.

Пусть задана величина риска $r>0$. Задача состоит в выборе $0\le x_{10}\le 1$, при котором $I=M(x_1(1)+x_2(1))$ принимает наибольшее значение при условии, что риск не превосходит величину r.

Теорема 7. *Пусть задан риск $r>0$ и случайные процессы $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ заданы характеристическим функционалом (11), тогда:*

1. Если $\gamma\le r$, то задача имеет решение, в противном случае решение не существует.

2. Если $A>0, C+2E+F\le r$, то $x_{10}=1, x_{20}=0$, при этом

$$I=A+B=\psi(-i\chi(0,1),0,0,0)-\int_0^1\left(\frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,1),0,0,0)}{\delta u_3(s)}-\frac{\delta_p\psi(0,-i\chi(s,1),0,0)}{\delta u_4(s)}\right)ds.$$

3. Если $A<0, F\le r$, то $x_{10}=0, x_{20}=1$, при этом

$$I=B=\psi(0,-i\chi(0,1),0,0)-\int\limits_0^1\left(\frac{\delta_p\psi(-i\chi(s,1),0,0,0)}{\delta u_3(s)}-\frac{\delta_p\psi(0,-i\chi(s,1),0,0)}{\delta u_4(s)}\right)ds.$$

4. Если не выполняются условия 2, 3, то при $A>0$ величина x_{10} равна большему из чисел $\frac{-E\pm(E^2-C(F-r))^{0,5}}{C}$, лежащему в интервале $(0,1)$, при этом $I=Ax_{10}+B$, если же $A<0$, то x_{10} равно меньшему из чисел $\frac{-E\pm(E^2-C(F-r))^{0,5}}{C}$, лежащему в интервале $(0,1)$, при этом $I=Ax_{10}+B$.

Доказательство. Если $\gamma>r$, то риск всегда больше заданной величины $r>0$ и задача не имеет решения, в противном случае минимальное значение дисперсии γ не превосходит $r>0$ и задача имеет решение. В случаях 2, 3 величина будет наибольшей и риск не превосходит заданную величину $r>0$. Если эти два условия не выполняются, максимум I достигается при максимальном значении риска $r>0$, т.е. x_{10} должно удовлетворять уравнению $Cx_{10}^2+2Ex_{10}+F-r=0$. При $A>0$ нужно выбрать больший корень (если два корня) в интервале $(0,1)$, а при $A<0$ нужно выбрать меньший корень в интервале $(0,1)$. $\square$

Для практического применения теоремы 7 нужно вычислять коэффициенты A,B,C,E,F. Первые два представлены формулами (12), (13). Используя свойства функции χ, можно выразить коэффициенты C,E,F через коэффициенты a_j, b_{jk} случайного процесса ψ.

$$C=\exp(2\int\limits_0^1 a_1(s)ds+2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)+\exp(2\int\limits_0^1 a_2(s)ds+2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)-$$

$$-2\exp(\int\limits_0^1(a_1(s)+a_2(s))ds+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(b_{11}(s_1,s_2)+b_{22}(s_1,s_2)+2b_{12}(s_1,s_2))ds_1ds_2)-A^2,$$

$$E=\int\limits_0^1\exp(\int\limits_s^1 a_1(s_1)ds_1+\int\limits_0^1 a_1(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int\limits_s^1\int\limits_s^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_s^1\int\limits_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_3(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^1\exp(\int\limits_s^1 a_2(s_1)ds_1+\int\limits_0^1 a_2(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int\limits_s^1\int\limits_s^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_s^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_4(s)ds-\exp(2\int_0^1 a_2(s)ds+2\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)+$$

$$+\exp(\int_0^1(a_1(s)+a_2(s))ds+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1(b_{11}(s_1,s_2)+b_{22}(s_1,s_2)+2b_{12}(s_1,s_2))ds_1ds_2)+$$

$$+\int_0^1\exp(\int_0^1 a_1(s_1)ds_1+\int_s^1 a_2(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^1\int_s^1 b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_4(s)ds-$$

$$-\int_0^1\exp(\int_s^1 a_1(s_1)ds_1+\int_0^1 a_2(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\int_0^1\int_s^1 b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_3(s)ds-AB,$$

$$F=\exp(2\int_0^1 a_2(s)ds+2\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)+$$

$$+2\int_0^1\exp(\int_0^1 a_2(s_1)ds_1+\int_s^1 a_2(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^1\int_s^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_4(s)ds+$$

$$+2\int_0^1\exp(\int_s^1 a_1(s_1)ds_1+\int_0^1 a_2(s_1)ds_1+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\int_0^1\int_s^1 b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2)a_3(s)ds-B^2-$$

$$-\int_0^1\int_0^1\exp(\int_{s_1}^1 a_1(\xi)d\xi+\int_s^1 a_1(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_{s_1}^1\int_{s_1}^1 b_{11}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{11}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+\int_s^1\int_{s_1}^1 b_{11}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2)(a_3(s_1)a_3(s)-b_{33}(s_1,s))ds_1 ds-$$

$$-\int_0^1\int_0^1 \exp(\int_{s_1}^1 a_2(\xi)d\xi+\int_s^1 a_2(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_{s_1}^1\int_{s_1}^1 b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+\int_s^1\int_{s_1}^1 b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2)(a_4(s_1)a_4(s)-b_{44}(s_1,s))ds_1 ds-$$

$$-2\int_0^1\int_0^1 \exp(\int_s^1 a_1(\xi)d\xi+\int_{s_1}^1 a_2(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_s^1\int_s^1 b_{11}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{s_1}^1\int_{s_1}^1 b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2+\int_s^1\int_{s_1}^1 b_{12}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2)a_3(s)a_4(s_1)ds ds_1.$$

Замечание 1. Коэффициенты C, E, F зависят от b_{12}, поэтому оптимальное распределение начального капитала с учетом риска зависит от корреляционной связи между коэффициентами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Заключение

Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ заданы характеристическим функционалом (11), то все определяется заданием коэффициентов $a_j, b_{jj}, j = 1, 2, 3, 4$ и коэффициента b_{12}. Многие выражения в представлении коэффициентов A, B, C, E, F повторяются, это облегчает их вычисление. Поскольку величина капитала вычисляется в долях и отрезок времени выбран $[0, 1]$, то расчеты можно проводить как на большом промежутке времени, так и оперативно (за малые промежутки времени). При $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ из выражений для z_1, z_2, z_3 получаются формулы для вторых моментных функций решения системы (1). Результаты могут быть обобщены и для других характеристических функционалов. Все расчеты существенно упрощаются если $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$.

Список литературы

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. — М.: Фазис, 1998. — 416 с.

SCIRYAEV, A. (1998) *Fondations of stochastic financial mathematics*. Moscow: Fasis. 416 p.

2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения / Б. Оксендаль. — М.: Мир, 2003. — 406 с.

   OKSENDAL, B. (1998) *Stochastic Differential Equations.* Springer.

3. MARKOWITZ, H. M. (1976) *Portfolio selection. Efficient diversification of investments.* Yale university press. 1. p. 68-96.

4. BLACK, F. M. (1973) *The pricing of options and corporate liabilities.* Political Economy. 81.210 p.

5. Задорожний В. Г. Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. — М.: Ижевск. РХД, 2006. — 316 с.

   ZADOROZHNIY, V. (2006) *Methods of variational analysis.* Moscow: Izhevsk RCHD. 316 p.

6. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: ИЛ. , 1962. — 895 с.

   DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. (1962) *Linear operators.* New York, London IP. 895 p.

УДК: 517.988.28

MSC2010: 53B06

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ СИМПЛЕКСАМ

© Н. С. Иванисенко

Донецкий национальный университет
факультет математики и информационных технологий
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001, Украина
e-mail: *Ivanisenko.n.s@gmail.com*

Uniqueness theorem for a functions with zero integrals over four-dimensional simpleces.

Ivanisenko N. S.

Abstract. Throughout in this paper we assume that A is a compact set in $\mathbb{R}^n, n > 2$, of positive Lebesgue measure. As usual we denote by $\mathbf{M}(n)$ the group of Euclidean motions in $\mathbb{R}^n$. Under $\mathfrak{P}(A, B)$ we mean the class of functions $L_{loc}(B)$ such that the relation $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0, \quad \forall\lambda \in M(n)$ is valid for any $\lambda \in Mot(\overline{A}, B)$.

We say that a set A has the Pompeiu property if the only function $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ satisfying $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ for any $\lambda \in M(n)$ is $f = 0$. One says also that such a set A is a Pompeiu set.

The Pompeiu problem in its original form is formulated as follows: "under what conditions does a set A have the Pompeiu property?" This problem got its name from the Romanian mathematician D. Pompeiu who was the first to consider the relation $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$. A lot of researches were engaged in this problem but it still remains open.

Some sufficient conditions for $A \in Pomp(\mathbb{R}^n)$ to meet were obtained by Pompeiu (1929), Nicolesco (1929), Christ (1943), Ilief (1946) and Chakalov (1949). Also, for many concrete cases there are a number of known results with the help of which one can determine whether A is a Pompeiu's set or not.

In the case where a set does not have the Pompeiu property, the presence of a non-zero function with the condition $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ for any $\lambda \in M(n)$ makes it possible to get non-trivial estimates of density of laying an arbitrary compact in $\mathbb{R}^n$ sets of the form $\lambda A, \ \lambda \in M(n)$. Such estimates were obtained by Kotlyar. If A has the Pompeiu property then the Wiener theorem makes it possible to approximate indicators of sets of the type $\lambda A, \ \lambda \in \mathbf{M}(n)$ by linear combinations in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

A local version of Pompeiu's problem was obtained by V.V. Volchkov in 1998: for a given set A, find the $\mathscr{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$ and investigate when the value $R(A)$ is reached, i.e., $A \subset \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_r)$ whenever $r = \mathscr{R}(A)$.

In this paper we investigate the questions concerning the local version of Pompeiu's problem. We consider the simplex $A = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4\}$ with

the vertices $z_0(0,0,0,0)$, $z_1(1,0,0,0)$, $z_2(0,1,0,0)$, $z_3(0,0,1,0)$, $z_4(0,0,0,1)$. Let $r^*(A)$ be the radius of the smallest closed ball containing the simplex closure, $r^*(A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Our main result is the uniqueness theorem which implies that any locally integrable function with zero integrals over the simplexs and zero in the ball of radius r $\quad (r > \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{2})$ is equal to zero in the ball of radius $R > r^*$.

Theorem 1 (The uniqueness theorem)**.** *Let* $\frac{\sqrt{3}}{2} < R < 1$ *and a function* $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$*. Let also* $f = 0$ *in the ball* $\mathbb{B}_r$ *then* $f = 0$ *in* $\mathbb{B}_R$ *for some* $r > \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{2}$.

Earlier there were obtained results similar to Stokes's formula for this simplex that allow to express the integral of some differential operator acting on a given function through its values over subsets of the simplex boundary of lower dimension. In particular, one can do it in the case when these subsets are vertexes and edges of the simplex considered before.

To prove the main result, we use given theorems as well as theorems obtained by V.V. Volchkov. Also a standard method of smoothing of functions is used.

The results can be used in the approximation theory and in the complex analysis (in particular, one can get a new version of Morera's theorem for analytic functions).

Keywords: *a local version of Pompeiu's problem, Pompeiu's radius, locally integrable functions, four-dimensional simplex, functions with zero integrals over sets*

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ - вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ - группа изометрий $\mathbb{R}^n$. Для компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и области $B \subset \mathbb{R}^n$, обозначим через $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ - часть группы движений, оставляющая A внутри B, $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ - шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в области B (будем обозначать $A \in \mathrm{Pomp}(B)$), если всякая локально суммируемая функция $(f \in L_{loc}(B))$, для которой

$$\int\limits_{\lambda A} f(x)dx = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathrm{Mot}(A, B) \tag{1}$$

равна нулю почти всюду в B. Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A изучалась многими авторами. В работах [1, 2] Вильямс получил результаты, из которых следует, что если граница множества A липшицева, гомеоморфна сфере, но не вещественно аналитическая, то $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, является A множеством Помпейю или нет [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Большой интерес представляют "локальные"варианты проблемы Помпейю: например, когда функция f задана в шаре $\mathbb{B}_R \subset \mathbb{R}^n$ и выполнено условие (1) для всех $\lambda A \subset \mathbb{B}_R$. В данном случае следует для широкого класса множеств A, что $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, если размеры множества $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с множеством A (см. [13]). В связи с этим возникает задача о нахождении минимального радиуса $\mathscr{R} = \mathscr{R}(A)$ шара $\mathbb{B}_R$ с этим свойством и в работе [14] Волчковым В.В. была поставлена следующая проблема.

Проблема 1 (4.1.1 из [14], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathscr{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathscr{R}(A)$ будем называть радиусом Помпейю. Даже на плоскости $\mathbb{R}^2$ не каждое множество имеет свойство Помпейю, примером такого множества является шар. Следует заметить, что не для всех множеств, которые обладают указанным свойством возможно получить точное значение радиуса Помпейю. Таким образом, кроме точного значения величины $\mathscr{R}(A)$, например, для следующих множеств A : в [14] для полушара в $\mathbb{R}^n$ радиус $\mathscr{R}(A) = \sqrt{5}/2$, в [15] для треугольника Рело $\mathscr{R}(A) = 1$, в [16] для замыкания разности двух треугольников: OAB - правильного со стороной равной 1 и равнобедренного CAB с высотой h, имеющих общее основание (то есть $OA = OB = AB = 1, \quad CA = CB, \quad OC = \sqrt{3}/2 - h \quad$ при $\quad h \in (0; \sqrt{3}/2)$), радиус Помпейю равен $\mathscr{R}(A) = \sqrt{3}/2 - h$; для некоторых множеств A имеется ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathscr{R}(A)$, которые получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем [13, 17], а также В.В. Волчковым [14]. В работах [18, 19, 20] содержится наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающим локальные варианты этой проблемы.

В данной работе рассматриваемое множество является четырехмерным симплексом $A = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4\}$ с вершинами $z_0(0,0,0,0), z_1(1,0,0,0), z_2(0,1,0,0), z_3(0,0,1,0), \quad z_4(0,0,0,1)$. Получена теорема единственности для ненулевых функций с нулевыми интегралами по данному симплексу.

1. Вспомогательные утверждения

В основном в данной работе рассматривается четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$ четверки чисел $(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ с евклидовой нормой $|(x_1, x_2, x_3, x_4)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, как обычно $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Лапласа. Учитывая, что в работе изучаются функции с нулевыми интегралами по некоторым множествам, под $\mathfrak{P}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in Mot(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^m = \mathfrak{P}(A,B) \cap C^m(B), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{P}^\infty(A,B) = \mathfrak{P}(A,B) \cap C^\infty(B)$ и $\mathfrak{P}_0^\infty(A,B)$ - класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A,B)$.

Введем обозначение для множеств, описывающих некоторые допустимые положения вершин симплекса A при различных характерных движениях его в шаре $\mathbb{B}_R$. Для $R > r^*(A)$ (r^* - радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего $\overline{A}$) определим $\mathscr{U}(R) = \{z = \lambda z_j : \lambda \in Mot(A, \mathbb{B}_R), j = 0,1,2,3,4\}$. Отметим, что непосредственно из определений следует, что введенное множество инвариантно относительно поворотов вокруг начала координат, то есть обладает шаровой симметрией. Это говорит о том, что далее повороты рассматривать не имеет смысла. Поскольку сдвиг непрерывное преобразование, следовательно, если некоторыми сдвигами, не выводящими за шар, можно достичь некоторой вершиной двух положений, то этой же вершиной можно достичь и промежуточных положений. Таким образом, приходим к заключению, что введенные множества являются некоторыми шарами и шаровыми слоями.

Сформулируем результат, полученный ранее, который содержит информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по множеству A от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в вершинах симплекса z_0, z_1, z_2, z_3, z_4.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathbb{C}^{10}(A)$ выполняется следующее равенство:*

$$\int_A (Df)(x)dx = \sum_{i=0}^{4} (q_i^* f)(z_i),$$

где $q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad q_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad q_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad q_4 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3},$
$q_5 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad q_6 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad q_7 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad q_8 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad q_9 = \frac{\partial}{\partial x_3},$
$q_{10} = \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad D = \prod_{i=0}^{10} q_i,$
$q_1^* = q_2q_3[q_5q_7q_8(q_9 - q_6) + q_4q_7(q_5q_6 - q_8q_9)] + q_1(q_2q_4[q_7q_8q_9 - q_3q_5q_6] - q_3q_5q_7q_8[q_9 - q_6]),$
$q_2^* = q_2q_3(q_5q_7q_8(q_6 - q_9) + q_4q_7(q_8q_9 - q_5q_6)), \quad q_3^* = q_1q_3q_5q_4q_8(q_9 - q_6), \quad q_4^* = -q_1q_2q_4q_7q_8q_9.$

Используя данную теорему и теорему 4.3.2. из [14], получим

Лемма 1. *Пусть $R > r^*$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(A(h), \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathscr{U}(R)$.*

Обозначим ребро симплекса z_0z_1 через $L_{0,1} = \{(t,0,0,0)$, ребро z_0z_2 через $L_{0,2} = \{0,t,0,0)\}$, ребро z_0z_3 через $L_{0,3} = \{(0,0,t,0)\}$, ребро z_0z_4 через $L_{0,4} = \{(0,0,0,t)\}$, ребро z_1z_2 через $L_{1,2} = \{(t, 1-t, 0, 0)\}$, ребро z_1z_3 через $L_{1,3} = \{(t, 0, 1-t, 0)\}$, ребро z_1z_4 через $L_{1,4} = \{(t,0,0,1-t)\}$, ребро z_2z_3 через

$L_{2,3} = \{(0,t,1-t,0)\}$, ребро z_2z_4 через $L_{2,4} = \{(0,t,0,1-t)\}$, ребро z_3z_4 через $L_{3,4} = \{(0,0,t,1-t)\}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$; $\mathrm{Sh}(A,B) = \{w \in \mathbb{R}^4 \colon A + w \subset B\}$. Сформулируем результат, который содержит информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по множеству A от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в ребрах симплекса $z_0z_1, z_0z_2, z_0z_3, z_0z_4, z_1z_2, z_1z_3, z_1z_4, z_2z_3, z_2z_4, z_3z_4$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathbb{C}^9(A)$ *и* $E := \{(l,k) : l = \overline{0,3}, \quad k = \overline{1,4}, \quad l < k\}$. *Тогда следующая формула имеет место*

$$\int\limits_{\mathbf{S}_4} (H_{l,k}f)(x)dx = H^*_{l,k} + q^{**}_{l,k} \quad \forall l,k \in E.$$

Где $P = \prod_{i=0}^{6} q_i$, $D_1 = \prod_{i=2}^{10} q_i$, $p_1 = \prod_{i=2}^{6} q_i$; $\quad D_2 = \prod_{i=1,i\neq 2}^{10} q_i$, $\quad p_2 = \prod_{i=1,i\neq 2}^{6} q_i$;
$D_3 = \prod_{i=1,i\neq 3}^{10} q_i$, $\quad p_3 = \prod_{i=1,i\neq 3}^{6} q_i$; $\quad D_4 = \prod_{i=1,i\neq 4}^{10} q_i$, $\quad p_4 = \prod_{i=1,i\neq 4}^{6} q_i$;
$D_5 = \prod_{i=1,i\neq 5}^{10} q_i$, $\quad p_5 = \prod_{i=1,i\neq 5}^{6} q_i$; $\quad D_6 = \prod_{i=1,i\neq 5}^{10} q_i$, $\quad p_6 = \prod_{i=1}^{5} q_i$;
$D_7 = \prod_{i=1,i\neq 7}^{10} q_i$, $\quad D_8 = \prod_{i=1,i\neq 8}^{10} q_i$, $\quad D_9 = \prod_{i=1,i\neq 9}^{10} q_i$, $\quad D_{10} = \prod_{i=1}^{9} q_i$;
$H_{0,1} = D_7$, $\quad H_{0,2} = D_8$, $\quad H_{0,3} = D_9$, $\quad H_{0,4} = -D_{10}$,
$H^*_{0,1} = \int_0^1 (-Pf)(x_1,0,0,0)dx_1$, $\quad H^*_{0,2} = \int_0^1 (-Pf)(0,x_2,0,0)dx_2$,
$H^*_{0,3} = \int_0^1 (-Pf)(0,0,x_3,0)dx_3$, $\quad H^*_{0,4} = \int_0^1 (Pf)(0,0,0,x_1)dx_4$,
$h_{0,1(0)} = q_2q_3[q_5q_8(q_9-q_6) + q_4(q_5q_6 - q_8q_9)] + q_1q_8[q_3q_5(q_6-q_9) + q_2q_4q_9]$,
$h_{0,1(2)} = -q_2q_3[q_5q_8(q_9-q_6) + q_4(q_5q_6-q_8q_9)]$, $\quad h_{0,1(3)} = q_1q_3q_5q_8(q_9-q_6)$,
$h_{0,1(4)} = -q_1q_2q_4q_8q_9$;
$h_{0,2(1)} = q_2q_3q_7[q_5(q_9-q_6) - q_4q_9] + q_1q_7[q_3q_5(q_6-q_9) + q_2q_4q_9] - p_1$,
$h_{0,2(2)} = q_2q_3[q_5q_7(q_6-q_9) + q_4(q_7q_9 - q_5q_6)]$, $\quad h_{0,2(3)} = q_1q_3q_5q_7(q_9-q_6)$,
$h_{0,2(4)} = -q_1q_2q_4q_7q_9$;
$h_{0,3(1)} = q_2q_3q_7[q_5(q_8-q_6) - q_4q_8] + q_1[q_3q_5q_7(q_6-q_8) + q_4(q_2q_7q_8 + q_3q_5q_6)]$,
$h_{0,3(2)} = q_2q_3q_7[q_5(q_6-q_8) + q_4q_8]$, $\quad h_{0,3(3)} = q_1q_3q_5[q_7(q_8-q_6) - q_4q_6]$,
$h_{0,3(4)} = -q_1q_2q_4q_7q_8$;
$h_{0,4(1)} = q_2q_3q_7[q_4(q_8+q_6) - q_5q_8] - q_1q_2q_4[q_7(q_8+q_6) + q_5q_6] + q_1q_3q_5q_7q_8$,
$h_{0,4(2)} = q_2q_3q_7[q_5q_8 - q_4(q_6+q_8)]$, $\quad h_{0,4(3)} = -q_1q_3q_5q_7q_8$,
$h_{0,4(4)} = q_4q_7(q_8+q_6) + p_3$;
$H_{1,2} = D_1$, $\quad H_{1,3} = D_2$, $\quad H_{1,4} = D_3$, $\quad H_{2,3} = D_4$, $\quad H_{2,4} = D_5, H_{3,4} = D_6$,
$H^*_{1,2} = \int_0^1 (q_2q_3[q_5q_7q_8(q_9-q_6) + q_4(q_5q_6 - q_7q_8q_9)])(f)(x_1, 1-x_1, 0, 0)dx_1$
$h_{1,2(0)} = -p_1$, $\quad h_{1,2(1)} = q_2q_4[q_7q_8q_9 - q_3q_5q_6] - q_3q_5q_7q_8[q_9-q_6]$,
$h_{1,2(3)} = q_2q_3q_4q_5q_6f)(z_0) + (q_3q_5q_7q_8[q_9-q_6]$, $\quad h_{1,2(4)} = -q_2q_4q_7q_8q_9$;

$H^*_{1,3}=\int_0^1 (q_1q_3q_5q_7q_8(q_6-q_9))(f)(x_1,0,1-x_1,0)dx_1, \quad h_{1,3(0)}=p_2,$
$h_{1,3(1)}=q_3[q_5q_7q_8(q_9-q_6)+q_4q_7(q_5q_6-q_8q_9)]+q_1q_4(q_7q_8q_9-q_3q_5q_6),$
$h_{1,3(2)}=-q_3[q_5q_7q_8(q_9-q_6)+q_4q_7(q_5q_6-q_8q_9)], \quad h_{1,3(4)}=-q_1q_4q_7q_8q_9;$
$H^*_{1,4}=\int_0^1 (q_1q_2q_4q_7q_8q_9f)(x_1,0,0,1-x_1)dx_1, \quad h_{1,4(0)}=p_3,$
$h_{1,4(1)}=q_2[q_5q_7q_8(q_9-q_6)-q_4q_7(q_8q_9-q_5q_6)]-q_1[q_5q_7q_8(q_9-q_6)-q_2q_4q_6],$
$h_{1,4(2)}=q_2q_7[q_5q_8(q_6-q_9)+q_4(q_8q_9-q_5q_6)], \quad h_{1,4(3)}=q_1q_5q_7q_8(q_9-q_6);$
$H^*_{2,3}=\int_0^1 (q_3q_5q_7q_8(q_6-q_9)f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2, \quad h_{2,3(0)}=p_4,$
$h_{2,3(1)}=q_3q_5q_7q_8(q_9-q_6)+q_2q_3q_7(q_5q_6-q_8q_9)+q_1q_2(q_7q_8q_9-q_5q_6),$
$h_{2,3(2)}=q_3q_5q_7q_8(q_6-q_9)+q_2q_3q_7(q_8q_9-q_5q_6), \quad h_{2,3(4)}=-q_1q_2q_7q_8q_9;$
$H^*_{2,4}=\int_0^1 (q_1q_2q_4q_7q_8q_9f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2, \quad h_{2,4(0)}=p_5,$
$h_{2,4(1)}=q_3q_7q_8(q_9-q_6)(q_2-q_1)-q_2q_4(q_7q_8q_9+q_3q_6q_7+q_1q_3q_6),$
$h_{2,4(2)}=q_2[q_3q_7q_8(q_6-q_9)+q_4q_7(q_8q_9-q_3q_6)], \quad h_{2,4(3)}=q_1q_3q_7q_8(q_9-q_6);$
$H^*_{3,4}=\int_0^1 (q_1q_2q_4q_7q_8q_9f)(0,0,x_3,1-x_3)dx_3, \quad h_{3,4(0)}=-p_6,$
$h_{3,4(1)}=q_7q_8q_9(-q_1q_3+q_2q_3+q_1q_4)+q_3q_5q_7q_8(q_1-q_2)+q_2q_3q_4q_5(q_7-q_1),$
$h_{3,4(2)}=q_2q_3(-q_7q_8q_9+q_5q_7q_8-q_4q_5q_7), \quad h_{3,4(3)}=q_1q_7q_8(q_3q_9-q_4q_9-q_3q_5);$
$q^{**}_{0,1}=\sum_{i=1}^4 (h_{0,1(i)}f)z_i, \quad q^{**}_{0,2}=\sum_{i=1}^4 (h_{0,2(i)}f)z_i, \quad q^{**}_{0,3}=\sum_{i=1}^4 (h_{0,3(i)}f)z_i,$
$q^{**}_{0,4}=\sum_{i=1}^4 (h_{0,4(i)}f)z_i, q^{**}_{1,2}=\sum_{0=1,i\neq 2}^4 (h_{0,2(i)}f)z_i, q^{**}_{1,3}=\sum_{i=1,i\neq 3}^4 (h_{0,3(i)}f)z_i,$
$q^{**}_{1,4}=\sum_{i=1}^3 (h_{1,4(i)}f)z_i, \quad q^{**}_{2,3}=\sum_{i=1,i\neq 3}^4 (h_{2,3(i)}f)z_i, \quad q^{**}_{2,4}=\sum_{i=1}^3 (h_{2,4(i)}f)z_i,$
$q^{**}_{3,4}=\sum_{i=1}^3 (h_{3,4(i)}f)z_i.$

Используя данную теорему и рассуждения из доказательства леммы 4.5.6 из [14], получаем

Лемма 2. *Пусть $R>r^*$ и $f\in\mathfrak{P}_0^\infty(A(h),\mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такой, что $\int_{L_{l,k}}\big(q(\Delta)f\big)(x_1+u_1,x_2+u_2,x_3+u_3,x_4+u_4)\,ds=0$ для любого вектора $(u_1,u_2,u_3,u_4)\in\mathrm{Sh}(A,\mathbb{B}_R)$.*

Поскольку симплекс $A(h)\in\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^4)$, используя лемму 4.1.3 из [14], получаем

Лемма 3. *Пусть $R>r^*$, для некоторой функции $f\in\mathfrak{P}(A,\mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f=0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f=0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Используя рассуждения, подобные тем, что применяются при доказательстве леммы 4.1.1 из [14], получаем

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(A,\mathbb{B}_R)=\{0\}$ для некоторого $R>r^*$. Тогда $\mathscr{R}(A)\leqslant R$.*

Лемма 5. *Пусть $0\leqslant k<l<d<R$, $f\in L(0;R)$, $f=0$ при $\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2}\in(k;l)\cup(d;R)$, и при некоторых a_1, a_2 таких, что $k<a_1<a_2<l$, $\int_0^{\sqrt{d^2-(x_2^2+x_3^2+x_4^2)}} f\big(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\big)\,dx_1=0$ для всех $\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2}\in(a_1,a_2)$. Тогда $f=0$ почти всюду в шаровом слое $\mathbb{B}_{k,R}$.*

Доказательство. Сделаем в данном интеграле замену $t = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$, $y = \sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2}$. Тогда для всех перечисленных условий на входящие в интеграл параметры получим для всех $y \in (a_1; a_2)$ равенство $\int_y^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2-y^2}}\,dt = 0$. Так как функция $f(t) = 0$ при $t \in (k; l)$, то для любого $y \in (a_1; a_2)$ верно $\int_l^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2-y^2}}\,dt = 0$.

Разложим в ряд Лорана $\frac{t}{\sqrt{t^2-y^2}} = (1-(y/t)^2)^{-1/2} = 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}\cdot(y/t)^{2j}$, $|t| > y$. Подставив разложение в предыдущее равенство, получаем

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_l^d \frac{f(t)}{t^{2j}}\,dt\right)\frac{(2j-1)!!y^{2j}}{(2j)!!}, \quad \forall y \in (a_1; a_2).$$

Таким образом, $\int_l^d \frac{f(t)}{t^{2j}}\,dt = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Сделаем в полученном интеграле замену $z = 1/t^2$. Получим $\int_{1/d^2}^{1/l^2} z^{j-1}\frac{f(1/\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = 0$.

Так как система многочленов $\{1, z, z^2, ...\}$ замкнута в пространстве $C(1/d^2; 1/l^2)$, то $f(1/\sqrt{z})/\sqrt{z} = 0$ в $(1/d^2; 1/l^2)$, откуда следует $f(t) = 0$ в $(l; d)$. Учитывая равенство нулю функции f в $(k; l) \cup (d; R)$, получаем требуемое утверждение леммы. □

2. Описание множества $U(R)$

У рассматриваемого симплекса A длины ребер равны соответственно $z_0z_1 = z_0z_2 = z_0z_3 = z_0z_4 = 1$, и $z_1z_2 = z_1z_3 = z_1z_4 = z_2z_3 = z_2z_4 = z_3z_4 = \sqrt{2}$. Центр описанной около симплекса сферы находится в точке $O(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ и радиус равен $R = 1$. Решая соответствующую геометрическую задачу, получаем, что радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего множество A равен $r^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сначала поместим симплекс $z_0z_1z_2z_3z_4$ в сферу радиуса R с центром в точке O(0,0,0,0) так, чтобы вершины $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \partial\mathbb{B}_R$ (лежали на границе сферы), а вершина z_0 лежала внутри сферы. Получим, что в случае, когда $\sqrt{3}/2 \leqslant R < 1$:

1) вершины симплекса имеют следующие координаты:
$\tilde{z}_0(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\tilde{z}_1(\frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\tilde{z}_2(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\tilde{z}_3(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\tilde{z}_4(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
расстояние от центра сферы до вершин $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4$ равно радиусу сферы: $\rho_{O,\tilde{z}_1} = \rho_{O,\tilde{z}_2} = \rho_{O,\tilde{z}_3} = \rho_{O,\tilde{z}_4} = R$, от центра до вершины $\tilde{z}_0$ равно $\rho_{O,\tilde{z}_0} = \frac{1+\sqrt{4R^2-3}}{2}$;

2) вершины симплекса имеют следующие координаты:
$\dot{z}_0(\frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4})$,

$\dot{z}_1(\frac{3+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\dot{z}_2(\frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\dot{z}_3(\frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\dot{z}_4(\frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3+\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
расстояние от центра сферы до вершин, которые лежат на границе равно радиусу сферы $\rho_{O,\dot{z}_1} = \rho_{O,\dot{z}_2} = \rho_{O,\dot{z}_3} = \rho_{O,\dot{z}_4} = R$, от центра до вершины $\dot{z}_0$ равно $\rho_{O,\dot{z}_0} = \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{2}$.

При сдвиге симплекса с вершинами $\widetilde{z}_0, \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3, \widetilde{z}_4$ на вектор $\overrightarrow{\varsigma}(\frac{\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{4})$, вершины будут иметь координаты точек $\dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4$ ($\widetilde{z}_0 + \overrightarrow{\varsigma} \mapsto \dot{z}_0$, $\widetilde{z}_1 + \overrightarrow{\varsigma} \mapsto \dot{z}_1$, $\widetilde{z}_2 + \overrightarrow{\varsigma} \mapsto \dot{z}_2, \widetilde{z}_3 + \overrightarrow{\varsigma} \mapsto \dot{z}_3$, $\widetilde{z}_4 + \overrightarrow{\varsigma} \mapsto \dot{z}_4$). Заметим, что данный симплекс при сдвиге на вектор $\overrightarrow{\varsigma}(\varsigma,\varsigma,\varsigma,\varsigma), \varsigma \in (0, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{2})$ остается внутри шара радиуса R $(R > r^*)$. Ближайшее расстояние от вершин z_1, z_2, z_3, z_4 до центра шара равно $\rho_{min}(z_1, O) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, достигается при сдвиге симплекса на вектор $\overrightarrow{\varsigma}(\frac{\sqrt{4R^2-3}}{2}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{2}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{2}, \frac{\sqrt{4R^2-3}}{2})$. Заметим, что при $R \geqslant \frac{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{2}$ выполняется неравенство $\rho_{O,\widetilde{z}_0} \geqslant \rho_{min}(z_1, O)$.

В случае, когда $R \geqslant 1$ координаты вершин имеют координаты точек $\dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4$ и расстояние от центра сферы до вершины z_0 равно $\rho_{O,\dot{z}_0} = \frac{\sqrt{4R^2-3}-1}{2}$.

В случае, когда $R = 1$ вершины симплекса остаются z_1, z_2, z_3, z_4 неподвижными, т. е. $z_1(1,0,0,0), z_2(0,1,0,0), z_3(0,0,1,0), z_4(0,0,0,1)$, а вершина z_0 имеет координаты $(0,0,0,0)$ или $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Если $z_0(0,0,0,0)$, то расстояние до центра сферы равно нулю. Заметим, что при сдвиге симплекса на вектор $\overrightarrow{a}(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2)$ вершина z_0 принимает все значения отрезка от центра сферы до границы.

Можем сделать вывод, что для $R = 1$ множество $U(R)$ является шаром радиуса 1. Соответственно, и при $R > 1$ множество $U(R)$ также является шаром радиуса R. Остается исследовать данное множество при $R < 1$.

Заметим, что при $R < 1$ невозможно поместить рассматриваемую фигуру в сферу радиуса R так, чтобы z_1 лежала внутри сферы (или любая другая вершина, кроме z_0), а все остальные вершины лежали на границе.

Далее поместим симплекс в сферу так, чтобы точки z_0 и z_4 лежали внутри, а $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{B}_R$. Получаем, что вершины z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 (при первом расположении, когда все вершины, кроме z_0, лежали на границе сферы) переходят в точки
$\ddot{z}_0(\frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\ddot{z}_1(\frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\ddot{z}_2(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\ddot{z}_3(\frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{-1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,
$\ddot{z}_4(\frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{5-3\sqrt{4R^2-3}}{12}, \frac{3-\sqrt{4R^2-3}}{4})$,

и соответственно имеем расстояния $\rho_{O,\ddot{z}_4} = \sqrt{R^2 - \sqrt{4R^2-3} + 1/3}$, $\rho_{O,\ddot{z}_0} = \sqrt{R^2 - \frac{\sqrt{4R^2-3}}{2} - \frac{1}{6}}$, $\rho_{O,\ddot{z}_1} = \rho_{\ddot{z}_2} = \rho_{O,\ddot{z}_3} = R$ при $R > \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Заметим, что при $R < 1$ невозможно расположить симплекс внутри сферы так, чтобы: 1) две вершины лежали на границе, а остальные внутри и 2)одна вершина лежала на границе, а остальные четыре внутри сферы радиуса R.

Введем следующие обозначения: $r_1 = \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{2}$, $r_2 = \frac{1+\sqrt{4R^2-3}}{2}$, $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_4 = \sqrt{R^2 - \sqrt{4R^2-3} + 1/3}$.

Сравнивая полученные расстояния, можем сделать следующий вывод:
1) при $\sqrt{3}/2 < R \leqslant \sqrt{7}/3$ множество $U(R)$ является объединением шаровых слоев соответствующих радиусов $\mathbb{B}_{r_1,r_2}$ и $\mathbb{B}_{r_3,R}$;
2) при $\sqrt{7}/3 < R < \sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{2}}$ множество $U(R)$ является объединением шаровых слоев $\mathbb{B}_{r_1,r_2}$ и $\mathbb{B}_{r_4,R}$;
3) при $\sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{2}} \leqslant R < 1$ множество $U(R)$ является является шаровым слоем $\mathbb{B}_{r_1,R}$.
3) при $R \geqslant 1$ множество $U(R)$ является шаром радиуса R.

Таким образом, в данной главе мы изучили множество $U(R)$ для всех R.

3. Основной результат

Данный результат показывает, что $\forall R > r^*$ функция f равная нулю в $\mathbb{B}_r$ $(r > r_1)$, имеющая нулевые интегралы по множествам $\lambda A (\forall\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R))$ будет равна 0 в $\mathbb{B}_R$.

Теорема 3 (Теорема единственности). *Пусть* $\frac{\sqrt{3}}{2} < R < 1$ *и* $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$. *Пусть также* $f = 0$ *в* $\mathbb{B}_r$ *при некотором* $r > r_1$. *Тогда* $f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R$.

4. Доказательство основного результата

Доказательство. Считаем $R > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon \in (0, R - \frac{\sqrt{3}}{2})$ фиксированными числами. Требуется доказать, что $\mathfrak{P}\big(A, \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$. Используя стандартный метод сглаживания, например, изложенный в [14] §1.3.3, видим, что достаточно доказать, что $\mathfrak{P}^\infty\big(A, \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big) = \{0\}$. Учитывая лемму 4, видим, что достаточно доказать равенство $\mathfrak{P}_0^\infty\big(A, \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big) = \{0\}$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(A, \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big)$. Из леммы 1 следует, что существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $F = q(\Delta)f = 0$ в $\mathscr{U}(R-\varepsilon)$. Отметим, что при различных R, множество $\mathscr{U}(R-\varepsilon)$ является объединением шаровых слоев соответствующих радиусов $\mathbb{B}_{r_1(R-\varepsilon), r_2(R-\varepsilon)} \cup \mathbb{B}_{r_4(R-\varepsilon), R-\varepsilon}$ или $\mathbb{B}_{r_1(R-\varepsilon), r_3(R-\varepsilon)} \cup \mathbb{B}_{r_4(R-\varepsilon), R-\varepsilon}$ или шаровым слоем $\mathbb{B}_{r_1(R-\varepsilon), R-\varepsilon}$ для некоторых $r_1(R-\varepsilon), r_2(R-\varepsilon), r_3(R-\varepsilon), r_4(R-\varepsilon)$. Из условия теоремы следует, что функция

$f = 0$ в шаре $\mathbb{B}_r$. В первом случае, когда множество $\mathscr{U}(R-\varepsilon)$ является объединением шаровых слоев, применяя к функции $F \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(A, \mathbb{B}_{R-\varepsilon}\big)$ леммы 2 и 5 получаем, что существует такой ненулевой многочлен $\widetilde{q}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, что $\widetilde{F} = \widetilde{q}(\Delta)F = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$.

Поскольку произведением многочленов является многочлен, применяя к функции f лемму 3, в которой многочленами являются $\tilde{q}.q$ в первом и q во втором случаях, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$. Что и требовалось доказать. □

Заключение

В работе получен следующий результат: теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по четырехмерным симплексам. Данный результат носит теоретический характер и может быть использован в теории аппроксимации и комплексном анализе.

Список литературы

1. WILLIAMS, S. A. (1981) Analyticity of the boundary for Lipshits domains without the Pompeiu property. *Ind. Univ. Math. J.* 30 p. 357–369.
2. WILLIAMS, S. A. (1976) A partial solution of the Pompeiu problem. *Math. Ann.* 223 p. 183–190.
3. BERENSTEIN, C. A. (1977) El problema de Pompeiu. *Atas do Novo Coloquio Brasileiro de Mathematica.* 1 p. 31–37.
4. DEMAR, R.F. and DAVIS, P.J. (1966) A complex Pompeiu problem. *Duke Math. J.* 33 p. 91–101.
5. GAROFALO, N. (1989) A new result on the Pompeiu problem. *Rend. Sem. Mat. Univ., Special Issue.* 1 p. 25–38.
6. GAROFALO, N. and SEGALA, F. (1991) Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu promlem. *J. Anal. Math.* 56 p. 1–28.
7. GAROFALO, N. and SEGALA, F. (1989) Another step toward the solution of the Pompeiu problem in the plane. *J. Anal. Math.* 7 (2). p. 241–257.
8. HARCAOUI, M. (1993) Inversion de la Transformation de Pompeiu dans le disque hyperbolique. *Univ. Bordeaux.* 37 p. 133–164.
9. SZABO, G. (1982) On functions having the same integral on congruent semidisks. *Ann. univ. sci. Budapesht. Lec. compulator.* 3 p. 3–9.
10. Заставный, В. П. О функциях с нулевыми интегралами по множествам конгруэнтным данному / В .П. Заставный, Р. М. Тригуб // Теория функций и приближений. — 1988. — Ч. II. — С. 14–22.

    ZASTAVNYI, V. and TRIGUB, R. (1988) On functions with zero integrals over the sets congruent to this. *Theory of functions and applications.* II p. 14–22.

11. Малюгин, С. А. Мат. заметки / С. А. Малюгин // Математические вопросы кибернетики. — 1978. — Т. 2. — С. 339–341.

    MALUGIN, C. (1978) On functions with zero integrals on congruent cubes. *Mathematical notes.* 2 p. 339–341.

12. Произволов, В. В. Об интегралах, постоянных на конгруентных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. — 1977. — Т. 21. — С. 183–186.

    PROIZVOLOV, V. (1977) On integrals are constant on congruent areas. *Mathematical notes.* 21 p. 183–186.

13. BERENSTEIN, C. A. and GAY, R. (1989) Le probleme de Pompeiu locale. *J. Anal. Math.* 52 p. 133–166.

14. VOLCHKOV, V. V. (2003) *Integral Geometry and Convolution Equations.* 454. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

15. MASHAROV, P. A. (2001) Solution of local Pompeiu problem for Reuleaux triangle. *Vestnik Dneprop. Univ.* 6 p. 72—81.

16. Иванисенко, Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. — 2014. — Т. 28. — С. 76–83.

    IVANISENKO, N. and MASHOROV, P. (2014) A local version of Pompeiu problem for non-convex quadrilateral. *Intstitula Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine.* 28 p. 76–83.

17. BERENSTEIN, C. A. (1986) A local version of the two-circles theorem. *Israel J. Math.* 55 p. 267–288.

18. VOLCHKOV, V. V. and VOLCHKOV, VIT.V. (2009) *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.* 617. Dordrecht: Heidelberg London New York.

19. ZALCMAN, L. (1992) A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation dy solutions of partial differential equations. *ed. B. Fuglede et al.* 1 p. 185–194.

20. ZALCMAN, L. (2001) Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography.. *Contemp. Math.* 278 p. 69–74.

УДК: 517.52

MSC2010: 33C10

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, ПОРОЖДЁННЫХ РЕКУРРЕНТНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ 4-ГО ПОРЯДКА

© Д. С. Муртазаева, Д. В. Третьяков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *dvttvd@mail.ru*

On calculation of special type numerical series generated by 4-th order recurrent sequences.

Murtazaeva D. S., Tretyakov D. V.

Abstract.

Calculation of special type numerical series generated by 4-th order recurrent sequences is considered in this article. All sequences are satisfying of equation $v_{n+2} = av_n + bv_{n-2}$, where $a > 0,\ b \in \mathbb{R},\ a^2 - 4b > 0$. Initial conditions are connecting in some cases.

Let $\{v_n\}_{n\geq 1}$ is indicated sequence. One is satisfying equalities:

$$v_{2k+1}^2 - v_{2k+3}v_{2k-1} = b^{k-1}(v_3^2 - v_5v_1),\ v_{2k+2}^2 - v_{2k+4}v_{2k} = b^{k-1}(v_4^2 - v_6v_2),\ k \geq 1.$$

If $\{w_n\}_{n\geq 0},\ w_0 = 0,\ \ \{g_n\}_{n\geq -1},\ g_{-1} = 0$ are sequences which satisfying to equation $h_{n+2} = ah_n + bh_{n-2},\ b > 0$, than

$$w_{2n}w_{2n+2} - w_{2n-2}w_{2n+4} = -ab^{n-1}w_2^2,\ \ g_{2n+1}g_{2n+3} - g_{2n-1}g_{2n+5} = -ab^{n-1}w_1^2,\ n \geq 1.$$

In article proofed next theorems.

Theorem 1. *Let $\{v_n\}_{n\geq 1}$ is sequence which defines the equalities $v_{n+2} = av_n - bv_{n-2},\ n \geq 3$. Than*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_1}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_3}{\sqrt{b}v_1}\right),$$

where $\Delta_1 = v_3^2 - v_1v_5$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+2}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_4}{\sqrt{b}v_2}\right),$$

where $\Delta_2 = v_4^2 - v_2v_6$.

In

Theorem 2. *previous theorem results are correcting with the help from choice of initial conditions.*

Theorem 3. *Let sequence* $\{w_n\}_{n\geq -1}$ *with initial conditions* $w_{-1}=0,\ w_0=0$ *are satisfying to equation* $w_{n+2}=aw_n+bw_{n-2},\ b>0$. *Than*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}}{w_2 a\sqrt{b^{n-1}}}\right) = \operatorname{arcctg}(a) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{a^2+b}{b}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{w_1 a\sqrt{b^{n-1}}}\right) = \operatorname{arcctg}(a) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{a^2+b}{\sqrt{b}}\right).$$

These theorems are illustrating by some examples.

Keywords: *4-th order recurrent sequences, numerical series of special type, biquadratic sequences, characteristic equation, 4-th order Fibonacci generalized sequences*

Введение

В работе [1] были получены равенства, обобщающие ранее известные формулы (N. Anning, A. C. Aitken, D. H. Lehmer), приведённые в известном сборнике "Избранные задачи из журнала American mathematical monthly" [2]. Полученные в упомянутой работе формулы используют рекуррентные последовательности 2-го порядка.

В настоящей работе получены аналогичные формулы для числовых рядов, порождённых рекуррентными последовательностями 4-го порядка. Приведены примеры применения формул.

1. Вспомогательные предложения

Рассмотрим рекуррентную последовательность $\{v_n\}_{n\geq 1}$, определённую равенствами:

$$v_{n+2} = av_n - bv_{n-2},\ n \geq 3, \tag{1}$$

где $a>0,\ b>0$-фиксированные числа, $a^2-4b>0$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$v_{2k+1}^2 - v_{2k+3}v_{2k-1} = b^{k-1}(v_3^2 - v_5 v_1),\ k \geq 1. \tag{2}$$

Доказательство.

$$(av_{2k+1})v_{2k-1} = (av_{2k-1})v_{2k+1}.$$

$$v_{2k-1}(v_{2k+3} + bv_{2k-1}) = (v_{2k+1} + bv_{2k-3})v_{2k+1}.$$

$$v_{2k+3}v_{2k-1} + bv_{2k-1}^2 = v_{2k+1}^2 + bv_{2k+1}v_{2k-3}.$$

$$v_{2k+1}^2 - v_{2k+3}v_{2k-1} = b(v_{2k-1}^2 - v_{2k+1}v_{2k-3}) = b^2(v_{2k-3}^2 - v_{2k-1}v_{2k-5}) =$$
$$= b^3(v_{2k-5}^2 - v_{2k-3}v_{2k-7}) = \ldots = b^s(v_{2k-2s+1}^2 - v_{2k-2s+3}v_{2k-2s-1}) = \ldots = b^{k-1}(v_3^2 - v_5v_1).$$

□

Имеет место также аналогичная

Лемма 2. *Последовательность* $\{v_n\}_{n\geq 1}$ *также удовлетворяет равенствам:*

$$v_{2k+2}^2 - v_{2k+4}v_{2k} = b^{k-1}(v_4^2 - v_6v_2), \ k \geq 1. \tag{3}$$

Доказательство.

$$(av_{2k+2})v_{2k} = (av_{2k})v_{2k+2}.$$
$$v_{2k}(v_{2k+4} + bv_{2k}) = (v_{2k+2} + bv_{2k-2})v_{2k+4}.$$
$$v_{2k+4}v_{2k} + bv_{2k}^2 = v_{2k+2}^2 + bv_{2k+2}v_{2k-2}.$$
$$v_{2k+2}^2 - v_{2k+4}v_{2k} = b(v_{2k}^2 - v_{2k+2}v_{2k-2}) = b^2(v_{2k-2}^2 - v_{2k}v_{2k-4}) =$$
$$= b^3(v_{2k-4}^2 - v_{2k-2}v_{2k-6}) = \ldots = b^s(v_{2k-2s+2}^2 - v_{2k-2s+4}v_{2k-2s}) = \ldots = b^{k-1}(v_4^2 - v_6v_2).$$

□

Лемма 3. *Если последовательность* $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *удовлетворяет рекуррентному уравнению* $h_{n+2} = ah_n - bh_{n-2}$, $n \geq 3$, *где* $a^2 - 4b > 0$, *то*

$$\frac{h_{2n+3}}{h_{2n+1}} \to \lambda_1^2, \quad \frac{h_{2n+4}}{h_{2n+2}} \to \lambda_1^2, \quad n \to \infty.$$

где λ_1 — *наибольший корень характеристического уравнения* $z^4 - az^2 + b = 0$.

Доказательство. Характеристическое уравнение $z^4 - az^2 + b = 0$ имеет четыре различных действительных корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}, \ \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}.$$

Общее решение уравнения $h_{n+2} = ah_n - bh_{n-2}$, $n \geq 3$ имеет следующий вид

$$h_n = {}_1\lambda_1^{n-1} + {}_2\lambda_2^{n-1} + {}_3\lambda_3^{n-1} + {}_4\lambda_4^{n-1}, \tag{4}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные константы. Отсюда

$$\frac{h_{2n+3}}{h_{2n+1}} = \frac{{}_1\lambda_1^{2n+2} + {}_2\lambda_2^{2n+2} + {}_3\lambda_3^{2n+2} + {}_4\lambda_4^{2n+2}}{{}_1\lambda_1^{2n} + {}_2\lambda_2^{2n} + {}_3\lambda_3^{2n} + {}_4\lambda_4^{2n}} =$$

$$= \frac{{}_1\lambda_1^2 + {}_2\lambda_2^2\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n} + {}_3\lambda_3^2\left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{2n} + {}_4\lambda_4^2\left(\dfrac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{2n}}{{}_1 + {}_2\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n} + {}_3\left(\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{2n} + {}_4\left(\dfrac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{2n}} \to \lambda_1^2, n \to \infty.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение. □

Лемма 4. *В условиях леммы 3*

$$\frac{h_{2n+2}}{\sqrt{b^{n-2}}} \to \infty, \quad \frac{h_{2n+3}}{\sqrt{b^{n-2}}} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из предыдущей леммы. Доказательство вытекает из следующих неравенств:

$$\frac{\lambda^2}{\sqrt{b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2\sqrt{b}} > \frac{a}{\sqrt{b}} > 2,$$

так как $a^2 - 4b > 0$. □

Лемма 5. *Рассмотрим последовательности* $\{w_n\}_{n\geq 0}$, $w_0 = 0$, *и* $\{g_n\}_{n\geq -1}$, $g_{-1} = 0$, *удовлетворяющие уравнениям* $w_{n+2} = aw_n + bw_{n-2}$, $n \geq 2$ $g_{n+2} = ag_n + bg_{n-2}$, $n \geq 1$, $a > 0$, $b > 0$. *Тогда*

$$w_{2n}w_{2n+2} - w_{2n-2}w_{2n+4} = -ab^{n-1}w_2^2, \;\; g_{2n+1}g_{2n+3} - g_{2n-1}g_{2n+5} = -ab^{n-1}w_1^2, \; n \geq 1. \quad (5)$$

Доказательство. Докажем первую формулу с помощью равенств (2):

$$w_{2n}w_{2n+2} - w_{2n-2}w_{2n+4} = w_{2n}(aw_{2n} + bw_{2n-2}) - w_{2n-2}(aw_{2n+2} + bw_{2n}) =$$
$$= a(w_{2n}^2 - w_{2n-2}w_{2n+2}) = ab^{n-2}(w_4^2 - w_6w_2) = -ab^{n-1}w_2^2.$$

Вторая формула доказывается с помощью равенств (3). □

Рассмотрим обобщённую последовательность Фибоначчи 4-го порядка: $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq -1}$, $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0 = 0$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 1$, $\mathscr{F}_{n+2} = \mathscr{F}_n + \mathscr{F}_{n-2}$, $n \geq 1$. Легко проверить, что $\mathscr{F}_3 = \mathscr{F}_4 = 1$, $\mathscr{F}_5 = \mathscr{F}_6 = 2$, $\mathscr{F}_7 = \mathscr{F}_8 = 3$, $\mathscr{F}_{2n+1} = \mathscr{F}_{2n+2} = F_n$, где $\{F_n\}_{n\geq -1}$, $F_{-1} = 0$, $(F_0 = F_1 = 1)$ — последовательность чисел Фибоначчи.

Следствие 1. *Имеют место равенства:*

$$\mathscr{F}_{2n}\mathscr{F}_{2n+2} - \mathscr{F}_{2n-2}\mathscr{F}_{2n+4} = -1, \;\; \mathscr{F}_{2n+1}\mathscr{F}_{2n+3} - \mathscr{F}_{2n-1}\mathscr{F}_{2n+5} = -1, \; n \geq 1. \quad (6)$$

2. Числовые ряды, порождённые рекуррентными последовательностями 4-го порядка

Пусть $\{v_n\}_{n\geq 1}$ – последовательность, определённая равенствами (1)

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_1}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_3}{\sqrt{b}v_1}\right), \tag{7}$$

где $\Delta_1 = v_3^2 - v_1 v_5$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+2}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_4}{\sqrt{b}v_2}\right), \tag{8}$$

где $\Delta_2 = v_4^2 - v_2 v_6$.

Доказательство. Преобразуем с помощью (1), леммы 1 и известного тождества для арккотангенса

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$$

следующую разность:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+3}}{\sqrt{b}v_{2n+1}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}}{\sqrt{b}v_{2n-1}}\right) =$$

$$\operatorname{arcctg}\frac{\dfrac{v_{2n+3}}{\sqrt{b}v_{2n+1}}\,\dfrac{v_{2n+1}}{\sqrt{b}v_{2n-1}}+1}{\dfrac{v_{2n+1}}{\sqrt{b}v_{2n-1}}-\dfrac{v_{2n+3}}{\sqrt{b}v_{2n+1}}} = \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_1}\right).$$

Пусть индекс n в равенствах

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+3}}{\sqrt{b}v_{2n+1}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}}{\sqrt{b}v_{2n-1}}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_1}\right)$$

принимает значения от 1 до N. Суммируя всё, получаем

$$\sum_{n=2}^{N} \operatorname{arcctg}\left(\frac{av_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}\Delta_1}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2N+3}}{\sqrt{b}v_{2N+1}}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_3}{\sqrt{b}v_1}\right). \tag{9}$$

Используя лемму 3, приходим к выводу, что левая часть последнего равенства имеет предел при $N \to \infty$. Переходя к указанному пределу, доказываем формулу (7). Равенство (8) доказывается аналогично. □

Используем теперь доказанную теорему для упрощения полученных там формул за счёт добавления начальных условий специального вида.

Теорема 2. *Рассмотрим последовательности* $\{v_n\}_{n\geq 1}$, $\{w_n\}_{n\geq 1}$, *которые определяются следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} v_{2n+3} = av_{2n+1} - bv_{2n-1}, \\ v_1 = \xi, \\ v_2 = a\xi, \\ v_3 = (a+\sqrt{a^2-b})\xi, \\ v_4 = \beta\xi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{2n+4} = aw_{2n+2} - bw_{2n}, \\ w_1 = \xi, \\ w_2 = a\xi, \\ w_3 = a\xi, \\ w_4 = a(a+\sqrt{a^2-b})\xi. \end{cases}$$

Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}(a+\sqrt{a^2-b})\xi^2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right) \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}^2}{\sqrt{b}b^{n-1}a(a+\sqrt{a^2-b})\xi^2}\right) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2\sqrt{b}}\right). \tag{11}$$

Доказательство. Достаточно вычислить второе слагаемое из правой части равенства (7) и величину Δ_1 из левой его части:

$$v_5 = av_3 - bv_1 = \sqrt{a^2-b}(\sqrt{a^2-b}+a)\xi,$$

$$\Delta_1 = v_3^2 - v_5v_1 = (a+\sqrt{a^2-b})^2\xi^2 - \sqrt{a^2-b}(\sqrt{a^2-b}+a)\xi^2 = a(a+\sqrt{a^2-b})\xi^2.$$

$$\frac{v_3}{\sqrt{b}v_1} = \frac{(a+\sqrt{a^2-b})}{\sqrt{b}} = \frac{av_3^2}{\sqrt{b}\Delta_1}.$$

Аналогично обосновывается формула (11). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Предположим, что задана последовательность* $\{w_n\}_{n\geq -1}$ *с начальными условиями* $w_{-1} = 0$, $w_0 = 0$ *и удовлетворяющая рекуррентному уравнению* $w_{n+2} = aw_n + bw_{n-2}$. *Тогда имеют место равенства:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}}{w_2a\sqrt{b^{n-1}}}\right) = \operatorname{arcctg}(a) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{a^2+b}{b}\right), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+1}}{w_1a\sqrt{b^{n-1}}}\right) = \operatorname{arcctg}(a) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{a^2+b}{\sqrt{b}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Докажем только первое равенство, поскольку второе доказывается аналогично. С помощью леммы 5, определения последовательности $\{w_n\}_{n\geq -1}$ и свойства арккотангенса преобразуем следующую разность:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n}}{w_2\sqrt{b^{n-1}}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}}{w_2a\sqrt{b^{n-1}}}\right)=\operatorname{arcctg}\frac{\dfrac{w_{2n}w_{2n+2}}{w_2^2ab^{n-1}}+1}{\dfrac{w_{2n+2}}{w_2a\sqrt{b^{n-1}}}-\dfrac{w_{2n}}{w_2\sqrt{b^{n-1}}}}=$$

$$=\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+4}}{w_2b\sqrt{b^{n-1}}}\right).$$

Меняя n в полученном равенстве от 2 до N , получим следующие равенства:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_4}{w_2\sqrt{b}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_6}{w_2a\sqrt{b}}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_8}{w_2b\sqrt{b}}\right),$$

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_6}{w_2b}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_8}{w_2ab}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{10}}{w_2b^2}\right),$$

....

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2N}}{w_2\sqrt{b^{N-1}}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2N+2}}{w_2a\sqrt{b^{N-1}}}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2N+4}}{w_2b\sqrt{b^{N-1}}}\right).$$

Просуммируем данные равенства:

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_4}{w_2\sqrt{b}}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_6}{w_2b}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2N+4}}{w_2b\sqrt{b^{N-1}}}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2N+2}}{w_2b\sqrt{b^{N-2}}}\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}}{w_2a\sqrt{b^{n-1}}}\right). \tag{14}$$

В (14) осталось перейти к пределу при $N\to\infty$ с помощью леммы 4. □

3. Примеры

В заключение представим некоторые частные случаи доказанных ранее теорем.

Пример 1. Пусть $a=4,\ b=2,\ \xi=1$. Рассмотрим последовательность $\{v_n\}_{n\geq 1}$, для которой $v_1=1,\ v_2=4,\ v_3=4+\sqrt{14},\ v_4=\beta,\ v_{n+2}=4v_n-2v_{n-2},\ n\geq 3$. В силу равенства (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}^2}{2^n\sqrt{2}(2+\sqrt{7})}\right)=\operatorname{arcctg}(1+\sqrt{2})=\frac{\pi}{8}.$$

Пример 2. Предположим теперь, что $a = 4,\ b = 3,\ \xi = 2$. Последовательность $\{v_n\}_{n\geq 1}$, задаётся равенствами $v_1 = 2,\ v_2 = 8,\ v_3 = 8 + 2\sqrt{13},\ v_4 = \beta$,
$v_{n+2} = 4v_n - 3v_{n-2},\ n \geq 3$. По формуле (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}^2}{3^{n-1}4\sqrt{3}(4+\sqrt{13})}\right) = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 3. Если $a = 2,\ b = 1,\ \xi = \sqrt{2}$ и $\{v_n\}_{n\geq 1}$ рекуррентная последовательность, такая что $v_1 = \sqrt{2},\ v_2 = 2\sqrt{2},\ v_3 = (2+\sqrt{3})\sqrt{2},\ v_4 = \sqrt{2}\beta$,
$v_{n+2} = 2v_n - v_{n-2},\ n \geq 3$. Используя (10), можно увидеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_{2n+1}^2}{2+\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arcctg}\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 4. Если предположить, что $a = 2,\ b = 1,\ \xi = 1$ и $\{w_n\}_{n\geq 1}$ рекуррентная последовательность задаётся равенствами: $w_1 = w_2 = w_3 = 1,\ w_4 = 2(2+\sqrt{3})$,
$w_{n+2} = w_n - w_{n-2},\ n \geq 3$, то с помощью (11), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}^2}{2(2+\sqrt{3})}\right) = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 5. Если предположить, что $a = 4,\ b = 1,\ \xi = 1$ и рекуррентная последовательность $\{w_n\}_{n\geq 1}$ задаётся равенствами: $w_1 = w_2 = w_3 = 1,\ w_4 = 4 + \sqrt{15}$,
$w_{n+2} = 4w_n - w_{n-2},\ n \geq 3$, Тогда с помощью (11) приходим к формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(\frac{w_{2n+2}^2}{4(4+\sqrt{15})}\right) = \operatorname{arcctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.$$

Пример 6. Пусть $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq -1}$ -обобщённая последовательность Фибоначчи 4-го порядка. В силу (12) и (13)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arcctg}(\mathscr{F}_{2n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(\mathscr{F}_{2n+3}) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arcctg}(2).$$

Заключение

В работе получены следующие результаты: доказаны формулы для вычисления различных числовых рядов, порождённых рекуррентными последовательностями 4-го порядка (более точно — биквадратными последовательностями) в различных случаях, обусловленных, как правило, выбором различных начальных условий. Доказанные формулы проиллюстрированы различными примерами.

Список литературы

1. Пода, Н. С. О значениях числовых рядов, порождённых некоторыми рекуррентными соотношениями 2-го порядка и специальными функциями / Н. С. Пода, Д. В. Третьяков // Динамические системы / М.: Наука. — 2012, Т. 2(30). — №3–4. — С. 337–346.

   PODA, N. S., & TRETYAKOV, D. V. (2012) On number series values generated by some recurrent 2-nd order relations and special functions. *Dynemical Systems.* 2(30) (№3-4). p. 337–346.

2. Алексеев, В. М. Избранные задачи из журнала “American mathematical monthly” / под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1977. — 596 с.

   ALEKSEEV, V. M. (1977) *Selected problems from journal “American mathematical monthly”.* New York: The Otto Dunkel Memorial Problem Book. 596 p.

УДК: 517.11

ОБ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МЕТОДА ВЫДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© М. С. Пошерстник

инженер-математик

просп. Победы, 214, к.4, Симферополь, 295034, Российская Федерация

e-mail: *marat.posher@gmail.com*

About the improvement of the method of variables selection when solving logical equations.

Posherstnik M. S.

Abstract. In the paper [1], for the solution of Boolean equations of the form $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) = 1$ the method for allocation of variables was offered. This work aims at improving the efficiency of this method due to a decrease of the maximum volume of the intermediate forms which are obtained in the process of the variables selection. This result is achieved by: 1) combining some elements of a disjunctive forms of the original superposition of functions F before their logical multiplication and 2) rejection of the substitution or simplification of the form substitute the disjunctive forms of functions that do not affect the formation of zero-conjunction $x_u\bar{x}_u$ when DNF is received of a function F. It is shown that the amount of memory required to allocate the final DNF can be reduced by forming one or some of its members from a bracket the shape of the function F obtained after selection of all variables that form when the transformation of the original set of functions in DNF at least one zero-conjunction $x_u\bar{x}_u$ ($u \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$). Introduced more efficient than presented in [1] criterion for variable selection determining the next stage of decomposition of the original problem.

Keywords: *Logical Equations, Separation of Variables, Decomposition of the Problem*

Введение и постановка задачи

В работе [1] для решения логических уравнений $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) = 1$ был предложен метод выделения переменных. Эта задача не утратила своей актуальности и в настоящее время [2, 3]. В настоящей работе с целью повышения эффективности представленного в [1] метода предлагается ряд приемов и алгоритмов, уменьшающих объём промежуточных и конечных форм, получаемых при его реализации. Задача нахождения корней логических уравнений рассматривается в постановке, приведенной в [1]. Часть применяемых далее понятий, терминов, определений и обозначений также заимствована из [1] с небольшими дополнениями, изменениями и новой нумерацией. Некоторые формулировки упрощены по сравнению с приведенными в работе [1]. Так, например, вместо использованного в [1] выражения «формула, реализующая функцию» применяется выражение «формула функции».

Напомним постановку задачи и некоторые определения.

Задана совокупность множеств M^r ранга $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\begin{array}{c} M^0 = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{k_0}\}, \ldots, M^1 = \{f_1^1,\ f_2^1, \ldots,\ f_{k_1}^1\}, \ldots \\ M^r = \{f_1^r,\ f_2^r, \ldots,\ f_{k_r}^r\}, \ldots, M^n = \{f_1^n\} = \{F\}, \end{array} \tag{1}$$

включающие независимые переменные $x_1, \ldots,\ x_{k_0}$ и дизъюнктивные формы (ДФ) локальных функций $f_J = \bigvee\limits_{l=1}^{m_J} A_{jl}^r$ $(m_j \in \{1, 2, \ldots\}, 1 \leq j \leq k_r, r \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Конъюнкции A_{jl}^r каждой из них содержат символы локальных функций низших рангов и независимых аргументов (со знаком инверсии или без него).

Требуется найти все наборы ρ_τ $(\tau = 1, 2, \ldots)$ значений независимых переменных, удовлетворяющих уравнению $F(x_1, \ldots,\ x_{k_0}) = 1$. В дальнейшем такие наборы будем называть корнями логического уравнения. Условимся также наряду с символом f_j^r применять символ $f_{(j)}$, где (j) – порядковый номер локальной функции в исходной совокупности $S_w = \{M^1, \ldots,\ M^n\}$ множеств $\left((w = 1, 2, \ldots), (j) = j + \sum\limits_{l=1}^{r-1} k_l\right)$.

Определение 1. Приведенной относительно x_u формой функции $f(j)$ будем называть реализующую ее дизъюнктивную форму

$$\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \beta' \bar{x}_u \vee \gamma, \tag{2}$$

где β, β', γ — выражения, не зависящие от переменной x_u.

Согласно [1] указанные выражения называются коэффициентами и остатком выделения соответственно. В дополнение к [1] условимся также называть графически равными приведенные формы логических функций, если равны их коэффициенты и остаток выделения.

Условимся также процесс преобразования любой произвольно заданной функции $f_{(j)}$ к виду (2) называть выделением переменной x_u в функции $f_{(j)}$.

Определение 2. Будем говорить, что переменная x_u графически определяет функцию $f_{(j)}$ или функция $f_{(j)}$ графически зависит от x_u, если $f_{(j)}$ существенно зависит от переменной x_u и представлена (с точностью до вынесения за скобки) в приведенной относительно x_u форме.

Определение 3. Числа $r(x_v), r(f_{(j)}) \geq 0$ называются рангами независимой переменной x_v $(v \in \{1, \ldots, k_0\})$ либо локальной функции $f_{(j)}$ и определяются следующим образом: $r(x_v) = 0, r(f_{(j)}) = \max[r(\phi)] + 1$, где $r(\phi)$ — ранг локальной функции либо простой переменной, входящей в ДФ функции.

Определение 4. Переменную x_u $(u \in \{1, \ldots, k_0\})$ будем называть отсекающей (неотсекающей), если при её выделении получена хотя бы одна (ни одна), нуль-конъюнкция $x_u\bar{x}_u$.

1. Уменьшение объёма промежуточных форм

Уменьшение объёма промежуточных форм достигается за счёт уменьшения числа членов в дизъюнктивных формах (ДФ), получаемых в результате выполнения операций раскрытия скобок при каждой подстановке и логическом перемножении приведенных форм функций.

Рассмотрим конъюнкцию $A_{jl} = f_{(s)}f_{(t)}$, входящую в ДФ одной из локальных функций $f_{(j)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0})$. Здесь $f_{(j)}, f_{(s)}, f_{(t)}$ — это локальные функции исходной совокупности S_w, представляющей суперпозицию F, а l — порядковый номер конъюнкции A_{jl} в ДФ функции $f_{(j)}$. В ходе выделения переменной x_u подставим вместо указанных функций их приведенные 3-членные формы $\widetilde{d}_u(f_{(s)}) = \beta_1 x_u \vee {\beta'}_1\bar{x}_u \vee \gamma_1$ и $\widetilde{d}_u(f_{(t)}) = \beta_2 x_u \vee {\beta'}_2\bar{x}_u \vee \gamma_2$.

После выполнения операции логического умножения путем перемножения каждого члена одного сомножителя на каждый член другого сомножителя получим 7-членную дизъюнкцию конъюнкций

$$\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)}) =$$
$$= \beta_1\beta_2 x_u \vee \beta_1\gamma_2 x_u \vee \beta_2\gamma_1 x_u \vee {\beta'}_1{\beta'}_2\bar{x}_u \vee {\beta'}_1\gamma_2\bar{x}_u \vee {\beta'}_2\gamma_1\bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 =$$
$$= (\beta_1\beta_2 \vee \beta_1\gamma_2 \vee \beta_2\gamma_1)x_u \vee ({\beta'}_1{\beta'}_2 \vee {\beta'}_1\gamma_2 \vee {\beta'}_2\gamma_1)\bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2.$$

Если при логическом умножении рассматривать в качестве объектов операции не только отдельные дизъюнктивные элементы сомножителей, но и логические суммы $(\beta_1 x_u \vee \gamma_1)$, $({\beta'}_2\bar{x}_u \vee \gamma_2)$ либо $({\beta'}_1\bar{x}_u \vee \gamma_1)$, $(\beta_2 x_u \vee \gamma_2)$ некоторых из них, то можно, не раскрывая скобки полностью, получить выражение из 5-и конъюнкций. Один из 2-х таких вариантов приведен ниже.

$$\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)}) = (\beta_1 x_u \vee \gamma_1)\beta_2 x_u \vee \gamma_2\beta_1 x_u \vee ({\beta'}_2\bar{x}_u \vee \gamma_2){\beta'}_1\bar{x}_u \vee \gamma_1{\beta'}_2\bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 =$$
$$= ((\beta_1 x_u \vee \gamma_1)\beta_2 \vee \gamma_2\beta_1)x_u \vee (({\beta'}_2\bar{x}_u \vee \gamma_2){\beta'}_1 \vee \gamma_1{\beta'}_2)\bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 =$$
$$= ((\beta_1 \vee \gamma_1)\beta_2 \vee \gamma_2\beta_1)x_u \vee (({\beta'}_2 \vee \gamma_2){\beta'}_1 \vee \gamma_1{\beta'}_2)\bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2.$$

Такая реализация операции логического перемножения, порождает 5 конъюнкций. Она позволяет отказаться от получения дизъюнктивно-инверсной формы (ДИФ) $Q_u(f_{(j)})$ сложной по x_u конъюнкции, рассмотренной в [1], которая при логическом умножении порождает не менее 6 конъюнкций.

$$Q_u(\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)})) = \neg(\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)})) = \neg\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \vee \neg\widetilde{d}_u(f_{(t)}) =$$
$$= ((\neg\beta_1 \vee \neg x_u)(\neg\beta'_1 \vee x_u)\neg\gamma_1) \vee ((\neg\beta_2 \vee \neg x_u)(\neg\beta'_2 \vee x_u)\neg\gamma_2) =$$
$$= ((\neg\beta_1 x_u \vee \neg\beta'_1\neg x_u \vee \neg\beta_1\neg\beta'_1)\neg\gamma_1) \vee ((\neg\beta_2 x_u \vee \neg\beta'_2\neg x_u \vee \neg\beta_2\neg\beta'_2)\neg\gamma_2) =$$
$$= (\neg\beta_1\neg\gamma_1 x_u \vee \neg\beta_2\neg\gamma_2 x_u \vee \neg\beta'_1\neg\gamma_1\neg x_u \vee \neg\beta'_2\neg\gamma_2\neg x_u \vee \neg\beta_1\neg\beta'_1\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\beta'_2\neg\gamma_2) =$$
$$= (\neg\beta_1\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\gamma_2)x_u \vee (\neg\beta'_1\neg\gamma_1 \vee \neg\beta'_2\neg\gamma_2)\neg x_u \vee (\neg\beta_1\neg\beta'\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\beta'_2\neg\gamma_2).$$

Очевидно, что уменьшение числа логических произведений в формулах, представляющих результаты выделения очередной переменной x_u, позволит избежать при выделении следующих переменных $x_t, t \in \{x_1, \ldots, x_{u-1}, x_{u+1}, \ldots, x_{k_0}\}$ выполнение операций перемножения приведенных по x_t форм входящих в них сомножителей и таким образом замедлить рост объемов памяти ЭВМ, занимаемой промежуточными формами. Так для решения с помощью предложенного алгоритма логического уравнения из примера 4 работы [1] потребуется разместить в памяти ЭВМ не более 430 символов вместо 700 символов, необходимых при применении варианта алгоритма из [1].

Если формула логического произведения содержит n трёхчленных приведенных форм сомножителей, то эффективность применения предложенного приема по сравнению с применением ДИФ [1] составит для 2-х сомножителей 6/5=1,2, а для n сомножителей — $(6/5)^{(n-2)}$ раз, и уже при $n = 20$ превысит 26 раз.

В дальнейшем такую реализацию операции логического перемножения условимся называть перемножением с неполным раскрытием скобок.

2. Отказ от нахождения всех членов дизъюнктивных нормальных форм суперпозиции локальных функций

В [1] задача вычисления корней логического уравнения $F(x_1, \ldots, x_{k_0}) = 1$ интерпретируется как задача приведения структуры F к ДНФ. Однако при этом могут быть утеряны те свойства практических задач, которые позволили их компактно сформулировать (доступным числом символов). Иначе говоря, не только промежуточные формы, но и ДНФ функции F может оказаться намного сложнее формы ее задания. В этом случае ресурсы памяти, необходимые для размещения конечного результата решения задачи, можно значительно уменьшить, если интерпретировать ее как задачу получения из структуры F, заданной совокупностью S_w, скобочной совокупности S''_w вида (1), не образующей нуль конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ для всех

$u \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$ при приведении ее к ДНФ. Будем называть ее, как и форму функции F, представленную указанной совокупностью, полностью усеченной или усеченной по всем отсекающим переменным в отличие от совокупности S''_{wu}, усеченной по переменной x_u. Если после выделения всех отсекающих переменных, из усеченной совокупности S''_w исключены локальные функции, зависящие от переменных выделения x_u (кроме $\bar{d}_u(F)$), будем называть ее усеченной безызбыточной совокупностью приведенных функций или (F). В некоторых случаях при ограниченных ресурсах памяти достаточно получить хотя бы один или часть членов конечной ДНФ, отличных от нуля. После построения S''_w часть корней логического уравнения легко найти, оставив в формулах ДФ всех функций первого ранга по одной элементарной конъюнкции, а затем выполняя поэтапную подстановку и преобразование к ДФ локальных функций $f_1^2, \ldots, f_{k_2}^2, f_1^3, \ldots, f_{k_3}^3, \ldots, f_1^n, \ldots, f_{k_n}^n$ от 2-го до самого высшего ранга, исключая с целью экономии памяти на каждом этапе некоторое количество полученных элементарных конъюнкций. Для получения только одного корня можно выполнять поэтапную подстановку и преобразование к ДФ локальных функций $f_1^2 \ldots, f_{k_n}^2, f_1^3 \ldots, f_{k_{nn-1}}^3, \ldots, f_1^n, \ldots, f_{k_2}^n$ от 2-го до самого высшего ранга, оставляя в формуле ДФ после каждого преобразования локальной функции лишь один член.

Пример 1. Задана усеченная по всем переменным совокупность функций S''_w, представляющая функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_{60})$.

$$f_{(4)} = x_{55} \vee x_{56} \vee x_{57}, f_{(5)} = x_{58} \vee x_{59} \vee x_{60}, f_{(6)} = x_{45} \vee x_{46} \vee x_{47} \vee x_{48} \vee x_{49},$$
$$f_{(7)} = x_{50} \vee x_{51} \vee x_{52} \vee x_{53} \vee x_{54}, f_{(8)} = x_1 \vee x_2 \vee x_3, f_{(9)} = x_4 \vee x_5 \vee x_6,$$
$$f_{(10)} = x_7 \vee x_8 \vee x_9, f_{(11)} = x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12}, f_{(12)} = x_{12} \vee x_{13} \vee x_{14}, f_{(13)} = x_{15} \vee x_{16} \vee x_{17},$$
$$f_{(14)} = x_{18} \vee x_{19} \vee x_{20}, f_{(15)} = x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}, f_{(16)} = x_{24} \vee x_{25} \vee x_{26}, f_{(17)} = x_{27} \vee x_{28} \vee x_{29},$$
$$f_{(18)} = x_{30} \vee x_{31} \vee x_{32}, f_{(19)} = x_{33} \vee x_{34} \vee x_{35}, f_{(20)} = x_{36} \vee x_{37} \vee x_{38}, f_{(21)} = x_{39} \vee x_{40} \vee x_{41},$$
$$f_{(22)} = x_{42} \vee x_{43} \vee x_{44}, f_{(1)} = f_{(8)}f_{(9)} \vee f_{(10)}f_{(11)}f_{(12)}, f_{(2)} = f_{(13)}f_{(14)} \vee f_{(15)}f_{(16)}f_{(17)},$$
$$f_{(3)} = f_{(18)}f_{(19)} \vee f_{(20)}f_{(21)}f_{(22)}, F = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}f_{(4)}f_{(5)} \vee f_{(6)}f_{(7)}.$$

Найдем часть корней уравнения F. Для этого сократим число членов ДФ функций первого ранга до 1:

$$f_{(8)} = x_1, f_{(9)} = x_4, f_{(10)} = x_7, f_{(11)} = x_{10}, f_{(12)} = x_{12}, f_{(13)} = x_{15}, f_{(14)} = x_{18}, f_{(15)} = x_{21},$$
$$f_{(16)} = x_{24}, f_{(17)} = x_{27}, f_{(18)} = x_{30}, f_{(19)} = x_{33}, f_{(20)} = x_{36}, f_{(21)} = x_{39}, f_{(22)} = x_{42},$$
$$f_{(4)} = x_{55}, f_{(5)} = x_{58}, f_{(6)} = x_{45}, f_{(7)} = x_{50}.$$

Подставив сокращенные выражения в ДФ функций 2-го ранга, получим:

$$f_{(1)} = f_{(8)}f_{(9)} \vee f_{(10)}f_{(11)}f_{(12)} = x_1x_4 \vee x_7x_{10}x_{12}, f_{(2)} = f_{(13)}f_{(14)} \vee f_{(15)}f_{(16)}f_{(17)} =$$

$$x_{15}x_{18} \vee x_{21}x_{24}x_{27}, f_{(3)} = f_{(18)}f_{(19)} \vee f_{(20)}f_{(21)}f_{(22)} = x_{30}x_{33} \vee x_{34}x_{39}x_{42}.$$

Подставляя преобразованные функции 2-го ранга в функцию 3-го ранга F и выполнив заданные в F алгебраические операции, преобразуем ее в скобочную форму – логическую сумму 2-х логических произведений элементарных конъюнкций, представляющую часть конечной ДНФ исходной суперпозиции S''_w.

$$F = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}f_{(4)}f_{(5)} \vee f_{(6)}f_{(7)} =$$

$$= (x_1x_4 \vee x_7x_{10}x_{12})(x_{15}x_{18} \vee x_{21}x_{24}x_{27})(x_{30}x_{33} \vee x_{34}x_{39}x_{42})x_{55}x_{58} \vee x_{45}x_{50}.$$

Для перебора всех комбинаций ДНФ из скобок-сомножителей, образующих первое слагаемое результата, можно сформировать вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, число p компонент которого равно числу перемножаемых скобок. Установим, что значения компонент $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_p$ равны порядковым номерам $a_i > 0$ соответствующих элементарных конъюнкций внутри скобки, и каждая i-ая компонента $a_i \leq \max(a_i)$ является i-ым разрядом некоторого числа $a_1a_2 \ldots a_i \ldots a_p$, записанного в позиционной системе счисления с основанием $\max(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_p) + 1$. Тогда можно, изменяя значения этого числа на 1 от величины $11\ldots1$ до $\{\max(a_1)\max(a_2)\ldots\max(a_i)\ldots\max(a_p)\}$, получить все комбинации членов ДНФ-сомножителей без пропусков и повторений. Для первого слагаемого логической суммы F из рассматриваемого примера получим 8 значений вектора $\vec{a}$: {1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 2, 1}, {1, 2, 2}, {2, 1, 1}, {2, 1, 2}, {2, 2, 1}, {2, 2, 2}, что соответствует корням

$$x_1x_4x_{15}x_{18}x_{30}x_{33}x_{55}x_{58},\ x_1x_4x_{15}x_{18}x_{34}x_{39}x_{42}x_{55}x_{58},\ x_1x_4x_{21}x_{24}x_{27}x_{30}x_{33}x_{55}x_{58},$$

$$x_1x_4x_{21}x_{24}x_{27}x_{34}x_{39}x_{42}x_{55}x_{58},\ x_7x_{10}x_{12}x_{15}x_{18}x_{30}x_{33}x_{55}x_{58},\ x_7x_{10}x_{12}x_{15}x_{18}x_{34}x_{39}x_{42}x_{55}x_{58},$$

$$x_7x_{10}x_{12}x_{21}x_{24}x_{27}x_{30}x_{33}x_{55}x_{58}.$$

Второе слагаемое $x_{45}x_{50}$ полученной логической суммы является 9-м корнем логического уравнения F. Если для первого слагаемого суммы достаточно получить только один корень, можно ограничиться первым значением вектора $\vec{a}$ или на каждом этапе преобразований оставлять в каждой полученной ДФ только один член.

3. Усиление метода выделения переменных путём изменения критерия эффективности их выбора

В [4, 1] сложность суперпозиции F логических функций оценивалась суммарным количеством символов (букв) в совокупности локальных функций, полученных в результате реализации всех операций их поэтапной подстановки и логического перемножения. Однако для более точной оценки объема промежуточной информации при реализации этапов, следующих за рассматриваемым, сложность совокупности локальных функций (выражаемая числом букв) и эффективность произведенного выделения переменной x_u можно измерять другими показателями, связанными, например, с количеством конъюнкций в скобочной либо иных формах суперпозиции до и после выделения x_u.

Определение 5. Суммарное число конъюнкций в исходной совокупности S_w (усеченной совокупности $S''{}_{wu}$) до (после) выделения переменной x_u будем обозначать символом $K(S_w)$, $(K(S''{}_{wu}))$. Суммарное число конъюнкций $K(S_w)$ $(K(S''{}_{wu}))$ в ДНФ суперпозиции F, задаваемой исходной совокупностью S_w (усеченной по x_u совокупностью $S''{}_{wu}$), до (после) выделения переменной x_u будем определять, считая, что нуль-конъюнкции $x_u\bar{x}_u$ $(x_z\bar{x}_z)$ всех не выделенных перед подсчетом переменных (x_u в S_w, x_z $(z \neq u)$ в $S''{}_{wu}$) соответствующей совокупности не обнулены. Величины $K(S_w)$, $K(S''_{wu})$ $((S_w), (S''_{wu})$ будем называть соответственно числами конъюнкций в КФ (в ДНФ) совокупностей $S_w, S''{}_{wu}$. Наряду с ними в зависимости от контекста будем использовать обозначения $K, K(f_{(j)}), K(F), K, K(f_{(j)}), K(F)$.

Для любых локальных функций $f_{(p)}$ 1-го ранга числа конъюнкций в КФ и ДНФ одинаковы и равны числу дизъюнктивных членов в формуле $f_{(p)}$: $K(f_{(p)}) = K(f_{(p)})$, а для любых выражений $f_{(y)} = f_{(i)} \vee f_{(j)}(f_{(y)} = f_{(i)} \wedge f_{(j)})$ ранга $r(f_{(p)}) > 1$ величину $K(f_{(p)})$ можно определить по формуле $K(f_{(y)}) = = K(f_{(i)}) + K(f_{(j)})$ $(K(f_{(y)}) = K(f_{(i)}) \times K(f_{(j)}))$. Критерием эффективности выделения переменной x_u в [1] было выбрано число локальных функций, которые она графически определяет до выделения. Очевидно, что более точно указанная эффективность (x_u) может быть определена величиной, прямо пропорциональной величине $\Delta K(F) = K(S_w) - K(S''_{wu})$ уменьшения числа конъюнкций в ДНФ суперпозиции F и обратно (прямо) пропорциональной увеличению (уменьшению) числа $\Delta K(F) = K(S''_{wu}) - K(S_w)(-\Delta K(F))$ конъюнкций в КФ суперпозиции F в результате выделения переменной x_u. То есть

$$(x_u) = \begin{cases} \Delta K(F)/(\Delta(F) + 1/\Delta K(F)), & \text{если } \Delta(F) > 0, \\ \Delta K(F), & \text{если } \Delta(F) = 0, \\ \Delta(F) \times ABS(\Delta K(F) + 1/\Delta(F)), & \text{если } \Delta(F) < 0. \end{cases}$$

Поправка $1/\Delta K(F)$ введена для однозначности значений (x_u) при $\Delta K(F) > 0$, $\Delta K(F) < 0$ и $\Delta K(F) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим применение предложенного критерия эффективности при решении логического уравнения F, заданного совокупностью отношений: $S_w\{f_{(1)} = f_{(5)}x_1 \vee f_{(6)}\bar{x}_2, f_{(2)} = f_{(7)}\bar{x}_1 \vee f_{(8)}x_2, f_{(3)} = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2, F = f_{(4)} = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}\}$, где каждая из формул локальных функций $f_{(v)} = f_{(v1)}f_{(v2)} \vee f_{(v3)}f_{(v4)}$ $(v \in \{5, 6, 7, 8\})$ 2-го ранга включает 4 функции $f_{(v1)} = \beta_{v1}x_u \vee \beta'{}_{v1}\bar{x}_u \vee \gamma_{v1}$, $f_{(v2)} = \beta_{v2}x_u \vee \beta'{}_{v2}\bar{x}_u \vee \gamma_{v2}$,

$f_{(v3)} = \beta_{v3}x_u \vee \gamma_{v3}$, $f_{(v4)} = \beta_{v4}x_u \vee \gamma_{v4}$ 1-го ранга, графически зависящих от своих отсекающих переменных $x_u(u = v-2, v \in \{5,6,7,8\})$. При прежнем критерии эффективности первой была бы выделена одна из переменных $x_u(u \in \{3,4,5,6\})$, графически определяющая соответствующие четвёрки функций $f_{(v1)}, f_{(v2)}, f_{(v3)}, f_{(v4)}$. Для рассмотрения нового критерия эффективности определим количества K, K конъюнкций в КФ и ДНФ исходной совокупности S_w функции F соответственно.

$$(f_{(v)}) = (f_{(v1)}f_{(v2)} \vee f_{(v3)}f_{(v4)}) + (f_{(v1)}) + (f_{(v2)}) + (f_{(v3)}) + (f_{(v4)}) =$$
$$= 2+3+3+2+2 = 12\ (v \in \{5,6,7,8\}), (f_{(v)}) = (f_{(v1)}) \times (f_{(v2)}) +$$
$$+(f_{(v3)}) \times (f_{(v4)}) = 3 \times 3 + 2^2 = 9 + 2^2 = 13\ (v \in \{5,6,7,8\}),$$
$$K(S_w) = K(f_{(1)}) + K(f_{(2)}) + K(f_{(3)}) + K(f_{(4)}) + K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) =$$
$$= 2+2+2+1+K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) = 7 + (4 \times 12) = 55,$$
$$K(S_w) = K(f_{(4)}) = K(f_{(1)}) \times K(f_{(2)}) \times K(f_{(3)}) =$$
$$= (K(f_{(5)}) + K(f_{(6)})) \times (K(f_{(7)}) + K(f_{(8)})) \times 2 =$$
$$= 2 \times K(f_{(5)}) \times K(f_{(7)}) + 2 \times K(f_{(5)}) \times K(f_{(8)}) + 2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(7)}) +$$
$$+2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(8)}) = (2 \times (9+2^2)) \times (2 \times (9+2^2)) \times 2 = 8 \times (9+2^2)^2 = 1352.$$

Для выбора выделяемой переменной по новому критерию произведем пробные выделения переменных

$$x_1, x_2, x_u(u \in \{3,4,5,6\}), \widetilde{d}_1(f_{(1)}) = f_{(5)}x_1 \vee f_{(9)},$$
$$f_{(9)} = f_{(6)}\bar{x}_2, \widetilde{d}_1(f_{(2)}) = f_{(7)}\bar{x}_1 \vee f_{(10)}, f_{(10)} = f_{(8)}x_2, \widetilde{d}_1(f_{(3)}) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2,$$
$$\widetilde{d}_1(f_{(4)}) = \widetilde{d}_1(f_{(1)})\widetilde{d}_1(f_{(2)})\widetilde{d}_1(f_{(3)}) = (f_{(5)}f_{(10)}x_1 \vee f_{(9)}f_{(7)}\bar{x}_1 \vee f_{(9)}f_{(10)})\widetilde{d}_1(f_{(3)}) =$$
$$= f_{(5)}f_{(10)}x_1\bar{x}_2 \vee f_{(9)}f_{(7)}\bar{x}_1x_2 \vee f_{(9)}f_{(10)}x_1\bar{x}_2 \vee f_{(9)}f_{(10)}\bar{x}_1x_2.$$

В результате выделения переменной x_1 получим усеченную по x_1 совокупность приведенных функций $S''_{w1} = \{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(9)}, f_{(10)}, \widetilde{d}_1(f_{(4)})\}$. Теперь количества K, K конъюнкций в КФ и в ДНФ совокупности S''_{w1} функции F составят:

$$K(S''_{w1}) = K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + K(f_{(9)}) + K(f_{(10)}) + K(\widetilde{d}_1(f_{(4)})) =$$
$$= K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 1 + 1 + 4 = K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 6.$$
$$\Delta K(F) = K(S''_{w1}) - K(S_w) = K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 6 -$$
$$-(7 + K(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\})) = -1,$$
$$K(S''_{w1}) = K(\tilde{d}_1(f_{(4)})) = K(f_{(5)}) \times K(f_{(10)}) +$$
$$+K(f_{(9)}) \times K(f_{(7)}) + K(f_{(9)}) \times K(f_{(10)}) + K(f_{(9)}) \times K(f_{(10)}).$$

Так как

$$K(f_{(9)}) = K(f_{(6)}), K(f_{(10)}) = K(f_{(8)}), K(S''_{w1}) = K(\widetilde{d}_1(f_{(4)})) =$$
$$= K(f_{(5)}) \times K(f_{(8)}) + K(f_{(6)}) \times K(f_{(7)}) + 2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(8)}),$$
$$\Delta K(F) = K(S_w) - K(S''_{w1}) = 2 \times K(f_{(5)}) \times K(f_{(7)}) +$$
$$+2 \times K(f_{(5)}) \times K(f_{(8)}) +$$
$$+2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(7)}) + 2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(8)}) - (K(f_{(5)}) \times K(f_{(8)}) +$$
$$+K(f_{(6)}) \times K(f_{(7)}) + 2 \times K(f_{(6)}) \times K(f_{(8)})) =$$
$$= 2 \times K(f_{(5)}) \times K(f_{(7)}) + K(f_{(5)}) \times K(f_{(8)}) + K(f_{(6)}) \times K(f_{(7)}).$$

Так как

$$K(f_{(v)}) = (9 + 2^2) = 13 \ (v \in \{5, 6, 7, 8\}),$$
$$\Delta K(F) = 2 \times (9 + 2^2)^2 + (9 + 2^2)^2 + (9 + 2^2)^2 = 4 \times (9 + 2^2)^2 = 676.$$

Пренебрегая с целью упрощения вычислений поправкой $1/\Delta K(F)$, получим $(x_1) = \Delta K(F) \times ABS(\Delta K(F)) = 676 \times 1 = 676$. Аналогично для x_2 – $(x_2) = 676$. Оценим эффективность выделения переменной x_3.

$$\widetilde{d}_3(f_{(51)}) = \beta_{51}x_3 \vee \beta\prime_{51}\bar{x}_3 \vee \gamma_{51}, \widetilde{d}_3(f_{(52)}) = \beta_{52}x_3 \vee \beta\prime_{52}\bar{x}_3 \vee \gamma_{52},$$
$$\widetilde{d}_3(f_{(53)}) = \beta_{53}x_3 \vee \gamma_{53}, \widetilde{d}_3(f_{(54)}) = \beta_{54}x_3 \vee \gamma_{54},$$
$$\widetilde{d}_3(f_{(5)}) = \widetilde{d}_3(f_{(51)})\widetilde{d}_3(f_{(52)}) \vee \widetilde{d}_3(f_{(53)})\widetilde{d}_3(f_{(54)}) = \beta_5 x_3 \vee \beta\prime_5 \bar{x}_3 \vee \gamma_5,$$

где

$$\beta_5 = \beta_{51}\beta_{52} \vee \beta_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{51}\beta_{52} \vee \beta_{53}\beta_{54} \vee \beta_{53}\gamma_{54} \vee \beta_{54}\gamma_{53},$$
$$\beta\prime_5 = \beta\prime_{51}\beta\prime_{52} \vee \beta\prime_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{51}\beta\prime_{52}, \gamma_5 = \gamma_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{53}\gamma_{54},$$
$$(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = (\beta_5) + (\beta\prime_5) + (\gamma_5) = 6 + 3 + 2 = 11,$$
$$\widetilde{d}_3(f_1) = \widetilde{d}_3(f_{(5)})x_1 \vee f_{11} = (\beta_5 x_3 \vee \beta\prime_5 \bar{x}_3 \vee \gamma_5)x_1 \vee f_{(11)} = \beta_1 x_3 \vee \beta\prime_1 \bar{x}_3 \vee \gamma_1,$$

где

$$\beta_1 = \beta_5 x_1, \beta\prime_1 = \beta\prime_5 x_1, \gamma_1 = \gamma_5 x_1 \vee f_{(11)}, f_{(11)} = f_{(6)}\bar{x}_2,$$

функции

$$f_{(v)}(x_u) \in S_w(v \in \{6, 7, 8\}, u = v - 2)$$

не изменяются.

$$(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) = K(\widetilde{d}_3 f_{(5)})) + (f_{(11)}) = (\widetilde{d}_3 f_{(5)})) + 1 + (f_{(6)}\bar{x}_2) =$$
$$= 11 + 1 + (f_{(6)}) = 12 + 12 = 24,$$
$$d_3(f_{(4)}) = (\widetilde{d}_3(f_1))f_{(2)}f_{(3)} = (\beta_1 x_3 \vee \beta\prime_1 \bar{x}_3 \vee \gamma_1)f_{(2)}f_{(3)} = \beta_4 x_3 \vee \beta\prime_4 \bar{x}_3 \vee \gamma_4,$$

где

$$\beta_4 = \beta_1 f_{(2)} f_{(3)}, \beta\prime_4 = \beta\prime_1 f_{(2)} f_{(3)}, \gamma_4 = \gamma_1 f_{(2)} f_{(3)}, f_{(2)} \in S_w, f_{(3)} \in S_w.$$

$$(d_3(f_{(4)})) = K(\beta_4 x_3 \vee \beta\prime_4 \bar{x}_3 \vee \gamma_4) + (\beta_4) + (\beta\prime_4) + (\gamma_4) + (f_{(2)}) + (f_{(3)}) =$$
$$K(\beta_4 x_3 \vee \beta\prime_4 \bar{x}_3 \vee \gamma_4) + (\beta_4) + (\beta\prime_4) + (\gamma_4) +$$
$$(f_{(7)} \bar{x}_1) + (f_{(8)} x_2) + (f_{(3)}) = 3 + 1 + 1 + 1 + 12 + 12 + 2 = 32.$$

Так как

$$K(S_w) = 55, K(\widetilde{d}_3(f_{(4)}) = 24,$$

и

$$K(S''_{w3}) = K(\widetilde{d}_3(f_{(1)}) + K(\widetilde{d}_3(f_{(4)}) = 24 + 32 = 56,$$

то

$$\Delta K(F) = K(S''_{w3}) - K(S_w) = 56 - 55 = 1.$$

Так как

$$K(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = K(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = (7 + 2^2) = 11$$

и

$$K(f_{(11)}) = K(f_{(6)} \bar{x}_2) = K(f_{(6)}),$$

то

$$K(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) = K(\widetilde{d}_3(f_{(5)}) + K(f_{(6)})) = (7 + 2^2) + (9 + 2^2) = 24,$$
$$K(S''_{w3}) = K(\widetilde{d}_3(f_{(4)})) = K(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) \times \{K(f_{(2)}) \times K(f_{(3)}) =$$
$$= K(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) \times (K(f_{(7)}) + K(f_{(8)})) \times K(f_{(3)}) =$$
$$= ((7{+}2^2){+}(9{+}2^2)){\times}((9{+}2^2){+}(9{+}2^2)){\times}2 = (7{+}2^2){\times}(9{+}2^2){\times}4{+}4{\times}((7{+}2^2){+}2){\times}(9{+}2^2) =$$
$$= 8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) + 8 \times (9 + 2^2) = 1248.$$

Так как

$$K(S_w) = 8 \times (9 + 2^2)^2 = 8 \times ((7 + 2^2) + 2) \times (9 + 2^2) = 8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) +$$
$$+16 \times (9 + 2^2) = 1352,$$

то

$$\Delta K(F) = K(S_w) - K(S''_{w3}) =$$
$$= 8{\times}(7{+}2^2){\times}(9{+}2^2){+}16{\times}(9{+}2^2){-}(8{\times}(7{+}2^2){\times}(9{+}2^2){+}8{\times}(9{+}2^2)) = 8{\times}(9{+}2^2) =$$
$$= 1352 - 1248 = 104.$$

Пренебрегая с целью упрощения вычислений поправкой $1/\Delta K(F)$, получим $(x_3) = \Delta K(F)/ABS(\Delta K(F)) = 104/1 = 104$. Аналогично для x_u ($u \in \{4, 5, 6\}$) – $(x_u) = 104$. То есть по новому критерию эффективность $(x_u) = 104$ выделения переменных x_u $(u \in \{3,4,5,6\})$ меньше эффективности $(x_1) = (x_2) = 676$ выделения переменных x_1, x_2. Легко проверить, что при увеличении числа n сомножителей во вторых слагаемых формул функций f_v $(v \in \{5,6,7,8\})$ на величину $\Delta > 0$ знаменатели показателей (x_1), (x_2), не изменяются, а их числители станут равными $8 \times (9 + 2^{2+\Delta})^2$. Числитель показателя (x_u) $(u \in \{3,\ldots,6\})$ станет равным $4 \times (9 + 2^{2+\Delta})$, а значение его знаменателя возрастет. То есть показатели (x_1), (x_2) более чем в $8 \times (9 + 2^{2+\Delta})^2 / 4 \times (9 + 2^{2+\Delta}) = 2 \times (9 + 2^{2+\Delta})$ раз превысят показатель (x_u). Следовательно, приоритет переменных x_1, x_2 при выборе переменной выделения сохранится. В указанном случае, увеличивая n, можно сделать разницу объёмов промежуточных форм при выделениях переменных x_1, x_2 и переменных x_u $4(u \in \{3,4,5,6\})$, сколь угодно большой. Очевидно, что в той же мере будет расти и эффективность применения нового критерия, так как применение прежнего критерия при увеличении n ведет к бесконтрольному росту объёма промежуточных выражений.

4. Уменьшение наибольшего объёма промежуточных форм

Уменьшение наибольшего объёма промежуточных форм, получаемых в процессе выделения переменных, обеспечивается за счёт отказа от подстановки или упрощением вида тех приведенных форм локальных функций, которые не влияют на образование нуль-конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ при получении дизъюнктивной нормальной формы функции F.

Введем ряд обозначений и определений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 6. Совокупность формул $S_T(x_u)$, полученную из исходной совокупности S_w в результате выделения отсекающей переменной x_u полностью во всех без исключения локальных функциях исходной совокупности S_w, для которых это возможно, условимся называть *тотальной усечённой совокупностью приведенных по x_u функций или* (x_u).

Она включает и приведенные по x_u формы локальных функций, графически зависящие от x_u, от которых главная функция суперпозиции [5] F перестаёт зависеть после выделения x_u. Совокупность $S_{TT}(x_u)$, полученную из $S_T(x_u)$ удалением локальных функций, от которых главная функция F суперпозиции перестала зависеть после выделения x_u, будем называть тотальной усеченной безызбыточной совокупностью или (x_u).

Определение 7. Минимально возможную по числу $K(S''_{wu})$ входящих в нее конъюнкций совокупность S''_{wu} формул, полученную из исходной совокупности S_w в результате выделения переменной x_u и не отличающуюся от (x_u) по количеству

$K(S''_{wu})$ конъюнкций в ДНФ суперпозиции F локальных функций, условимся называть минимальной усеченной совокупностью $S_M(x_u)$ приведенных по x_u функций или (x_u). Она включает формы локальных функций, графически зависящие от x_u, от которых после выделения x_u перестала зависеть главная функция суперпозиции F. Совокупность $S_{MN}(x_u)$, полученную из $S_M(x_u)$ удалением локальных функций, от которых после выделения x_u перестала зависеть главная функция суперпозиции F, будем называть минимальной усеченной безызбыточной совокупностью или (x_u). Если совокупность $S_M(x_u)$ минимальна для всех отсекающих переменных x_u $(u \in \{1, 2, \ldots, k_0\})$, будем называть ее минимальной усеченной безызбыточной совокупностью приведенных функций по всем переменным или (F).

В [1] задача нахождения корней суперпозиции F локальных функций решалась путем последовательного получения тотальных усеченных совокупностей $S_T(x_u)$ приведенных форм функций для всех отсекающих переменных и исключением из дальнейшего рассмотрения функций, от которых главная функция суперпозиции F перестала зависеть после выделения. Для сокращения объема промежуточной информации в настоящей работе предлагается свести решение поставленной в [1] задачи к получению не тотальных, а минимальных усеченных совокупностей $S_M(x_u)$ приведенных функций. В связи с этим возникает задача получения таких совокупностей при выделении переменной x_u. Некоторые свойства приведенных по x_u форм локальных функций и минимальных совокупностей (x_u) таких форм могут помочь их построить.

Определение 8. Условимся неприведенную относительно x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ (графически равную $f_{(j)}$ при подстановке) любой локальной функции $f_{(j)}$ относить к 1-му типу. Приведенную относительно x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ будем относить ко 2-му (положительному), 3-му (отрицательному) либо 4-му (биполярному) типу $T_u(f_{(j)})$, если $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta\ x_u \vee \gamma', \widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta'\ \bar{x}_u \vee \gamma''$ либо $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \beta' \bar{x}_u \vee \gamma$ соответственно.

Здесь β, β' – выражения, не равные нулю и не зависящие от переменной x_u, γ — выражение, не зависящее от переменной x_u, γ'', γ' — выражения, которые могут зависеть от прямой формы переменной x_u либо ее инверсии соответственно.

Определение 9. Если приведенная относительно x_u форма $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ существует (то есть $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ графически не равна $f_{(j)}$) и принято решение о подстановке $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ вместо какого-либо вхождения $f_{(j)}$ в формулы других локальных функций в виде форм 2-го, 3-го или 4-го типа, то будем называть указанное вхождение активным и обозначать его тип как $A2$, $A3$ или $A4$ соответственно. Все вхождения переменной выделения x_u в прямой или инверсной форме (подобно вхождению функций $f_{(j)} = x_u$ либо $f_{(j)} = \bar{x}_u$) будем относить к типам $A2$ или $A3$ соответственно. Если решения о подстановке не принято, то вхождение $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ будем называть пассивным и обозначать его тип как $P2$, $P3$ или $P4$ соответственно. Если приведенной относительно x_u формы $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ не существует или ее вхождение не ведет при выделении x_u к образованию новых нуль-конъюнкций, будем обозначать тип ее вхождения как $P1$. К типу $P1$ будем относить также все вхождения независимых переменных кроме переменной выделения x_u (тип $P2$) или ее инверсии (тип $P3$). Условимся опускать буквы A или P в обозначении типа, если они не влияют на смысл содержащего его предложения.

При получении в [1] усеченной совокупности $S_T(x_u)$ приведенных форм локальных функций базовые приведенные формы $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_T(x_u)$ этих функций и их вхождения в формулы разных функций более высоких рангов полностью совпадали графически. Для сокращения объемов минимальной совокупности $S_M(x_u)$ приведенных форм функций будем допускать, чтобы одна и та же функция $f_{(j)}$ входила в формулы других функций в виде форм, отличающихся графически от базовых приведенных форм $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_M(x_u)$ либо даже в неприведенной форме $f_{(j)}$. Например, приведенные формы биполярного 4-го типа, при их логическом перемножении могут образовывать нуль-конъюнкции в комбинации с приведенными формами всех типов, выступая в каждом конкретном случае как приведенные формы 2-го, 3-го или 4-го типа в зависимости от того, какая часть (положительная, отрицательная или обе) формы задействована в образовании нуль-конъюнкций.

Задействованные части формы будем отображать их активными типами, записанными в виде верхних индексов обозначений основного типа – $A4^2$, $A4^3$, $A4^4$. Незадействованные части формы 4-го типа будем относить к пассивному типу $P4^2$, $P4^3$, $P4^4$, который может указываться в обозначении типа в фигурных скобках вслед за активным, например, $A4^2\{P4^3\}$ или $A4^3\{P4^2\}$. Типы 4^2, 4^3 будем называть подтипами типа 4, т.к. любая приведенная форма локальной функции 4-го типа $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \beta' \bar{x_u} \vee \gamma$ легко представляется в виде приведенной формы $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \gamma'$ подтипа 4^2, где $\gamma' = \beta' \bar{x}_u \vee \gamma$ либо $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta' \ \bar{x}_u \vee \gamma''$ подтипа 4^3, где $\gamma'' = \beta x_u \vee \gamma'$ Поэтому в дальнейшем будем отличать типы базовых приведенных функций от типов их вхождений. Будем считать также, что обозначения 4^4 и 4 равнозначны.

Определение 10. Будем говорить, что приведенная по x_u форма $\widetilde{d}_u(f_{(i)}) = \beta_1 x_u \vee \beta'_1 \bar{x}_u \vee \gamma_1$ функции $f_{(i)}$ превосходит (равна) по коэффициентам выделения приведенную по x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta_2 x_u \vee \beta'_2 \bar{x}_u \vee \gamma_2$ функции $f_{(j)}$, если $\beta_1 > \beta_2$, $\beta'_1 \geq \beta'_2$ либо $\beta_1 \geq \beta_2$, $\beta'_1 > \beta'_2 (\beta_1 = \beta_2, \beta'_1 = \beta'_2)$. Здесь отношения $\beta_1 > \beta_2$ $[\beta'_1 > \beta'_2]$, $\beta_1 = \beta_2$ $[\beta'_1 = \beta'_2]$ означают, что $(\beta_1 \neq 0,\ \beta_2 = 0)$, $[(\beta'_1 \neq 0,\ \beta'_2 = 0)]$ $(\beta_1 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0$ либо $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0)$ $[(\beta'_1 \neq 0,\ \beta'_2 \neq 0$ либо $\beta'_1 = 0,\ \beta'_2 = 0)]$ соответственно. Если для пары приведенных форм функций можно установить такие отношения превосходства или равенства, то будем называть указанные формы и их типы сравнимыми или сопоставимыми по коэффициентам выделения, типам вхождений или просто сопоставимыми. Любые варианты приведенных форм функций типа 4 будем считать сопоставимыми с приведенными формами любого другого типа, т.к. они содержат по крайней мере в неявном (пассивном) виде все коэффициенты выделения. Явно сопоставимы типы в парах 4, 2; 4, 3; 2, 1; 3, 1; 4, 1; 4^2, 4; 4^3, 4; 4^2, 2; 4^3, 3; неявно сопоставимы типы в парах 2, 4^3; 3, 4^2; 4^2, 4^3; а типы 2 и 3 несопоставимы.

Определение 11. Типы приведенных форм $\widetilde{d}_u(f_{(i)})$, $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ локальных функций, сами формы, графически зависящие от прямой (инверсной) или инверсной (прямой) формы x_u соответственно, их вхождения в формулы логических произведений $\widetilde{d}_u(f_{(i)})\widetilde{d}_u(f_{(j)})$, при реализации которых в ходе выделения x_u образуются нуль-конъюнкции $x_u \bar{x}_u$, будем называть нуль образующими по x_u относительно друг друга. Функциями, связанными с нуль образующими функциями, будем называть все функции $f_{(i)}$ меньших рангов, графически входящие в состав формул нуль образующих или связанных с ними функций $f_{(j)}$, типы вхождений $T_u(f_{(i)}) \neq P1$ которых совпадают или сопоставимы по коэффициентам выделения с типами $T_u(f_{(j)})$ функций $f_{(j)}$, формулы которых их графически включают. Возможны 9 пар нуль образующих типов – 2, 3; 2, 4^3; 2, 4; 3, 4^2; 3, 4; $4^2, 4^3$; 4^2, 4; 4^3, 4; 4, 4.

Определение 12. Локальную функцию $f_{(i)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0})$ или ее вхождение в формулу другой локальной функции $f_{(j)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0}, f_{(i)})$ будем называть отсекающими относительно прямой формы [6] переменной x_u (инверсии переменной x_u), если число конъюнкций $K(S''_{wu})$, полученных в ходе подстановки ее приведенной по x_u формы 2-го или 4^2 типа $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \gamma'$ (формы 3-го или 4^3 типа $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \widetilde{\beta}' \bar{x}_u \vee \gamma''$) при выделении переменной x_u в главной функции суперпозиции F, меньше указанного числа при отказе от подстановки. Если число конъюнкций $K(S''_{wu})$ не зависит от формы подставляемой функции $f_{(i)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0})$ при выделении x_u в функции F, то функция $f_{(i)}$ или ее вхождение являются неотсекающими относительно переменной x_u. Функция $f_{(i)}$ или ее вхождение 4-го типа могут быть отсекающими (неотсекающими) по обоим своим подтипам 4^2, 4^3 либо только по одному из них. Поэтому во втором случае следует определять их отсекающие подтипы как $A4^2$ либо $A4^3$. Если же функция $f_{(i)}$ 4-го типа или ее вхождение являются отсекающими и по прямой форме переменной x_u и по ее инверсии, будем говорить, что они отсекающие по обоим своим подтипам или отсекающие по типу $A4$ или полностью отсекающие по переменной x_u. Если функции или их вхождения являются отсекающими по прямой форме (инверсии) переменной x_u, то им соответствует тип $A2(A3)$ либо $A4^2(A4^3)$.

Очевидно, что локальная функция является отсекающей (неотсекающей) по переменной x_u, если имеется хотя бы одно (ни одного) отсекающее вхождение по переменной x_u в формулу любой другой локальной функции. Если функция является неотсекающей по переменной x_u, то ей соответствует тип $P1$. Если имеется не менее одного отсекающего вхождения функции по прямой форме (инверсии) переменной x_u и ни одного отсекающего вхождения по инверсии (прямой форме) переменной x_u, то будем говорить, что функция является отсекающей по прямой форме (инверсии) переменной x_u и относить ее к типу $A2(A3)$ либо $A4^2(A4^3)$. Если имеются отсекающие вхождения функции типа 4 и по прямой форме и по инверсии переменной x_u, то будем относить ее к типу $A4$ и говорить, что она полностью отсекающая.

Пример 3. Задана совокупность функций S_w:

$$\begin{cases} f_{(1)} = \beta_1 x_u \vee \gamma_1, f_{(2)} = \beta_2 x_u \vee \gamma_2, f_{(3)} = \beta_3 x_u \vee \gamma_3, f_{(4)} = \beta_4 x_u \vee \beta'_4 \bar{x}_u \vee \gamma_4, \\ f_{(5)} = \beta'_5 \bar{x}_u \vee \gamma_5, f_{(6)} = \beta_6 x_u \vee \gamma_6, f_{(7)} = \beta_7 x_u \vee \gamma_7, f_{(8)} = \beta_8 x_u \vee \gamma_8, \\ f_{(9)} = f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)} \vee f_{(4)} f_{(5)} \vee f_{(1)} f_{(4)}, f_{(10)} = \beta_{10} x_u \vee \gamma_{10}, \\ F = f_{(9)} f_{(6)} \vee f_{(7)} f_{(8)} \vee x_u f_{(10)}. \end{cases} \tag{3}$$

Если условиться, что количества K конъюнкций в дизъюнктивных формах коэффициентов β_1, γ_1, β_2, γ_2, β_3, γ_3, β_4, β'_4, γ_4, β'_5, γ_5, β_6, γ_6, β_7, γ_7, β_8, γ_8, β_{10}, γ_{10} всех локальных функций примера 3 равны единице, то легко подсчитать, что

$$K(f_{(j)}) = 2 \text{ при } j \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\},\ K(f_{(4)}) = 3,$$

$$K(f_{(9)}) = K(f_{(1)}) \times K(f_{(2)}) \times K(f_{(3)}) + K(f_{(4)}) \times K(f_{(5)}) + \\ + K(f_{(1)}) \times K(f_{(4)}) = 20.$$

Тогда число конъюнкций в ДНФ исходной совокупности функций S_w

$$K^0(S_w) = K(F) = K(f_{(9)}) \times K(f_{(6)}) + K(f_{(7)}) \times K(f_{(8)}) + \\ + K(x_u) \times K(f_{(10)}) = 46.$$

Определим, являются ли отсекающими по x_u 1-е и 2-е вхождения локальных функций $f_{(1)}$ и $f_{(4)}$ в формулу функции $f_{(9)}$, подтипы 4^2, 4^3 вхождений локальных функций $f_{(4)}$, $f_{(9)}$ и локальные функции $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, $f_{(7)}$, $f_{(8)}$, $f_{(10)}$.

Произведя выделение переменной x_u способом из [1] и раздела **I**, найдем (x_u).

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)}) = \beta_1 x_u \vee \gamma_1;\ \widetilde{d}_u(f_{(2)}) = \beta_2 x_u \vee \gamma_2;\ \widetilde{d}_u(f_{(3)}) = \beta_3 x_u \vee \gamma_3;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(4)}) = \beta_4 x_u \vee \beta'_4 \bar{x}_u \vee \gamma_4;\ \widetilde{d}_u(f_{(5)}) = \beta'_5 \bar{x}_u \vee \gamma_5;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(6)}) = \beta_6 x_u \vee \gamma_6;\ \widetilde{d}_u(f_{(7)}) = \beta_7 x_u \vee \gamma_7;\ \widetilde{d}_u(f_{(8)}) = \beta_8 x_u \vee \gamma_8;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(10)}) = \beta_{10} x_u \vee \gamma_{10};\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)}) = \widetilde{d}_u(f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(4)} f_{(5)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(1)} f_{(4)}) =\\
= \beta_{14} x_u \vee \beta'_{13} \bar{x}_u \vee \gamma_{14},\\
\quad \beta_{14} = \beta_{11} \vee \beta_{12} \vee \beta_{13},\ \beta'_{13} = \beta'_{11} \vee \beta'_{12},\ \gamma_{14} = \gamma_{11} \vee \gamma_{12} \vee \gamma_{13};\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)}) = \beta_{11} x_u \vee \gamma_{11},\\
\ \delta_1 = \beta_1 \vee \gamma_1,\ \delta_2 = \beta_3 \vee \gamma_3,\ \gamma_9 = \gamma_1 \gamma_2,\\
\ \gamma_{11} = \gamma_9 \gamma_3,\ \beta_9 = \delta_1 \beta_2 \vee \beta_1 \gamma_2,\ \beta_{11} = \delta_2 \beta_9 \vee \beta_3 \gamma_9;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(4)} f_{(5)}) = \beta_{12} x_u \vee \beta'_{11} \bar{x}_u \vee \gamma_{12},\\
\ \delta_3 = \beta'_5 \vee \gamma_5,\ \beta_{12} = \beta_4 \gamma_5,\ \beta'_{11} = \delta_3 \beta'_4 \vee \beta_4 \gamma_5,\ \gamma_{12} = \gamma_4 \gamma_5;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)} f_{(4)}) = \beta_{13} x_u \vee \beta'_{12} \bar{x}_u \vee \gamma_{13},\\
\ \delta_4 = \beta_4 \vee \gamma_4,\ \beta_{13} = \delta_4 \beta_1 \vee \beta_4 \gamma_1,\ \beta'_{12} = \beta'_4 \gamma_1,\ \gamma_{13} = \gamma_1 \gamma_4;\\
\ \widetilde{d}_u(F) = \widetilde{d}_u(f_{(9)} f_{(6)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(7)} f_{(8)}) \vee \widetilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = \beta_{17} x_u \vee \beta'_{14} \bar{x}_u \vee \gamma_{17},\\
\ \beta_{17} = \beta_{15} \vee \beta_{16} \vee \beta_{10} \vee \gamma_{10}, \quad \gamma_{17} = \gamma_{15} \vee \gamma_{16};\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)} f_{(6)}) = \beta_{15} x_u \vee \beta'_{14} \bar{x}_u \vee \gamma_{15},\\
\ \delta_5 = \beta_6 \vee \gamma_6,\ \beta'_{14} = \beta'_{13} \gamma_6,\ \beta_{15} = \delta_5 \beta_{14} \vee \beta_6 \gamma_{14},\ \gamma_{15} = \gamma_6 \gamma_{14};\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(7)} f_{(8)}) = \beta_{16} x_u \vee \gamma_{16},\\
\ \delta_6 = \beta_7 \vee \gamma_7,\ \beta_{16} = \delta_6 \beta_8 \vee \beta_7 \gamma_8,\ \gamma_{16} = \gamma_7 \gamma_8;\\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = (\beta_{10} \vee \gamma_{10}) x_u.
\end{array}\right. \tag{4}$$

Исключив помеченные сокращением «искл.» зависящие от x_u приведенные формы локальных функций, от которых функция F перестала зависеть, получим приведенную по x_u тотальную безызбыточную форму $\bar{d}_u(F)((x_u))$ главной функции суперпозиции F, в которой содержится $K(F) = 50$ конъюнкций. В ее ДНФ содержится $K^1(F) = 38$ конъюнкций, т.е. 8 конъюнкций из $K^0(F) = 46$ оказались нуль-конъюнкциями и были исключены из дальнейшего рассмотрения.

Если при выделении x_u не подставлять приведенную форму функции $f_{(1)}$ вместо ее первого (второго) вхождения в $f_{(9)}$, то количество конъюнкций в ДНФ функции F не изменится (увеличится на 1, $K(F) = 39;$). То есть второе вхождение функции $f_{(1)}$ в отличие от первого — отсекающее.

Если подобные испытания произвести поочередно для двух вхождений функции $f_{(4)}$ и вхождения функции $f_{(9)}$, то во всех случаях количество конъюнкций в ДНФ функции F увеличится. Следовательно оба эти вхождения 4-го типа — отсекающие. Если вместо второго вхождения функции $f_{(4)}$ и вхождения функции $f_{(9)}$ поочередно подставить представления $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ типа $4^3(4^2)$ этих же функций, то число конъюнкций $K(F) = 38$ не изменится (увеличится на 2 и 1 соответственно). Поэтому отсекающим типом второго вхождения функции $f_{(4)}$ и единственного вхождения функции $f_{(9)}$ будем считать подтип 4^3. Подтип 4^2 обоих вхождений является неотсекающим. Следовательно, первое вхождение функции $f_{(1)}$ – неотсекающее относительно переменной x_u, второе – отсекающее, оба вхождения функции $f_{(4)}$ – отсекающие, но второе вхождение $f_{(4)}$, как и вхождение $f_{(9)}$, имеет отсекающий тип 4^3. Результаты испытаний вхождений функций $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, $f_{(7)}$, $f_{(8)}$, $f_{(10)}$ аналогичны результатам испытаний первого вхождения функции $f_{(1)}$. То есть эти вхождения также неотсекающие по x_u. Наличие неотсекающих относительно переменной x_u вхождений функций либо вхождений функций 4-го типа с неотсекающими подтипами позволяет при выделении некоторой переменной x_u экономить промежуточную память, не активизируя такие вхождения или подтипы вхождений 4-го типа, т.е. не подставляя вместо них приведенные формы функций. Так в примере 3 можно уменьшить количество конъюнкций в формуле результата выделения переменной x_u, не подставляя приведенные формы функций $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, $f_{(1)}$ вместо вхождений $f_{(2)}$, $f_{(3)}$ и первого вхождения $f_{(1)}$ в F и подставляя приведенную форму функции $f_{(4)}$ 4^3-го, а не 4-го типа вместо ее вхождения в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ функции $f_{(9)}$ и приведенную форму функции $f_{(9)}$ 4^3, а не 4-го типа вместо ее вхождения в конъюнкцию $f_{(8)}f_{(9)}$ функции F. Тогда количество $K(F)$ конъюнкций в представлении функции F после выделения x_u уменьшится за счет сохранения неизменными конъюнкций $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$, $f_{(7)}f_{(8)}$, $x_u f_{(10)}$) и формул локальных функций $f_{(1)}$, $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, $f_{(7)}$, $f_{(8)}$, $f_{(10)}$ вместо порождаемых ими функций β_{11}, δ_1, γ_{11}, β_9, δ_2, γ_9, $\beta_{16,}$ δ_6, γ_{16} и уменьшения объема информации, получаемой в результате подстановки сокращённых форм функций $f_{(4)}$, $f_{(5)}$ с 50 конъюнкций до 43 конъюнкций, т.е на 14%.

В итоге можно обобщить свойства введенных выше объектов и процедур теоремой, которая является непосредственным следствием предыдущего изложения.

Теорема 1.

I^o. Минимальные по x_u совокупности локальных функций могут отличаться от тотальных усеченных совокупностей применением неприведенных вхождений функций типов $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ вместо вхождений функций любого типа, не являющихся нуль образующими, или применением вхождений функций типа $A2$, $A4^2$, $A3$, $A4^3$ вместо вхождений нуль образующих или связанных с ними функций типа 4.

II^o. (x_u) не может отличаться от (x_u) применением приведенных форм функций типа 3 или 2 вместо приведенных форм функций типа 2 или 3 соответственно.

III^o. Активность нуль образующих или связанных с ними функций $f_{(j)}$ может передаваться только через функции $f_{(i)}$, сопоставимые с $f_{(j)}$ по типам функций и входящие в состав формулы $f_{(j)}$.

Эта теорема позволяет получить основные правила отбора минимального числа активных локальных функций исходной совокупности S_w функций и их вхождений перед выделением x_u и построить на их основе алгоритм получения (x_u). При изложении алгоритма используется понятие характеристического выражения $HV(f_{(j)})$ локальной функции $f_{(j)}$.

Определение 13. Характеристическим выражением $HV(f_{(j)})$ локальной функции $f_{(j)}$ будем называть выражение, полученное из формулы указанной функции заменой обозначений входящих в неё функций и переменных обозначениями их типов. Все вхождения переменной выделения x_u в прямой или инверсной форме будем относить к типам 2 или 3 соответственно. Остальные независимые переменные будем считать неприведенными, т.е. имеющими тип вхождения $P1$.

Алгоритм получения (x_u) для любой отсекающей переменной x_u состоит из восьми следующих пунктов.

1. Произведя очередное выделение переменной x_u, находим в исходной совокупности функций S_w совокупность $S_T(x_u)$, полученную из S_w до момента исключения из $S_T(x_u)$ промежуточных форм функций, графически зависящих от x_u, от которых F перестала зависеть. Типам функций 2, 3, 4 совокупности $S_T(x_u)$ ставим в соответствие пассивные типы $P2$, $P3$, $P4$, а неприведенным формам – тип $P1$.

2. Каждой локальной функции $f_{(j)} \in S_w$ исходной совокупности функций, для которой существует приведенная форма $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_T(x_u)$ из совокупности $S_T(x_u)$ приведенных форм функций, ставим в соответствие найденный в п.1 пассивный вариант её типа $T_u(\neg\widetilde{d}_u(f_{(j)}))$: $P2$, $P3$ либо $P4$. Неприведенным функциям совокупности S_w ставим в соответствие тип $P1$.

3. Формируем характеристические выражения, соответствующие функциям $f_{(j)} \in S_w$. Каждому вхождению локальной функции $f_{(i)} \in S_w$ исходного представления совокупности функций в формулы других функций $f_{(j)} \in S_w$ ставим в соответствие тип ее приведенной формы, определенный для $f_{(i)}$ в п.2. Значения указанных

типов фиксируем в формулах (представлениях) соответствующих характеристических выражений $HV(f_{(j)})$.

4. Анализируем конъюнкции, входящие в формулы локальных функций $f_{(j)} \in S_w$ исходной совокупности и соответствующие им комбинации типов характеризующих выражений $HV(f_{(j)})$. Активизируем типы вхождений, логические произведения которых могут образовать нуль-конъюнкции. Типы $2, A4^2(3, A4^3)$ 4 нуль образующих вхождений функций активизируют отрицательные 4^3 (положительные 4^2)) обе 4^2, 4^3 части формул их логических сомножителей 4-го типа. Все логические произведения нуль образующих вхождений функций должны быть активизированы так, что комбинации типов 2, 3 преобразуются в комбинации типов $A2$, $A3$; комбинации $P4$, 2, $\overline{3}$ ($P4$, 3, $\overline{2}$) – в комбинации $A4^3\{P4^2\}$, $A2(A4^2\{P4^3\}, A3)$; комбинации $4^2\{P4^3\}$, $2(4^3\{P4^2\}, 3)$ – в комбинации $A4$, $A2(A4,\ A3)$; комбинации $A4^2\{P4^3\}$, $A4^2\{P4^3\}$ или $4^3\{P4^2\}$, $4^3\{P4^2\}$ – в комбинации $A4$, $A4$; комбинации $4^2\{P4^3\}$, $4(4^3\{P4^2\}, 4)$ – в комбинации $A4$, $A4(A4, A4)$, где обозначения $\overline{3}$ и $\overline{2}$ означают отсутствие в логических произведениях локальных функций типов 3 и 2 соответственно, а в фигурных скобках указаны неактивные части функций типа 4.

5. Должны быть активизированы все функции исходной совокупности S_w, имеющие активные вхождения в формулы других функций так, что тип функции $P2(P3)$, имеющей вхождение типа $A2(A3)$, изменяется на $A2(A3)$, тип функции $P4$, имеющей вхождение типа $A4^2(A4^3)$, изменяется на $A4^2(A4^3)$, тип функции $A4^2\{P4^3)$ $(A4^3\{P4^2\})$, имеющей вхождение типа $A4^3(A4^2\}$, изменяется на $A4(A4)$, тип функции $P4$, имеющей вхождение типа $A4$, изменяется на $A4$. Переходим в п.4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.6.

6. Все вхождения функций $f_{(i)}$ ранга r_i в формулы рассматриваемых активных ф-ций $f_{(j)}$ более высоких рангов $r_j > r_i$ должны быть активизированы, если $f_{(i)}$ сопоставимы с $f_{(j)}$ по типам вхождений. Если тип $f_{(j)}$ – $A2(A3)$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $P2(P3)$, то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $A2(A3)$. Если тип $f_{(j)}$ – $A4^2\{A4^3\}$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $P4$, то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $A4^2\{A4^3\}$. Если тип $f_{(i)}$ – $A4^2\{A4^3\}$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $A4^3(P4^2\}$, $\{P4^2)$, $A4^2\{P4^3\})$, то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $4(A4)$. Переходим в п.4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.7.

7. Рассматриваем все оставшиеся неактивными функции $f_{(i)} \in S_w$, формулы которых включают конъюнкции функций, обращающиеся в нуль-конъюнкции при подстановке приведенных по x_u форм. В их характеристических выражениях $HV(f_{(j)})$. выявляем и активизируем все комбинации вхождений типов 2, 3; 2, 4^3; 3, 4^2; 4^2, 4^3.

Типы $T_u(f_{(j)})$ функций, формулы которых включают указанные комбинации, также активизируем. Находим главную функцию F суперпозиции, и если она не активизирована, активизируем её.

8. Производим выделение переменной x_u в суперпозиции F из дополненной значениями типов функций и характеристических выражений исходной совокупности S_w локальных функций. При выделении x_u производим подстановку приведенных форм локальных функций $f_{(i)}$ в формулы активных функций $f_{(j)}$ вместо вхождений функций $f_{(i)}$, типы которых указаны в соответствующих характеристических выражениях $HV(f_{(j)})$. Упрощая алгоритм и делая его более наглядным, можно всем базовым функциям из исходной совокупности S_w, которым соответствуют приведенные формы $f_{(i)}$ 4-го типа совокупности $S_T(x_u)$, сопоставлять тип 4. Но при подстановке таких функций в другие локальные функции $f_{(j)}$ следует либо использовать базовый тип 4 либо преобразовывать $f_{(i)}$ в формы типов 4^2, 4^3, входящих в формулы характеристических выражений $HV(f_{(j)})$.

Пример 4. Проиллюстрируем работу алгоритма, получая (x_u) при выделении переменной x_u в функции F из примера 3.

$1, 2$. В примере 3 после выделения переменной x_u из исходной совокупности S_w функций (см. (3)) суперпозиции F была получена тотальная усеченная совокупность $S_T(x_u)$, приведенных по x_u функций (см. (4)). Каждой функции $f_{(i)} \in S_w$ поставим в соответствие тип $T_u(f_{(i)})$ этой функции $f_{(i)} \in S_T(x_u) : T_u(f_{(1)}) = T_u(f_{(2)}) = T_u(f_{(3)}) = T_u(f_{(6)}) = T_u(f_{(7)}) = T_u(f_{(8)}) = T_u(f_{(10)}) = P2$, $T_u(f_{(5)}) = P3$, $T_u(f_{(4)}) = T_u(f_{(9)}) = T_u(F) = P4$. Коэффициентам β_1, γ_1, β_2, γ_2, β_3, γ_3, β_4, β_4', γ_4, β_5', γ_5, β_6, γ_6, β_7, γ_7, β_8, γ_8, β_{10}, γ_{10}, не зависящим от x_u и поэтому не имеющим приведенной формы, ставим в соответствие тип $P1$.

3. Формируем характеристические выражения, соответствующие функциям $f_{(j)} \in S_w$. Каждому вхождению каждой локальной функции $f_{(i)} \in S_w$ ставим в соответствие тип ее приведенной формы, определенный для $f_{(i)}$ в п.2:

$$HV(f_{(1)}) = HV(f_{(2)}) = HV(f_{(3)}) = HV(f_{(5)}) = HV(f_{(6)}) = HV(f_{(7)}) = HV(f_{(8)}) =$$

$$= P1P2 \vee P1,\ HV(f_{(4)}) = P1P2 \vee P1P3 \vee P1,\ HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee P4P3 \vee P2P4,$$

$$HV(F) = P2P4 \vee P2P2 \vee P2P2.$$

4. Просматривая формулы всех функций, выявляем комбинации вхождений нуль образующих функций и активизируем их. Изменятся типы вхождений функций в формулы функции $f_{(9)}$ и F : $HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee A4^2\{P4^3\}A3 \vee A2A4^3\{P4^2\}$, $HV(F) = A2A4^3\{P4^2\} \vee P2P2 \vee P2P2$.

5. Просматриваем формулы всех функций и выявляем в них активные вхождения функций. Находим в исходной совокупности S_w функции, активные вхождения которых выявлены, и активизируем их. Изменятся типы функций $f_{(1)}$, $f_{(4)}$, $f_{(5)}$, $f_{(6)}$, $f_{(9)}$: $T_u(f_{(1)}) = T_u(f_{(6)}) = A2$, $T_u(f_{(5)}) = A3$, $T_u(f_{(9)}) = A4^3\{P4^2\}$. Вхождения функции $f_{(4)}$ в функцию $f_{(9)}$ относятся к типам $A4^2$, $A4^3$. Поэтому её базовый тип $T_u(f_{(4)}) = A4$. Переходим в п.4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.6.

6. Рассматривая наряду со всеми локальными функциями функцию $f_{(9)}$, имеющую тип $A4^3\{P4^2\}$, анализируем типы всех сопоставимых по типам вхождений в ее формулу других функций. Вхождение функции $f_{(4)}$ в конъюнкцию $f_{(4)}f_{(5)}$ имеет тип $A4^2\{P4^3\}$, сопоставимый с типом функции $f_{(9)}$ по пассивной части. Поэтому пассивный тип $\{P4^3\}$ активизируется и преобразуется в тип $\{A4^3\}$, а затем комбинация двух активных типов $A4^2$, $A4^3$ рассматриваемого вхождения $f_{(4)}$ преобразуется в тип $A4$. $HV(f_{(9)} = P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$. Вхождение функции $f_{(4)}$ в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ имеет активный тип $A4^3\{P4^2\}$, сопоставимый с типом функции $f_{(9)}$ и по активной и по пассивной части, поэтому тип указанного вхождения $f_{(4)}$ не преобразуется и остаётся равным $A4^3$. Переходим к п.4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим к п.7.

7. Активизируем все неактивизированные функции, формулы которых включают нуль образующие комбинации вхождений других функций. Изменится тип функции $F : T_u(F) = A4$. Так как главная функция F суперпозиции уже активизирована, переходим в п. 8.

8. В результате выполнения предыдущих пунктов алгоритма получены следующие значения типов и характеристических выражений локальных функций. $T_u(F) = A4$, $HV(F) = A4^3A2 \vee P2P2 \vee P2P2$, $T_u(f_{(9)}) = A4^3$, $HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$, $T_u(f_{(4)}) = A4$ (т. к. есть вхождения $f_{(4)}$ типа $A4^3$ и $A4^2$), $T_u(f_{(1)}) = A2$ (т. к. есть вхождения $f_{(1)}$ типа $A2$ и $P2$), $T_u(f_{(6)}) = A2$, $T_u(f_{(2)}) = T_u(f_{(3)}) = T_u(f_{(7)}) = T_u(f_{(8)}) = T_u(f_{(10)}) = P2$, $T_u(f_{(5)}) = A3$. Производим выделение переменной x_u в суперпозиции F из дополненной значениями типов функций и характеристических выражений исходной совокупности S_w локальных функций. В процессе выделения при получении приведенной формы функции $f_{(9)} = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)} \vee f_{(4)}f_{(5)} \vee f_{(1)}f_{(4)}$ типа $T_u(f_{(9)}) = A4^3$ согласно ее характеристическому выражению $HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$ вместо вхождений функций $f_{(1)}$, $f_{(2)}$, $f_{(3)}$ в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$ не будем подставлять их приведенные формы, а в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ вместо приведенной формы 4-го типа $\widetilde{d_u}(f_{(4)}) = \beta_4 x_u \vee \beta'_4 \bar{x}_u \vee \gamma_4$

подставим эквивалентное ей, но менее сложное выражение подтипа $A4^3 : \beta'_4\bar{x}_u \vee \gamma_{4m}$, где $\gamma_{4m} = \beta_4 x_u \vee \gamma_4$.

Полученная (x_u) состоит из 24-х локальных функций.

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)}) = \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(4)}f_{(5)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(4)}) = \\
\ \beta_{14m}x_u \vee \beta'_{13m}\bar{x}_u \vee \gamma_{14m}, \quad \beta_{14m} = \beta_{12} \vee \beta_{13m},\ \beta'_{13m} = \beta'_{11} \vee \beta'_{12m}, \\
\ \gamma_{14m} = \gamma_{12} \vee \gamma_{13m} \vee f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}) = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(4)}f_{(5)}) = \beta_{12}x_u \vee \beta'_{11}\bar{x}_u \vee \gamma_{12}, \\
\ \delta_3 = \beta'_5 \vee \gamma_5,\ \beta_{12} = \beta_4\gamma_5,\ \beta'_{11} = \delta_3\beta'_4 \vee \beta_4\gamma_5,\ \gamma_{12} = \gamma_4\gamma_5; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(4)}) = \beta_{13m}x_u \vee \beta'_{12m}\bar{x}_u \vee \gamma_{13m}, \\
\ \gamma_{4m} = \beta_4x_u \vee \gamma_4,\ \beta_{13m} = \beta_1\gamma_{4m},\ \beta'_{12m} = \beta'_4\gamma_1,\ \gamma_{13m} = \gamma_1\gamma_{4m}; \\
\ \widetilde{d}_u(F) = \widetilde{d}_u(f_{(9)}f_{(6)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(7)}f_{(8)} \vee \widetilde{d}_u(x_uf_{(10)}) = \beta_{17m}x_u \vee \beta'_{14m}\bar{x}_u \vee \gamma_{17m}, \\
\ \beta_{17m} = \beta_{15m} \vee f_{(10)},\ \gamma_{17m} = \gamma_{15m} \vee f_{(7)}f_{(8)},\ \beta'_{14m}\ \cdot; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)}f_{(6)}) = \beta_{15m}x_u \vee \beta'_{14m}\bar{x}_u \vee \gamma_{15m}, \\
\ \delta_5 = \beta_6 \vee \gamma_6,\ \beta_{15m} = \delta_5\beta_{14m} \vee \beta_6\gamma_{14m},\ \beta'_{14m} = \beta'_{13m}\gamma_6,\ \gamma_{15m} = \gamma_{14m}\gamma_6; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(7)}f_{(8)}) = f_{(7)}f_{(8)},\ \widetilde{d}_u(x_uf_{(10)}) = x_uf_{(10)}.
\end{array}\right. \tag{5}$$

Так как функции $f_{(1)}$, $f_{(2)}$, $f_{(3)}$, $f_{(7)}$, $f_{(8)}$, $f_{(10)}$ неотсекающие и не участвуют в образовании нуль-конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ при получении ДНФ функции F, их формулы не изменились.

Исключив помеченные сокращением «искл.» зависящие от x_u приведенные формы локальных функций, от которых функция F перестала зависеть, получим приведенную по x_u минимальную безызбыточную форму $\bar{d}_u(F)$ (МУБС(x_u)) главной функции суперпозиции F, в которой содержится $K(F) = 43$ конъюнкции. Это на 7 конъюнкций или на 14% меньше указанного показателя для (x_u). А в ее ДНФ, как и в ДНФ (x_u) содержится $K^1(F) = K^0(F) = 38$ конъюнкций.

Легко проверить, что, изменив выражение (3), а именно, добавив в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$ функции $f_{(9)}$ и/или в конъюнкции $f_{(7)}f_{(8)}, x_uf_{(10)}$ функции F в качестве сомножителей любые функции первого ранга 2-го типа, можно сделать эффективность применения рассмотренного алгоритма выделения x_u в функции F сколь угодно высокой.

Заключение

Экспериментальная проверка показала, что для решения с помощью предложенного выше алгоритма логического уравнения из примера 4 работы [1] потребовалось размещать в памяти компьютера до 350 символов вместо 700 символов, необходимых при применении варианта алгоритма из работы [1]. При этом для реализации усовершенствованного алгоритма потребовалось дополнительное машинное время. Эти дополнительные потери времени оказались небольшими. Время выполнения программы до и после модернизации метода выделения переменных составили 7 и 7,5 минуты соответственно (процессор Intel Pentium Dual Core, 2,7 GHz).

Список литературы

1. Пошерстник, М. С. Решение логических уравнений методом выделения переменных / М. С. Пошерстник // Автоматика и телемеханика. — 1979. — Т. 2. — С. 132–140.

   POSHERSTNICK, M. S. (1979) Solution of logical equations by the method of variable detection. *Automation and Remote control.* Vol. 2 p. 132–140.

2. RUDEANU, S. (2001) *Lattice Functions and Equations.* London: Springer-Verlag. 435 p.

3. Брусенцов, Н. П. Компьтеризация булевой алгебры / Н. П. Брусенцов Ю. С. Владимирова // ДАН. — 2004. — Т. 395. — С. №1. 1–4

   BRUSENTSOV, N. P., VLADIMIROVA, Yu. S. (2004) Computerization of Boolean algebra. *Doklady Mathematics.* Vol. 395 p. 1–4.

4. Закревский, А. Д. Логические уравнения / А. Д. Закревский. — Москва: «Едиториал УРСС», 2003. — 95 с.

   ZAKREVSKII, A. D. (2003) *Logical equations.* Moscow: “Editorial URSS”. 95 p.

5. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон–Вельский. — Москва: «Энергия», 1980. — 344 с.

   KUZNETSOV, O. P., ADELSON-VELSKII, G. M. (1980) *Discrete mathematics for ingineer.* Moscow: “Energy”. 344 p.

6. Савельев, А. Я. Арифметические и логические основы цифровых автоматов. — «Высшая школа»: Москва, 1980. — 255 с.

   SAVELEV, A. Ya. (1980) *Arifmetic and Logical foundation of digital machines.* Moscow: “Higher School”. 255 p.

УДК: 551.465, 519.624
MSC2010: 34L16

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ В АРКТИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

© С. Л. Скороходов, Н. П. Кузьмина

ФИЦ ИУ РАН, ИО РАН
ул. Вавилова, д. 40, Нахимовский проспект, д. 36
Москва, Российская Федерация
e-mail: *sskorokhodov@gmail.com, kuzmina@ocean.ru*

Accurate method of solving modified Orr–Sommerfeld problem for analysis of the oceanic currents instability in the Arctic basin.

Skorokhodov S. L., Kuzmina N. P.

Abstract. The efficient numerical method for solving the modified Orr — Sommerfeld problem has been elaborated. The govering equation defines the operator pencil of polynomial type with spectral parameter "c" entering the equation and boundary condition. This equation describes long-wave stable and unstable perturbations of geostrophic currents with linear vertical shear. The model includes vertical density diffusion; it is used to study generation of large scale intrusions in the Arctic Ocean.

The method for evaluation of eigenfunctions and eigenvalues is based on using power expansions at boundary and internal points of the layer and smooth matching of that expansions. The equation for Wronskian of 4 basic solutions, $W(c) = 0$, enables us to compute the discrete spectrum of the problem. The numerical analysis of the spectrum for odd eigenfunctions shows, that the first eigenvalue c_1 corresponds to unstable currents, and all the rest eigenvalues correspond to stable currents.

The asymptotics of eigenvalue c_1 for small value of parameter of the problem was studied and the main term of the asymptotics was found. Numerical data for eigenvalues c_n have been obtained for a wide range of the Peclet number (modified Reinolds number), $R \in (0, 10^6)$, with high accuracy 10^{-20}.

The results obtained confirm and supplement early published analytical considerations justifying the conclusion that geostrophic current can be unstable due to vertical diffusion of density.

Keywords: *spectral problem, Orr — Sommerfeld equation, eigenvalue, eigenfunction, unstable flow*

Введение

Для описания динамики возмущений геострофических течений в океане часто используется уравнение потенциального вихря (см. [1], [2]). С целью описания интрузионного расслоения, при моделировании длинноволновых возмущений медленных геострофических течений с учетом вертикальной диффузии плотности применительно к Арктическому бассейну, это уравнение можно привести к виду (см. [3], [4]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - U''(z)\frac{\partial p}{\partial x} = K\frac{\partial^4 p}{\partial z^4}\,, \tag{1}$$

где $p(x,y,z,t)$ — нормированное на отсчетную плотность отклонение давления от среднего состояния, ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вверх, t — время, $U(z)$ — зональная компонента скорости геострофического течения, K — коэффициент вертикальной диффузии. Течение рассматривается в слое $z \in [-H_0,\, H_0]$ толщиной $2H_0$ с боковыми границами $y = 0$ и $y = L$. Возмущения плотности ϱ, зональной u и меридиональной v компонент скорости выражаются через возмущение давления в виде

$$\varrho = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad u = -\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad v = \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

где g — ускорение свободного падения, $f = 2\,\Omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса.

Краевыми условиями для уравнения (1) являются отсутствие протекания на верхней и нижней границах слоя,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(z)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - U'(z)\frac{\partial p}{\partial x} = K\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}\,, \qquad z = \pm H_0\,, \tag{3}$$

и равенство нулю возмущения меридиональной компоненты скорости на боковых границах,

$$v = \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{y=L} = 0. \tag{4}$$

Используя для зональной скорости $U(z)$ распределение, соответствующее течению Пуазейля $U(z) = s(H_0^2 - z^2)$, вводя безразмерные переменные

$$\widehat{x} = \frac{x}{L}, \qquad \widehat{y} = \frac{y}{L}, \qquad \widehat{z} = \frac{z}{H_0}, \qquad \widehat{t} = t\,\frac{sH_0^2}{L}\,,$$

где sH_0^2 — характерный масштаб скорости течения, перепишем задачу (1)–(4) относительно безразмерных переменных, опуская крышки:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1-z^2)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial^4 p}{\partial z^4}\,, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1-z^2)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial p}{\partial z} + 2z\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}\,, \qquad z = \pm 1\,, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{y=1} = 0\,, \tag{7}$$

где $R = sH_0^4/(KL)$ — число Пекле (аналог числа Рейнольдса).

Решение $p(x, y, z, t)$, с учетом условий (7), будем искать в виде бегущей волны вдоль координаты x:

$$p(x, y, z, t) = \Phi(z)\, e^{ik(x-ct)} \sin(\pi y)\,, \tag{8}$$

где k — произвольное волновое число, а константа c — неизвестная скорость волны. Подстановка (8) в уравнения (5) и (6) приводит к задаче для искомой функции $\Phi(z)$:

$$(1 - z^2 - c)\,\Phi''(z) + 2\,\Phi(z) = \frac{1}{ikR}\,\Phi^{(IV)}(z)\,, \tag{9}$$

$$(1 - z^2 - c)\,\Phi'(z) + 2\,z\,\Phi(z) = \frac{1}{ikR}\,\Phi'''(z)\,, \qquad z = \pm 1\,. \tag{10}$$

Уравнение (9) имеет четвертый порядок и помимо двух краевых условий (10) требует еще двух граничных условий. Различные варианты таких условий рассмотрены в [4]; в данной работе мы остановимся на равенстве нулю потоков плотности (плавучести) на верхней $z = 1$ и нижней $z = -1$ границах слоя:

$$\Phi''(z) = 0\,, \qquad z = \pm 1\,. \tag{11}$$

Задача (9)–(11) является спектральной задачей для поиска собственных функций (далее СФ) $\Phi_n(z)$ и соответствующих им собственных значений (далее СЗ) c_n.

Уравнение (9) соответствует модифицированному уравнению Орра–Зоммерфельда (см. [5], [6], [7]) и определяет операторный пучок полиномиального типа (см. [8], [9]), причем спектральный параметр c входит также и в краевое условие (10).

В работе [4] для некоторых частных значений параметра c решения уравнения (9) найдены в аналитическом виде: два четных решения — в элементарных функциях, а два нечетных — в интегральном виде. Однако в общем случае спектральная задача (9)–(11) может быть решена только численно.

1. Метод решения

Вычисление СФ и соответствующих СЗ основано на методе, построенном в [10] для расчета СЗ задачи Орра–Зоммерфельда.

Для нахождения нечетных СФ и соответствующих СЗ c_n при любых значениях параметра kR представим регулярную функцию $\Phi(z)$ в виде двух разложений в точках $z = -1$ и $z = 0$; ее нечетное продолжение на отрезок $[0, 1]$ даст искомое решение при $z \in [-1, 1]$.

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1+z)^n\,, \qquad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n+1}\,. \tag{12}$$

Оба разложения (12) сходятся при всех $|z| < \infty$. Подставляя эти ряды в уравнение (9), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_n и b_n:

$$a_{n+4} = \frac{ikR\big[2n(n+1)a_{n+1} + (2 - n(n-1))a_n - c(n+1)(n+2)a_{n+2}\big]}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$b_{n+2} = \frac{ikR\big[(n+1)(2n+3)(1-c)b_{n+1} + (1 - n(2n+1))b_n\big]}{(n+1)(2n+3)(2n+4)(2n+5)}\,, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{13}$$

Для учета краевого условия (11) в точке $z = -1$ положим

$$a_2 = 0, \tag{14}$$

а для удовлетворения условия (10) используем соотношение

$$a_3 = -\frac{ikR}{6}\,(c\,a_1 + 2a_0)\,. \tag{15}$$

Теперь построим 2 линейно-независимых решения $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, тождественно удовлетворяющих краевым условиям (10) и (11). Для этого зададим коэффициенты $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ такими

$$a_0^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = 1; \qquad\qquad a_0^{(2)} = 1, \quad a_1^{(2)} = 0, \tag{16}$$

а все последующие $a_n^{(1)}$ и $a_n^{(2)}$ вычислим по (14), (15) и (13) для a_n.

Далее построим 2 независимых решения $\Phi_3(z)$ и $\Phi_4(z)$, задав коэффициенты $b_0^{(3)}$, $b_1^{(3)}$ и $b_0^{(4)}$, $b_1^{(4)}$ такими

$$b_0^{(3)} = 0, \quad b_1^{(3)} = 1; \qquad\qquad b_0^{(4)} = 1, \quad b_1^{(4)} = 0, \tag{17}$$

а все последующие $b_n^{(3)}$ и $b_n^{(4)}$ вычислим по (13) для b_n.

В окрестности точки $z = -1$ общее решение уравнения (9) с краевыми условиями (10), (11) представимо в виде комбинации

$$\Phi_{\{-1\}}(z) = \,d_1\Phi_1(z) \,+\, d_2\Phi_2(z)\,, \tag{18}$$

а в окрестности $z = 0$ общее нечетное решение — в виде комбинации

$$\Phi_{\{0\}}(z) = \,d_3\Phi_3(z) \,+\, d_4\Phi_4(z)\,, \tag{19}$$

где константы $d_1, \ldots, d_4 \in \mathbf{C}$ — произвольные, а $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_4(z)$ — разложения (12) с соответствующими коэффициентами.

Для гладкой сшивки общих решений (18) и (19) выберем произвольную точку $z_* \in (-1,0)$ и потребуем в ней совпадения функций и ее первых трех производных:

$$d_1\Phi_1^{(m)}(z_*) + d_2\Phi_2^{(m)}(z_*) = d_3\Phi_3^{(m)}(z_*) + d_4\Phi_4^{(m)}(z_*), \quad m = 0,1,2,3. \tag{20}$$

Все последующие производные решений $\Phi_{\{-1\}}(z)$ и $\Phi_{\{0\}}(z)$ в точке z_* совпадут в силу уравнения (9) четвертого порядка.

Решая систему (20) относительно коэффициентов d_1, d_2, d_3, d_4, находим искомую функцию $\Phi(z)$ в виде (18) и (19), удобном в окрестности точек $z=-1$ и $z=0$, соответственно.

Для нетривиального решения линейной системы (20) необходимо равенство нулю определителя Вронского $W\big(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4;\ c;\ z_*\big)$:

$$W\big(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4;\ c;\ z_*\big) \,=\, 0\,, \tag{21}$$

причем зависимость функций $\Phi_p(z)$ от спектрального параметра c здесь указана в форме $W(...;c;...)$. Уравнение (21) является основным для поиска СЗ c, его решение будем строить с помощью итерационного метода Ньютона,

$$c^{(n+1)} = c^{(n)} - W\big(...;\ c^{(n)};\ z_*\big)\left[\frac{\partial W\big(...;\ c^{(n)};\ z_*\big)}{\partial c}\right]^{-1}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{22}$$

Начальная итерация $c^{(0)}$ выбиралась с помощью метода непрерывного продолжения по параметру kR задачи (9)–(11) и с использованием обобщенного принципа аргумента:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_D \frac{W'(...;c)}{W(...;c)}\,d\,c\,, \qquad \sum_{p=1}^{N} c_p \,=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_D c\,\frac{W'(...;c)}{W(...;c)}\,d\,c\,, \tag{23}$$

где N — число нулей функции $W(...;c)$ внутри некоторого контура D, а c_p — ее нули внутри D. Отметим здесь, что полюсов функция $W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4;\ c;\ z_*)$ не имеет.

Необходимые в (22) и (23) производные по спектральному параметру c находились явно с помощью дифференцирования по c коэффициентов разложений (12), что исключало погрешности использования разностной производной.

Разработанный метод позволил вычислить дискретный спектр СЗ c_m задачи (9)–(11) для нечетных СФ в широком диапазоне параметров $kR \in (0, 10^6)$, причем относительная погрешность расчетов не превышала 10^{-20}. Точность расчетов контролировалась с помощью увеличения мантиссы вычислений, изменения длины рядов Тейлора в разложениях (12) и вариации точки сшивки $z_* \in (-1,0)$.

2. Численные результаты

Приведем данные расчетов СЗ для нечетных СФ при некоторых параметрах kR.

На Рис. 1 представлены в комплексной плоскости "c" первые 33 СЗ c_n, $n = 1, \ldots, 33$, для $kR = 10^4$. Последующие СЗ имеют $\mathrm{Im}(c_n) < -1$, причем $\mathrm{Re}(c_n) \to \frac{2}{3}$ при $n \to \infty$.

Особую значимость имеют СЗ, для которых $\mathrm{Im}(c_n) > 0$. Из представления (8) решения $p(x, y, z, t)$ легко видно, что искомые решения с этими СЗ оказываются неустойчивыми с увеличением времени $t > 0$ и приводящими к росту малых возмущений. На Рис. 1 таким СЗ является $c_1 = 1.00707106781 + i\,0.00707106781$.

На Рис. 2 представлены первые 11 СЗ c_n, $n = 1, \ldots, 11$, для $kR = 10^3$. Последующие СЗ имеют $\mathrm{Im}(c_n) < -1$ и $\mathrm{Re}(c_n) \to \frac{2}{3}$ при $n \to \infty$. Неустойчивой СФ здесь соответствует $c_1 = 1.02236017527 + i\,0.02236103467$.

Проведенный численный анализ выявил важное свойство поведения первого СЗ c_1 при уменьшении параметра kR, чему соответствует увеличение коэффициента вертикальной диффузии в исследуемом слое. Приведем некоторые значения $c_1 = c_1(kR)$ при $kR \in (0.01, 1)$.

kR	$\mathrm{Re}(c_1)$	$\mathrm{Im}(c_1)$
1	1.33191395963352088677	0.01678348554345884397
0.5	1.33297527533996627539	0.00844694134830805473
0.2	1.33327589778426305712	0.00338504503318573967
0.05	1.33332974197241993087	0.00084654211204427524
0.01	1.33333318967469796631	0.00016931201943078500

Эти данные показывают, что $c_1 \to \frac{4}{3}$ при $kR \to 0$. Докажем это.

3. Асимптотика c_1 при $kR \to 0$

Перепишем задачу (9)–(11) в более удобной форме

$$\Phi''''(z) = ikR\big[(1 - z^2 - c)\Phi''(z) + 2\Phi(z)\big]\,, \tag{24}$$

$$\Phi'''(z) = ikR\big[(1 - z^2 - c)\Phi'(z) + 2z\Phi(z)\big]\,, \qquad \Phi''(z) = 0\,, \qquad z = \pm 1. \tag{25}$$

Представим нечетное решение $\Phi(z)$ и СЗ c_1, стремящееся при $kR \to 0$ к конечному значению $c_1^{(0)}$, в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра kR:

$$\Phi(kR; z) = \varphi_0(z) + kR\,\varphi_1(z) + \ldots, \qquad c_1(kR) = c_1^{(0)} + kR\,c_1^{(1)} + \ldots \tag{26}$$

Подстановка (26) в (24), (25) приводит к цепочке краевых задач для нечетных функций $\varphi_n(z),\ n=0,1,...$

0. Для $\mathbf{n=0}$ получаем:

$$\varphi_0''''(z)=0\,, \tag{27.1}$$

$$\varphi_0'''(\pm1)=0\,,\qquad \varphi_0''(\pm1)=0. \tag{27.2}$$

Нечетным решением (27) является

$$\varphi_0(z)=A_1z \tag{28}$$

с произвольной константой A_1.

1. Для $\mathbf{n=1}$ имеем:

$$\varphi_1''''(z)=i\left[(1-z^2-c_1^{(0)})\varphi_0''(z)+2\varphi_0(z)\right]\,, \tag{29.1}$$

$$\varphi_1'''(\pm1)=i\left[-c_1^{(0)}\varphi_0'(\pm1)\pm2\varphi_0(\pm1)\right]\,,\qquad \varphi_1''(\pm1)=0. \tag{29.2}$$

С учетом вида $\varphi_0(z)$ из (28), находим нечетное решение $\varphi_1(z)$ из уравнения (29.1):

$$\varphi_1(z)=\frac{2iA_1z^5}{5!}+\,B_1z+\,B_3z^3\,,$$

где B_1 и B_3 — искомые константы. Краевые условия (29.2) приводят к системе

$$iA_1+6B_3=iA_1\big[-c_1^{(0)}+2\big],\qquad \frac{iA_1}{3}+6B_3=0,$$

нетривиальное решение которой существует лишь при

$$c_1^{(0)}=\frac{4}{3}\,. \tag{30}$$

Запишем окончательный вид полученной функции $\varphi_1(z)$:

$$\varphi_1(z)=\frac{2iA_1}{5!}z^5+\,B_1z-\,\frac{iA_1}{18}z^3\,,$$

где константа B_1 произвольна. Из представления (26) и соотношения (30) следует равенство

$$\lim_{kR\to0}c_1(kR)=\frac{4}{3}\,,$$

что и завершает доказательство, а результаты численных расчетов предыдущего раздела это иллюстрируют.

Остается отметить, что все остальные СЗ $c_n(kR),\ n=2,3,\ldots$, при $kR\to0$ стремятся к ∞, приближаясь к прямой $\mathrm{Re}(c_n)=2/3$, а $\mathrm{Im}(c_n)\to-\infty$.

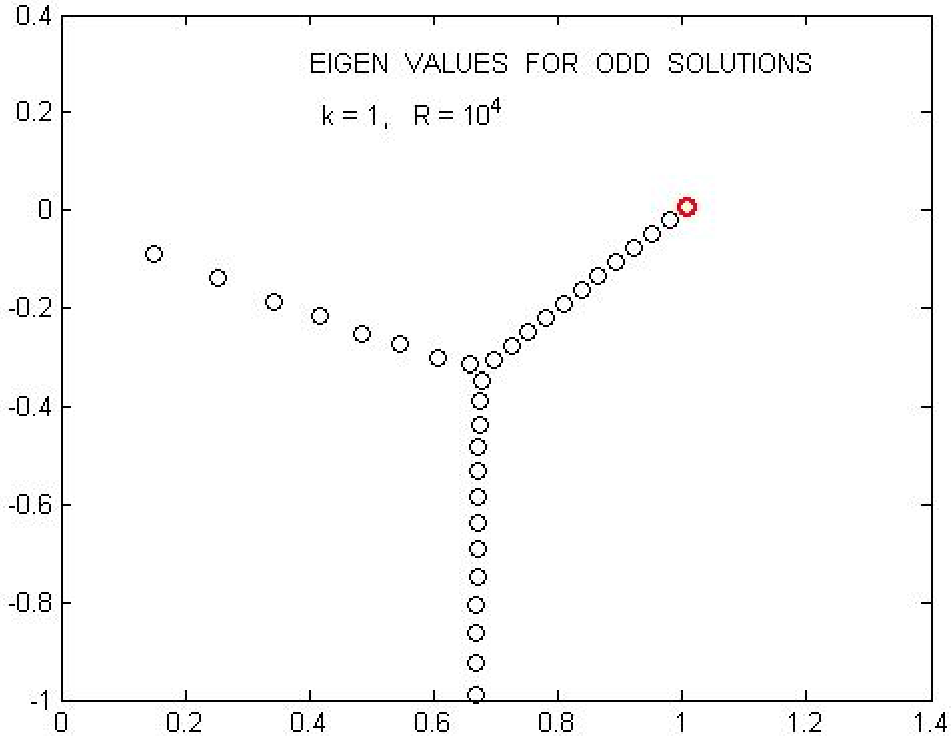


Рис. 1. Собственные значения c_n при $kR = 10^4$.

Заключение

На основе высокоточного численного метода построено решение модифицированной спектральной задачи Орра–Зоммерфельда с граничными условиями, типичными для океана. Исследуемое уравнение определяет операторный пучок полиномиального типа, причем спектральный параметр "c" входит также и в граничное условие. Модельное уравнение описывает длинноволновые устойчивые и неустойчивые возмущения геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом вертикальной диффузии плотности и применяется для исследования образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне.

Метод нахождения собственных функций и собственных значений "c" основан на использовании разложений решения в граничной и внутренней точках слоя и последующей гладкой сшивке этих разложений. Условие равенства нулю вронскиана независимых решений позволяет вычислить дискретный спектр "c" задачи. Численно показано, что первое из собственных значений c_1 соответствует неустойчивому течению, а все остальные — устойчивому. Получен главный член асимптотики c_1 при

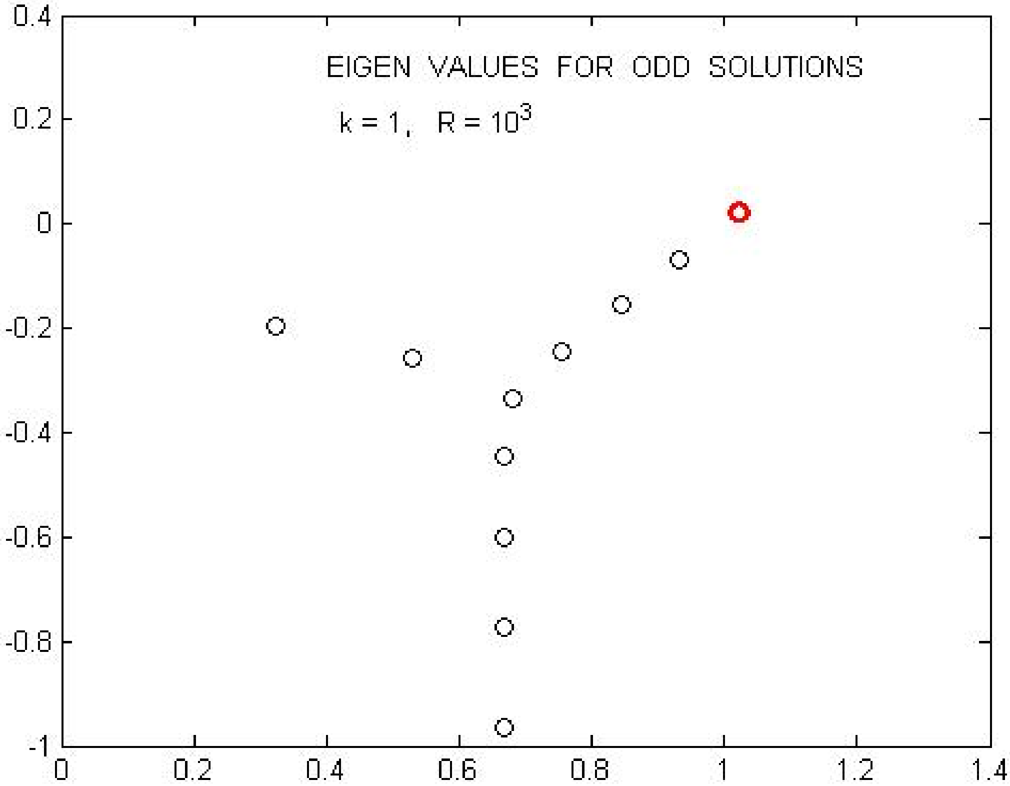


Рис. 2. Собственные значения c_n при $kR = 10^3$.

стремлении к нулю параметра задачи. Численные расчеты проведены для широкого диапазона числа Пекле (модифицированное число Рейнольдса), $R \in (0, 10^6)$, и выполнены с точностью 20 верных дес. знач. цифр; они полностью соответствуют проведенному асимптотическому анализу c_1.

Полученные результаты подтверждают и дополняют аналитические рассмотрения в [3], [4] и дают основание для вывода о том, что геострофическое течение в ограниченном по вертикали океаническом слое может быть неустойчиво из-за влияния диффузии плотности, причем неустойчивые моды не являются неустойчивостью критического слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты $16-01-00781$ и $15-05-01479$).

Список литературы

1. Pedlosky, J. (1992) *Geophysical Fluid Dynamics.* New York: Springer.

2. Cushman-Roisin, B. (1994) *Introduction to the Geophysical Fluid Dynamics.* New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs.

3. Кузьмина, Н. П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне / Н. П. Кузьмина // Фундаментальная и прикладная гидрофизика / Т. 9. — № 2, 2016. — С. 15–26.

   KUZMINA, N. P. (2016) A possibility of large scale intrusions generation in the Arctic Ocean under stable–stable stratification: An analytical consideration. *Ocean Sci. Discussion, doi: 10.5194/os.* 15.

4. Kuzmina, N. P. A possibility of large scale intrusions generation in the Arctic Ocean under stable–stable stratification: An analytical consideration // Ocean Sci. Discussion, doi: 10.5194/os–2016–15, 2016.

5. Drazin, R. G., Reid, W. H. (1981) *Hydrodynamic Stability.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

6. Reddy, S. C., Schmid, P. J., Heningson, D. S. Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. — 1993. — V. 53. — No 1. p. 15–47.

7. Шкаликов, А. А. Как определить оператор Орра–Зоммерфельда? / А. А. Шкаликов // Фундаментальная и прикладная гидрофизика / Т. 53. — № 4, 1998. — С. 36–43.

   SHKALIKOV, A. A. (1998) How to define the Orr–Sommerfeld opetator?. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika.* 53 (4). p. 36–43.

8. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   GOHBERG, I. and KREIN, M. (1965) *Introduction to the theory of linear nonselfajoint operator.* Moscow: Nauka. 448 p.

9. Копачевский, Н. Д. Спектральная теория операторных пучков. Курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ООО “ФОРМА”, 2009. — 128 с.

   KOPACHEVSKII, N. D. (2009) *Spectral theory of operator pencils. Lectures on Mathematics.* Simferopol: OOO "FORMA". 128 p.

10. Скороходов, С. Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда / С. Л. Скороходов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ / Т. 47. — № 10, 2007. — С. 1672–1691.

    SKOROKHODOV, S. L. (2007) Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem. *Comput. Math. and Math. Phys.* 47 (10). p. 1603–1621.

УДК: 517.98

MSC2010: 35P05, 47D03

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ВЯЗКИХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Small motions of the system of two viscous stratification fluids.

Tsvetkov D. O.

Abstract. Let immovable container be completely filled with system of two viscous stratified incompressible fluids. We assume that in an equilibrium state the densities of a fluids is a function of the vertical variable x_3, i.e., $\rho_i = \rho_i(x_3)$ $(i = 1, 2)$. In this case the gravitational field with constant acceleration $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ acts on the fluids, here $g > 0$ and $\vec{e}_3$ is unit vector of the vertical axis Ox_3, which is directed opposite to $\vec{g}$.

Let us consider the basic case of stable stratification of the fluids on densities $\rho_{0k} = \rho_{0k}(x_3)$ $(k = 1, 2)$:

$$0 < N^2_{k,\min} \le N^2_k(x_3) \le N^2_{k,\max} =: N^2_{0,k} < \infty, \tag{1}$$

$$N^2_k(x_3) := -\frac{g\rho'_{0k}(x_3)}{\rho_{0k}(x_3)}, \qquad (k = 1, 2).$$

The problem on small motions of the system of viscous stratification fluids is investigated on base of an approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries and general theory of the abstract operator-differential equations. Existence conditions of strong solution of initial boundary value are obtained.

Key words: stratification effect in viscous fluids, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из двух вязких стратифицированных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_k $(k = 1, 2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_{0k} с коэффициентом динамической вязкости $\mu_k = \text{const} > 0$ $(k = 1, 2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_k $(k=1,2)$, границу раздела жидкостей — через Γ.

Обозначим через $\vec{n}_k$ $(k=1,2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ $(k=1,2)$ и направленный вне Ω_k. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_{0k}=\rho_{0k}(x_3)$ $(k=1,2)$:

$$
\begin{gathered}
0<N^2_{k,\min}\le N^2_k(x_3)\le N^2_{k,\max}=:N^2_{0,k}<\infty, \\
N^2_k(x_3):=-\frac{g\rho'_{0k}(x_3)}{\rho_{0k}(x_3)}, \qquad (k=1,2).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Функции $N_k(x_3)$ $(k=1,2)$ называют частотами Вяйсяля-Брента, или частотами плавучести. Физически $N_k(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3=\mathrm{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместиться с этого уровня.

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_k$ $(k=1,2)$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta=\zeta(t,\hat{x})$, $\hat{x}\in\Gamma$ представляет собой отклонение свободно движущийся поверхности $\Gamma(t)$ от Γ; $p_k=p_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$ $(k=1,2)$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\rho_k=\rho_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$ $(k=1,2)$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_{0k}(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}=\rho^{-1}_{0k}(x_3)(-\nabla p_k+\mu_k\Delta\vec{u}_k-\rho_k g\vec{e}_3)+\vec{f}_k \quad (\text{в } \Omega_k,\ k=1,2),\\
&\operatorname{div}\vec{u}_k=0, \qquad \frac{\partial\rho_k}{\partial t}+\nabla\rho_{0k}\cdot\vec{u}_k=0 \quad (\text{в } \Omega_k,\ k=1,2),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\vec{u}_k=\vec{0} \quad (\text{на } S_k,\ k=1,2), \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=\vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}_1=\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \tau_{k3}(\vec{u}_1)-\tau_{k3}(\vec{u}_2)=0 \quad (k=1,2, \quad \text{на } \Gamma),\\
&\tau_{33}(\vec{u}_1)-\tau_{33}(\vec{u}_2)+g\Delta\rho_0\zeta=0 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \Delta\rho_0:=\rho_{01}-\rho_{02},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\vec{u}_i(0,x)=\vec{u}^0_i(x), \quad \rho_k(0,x)=\rho^0_k(x) \quad \zeta(0,\hat{x})=\zeta^0(\hat{x}). \tag{6}
$$

Символом $\tau_{kj}(\vec{u})$ в (5) обозначены напряжения в жидкости

$$
\tau_{kj}(\vec{u})=-p\delta_{kj}+\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right).
$$

Отметим, что второе условие в (5) характеризует равенство касательных напряжений на границе Γ раздела двух вязких жидкостей, а последние условие в (5) получено из кинематического условия и того факта, что разность нормальных напряжений на Γ равна скачку давлений, обусловленному гравитационными силами.

2. Закон баланса полной энергии

Будем исследовать задачу (3)–(6) методами теории операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Для того, чтобы понять, какие функциональные пространства естественно связать с рассматриваемой задачей, получим из (3)–(5) закон баланса энергии. С этой целью умножим первое уравнение (3) на $\rho_{0k}(x_3)\vec{u}_k(t,x)$, третье уравнение (3) — на функцию $g^2[\rho_{0k}(x_3)N_k^2(x_3)]^{-1}\rho_k(t,x)$, проинтегрируем по Ω_k и сложим результаты. Применяя далее формулу Грина (см., например, [1]), используя условие соленоидальности $\mathrm{div}\vec{u}_k = 0$ $(\text{в}\,\Omega_k)$ и условие прилипания $\vec{u}_k = \vec{0}$ $(\text{на}\,S_k)$, получим закон баланса энергии:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_{\Omega_k}\rho_{0k}|\vec{u}_k|^2\,d\Omega_k + g^2\int\limits_{\Omega_k}[\rho_{0k}N_k^2]^{-1}|\rho_k|^2\,d\Omega_k + \Delta\rho_0 g\int\limits_{\Gamma}|\zeta|^2\,d\Gamma\right) = $$

$$= -\sum_{k=1}^{2}\mu_k E(\vec{u}_k,\vec{u}_k) + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\rho_{0k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k, \tag{7}$$

где

$$E(\vec{u}_k,\vec{v}_k) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial(u_k)_i}{\partial x_j}+\frac{\partial(u_k)_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial(v_k)_i}{\partial x_j}+\frac{\partial(v_k)_j}{\partial x_i}\right)\,d\Omega_k. \tag{8}$$

Здесь в скобках стоит полная энергия системы; первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию системы, второе — потенциальную энергию, появляющуюся из-за наличия сил плавучести, а третье — потенциальную энергию, обусловленную колебаниями поверхности раздела двух вязких жидкостей. Правая часть (7) есть сумма скорости диссипации энергии за счет вязких сил и мощности внешних сил.

3. Функциональные пространства

Рассмотрим пространство

$$\widehat{L_2}(\Omega,\rho) = \vec{L}_2(\Omega_1,\rho_1)\oplus\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_2)$$

элементами которого являются матрицы-строки с компонентами — векторами: $\widehat{u} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$, $\vec{u}_k = \vec{u}_k(x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$; скалярное произведение для произвольных элементов $\widehat{u}$ и $\widehat{v}$ определяется по формуле

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{\widehat{L_2(\Omega,\rho)}} := \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \rho_{0k} \vec{u}_k(x) \cdot \overline{\vec{v}_k(x)}\, d\Omega_k.$$

Введем в пространстве $\widehat{L_2}(\Omega, \rho)$ подпространства согласно следующим определениям

$$\widehat{J}_0(\Omega, \rho) := \{\widehat{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega, \rho) |\ \mathrm{div}\vec{w}_k = 0\ (\text{ в } \Omega_k\ ),\ \vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = 0\ (\text{ на } \partial\Omega_k\ )\};$$

$$\widehat{G_{h,S}}(\Omega, \rho) := \{\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega, \rho) |\ \vec{u}_k = \rho_{0k}^{-1} \nabla p_k,\ \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0\ (\text{ на } S_k\ ),$$
$$\nabla \cdot \vec{u}_k = 0\ (\text{ в } \Omega_k\ ),\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1\ (\text{ на } \Gamma\ ),\ \vec{u}_1 = \vec{u}_2\ (\text{ на } \Gamma\ )\},$$

$$\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega, \rho) := \{\widehat{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega, \rho) |\ \vec{v}_k = \rho_{0k}^{-1} \nabla \varphi_k,\ \varphi_1 = \varphi_2\ (\text{ на } \Gamma\ )\}.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\widehat{L_2}(\Omega, \rho) = \widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho) \oplus \widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega, \rho), \tag{9}$$

где $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho) := \widehat{J}_0(\Omega, \rho) \oplus \widehat{G_{h,S}}(\Omega, \rho) = \{\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega, \rho)\ :\ div\, \vec{u}_k = 0\ (\text{ в } \Omega_k\ ),$
$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0\ (\text{ на } S_k),\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1\ (\text{ на } \Gamma\ ),\ \vec{u}_1 = \vec{u}_2\ (\text{ на } \Gamma\ )\}.$ □

Введем в рассмотрение пространство

$$\widehat{J_{0,S}^1}(\Omega, \rho) := \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2, \rho_2), \tag{10}$$

где $\vec{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k, \rho_k) := \{\ \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k, \rho_k) |\ \mathrm{div}\, \vec{u}_k = 0\ (\text{ на } \Omega_k\ ),\ \vec{u}_k = \vec{0}\ (\text{ на } S_k\ )\ \}$ (причем на границе раздела Γ выполнено условие $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$)); со скалярным произведением

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{\widehat{J_{0,S}^1}(\Omega,\rho)} = \widehat{E}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \sum_{k=1}^{2} E(\vec{u}_k, \vec{v}_k).$$

Можно показать, что $\widehat{J_{0,S}^1}(\Omega, \rho)$ плотно вложено в пространство $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$.

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})_{\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)} := g^2 \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \left[\rho_{0k}(x_3) N_k^2(x_3)\right]^{-1} \varphi_k(x) \overline{\psi_k(x)}\, d\Omega_k$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma) = H_0 \oplus \{1_\Gamma\}$ со скалярным произведением

$$(\eta, \zeta)_0 := \int_\Gamma \eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\, d\Gamma.$$

4. Переход к операторному уравнению

Будем считать, что решения задачи (3)–(6) и заданные функции являются гладкими функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k, \rho_k)$ $(k = 1, 2)$. В связи с этим в дальнейшем производные $\partial/\partial t$ заменим на d/dt.

Перепишем первое уравнение (3) в виде

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p} + \widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u} - \widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3} + \widehat{f}, \qquad (11)$$

где $\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p} = (\rho_{01}^{-1}\nabla p_1, \rho_{02}^{-1}\nabla p_2)$, $\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u} = (\mu_1\rho_{01}^{-1}\Delta\vec{u}_1, \mu_2\rho_{02}^{-1}\Delta\vec{u}_2)$, $\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3} = (g\rho_{01}^{-1}\rho_1\vec{e}_3, g\rho_{02}^{-1}\rho_2\vec{e}_3)$, $\widehat{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$ и $\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega, \rho)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_k $(k = 1, 2)$ для поля $\widehat{u}$, считаем, что оно принадлежит пространству $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$, точнее, пространству $\widehat{J^1_{0,S_1}}(\Omega, \rho)$ (см. (10)), плотно вложенному в $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$.

Подействуем введенными ортопроекторами $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на обе части уравнения (11). Будем иметь

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi}' + P_{0,S}\left(\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}\right) - P_{0,S}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) + P_{0,S}\widehat{f}, \qquad (12)$$

$$0 = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi}'' + P_{0,\Gamma}\left(\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u}\right) - P_{0,\Gamma}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) + P_{0,\Gamma}\widehat{f}. \qquad (13)$$

Из уравнения (13) при известных $\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ и $\widehat{\rho} = (\rho_1, \rho_2)$ поле $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi}'' \in \widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega, \rho)$ вычисляется непосредственно. В то же время это поле не входит в (12). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать основное уравнение (12).

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим две вспомогательные задачи.

Вспомогательная задача I. По заданным функциям $\vec{P}_{0,S_k}f_k$ найти функции $\vec{w}_k(x)$, $p_k'(x)$ $(k = 1, 2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_{0k}^{-1}\nabla p_k' - P_{0,S_k}(\mu_k\rho_{0k}^{-1}\Delta\vec{w}_k) = P_{0,S_k}\vec{f}_k, \quad \operatorname{div}\vec{w}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{w}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k),$$
$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 \ (\text{на } \Gamma), \quad \vec{w}_1 \cdot n_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{i3}(\vec{w}_1) - \tau_{i3}(\vec{w}_2) = 0 \ (\text{на } \Gamma,\ i = \overline{1,3}).$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна (см. [1], с. 116).

Определение 1. Функцию $\widehat{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи I, если для любого $\widehat{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ выполнено тождество $\mu\widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v}) = (\widehat{f},\widehat{v})_{\widehat{L}_2(\Omega,\rho)}$, $\widehat{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

Лемма 2. *Если $\widehat{f} \in \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, то вспомогательная задача I имеет единственное обобщенное решение $\widehat{w} = \mu^{-1}A^{-1}\widehat{f}$, где A – оператор вспомогательной задачи I. Оператор A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, обладающий следующими свойствами*

1. $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho) \subset \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, $\quad \overline{\mathscr{D}(A)} = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

2. Для любого $\widehat{u} \in \mathscr{D}(A)$ и $\widehat{v} \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ имеем $(A\widehat{u},\widehat{v}) = \widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v})$. Если $\widehat{u},\ \widehat{v} \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$, то $\widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v}) = (A^{\frac{1}{2}}\widehat{u}, A^{\frac{1}{2}}\widehat{v})$.

3. Обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в пространстве $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

Вспомогательная задача II. По заданной функции ψ найти функции $\vec{v}_k(x)$, $p_k''(x)$ $(k=1,2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\begin{gathered}
\rho_{0k}^{-1}\nabla p_k'' - P_{0,S_k}(\mu_k\rho_{0k}^{-1}\Delta\vec{v}_k) = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \ (\text{ в } \Omega_k\,), \quad \vec{v}_k = \vec{0} \ (\text{ на } S_k\,), \\
\vec{v}_1 \cdot n_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad \tau_{i3}(\vec{v}_1) - \tau_{i3}(\vec{v}_2) = 0 \ (\text{ на } \Gamma,\ i=1,2\,). \\
\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad \tau_{33}(\vec{v}_1) - \tau_{33}(\vec{v}_2) = \psi \ (\text{ на } \Gamma\,), \quad \int\limits_{\Gamma} \psi\, d\Gamma = 0.
\end{gathered}$$

Определение 2. Функцию $\widehat{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ назовем обобщенным решением вспомогательной задачи II, если для любого $\widehat{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ выполнено тождество $\mu\widehat{E}(\widehat{v},\widehat{u}) = (\psi, \gamma_1\vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma}}$, где γ_1 – оператор нормального следа поля заданного в Ω_1 на границу Γ, $L_{2,\Gamma} = H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$.

Лемма 3. *Если $\psi \in L_{2,\Gamma}$, то существует единственное обобщенное решение вспомогательной задачи II: $\widehat{v} = \mu^{-1}T\psi$, где T — оператор, изометрически действующий из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ (см. подробнее* [1], *с.280).*

Разыскивая теперь решения задачи (3)–(6) (с учетом (13)) в виде

$$\widehat{u} = \widehat{w} + \widehat{v}, \quad \widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi'} = \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p'} + \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p''}, \tag{14}$$

где $(\widehat{w}, \widehat{p}\,')$ — решение вспомогательной задачи I, а $(\widehat{v}, \widehat{p}\,'')$ — решение вспомогательной задачи II; пользуясь определением операторов A и T, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Задача* (3)–(6) *равносильна системе эволюционных уравнений*

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \mu A\widehat{w} + C\widehat{\rho} = \widehat{f}, \quad \frac{d\widehat{v}}{dt} + \mu^{-1} g\Delta\rho_0 B\widehat{u} = 0, \quad \frac{d\widehat{\rho}}{dt} - C^*\widehat{u} = 0, \tag{15}$$

где $B\widehat{u} := T\gamma_1\vec{u}_1$, $C\widehat{\rho} = P_{0,S}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) = (C_1\rho_1, C_2\rho_2)$, $C_k\rho_k = P_{0,S_k}(g\rho_{0k}^{-1}\rho_k\vec{e}_3)$, $C^*\widehat{u} = (C_1^*\vec{u}_1, C_2^*\vec{u}_2)$, $C_k^*\vec{u}_k = -\nabla\rho_{0k}\cdot\vec{u}_k$; *а начальные функции*

$$\widehat{v}(0) = \widehat{v}^0, \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}^0, \quad \widehat{\rho}(0) = \widehat{\rho}^0, \tag{16}$$

определяются по начальным данным следующим образом. Функции $\widehat{v}^0 = (\vec{v}_1^0, \vec{v}_2^0)$ *есть решение вспомогательной задачи II с граничной функцией* ψ^0, *а* $\widehat{u}^0 = \widehat{w}^0 + \widehat{v}^0$.

Лемма 4. *Операторы* $C: \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega) \to \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ *и* $C^*: \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \to \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ *определенные соотношениями (см. после* (15)*), взаимно сопряжены и ограничены.*

Доказательство леммы, с учетом введенных выше пространств, см., например, [3].

Задачу (15)–(16) можно привести к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{H} = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega).$$

Для этого осуществим в (15)–(16) замену переменных по формулам

$$\widehat{w} = A^{-\frac{1}{2}}x, \quad \widehat{v} = A^{-\frac{1}{2}}y, \quad \widehat{u} = A^{-\frac{1}{2}}q \quad (q = x+y), \tag{17}$$

а затем подействуем на левые и правые части первых двух уравнений оператором $A^{\frac{1}{2}}$. Придем к задаче

$$\frac{dz}{dt} + \mathscr{A}z + \mathscr{B}z = \mathscr{F}, \qquad z(0) = z^0, \tag{18}$$

где $z = (x; y; \widehat{\rho})^t$, $z^0 = (x^0; y^0; \widehat{\rho}^0)^t = (A^{\frac{1}{2}}\widehat{w}^0; A^{\frac{1}{2}}\widehat{v}^0; \widehat{\rho}^0)^t$, индекс $(\ldots)^t$ означает операцию транспонирования матрицы, оператор $B_A = A^{\frac{1}{2}}T\gamma_1 A^{-\frac{1}{2}}$ является самосопряженным, неотрицательным и компактным оператором,

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \mu A & 0 & A^{\frac{1}{2}}C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & -\mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & 0 \\ \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B_A & 0 \\ -C^*A^{-\frac{1}{2}} & -C^*A^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{F} = \begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}}\widehat{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (3)–(6) такие функции $\widehat{u}$, $\widehat{\rho}$ и ζ для которых вектор $z(t) = (\vec{x}(t); \vec{y}(t); \widehat{\rho}(t))^t$ является сильным решением задачи Коши (18) и выполнено тривиальное соотношение (13). В свою очередь сильным решением задачи Коши (18) назовем функцию $z(t)$ такую, что $z(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ для любого t из промежутка $[0,T]$, $\mathscr{A}z(t) \in C([0,T];\mathscr{H})$, $\mathscr{B}z(t) \in C([0,T];\mathscr{H})$, $z(t) \in C^1([0,T];\mathscr{H})$ и для любого t из промежутка $[0,T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (18).

Рассмотрим для простоты задачу (18) при $\mu = 1$ (получить такую же задачу можно, сделав замену $\mu A \to A$). Произведем в уравнении (18) замену $z(t) = e^t z_1(t)$. В результате получим уравнение относительно z_1:

$$\frac{dz_1}{dt} + \widehat{\mathscr{A}} z_1 + \mathscr{B} z_1 = \widehat{\mathscr{F}}, \tag{19}$$

где $\widehat{\mathscr{F}} = e^{-t}\mathscr{F}$, I и $\widehat{I}$ — единичные операторы в $\widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho)$ и $\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ соответственно,

$$\widehat{\mathscr{A}} := \begin{pmatrix} A+I & 0 & A^{\frac{1}{2}}C \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & A^{-\frac{1}{2}}C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \mathscr{A}_0(\mathscr{I} + \mathscr{T}). \tag{20}$$

Осуществляя в (19) замену $(\mathscr{I} + \mathscr{T})z_1 = \widehat{z}$, с учетом (20), приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d\widehat{z}}{dt} + (\mathscr{I} + \mathscr{B}_{\mathscr{A}})\mathscr{A}_0 \widehat{z} = (\mathscr{I} + \mathscr{T})\widehat{\mathscr{F}}, \qquad \widehat{z}^0 = (\mathscr{I} + \mathscr{T})z^0. \tag{21}$$

где $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} := \mathscr{T} + (\mathscr{I} + \mathscr{T})\mathscr{B}(\mathscr{I} + \mathscr{T})^{-1}\mathscr{A}_0^{-1}$.

Так как для оператора $(-\mathscr{A}_0)$ уравнение

$$\frac{d\widehat{z}}{dt} + \mathscr{A}_0 \widehat{z} = 0,$$

является абстрактным параболическим (см. [2], с. 104, с. 121) и соответствующая полугруппы аналитична в секторе, содержащем положительную полуось, то (см. [2], с. 183) уравнение

$$\frac{d\widehat{z}}{dt} + (\mathscr{I} + \mathscr{B}_{\mathscr{A}})\mathscr{A}_0 \widehat{z} = 0,$$

где оператор $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ компактный, будет также абстрактным параболическим (см. [2], с. 181). Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную полуось.

Таким образом, если в уравнении (21): $(\mathscr{I} + \mathscr{T})\widehat{\mathscr{F}} \in C^1\left([0,T]; \mathscr{H}\right)$, тогда задача (21) имеет сильное решение на промежутке $[0, T]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$x^0 \in \mathscr{D}(A), \quad y^0 \in \widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho), \quad C\widehat{\rho}^0 \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}), \quad \widehat{\mathscr{F}} \in C^1\left([0,T]; \mathscr{H}\right),$$

для задачи Коши (18). *Тогда она имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0; T]$.

Доказательство теоремы основывается на переходе от задачи (21) с обратной заменой к задаче (18).

Как следствие теоремы 2 имеем следующий результат.

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\widehat{w}^0 \in \mathscr{D}(A^{\frac{3}{2}}), \quad \widehat{v}^0 \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}), \quad \widehat{u}^0 = \widehat{w}^0 + \widehat{v}^0,$$

$$\zeta^0 \in L_{2,\Gamma}, \quad C\widehat{\rho}^0 \in \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}}), \quad \widehat{f} \in C^1\left([0,T]; \mathscr{D}(A^{\frac{1}{2}})\right),$$

тогда задача (3)–(6) *имеет единственное сильное решение (в смысле определения 3) на промежутке* $[0;T]$.

Список литературы

1. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY N. D., KREIN S. G., NGO ZUY CAN. (1989) Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. Operator Theory: Advances and Application. Moscow. 416 p.

2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   KREIN S. G. (1967) Linear differential equations are in Banach spaces. Moscow. 464 p.

3. KOPACHEVSKY N.D., TSVETKOV D.O. (2010) Oscillations of stratificated fluids. Journal of Math Sciences (Springer). Vol. 164, no. 4. p. 574–602.

Антоневич А. Б., Шукур А. А. Об операторах с экспоненциальным ростом резольвенты / А. Б. Антоневич, А. А. Шукур // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 9 – 20.

УДК: 517.984

Информация о поведении нормы резольвенты линейного ограниченного оператора при приближении спектрального параметра к спектру важна в ряде вопросов теории операторов. В работе рассмотрены операторы, спектр которых лежит в единичном круге. Говорят, что для такого оператора B выполнено $(\gamma, \rho)-$условие Крейса или что резольвента оператора имеет экспоненциальный порядок роста γ и тип ρ, если при $|\lambda| > 1$ справедлива оценка вида

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq C \exp\left[\frac{\rho}{(|\lambda| - 1)^{\gamma}}\right].$$

В работе получены условия на поведение $\|B^n\|$, при которых резольвента имеет заданный экспоненциальный порядок и тип роста. На модельном примере дискретных операторов взвешенного сдвига показана зависимость между поведением коэффициентов, поведением $\|B^n\|$ и порядком роста резольвенты.

Ключевые слова: *резольвента, порядок и тип роста, условие Крейса, аналитические функции в круге, дискретный оператор взвешенного сдвига.*

Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л. *J*-изометрическая и *J*-унитарная дилатации операторного узла / А. В. Биданец, Ю. Л. Кудряшов // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 21 – 30.

УДК: 517.432

В статье рассматривается построенная ранее J-унитарная дилатация произвольного ограниченного оператора с помощью понятия операторного узла. Кратко изложена история вопроса и приведены строгие непосредственные доказательства. Явно построены минимальные J-изометрическая и J-унитарная дилатации и даны их определения с точностью до J-унитарного изоморфизма.

Ключевые слова: *минимальная J-изометрическая дилатация, минимальная J-унитарная дилатация, J-унитарный изоморфизм дилатаций.*

Задорожний В. Г. Одна задача об инвестициях с учетом рисков / В. Г. Задорожний // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 31 – 47.

УДК: 517.977

Изучается задача оптимального вложения начального капитала в два вида инвестиций с целью получения наибольшей выгоды. Изменение долей капитала описывается системой двух обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются случайными процессами. Находятся первые две моментные функции решения. Получен алгоритм определения оптимального распределения начального капитала с учетом заданного риска.

Ключевые слова: *Задача об инвестициях, риски, дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами, характеристический функционал, вариационная производная- идеальная несжимаемая жидкость, малая гравитация, состояние равновесия, колебания, операторный подход, гильбертово пространство, начально-краевая задача, спектральная задача, разрешимость, сильное решение, неустойчивость.*

Иванисенко Н. С. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по четырехмерным симплексам / Н. С. Иванисенко // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 48 – 58.

УДК: 517.988.28

В работе изучаются вопросы, связанные с локальным вариантом проблемы Помпейю. Рассмотрен случай, когда исследуемое множество является четырехмерным симплексом. Получена теорема единственности, из которой следует, что если функция f равная нулю в шаре некоторого радиуса r $(r > r_1)$, имеющая нулевые интегралы по симплексам, содержащихся в шаре радиуса R, то функция f будет равна 0 в шаре радиуса R для любого $\frac{\sqrt{3}}{2} < R < 1$. Случай, когда $R > 1$ не представляет интереса, поскольку подобный результат был получен ранее.

Ключевые слова: *локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, локально интегрируемые функции, четырехмерный симплекс, функции с нулевыми интегралами по множествам.*

Муртазаева Д. С., Третьяков Д. В. О вычислении числовых рядов специального вида, порождённых рекуррентными последовательностями 4-го

порядка / Д. С. Муртазаева, Д. В. Третьяков // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 59 – 67.

УДК: 517.52

В работе получены формулы для вычисления числовых рядов, порождённых рекуррентными последовательностями четвёртого порядка. Рассмотрены частные случаи доказанных формул, в том числе так называемые обобщённые числа Фибоначчи 4-го порядка.

Ключевые слова: *рекуррентные последовательности 4-го порядка, числовые ряды специального вида, биквадратные последовательности, характеристическое уравнение, обобщённые последовательности Фибоначчи 4-го порядка.*

Пошерстник М. С. Об усовершенствовании метода выделения переменных при решении логических уравнений / М. С. Пошерстник // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 68 – 90.

УДК: 517.11

для решения логических уравнений вида $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) = 1$ был предложен метод выделения переменных. Данная работа направлена на повышение эффективности указанного метода, что связано с уменьшением наибольшего объёма промежуточных форм, которые получаются в процессе выделении переменных. Такой результат достигается за счёт: 1) объединения некоторых элементов дизъюнктивных форм функций исходной суперпозиции F перед их логическим перемножением и 2) отказа от подстановки или упрощением вида подставляемых дизъюнктивных форм функций, которые не влияют на образование нуль-конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ при получении ДНФ функции F. Показано, что объём памяти, необходимый для размещения конечной ДНФ, можно уменьшить, если формировать одну или часть её членов из скобочной формы функции F, полученной после выделения всех переменных, образующих при преобразовании исходной совокупности функций в ДНФ хотя бы одну нуль-конъюнкцию $x_u\bar{x}_u$ ($u \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$). Введен более эффективный по сравнению с представленным в работе [Пошерстник М. С. Решение логических уравнений методом выделения переменных // Автоматика и телемеханика. — 1979. — Т. 2. — С. 132–140.] критерий отбора переменных выделения, определяющих очередной этап декомпозиции исходной задачи.

Ключевые слова: *логические уравнения, выделение переменных, декомпозиция задачи.*

Скороходов С. Л., Кузьмина Н. П. Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра – Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в арктическом бассейне / С. Л. Скороходов, Н. П. Кузьмина // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 91 – 100.

УДК: 551.465, 519.624

Для решения модифицированной спектральной задачи Орра – Зоммерфельда разработан высокоэффективный численный метод. Основное уравнение имеет четвертый порядок и определяет операторный пучок полиномиального типа, причем спектральный параметр "c" входит как в уравнение, так и в краевое условие. Изучаемая модель описывает устойчивые и неустойчивые возмущения геострофических океанических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом вертикальной диффузии плотности и применяется для исследования образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне. Метод вычисления собственных функций и собственных значений основан на построении разложений решения в граничной и внутренней точках и гладкой сшивке этих разложений. Равенство нулю вронскиана линейно-независимых решений дает уравнение для искомого дискретного спектра задачи, которое решается с помощью итерационного метода Ньютона. Проведенный численный анализ для нечетных решений выявил важное свойство первого собственного значения c_1, $\mathrm{Im}(c_1) > 0$, что соответствует неустойчивости течения. При малых значениях числа Пекле R исследуемого течения построена асимптотика собственного значения c_1, которая подтверждена числовыми данными. Расчеты выполнены для широкого диапазона изменения параметра $R \in (0, 10^6)$ с точностью 10^{-20}. Полученные результаты подтверждают и дополняют ранее опубликованные аналитические рассмотрения и дают основание для вывода о том, что геострофическое течение в ограниченном по вертикали слое может быть неустойчиво из-за влияния диффузии плотности.

Ключевые слова: *спектральная задача, уравнение Орра – Зоммерфельда, собственные значения, собственные функции, неустойчивое течение.*

Цветков Д. О. Малые движения системы из двух вязких стратифицированных жидкостей / Д. О. Цветков // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 3 (32). — С. 101 – 109.

УДК: 517.98

Изучается задача о малых движениях системы из двух тяжелых вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, плотности, которых в состоянии равновесия имеют устойчивую стратификацию. Используя теорию дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, теорию краевых задач математической физики, получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: *стратифицированная жидкость, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Антоневич Анатолий Борисович	д. ф.-м. н, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь *e-mail: antonevich@bsu.by*
Биданец Александр Владимирович	студент факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: alexander.bidanets@yandex.ru*
Задорожний Владимир Григорьевич	д. ф.-м. н, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, РФ *e-mail: zador@amm.vsu.ru*
Иванисенко Наталья Сергеевна	аспирантка факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета, г. Донецк, Украина *e-mail: Ivanisenko.n.s@gmail.com*
Кузьмина Наталия Петровна	д. ф.-м. н, главный научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва, РФ *e-mail: kuzmina@ocean.ru*
Кудряшов Юрий Леонтьевич	к. ф.-м. н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: kudryashov_2889@mail.ru*
Муртазаева Диляна Серверовна	бакалавр факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: dvttvd@mail.ru*
Пошерстник Марат Самуилович	инженер–математик, г. Симферополь, РФ *e-mail: marat.posher@gmail.com*

Скороходов Сергей Леонидович	к. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник ФИЦ "Информатика и Управление" РАН, г. Москва, РФ *e-mail: sskorokhodov@gmail.com*
Третьяков Дмитрий Вадимович	к. ф.-м. н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета, г. Симферополь, РФ *e-mail: dvttvd@mail.ru*
Цветков Денис Олегович	к. ф.-м. н, доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: tsvetdo@gmail.com*
Шукур Али	аспирант кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь *e-mail: shukur.math@gmail.com*

Подписано к печати 30.11.2016. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/45. Свободная цена.
Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4