Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 2 (31) ' 2016

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics

2016, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 11 от 30 ноября 2016 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

УДК: 517.444

MSC2010: 44A35, 44A12

ZERO SETS OF SOLUTIONS OF THE HYPERBOLIC DARBOUX EQUATION

© V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Donetsk National University
Faculty of Mathematics and Information Technologies
Universitetskaya 24, Donetsk, 83001, Ukraine
e-mail: *valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com*

Abstract. Zero sets of solutions of the hyperbolic Darboux equation Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V.

A hyperbolic analog of the generalized Darboux equation is considered. We investigate the structure of zero sets of its solutions for the case where the solution is a radial function of second variable. We show that every solution vanishing on some annulus must be zero in some other annulus containing the first one.

Keywords: *Darboux equation, hyperbolic plane, zero sets, uniqueness theorems, transmutation maps*

Introduction and statement of main result

Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. The partial differential equation

$$(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \overline{z}} = (1 - |w|^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial w\, \partial \overline{w}} \tag{1}$$

with $f = f(z, w) \in C^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ is called the generalized Darboux equation. Equations of type (1) are of considerable interest in their own right, but they are also important for many applications in geometric analysis (see [1], [2]) and integral geometry (see [3]–[5]). In particular, such equations are closely connected with the mean value operators on symmetric spaces (see [1]–[3], [5]).

If $f(z, w)$ is a function of z and $|w|$, and $f(z, w) = h(z, \rho)$, $\rho = \operatorname{arth} |w|$, then equation (1) can be rewritten as

$$4i(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z\, \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + 2\operatorname{cth} 2\rho\, \frac{\partial h}{\partial \rho}. \tag{2}$$

This relation is called the hyperbolic Darboux equation. Some Euclidean analogs of equation (2) were studied in [1], [4, Part 5] and [6].

In this paper, we study zero sets of solutions of the hyperbolic Darboux equation. The main result of the paper is as follows.

Theorem 1. *Let $f \in C^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ satisfy (1) and assume that $f(z,w)$ is a function of z and $|w|$. Suppose that $R \in (0,1)$ and $r \in [0,R)$ are given and the following conditions hold.*

(i) $f(z,0)=0$ *if* $r \le |z| \le R$.

(ii) $f(z,w)=0$ *for all* $z,w\in\mathbb{D}$, $|z|=R$.

Then $f(z,w)=0$ *for all* $z,w\in\mathbb{D}$ *such that* $r\le|z|\le R$ *and* $|w|\le \operatorname{th}(\operatorname{arth}|z|-\operatorname{arth} r)$.

Some Euclidean analogs of Theorem 1 can be found in [4, Part 5] and [6]. As regards other aspects of the theory of differential equations on symmetric spaces and their applications, see [2, Ch. 5].

1. Notation

In the paper, we use the following standard notation: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, and $\mathbb{Z}_+$ denote the sets of real, natural, integer, and non-negative integers, respectively; Γ is the gamma-function; $F(a,b;c;z)$ is the Gauss hypergeometric function.

We shall consider the disk $\mathbb{D}$ as a Riemannian manifold with the Riemannian structure

$$ds^2=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{3}$$

The Laplace-Beltrami operator for (3) is given by

$$L=4i(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\overline{z}}.$$

The hyperbolic distance d between the points $z_1,z_2\in\mathbb{D}$ is defined by

$$d(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\overline{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\overline{z}_1z_2|-|z_2-z_1|}.$$

In particular,

$$d(z,0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}\quad\text{and}\quad |z|=\operatorname{th} d(z,0),\qquad z\in\mathbb{D}.$$

The Riemannian measure $d\mu$ on $\mathbb{D}$ has the form

$$d\mu(z)=\frac{i}{2}\frac{dz\wedge\overline{dz}}{(1-|z|^2)^2}.$$

For $R>0$, $B_R(w)$ denotes the open non-Euclidean disk of radius R centered at w, i.e.,

$$B_R(w)=\{z\in\mathbb{D}: d(z,w)<R\}.$$

We set $B_R=B_R(0)$ and $S_R(w)=\{z\in\mathbb{D}: d(z,w)=R\}$. Furthermore, let χ_R be the characteristic function (the indicator) of the disk B_R.

We need the following classes of functions and distributions on $\mathbb{D}$: $L(\mathbb{D})$ and $L^{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ are the classes of functions integrable and locally integrable on $\mathbb{D}$ with respect to the measure $d\mu$; $\mathscr{D}'(\mathbb{D})$ and $\mathscr{E}'(\mathbb{D})$ are the spaces of distributions and compactly supported distributions on $\mathbb{D}$, respectively; $\mathscr{D}(\mathbb{D})$ is the space of compactly supported functions infinite differentiable in $\mathbb{D}$.

Let T be a distribution with compact support in $\mathbb{R}$. Its Fourier transform is defined by the relation

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{-izt}\rangle, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

For a distribution f, $\overline{f}$ denotes its complex conjugation, $\operatorname{supp} f$ stands for the support of f. The symbol $\times$ denotes the convolution of distributions on $\mathbb{D}$ in the cases where it exists (see [1, Ch. 2, § 5]). For the convolution of distributions on $\mathbb{R}$, we use the usual symbol "$*$".

Let $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ and let ρ, φ be the polar coordinates of the point $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Let $\mathscr{H}_k$ be the space of spherical harmonics of degree k on $\mathbb{T}$, regarded as a subspace of $L^2(\mathbb{T})$ (see [4, Part 1, Ch. 5]). The dimension of $\mathscr{H}_k$ is denoted by the symbol a_k. We have $a_0 = 1$ and $a_k = 2$ for $k \geq 1$. The reader can easily see that $L^2(\mathbb{T})$ is the direct sum of the spaces $\mathscr{H}_k$ from the L^2 theory of Fourier series on the unit circle. Indeed, $\mathscr{H}_k(\mathbb{T})$ as a space of functions of the variable $e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$, is the complex linear span of $\{e^{ik\varphi}, e^{-ik\varphi}\}$. From this point of view a Fourier series expansion on $\mathbb{T}$ in the same as an expansion into spherical harmonics.

We set

$$Y_1^{(0)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad Y_1^{(k)}(\sigma) = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}, \qquad Y_2^{(k)}(\sigma) = \frac{\overline{\sigma}^k}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \sigma \in \mathbb{T},\ k \geq 1.$$

To every function $f \in L^{\mathrm{loc}}(B_R)$ we assign its Fourier series

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} f_{k,j}(\rho) Y_j^{(k)}(\sigma), \qquad 0 < \rho < \operatorname{th} R, \qquad \sigma = z/\varrho,$$

where

$$f_{k,j}(\rho) = \int_{\mathbb{T}} f(\rho\sigma)\, \overline{Y_j^{(k)}(\sigma)}\, |d\sigma|.$$

We set

$$f^{k,j}(z) = f_{k,j}(\rho)\, Y_j^{(k)}(\sigma).$$

Let $O(2)$ be the orthogonal group of $\mathbb{R}^2$ with the normalized Haar measure $d\tau$. If τ is a rotation through angle θ in $\mathbb{R}^2$ then we set $t^k_{1,1}(\tau) = e^{-ik\theta}$ and $t^k_{2,2}(\tau) = e^{ik\theta}$. In addition, let $t^0_{1,1}(\tau)=1$ for all $\tau\in O(2)$. Then one has

$$f^{k,j}(z)=a_k\int\limits_{O(2)} f(\tau^{-1}z)\,\overline{t^k_{j,j}(\tau)}\,d\tau \tag{4}$$

(см. [7, Part 2, Ch. 9, formula (9.5)]).

Next, for each $f\in\mathscr{D}'(B_R)$ we define the distribution $f^{k,j}\in\mathscr{D}'(B_R)$ by the formula

$$\langle f^{k,j},g\rangle=\left\langle f, a_k\int\limits_{O(2)} g(\tau^{-1}z)\,t^k_{j,j}(\tau)\,d\tau\right\rangle,\qquad g\in\mathscr{D}(B_R).$$

For a set $\mathfrak{M}(B_R)\subset\mathscr{D}'(B_R)$ let

$$\mathfrak{M}_{k,j}(B_R)=\{f\in\mathfrak{M}(B_R): f=f^{k,j}\},\qquad \mathfrak{M}_\natural(B_R)=\mathfrak{M}_{0,1}(B_R).$$

2. The functions $\Phi_{\lambda,k,j}$

For the rest of the paper, $\lambda\in\mathbb{C}$ and

$$\nu=\nu(\lambda)=\frac{1}{2}\,(i\lambda+1).$$

For $k\in\mathbb{Z}_+$, $j\in\{1,\dots,a_k\}$ and $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ we put

$$\Phi_{\lambda,k,j}(z)=\Phi_{\lambda,k}(\rho)Y^{(k)}_j(\sigma),\qquad \rho=|z|,\ \sigma=z/\rho,$$

where

$$\Phi_{\lambda,k}(\rho)=\frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\big(k+1\big)}\ \rho^k\left(1-\rho^2\right)^\nu F\big(\nu+k,\nu;k+1;\rho^2\big). \tag{5}$$

The equality

$$\Phi_{\lambda,k,j}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\left(\frac{1-|z|^2}{|z-\eta|^2}\right)^\nu Y^{(k)}_j(\eta)\,|d\eta| \tag{6}$$

holds for all $\lambda\in\mathbb{C}$ and $z\in\mathbb{D}$ (see [4, Part 2, Ch. 2, formula (2.9)]). Since

$$\frac{1-|z|^2}{|z-\eta|^2}\le\frac{1+|z|}{1-|z|},\qquad z\in\mathbb{D},\ \eta\in\mathbb{T},$$

it follows from (6) that

$$\max_{z\in B_r}\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)^{\alpha_2}\Phi_{\lambda,k,j}(z)\right|=O\left((1+|\lambda|)^{\alpha_1+\alpha_2}\,e^{r|\mathrm{Im}\,\lambda|}\right) \tag{7}$$

for $r\in(0,1)$ and $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$, where the constant in O does not depend on λ.

Lemma 1. *Let $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $R \in (0,1)$. Then*

$$\begin{aligned}(\lambda^2-\mu^2)\int\limits_0^R \frac{t}{(1-t^2)^2}\,\Phi_{\lambda,k}(t)\,\Phi_{\mu,k}(t)\,dt = \\ = \frac{R}{(1-R^2)}\Big(\Phi_{\lambda,k}(R)\Phi'_{\mu,k}(R)-\Phi_{\mu,k}(R)\Phi'_{\lambda,k}(R)\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Proof. We have

$$\Phi_{\lambda,k}(t) = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\big(k+1\big)}\; t^k\,(1-t^2)^{-k}\,\varphi_{\lambda,k}(\operatorname{arth} t), \tag{9}$$

where

$$\varphi_{\lambda,k}(\xi) = F\left(k+\frac{1+i\lambda}{2},\,k+\frac{1-i\lambda}{2};\,k+1;\,-\operatorname{sh}^2\xi\right) \tag{10}$$

(see (5) and [8, Ch. 2.9]). Using now [7, formulae (7.18) and (7.46)] we see that

$$\begin{aligned}(\lambda^2-\mu^2)\int\limits_0^t \Delta_\alpha(\xi)\,\varphi_{\mu,k}(\xi)\,\varphi_{\lambda,k}(\xi)\,d\xi = \\ = \Delta_k(t)\Big(\varphi_{\lambda,k}(t)\varphi'_{\mu,k}(t)-\varphi_{\mu,k}(t)\varphi'_{\lambda,k}(t)\Big),\end{aligned}$$

where

$$\Delta_k(t) = \left(\frac{\sin 2it}{2i}\right)^{2k+1}.$$

This together with (9) implies (8). □

Equality (9) implies that for all $k \in \mathbb{Z}_+$, $R \in (0,1)$ the function $\Phi_{\lambda,k}(R)$ is an even entire function of λ. Using [7, Proposition 7.4] we see from Hadamard's theorem [9, Ch. 1, Theorem 13] that $\Phi_{\lambda,k}(R)$ has infinitely many zeros. Since the function $\Phi_{\lambda,k}(R)$ is even, the set of these zeros is symmetric with respect to $\lambda = 0$. It follows from (9), (10), and the expansion of F in a hypergeometric series (see [8, Ch. 2, § 2.1, formula (1)]) that $\Phi_{\lambda,k}(R) > 0$ for $i\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 2. *All the zeros of $\Phi_{\lambda,k}(R)$ are real and simple.*

Proof. Let $\Phi_{\lambda,k}(R) = 0$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$. We claim that $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\frac{d}{dt}\,\Phi_{t,k}(R)\Big|_{t=\lambda} \neq 0$. Assume that $\lambda \notin \mathbb{R}$; then $\lambda^2 \neq \overline{\lambda}^2$, since $i\lambda \notin \mathbb{R}$. Putting $\mu = \overline{\lambda}$ in (8) and taking into account that $\Phi_{\overline{\lambda},k}(R) = 0$, we infer that

$$\int\limits_0^R \frac{t}{(1-t^2)^2}\,\big|\Phi_{\lambda,k}(t)\big|^2\,dt = 0, \tag{11}$$

which is impossible. Now assume that $\frac{d}{dt}\Phi_{t,k}(R)\Big|_{t=\lambda} = 0$. Letting $\mu \to \lambda$ in (8) we obtain (11) once again. Hence, all the zeros of $\Phi_{\lambda,k}(R)$ are real and simple. □

Let $N_k(R)$ be the set of positive zeros λ of the function $\Phi_{\lambda,k}(R)$. Lemma 2 shows that $N_k(R)$ has the form $N_k(R) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, where $\lambda_m = \lambda_m(R,k)$ is the sequence of all positive zeros of $\Phi_{\lambda,k}(R)$ numbered in the ascending order. Owing to [9, Ch. 1, Theorem 6], we have

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{-1-\varepsilon} < \infty$$

for any $\varepsilon > 0$.

Lemma 3. *Let $\lambda \in N_k(R)$ and*

$$I(\lambda) = \int_0^R \frac{t}{(1-t^2)^2} \left|\Phi_{\lambda,k}(t)\right|^2 dt.$$

Then $I(\lambda) > C\lambda^{-4}$, where $C > 0$ does not depend on λ.

Proof. Because of (10), for $t > 0$ one has

$$\varphi_{\lambda,k}(t) = \frac{\Gamma(k+1)\,(\operatorname{sh} 2t)^{2k}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,2^{k-\frac{3}{2}}} \int_0^t (\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2\xi)^{k-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot F\left(2k, 0; k+\frac{1}{2}; \frac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\xi}{2\operatorname{ch} t}\right) \cos\lambda\xi\, d\xi$$

(see [10, equality (2.21)]). Using now (9) and repeating the arguments in [4, Part 2, the proof of Lemma 2.7] we arrive at the desired statement. □

3. The spherical transform

For any $m \in \mathbb{Z}$ we consider the differential operator d_m defined on $C^1(0,1)$ as follows:

$$\big(d_m f\big)(t) = \frac{t^m}{(1-t^2)^{m-1}} \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{t} - t\right)^m f(t)\right), \quad f \in C^1(0,1).$$

Let $\mathscr{L}_k = L - 4(k-1)kI$, where I is the identity operator. A simple calculation shows that

$$\big(\mathscr{L}_k f\big)(z) = (d_{k-1} d_{-k} u)(\rho) Y_j^{(k)}(\sigma) \tag{12}$$

if $f \in C^2(B_R)$ has the form $f(z) = u(\rho) Y_j^{(k)}(\sigma)$.

Using (5) and [8, formulae 2.8 (25), 2.8 (26))] we easily obtain

$$\big(d_k \Phi_{\lambda,k}\big)(\rho) = (i\lambda - 2k - 1)\Phi_{\lambda,k+1}(\rho), \tag{13}$$

$$\big(d_{-k-1}\Phi_{\lambda,k+1}\big)(\rho) = (i\lambda + 2k + 1)\Phi_{\lambda,k}(\rho). \tag{14}$$

In what follows we assume that all functions that are defined and continuous in a punctured neighbourhood of zero in $\mathbb{C}$ and admit continuous extension to 0 are defined at 0 by continuity. The functions $\Phi_{\lambda,k,j}$ admit continuous extension to the point $z = 0$, becoming real-analytic functions on $\mathbb{D}$. Formulae (13), (14) and (12) imply that

$$\big(L + (\lambda^2 + 1)I\big)\big(\Phi_{\lambda,k,j}\big) = 0. \tag{15}$$

Formula (15) with $k = 0$ implies that $\Phi_{\lambda,0}(|z|)$ coincides with the elementary spherical function φ_λ on $\mathbb{D}$ (see [8, Ch. 4, §4.2]). The spherical transform $\widetilde{f}(\lambda)$ of a distribution $f \in \mathscr{E}'_\natural(\mathbb{D})$ is defined by

$$\widetilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_\lambda\rangle. \tag{16}$$

By (16) and (15) we conclude that

$$\widetilde{L^m f}(\lambda) = (-1)^m(\lambda^2 + 1)^m \widetilde{f}(\lambda), \qquad m \in \mathbb{Z}_+.$$

This together with (7) shows that for $f \in (\mathscr{E}'_\natural \cap C^{2m})(\mathbb{D})$

$$\widetilde{f}(\lambda) = O\big(|\lambda|^{-2m}\big), \qquad \lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

where the constant of the symbol O is independent of λ.

Lemma 4. *Let $T \in \mathscr{E}'_\natural(\mathbb{D})$, $f \in C^2(\mathbb{D})$ and $Lf = -(\lambda^2 + 1)f$. Then*

$$(f \times T)(z) = \widetilde{T}(\lambda)f(z), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{18}$$

In particular,

$$(\Phi_{\lambda,k,j} \times \chi_r)(z) = \pi \operatorname{sh} 2r \frac{\Phi_{\lambda,1}(\operatorname{th} r)}{\nu}\, \Phi_{\lambda,k,j}(z) \tag{19}$$

for any $r > 0$.

Proof. The first equality follows from the mean value theorem for the eigenfunctions of the operator L (see [8, Ch. 4, § 2.2]). Next one has

$$\chi_r(\lambda) = \int\limits_{B_r} \Phi_{\lambda,0}(|z|)d\mu(z) = 2\pi \int\limits_0^{\operatorname{th} r} \frac{\rho\, \Phi_{\lambda,0}(\rho)}{(1-\rho^2)^2} d\rho.$$

Combining this with (14), we obtain

$$\widetilde{\chi}_r(\lambda) = \pi \operatorname{sh} 2r \frac{\Phi_{\lambda,1}(\operatorname{th} r)}{\nu}.$$

Thus the second equality in the lemma follows from the first with $T = \chi_r$. □

Lemma 5. *Let $t > 0$ and $k \in \mathbb{Z}_+$. Then there exists $U_{t,k} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ such that* $\operatorname{supp} U_{t,k} \subset [-t,t]$ *and*

$$\widehat{U_{t,k}}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+k)}\,\Phi_{\lambda,k}(\operatorname{th} t), \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Proof. As already pointed out in § 3, for each $t > 0$ the function $\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+k)}\,\Phi_{\lambda,k}(\operatorname{th} t)$ is an even entire function of λ. Moreover, it follows from (7) that

$$|\Phi_{\lambda,k}(\operatorname{th} t)| \le c\, e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{21}$$

where the constant $c > 0$ does not depend on λ. Now the Paley-Wiener theorem (see [11, Theorem 7.3.1]) completes the proof. $\square$

We now define an operator allowing the reduction of several problems for convolution in $\mathbb{D}$ to the one-dimensional case. As usual, we set $\rho = |z|$, $\sigma = z/\rho$.

For $f \in L^{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$, $\zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ we set

$$A_\zeta(f)(z) = \frac{1-\rho^2}{2\pi\,\rho}\,(f \times \chi_{\operatorname{arth}|z|})(\zeta) Y_1^{(1)}(\sigma)\,. \tag{22}$$

Lemma 6. *Let $a > 0$. There exists a linear homeomorphism $\mathfrak{A}_{k,j} : \mathscr{D}'_{k,j}(B_a) \to \mathscr{D}'_\natural(-a,a)$ such that the following assertions hold.*

(i) *For each $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,k,j})(t) = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\big(k+1\big)}\,\cos\lambda t. \tag{23}$$

(ii) *If $f \in L^{\mathrm{loc}}_{k,j}(B_a)$, $t \in (0,a)$, and $\zeta \in S_t$, then*

$$2\sqrt{2\pi}\;\mathfrak{A}_{1,1}\big(A_\zeta(f)\big) = \Gamma\big(k+1\big)\,Y_j^{(k)}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)\big(\mathfrak{A}_{k,j}(f) * U_{t,k}\big) \tag{24}$$

in $\mathscr{D}'(t-a,a-t)$.

Proof. According to [7, Theorem 10.21], there exists a linear homeomorphism $\mathfrak{A}_{k,j} : \mathscr{D}'_{k,j}(B_a) \to \mathscr{D}'_\natural(-a,a)$ satisfying (23). Let us prove (24). First of all, we note that the set $Lin\,\{\Phi_{\lambda,k,j},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ is a dense subset of $\mathscr{D}'_{k,j}(B_a)$ (see [7, Proposition 9.9]). Let $a > 0$, $\eta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$. Consider a sequence $f_n \in Lin\,\{\Phi_{\lambda,k,j},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ such that $f_n \to f$ in the space $L(B_a(\eta))$. Let $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{D})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset B_a$ and let

$$\psi(z) = \frac{1-\rho^2}{2\pi\varrho}\,\varphi(z) Y_1^{(1)}(\sigma)\,.$$

Using (22) we obtain

$$\left|\langle A_\eta(f_n),\varphi\rangle - \langle A_\eta(f),\varphi\rangle\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in B_a} \int\limits_{B_{d(0,z)}(\eta)} |f_n - f|d\mu \int\limits_{B_a} |\psi|d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_{B_a(\eta)} |f_n - f|d\mu \int\limits_{B_a} |\psi|d\mu.$$

Since $f_n \to f$ in $L(B_a(\eta))$ this implies that the sequence $\{A_\eta(f_n)\}$ converges to $A_\eta(f)$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{D})$. Therefore, to prove Lemma 6 we can assume without loss of generality that $f = \Phi_{\lambda,k,j}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Next one has

$$2\sqrt{2\pi}\ \mathfrak{A}_{1,1}\big(A_\zeta(\Phi_{\lambda,k,j})\big)(\xi) = \Phi_{\lambda,k,j}(\zeta)\ \cos\lambda\xi \tag{25}$$

(see (19)). On the other hand,

$$\Gamma\big(k+1\big)\ \big(\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,k,j}) * U_{t,k}\big)(\xi) = \sqrt{2\pi}\ \Phi_{\lambda,k}(\zeta)\ \cos\lambda\xi \tag{26}$$

because of (23) and (20). Comparing (25) with (26) we arrive at (24). □

4. Proof of Theorem 1

We now proceed to the proof of Theorem 1. Let $f \in C^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ and suppose that this function satisfies conditions (i)–(ii) in Theorem 1. For each $t \in (0,1)$, Asgeirsson's mean value theorem (see [1, Ch. 2, § 5.6, Theorem 5.28]) yields

$$\int\limits_{S_t(z)} f(\zeta,0)\,d\omega(\zeta) = \int\limits_{S_t(0)} f(z,\zeta)\,d\omega(\zeta), \qquad z\in\mathbb{D},$$

where $d\omega(\zeta) = \dfrac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}$.

This equality and condition (i) in Theorem 1 show that

$$f(z,w) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{sh}\,2t} \int\limits_{S_t(z)} f(\zeta,0)\,d\omega(\zeta) \tag{27}$$

for all $z\in\mathbb{D}$, $w\in S_t(0)$. Let $R' = \operatorname{arth} R$, $a = 2R' - \operatorname{arth} r$. Now define $u(z) = f(z,0)$ for $r \leq |z| < a$ and $u(z) = 0$ for $|z| < r$. Relation (4) and property (ii) imply that

$$u^{k,j}(x) = 0 \quad \text{in} \quad B_{R'} \tag{28}$$

for all $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, a_k\}$. In addition, by property (ii) and (27),

$$(u^{k,j} \times \chi_t)(\zeta) = 0, \qquad \zeta \in S_{R'}(0),$$

for each $t \in (0, R' - \operatorname{arth} r)$. Hence

$$\mathfrak{A}_{k,j}(u^{k,j}) * U_{R',k} = 0 \quad \text{in} \quad (R' - a, a - R')$$

because of Lemma 6. Using now Lemma 3 and [4, Part 3, Theorem 1.3] we see that

$$\mathfrak{A}_{k,j}(u^{k,j})(t) = \sum_{\lambda \in N_k(R)} c_{\lambda,k,j} \cos \lambda t, \tag{29}$$

where $c_{\lambda,k,j} \in \mathbb{C}$,

$$c_{\lambda,k,j} = O(\lambda^\gamma), \qquad \lambda \to \infty \tag{30}$$

for some $\gamma > 0$, and the series in (29) converges in the space $\mathscr{D}'(-a, a)$. Owing to (23), this means that

$$u^{k,j}(z) = \sum_{\lambda \in N_k(R)} c_{\lambda,k,j} \, \Phi_{\lambda,k,j}(z), \tag{31}$$

where the series converges in $\mathscr{D}'(B_a)$. Let $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}_\natural(\mathbb{D})$ and $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, a)$. In view of Lemma 4, we conclude from (31) that

$$(u^{k,j} \times \varphi_\varepsilon)(z) = \sum_{\lambda \in N_k(R)} c_{\lambda,k,j} \, \widetilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda) \, \Phi_{\lambda,k,j}(z), \qquad z \in B_{a-\varepsilon}. \tag{32}$$

Together with (30), relation (17) yields

$$c_{\lambda,k,j} \, \widetilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^b}\right), \qquad \lambda \to \infty$$

for each $b > 0$. Taking (21) into account we see that the series in (32) converges uniformly on compacts. Therefore, we obtain

$$c_{\lambda,k,j} \, \widetilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda) = \left(\int\limits_{B_{R'}} |\Phi_{\lambda,k,j}(z)|^2 \, d\mu(z) \right)^{-1} \int\limits_{B_{R'}} (u^{k,j} \times \varphi_\varepsilon)(z) \, \overline{\Phi_{\lambda,k,j}}(z) \, d\mu(z)$$

(see Lemma 1). Letting $\varepsilon \to 0$, for a suitable sequence $\{\varphi_\varepsilon\}$ one has

$$c_{\lambda,k,j} = \left(\int\limits_{B_{R'}} |\Phi_{\lambda,k,j}(z)|^2 \, d\mu(z) \right)^{-1} \int\limits_{B_{R'}} u^{k,j}(z) \, \overline{\Phi_{\lambda,k,j}}(z) \, d\mu(z).$$

Hence $c_{\lambda,k,j} = 0$ for all λ, k, j because of (28). Now we know that the functions $u^{k,j}$ and u vanish in B_a. In view of (27) this gives us the assertion of Theorem 1.

References

1. Helgason, S. (Groups and Geometric Analysis) *S. Helgason.* New York: Academic Press. 1984. 735.
2. Helgason, S. (Geometric Analysis on Symmetric Spaces) *S. Helgason.* Rhode Island: Amer. Math. Soc., Providence. 1994. 637.
3. Helgason, S. (Integral Geometry and Radon Transforms) *S. Helgason.* New York: Springer. 2010. 301.
4. Volchkov, V. V. (Integral Geometry and Convolution Equations) *V. V. Volchkov.* Dordrecht: Kluwer Academic. 2003. 454.
5. Volchkov, V. V., Volchkov, Vit. V. (Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces) *V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov.* Basel: Birkhäuser. 2013. 593.
6. Volchkov, V. V. & Volchkov, Vit. V. (2015) Conical injectivity sets of the Radon transform on spheres. *Algebra and Analiz.* 27 (5). p. 1–31.
7. Volchkov, V. V., Volchkov, Vit. V. (Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group) *V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov.* London: Springer Monographs in Mathematics, Springer. 2009. 671.
8. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G. (Higher Transcendental Functions, Vol I) *A. Erdélyi.* New York: McGraw-Hill. 1953.271.
9. Levin, B. Ya. (Distribution of Zeros of Entire Functions) *B. Ya. Levin.* Moscow: Gostekhizdat. 1956.632.
10. Koornwinder, T. H. (Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups) Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. *T. H. Koornwinder.* R. A. Askey et al. (eds.) (Dordrecht: D. Reidel Publishing Company). p. 1–85. 1984.
11. Hörmander, L. (The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol I) *L. Hörmander.* New York: Springer-Verlag. 1983.462.

УДК: 517.984:517.958

MSC2010: 35Q35, 35D35, 35L90

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ "ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ—БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ"

© Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский

Крымский инженерно-педагогический университет
Воронежский государственный университет
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *kopachevsky@list.ru*

Small movements and eigenoscillations of a system "an ideal fluid–barotropic gas".

Gaziev E. L., Kopachevsky N. D.

Abstract. The paper is devoted to investigation of the problem on small movements and eigenoscillations of a system that consists of an ideal incompressible fluid and barotropic gas, and is situated in bounded vessel.

At the first part we use an operator approach for an investigation of the problem on small oscillations of the system. By this way the initial-boundary value problem is transformed to Cauchy problem for differential-operator equation of the second order in some Hilbert space. The operator coefficients of this equation are operator of kinetic energy (positive and compact) and operator of potential energy (bounded from below self-adjoint one with discrete spectrum). At the bounded statically stable equilibrium state the potential energy operator is positive definite.

On the base of the properties of these operators we prove the theorems on correct solvability as Cauchy problem for differential-operator equation as initial-boundary value problem. We prove also the theorem on instability of considered system in the case when an minimal eigenvalue of the potential energy operator is negative.

For eigenoscillations problem we prove that the spectrum of this problem is discrete with a limit point at infinity. For computing of the eigenvalues (squared oscillation freequences) we formulate the variational principle on the base of Ritz approach.

At the second part of our paper we consider more detailed the special case of the oscillations problem when the vessel is cylindrical with arbitrary cross section and an equilibrium dividing surface between fluid and gas is horizontal. We receive the characteristic equation of the problem and prove that solutions of the equation are asymptotically divided into two sets. For the first set there are corresponded gravitational-capillary waves in the system, and for the second one — acoustic waves in a gas.

Keywords: *ideal fluid, incompressible fluid, barotropic gas, low gravity, equilibrium state, eigenoscillations, eigenvalue, operator approach, Hilbert space, initial-boundary value problem, spectral problem, solvability, strong solution, instability.*

1. Часть I. Малые движения и собственные колебания системы "жидкость—газ" в произвольной ограниченной области

1.1. **Предисловие.** Данная работа является продолжением исследований, представленных в [1]. Здесь рассматривается в общей постановке задача о малых движениях и собственных колебаниях системы "идеальная жидкость–баротропный газ" в произвольной ограниченной области. Предполагается, что эта система находится в условиях, близких к невесомости, и потому следует учитывать влияние, наряду с гравитационными, поверхностных сил. В связи с этим граница раздела "жидкость–газ" является, вообще говоря, криволинейной. Предполагается, что состояние равновесия системы определено, т. е. известна конфигурация границы раздела, области, занимаемой жидкостью и газом, а также законы изменения давления в жидкости и баротропном газе.

В части I статьи (пп. 2–11) исследуется операторными методами (см. [2]) начально-краевая задача о малых движениях системы. При этом при изучении вспомогательных краевых задач для областей с липшицевой границей используются обобщенные формулы Грина (см. [3], [4]). Итогом такого подхода является переход от исходной задачи к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Операторные коэффициенты этого уравнения имеют физический смысл: это операторы кинетической и потенциальной энергии системы. Изученные свойства этих операторов позволяют получить утверждение о корректной разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения, а затем и аналогичное утверждение для исходной начально-краевой задачи.

В работе рассматриваются также собственные колебания системы (п. 5, 8, 9). Доказаны теоремы о дискретности спектра, о полноте и базисности системы собственных функций спектральной задачи, а также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

Часть II статьи посвящена рассмотрению спектральной проблемы в случае, когда жидкость и газ заполняют цилиндрический сосуд с произвольным поперечным сечением, причем граница раздела между жидкостью и газом горизонтальная. Это позволяет использовать метод разделения переменных и более детально исследовать проблему собственных колебаний. Установлено, в частности, что частоты и моды собственных колебаний асимптотически разбиваются на два класса: это поверхностные волны, обусловленные действием в системе гравитационных и поверхностных сил и родственные колебаниям двух несжимаемых жидкостей постоянной плотности, а также акустические волны, отвечающие колебаниям лишь одного газа с неподвижной границей раздела.

Данная работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10125), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

Авторы благодарят З. З. Ситшаеву за внимание и помощь в работе.

1.2. **О задаче статики.** Будем считать, что идеальная однородная жидкость и баротропный газ заполняют некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и находятся под действием слабого однородного гравитационного поля с ускорением $\vec{g}$. Тогда в процессе движения жидкости следует учитывать и действие капиллярных (поверхностных) сил, и данная гидросистема будет находиться в условиях, близких к невесомости (см. [6]). Постоянную плотность жидкости обозначим через $\rho_1 > 0$, а область, занятую ею в состоянии покоя, — через $\Omega_1 \subset \Omega$. Обозначим через S_1 ту часть твердой стенки $S = \partial\Omega$, которая примыкает к жидкости, а через Γ — границу раздела сред в состоянии покоя. Соответственно через S_2 обозначим часть твердой стенки, примыкающую к газу: $S_2 = S \setminus S_1$.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия гравитационного поля: $\vec{g} = -g\vec{e_3}$ ($\vec{e_k}$ – орт оси Ox_k, $k = \overline{1,3}$). Предполагаем, что газ является баротропным, т. е. зависимость градиента давления ∇p_2 от плотности газа ρ_2 имеет вид

$$\nabla p_2 = a^2 \nabla \rho_2, \tag{1.2.1}$$

где a^2 — квадрат скорости звука в газе, которую считаем постоянной. Тогда, учитывая условие равновесия в газе, получаем, что равновесная плотность газа $\rho_{2,0}(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, изменяется по закону

$$\rho_{2,0}(x) = \rho_{2,0}(0) \exp(-gx_3/a^2), \quad x \in \Omega_2, \tag{1.2.2}$$

а равновесное давление — соответственно по закону

$$p^0_{2,0}(x) = c_2 + a^2 \rho_{2,0}(0) \exp\left(-gx_3/a^2\right), \quad c_2 = \mathrm{const}.$$

Равновесное давление в жидкости, как известно, изменяется по закону

$$p^0_1(x) = c_1 - g\rho_1 x_3, \quad c_1 = \mathrm{const}. \tag{1.2.3}$$

1.3. **Постановка задачи о малых колебаниях гидросистемы.** Будем считать, что задача статики решена (см. [6], [1]), т. е. определена форма равновесной поверхности Γ, потому и области Ω_1 и Ω_2, занятые в состоянии покоя жидкостью и газом соответственно.

Переходя к рассмотрению малых движений жидкости и газа относительно равновесного состояния, введем поля перемещений $\vec{w}_k(t,x)$ частиц жидкости и газа соответственно в областях Ω_k, $k=1,2$, а также поля отклонений давлений $p_k(t,x)$ и отклонение поля плотности в газе $\rho_2(t,x)$ от их равновесных значений (см. (2.2)–(2.4)). Тогда после линеаризации уравнений движения в жидкости и газе, а также учитывая снос граничных условий с движущейся границы раздела на равновесную поверхность Γ (эта процедура для одной жидкости подробно описана, например, в [6]), приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \ \Omega_1), \tag{1.3.1}$$

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 + \rho_{2,0} \vec{f}_2, \ \rho_2 + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \vec{w}_2) = 0 \ (\text{в } \ \Omega_2), \tag{1.3.2}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } \ S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \ S_2),$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta \ (\text{на } \ \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \tag{1.3.3}$$

$$p_1 - p_2 = \mathscr{L}_\sigma \zeta := -\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(x)\zeta \ (\text{на } \ \Gamma), \ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \ (\text{на } \ \partial\Gamma), \tag{1.3.4}$$

$$a_\sigma(x) := -\sigma(k_1^2 + k_2^2) + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(x)) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \chi := (k_\Gamma \cos\delta - k_S)/\sin\delta,$$

$$\vec{w}_k(0,x) = \vec{w}_k^0(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_k}{\partial t}(0,x) = \vec{w}_k^1(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{1.3.5}$$

Поясним обозначения в уравнениях и граничных условиях (3.1)–(3.1). Через $\vec{f}_k(t,x)$ $(k=1,2)$ обозначены дополнительные малые поля плотности массовых сил, наложенных на гравитационное поле. Далее, через $\vec{n}$ обозначен единичный вектор внешней нормали (на Γ он направлен внутрь Ω_2), а через $\vec{\nu}$ — аналогичный вектор к $\partial\Gamma$ в плоскости, касательной к Γ на контуре $\partial\Gamma$. Затем δ — это угол смачивания (двугранный угол между Γ и S_1, $0 < \delta < \pi$); k_Γ и k_S — кривизны сечений поверхностей Γ и S плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma$; Δ_Γ — оператор Лапласа—Бельтрами, действующий на поверхности Γ; $\sigma = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе "жидкость–газ", т. е. на Γ; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ.

Отметим еще, что функция $\zeta = \zeta(t,x)$, $x \in \Gamma$ описывает малые перемещения движущейся границы раздела "жидкость–газ" относительно равновесной поверхности Γ

вдоль нормали $\vec{n}$ к Г. Заметим также, что последнее условие в (3.4) есть следствие условия сохранения объема жидкости в процессе малых колебаний гидросистемы, а последнее условие в (3.5) — следствие сохранения угла смачивания в этом процессе (см. [6]).

1.4. **Применение метода ортогонального проектирования к исследуемой проблеме.** Будем исследовать задачу (3.1)–(3.1) методами теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве (см., например, [2], [6]). В связи с этим введем необходимые для дальнейшего функциональные гильбертовы пространства.

1°. Пространство векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ с квадратом нормы

$$\|\vec{w}_1\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} |\vec{w}_1|^2 \, d\Omega_1.$$

2°. Пространство $\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$ векторных полей с весом:

$$\|\vec{w}_2\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\vec{w}_2|^2 \, d\Omega_2.$$

3°. Пространство скалярных полей $L_2(\Gamma)$ с квадратом нормы

$$\|\zeta\|^2_{L_2(\Gamma)} := \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma$$

и его подпространство

$$L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\},$$

где 1_Γ — единичная функция, заданная на Г, а $\{1_\Gamma\}$ — одномерное подпространство констант.

Будем далее считать, что искомые векторные и скалярные поля в задаче (3.1)–(3.1) являются функциями переменной t со значениями в соответствующих введенных гильбертовых пространствах. Заметим также, что в силу (2.1), (2.2) в правой части первого уравнения (3.2)

$$-\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 = -a^2 \rho_{2,0}(x) \nabla(\rho_{2,0}^{-1}(x)\, \rho_2).$$

Поэтому поля $\vec{w}_2(t,x)$ и $\nabla(\rho_{2,0}^{-1}(x)\rho_2(t,x))$ можно считать элементами пространства $\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Соответственно $\vec{w}_1(t,x)$ и $\nabla p_1(t,x)$ считаем элементами из $\vec{L}_2(\Omega_1)$, а $\zeta(t,x)$ — элементом из $L_{2,\Gamma}$.

Воспользуемся теперь ортогональным разложением

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega_1), \tag{1.4.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \Big\{ \vec{v}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_1) \Big\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \Big\{ \vec{u}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \ \vec{u}_1 = \nabla\varphi_1, \ \varphi_1 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma) \Big\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega_1) := \Big\{ \vec{w}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{w}_1 = \nabla\Phi_1, \ \Delta\Phi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_1), \int\limits_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0 \Big\},$$

(см. [2], с. 106), а также аналогичным разложением в пространстве с весом (оно доказывается так же, как (4.2), но только на два подпространства):

$$\vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) = \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \tag{1.4.2}$$

$$\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \Big\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \vec{u} = \nabla\varphi, \ \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\, \varphi \, d\Omega_2 = 0 \Big\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}) := \Big\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) : \ \operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{v}) = 0 \ (\text{в } \ \Omega_2), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_2) \Big\}. \tag{1.4.3}$$

(Здесь $\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{v})$ и $\vec{v} \cdot \vec{n}$, как и в (4.2), понимаются как функционалы в соответствующих пространствах с негативной нормой, см. [2], с. 101–102.)

Из (4.2), (4.3) приходим к выводам, что в задаче (3.1)–(3.1) поле смещений $\vec{w}_1(t,x)$ нужно искать в виде

$$\vec{w}_1(t,x) = \vec{v}_1(t,x) + \nabla\Phi_1(t,x), \ \vec{v}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1), \ \nabla\Phi_1(t,x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega_1), \tag{1.4.4}$$

а поле давлений $\nabla p_1(t,x)$ — в виде

$$\nabla p_1(t,x) = \nabla\widetilde{p}_1(t,x) + \nabla\varphi_1(t,x), \ \nabla\widetilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S}(\Omega_1), \ \nabla\varphi_1 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1). \tag{1.4.5}$$

Соответственно, поле смещений $\vec{w}_2(t,x)$ естественно разыскивать в виде

$$\vec{w}_2(t,x) = \vec{v}_2(t,x) + \nabla\Phi_2(t,x), \ \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \ \nabla\Phi_2(t,x) \in \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}), \tag{1.4.6}$$

при этом функция $\nabla(\rho_{2,0}^{-1}(x)\rho_2(t,x))$ уже является элементом из $\vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0})$. Наконец, $\zeta(t,x)$ есть функция переменной t со значениями в $L_{2,\Gamma}$.

Введем в рассмотрение ортопроекторы

$$P_{1,0} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), P_{1,0,\Gamma} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), P_{1,h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{1.4.7}$$

а также ортопроекторы

$$P_{2,0} : \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \to \vec{J}_0(\Omega_2; \rho_{2,0}), \ P_{2,G} : \vec{L}_2(\Omega_2; \rho_{2,0}) \to \vec{G}(\Omega_2; \rho_{2,0}). \tag{1.4.8}$$

Действуя ортопроекторами (4.9) на обе части первого уравнения (3.1), используя представление (4.6), (4.7) и начальные условия, придем к соотношениям

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = P_{1,0}\vec{f}_1, \ \vec{v}_1(0,x) = P_{1,0}\vec{w}_1^0(x), \ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(0,x) = P_{1,0}\vec{w}_1^1(x); \tag{1.4.9}$$

$$\nabla\varphi_1 = \rho_1 P_{1,0,\Gamma}\vec{f}_1, \quad \varphi_1 = 0 \text{ (на } \Gamma), \tag{1.4.10}$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\nabla\Phi_1\Big) = -\nabla\widetilde{p}_1 + \rho_1 P_{1,h,S_1}\vec{f}_1, \tag{1.4.11}$$

$$\nabla\Phi_1 \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S_1),\ \nabla\Phi_1 \cdot \vec{n} = \zeta \text{ (на } \Gamma),\ \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{1.4.12}$$

Аналогичная процедура для уравнения (3.2) при действии ортопроекторов (4.1) дает соотношения

$$\rho_{2,0}\frac{\partial^2 \vec{v}_2}{\partial t^2} = \rho_{2,0}P_{2,0}\vec{f}_2,\ \vec{v}_2(0,x) = P_{2,0}\vec{w}_2^0(x),\ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t}(0,x) = P_{2,0}\vec{w}_2^1(x); \tag{1.4.13}$$

$$\begin{gathered}\rho_{2,0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\nabla\Phi_2\Big) = -a^2\rho_{2,0}\nabla(\rho_{2,0}^{-1}\rho_2) + \rho_{2,0}P_{2,G}\vec{f}_2, \\ \nabla\Phi_2 \cdot \vec{n} = 0 \ \text{ (на } S_2), \ \ \nabla\Phi_2 \cdot \vec{n} = \zeta \ \text{ (на } \Gamma), \ \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0.\end{gathered} \tag{1.4.14}$$

Преимуществом метода ортогонального проектирования на подпространства (4.2), (4.3) является то обстоятельство, что задачи (1.4.9), (1.4.10), а также (1.4.13) решаются непосредственно, а нетривиальной оказывается проблема (1.4.11), (1.4.12), (1.4.14) с учетом видоизмененных краевых и начальных условий.

Сформулируем постановку этой оставшейся начально-краевой задачи, опираясь на тот факт, что в (1.4.11) и (1.4.14) все векторные поля потенциальны. Тогда из (1.4.11) приходим к интегралу Коши—Лагранжа в области Ω_1:

$$\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + \widetilde{p}_1 = \rho_1\widetilde{f}_1 + \widetilde{c}_1(t),\ \nabla\widetilde{f}_1 = P_{1,h,S_1}\vec{f}_1.$$

В области Ω_2 аналогично получаем

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} + a^2{\rho_{2,0}}^{-1}\rho_2 = \widetilde{f}_2 + \widetilde{c}_2(t),\ \nabla\widetilde{f}_2 = P_{2,G}\vec{f}_2. \tag{1.4.15}$$

С использованием этих соотношений динамическое граничное условие (3.5) (с учетом соотношения $\varphi_1 = 0$ (на Γ), см. (1.4.10)) после применения к нему ортопроектора $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$ приводится к виду

$$\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)\Big) + B_\sigma\zeta = \rho_1\widetilde{f}_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\widetilde{f}_2) \ \text{ (на } \Gamma),$$

$$B_\sigma\zeta := P_\Gamma\mathscr{L}_\sigma P_\Gamma\zeta, \ \ D(B_\sigma) = \Big\{\zeta \in H^2(\Gamma)\cap L_{2,\Gamma} : \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} + \chi\zeta = 0 \ \text{ (на } \partial\Gamma)\Big\}.$$

С учетом (4.5) и (4.8) из второго уравнения (3.2) также имеем

$$\rho_2 = -\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{w}_2) = -\operatorname{div}(\rho_{2,0}\vec{v}_2) - \operatorname{div}(\rho_{2,0}\nabla\Phi_2),$$

и тогда (1.4.15) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_0 \Phi_2 + \widetilde{f}_2(t,x), \ \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2).$$

Таким образом, в терминах потенциалов смещений нетривиальная начально-краевая задача о малых движениях гидросистемы "идеальная жидкость–баротропный газ" формулируется следующим образом. Необходимо найти функции $\Phi_1(t,x)$ и $\Phi_2(t,x)$ из следующих уравнений, краевых и начальных условий:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \tag{1.4.16}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_0 \Phi_2 + \widetilde{f}_2(t,x) \ \ (\text{в } \Omega_2), \\ \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2), \ \ \nabla \widetilde{f}_2 := P_{2,G} \vec{f}_2; \end{gathered} \tag{1.4.17}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2), \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \ \ (\text{на } \Gamma), \\ \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \ \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \ \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 \, d\Omega_2 = 0, \ \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \widetilde{f}_2 \, d\Omega_2 = 0; \end{gathered} \tag{1.4.18}$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_\Gamma \left(\rho_{2,0} \Phi_2\right) + B_\sigma \zeta = \rho_1 \widetilde{f}_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \widetilde{f}_2) \ \ (\text{на } \Gamma), \ \nabla \widetilde{f}_1 := P_{1,h,S_1} \vec{f}_1; \tag{1.4.19}$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma \mathscr{L}_\sigma P_\Gamma \zeta, \ \ \mathscr{L}_\sigma \zeta = \mathscr{L}_\sigma P_\Gamma \zeta = -\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(x) \zeta, \ \ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \ \ (\text{на } \partial \Gamma); \tag{1.4.20}$$

$$\begin{gathered} \Phi_1(0,x) = \Phi_1^0(x), \ \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(0,x) = \Phi_1^1(x), \ \ x \in \Omega_1, \\ \Phi_2(0,x) = \Phi_2^0(x), \ \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(0,x) = \Phi_2^1(x), \ \ x \in \Omega_2. \end{gathered} \tag{1.4.21}$$

Кроме того, для $\Phi_1^0(x)$ и $\Phi_2^0(x)$, а также $\Phi_1^1(x)$ и $\Phi_2^1(x)$ должны выполняться условия согласования в виде

$$\frac{\partial \Phi_1^0}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial n} =: \zeta^0, \quad \frac{\partial \Phi_1^1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial n} =: \zeta^1 \ \ (\text{на } \Gamma). \tag{1.4.22}$$

1.5. **Постановка задачи о собственных колебаниях гидросистемы.** Будем рассматривать, наряду с начально-краевой задачей (1.4.16)–(1.4.21), задачу о собственных колебаниях системы "жидкость–газ", т. е. такие решения этой задачи, которые описывают свободные движения ($\vec{f}_1(t,x) \equiv \vec{0}$, $\vec{f}_2(t,x) \equiv \vec{0}$) в исходной постановке, см. (3.1)–(3.1). В этом случае решения задачи (1.4.16)–(1.4.21) можно искать в виде

$$\Phi_k(t,x) = \exp(i\omega t)\Phi_k(x), \quad k = 1,2,$$

где ω — частота колебаний, а $\Phi_k(x)$ — амплитудные функции.

Для амплитудных элементов приходим к следующей спектральной проблеме

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad -\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \ \ (\text{в } \Omega_2), \quad \lambda := \omega^2, \tag{1.5.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2), \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \zeta \ \ (\text{на } \Gamma), \tag{1.5.2}$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \ \ (\text{на } \ \Gamma), \tag{1.5.3}$$

$$\int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0, \quad \lambda\int_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Phi_2\, d\Omega_2 = 0. \tag{1.5.4}$$

Здесь спектральный параметр λ входит как в уравнение в области Ω_2, так и в граничное условие (1.5.3). Кроме того, порядки дифференциальных операторов в уравнениях (1.5.1) и (1.5.3) совпадают, так как Δ, Δ_0 и Δ_Γ — эллиптические операторы одного и того же (второго) порядка.

Будем далее предполагать, что область Ω имеет липшицеву границу $\partial\Omega$. Более того, считаем, что поверхности S_1, S_2 и Γ — кусочно-гладкие с ненулевыми внутренними углами, а контур $\partial\Omega$ (граница между Γ и $S = \partial\Omega$) также обладает этими свойствами.

Лемма 1. *Пусть функции $a_\sigma(x)$, $x \in \Gamma$, и $\chi(x)$, $x \in \partial\Gamma$, определяемые состоянием равновесия системы, непрерывны. Тогда оператор B_σ, заданный соотношениями* (1.4.20) *на функциях из $H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, допускает расширение по Фридрихсу до самосопряженного ограниченного снизу оператора с дискретным спектром:*

$$(B_\sigma\zeta,\zeta)_{L_{2,\Gamma}} \geq c\,\|\zeta\|^2_{L_{2,\Gamma}}, \ \ \forall\, \zeta \in \mathscr{D}(B_\sigma) \subset H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \ \ c \in \mathbb{R}. \tag{1.5.5}$$

Доказательство. Оно такое же, как аналогичное утверждение для одной идеальной жидкости, см. [2, с. 163–164]. □

Определение 1. Будем говорить, что система "жидкость–газ" статически устойчива по линейному приближению, если оператор B_σ положительно определен ($B_\sigma \gg 0$), т. е. в (1.5.5) $c > 0$. □

Физический смысл оператора B_σ состоит в том, что его квадратичная форма $(B_\sigma\zeta,\zeta)_{L_{2,\Gamma}}$ равна удвоенной потенциальной энергии исследуемой системы, отвечающей действию на нее гравитационных и поверхностных сил. При этом

$$(B_\sigma\zeta,\zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \int_\Gamma [\sigma|\nabla_\Gamma\zeta|^2 + a_\sigma(x)|\zeta|^2]d\Gamma + \sigma\oint_{\partial\Gamma} \chi(s)|\zeta|^2 ds, \ \zeta \in \mathscr{D}(B_\sigma). \tag{1.5.6}$$

Если $B_\sigma \gg 0$, то правая часть в (1.5.6) задает квадрат нормы $\|\zeta\|^2_{B_\sigma}$ в энергетическом пространстве $H_{B_\sigma} = \mathscr{D}(B_\sigma^{1/2})$, причем эта норма эквивалентна норме Дирихле:

$$\begin{gathered} c_1 \int\limits_\Gamma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 d\Gamma \le \|\zeta\|^2_{B_\sigma} \le c_2 \int\limits_\Gamma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 d\Gamma, \\ \forall \zeta \in H_{B_\sigma} = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} =: H^1_\Gamma. \end{gathered} \tag{1.5.7}$$

(Доказательство этого факта такое же, как в [2, с. 164]).

Отметим теперь простое свойство решений задачи (1.5.1)–(1.5.4): собственные значения этой задачи вещественны. Для доказательства этого факта приведем сначала обобщенные формулы Грина для операторов Δ, Δ_0 и Δ_Γ, рассматриваемые в соответствующих гильбертовых пространствах (см. [4]). Применительно к исследуемой задаче они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} (\eta_1, u_1)_{H^1(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1} \nabla \eta_1 \cdot \nabla u_1 \, d\Omega_1 = \langle \eta_1, -\Delta u_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \\ + \langle \gamma_{1,\Gamma} \eta_1, \partial_{1,\Gamma} u_1 \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_{S_1} \eta_1, \partial_{S_1} u_1 \rangle_{L_2(S_1)}, \quad \forall \eta_1, u_1 \in \check{H}^1(\Omega_1) \subset H^1(\Omega_1), \\ \Delta u_1 \in (H^1(\Omega_1))^*, \quad \gamma_{1,\Gamma} \eta_1 := \eta_1|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \partial_{1,\Gamma} u_1 := \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ \gamma_{S_1} \eta_1 := \eta_1|_{S_1} \in H^{1/2}(S_1), \quad \partial_{S_1} u_1 := \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{S_1} \in \widetilde{H}^{-1/2}(S_1); \end{gathered} \tag{1.5.8}$$

$$\begin{gathered} (\eta_2, u_2)_{H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})} := \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) \nabla \eta_2 \cdot \nabla u_2 \, d\Omega_2 = \langle \eta_2, -\Delta_0 u_2 \rangle_{L_2(\Omega_2;\rho_{2,0})} + \\ + \langle \gamma_{2,\Gamma} \eta_2, \rho_{2,0} \partial_{2,\Gamma} u_2 \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_{S_2} \eta_2, \rho_{2,0} \partial_{S_2} u_2 \rangle_{L_2(S_2)}, \quad \forall \eta_2, u_2 \in \check{H}^1(\Omega_2) \subset H^1(\Omega_2), \\ \gamma_{2,\Gamma} \eta_2 := \eta_2|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \partial_{2,\Gamma} u_2 := \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ \gamma_{S_2} \eta_2 := \eta_2|_{S_2} \in H^{1/2}(S_2), \quad \partial_{S_2} u_2 := \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{S_2} \in \widetilde{H}^{-1/2}(S_2); \end{gathered} \tag{1.5.9}$$

$$\begin{gathered} (\eta, \zeta)_{H^1_\Gamma} := \int\limits_\Gamma \nabla_\Gamma \eta \cdot \nabla_\Gamma \zeta \, d\Gamma = \langle \eta, -\Delta_\Gamma \zeta \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_0 \eta, \partial_0 \zeta \rangle_{L_2(\partial\Gamma)}, \quad \forall \eta, \zeta \in H^1_\Gamma, \\ \gamma_0 \eta := \eta|_{\partial\Gamma} \in H^{1/2}(\partial\Gamma), \quad \partial_0 \zeta := \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Gamma} \in H^{-1/2}(\partial\Gamma). \end{gathered} \tag{1.5.10}$$

Здесь косыми скобками обозначены значения функционалов из сопряженного пространства на элементах из основного пространства, а $\check{H}^1(\Omega_k)$ — те продпространства из $H^1(\Omega_k)$, у элементов которых производные по нормали, заданные на части границы области, продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ (см. [4]).

Для области Ω_1 это будут оснащения (с компактными вложениями)

$$\begin{aligned}
&H^1(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^1(\Omega_1))^*,\\
&H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow (H_\Gamma^{1/2})^* = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2},\\
&H^{1/2}(S_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(S_1) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^{1/2}(S_1))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(S_1).
\end{aligned}$$

Для области Ω_2 соответственно имеем

$$H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}))^*, \quad \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}u_2\, d\Omega_2 = 0,$$

$$H_\Gamma^{1/2} \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad H^{1/2}(S_2) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(S_2) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^{1/2}(S_2))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(S_2).$$

Наконец, для границы Γ:

$$\begin{aligned}
&H_\Gamma^1 \hookrightarrow\hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow\hookrightarrow (H_\Gamma^{1/2})^*,\\
&H^{1/2}(\partial\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\partial\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow (H^{1/2}(\partial\Gamma))^* = H^{-1/2}(\partial\Gamma).
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Если $B_\sigma \gg 0$, то собственные значения λ задачи* (1.5.1)–(1.5.4) *находятся среди значений вариационного отношения*

$$F_1(\Phi_1;\Phi_2) := \frac{\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2}{a^{-2}\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}(x)\Phi_2))\|^2_{L_{2,\Gamma}}}. \tag{1.5.11}$$

В общем случае, когда выполнено лишь условие ограниченности снизу (1.5.5), *эти собственные значения можно найти среди значений вариационного отношения*

$$F_2(\Phi_1;\Phi_2) := \frac{a^2\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\Delta_0\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \langle\zeta, B_\sigma\zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}}}{\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2}. \tag{1.5.12}$$

Из (1.5.12) *следует, что собственные значения λ вещественны, а из* (1.5.11), *когда $B_\sigma \gg 0$, — что они положительны.*

Доказательство. Из условия $B_\sigma \gg 0$ получаем, что существует обратный компактный положительный оператор $B_\sigma^{-1} > 0$. Значит, условие (1.5.3) можно переписать в виде

$$\zeta = \lambda B_\sigma^{-1}(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}(x)\Phi_2)),$$

а затем воспользоваться уравнениями и граничными условиями задачи (1.5.1)–(1.5.4) и формулами Грина (1.5.7)–(1.5.10). Тогда λ будет равно правой части (1.5.11). Аналогичные преобразования в случае ограниченности снизу оператора B_σ приводят к формуле (1.5.12). $\square$

1.6. **Применение операторного подхода. Переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве.** Вернемся к задаче (1.4.16)–(1.4.20) и воспользуемся для ее исследования операторным подходом, разработанным для линейных задач гидродинамики в [2]. С этой целью рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач, связанных с (1.4.16)–(1.4.20) и отвечающих этим задачам операторов.

1°. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_1), \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \zeta \ (\text{на } \Gamma), \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0, \int_\Gamma \Phi_1 \, d\Gamma = 0. \qquad (1.6.1)$$

Опираясь на обобщенную формулу Грина (1.5.8), определим слабое решение задачи (1.6.1) как такую функцию из $\check{H}^1_\Gamma(\Omega_1) \subset H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$(\Psi_1, \Phi_1)_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1 \, d\Omega_1 = \langle \gamma_{1,\Gamma}\Psi_1, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall\Psi_1 \in \check{H}^1_\Gamma(\Omega_1). \qquad (1.6.2)$$

Здесь

$$\check{H}^1_\Gamma(\Omega_1) := \Big\{\Phi_1 \in H^1(\Omega_1) : \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big| \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0\Big\}.$$

Приведем без доказательства следующее утверждение: задача (1.6.1) имеет слабое решение $\Phi_1(x) \in \check{H}^1_{h,\Gamma}(\Omega_1) \subset \check{H}^1_\Gamma(\Omega_1) \subset H^1_\Gamma(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, т. е. ζ продолжима нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_1)$. При этом решение выражается формулой

$$\Phi_1(x) = V_1\zeta, \quad V_1 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma); \check{H}^1_{h,\Gamma}(\Omega_1)),$$

$$\check{H}^1_{h,\Gamma}(\Omega_1) := \Big\{\Phi_1 \in \check{H}^1_\Gamma(\Omega_1) : \Delta\Phi_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1)\Big\}.$$

2°. Рассмотрим теперь аналогичную проблему для области Ω_2:

$$\Delta_0\Phi_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \ \ \rho_{2,0}(x)\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2),$$

$$\rho_{2,0}(x)\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = \rho_{2,0}(x)\zeta \ \text{ (на } \Gamma), \int\limits_{\Gamma} \zeta\, d\Gamma = 0, \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_{22}\, d\Omega_2 = 0. \quad (1.6.3)$$

Здесь слабое решение определяется на базе обобщенной формулы Грина (1.5.9) как такая функция из $\check{H}^1_{\Omega_2;\rho_{2,0})}$, для которой выполнено тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{22})_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_{22}\, d\Omega_2 =$$

$$= -\langle \gamma_{2,\Gamma}\Psi_2, \rho_{2,0}\zeta\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\Psi_2 \in \check{H}^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}, \quad (1.6.4)$$

$$\check{H}^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} := \Big\{\Phi_2 \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} : \Big(\rho_{2,0}(x)\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big)_{\Gamma} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_2\, d\Omega_2 = 0\Big\}.$$

Соответствующее утверждение о разрешимости задачи (1.6.3) таково: эта задача имеет слабое решение тогда и только тогда, когда $\zeta \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, и это решение решение выражается формулой

$$\Phi_{22} = V_2\zeta, \quad V_2 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma); \check{H}^1_{h,\Omega_2,\rho_{2,0}}),$$

$$\check{H}^1_{h,\Omega_2,\rho_{2,0}} := \Big\{\Phi_2 \in \check{H}^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} : \Delta\Phi_2 = 0 \ \text{ (в } \Omega_2)\Big\}.$$

3°. Рассмотрим еще вспомогательную задачу типа задачи Неймана для уравнения Пуассона:

$$-\Delta_0\Phi_{21}(x) = f_2 \ \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \ \text{ (на } \partial\Omega_2),$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x) f_2\, d\Omega_2 = 0, \quad \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_{21}\, d\Omega_2 = 0. \quad (1.6.5)$$

Слабое решение этой задачи определим как такую функцию Φ_{21} из

$$H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} := \Big\{\Phi_{21} \in H^1(\Omega_2, \rho_{2,0}) : \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_{21}\, d\Omega_2 = 0\Big\},$$

для которой имеет место тождество

$$(\Psi_2, \Phi_{21})_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \langle\Psi_2, f_2\rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}, \quad \forall\Psi_2 \in \check{H}^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}. \quad (1.6.6)$$

Заметим, что (1.6.6) следует из формулы Грина (см. [5])

$$(\eta_2, u_2)_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \langle\eta_2, -\Delta_0 u_2\rangle_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} +$$

$$+ \langle\gamma_2\eta_2, \rho_{2,0}\partial_2 u_2\rangle_{L_2(\partial\Omega_2)}, \quad \forall\eta_2, u_2 \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}},$$

$$-\Delta_0 u_2 \in (H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})^*,\ \gamma_2\eta_2 := \eta_2|_{\partial\Omega_2} \in H^{1/2}(\partial\Omega_2),\ \partial_2 u_2 := \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_2} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_2).$$

Как следует из теории пар гильбертовых пространств, а также слабых решений соответствующих операторных уравнений, задача (1.6.5) равносильна операторному уравнению

$$A\Phi_{21} = f_2, \quad \Phi_{21} \in \mathscr{D}(A) = H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}},$$

где $A : H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} \to (H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})^*$ — оператор гильбертовой пары $(H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}; L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$. Поэтому слабое решение задачи (1.6.5) существует тогда и только тогда, когда выполнено условие $f_2 \in (H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})^*$, причем $\Phi_{21} = A^{-1}f_2 \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$.

Отметим еще, что сужение оператора A на область определения $\mathscr{D}(A) \subset H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$ такую, что область значений этого суженного оператора совпадает с пространством

$$L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} := \Big\{\Phi_2 \in L(\Omega_2;\rho_{2,0}) : \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_2\, d\Omega_2 = 0\Big\},$$

является самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, причем теперь $\mathscr{D}(A^{1/2}) = H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$.

Опираясь на решения вспомогательных краевых задач 1°–3° и возвращаясь к проблеме (1.4.16)–(1.4.22), представим искомую функцию $\Phi_2(t,x)$ в виде суммы $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где Φ_{22} — решение вспомогательной задачи 2°, а Φ_{21} — задачи 3°. Тогда, используя введенные операторы V_1, V_2 и A (в задачах 1°–3°), перепишем соотношения (1.4.17) и (1.4.19) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\eta + V_2\zeta\Big) + a^2 A\eta = \widetilde{f}_2(t), \quad \eta := \Phi_{21}, \tag{1.6.7}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(-P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)\eta) + C\zeta\Big) + B_\sigma\zeta = f_\Gamma(t) := \rho_1\gamma_1\widetilde{f}_1 - P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)\widetilde{f}_2), \tag{1.6.8}$$

$$\begin{aligned} &C\zeta := C_1\zeta + C_2\zeta := \rho_1\gamma_1 V_1\zeta - P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)V_2\zeta), \\ &\gamma_1\Phi_1 := \Phi_1|_\Gamma, \ \ \gamma_2\Phi_{22} := \Phi_{22}|_\Gamma. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

При этом все остальные уравнения из (1.4.16)–(1.4.18) уже учтены введением операторов V_1, V_2, A и B_σ, однако к (1.6.7)–(1.6.9) следует еще присоединить видоизмененные начальные условия:

$$\zeta(0) = \zeta^0\Big(= \frac{\partial\Phi_1^0}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_{22}^0}{\partial n}\Big|_\Gamma\Big), \quad \zeta'(0) = \zeta^1\Big(= \frac{\partial\Phi_1^1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_{22}^1}{\partial n}\Big|_\Gamma\Big),$$

$$\Phi_1^0(x) = V_1\zeta^0,\ \ \Phi_{22}^0(x) = V_2\zeta^0,\ \ \Phi_1^1(x) = V_1\zeta^1,\ \ \Phi_{22}^1(x) = V_2\zeta^1,$$

$$\eta(0) = \Phi_{21}^0(x) = \Phi_2^0(x) - V_2\zeta^0 =: \eta^0,\ \eta'(0) = \Phi_{21}^1(x) = \Phi_2^1(x) - V_2\zeta^1 =: \eta^1. \tag{1.6.10}$$

Таким образом, начально-краевая задача (1.4.16)–(1.4.21) преобразована в задачу Коши (1.6.7)–(1.6.10) для системы двух дифференциально-операторных уравнений второго порядка: первое — для функций переменной t со значениями в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, а второе — со значениями в $L_{2,\Gamma}$.

Приведем эту систему к более симметричному виду, осуществляя в ней замену искомой функции:

$$\eta = A^{-1/2}\widetilde{\eta}; \tag{1.6.11}$$

действуя еще оператором $A^{1/2}$ на обе части (1.6.7), приходим к задаче

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\widetilde{\eta} + A^{1/2}V_2\zeta\Big) + a^2A\widetilde{\eta} = A^{1/2}\widetilde{f}_2(t),\ \ \widetilde{\eta}(0) := A^{1/2}\eta^0,\ \widetilde{\eta}'(0) := A^{1/2}\eta^1, \tag{1.6.12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(- P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)A^{-1/2}\widetilde{\eta}) + C\zeta\Big) + B_\sigma\zeta = f_\Gamma(t),\ \ \zeta(0) := \zeta^0,\ \zeta'(0) := \zeta^1. \tag{1.6.13}$$

Эту задачу, в свою очередь, можно переписать в векторно-матричной форме в виде задачи Коши для одного дифференциально-операторного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\mathscr{A}u\Big) + \mathscr{B}u = f(t),\ \ u(0) = u^0 := (\widetilde{\eta}(0);\zeta^0)^\tau,\ \ u'(0) = u^1 := (\widetilde{\eta}^1;\zeta^1)^\tau, \tag{1.6.14}$$

$$u(t) = (\widetilde{\eta}(t);\zeta(t))^\tau, f(t) = (A^{1/2}\widetilde{f}_2(t); f_\Gamma(t))^\tau; \tag{1.6.15}$$

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & C \end{pmatrix},\ \ \mathscr{B} := \begin{pmatrix} a^2A & 0 \\ 0 & B_\sigma \end{pmatrix},\ \ \mathscr{D}(\mathscr{B}) = \mathscr{D}(A) \oplus D(B_\sigma) \subset \mathscr{H}, \tag{1.6.16}$$

$$Q := -P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)A^{-1/2}),\ \ Q^* := A^{1/2}V_2,$$

где символом $(\cdot\,;\,\cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования, в данном случае вектор-строки.

1.7. **О свойствах операторных коэффициентов эволюционного уравнения.** Выясним свойства операторных коэффициентов задачи (1.6.14)–(1.6.16).

Лемма 3. *Операторы* Q *и* Q^* *из* (1.6.16) *являются взаимно сопряженными компактными операторами.*

Доказательство. Из тождества (1.6.16) при $\zeta \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$, $\Psi_2 = A^{-1/2}\widetilde{\eta} \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$, $\widetilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, имеем

$$\begin{aligned}(\Psi_2, V_2\zeta)_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} &= (A^{1/2}\Psi_2, A^{1/2}V_2\zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} = (\widetilde{\eta}, Q^*\zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \\ &= -\langle\gamma_2\Psi_2, (\rho_{2,0}(x)|_\Gamma)\zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = -\langle\gamma_2(\rho_{2,0}(x))A^{-1/2}\widetilde{\eta}, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \\ &= -\langle P_\Gamma(\gamma_2(\rho_{2,0}(x)A^{-1/2}\widetilde{\eta})), \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle Q\widetilde{\eta}, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}}.\end{aligned} \tag{1.7.1}$$

В этом соотношении оператор $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \to H_\Gamma^{1/2}$ ограничен. Действительно, при $\widetilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ имеем $A^{-1/2}\widetilde{\eta} \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$, $\rho_{2,0}(x)A^{-1/2}\widetilde{\eta} \in H^1(\Omega_2)$, $\gamma_2 : H^1(\Omega_2) \to H^{1/2}(\Gamma)$ также ограничен (по теореме Гальярдо для области Ω_2 с липшицевой границей $\partial\Omega_2$). Поскольку при этом $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, то $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \to L_{2,\Gamma}$ — компактный оператор. Тогда из (1.7.1) следует, что $Q^* := A^{1/2}V_2 : \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ сопряжен с $Q : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \to H_\Gamma^{1/2}$ и ограничен. Поэтому $Q^* := A^{1/2}V_2 : L_{2,\Gamma} \to L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ — компактный оператор. □

Теперь установим свойства оператора C.

Лемма 4. *Оператор* $C := \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2} \to H_\Gamma^{1/2}$ *(см.* (1.6.9)*) является ограниченным. Его сужение на* $L_{2,\Gamma}$ *является компактным положительным оператором, действующим в* $L_{2,\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Тогда из (1.6.2) при $\Psi_1 = \Phi_1 = V_1\zeta$, $(\partial\Phi_1/\partial n)_\Gamma = \zeta$, имеем

$$\langle C_1\zeta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle \rho_1\gamma_1V_1\zeta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \rho_1\,(\Phi_1, \Phi_1)_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1.$$

Далее, из (1.6.4) при $\Psi_2 = \Phi_{22} = V_2\zeta$, $(\partial\Phi_{22}/\partial n)_\Gamma = \zeta$, получаем аналогично

$$\langle C_2\zeta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = -\langle P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)V_2\zeta), \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = -\langle \gamma_2(\rho_{2,0}(x)\Phi_{22}), \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} =$$
$$= (\Phi_{22}, \Phi_{22})_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2.$$

Отсюда получаем, что

$$\langle C\zeta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle (C_1 + C_2)\zeta, \zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2. \qquad (1.7.2)$$

Здесь оператор $\rho_1\gamma_1V_1$, как следует из свойств $V_1 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H^1_\Gamma(\Omega_1))$, $\gamma_1 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega_1); H^{1/2}(\Gamma))$ (снова теорема Гальярдо для области Ω_1 с липшицевой границей $\partial\Omega_1$) ограничен: $C_1 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$. Аналогично, как и выше, проверяем, что $C_2 = -P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)V_2) \in \mathscr{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$. Значит, $C = {}_1 + {}_2 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2})$ и для него справедлива формула (1.7.2).

Так как $H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в $L_{2,\Gamma}$, то $C : L_{2,\Gamma} \to L_{2,\Gamma}$ — компактный оператор. Теперь из (1.7.2) получаем, что $C|_{L_{2,\Gamma}}$ — положительный оператор. Действительно, $((C|_{L_{2,\Gamma}})\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = 0$ лишь при $\Phi_1 \equiv c_1 = 0$ и $\Phi_2 \equiv c_2 = 0$ (с учетом нормировок (1.4.18)). □

Следствием лемм 3 и 4 является такое утверждение.

Лемма 5. *Операторная матрица* $\mathscr{A}$ *из* (1.6.15) *является ограниченным положительным оператором, действующим в пространстве* $\mathscr{H}$.

Доказательство. Ограниченность и самосопряженность $\mathscr{A}$ очевидна в силу лемм 3 и 4. Убедимся, что $\mathscr{A}$ — положительный оператор.

Имеем

$$(\mathscr{A}u, u)_{\mathscr{H}} = \begin{pmatrix} I & Q^* \\ Q & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\eta} \\ \zeta \end{pmatrix} =$$

$$= \|\widetilde{\eta}\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\mathrm{Re}(\widetilde{\eta}, Q^*\zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + (C\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} =$$

$$= \|A^{1/2}\eta\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\mathrm{Re}(A^{1/2}\eta, A^{1/2}V_2\zeta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + (C\zeta, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} =$$

$$= \|\Phi_{21}\|^2_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\mathrm{Re}(\Phi_{21}, \Phi_{22})_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2 =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2 \quad (\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}). \quad (1.7.3)$$

Здесь при выводе были использованы обозначение (1.6.7), замена (1.6.11), определения операторов V_1, V_2 и C, а также формула (1.7.2). Теперь из (1.7.3) следует, что $\mathscr{A}$ — неотрицательный оператор, а с учетом нормировок для Φ_1 и Φ_2 — что этот оператор положителен. □

Установленные в леммах 3–5 свойства операторов позволяют далее исследовать как задачу Коши (1.6.14)–(1.6.16), так и исходную начально-краевую задачу (3.1)–(3.1), а также соответствующие спектральные проблемы.

1.8. **Собственные колебания системы "жидкость–газ".** Рассмотрим задачу о собственных колебаниях гидросистемы на основе полученной в операторной форме задачи Коши (1.6.14)–(1.6.16). Полагая

$$f(t) \equiv 0, \quad u(t) = \exp(i\omega t)u,$$

приходим для амплитудных элементов u к спектральной проблеме

$$\mathscr{B}u = \lambda\mathscr{A}u, \;\; u = (\widetilde{\eta}; \zeta)^\tau \in \mathscr{D}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{H}, \;\; \lambda = \omega^2. \quad (1.8.1)$$

Будем считать сначала, что система статически устойчива, т. е. оператор $B_\sigma \gg 0$. Тогда и оператор $\mathscr{B} \gg 0$, причем обратный

$$\mathscr{B}^{-1} = \mathrm{diag}(a^{-2}A^{-1}; B_\sigma^{-1})$$

положителен и компактен в $\mathscr{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$.

Осуществим в (1.8.1) замену

$$\mathscr{B}^{1/2}u = w \in \mathscr{D}(\mathscr{B}^{1/2}) \tag{1.8.2}$$

и подействуем слева оператором $\mathscr{B}^{-1/2}$. Возникает спектральная задача

$$\mathscr{B}^{-1/2}\mathscr{A}\mathscr{B}^{-1/2}w = \mu w, \quad \mu := \lambda^{-1}, \tag{1.8.3}$$

равносильная задаче (1.8.1). Действительно, из (1.8.3) следует, что $w \in \mathscr{D}(\mathscr{B}^{1/2})$ и потому $\mathscr{B}^{1/2}w = \lambda\mathscr{A}\mathscr{B}^{-1/2}w$. После замены (1.8.2) приходим к задаче (1.8.1).

В уравнении (1.8.3) оператор $\mathscr{B}^{-1/2}\mathscr{A}\mathscr{B}^{-1/2}$ компактный и положительный. Отсюда по теореме Гильберта—Шмидта приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Пусть $B_\sigma \gg 0$. Тогда задача (1.8.1) имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$, и систему собственных элементов $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k = (\widetilde{\eta}_k, \zeta_k)^\tau$, образующую ортогональный базис как в энергетическом пространстве $\mathscr{H}_{\mathscr{B}} = \mathscr{D}(\mathscr{B}^{1/2}) \subset \mathscr{H}$, так и по форме $(\mathscr{A}u, u)_{\mathscr{H}}$ оператора $\mathscr{A}$. При этом выполнены следующие свойства ортонормировки:*

$$(u_k, u_l)_{\mathscr{B}} = (\mathscr{B}^{1/2}u_k, \mathscr{B}^{1/2}u_l)_{\mathscr{H}} = \lambda_k\delta_{kl},$$
$$(\mathscr{A}u_k, u_l)_{\mathscr{H}} = (\mathscr{A}^{1/2}u_k, \mathscr{A}^{1/2}u_l)_{\mathscr{H}} = \delta_{kl}.$$

Собственные значения λ_k могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения $F_1(\Phi_1;\Phi_2)$ из (1.5.11) либо вариационного отношения $F_2(\Phi_1;\Phi_2)$ из (1.5.12), где

$$\langle\zeta, B_\sigma\zeta\rangle_{L_{2,\Gamma}} = (B_\sigma^{1/2}\zeta, B_\sigma^{1/2}\zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (\zeta,\zeta)_{B_\sigma}.$$

Эти отношения следует рассматривать на классе функций Φ_1, Φ_2, для которых выполнены граничные условия (1.5.2), условия нормировки (1.5.4), а также первое уравнение (1.5.1).

Числа $\mu_k = \lambda_k^{-1}$ могут быть найдены также как последовательные максимумы вариационного отношения

$$F_3(\Phi_1;\Phi_2) = F_1^{-1}(\Phi_1;\Phi_2) =$$
$$= \frac{a^{-2}\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(x)|\Phi_2|^2\,d\Omega_2 + \|B_\sigma^{-1/2}(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}(x)\Phi_2))\|^2_{L_{2,\Gamma}}}{\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1|^2\,d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(x)|\nabla\Phi_2|^2\,d\Omega_2}, \tag{1.8.4}$$

рассматриваемого на всем пространстве $H^1_\Gamma(\Omega_1) \oplus H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$. *При этом уравнения* (1.5.1), *граничные условия* (1.5.2), (1.5.3) *для решений задачи* (1.8.1) *будут выполнены автоматически, так как они для проблемы* (1.8.4) *являются естественными с вариационной точки зрения.* □

1.9. **Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.** Рассмотрим теперь спектральную задачу (1.8.1) в случае, когда оператор B_σ из (1.6.15), имеющий дискретный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, см. лемму 1, уже не является положительно определенным, т. е. система "жидкость–газ" не является статически устойчивой по линейному приближению. Считая, что константа c в (1.5.5) отрицательна, будем иметь

$$-\infty < c \le \lambda_1(B_\sigma) \le \ldots \le \lambda_\varkappa(B_\sigma) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(B_\sigma) = \ldots = \lambda_{\varkappa+q}(B_\sigma) < \lambda_{\varkappa+q+1}(B_\sigma) \le \\ \le \ldots \le \lambda_k(B_\sigma) \le \ldots, \ \ \varkappa \ge 1, \ \ q \ge 0, \ \ \lambda_k(B_\sigma) \to +\infty \ \ (k \to \infty), \quad (1.9.1)$$

где собственные значения $\lambda_k(B_\sigma)$ выписаны с учетом кратностей.

Тогда в силу определения оператора $\mathscr{B}$ из (1.6.15), дискретности и положительности спектра оператора A (см. задачу 3° в п. 6) приходим к выводу, что оператор $\mathscr{B}$ имеет дискретный спектр с теми же свойствами:

$$-\infty < c \le \lambda_1(\mathscr{B}) \le \ldots \le \lambda_\varkappa(\mathscr{B}) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(\mathscr{B}) = \ldots = \lambda_{\varkappa+q}(\mathscr{B}) < \lambda_{\varkappa+q+1}(\mathscr{B}) \le \\ \le \ldots \le \lambda_k(\mathscr{B}) \le \ldots, \ \ \varkappa > 1, \ \ q \ge 0, \ \ \lambda_k(\mathscr{B}) \to +\infty \ \ (k \to \infty). \quad (1.9.2)$$

Переходя к изучению задачи (1.8.1) с учетом свойств (1.9.1), (1.9.2) операторов B_σ и $\mathscr{B}$, рассмотрим ортогональное разложение

$$L_{2,\Gamma} =: H = H_0 \oplus H_1, \ H_0 := \ker B_\sigma, \ \dim H_0 = q, \ H_1 := H \ominus H_0,$$

а также соответствующие ортопроекторы P_0 и P_1. Тогда, подставляя $\zeta \in H$ в виде $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$, $\zeta_0 \in H_0$, $\zeta_1 \in H_1$, в уравнение (1.8.1), записанное в векторно-матричной форме (см. (1.6.15), (1.6.16)), и проектируя обе части второго уравнения этой системы на подпространства H_1 и H_0 соответственно, придем к спектральной задаче

$$\begin{array}{rcl} a^2 A\widetilde{\eta} &=& \lambda(\widetilde{\eta} + Q^* P_0\zeta_0 + Q^* P_1\zeta_1) \\ B_1\zeta_1 &=& \lambda(P_1 Q\widetilde{\eta} + P_1 C P_0\zeta_0 + P_1 C P_1\zeta_1) \ , \\ 0 &=& \lambda(P_0 Q\widetilde{\eta} + P_0 C P_0\zeta_0 + P_0 C P_1\zeta_1) \end{array} \quad (1.9.3)$$

$$B_1 := (P_1 B_\sigma)|_{H_1}, \quad \ker B_1 = \{0\}.$$

Далее в задаче (1.9.3) следует провести рассуждения, описываемые в общей ситуации в п. 1.5.3 из [2, с. 57–60] и использующие теорию операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$ с индефинитной метрикой. Не приводя подробных выкладок, сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 2. *Задача* (1.8.1) *при условиях* (1.9.1), (1.9.2) *имеет дискретный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенный на вещественной оси и имеющий предельную точку* $\lambda = +\infty$. *При этом* $\varkappa$ *собственных значений (нумерация с учетом их кратностей) отрицательны,* q *последующих собственных значений нулевые, а остальные положительны, т. е.*

$$-\infty < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_\varkappa < 0 = \lambda_{\varkappa+1} = \ldots = \lambda_{\varkappa+q} < \\ < \lambda_{\varkappa+q+1} \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty \ \ (k \to \infty). \quad (1.9.4)$$

Собственные элементы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (1.8.1), *отвечающие собственным значениям* (1.9.4), *образуют ортонормированный базис по форме оператора* $\mathscr{A}$. *При этом выполнены свойства ортогональности*

$$(\mathscr{A} u_k, u_l)_{\mathscr{H}} = \delta_{kl}, \ \ (\mathscr{B} u_k, u_l)_{\mathscr{H}} = \lambda_k \delta_{kl}.$$

□

Из теоремы 2 получаем важный физический вывод, который хорошо известен в механике систем с конечным числом степеней свободы.

Теорема 3. *(Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости). Пусть состояние равновесия гидросистемы ”жидкость–газ” не является статически устойчивым, и оператор потенциальной энергии* B_σ *имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение (см.* (1.9.1)*). Тогда эта система и динамически неустойчива, т. е. задача* (1.8.1) *будет иметь по крайней мере одно отрицательное собственное значение* $\lambda = \omega^2$, *и потому существует решение однородной задачи* (1.6.14), *экспоненциально возрастающее во времени по закону* $\exp(t\sqrt{|\lambda|})$. □

1.10. **О существовании сильного решения задачи Коши.** Вернемся к задаче (1.6.14)–(1.6.16) и выясним условия, при которых она однозначно разрешима на любом отрезке времени $[0, T]$ в общей ситуации, когда оператор потенциальной энергии B_σ лишь ограничен снизу и для его собственных значений выполнены свойства (1.9.1).

Итак, имеем задачу

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathscr{A} u) + \mathscr{B} u = f(t), \ \ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, \tag{1.10.1}$$

$$\begin{aligned} &u(t) = (\widetilde{\eta}(t); \zeta(t)^\tau, \ f(t) := (A^{1/2}\widetilde{f}_2(t); f_\Gamma(t))^\tau, \\ &u^0 = (\widetilde{\eta}^0; \zeta^0)^\tau, \ u^1 = (\widetilde{\eta}^1; \zeta^1)^\tau, \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

где $u(t)$ — функция переменной t со значениями в пространстве $\mathscr{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$, а операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ определены в (1.6.14), (1.6.16).

Определение 2. Назовем сильным решением задачи (1.10.1), (1.10.2) на отрезке $[0,T]$ функцию $u(t)$ со значениями в $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}) \subset \mathscr{H}$, для которой выполнены следующие условия:
1°. $u(t) \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B})$ при любом $t \in [0,T]$ и $\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}u(t) \in C([0,T];\mathscr{H})$;
2°. $u'(t) \in \mathscr{D}(|\mathscr{B}|^{1/2})$ и $|\mathscr{B}|^{1/2}du/dt \in C([0,T];\mathscr{H})$;
3°. $u(t) \in C^2([0,T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}))$;
4°. для любого $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (1.10.1), где все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})$;
5°. выполнены начальные условия (1.10.1). □

Замечание 1. Если считать, что оператор $\mathscr{A}$ действует в шкале пространств $\mathscr{H}^\alpha = \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то для сильного решения задачи (1.10.1), (1.10.2)

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathscr{A}u) \equiv \mathscr{A}^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}(\mathscr{A}^{1/2}u) \equiv \mathscr{A}\frac{d^2u}{dt^2} \in C([0,T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})). \tag{1.10.3}$$

□

Докажем существование сильного решения задачи (1.10.1), (1.10.2) с использованием теории сжимающих полугрупп операторов. С этой целью осуществим в (1.10.1) замену искомой функции по формуле

$$u(t) = \mathrm{e}^{bt}\, v(t), \quad b > 0.$$

Тогда задача (1.10.1) с учетом (1.10.3) преобразуется к виду

$$\mathscr{A}\frac{d^2v}{dt^2} + 2b\mathscr{A}\frac{dv}{dt} + \mathscr{B}_b v = \mathrm{e}^{-bt}\, f(t), \ \mathscr{B}_b := \mathscr{B} + b^2\mathscr{A}, \ \mathscr{D}(\mathscr{B}_b) = \mathscr{D}(\mathscr{B}),$$
$$v(0) = v^0 := u^0, \ \ v'(0) = v^1 := u^1 - bu^0.$$

Осуществим еще здесь формальную замену

$$\mathscr{A}^{1/2}v(t) =: w(t)$$

и подействуем оператором $\mathscr{A}^{-1/2}$ слева на обе части полученного уравнения (для сильного решения это можно сделать). В итоге возникает следующая задача Коши для полного дифференциального уравнения второго порядка в пространстве $\mathscr{H}$:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + 2b\frac{dw}{dt} + \mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}_b\mathscr{A}^{-1/2}w = \mathrm{e}^{-bt}\mathscr{A}^{-1/2}f(t), \tag{1.10.4}$$

$$w(0) = w^0 := \mathscr{A}^{1/2}v^0 = \mathscr{A}^{1/2}u^0, \ w'(0) = w^1 := \mathscr{A}^{1/2}v^1 = \mathscr{A}^{1/2}(u^1 - bu^0). \tag{1.10.5}$$

Подберем теперь параметр $b > 0$ таким образом, чтобы оператор $\mathscr{B}_b = \mathscr{B} + b^2\mathscr{A}$ был положительно определенным. С этой целью введем оператор $\widetilde{\mathscr{B}}_b = \mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}_b\mathscr{A}^{-1/2} = \mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1/2} + b^2\mathscr{I}$ и заметим, что задача на собственные значения для оператора $\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1/2}$ равносильна спектральной задаче (1.8.1). Тогда по теореме 2 этот оператор имеет дискретный спектр (1.9.4), в котором минимальное собственное значение $\lambda_1 := \lambda_1(\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1/2})$, возможно, отрицательно. Поэтому можно в качестве $b > 0$ взять такое число, чтобы

$$\lambda_1 + b^2 =: \widetilde{b}^2 > 0. \tag{1.10.6}$$

Тогда минимальное собственное значение оператора $\widetilde{\mathscr{B}}_b$ будет положительным, и потому он будет положительно определенным. В этом случае и оператор $\mathscr{B}_b$ будет положительно определенным, так как, во-первых, при условии (1.10.6) этот оператор будет положительным, а во-вторых, поскольку он имеет дискретный спектр ($\mathscr{B}$ имеет дискретный спектр, а $b^2\mathscr{A}$ — ограничен), то $\mathscr{B}_b \gg 0$.

Итак, далее считаем, что выполнено условие (1.10.6). Тогда в (1.10.4) можно ввести в рассмотрение еще одну искомую функцию соотношением

$$-i\mathscr{B}_b^{1/2}\mathscr{A}^{-1/2}w = \frac{dz}{dt}, \quad z(0) = 0, \tag{1.10.7}$$

и после дифференцирования по t (для сильного решения это законно) приходим к связям

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2} + i\mathscr{B}_b^{1/2}\mathscr{A}^{-1/2}\frac{dw}{dt} = 0, \\ &z'(0) = -i\mathscr{B}_b^{1/2}\mathscr{A}^{-1/2}w(0) = -i\mathscr{B}_b^{1/2}v(0) = -i\mathscr{B}_b^{1/2}u(0). \end{aligned} \tag{1.10.8}$$

Теперь задачу (1.10.4), (1.10.5), (1.10.7), (1.10.8) можно переписать в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме пространств $\mathscr{H}^2 = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$:

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \widehat{\mathscr{B}}\widehat{u} = \widehat{f}(t),\ \widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)^\tau := \left(\frac{dw}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)^\tau,\ \widehat{f}(t) = (\mathrm{e}^{-bt}\mathscr{A}^{-1/2}f(t); 0)^\tau, \tag{1.10.9}$$

$$\widehat{u}(0) = \widehat{u}^0 := (\mathscr{A}^{1/2}v^1, -i\mathscr{B}_b^{1/2}v^0)^\tau = (\mathscr{A}^{1/2}(u^1 - bu^0), -i\mathscr{B}_b^{1/2}u^0)^\tau,$$

$$\widehat{\mathscr{B}} := \begin{pmatrix} 2b\mathscr{I} & i\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}_b^{1/2} \\ i\mathscr{B}_b^{1/2}\mathscr{A}^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}}) = \mathscr{D}(\mathscr{B}_b^{1/2}\mathscr{A}^{-1/2}) \oplus \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}_b^{1/2}) = \mathscr{R}(\mathscr{A}^{1/2}\mathscr{B}_b^{-1/2}) \oplus \mathscr{R}(\mathscr{B}_b^{-1/2}\mathscr{A}^{1/2}). \tag{1.10.10}$$

Лемма 6. *Оператор* $\widehat{\mathscr{B}}$ *с областью определения* (1.10.10) *является максимальным аккретивным оператором, действующим в гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}^2$*:*

$$\mathrm{Re}\,(\widehat{\mathscr{B}}\widehat{u},\widehat{u})_{\mathscr{H}^2}\geq 0,\quad \forall\widehat{u}\in\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}}). \tag{1.10.11}$$

Доказательство. Свойство (1.10.11) проверяется непосредственно, а свойство максимальной аккретивности — из того факта, что область значений $\mathscr{R}(\widehat{\mathscr{B}})=\mathscr{H}^2$, так как обратный оператор

$$\widehat{\mathscr{B}}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -i\mathscr{A}^{1/2}\mathscr{B}_b^{-1/2}\\ -i\mathscr{B}_b^{-1/2}\mathscr{A}^{1/2} & 2b\mathscr{B}_b^{-1/2}\mathscr{A}\mathscr{B}_b^{-1/2}\end{pmatrix}$$

задан на всем пространстве $\mathscr{H}^2$ и является компактным. $\square$

В силу леммы 6 оператор $-\widehat{\mathscr{B}}$ является максимальным диссипативным оператором и потому генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому по известной теореме Р. С. Филлипса задача (1.10.9)–(1.10.10) имеет сильное решение $\widehat{u}(t)$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены условия

$$\widehat{u}(0)=\widehat{u}^0\in\mathscr{D}(\widehat{\mathscr{B}}),\quad \widehat{f}(t)\in C^1([0,T];\mathscr{H}^2).$$

Опираясь на установленные факты, приведем без доказательства (оно проводится непосредственно рассудениями в обратном порядке к приведенным построениям) итоговый результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$u^0\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}),\quad u^1\in\mathscr{D}(|\mathscr{B}|^{1/2}),\quad f(t)\in C^1([0,T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})). \tag{1.10.12}$$

Тогда задача Коши (1.10.1)–(1.10.2) *имеет сильное решение в смысле определения 2.* $\square$

1.11. **Теорема о разрешимости исходной начально-краевой задачи.** С помощью теоремы 4 докажем теперь, что исходная начально-краевая задача (1.4.16)–(1.4.22) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

Предварительно опишем свойства элементов из $\mathscr{D}(A^{-1/2})$ (см. (1.10.12)).

Лемма 7. *Операторная матрица* $\mathscr{A}$ *из* (1.6.15), (1.6.16) *допускает факторизацию вида*

$$\mathscr{A}:=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & V^*\\ V & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & C^{1/2}\end{pmatrix},\ V:=C^{-1/2}Q,\ V^*:=Q^*C^{-1/2},$$

где V и V^* — взаимно сопряженные ограниченные операторы. При этом операторная матрица

$$\mathscr{A}_V := \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix}$$

является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathscr{H} = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus L_{2,\Gamma}$.

Доказательство. Свойство ограниченности оператора $V^* = Q^* C^{-1/2} = A^{1/2} V_2 C^{-1/2} : L_{2,\Gamma} \to L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ следует из того, что $C^{-1/2} \in \mathscr{L}(L_{2,\Gamma}; \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2})$ (следствие из леммы 4 и теории шкал гильбертовых пространств), $V_2 \in \mathscr{L}(\widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})$, $H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} = \mathscr{D}(A^{1/2})$, $A^{1/2} \in \mathscr{L}(H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}; L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}})$. Отсюда получаем и свойство ограниченности оператора $V = -C^{-1/2} P_\Gamma(\gamma_2(\rho_{2,0}(x) A^{-1/2}))$ из $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ в $L_{2,\Gamma}$.

Докажем теперь, что оператор $\mathscr{A}_V \gg 0$. Пусть $y = (\widetilde{\eta}; \widetilde{\zeta})^\tau$ — произвольный элемент из $\mathscr{H}$. Тогда

$$(\mathscr{A}_V y, y)_{\mathscr{H}} = (\widetilde{\eta}, \widetilde{\eta})_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\mathrm{Re}(V^* \widetilde{\zeta}, \widetilde{\eta})_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \|\widetilde{\zeta}\|^2_{L_{2,\Gamma}}.$$

Возьмем здесь $\widetilde{\eta} = A^{1/2}\eta$, $\eta \in \mathscr{D}(A^{1/2})$, $\widetilde{\zeta} = C^{1/2}\zeta$, $\zeta \in \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ и воспользуемся тождеством (1.7.3). Имеем

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}_V y, y)_{\mathscr{H}} &= \|A^{1/2}\eta\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + 2\mathrm{Re}(A^{1/2} V_2 \zeta, A^{1/2}\eta)_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \\ &+ \|V_2\zeta\|^2_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \rho_1 \|V_1\zeta\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} \geq (1-\varepsilon)\|A^{1/2}\eta\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \\ &+ (1-\varepsilon^{-1})\|A^{1/2} V_2 \zeta\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \rho_1\|V_1\zeta\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.11.1)\end{aligned}$$

Заметим теперь, что для слабых решений задач 1° и 2° из п. 6 операторы V_1 и V_2 имеют ограниченные обратные:

$$V_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{R}(T_1) \cap H^1_\Gamma(\Omega_1); \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}), \quad V_2^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{R}(T_2) \cap H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}; \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}).$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|V_2\zeta\|_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} = \|V_2 V_1^{-1} V_1 \zeta\|_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} \leq \|V_2 V_1^{-1}\| \cdot \|V_1\zeta\|_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} =: c^{-1}\|V_1\zeta\|_{H^1_\Gamma(\Omega_1)}.$$

Положим в (1.11.1)

$$0 < \varepsilon = 1/\sqrt{1+\rho_1 c^2} < 1, \quad c_0 = 1 - \varepsilon.$$

Тогда получим неравенство

$$(\mathscr{A}_V y, y)_{\mathscr{H}} \geq c_0 \Big\{ \|\widetilde{\eta}\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \|V_2\zeta\|^2_{H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \rho_1\|V_1\zeta\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} \Big\} =$$

$$= c_0\Big\{\|\widetilde{\eta}\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \|C^{1/2}\zeta\|^2_{L_{2,\Gamma}}\Big\} = c_0\Big\{\|\widetilde{\eta}\|^2_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}} + \|\widetilde{\zeta}\|^2_{L_{2,\Gamma}}\Big\} = c_0\|y\|^2_{\mathscr{H}}.$$

Лемма доказана. □

В качестве следствия получаем такой результат.

Лемма 8. *Областью определения оператора* $\mathscr{A}^{-1/2}$ *является множество*

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}) = \Big\{u = (\widetilde{\eta};\zeta)^\tau : \widetilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}, \zeta \in \mathscr{D}(C^{-1/2}) = H^{1/2}_\Gamma \subset L_{2,\Gamma}\Big\}. \qquad (1.11.2)$$

Доказательство. Из леммы 7 следует, что

$$\mathscr{A}^{-1} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{-1/2} \end{pmatrix},$$

где средний сомножитель ограничен и положительно определен в $\mathscr{H}$. Поэтому

$$\langle u, \mathscr{A}^{-1}u\rangle_{\mathscr{H}} = \|\mathscr{A}^{-1/2}u\|^2_{\mathscr{H}} = \|\mathscr{A}_V^{-1/2}y\|^2_{\mathscr{H}},$$

$$u = (\widetilde{\eta};\zeta)^\tau \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}) \subset \mathscr{H}, \ \ y = (\widetilde{\eta}; C^{-1/2}\zeta)^\tau \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_V^{-1/2}) \subset \mathscr{H}.$$

Так как $\mathscr{A}_V^{-1/2}$ и $\mathscr{A}_V^{1/2}$ — ограниченные операторы в $\mathscr{H}$, то $\|\mathscr{A}_V^{-1/2}y\|^2_{\mathscr{H}}$ конечно тогда и только тогда, когда $\widetilde{\eta} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, $C^{-1/2}\zeta \in L_{2,\Gamma}$, откуда и следует (1.11.2). □

С целью формулировки последующих результатов введем следующие подпространства пространств $H^1_\Gamma(\Omega_1)$ и $H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$:

$$H^1_{h,S_1}(\Omega_1) := \Big\{\Phi_1 \in H^1_\Gamma(\Omega_1) : \Delta\Phi_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big|_{S_1} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \zeta \in \widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma, \ \ \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0\Big\} = \mathscr{R}(V_1),$$

$$H^1_{h,S_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}) := \Big\{\Phi_2 \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}} : \Delta_0\Phi_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_2), \ \rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big|_{S_2} = 0,$$
$$\rho_{2,0}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big|_\Gamma = \rho_{2,0}\zeta \in \widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma, \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}(x)\Phi_2 d\Omega_2 = \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0\Big\} = \mathscr{R}(V_2).$$

Определение 3. Назовем сильным решением $\{\Phi_1(t,x);\Phi_2(t,x)\}$ исходной задачи (1.4.16)–(1.4.22) на отрезке $[0,T]$ такие функции $\Phi_1(t,x)$ и $\Phi_2(t,x)$, для которых выполнены следующие условия:
1^0. $\Phi_2(t,x) = \Phi_{21}(t,x) + \Phi_{22}(t,x)$, причем $\Phi_2(t,x) \in C^2([0,T]; H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})$, $\Delta_0\Phi_{21}(t,x) \in C([0,T]; H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})$, $\Phi_{22}(t,x) \in C^2([0,T]; H^1_{h,S_2}(\Omega_2;\rho_{2,0}))$;
2^0. $\Phi_1(t,x) \in C^2([0,T]; H^1_{h,S_1}(\Omega_1))$ и $\zeta := \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}\Big|_\Gamma = \dfrac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\Big|_\Gamma \in C([0,T]; \mathscr{D}(C^{-1/2}B_\sigma))$,

т. е. $B_\sigma\zeta \in C([0,T]; H_\Gamma^{1/2})$;
3^0. для любого $t \in [0,T]$ выполняется уравнение (1.4.17), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$;
4^0. $\Phi_1(t,x)|_\Gamma \in C^2([0,T]; H_\Gamma^{1/2})$, $\Phi_2(t,x)|_\Gamma \in C^2([0,T]; H_\Gamma^{1/2})$ и для любого $t \in [0,T]$ выполнено граничное условие (1.4.19), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $H_\Gamma^{1/2}$;
5^0. выполнены начальные условия (1.4.21)–(1.4.22). $\square$

Опираясь на это определение и теорему 4, сформулируем итоговую теорему о разрешимости исходной начально-краевой задачи (1.4.16)–(1.4.22).

Теорема 5. *Пусть в задаче* (1.4.21)–(1.4.22) *выполнены условия гладкости начальных функций и правых частей:*

$$\Phi_1^0(x) \in H^1_{h,S_1}(\Omega_1),\ \Phi_2^0(x) = \Phi_{21}^0(x) + \Phi_{22}^0(x),\ \Phi_{22}^0(x) \in H^1_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{2,0}), \tag{1.11.3}$$

$$\Delta_0\Phi_{21}^0(x) \in H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}},\ \ \frac{\partial\Phi_1^0}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_2^0}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_{22}^0}{\partial n}\Big|_\Gamma =: \zeta^0 \in \mathscr{D}(B_\sigma)\cap H_\Gamma^{5/2}, \tag{1.11.4}$$

$$\Phi_1^1(x) \in H^1_{h,S_1}(\Omega_1),\ \Phi_2^1(x) = \Phi_{21}^1(x) + \Phi_{22}^1(x),\ \Phi_{22}^1(x) \in H^1_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_{2,0}), \tag{1.11.5}$$

$$\Phi_{21}^1(x) \in \mathscr{D}(A) \subset H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}},\ \frac{\partial\Phi_1^1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_2^1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\Phi_{22}^1}{\partial n}\Big|_\Gamma =: \zeta^1 \in \mathscr{D}(|B_\sigma|^{1/2}), \tag{1.11.6}$$

$$\widetilde{f}_1(t,x) \in C^1([0,T]; H^1_{h,S_1}(\Omega_1)),\ \ \widetilde{f}_2(t,x) \in C^1([0,T]; H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}). \tag{1.11.7}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $\{\Phi_1(t,x); \Phi_2(t,x)\}$ *в смысле определения 3.*

Доказательство. 1) Проверим сначала, что при условиях (1.11.3)–(1.11.7) выполнены условия (1.10.12) разрешимости задачи Коши (1.10.1), (1.10.2). Действительно, как следует из формул (1.6.11), (1.6.14)–(1.6.16), а также (1.11.3), (1.11.4),

$$u^0 = \begin{pmatrix} \widetilde{\eta}^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}\eta^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}u^0 = \begin{pmatrix} a^2A^{3/2}\Phi_{21}^0 \\ B_\sigma\zeta^0 \end{pmatrix} \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus H_\Gamma^{1/2},$$

и потому в силу леммы 8 $\mathscr{B}u^0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})$.

Далее, из (1.11.5), (1.11.6) имеем

$$\widetilde{\eta}^1 = A^{1/2}\eta^1 = A^{1/2}\Phi_{21}^1 \in \mathscr{D}(A^{1/2}) = H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}},$$

$$\zeta^1 \in \mathscr{D}(|B_\sigma|^{1/2}) \implies u^1 = (\widetilde{\eta}^1; \zeta^1)^\tau \in \mathscr{D}(|\mathscr{B}|^{1/2}).$$

Наконец, из (1.11.7), (1.6.8) получаем

$$f(t) = (A^{1/2}\widetilde{f}_2(t); f_\Gamma(t))^\tau = (A^{1/2}\widetilde{f}_2(t); \rho_1\gamma_1\widetilde{f}_1 - P_\Gamma\gamma_2(\rho_{2,0}(x)\widetilde{f}_2))^\tau \in C^1([0,T]; \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})),$$

где снова использована лемма 8, а также теорема вложения Гальярдо.

2) Так как при выполнении условий (1.10.12) по теореме 4 задача (1.10.1), (1.10.2) имеет единственное сильное решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$ (в смысле определения 2), то при любом $t \in [0,T]$ справедливы соотношения (1.6.12), (1.6.13), где в уравнениях все слагаемые являются непрерывными функциями t со значениями в $L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ и $H_\Gamma^{1/2}$ соответственно. Действительно, из свойства 3^0 определения 2 следует, что $d^2u/dt^2 \in C([0,T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}))$ и по лемме 8 получаем, что $d^2\widetilde{\eta}/dt^2 \in L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$, $d^2(C\zeta)/dt^2 \in C([0,T];\mathscr{D}(C^{-1/2}))$, $\mathscr{D}(C^{-1/2}) = H_\Gamma^{1/2}$. Поэтому аналогичными свойствами обладают и другие слагаемые в (1.6.12), (1.6.13).

3) Из доказанных свойств решений задачи (1.6.12), (1.6.13) после замены (1.6.11) получаем, что справедливы уравнения (1.6.7), (1.6.8), где в первом уравнении все слагаемые непрерывны по t со значениями в $\mathscr{D}(A^{1/2}) = H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}}$, а во втором — по-прежнему со значениями в $H_\Gamma^{1/2}$.

4) Из (1.6.7), (1.6.8) с учетом обратных замен, связанных с переходом от исходной задачи (1.4.16)–(1.4.22) к задаче (1.6.7), (1.6.8), получаем, что выполнены уравнения, начальные и краевые условия задачи (1.4.16)–(1.4.22), причем $\{\Phi_1(t,x);\Phi_2(t,x)\}$ является сильным решением этой задачи в смысле определения 3. В частности, свойство $\Phi_2(t,x) \in C^2([0,T];H^1_{\Omega_2,\rho_{2,0}})$ следует из того, что $\Phi_2 = \eta + V_2\zeta$, и из уравнения (1.6.7). Соответственно, $\Phi_1(t,x)\in C^2([0,T];H^1_{h,S_1}(\Omega_1))$, так как $d^2(\rho_1\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}(x)\Phi_2))|_\Gamma/dt^2 \in C([0,T];H_\Gamma^{1/2})$, а также $d^2(-P_\Gamma(\rho_{2,0}(x)\Phi_2))|_\Gamma/dt^2 \in C([0,T];H_\Gamma^{1/2})$. $\square$

Таким образом, теорема 5 дает достаточные условия согласования гладкости начальных данных, такие, чтобы существовало сильное решение задачи (1.4.16)–(1.4.22) при его естественном определении на произвольном временном интервале в произвольной составной области с липшицевыми границами.

2. Часть II. Колебания системы "жидкость–газ" в цилиндрической области

2.1. Постановка спектральной задачи. Применение метода разделения переменных. Будем теперь считать, что цилиндрический контейнер $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с произвольным поперечным сечением Γ заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ_1 и баротропным газом. Жидкость занимает область $\Omega_1 = \Gamma \times (-h_1,0)$, а газ — область $\Omega_2 = \Gamma \times (0,h_2)$. Считаем, что декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что граница раздела Γ лежит в плоскости Oxy, а образующая цилиндра направлена вдоль оси Oz. Считаем также, что вдоль оси Oz сверху вниз действует гравитационное поле с ускорением $g>0$, а газ является баротропным и в состоянии покоя его плотность определяется по формуле

$$\rho_{2,0} = \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0)\exp(-gz/a^2). \tag{2.1.1}$$

При этом равновесное давление

$$P = P_0(z) = a^2\rho_{2,0}(0)\exp(-gz/a^2) + \mathrm{const}.$$

Рассмотрим малые колебания гидросистемы "жидкость–газ", близкие к состоянию покоя. Тогда для данной конфигурации системы в цилиндрическом сосуде для искомых амплитудных функций $\Phi_1(x,y,z)$ и $\Phi_2(x,y,z)$ потенциалов смещений (см. п. 5, уравнения (1.5.1)–(1.5.4)) возникает следующая спектральная задача:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \tag{2.1.2}$$

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2), \quad \lambda := \omega^2,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} =: \zeta \ \ (\text{на}\,\Gamma,\ \text{т.е. при } z=0),$$

$$\int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0,\ \int\limits_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0,\ \int\limits_\Gamma \Phi_2 d\Gamma = 0,$$

$$-\sigma\Delta_\Gamma\zeta + g\Delta\rho\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2) \ \ (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n_\Gamma} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Gamma), \tag{2.1.3}$$

$$\Delta\rho := \rho_1 - \rho_{2,0}(0),\ \ \Delta_\Gamma := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ \ \Delta := \Delta_\Gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta_0\Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1}(z)\,\mathrm{div}(\rho_{2,0}(z)\nabla\Phi_2). \tag{2.1.4}$$

Здесь: $S_1 := \{\partial\Gamma \times (-h_1, 0)\} \cup \{(x,y,z) : (x,y) \in \Gamma,\ z = -h_1\}$ — твердая стенка, примыкающая к жидкости, $S_2 := \{\partial\Gamma \times (0, h_2)\} \cup \{(x,y,z) : (x,y) \in \Gamma,\ z = h_2\}$ — твердая стенка, примыкающая к газу, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к цилиндру Ω, $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела "жидкость-газ", т. е. при $z = 0$, $\vec{n}_\Gamma$ — внешняя нормаль к границе $\partial\Gamma$ сечения Γ. Будем далее считать $\partial\Gamma$ гладкой кривой класса C^2.

Введем, как и в п. 5, пространство $L_{2,\Gamma}$ и оператор B_σ, который здесь действует по закону

$$B_\sigma\zeta := -\sigma\Delta_\Gamma\zeta + g\Delta\rho\zeta,\ \zeta \in \mathscr{D}(B_\sigma) := \Big\{\zeta \in L_{2,\Gamma} \cap H^2(\Gamma) : \frac{\partial\zeta}{\partial n_\Gamma} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Gamma)\Big\}. \tag{2.1.5}$$

Так как $\partial\Gamma$ — кривая класса C^2, то с использованием формулы Грина для оператора Δ_Γ, получаем, что и

$$(B_\sigma\zeta,\zeta)_{L_{2,\Gamma}} = \int\limits_\Gamma (\sigma|\nabla_\Gamma\zeta|^2 + g\Delta\rho|\zeta|^2)\,d\Gamma =: (\zeta,\zeta)_{B_\sigma},\ \ \forall\zeta\in\mathscr{D}(B_\sigma)\subset L_{2,\Gamma}.$$

Отсюда следует, что $B_\sigma \gg 0$ и существует положительный и притом компактный обратный оператор B_σ^{-1}, действующий в $L_{2,\Gamma}$, а потому граничное условие (2.1.3) можно переписать в виде

$$\zeta = \lambda B_\sigma^{-1}(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2)\ \ (\text{на }\ \Gamma). \tag{2.1.6}$$

Опираясь на (2.1.6) и используя формулы Грина для операторов Δ_Γ и Δ_0, можно установить, как и в теореме 1, что собственные значения λ задачи (2.1.2)–(2.1.4) являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$F(\Phi_1;\Phi_2) = \Big(\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\Phi_1|^2\,d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(z)|\nabla\Phi_2|^2\,d\Omega_2\Big)\Big/$$
$$\Big(a^{-2}\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}(z)|\Phi_2|^2\,d\Omega_2 + (B_\sigma^{-1}(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2),(\rho_1\Phi_1-\rho_{2,0}(0)\Phi_2))_{L_{2,\Gamma}}\Big).$$

Заметим еще, что задача (2.1.2)–(2.1.4) не имеет нетривиальных решений вида $\Phi_1(x,y,z)\equiv 0$, $\Phi_2(x,y,z)\equiv\Phi_2(z)$, отвечающих случаю, когда жидкость и граница раздела системы "жидкость-газ" неподвижны, а в газе имеются лишь вертикальные волны сжатия-растяжения.

Цилиндричность области Ω, заполненной жидкостью и газом, позволяет провести разделение переменных в задаче (2.1.2)–(2.1.4), если искать решения в виде

$$\Phi_1(x,y,z) = v_1(z)u(x,y),\quad \Phi_2(x,y,z) = v_2(z)u(x,y),\quad \zeta = \eta u(x,y). \tag{2.1.7}$$

Тогда вместо задачи (2.1.2)–(2.1.4) возникает спектральная задача

$$-\Delta_\Gamma u = \mu u\ \ (\text{на }\ \Gamma),\quad \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = 0\ \ (\text{на }\partial\Gamma),\quad \int\limits_\Gamma u\,d\Gamma = 0, \tag{2.1.8}$$

а также спектральная проблема, которую далее будем называть основной:

$$\frac{d^2v_1}{dz^2} - \mu v_1 = 0\ \ (-h_1<z<0),\quad \frac{dv_1}{dz} = 0\ \ (z=-h_1), \tag{2.1.9}$$

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z)\frac{d}{dz}\Big(\rho_{2,0}(z)\frac{dv_2}{dz}\Big) + \mu v_2 = \lambda a^{-2}v_2\ \ (0<z<h_2),\quad \frac{dv_2}{dz} = 0\ \ (z=h_2), \tag{2.1.10}$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_2}{dz} =: \eta\quad (z=0),\quad (\sigma\mu + g\Delta\rho)\eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0)v_2(0)). \tag{2.1.11}$$

Как известно, спектральная задача Неймана (2.1.8) имеет дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из положительных конечнократных собственных значений μ_k с предельной точкой на $+\infty$. Отвечающая этому спектру система собственных функций $\{u_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи образует ортогональный базис в пространстве $L_{2,\Gamma}$, а также в энергетическом пространстве $H^1_\Gamma = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$ с квадратом нормы

$$\|u\|^2_{H^1_\Gamma} := \int\limits_\Gamma |\nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma, \quad \int\limits_\Gamma u\, d\Gamma = 0.$$

Далее будем считать, что выполнены следующие свойства ортонормировки:

$$(u_k, u_l)_{L_{2,\Gamma}} = \delta_{kl}, \quad (u_k, u_l)_{H^1_\Gamma} = \mu_k \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для определения функций $\{v_{1k}(z), v_{2k}(z)\}$ возникает счетное множество спектральных задач (2.1.9)–(2.1.11), отвечающих значениям $\mu = \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$. Отметим еще, что собственные функции $u_k(x,y)$ задачи (2.1.8) являются также собственными функциями оператора B_σ из (2.1.5), отвечающими собственным значениям

$$\lambda_k(B_\sigma) = \sigma\mu_k + g\Delta\rho, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Заметим, наконец, что собственные значения λ задачи (2.1.9)–(2.1.11) при $\mu = \mu_k$ являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$F_k(v_1; v_2) = \Big(\rho_1 \int\limits_{-h_1}^{0} (|v_1'(z)|^2 + \mu_k |v_1(z)|^2) dz + \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z)(|v_2'(z)|^2 + \mu_k |v_2(z)|^2) dz\Big) /$$

$$\Big(a^{-2} \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z)|v_2(z)|^2 dz + \lambda_k^{-1}(B_\sigma)|\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0) v_2(0)|^2\Big).$$

Этот факт для задачи (2.1.9)–(2.1.11) доказывается так же, как в теореме 1 соответствующее утверждение для задачи (1.8.1) (см. (1.8.4)).

2.2. **Вспомогательные спектральные задачи.** Прежде чем изучать задачи (2.1.9)–(2.1.11) при $\mu = \mu_k$, рассмотрим две вспомогательные спектральные задачи, имеющие непосредственное отношение к (2.1.9)–(2.1.11) с физической точки зрения. Это — задача о собственных колебаниях двух идеальных несжимаемых жидкостей, расположенных в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно и имеющих постоянные плотности ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$, а также задача об акустических колебаниях баротропного газа в области Ω_2.

Формулировка первой задачи формально получается из (2.1.2)–(2.1.4) при $a^2 \to \infty$ и имеет вид

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \ \ \Delta\Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2), \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} =: \zeta \ \ (\text{на } \Gamma, \ \text{т. е. при } z = 0), \ \int_\Gamma \Phi_1 \, d\Gamma = \int_\Gamma \Phi_2 \, d\Gamma = \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0,$$

$$B_\sigma\zeta = \lambda(\rho_1\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)\Phi_2) \ \ (\text{на } \ \Gamma). \tag{2.2.2}$$

Формулировка второй задачи получается из (2.1.2)–(2.1.4) при $\zeta \equiv 0$:

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda a^{-2}\Phi_2 \ \ (\text{в } \Omega_2), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma), \ \int_\Gamma \Phi_2 \, d\Gamma = 0. \tag{2.2.3}$$

Каждая из задач допускает разделение переменных вида (2.1.7) и приводит снова к задаче (2.1.8), а также следующим одномерным проблемам.

Первая задача:

$$\frac{d^2v_1}{dz^2} - \mu v_1 = 0 \ \ (-h_1 < z < 0), \quad \frac{dv_1}{dz} = 0 \ \ (z = -h_1), \tag{2.2.4}$$

$$\frac{d^2v_{22}}{dz^2} - \mu v_{22} = 0 \ \ (0 < z < h_2), \quad \frac{dv_{22}}{dz} = 0 \ \ (z = h_2),$$

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{dv_{22}}{dz} =: \eta \ \ (z = 0), \quad \lambda_k(B_\sigma)\eta = \lambda(\rho_1 v_1(0) - \rho_{2,0}(0)v_{22}(0)). \tag{2.2.5}$$

Вторая задача:

$$-\rho_{2,0}^{-1}(z)\frac{d}{dz}\Big(\rho_{2,0}(z)\frac{dv_{21}}{dz}\Big) = \nu\, v_{21}(z), \ \ \nu := \lambda a^{-2} - \mu, \ \ (0 < z < h_2), \tag{2.2.6}$$

$$\frac{dv_{21}}{dz} = 0 \ \ (z = 0), \quad \frac{dv_{21}}{dz} = 0 \ \ (z = h_2). \tag{2.2.7}$$

Решения задач (2.2.4)–(2.2.5) и (2.2.6)–(2.2.7) находятся в явной форме с учетом формулы (2.1.1) для функции $\rho_{2,0}(z)$. Для задачи (2.2.4)–(2.2.5) имеем

$$v_1 = v_{1k}(z) = \alpha_k^{-1}\eta_k \frac{\operatorname{ch}[\alpha_k(z + h_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha_k h_1)}, \ \ -h_1 \le z \le 0,$$

$$v_{22} = v_{22\,k}(z) = -\alpha_k^{-1}\eta_k \frac{\operatorname{ch}[\alpha_k(z - h_2)]}{\operatorname{sh}(\alpha_k h_2)}, \ \ 0 \le z \le h_2, , \quad \alpha_k := \mu_k^{1/2},$$

$$\lambda =: \lambda_k^{(1)} = \alpha_k\lambda_k(B_\sigma)(\rho_1 \operatorname{cth}(\alpha_k h_1) + \rho_{2,0}(0)\operatorname{cth}(\alpha_k h_2))^{-1}, \ \ k = 1, 2, \dots . \tag{2.2.8}$$

Этим решениям отвечают пограничные волны, экспоненциально затухающие при отходе от границы Γ (т. е. при $z = 0$) вдоль нормали к этой границе.

Для задачи (2.2.6)–(2.2.7) справедливо следующее утверждение.

Лемма 9. *Эта задача имеет дискретный спектр* $\{\nu_p\}_{p=0}^{\infty}$,

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_p < \ldots, \quad \nu_p \to +\infty \ \ (p \to \infty)$$

и систему собственных функций $\{v_{21p}(z)\}_{p=0}^{\infty}$,

$$v_{210}(z) \equiv 1, \quad \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v_{21p}(z) dz = 0, \quad p = 1, 2, \ldots\,,$$

$$v_{21p}(z) = \exp(gz/(2a^2))(\cos(\pi pz/h_2) - gh_2/(2\pi pa^2)\sin(\pi pz/h_2)),$$

полную и ортогональную в гильбертовом пространстве $L_2([0,h_2];\rho_{2,0}(z))$ *со скалярным произведением*

$$(v,w)_{L_2([0,h_2];\rho_{2,0}(z))} := \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v(z) \overline{w(z)} dz,$$

а также в энергетическом пространстве $H^1([0,h_2];\rho_{2,0}(z))$ *с квадратом нормы*

$$\|v\|^2_{H^1([0,h_2];\rho_{2,0}(z))} := \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z)|v'(z)|^2 dz + \Big| \int\limits_0^{h_2} \rho_{2,0}(z) v(z) dz \Big|^2,$$

эквивалентной стандартной норме пространства $H^1([0,h_2])$.

□

Лемма 10. *Вторая вспомогательная задача* (2.2.3) *имеет дискретный спектр*

$$\lambda_{kp}^{(2)} := a^2(\mu_k + \nu_p) = a^2\Big(\mu_k + \Big(\frac{\pi p}{h_2}\Big)^2 + \frac{g^2}{4a^4}\Big), \quad k = 1, 2, \ldots\,, \quad p = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{2.2.9}$$

и систему собственных функций

$$\Phi_{2kp}(x,y,z) := v_{21p}(z) u_k(x,y), \quad k = 1, 2, \ldots\,, \quad p = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{2.2.10}$$

где $u_k(x,y)$ — *собственные функции задачи* (2.1.8).

При этом функции (2.2.10) *образуют ортогональный базис как в пространстве* $L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))$ *со скалярным произведением*

$$(\Phi,\Psi)_{L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))} := \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z) \Phi(x,y,z) \overline{\Psi(x,y,z)} d\Omega_2,$$

так и в пространстве $H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))$ *с квадратом нормы*

$$\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))} := \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z)|\nabla\Phi|^2 d\Omega_2 + \Big| \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}(z)\Phi\, d\Omega_2 \Big|^2,$$

эквивалентной стандартной норме пространства $H^1(\Omega_2)$.

Если для задачи (2.2.6)–(2.2.7) *выполнены свойства ортонормировки*

$$(v_{21p}, v_{21q})_{L_2([0,h_2];\rho_{2,0}(z))} = \delta_{pq}, \quad (v_{21p}, v_{21q})_{H^1([0,h_2];\rho_{2,0}(z))} = \nu_p\, \delta_{pq},$$

а также свойства ортонормировки (2.1.5) *для собственных функций задачи* (2.1.8), *то для функций* (2.2.10) *выполнены свойства ортонормировки*

$$(\Phi_{2kp}, \Phi_{2jl})_{L_2(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))} = \delta_{kj}\, \delta_{pl}, \quad (\Phi_{2kp}, \Phi_{2jl})_{H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}(z))} = \lambda_{kp}^{(2)} a^{-2}\, \delta_{kj}\, \delta_{pl}.$$

□

Переходя теперь к рассмотрению первой вспомогательной задачи (2.2.1)–(2.2.2), введем подпространство тех пар $\Phi := (\Phi_1; \Phi_2)$ гармонических функций из $H^1(\Omega_1)$ и $H^1(\Omega_2)$, для которых выполнены свойства из (2.2.1)–(2.2.2):

$$H^1_{h,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ (\Phi_1(x,y,z); \Phi_2(x,y,z)) : \Delta\Phi_1 = 0 \ \text{ (в } \ \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ \text{ (на } \ S_1),$$
$$\Delta\Phi_2 = 0 \ \text{ (в } \ \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ \text{ (на } \ S_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} =: \zeta \ \text{ (на } \ \Gamma, \ \text{т.е. при } z = 0),$$
$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = \int_\Gamma \Phi_2 d\Gamma = 0 \Big\},$$

а норма введена по закону

$$\|\Phi\|^2_{H^1_{h,\Gamma}(\Omega)} \ := \ \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 \ + \ \rho_{2,0}(0) \int_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2, \ \ \forall\Phi \ = \ (\Phi_1; \Phi_2) \ \in \ H^1_{h,\Gamma}(\Omega).$$

Лемма 11. *Собственные функции вспомогательной задачи* (2.2.1)–(2.2.2) *имеют вид*

$$\Phi_{1k}(x,y,z) = v_{1k}(z) u_k(x,y), \ \Phi_{2k}(x,y,z) = v_{2k}(z) u_k(x,y), \ k = 1, 2, \ldots ,$$

а собственные значения выражаются формулой (2.2.8). *При этом имеют место следующие условия ортономировки:*

$$(\Phi_k, \Phi_j)_{H^1_{h,\Gamma}(\Omega)} = \delta_{kj}, \quad \zeta_k := \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial z}\Big|_{z=0},$$
$$(B_\sigma \zeta_k, \zeta_j)_{L_{2,\Gamma}} = (\zeta_k, \zeta_j)_{B_\sigma} = \int_\Gamma \nabla_\Gamma \zeta_k \cdot \nabla_\Gamma \zeta_j \, d\Gamma = \lambda_k^{(1)} \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots, ,$$

причем функции $\Phi_k := \{\Phi_{1k}; \Phi_{2k}\}$ *образуют ортонормированный базис в* $H^1_{h,\Gamma}(\Omega)$, *а функции* $\zeta_k(x,y)$ — *ортогональный базис в энергетическом пространстве* H_{B_σ} *оператора* B_σ, *а также в пространстве* $L_{2,\Gamma}$.

□

2.3. **Характеристическое уравнение основной спектральной задачи.** Опираясь на установленные факты, перейдем к рассмотрению спектральной задачи (2.1.9)–(2.1.11) при $\mu = \mu_k = \alpha_k^2$.

Прежде всего, решение уравнения (2.1.9) с учетом граничного условия имеет вид

$$v_1(z) = b_1 \mathrm{ch}[\alpha_k(z + h_1)], \quad b_1 \neq 0.$$

Далее, с учетом (2.1.1) из (2.1.10) приходим к соотношениям

$$v_2''(z) - (g/a^2)v_2'(z) + \nu\, v_2(z) = 0,\ 0 < z < h_2,\ v_2'(h_2) = 0,\ \nu = \lambda/a^2 - \mu_k. \tag{2.3.1}$$

Общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$v_2(z) = \mathrm{e}^{\delta z}[b_2 \cos(\gamma z) + b_3 \sin(\gamma z)], \quad \gamma^2 = \nu - \delta^2 > 0, \quad \delta := g/(2a^2), \tag{2.3.2}$$

где b_2 и b_3 — произвольные постоянные.

С учетом граничного условия в (2.3.1) и условия (2.1.11) получаем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных b_k, $k = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned}
&b_2[\delta \cos(\gamma h_2) - \gamma \sin(\gamma h_2)] + b_3[\delta \sin(\gamma h_2) + \gamma \cos(\gamma h_2)] = 0,\\
&b_1 \alpha_k \,\mathrm{sh}(\alpha_k h_1) - b_2 \delta - b_3 \gamma = 0,\\
&b_1[\lambda_k(B_\sigma)\, \alpha_k \,\mathrm{sh}(\alpha_k h_1) - \lambda \rho_1 \mathrm{ch}(\alpha_k h_1)] + b_2 \lambda \rho_{2,0}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, приходим к характеристическому уравнению для нахождения собственных значений λ:

$$\begin{aligned}
&- \gamma[\delta \cos(\gamma h_2) - \gamma \sin(\gamma h_2)] \cdot [\lambda_k(B_\sigma)\alpha_k - \lambda \rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)] + [\delta \sin(\gamma h_2) +\\
&\qquad + \gamma \cos(\gamma h_2)]\{\alpha_k \lambda \rho_{2,0}(0) + \delta[\lambda_k(B_\sigma)\alpha_k - \lambda \rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)]\} = 0,\ k = 1, 2, \dots ,\\
&\alpha_k = \mu_k^{1/2},\ \gamma^2 = \lambda a^{-2} - \mu_k - \delta^2 > 0,\ \lambda_k(B_\sigma) = \sigma \mu_k + g(\rho_1 - \rho_{2,0}(0)).
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

После простых преобразований получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&\nu \sin(\gamma h_2)[\lambda_k(B_\sigma)\alpha_k - \lambda \rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)] +\\
&\qquad + \lambda \alpha_k \rho_{2,0}(0)[\delta \sin(\gamma h_2) + \gamma \cos(\gamma h_2)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Нетрудно видеть, что для решений этого уравнения $\sin(\gamma h_2) \neq 0$ (иначе $\cos(\gamma h_2) = 0$).

Для удобства последующих рассмотрений выберем в качестве характерного размера задачи (2.1.9)–(2.1.11) высоту h_2 столба газа, а также какие-либо другие характерные величины для времени и других физических параметров системы. Тогда безразмерная высота столба газа будет равна 1, а другие параметры в (2.1.9)–(2.1.11) можно считать безразмерными. Учитывая еще свойство $\sin(\gamma h_2) = \sin(\gamma) \neq 0$, перепишем с учетом (2.3.3) уравнение (2.3.4) в безразмерном виде:

$$\gamma \mathrm{ctg}\gamma + \delta = \Big[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\gamma^2+\delta^2+\alpha_k^2)^{-1} + \frac{\rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k}\Big](\delta^2+\gamma^2) = \\ =: f_k(\gamma^2),\ k = 1,2,\dots . \quad (2.3.5)$$

Здесь правая часть $f_k(\gamma^2)$ как функция переменной γ является четной и асимптотически близкой к параболе при $\gamma \to \infty$. Так как левая часть (2.3.5) также является четной функцией γ, то корни уравнения (2.3.5) расположены симметрично относительно начала координат и потому далее можно рассматривать лишь его положительные корни.

Из графического рассмотрения уравнения (2.3.5), а также из равносильного ему уравнения

$$\mathrm{ctg}\gamma = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} f_k(\gamma^2), \quad k = 1,2,\dots$$

приходим к следующим выводам.

1°. При любом $k = 1,2,\dots$ задача имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{kp} := a^2(\gamma_{kp}^2 + \mu_k + g^2/(4a^4)),\ \ p = 1,2,\dots , \quad (2.3.6)$$

$$\gamma_{kp} = \pi p + \beta_{kp},\ \ 0 < \beta_{kp} < \pi,$$

отвечающих акустическим колебаниям в гидросистеме "идеальная жидкость–баротропный газ".

2°. При фиксированном k и $p \to \infty$ имеют место свойства $\beta_{kp} \to 0$, то есть

$$\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)] \quad (p \to \infty),$$

где $\lambda_{kp}^{(2)}$ — квадраты частот акустических колебаний газа с неподвижной границей раздела Γ (см. (2.2.9)).

3°. При фиксированном p и $k \to \infty$ из (2.3.6) и (2.2.9) также следует свойство

$$\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty, \quad \forall p = 1,2,\dots),$$

так как $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$ (см. п. 12). Таким образом,

$$\lambda_{kp} = \lambda_{kp}^{(2)}[1 + o(1)], \quad k,p \to \infty.$$

4°. Рассмотрим теперь промежуток $[0,\pi]$, где также может находиться корень уравнения (2.3.5), которое выведено при условии, что $\gamma^2 = \nu - \delta^2 > 0$ (см. (2.3.2)).

Если, в частности, выполнено условие (см. (2.3.5))

$$1+\delta > -\frac{\lambda_k(B_\sigma)\delta^2}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\delta^2+\alpha_k^2)^{-1} + \frac{\rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)\delta^2}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k},$$

то такой (единственный) корень имеется на этом промежутке. В противном случае следует рассмотреть уравнение

$$\delta + \xi \mathrm{cth}\xi = \Big[-\frac{\lambda_k(B_\sigma)}{a^2\rho_{2,0}(0)}(\alpha_k^2+\delta^2-\xi^2)^{-1} + \frac{\rho_1 \mathrm{cth}(\alpha_k h_1)}{\rho_{2,0}(0)\alpha_k}\Big](\delta^2-\xi^2) = \\ =: r_k(\xi^2),\ k=1,2,\dots, \quad (2.3.7)$$

которое получается формальной заменой γ^2 на $-\xi^2$ и соответствует случаю $\nu-\delta^2=-\xi^2\le 0$ в (2.3.2).

Обозначим через γ_{k_0} корень уравнения (2.3.5) на промежутке $[0,\pi]$, а через ξ_{k_0} — соответствующий корень уравнения (2.3.7). Тогда этим корням (одному либо другому) отвечают собственные значения

$$\lambda_{k0} = a^2(\gamma_{k_0}^2+\mu_k+g^2/(4a^4)), \quad k=1,2,\dots$$

либо

$$\lambda_{k0} = a^2(-\xi_{k_0}^2+\mu_k+g^2/(4a^4)), \quad k=1,2,\dots. \quad (2.3.8)$$

5°. При $a^2\to\infty$ собственные значения (2.3.8), соответствующие корням уравнения (2.3.7), имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_{k0} = \lambda_k^{(1)}[1+o(1)] \quad (a^2\to\infty), \quad (2.3.9)$$

т. е. отвечают решениям первой вспомогательной задачи (2.2.1)–(2.2.2), а именно случаю, когда обе жидкостные среды несжимаемы и имеют плотности ρ_1 и $\rho_{2,0}(0)$ соответственно.

Для доказательства свойства (2.3.9) рассмотрим уравнение (2.3.7) с искомой переменной ξ, которое перепишем в виде

$$(\delta+\xi\mathrm{cth}\xi)a^2(\alpha_k^2+\delta^2-\xi^2)\alpha_k\rho_{2,0}(0) + [\lambda_k(B_\sigma) - a^2(\alpha_k^2+\delta^2- \\ -\xi^2)\rho_1\mathrm{cth}(\alpha_k h_1)](\delta^2-\xi^2)=0,\ \ \delta=g/(2a^2)=O(a^{-2})\ \ (a\to\infty), \quad (2.3.10)$$

и будем искать его корни с асимптотическим поведением

$$\xi_{k0} = \alpha_k + \beta_{k0}a^{-2} + O(a^{-4}) \quad (a\to\infty).$$

Подстановка ξ_{k0} в (2.3.10) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях a^{-2} приводит к формуле

$$\beta_{k0} = -\lambda_k^{(1)}/(2\alpha_k), \quad k=1,2,\dots.$$

Отсюда и следует асимптотическая формула (2.3.9).

Таким образом, в системе "идеальная жидкость–баротропный газ" имеются собственные колебания, родственные поверхностным колебаниям системы, состоящей из двух идеальных несжимаемых жидкостей, а также акустическим колебаниям в газе при почти неподвижной границе раздела между жидкостью и газом и состоянию покоя в жидкости.

Численные расчеты, связанные с нахождением решений уравнений (2.3.5) и (2.3.9), подтвердили эти общие выводы. Они показали также, что формы собственных колебаний имеют следующее свойство: в жидкости они затухают при отходе от границы раздела Γ, а в газе осциллируют, причем частота осцилляций, отвечающая значениям λ_{kp}, увеличивается при $p \to \infty$.

Заключение

В работе получены следующие результаты.

1°. Изучена проблема малых движений и собственных колебаний системы, состоящей из идеальной несжимаемой жидкости и баротропного газа. Эта система заполняет произвольную ограниченную область трехмерного пространства и находится в условиях, близких к невесомости. Граница области предполагается липшицевой.

2°. Исследована задача о собственных колебаниях гидросистемы, при этом применен операторный подход. Изучены свойства операторов потенциальной и кинетической энергии. На этой основе доказаны теоремы о дискретности спектра частот колебаний, о базисности системы форм собственных колебаний, а также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

3°. Начально-краевая задача о малых движениях гидросистемы приведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. На этой основе доказана теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

4°. Проведено подробное рассмотрение задачи о собственных колебаниях системы в случае, когда сосуд имеет цилиндрическую форму с произвольным поперечным сечением, а граница раздела между жидкостью и газом горизонтальна. Получено характеристическое уравнение задачи об определении спектрального параметра (квадрата частоты колебаний). Установлено, что спектр задачи асимптотически разбивается на два множества, отвечающие соответственно гравитационно-капиллярным волнам у границы раздела "жидкость–газ" и акустическим волнам в газе при неподвижной границе раздела.

Список литературы

1. Газиев, Э. Л., Копачевский, Н. Д. Малые движения и собственные колебания гидросистемы "жидкость–газ" // Украинский математический вестник. — Донецк: ИПММ, 2013. — Т. 10, № 1. — С. 10–53.

   GAZIEV, E. & KOPACHEVSKY, N. (2004) Small motions and eigenoscillations of hydrosystem fluid–barotropic gas. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* 10,1. p. 10–53.

2. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. & KREIN, S. & NGO ZUI KAN (1989) *Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutionary and Spectral Problems.* Moscow: Nauka.

3. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи: сб. трудов XXI Крымской осенней матем. школы–симпозиума. — Симферополь: Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, 2011. — Т. 21, № 1. — С. 2–39.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) On Abstract Green's Identity for Mixed Boundary Problems and its Applications. *Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the XXI Crimean Autumn Mathematical School–Symposium.* 10,1. p. 2–39.

4. Копачевский, Н. Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм // Современная математика. Фундаментальные приложения. — М.: Российский университет Дружбы народов, 2015. — Т. 57. — С. 71–107.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) On Abstract Green's Identity for a Triple of Hilbert Spaces and Semilinear forms. *Contemporary Mathematics Fundamental Directions.* 57. p. 71–107.

5. Газиев, Э. Л., Копачевский, Н. Д. Об обращении оператора потенциальной энергии в проблеме собственных колебаний системы "капиллярная жидкость–баротропный газ" // Динамические системы. — Симферополь: Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, 2011. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 9–18.

   GAZIEV, E. & KOPACHEVSKY, N. (2014) On inversion of the potential energy operator at the problem of eigenoscillations of the system "capillary fluid-gas". *Dinamicheskie Sistemy.* 4(32),1-2. p. 9–18.

6. Бабский, В. Г. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др. — М.: Наука, 1992. — 592 с.

   BABCKII, V. & GUKOV, M. & KOPACHEVSKII, N. & MYSHKIS, A. & SLOBOZHANIN, L. & TYUPTSOV, A. (1992) *Methods of solving of fluid mechanics problems for zero gravity conditions.* Kiev: Naukova dumka.

УДК: 517.935.7

MSC2010: 47E05, 47E06

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМПЛЕКСА

© Н. С. Иванисенко

Донецкий национальный университет
факультет математики и информационных технологий
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001, Украина
e-mail: *Ivanisenko.n.s@gmail.com*

A local version of the Pompeiu problem for regular simplex.

Ivanisenko N. S.

Abstract. Let V be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. A set A is a regular simplex, whose edge is $\sqrt{2}$, in four-dimensional space. Some problems about functions is locally integrable on a set V with vanishing integrals over all images $\lambda A \subset V$, $\lambda \in M(n)$ of a fixed compact set $A \subset \mathbb{R}^n$ are studied in the present paper. If the only function is locally integrable on a set V and satisfying this condition is $f = 0$ then the set A is called a Pompeiu set in V.

Extremely interesting are local versions of the Pompeiu problem, when a function f is defined on a bounded domain $V \subset \mathbb{R}^n$ and $\int_{\lambda A} f(x) = 0$ is required to hold only when $\lambda A \subset V$. In this case the object is to determine conditions on the set A under which have the equality $\int_{\lambda A} f(x) = 0$ implies that $f = 0$ on V.

We will say that a compact set $A \subset \mathbb{R}^n$ has the local Pompeiu property with respect to the domain V if every function f is locally integrable on a set V have the equality $\int_{\lambda A} f(x) = 0$, for all $\lambda A \subset V, \quad \lambda \in M(n)$ vanishes almost everywhere in V. Such set A is also called a Pompeiu set in V. We will denote by $Pomp(V)$ the collection of all Pompeiu sets in the domain V.

Of considerable interest is the case when V is the ball $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{R}^n, \quad r > r^*(A)$ (where $r^*(A)$ is the radius of the smallest closed ball containing the set A). One can in this case show that for a broad class of sets A the condition $A \in Pomp(\mathbb{B}_r)$ occurs when the size of $\mathbb{B}_r$ is sufficiently large compared with A. The following problem arises in this connection. The following problem arises in this connection.

Problem. Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a compact set such that $A \in Pomp(\mathbb{B}_r)$ for some $r > r^*(A)$. Find $R(A) = infr > r^*(A) : A \subset Pomp(\mathbb{B}_r)$ and investigate when the value $R(A)$ is attainable, that is, $A \subset Pomp(\mathbb{B}_r)$ for $r = \mathscr{R}(A)$.

The questions concerning the local version Pompeiu's problem are investigated in this paper. The case, under considerations is investigation of a regular simplex in the fourth dimension space. A number of results similar to Stokes's formula are obtained, which allow to calculate integral from some differential operator, which working on set functions though values, similar to integral to a subset or border of a simplex of smaller dimension. In particular, the case when these subset are faces and volume figures of the simplex is considered. Some estimates Pompeiu's radius were obtained earlier. In this paper estimates are considerably refined. These formulas help to improve the existing evaluation Pompeiu's radius.

Also we consider the problem about minimal radius of a ball on which A is a Pompeiu's set. A assessment Pompeiu's radius, for this regular simplex, have received.

Keywords: *a local version Pompeiu's problem, Pompeiu's radius, regular simplex, locally integrable function, four-dimensional space.*

Введение

Далее в работе через $\mathbb{R}^n$ обозначается вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, через $\mathbf{M}(n)$ группа изометрий $\mathbb{R}^n$, через $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) \colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B, и $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$ – шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B, если из того, что комплекснозначная локально суммируемая функция в B ($f \in L_{loc}(B)$), для которой

$$\int\limits_{\lambda A} f(x)dx = 0 \tag{1}$$

для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$, следует, что функция f равна нулю почти всюду в B.

Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A и была изучена многими авторами (обзор [1] с обширной библиографией). Ряд достаточных условий принадлежности $A \in Pomp(\mathbb{R}^n)$ получили: румынский математик Помпейю в 1929 году [2, 3, 4], Николеско в 1929 году [5, 6], Христов в 1943 году [7, 8, 9], Илиеф в 1946 году [10, 11, 12] и Чакалов в 1949 году [13].

Легко видеть даже на плоскости $\mathbb{R}^2$, что не каждое множество имеет свойство Помпейю. В самом деле, пусть $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}, R > 0$ — фиксировано и $f(x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}$. Тогда, поскольку $\lambda\mathbb{B}_R$ является кругом радиуса R с центром в точке $y \in \mathbb{R}^2$, координаты которой зависят только от $\lambda \in \mathbf{M}(2)$, интеграл (1) сводится к

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant R} e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}dx = \frac{2\pi R}{|\alpha|} J_1(R|\alpha|) e^{i(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2)},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Отсюда делаем вывод, что круг не является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, поскольку всякий раз, когда $R|\alpha|$ — нуль функции Бесселя J_1, получаем, что существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая (1).

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, является A множеством Помпейю или нет [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Отметим следующую теорему:

Теорема Вильямса [24, 25]. *Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если $\overline{A} \notin Pomp(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.*

Этот результат, в частности, показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $Pomp(\mathbb{R}^n)$.

В случае множества A с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примером множества $A \subset Pomp(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geqslant 2$ является эллипсоид, отличный от шара.

При $n \geqslant 3$ классу $Pomp(\mathbb{R}^n)$ принадлежит также замыкание внутренности тора [26].

В 2005 году В. В. Волчков получил примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [27]. Одним из таких множеств является "снежинка Коха".

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривиальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множества вида $\lambda A, \lambda \in \mathbf{M}(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр в работах [28, 29]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера [30] возможна аппроксимация в $L^1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида $\lambda A, \lambda \in \mathbf{M}(n)$.

Если $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, возникает вопрос, при каких значениях R компактное множество будет принадлежать классу $\mathrm{Pomp}(B_R)$? В связи с этим в работе [31] поставлена следующая

Проблема (4.1.1 из [31], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathscr{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathscr{R}(A)$, получен К. А. Беренстейном и Р. Гэем [32, 33], а также В. В. Волчковым [31].

В частности, для правильного треугольника со стороной a известно значение величины $\mathscr{R}(A) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, для правильной треугольной пирамиды радиус Помпейю $\mathscr{R}(A) = a\sqrt{3}$. Ранее для пространства размерности больше 3, для симплекса была получена верхняя оценка радиуса Помпейю. В данной работе уточнена оценка величины $\mathscr{R}(A)$ для правильного симплекса в четырехмерном пространстве.

1. Вспомогательные конструкции

В данной работе рассматривается правильный симплекс $\widetilde{S}_4$ в $\mathbb{R}^4$ с вершинами $z_1(1,0,0,0)$, $z_2(0,1,0,0)$, $z_3(0,0,1,0), z_4(0,0,0,1)$, $z_5((1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4)$.

Введем необходимые дифференциальные операторы:
$q_1^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_2$, $\quad q_2^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_3$, $\quad q_3^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_4$,
$q_4^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_3$, $\quad q_5^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_4$, $\quad q_6^* = \partial/\partial y_3 - \partial/\partial y_4$,
$q_7 = ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3)+((\sqrt{5}-1)/4)* * (\partial/\partial y_4)$,
$q_8 = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3)+((\sqrt{5}+3)/4)* * (\partial/\partial y_4)$.

Для формулировки теоремы 1 рассмотрим следующие операторы:
$H_{2,3,5} = \int_0^1 [((-q_1^*)q_4 q_5(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)f)(((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4,$ $((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4)]dx_3$
$H_1 = -q_4^* q_5^* q_6^* q_8$, $\quad H_2 = q_1^* q_5^*(q_2^*(q_8+q_3^*) + q_6^* q_8) - q_1^* q_4^* q_2^*(q_8+q_3^*) + q_4^* q_5^* q_6^* q_8$,
$H_3 = q_1^* q_5^*(-q_2^*(q_8+q_3^*) - q_6^* q_8)$, $\quad H_4 = q_1^* q_4^* q_2^*(q_8+q_3^*)$, $\quad \widetilde{D}_1 = q_7 H_{2,3,5}$.

Необходимые дифференциальные операторы для формулировки теоремы 2:
$H_{2,3,4,5} = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} ((-q_1^*)q_4^* q_5^*(-q_2^*)q_6^* q_3 f)[(((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2 + + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4,$ $((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4)]dx_4$,
$\widetilde{H}_1 = q_4^* q_5^* q_6^*$, $\quad \widetilde{H}_2 = -q_1^* q_5^*(-q_2^* + q_6^*) - q_1^* q_4^* q_2^* - q_4^* q_5^* q_6^*$, $\quad \widetilde{H}_3 = q_1^* q_5^*(-q_2^* + q_6^*)$,
$\widetilde{H}_4 = q_1^* q_4^* q_2^*$, $\quad \widetilde{D}_2 = H_{2,3,4,5}$.

2. Формулировки основных результатов

Приведенные ниже теоремы содержат информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по множеству $\widetilde{S}_4$ от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f: 1) в грани $z_2 z_3 z_5$ и вершинах, и 2) в объемном теле $z_2 z_3 z_4 z_5$ и вершинах симплекса.

Теорема 1. *Для произвольной функции $f \in \mathbb{C}^8(\widetilde{S}_4)$ верно следующее равенство:*

$$\int\limits_{\widetilde{S}_4} (\widetilde{D}_1 f)(y)dy = \sqrt{5} H_{2,3,5} + \sqrt{5} \sum_{i=1}^{4} (H_i f)(z_i).$$

Теорема 2. *Если функция $f \in \mathbb{C}^7(\widetilde{S}_4)$, тогда выполняется следующее равенство:*

$$\int\limits_{\widetilde{S}_4} (\widetilde{D}_2 f)(y)dy = \sqrt{5}H_{2,3,4,5} + \sqrt{5}\sum_{i=1}^{4}(\widetilde{H}_i f)(z_i).$$

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Производя следующие замены:
$y_1 = ((\sqrt{5}+3)\ 4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4;$
$y_2 = ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4;$
$y_3 = ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4;$
$y_4 = ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4,$
переходим от интеграла по множеству $\widetilde{S}_4$ к интегралу по множеству $\mathbf{S}_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4\}:$

$\int_{\widetilde{S}_4} f(y_1,y_2,y_3,y_4)dy_1dy_2dy_3dy_4 = \sqrt{5}\int_{\mathbf{S}_4} f(((\sqrt{5}+3)/4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4)dx_1dx_2dx_3dx_4.$

Для произвольной функции f переход к повторному интегралу по множеству $\mathbf{S}_4$ будем осуществлять исходя из данного равенства:

$\int_{\mathbf{S}_4} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 =$
$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_4.$

Действуя оператором q_7 на функцию f, имеем:

$\int_{\widetilde{S}_4}(q_7 f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4}[(((\sqrt{5}+3)/4) * (\partial/\partial x_1) +$
$+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_3)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_4))f](((\sqrt{5}+3)/4)x_1+$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 +$
$+ ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4))dx_1 =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3}[f(1-x_2-x_3-x_4, x_2, x_3, x_4) - f(((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4))]dx_4.$

Аналогично получаем:

$\int_{\widetilde{S}_4}(-q_3^* q_8 q_7 f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}[(q_8 f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3) - (q_8 f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)]dx_3 -$
$-\sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}[(-q_3^* f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3) - (-q_3^* f)(((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4)]dx_3.$

Приводя подобные слагаемые, приходим к равенству:

$\int_{\widetilde{S}_4}(-q_3^* q_8 q_7 f)(y)dy = \sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}(q_8 + q_3^*)(f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3)dx_3 -$
$-\sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}(q_8 f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)dx_3 +$
$+\sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}[(-q_3^* f)(((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4)]dx_3.$

Подействуем теперь оператором $-q_2^* q_6^*$ на функцию $-q_3^* q_8 q_7 f$ и приведем подобные слагаемые. В результате имеем:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_8 q_7 f)(y)dy = \sqrt{5}\int_0^1(-q_2^*(q_8+q_3^*) - q_6^* q_8)(f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2 +$
$+\sqrt{5}\int_0^1(q_2^*(q_8+q_3^*)f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2 + \sqrt{5}\int_0^1(q_6^* q_8 f)(1-x_2,x_2,0,0)dx_2 +$
$+\sqrt{5}\int_0^1[((-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)f)(((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4)]dx_3.$

Вычисляя интеграл по множеству $\widetilde{S}_4$ от функции $(-q_1^*)q_4 q_5(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_8 q_7 f$, получим:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_1^*)q_4^* q_5^*(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_8 q_7 f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1[((-q_1^*)q_4 q_5(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)f)(((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + (1-\sqrt{5})/4)]dx_3 +$
$+\sqrt{5}[-(q_4^* q_5^* q_6^* q_8 f)](1,0,0,0) +$
$+ \sqrt{5}[(q_1^* q_5^*(q_2^*(q_8 + q_3^*) + q_6^* q_8) - q_1^* q_4^* q_2^*(q_8 + q_3^*) + q_4^* q_5^* q_6^* q_8)f](0,1,0,0) +$
$+\sqrt{5}[q_1^* q_5^*(-q_2^*(q_8+q_3^*) - q_6^* q_8)f](0,0,1,0) + \sqrt{5}[q_1^* q_4^* q_2^*(q_8+q_3^*)f](0,0,0,1).$

Воспользовавшись обозначениями, введенными выше, получаем формулу, с помощью которой выражается интеграл по правильному симплексу $\widetilde{S}_4$ через значения данных операторов в грани $z_2 z_3 z_5$ и вершинах данного симплекса:

$$\int\limits_{\widetilde{S}_4}(\widetilde{D}_1 f)(y)dy = \sqrt{5}H_{2,3,5} + \sqrt{5}\sum_{i=1}^{4}(H_i f)(z_i).$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Действуя оператором $-q_3^*$ на функцию $q_7 f$, имеем:

$\int_{\widetilde{S}_4}(-q_3^*q_7f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[f(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3) - f(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)]dx_3 +$
$+ \sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2} dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}(q_3f)(((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 +$
$+ (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4))dx_4.$

Подействуем оператором $-q_2^*q_6^*$ на функцию $-q_3^*q_7f$ и приведем подобные слагаемые, получим равенство:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_7f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2} dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}(-q_2^*q_6^*q_3f)[((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 +$
$+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4)]dx_4 +$
$+ \sqrt{5}\int_0^1((-q_2^* - q_6^*)f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2 +$
$+ \sqrt{5}\int_0^1(q_2^*f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2 + \sqrt{5}\int_0^1(q_6^*f)(1-x_2,x_2,0,0)dx_2.$

Интеграл по множеству $\widetilde{S}_4$ от функции $(-q_1^*)q_4^*q_5^*(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_7f$ имеет вид:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_1^*)q_4q_5(-q_2^*)q_6^*(-q_3^*)q_8q_7f)(y)dy =$
$= \sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2} dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}((-q_1^*)q_4^*q_5^*(-q_2^*)q_6^*q_3f)[((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 +$
$+ ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 +$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4, ((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_3 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_4 + (1-\sqrt{5})/4,$
$((\sqrt{5}-1)/4)x_2 + ((\sqrt{5}-1)/4)x_3 + ((\sqrt{5}+3)/4)x_4 + ((1-\sqrt{5})/4)]dx_4 +$
$+ \sqrt{5}[(q_4^*q_5^*q_6^*f)](1,0,0,0) + \sqrt{5}[(-q_1^*q_5^*(-q_2^* + q_6^*) - q_1^*q_4^*q_2^* - q_4^*q_5^*q_6^*)f](0,1,0,0) +$
$+ \sqrt{5}[q_1^*q_5^*(-q_2^* + q_6^*)f](0,0,1,0) + \sqrt{5}[q_1^*q_4^*q_2^*f](0,0,0,1).$

Используя обозначения, введенные перед теоремами, получим формулу, с помощью которой интеграл по правильному симплексу $\widetilde{S}_4$ выражается через значения приведенных операторов в объемном теле $z_2z_3z_4z_5$ и вершинах данного симплекса:

$$\int\limits_{\widetilde{S}_4}(\widetilde{D}_2f)(y)dy = \sqrt{5}H_{2,3,4,5} + \sqrt{5}\sum_{i=1}^{4}(\widetilde{H}_if)(z_i).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

4. Оценка сверху радиуса Помпейю

Для данного правильного симплекса $\widetilde{S}_4$ с длиной ребра равной $\sqrt{2}$ центр описанной сферы расположен в точке $O(\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}})$ и радиус $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Для удобства переобозначим вершины симплекса $A = z_1, B = z_2, C = z_3, D = z_4, W = z_5$.

Возьмем $R > R$. Решая соответствующую геометрическую задачу, найдем минимальное значение радиуса R, для которого множество вершин при всевозможных сдвигах и вращениях компакта $\widetilde{S}_4$ внутри шара радиуса R, при которых симплекс находится полностью внутри шара, совпадает с внутренностью шара. А также изучим множество $U(R) = \{z = \lambda z_i : \lambda \in Mot(\widetilde{S}_4, \mathbb{B}_R), \quad i = \overline{1,5}\}$. Данное множество содержит все допустимые положения вершин $\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, \lambda z_4, \lambda z_5$, при которых $\lambda \in Mot(\widetilde{S}_4, \mathbb{B}_R)$.

Экстремальные положения вершин симплекса: первое — когда $A, B, C, D \in \partial\mathbb{B}_R$ (т. е. вершины A, B, C, D лежат на границе шара), а вершина W лежит внутри шара; второе — когда вершина $W \in \partial\mathbb{B}_R$, а остальные вершины симплекса лежат внутри шара.

Рассмотрим первый экстремальный случай. Найдем расстояние от центра сферы O_1 радиуса R до вершины правильного симплекса W.

Сначала найдем координаты точки O_1. Поскольку $A, B, C, D \in \partial\mathbb{B}_R$, имеем: $|O_1A| = |O_1B| = |O_1C| = |O_1D| = R$. Положим $O_1(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$, тогда имеем вектор $\overrightarrow{O_1A}(1-\alpha, -\alpha, -\alpha, -\alpha)$. Длина данного вектора $|\overrightarrow{O_1A}| = \sqrt{1 - 2\alpha + 4(\alpha)^2} = R$. Решая квадратное уравнение, получим $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{4R^2-3}}{4} > 0, \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{4} < 0$. Таким образом, имеем координаты центра сферы $O_1(\frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-\sqrt{4R^2-3}}{4})$ радиуса R.

Зная координаты центра сферы O_1, найдем расстояние от вершины симплекса W до O_1.

Зная координаты вектора $\overrightarrow{WO_1}(\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{4}, \frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{4}, \frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{4}, \frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{4})$, вычислим длину вектора $|\overrightarrow{WO_1}| = \sqrt{(4(\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2}$.

Решая неравенство $\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2} < R$, покажем, что вершина W находится внутри шара, и найдем для какого значения радиуса R вершина расположена максимально близко к центру сферы. Итак, $(\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2})^2 < R^2 \Rightarrow 2 - 10\sqrt{4R^2-3} < 0 \Rightarrow R^2 > \frac{2}{\sqrt{5}}$, значит $\forall R > R$ вершина W находится внутри шара. Заметим также, что подкоренное выражение $\sqrt{4R^2-3} \geqslant 0 \Rightarrow R \leqslant \sqrt{2}$. Таким образом, при $R = \sqrt{2}$ точка W совпадает с центром сферы радиуса R (следовательно, если $R = \sqrt{2}$, тогда множество вершин симплекса совпадает с внутренностью данного шара, $U(R) = \mathbb{B}_R$), при $R < \sqrt{2}$ искомое расстояние $\rho_1(R) = \frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2}$.

Делаем вывод: если $A, B, C, D \in \partial\mathbb{B}_R$, тогда множество $U(R)$ является множеством: $\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2} < |x| < R$ при $R < R < \sqrt{2}$.

Рассмотрим второй экстремальный случай. Найдем ближайшее расстояние от вершины симплекса A до центра сферы O_1 радиуса R.

Перемещаем вершину симплекса W на границу шара так, чтобы оставшиеся вершины симплекса лежали внутри данного шара. Пусть $W_\eta \in \partial\mathbb{B}_R$, $W_\eta(\eta,\eta,\eta,\eta)$, $\eta < 0$, найдем η из соотношения $|O_1W_\eta| = R$. Имеем: $|O_1W_\eta|^2 = 4\frac{16\eta^2+8(\sqrt{4R^2-3}-1)\eta-2\sqrt{4R^2-3}+4R^2-2}{16} = R^2$
$\Rightarrow$ $\eta_1 = \frac{1+2R-\sqrt{4R^2-3}}{4} > 0$, $\eta_2 = \frac{1-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4} < 0$. Имеем координаты точки $W_\eta(\frac{1-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{1-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4})$. Т. о., из точки W в W_η перемещение произведено с помощью сдвига на вектор $\overrightarrow{\eta}(\frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4})$.

Проверим, что при данном сдвиге остальные вершины симплекса находятся внутри шара. Поскольку симплекс правильный, достаточно доказать данное предположение для одной вершины. Сдвигая вершину A на вектор $\overrightarrow{\eta}$, получаем точку $A_\eta(\frac{4+\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4}, \frac{\sqrt{5}-2R-\sqrt{4R^2-3}}{4})$. Проверим неравенство $|OA_\eta| < R$. Длина вектора $\overrightarrow{O_1A_\eta}(\frac{3+\sqrt{5}-2R}{4}, \frac{\sqrt{5}-1-2R}{4}, \frac{\sqrt{5}-1-2R}{4}, \frac{\sqrt{5}-1-2R}{4})$ равна $|\overrightarrow{O_1A_\eta}| = \sqrt{R^2-\sqrt{5}R+2}$. Тогда, решая неравенство $R^2-\sqrt{5}R+2 < R^2$, получаем, что оно выполняется для всех $R > R$. Таким образом, мы показали, что при указанном сдвиге вершины правильного симплекса остаются внутри шара. А также найдено ближайшее расстояние от центра окружности до вершин симплекса: $\rho_2(R) = \sqrt{R^2-\sqrt{5}R+2}$.

Можем сделать вывод, что множество $U(R)$ является множеством: $\sqrt{R^2-\sqrt{5}R+2} < |x| < R$.

Сравнивая величины $\rho_1(R)$ и $\rho_2(R)$, видим, что $\rho_1(R) < \rho_2(R)$. Отсюда делаем вывод, что при первом экстремальном расположении симплекса (с длиной ребра $\sqrt{2}$) при сдвигах и поворотах симплекса внутри шара радиуса R множество его вершин покрывает большую часть шара, чем при втором.

Вывод: 1) U является множеством: $\frac{-\sqrt{4R^2-3}+\sqrt{5}}{2} < |x| < R$ при $R < R < \sqrt{2}$,
2) $U(R) = \mathbb{B}_R$ при $R = \sqrt{2}$.

Таким образом, получаем оценку сверху радиуса Помпейю:

$$\mathscr{R}(\widetilde{S}_4) \leqslant \sqrt{2}.$$

Заключение

В работе получены следующие результаты: 1) формулы, аналогичные формулам Стокса, которые позволяют выразить интеграл от некоторого оператора, действующего на заданную функцию, через значения интеграла по подмножествам границы симплекса меньшей размерности. В частности, рассмотрен случай, когда этими подмножествами являются грани и объемные тела симплекса; 2) получено уточнение оценки радиуса Помпейю для данного правильного симплекса в четырехмерном пространстве.

Список литературы

1. ZALCMAN, L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation dy solutions of partial differential equations / L.Zalcman // ed. B. Fuglede et al. — 1992. — C. 185–194.
2. POMPEIU, D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. — 1929. — V. 188. — C. 1138–1139.
3. POMPEIU, D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. — 1929. — V. 15, № 5. — C. 265–269.
4. POMPEIU, D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. — 1929. — V. 53, № 2. — C. 328–332.
5. NICOLESCO, M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // C. R. Accd. Sci. Paris. — 1929. — V. 188. — C. 1370–1371.
6. NICOLESCO, M. Sur un theoreme de Pompeiu / M.Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale. Belgique. — 1930. — V. 16, № 5. — C. 817–822.
7. CHRISTOV, C. Uber eina integraleidensehaft der functionen von swei argumenten / C. Christov // Ann. Unit. Sofia Fac. Phys., Livre 1. — 1943. — V 39. — C. 395–408.
8. CHRISTOV, C. Sur un probleme de Pompeiu / C.Christov // Mathematica (Timisoara). — 1948. — V 23. — C. 103–107.
9. CHRISTOV, C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. — 1949. — V. 45. — C. 167–178.
10. ILIEFF, L. Uber ein probleme von Pompeiu / L.Ilieff // Ann. Univ. Sofia. Fac. Phys., Livre. — 1946. — V. 42. — C. 83–96.
11. ILIEFF, L. Beitrag zum problem von Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre. — 1948. — V. 44. — C. 309–316.
12. ILIEFF, L. Sur un promlem de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Unit. Sofia Fac. Phys., Livre 1. — 1949. — V. 45. — C. 111–1114.
13. CHAKALOV, L. Sur un problem de D. Pompeiu / L. Chakalov // Ann. Unit. Sofia Fac. Phys., Livre 1. — 1949. — V 40. — C. 1–14.
14. BERENSTEIN, C. A. El problema de Pompeiu / C. A. Berenstein // Atas do Novo Coloquio Brasileiro de Mathematica. — 1977. — V. 1. — C. 31–37.
15. DEMAR, R. F. A complex Pompeiu problem / R. F. Demar, P. J. Davis // Duke Math. J. — 1966. — V 33. — C. 91–101.

16. GAROFALO, N. A new result on the Pompeiu problem / N. Garofalo // Rend. Sem. Mat. Univ., Special Issue. — 1989. — C. 25–38.

17. GAROFALO, N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu promlem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. — 1991. — V. 56. — C. 1–28.

18. GAROFALO, N. Another step toward the solution of the Pompeiu problem in the plane / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. — 1989. — V. 7, № 2. — C. 241–257.

19. HARCAOUI, M. Inversion de la Transformation de Pompeiu dans le disque hyperbolique / M. Harcaoui // Univ. Bordeaux. — 1993. — V. 37. — C. 133–164.

20. SZABO, G. On functions having the same integral on congruent semidisks / G. Szabo // Ann. univ. sci. Budapesht. Lec. compulator. — 1982. — V. 3. — C. 3–9.

21. Заставный, В. П. О функциях с нулевыми интегралами по множествам конгруэнтным данному / В. П. Заставный, Р. М. Тригуб // Теория функций и приближений. — 1988. — Ч. II. — С. 14–22.

    ZASTAVNYI, V. and TRIGUB, R. (1988) On functions with zero integrals over the sets congruent to this. *Theory of functions and applications.* II. p. 14–22.

22. Малюгин, С. А. Мат. заметки / С.А.Малюгин // Математические вопросы кибернетики. — 1978. — Т. 2. — С. 339–341.

    MALUGIN, C. (1978) On functions with zero integrals on congruent cubes. *Mathematical notes.* 2. p. 339–341.

23. Произволов, В. В. Об интегралах, постоянных на конгруентных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. — 1977. — Т. 21. — С. 183–186.

    PROIZVOLOV, V. (1977) On integrals are constant on congruent areas. *Mathematical notes.* 21. p. 183–186.

24. WILLIAMS, S. A. Analyticity of the boundary for Lipshits domains without the Pompeiu property / S. A. Williams // Ind. Univ. Math. J. — 1981. — V. 30. — C. 357–369.

25. WILLIAMS, S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. — 1976. — V. 223. — C. 183–190.

26. VOLCHKOV, V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. — Dordrecht: Heidelberg London New York, 2009. — 617 c.

27. VOLCHKOV, V.V. New result in integral geometry / V.V.Volchkov, Vit.V.Volchkov // IMCP. — 2003. — V. 16. — C. 173–188.

28. Котляр, Б. Д. Об укладках параллелотопов и некоторых других множеств / Б. Д. Котляр // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25. — С. 222–225.

    KOTLYAR, B. (1984) On stacking parallelotopic and some other sets. *Sib. mathematical journal.* 25. p. 222–225.

29. Котляр, Б. Д. Плотности укладок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. — 1987. — Т. 126. — С. 469–472.

KOTLYAR, B. (1987) Density pilings bounded sets. *Community Academic of Sciences Georgian SSR*. 126. p. 569–472.

30. Эдварс, Р. Ряды Фурье в современном изложении / Р.Эдварс. — М.: Мир, 1985. — 400 с.

EDWARDS, R. (1985) *Fourier's series in today's presentation.* M.: World.

31. VOLCHKOV, V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 454 c.

32. BERENSTEIN, C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. — 1986. — V. 55. — C. 267–288.

33. BERENSTEIN, C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. — 1989. — V 52. — C. 133–166.

УДК: 517.984:517.958

MSC2010: 35Q35, 35D35, 35L90

ЗАДАЧИ СТАТИКИ, УСТОЙЧИВОСТИ И МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ СОСУДЕ С ОТВЕРСТИЯМИ В ДНИЩЕ

© Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева

Крымский инженерно-педагогический университет
Воронежский государственный университет
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *kopachevsky@list.ru*

Problems of statics, stability, and small oscillations of an ideal incompressible fluid in a partially filled container with holes in the bottom.

Kopachevsky N. D., Sitshaeva Z. Z.

Abstract. The paper deals with the problems on statics, stability, eigenoscillations and small movements of an ideal incompressible fluid in a vessel with bottom holes.

A rectangular channel (plane problem) and cylindrical container (axisymmetric problem) are considered. It is assumed that hydrosystem is under low gravity conditions, and therefore the action of surface tension forces and weak gravitational forces are considered.

Under these assumptions, the free surface of a fluid is disconnected and consists of an upper part (located inside vessel) and surfaces hanging drops held by capillary forces. The cases of a horizontal upper part of the free surface, as well as an option when it is curved, are studied.

In the investigation the methods of linear operators, acting in Hilbert spaces, as well as variations and operator approaches are used.

In static problem the boundary value problems for the system of second order differential equations with an additional integral condition are obtained and the algorithm of the numerical solution is proposed.

In the problem on stability of the hydrosystem equilibrium state the statements of the static stability of the equilibrium state, based on the sign of the minimum eigenvalue of associated spectral problem are proved. By using of operator approach the problem is transformed to the spectral problem in a Hilbert space and the properties of its operator matrices are studied. It is proved that this problem has a discrete spectrum consisting of two branches of eigenvalues, with a limit point at $+\infty$ and the boundary of the stability of the hydrosystem is found.

In the eigenoscillations problem by using of auxiliary boundary value problems a corresponding spectral problem is studied; the theorem on the properties of the spectrum and statement on the dynamic stability and instability are proved.

In this paper an initial-boundary value problem for small movements of hydrosystem are formulated. It is proved that if the initial data of the problem satisfy certain smoothness conditions, then unique strong solution of this problem exists, as well as solution of associated Cauchy problem for differential operator equation in corresponding Hilbert space.

Keywords: *ideal incompressible fluid, low gravity, equilibrium state, oscillations, operator approach, Hilbert space, initial-boundary value problem, spectral problem, solvability, strong solution, instability*

Введение

В последние несколько лет в работах авторов изучались различные аспекты поведения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей прямоугольный канал (плоская задача) либо цилиндрический сосуд (осесимметричная задача), в днище которого имеются отверстия и потому из этих отверстий свисают капли, удерживаемые в состоянии покоя капиллярными (поверхностными) силами. В данной работе подводится итог исследований по этому кругу вопросов. Это задачи статики, устойчивости, собственных колебаний и малых движений гидросистемы.

Рассматриваются варианты, когда верхняя свободная поверхность жидкости горизонтальна (угол смачивания равен прямому) либо криволинейна и когда количество отверстий (свисающих капель) — одно либо несколько.

При изучении проблемы используются методы теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, методы вариационного исчисления и др. Изложение материала проводится без доказательств с указанием ссылок на работы авторов, где эти вопросы рассмотрены подробно.

Данная работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00066), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

1. Задачи статики

1.1. **Простейшая проблема с одной свисающей каплей.** Эта задача изучена в [1].

Рассмотрим круговой цилиндрический сосуд радиуса R с образующими, направленными вертикально вверх. В днище сосуда имеется круговое отверстие радиуса r_0. Будем считать, что сосуд частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ и общим объемом V. На данную гидросистему действует однородное гравитационное поле, направленное вертикально вниз и имеющее ускорение $\vec{g}$. Полагаем также, что система находится в условиях, близких к невесомости, когда следует учитывать действие капиллярных (поверхностных) сил (см. [5]–[7]).

Будем считать, что в состоянии равновесия жидкость занимает область $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, где $\Omega_0 = \Gamma \times (0, h)$, $0 < h < h_0 := V/(\pi R^2)$, — подобласть, отвечающая части жидкости внутри сосуда, Γ — поперечное сечение, а Ω_1 — подобласть, отвечающая капле, вышедшей из отверстия и свисающей с днища сосуда. Обозначим верхнюю свободную поверхность жидкости через Γ_0 и будем считать, что угол смачивания δ на границе контакта поверхности Γ_0 с твердой стенкой S сосуда равен прямому, т. е. $\delta = \pi/2$. Тогда поверхность Γ_0 будет горизонтальной и $|\Gamma_0| = \pi R^2$. Свободную поверхность капли обозначим через Γ_1, она подлежит определению в процессе решения задачи статики.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром O, расположенным на центре днища сосуда. Тогда имеем $\vec{g} = -g\vec{k}$, где g — величина ускорения гравитационного поля, а $\vec{k}$ — орт оси Oz. Считаем также для простоты, что внешнее постоянное давление $p_a \equiv 0$.

Введем в качестве характеристического размера задачи радиус R цилиндра и все дальнейшие выкладки будем проводить в безразмерных переменных. Пусть функции

$$r = r(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le s_0 \tag{1.1}$$

задают в параметрической форме уравнение образующей равновесной равновесной поверхности Γ_1, где в качестве параметра s выбрана длина дуги вдоль кривой, отсчитываемая от оси симметрии. Тогда для функций (1.1) возникает задача Коши (см. [1]) для системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, учитывающих очевидные начальные условия:

$$z'' = -r'(b_0(z-h) + z'/r), \quad z(0) = z_0 < 0, \quad z'(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$r'' = z'(b_0(z-h) + z'/r), \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1. \tag{1.3}$$

Здесь $b_0 = \rho g R^2/\sigma$ — число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным, а $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения.

Задача (1.2), (1.3) содержит два неизвестных параметра: h и z_0. Их следует подобрать (при заданном b_0) таким образом, чтобы были выполнены краевые соотношения

$$z(s_0) = 0, \quad r(s_0) = r_0, \quad 0 < r_0 < 1, \tag{1.4}$$

а также условие на величину объема капли:

$$\pi \int\limits_0^{s_0} [r(s)]^2 z'(s) ds = \triangle V := \pi(h_0 - h), \tag{1.5}$$

где h_0 и h — безразмерны.

Наряду с задачей (1.1)–(1.5) будем рассматривать также плоскую задачу о равновесии в канале, когда жидкость находится в кювете малой протяженности вдоль оси Oy. Тогда можно считать, что задача рассматривается в плоскости Oxz. В этом случае Γ_0 — горизонтальная прямая, а Γ_1 — кривая, симметричная относительно оси Oz.

Выберем в качестве характерного размера полуширину l канала, а профиль капли в параметрической форме будем разыскивать в виде

$$x = x(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le s_0. \tag{1.6}$$

Тогда аналогично осесимметричной проблеме приходим к задаче

$$z'' = -b_0 x'(z - h), \quad z(0) = z_0 < 0, \quad z'(0) = 0, \tag{1.7}$$

$$x'' = b_0 z'(z - h), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \tag{1.8}$$

$$z(s_0) = 0, \quad x(s_0) = x_0, \quad 0 < x_0 < 1, \quad \int\limits_0^{s_0} x(s) z'(s) ds) = (h_0 - h)/2, \tag{1.9}$$

где x_0 — полуширина отверстия в днище, $b_0 = \rho g l^2/\sigma$.

В п. 1.3 работы [1] описан метод решения задач (1.1)–(1.5) (осесимметричный случай) и (1.6)–(1.9) (плоский случай), основанный на методе итераций: сначала при выбранном h итерации по z_0 осуществляются с тем, чтобы выполнялись условия (1.4), а затем итерации по h для выполнения условия (1.5). Аналогичная процедура используется и в задаче (1.6)–(1.9), результаты расчетов приведены в п. 1.3 из [1].

1.2. **Более сложная задача о равновесии.** Эту задачу рассмотрим для плоской проблемы (см. [2]), для соответствующей осесимметричной задачи аналогичные рассмотрения проводятся таким же образом.

Будем теперь считать, что жидкость находится в канале полуширины l, а на днище имеются две свисающие капли, расположенные симметрично относительно оси канала, причем они имеют симметричные одинаковые профили. Кроме того, полагаем, что угол смачивания δ_0 на верхней поверхности Γ_0 не равен $\pi/2$, и потому она является криволинейной. Центры капель на днище обозначим через O_1 и O_2, им отвечают точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно, их полуширины равны d, $0 < 2d < l$.

Здесь следует в задаче статики разыскивать уравнения равновесной верхней кривой Γ_0, а также профили капель Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда взамен задачи (1.6)–(1.9) возникает следующая проблема. Уравнение кривой Γ_0 ищем в виде (в безразмерной форме)

$$x_0 = x_0(s), \quad z_0 = z_0(s), \quad -s_0 \le s \le s_0, \tag{1.1}$$

исходя из уравнений (см. (1.7), (1.8))

$$x_0''(s) = -z_0'(s)[b_0(z_0(s) - h) + q_0],$$
$$z_0''(s) = x_0'(s)[b_0(z_0(s) - h) + q_0]$$

и граничных условий

$$x_0(0) = 0, \;\; z_0(0) = h, \;\; (0 < h < h_0), \;\; x_0'(0) = 1, \;\; z_0'(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x_0(s_0) = 1, \;\; x_0'(s_0) = \sin\delta_0, \tag{1.3}$$

$$0 < \triangle V = (h_0 - h) - \int\limits_0^{s_0} z_0(s) x_0'(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Аналогичные формулировки для правой и соответственно левой капель (с учетом условий закрепления капель на концах) приводят к двум идентичным задачам

$$x_j''(s) = z_j'(s)[b_0(z_j(s) - h) + q_0], \tag{1.5}$$

$$z_j''(s) = -x_j'(s)[b_0(z_j(s) - h) + q_0], \quad (0 \le s \le s_j, \;\; j = 1, 2), \tag{1.6}$$

$$x_1(0) = a, \;\; x_1'(0) = 1, \;\; z_1(0) = h_1 < 0, \;\; z_1'(0) = 0, \tag{1.7}$$

$$x_2(0) = -a, \;\; x_2'(0) = 1, \;\; z_2(0) = h_1, \;\; z_2'(0) = 0, \tag{1.8}$$

$$x_1(s_1) = a + d, \;\; x_2(s_2) = -a + d, \;\; z_1(s_1) = z_2(s_2) = 0, \tag{1.9}$$

$$2\int\limits_0^{s_1} x_1(s) z_1'(s)\, ds0 = \triangle V = V_0 - V > 0. \tag{1.10}$$

Для проблемы (1.1)–(1.10) также разработан итерационный алгоритм ее решения. Сначала при $h = 0$ находим профиль равновесной дуги Γ_0 путем выбора $\widehat{q}_0 = \widehat{q}_0(\delta_0)$, для которого в конечной точке $s = s_0$ выполнены условия (1.3). Затем итерируем по параметру h_1 (см. (1.7), (1.8)) с выходом по первому условию (1.9). Итогом вычислений являются таблицы значений $\widehat{q}_0 = \widehat{q}_0(b_0, \delta_0)$, $b_0 > 0$, $0 < \delta_0 < \pi$, а также $h = h(b_0, \delta_0, h_0, d)$ и $h_1 = h_1(b_0, \delta_0, h_0, d)$, $h_0 > 0$, $d > 0$.

Отметим, что аналогичный алгоритм реализован для произвольного конечного числа свисающих симметричных одинаковых капель (плоская задача), а также в соответствующей пространственной проблеме (цилиндрический сосуд, осесимметричные одинаковые капли).

2. Об устойчивости равновесного состояния гидросистемы

2.1. **Вариационный подход.** Рассмотрим снова плоскую проблему и будем считать, что равновесное состояние гидросистемы определено, т. е. найдены профили свободной поверхности Γ_0, а также свисающих капель, количество которых для общности будем считать равным m.

Переходя к рассмотрению проблемы устойчивости, введем малые отклонения гидросистемы относительно состояния равновесия. Именно введем отклонения $\zeta_0(s)$, $s \in \Gamma_0$, поверхности Γ_0 вдоль внешней нормали $\vec{n}_0$ к ней, а также аналогичные отклонения $\zeta_j(s)$, $s \in \Gamma_j$, для поверхностей Γ_j, $j = \overline{1,m}$. Тогда из условия сохранения общей площади, занимаемой несжимаемой жидкостью (плоская проблема), следует, что должно выполняться условие

$$\int_{\Gamma_0} \zeta_0 \, d\Gamma_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} \zeta_j \, d\Gamma_j = 0. \qquad (2.1)$$

Как хорошо известно (см. [5], гл. 2), вопрос об устойчивости гидросистемы в окрестности состояния равновесия жидкости в условиях, близких к невесомости, связан со знаком второй вариации ее потенциальной энергии $\mathscr{U}$. В рассматриваемой проблеме вторая вариация $\delta^2\mathscr{U}$ может быть найдена из ее общего представления (см. [7], с. 206):

$$\delta^2\mathscr{U} = \sum_{j=0}^{m} \Big\{ \int_{\Gamma_j} \Big[a_j|\zeta_j|^2 + |\zeta_j'(s)|^2 \Big] d\Gamma_j + \int_{\partial\Gamma_j} \chi_j |\zeta_j|^2 ds \Big\}, \qquad (2.2)$$

$$a_j = a_j(s) := b_0 \cos(\widehat{\vec{n}_j, \vec{k}}) - (k_j(s))^2, \ k_j(s) = b_0(z_j(s) - h) + q_0, \ s \in \Gamma_j, \ j = \overline{0,m},$$

где $k_j(s)$ — кривизны дуг Γ_j. Кроме того, учитывая специфику задачи, что Γ_0 скользит вдоль вертикальных стен, а свисающие капли закреплены на $\partial\Gamma_j$, т. е. в концевых точках, приходим к краевым условиям

$$\zeta_0'(s_0) + \chi_0(s_0)\zeta_0(s_0) = 0, \ \ -\zeta_0'(-s_0) + \chi_0(-s_0)\zeta_0(-s_0) = 0, \qquad (2.3)$$

$$\chi_0(s) := \frac{z_0'(s)}{x_0'(s)} \Big[b_0(z_0(s) - h) + q_0 \Big], \quad \zeta_j(s_j) = \zeta_j(-s_j) = 0, \ \ j = \overline{1,m}. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим вопрос о минимуме функционала (2.2) при условиях (2.1), (2.3), (2.4) и условии нормировки

$$\sum_{j=0}^{m} \int_{\Gamma_j} |\zeta_j|^2 d\Gamma_j = 1. \qquad (2.5)$$

Как хорошо известно из вариационного исчисления, минимум задачи на условный экстремум квадратичного функционала (2.2) (с условиями (2.3), (2.4) и дополнительными условиями (2.1), (2.5)), а также функция $\widehat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \ldots; \zeta_m)$, реализующая этот минимум, представляют собой наименьшее собственное значение $\lambda = \lambda_*$ и соответствующую нормированную собственную функцию $\widehat{\zeta}$ спектральной задачи

$$M_0\zeta_0 + \mu = \lambda\zeta_0 \ \ (\text{на } \ \Gamma_0), \tag{2.6}$$

$$\zeta_0'(s_0) + \chi_0(s_0)\zeta_0(s_0) = 0, \ \ -\zeta_0'(-s_0) + \chi_0(-s_0)\zeta_0(-s_0) = 0, \tag{2.7}$$

$$M_j\zeta_j + \mu = \lambda\zeta_j \ \ (\text{на } \ \Gamma_j), \ \ \zeta_j(s_j) = \zeta_j(-s_j) = 0, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{2.8}$$

$$M_j\zeta_j := -\zeta_j'' + a_j(s)\zeta_j, \ \ j = \overline{0,m}, \tag{2.9}$$

рассматриваемой при условии (2.1). Здесь λ и μ — не определенные множители Лагранжа.

Отсюда приходим к следующим выводам.

1°. Если минимальное собственное значение $\lambda = \lambda_*$ задачи (2.6)–(2.9), (2.1) положительно, то равновесное состояние гидросистемы статически устойчиво.

2°. Если $\lambda_* < 0$, то равновесное состояние статически неустойчиво (жидкость прольется вниз через отверстия в днище).

3°. Границей области устойчивости является такая совокупность заданных параметров гидросистемы, для которой выполнено условие $\lambda_* = 0$.

Утверждения 1°–3° называют спектральным признаком статической устойчивости гидросистемы.

2.2. **Операторный подход к проблеме устойчивости.** Этот подход подробно описан в п. 2.2 работы [2]. Поэтому далее приведем без доказательства этапы этого исследования.

Рассмотрим спектральную проблему (2.6)–(2.9), (2.1) как задачу на собственные значения некоторого неограниченного линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве. С этой целью, опираясь на (2.5) и (2.1), введем комплексное гильбертово пространство

$$L_2(\Gamma) := \bigoplus_{j=0}^{m} L_2(\Gamma_j) \tag{2.1}$$

наборов элементов (столбцов) $\widehat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \ldots; \zeta_m)^\tau$ с квадратом нормы

$$\|\widehat{\zeta}\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{\Gamma_j} |\zeta_j|^2 d\Gamma_j =: \sum_{j=0}^{m} \|\zeta_j\|^2_{L_2(\Gamma_j)} \tag{2.2}$$

и соответствующим скалярным произведением. Введем также его подпространство $L_{2,\Gamma}$ тех элементов из $L_2(\Gamma)$, для которых выполнено условие (2.1), т. е. элементов, ортогональных к одномерному подпространству, натянутому на единичную функцию

$$1_\Gamma := (1_{\Gamma_0}; 1_{\Gamma_1}; \ldots; 1_{\Gamma_m})^\tau.$$

Введем еще подпространство

$$L_{2,\Gamma_0} := \Big\{\eta_0 \in L_2(\Gamma_0) : \int\limits_{\Gamma_0} \eta_0 \, d\Gamma_0 = (\eta_0, 1_{\Gamma_0})_{L_2(\Gamma_0)} = 0\Big\} \tag{2.3}$$

с соответствующим скалярным произведением.

В системе соотношений (2.6)–(2.9) можно исключить параметр μ, введя оператор усреднения по Γ_0:

$$K_0\zeta_0 := |\Gamma_0|^{-1} \int\limits_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0. \tag{2.4}$$

Тогда из (2.6)–(2.9) возникает спектральная задача, которая при $m = 2$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} P_0M_0 & 0 & 0 \\ -K_0M_0 & M_1 & 0 \\ -K_0M_0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ -K_0 & I_1 & 0 \\ -K_0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $P_0 := I_0 - K_0 : L_2(\Gamma_0) \to L_{2,\Gamma_0}$ — ортопроектор.

Из уравнений статики для Γ_0 следует, что эта поверхность не изменяет своей формы при ее возмущениях сдвига по вертикали. Такие возмущения для криволинейной Γ_0 описываются функциями вида $cx_0'(s)$. Опираясь на этот факт, представим общее возмущение $\widehat{\zeta}$ свободной поверхности $\Gamma = \bigcup\limits_{j=0}^{2} \Gamma_j$ в виде суммы возмущений, отвечающих сдвиговому возмущению поверхности Γ_0 и общему возмущению лишь одной поверхности Γ_j, ($j = 1, 2; m = 2$). Кроме того, наряду со сдвиговыми возмущениями на Γ_0, учтем также возмущения, сохраняющие общую площадь жидкости при неподвижных границах Γ_j, $j = 1, 2$. Тогда

$$\zeta_0 = \eta_0 + \sum_{j=1}^{2} \zeta_{0j} \, x_0'(s), \quad \int\limits_{\Gamma_0} \eta_0 d\Gamma_0 = 0, \tag{2.6}$$

где ζ_{0j} — постоянные. Отсюда

$$\zeta_{0j} = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_j} \zeta_j \, d\Gamma_j =: -K_j\zeta_j, \quad \zeta_j \in L_2(\Gamma_j), \quad j = 1, 2. \tag{2.7}$$

Используя еще свойство (см. [2], лемма 2.1)

$$M_0 x_0'(s) = b_0, \quad x_0''(s_0) + \chi(s_0)x_0'(s_0) = 0, \ \ -x_0''(-s_0) + \chi(-s_0)x_0'(-s_0) = 0, \tag{2.8}$$

приходим к выводу, что

$$\mu = \Big(\sum_{j=1}^{2} \zeta_{0j}\Big)(2\lambda|\Gamma_0|^{-1} - b_0) - K_0(M_0\eta_0). \tag{2.9}$$

Тогда задача (2.5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ -K_0M_0 & B_1 + b_0K_1 & b_0K_2 \\ -K_0M_0 & b_0K_1 & B_2 + b_0K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} I_0 & (2|\Gamma_0|^{-1} - x_0'(s))K_1 & (2|\Gamma_0|^{-1} - x_0'(s))K_2 \\ 0 & I_1 + 2|\Gamma_0|^{-1}K_1 & 2|\Gamma_0|^{-1}K_2 \\ 0 & 2|\Gamma_0|^{-1}K_1 & I_2 + 2|\Gamma_0|^{-1}K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$B_0 := P_0M_0P_0, \ \ \mathscr{D}(B_0) = \{\eta_0 \in L_{2,\Gamma_0} \cap H^2(\Gamma_0) : \eta_0'(s_0) + \chi_0(s_0)\eta_0(s_0) = 0,$$

$$-\eta_0'(-s_0) + \chi_0(-s_0)\eta_0(-s_0) = 0\},$$

$$B_j := M_j, \ \ \mathscr{D}(B_j) = \{\zeta_j \in H^2(\Gamma_j) : \zeta_j(s_j) = \zeta_j(-s_j) = 0\}, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, задача об устойчивости исследуемой гидросистемы приведена к задаче на собственные значения (2.10). Здесь слева стоит неограниченный оператор, представленный в виде матрицы с неограниченными операторными коэффициентами. Областью определения этого оператора является множество

$$\mathscr{D}(B_0) \oplus \mathscr{D}(B_1) \oplus \mathscr{D}(B_2) \subset L_{2,\Gamma_0} \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2).$$

Оказывается (см. [2]), что эта операторная матрица представляет собой оператор потенциальной энергии исследуемой гидросистемы: ее квадратичная форма на элементах $(\zeta_0; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$ равна удвоенной потенциальной энергии малых отклонений гидросистемы от состояния равновесия. Особенность этой матрицы состоит в том, что она имеет треугольный блочный вид, и это позволяет определить тот класс возмущений свободной поверхности, на котором гидросистема теряет устойчивость. Отметим еще, что задача существенно упрощается, если угол смачивания δ_0 на верхней поверхности Γ_0 равен $\pi/2$, и потому Γ_0 — плоская горизонтальная поверхность. В этом случае проблема (2.10) распадается на две независимые спектральные задачи.

В общей ситуации, когда $\delta_0 \neq \pi/2$ свойства операторных коэффициентов в (2.10) таковы (см. [2]).

1°. Операторы K_0, K_1 и K_2 являются компактными неотрицательными операторами.

2°. Оператор B_0 является ограниченным снизу самосопряженным оператором с дискретным спектром; такими же свойствами обладают операторы B_j, $(j = 1, 2)$.

3°. Оператор

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} : L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) =: \widetilde{L}_2$$

неотрицателен.

Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 1. *Спектр задачи* (2.10) *с горизонтальной* Γ_0 *является дискретным с предельной точкой* $\lambda = +\infty$. *Он является объединением спектров оператора* B_0 *и задачи*

$$\begin{pmatrix} B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I_1 + K_1 & K_2 \\ K_1 & I_2 + K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.11)$$

Ветви $\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *отвечают возмущения нулевого объема (площади) в окрестности* Γ_0 *при неподвижных границах* Γ_1 *и* Γ_2, *а ветви собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (2.11) *— сдвиговые возмущения поверхности* Γ_0, *порожденные возмущениями общего вида поверхностей* Γ_1 *и* Γ_2.

Границей области устойчивости исследуемой гидросистемы является такой набор ее исходных параметров, при которых минимальное собственное значение оператора

$$\widetilde{\mathscr{B}} + b_0 \widetilde{\mathscr{K}} := \begin{pmatrix} B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

равно нулю. □

Это же утверждение справедливо и в случае, когда Γ_0 криволинейна $(0 < \delta_0 < \pi)$. При этом устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях, когда верхняя граница Γ_0 перемещается как единое целое вдоль вертикальной оси.

3. О собственных колебаниях гидросистемы

3.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим теперь проблему малых собственных колебаний гидросистемы: жидкость в канале с вертикальными стенками и двумя свисающими с днища каплями (плоский случай). Можно показать, что эта задача сводится к нахождению потенциала малых перемещений жидкости $\Phi = \Phi(t, x)$, $x \in \Omega$, связанного с полем скоростей $\vec{u}$ жидкости соотношением

$$\vec{u}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla\Phi(t, x)\Big).$$

Собственными колебаниями называют такие решения начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы, для которых

$$\Phi(t, x) = \exp(i\omega t)\Phi(x), \quad x \in \Omega,$$

где ω — неизвестная частота колебаний, а $\Phi(x)$ — амплитудная функция, описывающая форму колебаний.

В принятых выше безразмерных переменных для нахождения функции $\Phi(x)$ возникает следующая спектральная задача (она выписана по аналогии с близкой задачей из [7], с. 293):

$$\Delta\Phi = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \tag{3.1}$$

$$M_0\zeta_0 + \mu = \lambda\Phi \ \ (\text{на } \Gamma_0), \quad \zeta_0 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_0}\Big|_{\Gamma_0}, \quad \lambda = \rho\omega^2 l^3\sigma^{-1}, \tag{3.2}$$

$$M_1\zeta_1 + \mu = \lambda\Phi \ \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \zeta_1 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_1}, \tag{3.3}$$

$$M_2\zeta_2 + \mu = \lambda\Phi \ \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \zeta_2 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\Big|_{\Gamma_2}. \tag{3.4}$$

Здесь μ — неизвестная заранее константа, λ — квадрат безразмерной частоты собственных колебаний, остальные обозначения — те же, что и в (2.6)–(2.9).

В динамической проблеме (3.1)–(3.4), как и ранее в (2.6)–(2.9), можно исключить параметр μ с помощью оператора K_0 из (2.4). Имеем

$$K_0M_0\zeta_0 + \mu = \lambda K_0(\Phi|_{\Gamma_0}),$$

и тогда из (3.1)–(3.4) приходим к спектральной проблеме

$$\begin{pmatrix} P_0M_0 & 0 & 0 \\ -K_0M_0 & M_1 & 0 \\ -K_0M_0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Phi|_{\Gamma_0} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_1} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_2} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

аналогичному соотношению (2.5). Здесь снова стоит операторная матрица потенциальной энергии исследуемой гидросистемы, а справа, как выясняется, — операторная матрица кинетической энергии этой системы.

3.2. **Вспомогательные краевые задачи и их операторы.** Переходя к рассмотрению спектральной задачи (3.1)–(3.4), отметим, что необходимым условием ее разрешимости является условие

$$\int\limits_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \tag{3.1}$$

т. е. условие (2.1) при $m = 2$. Опираясь на (3.1), рассмотрим три вспомогательные задачи Неймана, позволяющие выразить правую часть в (3.5) в виде действия операторной матрицы на искомый столбец $\widehat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$ либо аналогичный столбец $(\eta_0; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$, как это было в (2.10).

Именно, представим решение задачи (3.1)–(3.4) в виде

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \tag{3.2}$$

где слагаемые являются решениями следующих вспомогательных задач.

1°. *Задача о колебаниях границы* Γ_0 *при неподвижных границах* Γ_1 *и* Γ_2*:*

$$\Delta\Phi_0 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \ \ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \eta_0 \ \ (\text{на } \Gamma_0), \ \ \int\limits_{\Gamma_0} \eta_0 d\Gamma_0 = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_2), \ \ \ \int\limits_{\Gamma_0} \Phi_0 d\Gamma_0 = 0. \tag{3.3}$$

2°. *Задача о сдвиговых колебаниях границы* Γ_0 *при общем возмущении границы* Γ_1 *и неподвижной границе* Γ_2*:*

$$\Delta\Phi_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \zeta_{01} x_0'(s) \ \ (\text{на } \Gamma_0),$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \zeta_1 \ \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_2), \ \ \int\limits_{\Gamma_0} \Phi_1 d\Gamma_0 + \int\limits_{\Gamma_1} \Phi_1 d\Gamma_1 = 0, \tag{3.4}$$

где $\zeta_{01} = -K_1\zeta_1$, и потому выполнено необходимое условие разрешимости этой задачи.

3°. *Задача о сдвиговых колебаниях границы* Γ_0 *при общем возмущении границы* Γ_2 *и неподвижной границе* Γ_1*:*

$$\Delta\Phi_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \zeta_{02} x_0'(s) \ \ (\text{на } \Gamma_0),$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \zeta_2 \ \ (\text{на } \Gamma_2), \ \ \int\limits_{\Gamma_0} \Phi_2 d\Gamma_0 + \int\limits_{\Gamma_2} \Phi_2 d\Gamma_2 = 0, \tag{3.5}$$

где $\zeta_{02} = -K_2\zeta_2$, и потому выполнено необходимое условие разрешимости этой задачи.

Каждая из задач (3.3)–(3.5) является задачей Неймана для уравнения Лапласа. Если выполнены условия

$$\eta_0 \in L_{2,\Gamma_0}, \quad \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1), \quad \zeta_2 \in L_2(\Gamma_2), \tag{3.6}$$

то в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ существуют единственные обобщенные решения этих задач, принадлежащие подпространству гармонических функций из $H^1(\Omega)$, и можно считать, что

$$\Phi_0 = V_0\eta_0, \quad \Phi_1 = V_1\zeta_1, \quad \Phi_2 = V_2\zeta_2, \tag{3.7}$$

где V_j, $(j = 0, 1, 2)$ — соответствующие разрешающие операторы этих задач. Тогда в силу (3.2) потенциал Φ допускает представление

$$\Phi = V_0\eta_0 + V_1\zeta_1 + V_2\zeta_2 \in H^1(\Omega), \tag{3.8}$$

и потому (по теореме Гальярдо, см. [8]) имеем

$$\begin{aligned} \Phi|_{\Gamma_0} =& \gamma_0 V_0\eta_0 + \gamma_0 V_1\zeta_1 + \gamma_0 V_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \\ \Phi|_{\Gamma_1} =& \gamma_1 V_0\eta_0 + \gamma_1 V_1\zeta_1 + \gamma_1 V_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \\ \Phi|_{\Gamma_2} =& \gamma_2 V_0\eta_0 + \gamma_2 V_1\zeta_1 + \gamma_2 V_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где γ_j, $j = 0, 1, 2$, — соответствующие операторы следа.

Формулы (3.9) позволяют, как и в п. 2, перейти от задачи (3.5) к спектральной задаче

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ -K_0M_0 & B_1 + b_0K_1 & b_0K_2 \\ -K_0M_0 & b_0K_1 & B_2 + b_0K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &A_{00} := P_0\gamma_0V_0P_0, \quad A_{01} := P_0\gamma_0V_1, \quad A_{02} := P_0\gamma_0V_2, \\ &A_{10} := \gamma_1V_0 - K_0\gamma_0V_0, \quad A_{11} := \gamma_1V_1 - K_0\gamma_0V_1, \quad A_{12} := \gamma_1V_2 - K_0\gamma_0V_2, \\ &A_{20} := \gamma_2V_0 - K_0\gamma_0V_0, \quad A_{21} := \gamma_2V_1 - K_0\gamma_0V_1, \quad A_{22} := \gamma_2V_2 - K_0\gamma_0V_2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

а операторы слева в (3.10) — те же, что и в проблеме устойчивости (2.10).

3.3. **Свойства решений спектральной задачи.** Оказывается, матрица $\mathscr{A} = (A_{jk})_{j,k=0}^{2}$ в (3.10) имеет отчетливый физический смысл: это матрица кинетической энергии гидросистемы, так как ее квадратичная форма на элементах $(\eta_0;\zeta_1;\zeta_2)^\tau$ равна удвоенной кинетической энергии системы. Поэтому она представляет собой положительный компактный оператор, действующий в пространстве

$$\check{L}_2 := L_{2,\Gamma_0} \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2). \tag{3.1}$$

Таким образом, задача о собственных колебаниях гидросистемы приведена к спектральной проблеме

$$\mathscr{B}\check{\zeta} = \lambda\mathscr{A}\check{\zeta},\ \check{\zeta} := (\eta_0;\zeta_1;\zeta_2)^\tau \in \mathscr{D}(\mathscr{B}) \subset \check{L}_2, \tag{3.2}$$

где $\mathscr{B}$ — операторная матрица потенциальной энергии слева в (3.10), свойства которой уже были изучены в п. 2.

Теорема 2. *Задача* (3.2) *о собственных колебаниях гидросистемы имеет дискретный вещественный спектр с предельной точкой* $\lambda = \infty$. *Если собственные значения* $\lambda_k(\mathscr{B})$ *оператора* $\mathscr{B}$ *обладают свойствами*

$$-\infty < \lambda_1(\mathscr{B}) \leq \ldots \leq \lambda_\varkappa(\mathscr{B}) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(\mathscr{B}) = \ldots = \lambda_{\varkappa+q}(\mathscr{B}) < \lambda_{\varkappa+q+1}(\mathscr{B}) \leq \ldots\,, \tag{3.3}$$

то собственные значения $\lambda_k := \lambda_k(\mathscr{B};\mathscr{A})$ *задачи* (3.2) *удовлетворяют этим же неравенствам*

$$-\infty < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_\varkappa < 0 = \lambda_{\varkappa+1} = \ldots = \lambda_{\varkappa+q} < \lambda_{\varkappa+q+1} \leq \ldots\,. \tag{3.4}$$

□

Следствием этой теоремы является такое утверждение.

Теорема 3 (о динамической устойчивости и неустойчивости системы)**.** 1°. *Если минимальное собственное значение* $\lambda_1(\mathscr{B})$ *оператора потенциальной энергии* $\mathscr{B}$ *положительно, то исследуемая гидросистема динамически устойчива.*

2°. *Если* $\lambda_1(\mathscr{B}) < 0$, *то гидросистема динамически неустойчива, причем устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях поверхности* Γ_0.

3°. *Границе области динамической устойчивости соответствует условие* (2.12)*:*

$$\lambda_* := \lambda_{\min}(\mathscr{B} + b_0\mathscr{K}) = 0. \tag{3.5}$$

□

Утверждения данной теоремы называют спектральным признаком динамической устойчивости гидросистемы.

4. О разрешимости проблемы малых колебаний системы

Эта задача разобрана в [3, 4].

4.1. О постановке исходной начально-краевой задачи. Рассмотрим теперь более детально начально-краевую задачу о малых движениях исследуемой гидросистемы (плоский случай).

Пусть $\vec{w}(t,x)$ — поле малых перемещений жидкости, $p(t,x)$ — отклонение поля давлений от равновесного поля давлений, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил, наложенных на гравитационное поле. Тогда линеаризованные уравнения Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости принимают вид

$$\rho\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + \nabla p = \rho\vec{f}, \quad \mathrm{div}\vec{w} = 0 \ \ (\text{в } \Omega). \tag{4.1}$$

На твердой стенке S должно выполняться условие непротекания

$$w_n := \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } S)\,. \tag{4.2}$$

Вводя еще отклонение по нормали, запишем условие сохранения объема:

$$\vec{w}\cdot\vec{n}_j =: \zeta_j \ \ (\text{на } \Gamma_j), \ \ j = 0,1,2, \quad \int\limits_{\Gamma_0}\zeta_0\,d\Gamma_0 + \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_j}\zeta_j\,d\Gamma_j = 0. \tag{4.3}$$

На поверхностях Γ_j должны выполняться динамические условия:

$$p|_{\Gamma_j} = -\sigma\zeta_j'' + a_j\zeta_j =: M_j\zeta_j, \quad j = 0,1,2\,, \tag{4.4}$$

а на $\partial\Gamma_j$ — краевые условия для поверхности Γ_0 и капель Γ_j :

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial\nu} + \chi_0\zeta_0 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_0), \ \ \zeta_j = 0 \ \ (\text{на } \partial\Gamma_0), \quad j = 1,2\,. \tag{4.5}$$

Здесь обозначения те же, что и в (2.6)–(2.9). Для полной постановки начально-краевой задачи необходимо еще добавить начальные условия:

$$\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial t}(0,x) = \vec{w}^1(x), \quad x\in\Omega. \tag{4.6}$$

Для исследования задачи (4.1)–(4.6) применяется метод ортогонального проектирования уравнений движения на ортогональные подпространства пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с квадратом нормы

$$\|\vec{w}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega}|\vec{w}|^2\,d\Omega. \tag{4.7}$$

Подробная процедура применения этого метода описана в [9, § 3.3]. Здесь отметим только, что искомые поля $\vec{w}(t,x)$ и $\nabla p(t,x)$ будем считать функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, и воспользуемся тем фактом, что $\vec{L}_2(\Omega)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)\,, \tag{4.8}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \Big\{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \ \ v_n = 0 \ \text{ (на } \partial\Omega)\Big\}\,,$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \Big\{\vec{u} = \nabla\Phi \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \Delta\Phi = 0 \ \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad \int\limits_{\Gamma}\Phi\,d\Gamma = 0\Big\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{\vec{w} = \nabla\Psi \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \Psi = 0 \ \text{ (на } \Gamma)\Big\}\,.$$

Тогда в (4.1) имеем

$$\begin{aligned} &\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \ \ \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega), \ \ \nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \\ &\nabla p = \nabla\varphi + \nabla\chi, \ \ \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \ \ \nabla\chi \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Проектируя уравнения движения на введенные подпространства, убеждаемся, что проекции на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ дают тривиальные соотношения, а основной проблемой является начально-краевая задача в подпространстве $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$, т. е. задача о нахождении потенциала перемещений $\Phi(t,x)$ в данной гидросистеме. Соответствующая задача о собственных колебаниях уже рассмотрена в п. 3 (см. (3.1)–(3.4)).

4.2. **О сильной разрешимости начально-краевой задачи.** Повторяя для начально-краевой задачи в подпространстве $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ те же преобразования, которые в п. 3 были проделаны для соответствующей спектральной проблемы (см. (3.1)–(3.4)), приходим к выводу, что эта проблема равносильна задаче Коши

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{A}\check{\zeta} + \sigma\mathscr{B}\check{\zeta} = \rho\mathscr{A}f, \ \ \check{\zeta} := (\eta_0, \zeta_1; \zeta_2)^{\tau}, \ \ f := (f_0; f_1; f_2)^{\tau}, \tag{4.1}$$

$$\nabla f = P_{h,S}\vec{f}, \quad \check{\zeta}(0) = \check{\zeta}^0, \quad \check{\zeta}'(0) = \check{\zeta}^1,$$

где $\check{\zeta}(t)$ — искомая функция из пространства $\check{L}_2(\Omega) = L_{2,\Gamma_0} \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2)$.

Теорема 4. *Если в задаче* (4.1) *выполнены условия*

$$\check{\zeta}^0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2}\mathscr{B}), \ \ \check{\zeta}^1 \in \mathscr{D}(|\mathscr{B}|^{1/2}), \ \ f \in C^1([0,T];\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})),$$

то существует единственное сильное решение этой задачи на отрезке $[0,T]$, *т. е. все слагаемые в уравнении* (4.1) *непрерывны по* t *со значениями в* $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{-1/2})$). □

Следствием теоремы 4.1 является такое утверждение.

Теорема 5. *Пусть в исходной задаче*(4.1)–(4.6) *выполнены условия*

$$\vec{w}^0(x) \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega); \quad w_n^0|_{\Gamma_k} \in \mathscr{D}(B_k) \cap H^{5/2}(\Gamma_k), \quad k = 0,1,2;$$
$$\vec{w}^1(x) \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad w_n^1|_{\Gamma_0} \in H^1(\Gamma_0), \quad w_n^0|_{\Gamma_k} \in H_0^1(\Gamma_k), \;\; k = 1,2;$$
$$\vec{f}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega)).$$

Тогда задача (4.1)–(4.6) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *сильное решение, т. е. в уравнении движения* (4.1) *все функции непрерывны по* t *со значениями в* $\vec{L}_2(\Omega)$*, а в граничных условиях на* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *все слагаемые непрерывны по* t *со значениями в*

$$H_\Gamma^{1/2} := (H^{1/2}(\Gamma_0) \times H_0^{1/2}(\Gamma_1) \times H_0^{1/2}(\Gamma_2)) \cap L_{2,\Gamma}.$$

□

Заключение

В работе рассмотрены задачи статики, устойчивости, собственных колебаний и малых движений идеальной несжимаемой жидкости, которая находится в сосуде с донными отверстиями в условиях, близких к невесомости. Рассмотрены случаи прямоугольного канала (плоская задача) и цилиндрического контейнера (осесимметричная задача), случаи как горизонтальной, так и криволинейной верхней части свободной поверхности.

В задаче статики получены краевые задачи для системы дифференциальных уравнений второго порядка с дополнительным интегральным условием и предложен алгоритм их численного решения. В проблеме устойчивости равновесного состояния гидросистемы доказаны утверждения о статической устойчивости равновесного состояния, основанные на знаке минимального собственного значения ассоциированной спектральной проблемы. Задача об устойчивости приведена к задаче на собственные значения в некотором гильбертовом пространстве; показано, что эта задача имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений, с предельной точкой на $+\infty$ и определяется граница области устойчивости гидросистемы.

В проблеме собственных колебаний доказана теорема о свойствах спектра задачи, а также ее следствие о динамической устойчивости и неустойчивости гидросистемы. Наконец, доказано, что если исходные данные начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то существует единственное сильное решение этой проблемы, а также ассоциированной с ней задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в соответствующем гильбертовом пространстве.

Список литературы

1. Копачевский, Н. Д., Ситшаева, З. З. О равновесии и устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде // Нелинейные колебания. — К.: ИМ НАНУ, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 58–71.

   KOPACHEVSKY, N. & SITSHAEVA, Z. (2014) On the equilibrium and stability of a capillary liquid with disconnected free surface in an open vessel. *Nonlinear Oscillations*. 17,1. p. 58–71.

2. Копачевский, Н. Д., Ситшаева, З. З. О спектральном признаке устойчивости в проблеме малых движений идеальной капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью // Украинский математический вестник. — Донецк: ИПММ, 2014. — Т. 11, № 3. — С. 365–390.

   KOPACHEVSKY, N. & SITSHAEVA, Z. (2014) On the spectral criterion of stability in the problem of small motions of an ideal capillary fluid with disconnected free surface. *Ukrainian Mathematical Bulletin*. 11,3. p. 365–390.

3. Копачевский, Н. Д., Ситшаева, З. З. О равновесной поверхности жидкости в сосуде с донными отверстиями в условиях слабой гравитации // Естественные и технические науки. — М.: Спутник+, 2015. — Т. 11. — С. 41–45.

   KOPACHEVSKY, N. & SITSHAEVA, Z. (2015) On equilibrium fluid surface in a vessel with bottom holes under low gravity conditions. *Natural and Technical Science*. 11. p. 41–45.

4. Копачевский, Н. Д., Ситшаева, З. З. О разрешимости проблемы малых колебаний жидкости с несвязной свободной поверхностью // Материалы междунар. конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна–2016". — Воронеж: Научная книга, 2016. — С. 211–214.

   KOPACHEVSKY, N. & SITSHAEVA, Z. (2016) On solvability in the problem of small oscillations of a fluid with disconnected free surface . *Proceedings of the International Conference "Voronezh Winter Mathematical School S. G. Krein—2016"*. Voronezh: Scientific Book. p. 211–214.

5. Бабский, В. Г. Гидромеханика невесомости / В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

   BABCKII, V. & KOPACHEVSKII, N. & MYSHKIS, A. & SLOBOZHANIN, L. & TYUPTSOV, A. (1976) *Low–Gravity Fluid Mechanics*. M: Nauka.

6. MYSHKIS, A. & BABCKII, V & KOPACHEVSKY, N. & SLOBOZHANIN, L. & TYUPTSOV, A. (1987) *Low–Gravity Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, etc.

7. Бабский, В. Г. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др. — М.: Наука, 1992. — 592 с.

   BABCKII, V. & ZHUKOV, M. & KOPACHEVSKII, N. & MYSHKIS, A. & SLOBOZHANIN, L. & TYUPTSOV, A. (1992) *Methods for the Solution of the Problems of Hydromechanics under the Conditions of Weightlessness*. Kiev: Naukova dumka.

8. GAGLIARDO, E. (1957) Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in “n” variabili. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. 27. p. 284–305.

9. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. & KREIN, S. & NGO ZUI KAN (1989) *Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutionary and Spectral Problems*. Moscow: Nauka.

УДК: 517.927.25

MSC2010: Primary 34L10, Secondary 34B07, 47E05

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

© В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Российская Федерация
e-mail: *RykhlovVS@yandex.ru*

Multiple completeness of the root functions of some nonregular pencils of the third order differential operators.

Rykhlov V. S.

Abstract. Three concrete examples of strongly nonregular polynomial pencils of ordinary differential operators of the third order generated on $[0, 1]$ by a linear differential expression with constant coefficients, polynomially depending on spectral parameter λ, and by two-point not semisplitting boundary conditions are considered, namely:

1) the pencil $L_0^1(\lambda)$ of the form

$$y''' - \lambda y'' + \lambda^2 y' - \lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) + y(1) = y'(0) + iy'(1) = y''(0) - y''(1) = 0;$$

2) the pencil $L_0^2(\lambda)$ of the form

$$y''' - (1+i)\lambda y'' + (2+i)\lambda^2 y' - 2\lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) - 5y(1) = y'(0) - (2+6i)y'(1) = y''(0) + 10y''(1) = 0;$$

3) the pencil $L_0^3(\lambda)$ of the form

$$y''' - (1-i)\lambda y'' + (1+2i)\lambda^2 y' - (1+3i)\lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) + 5y(1) = y'(0) + (1+2i)y'(1) = y''(0) - (3+i)y''(1) + (6-3i)\lambda y'(1) = 0.$$

Based on general theorems on multiple completeness of the root functions, obtained earlier by the author, multiple completeness of the root functions of the pencils in the space $L_2[0, 1]$ is investigated. It is found that in spite on a similar form of pencils of these examples, the multiplicity of the completeness of the root functions is completely different.

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K)

For the first example the root functions are one-fold complete in the space $L_2[0,1]$ with a possible finite defect and two-fold incomplete with infinite defect.

For the second example the root functions are two-fold complete in the space $L_2[0,1]$ with a possible finite defect and three-fold incomplete with infinite defect.

And for the third example the root functions are three-fold complete in the space $L_2[0,1]$.

Appropriate sets of vector-functions, orthogonal to derivative chains of corresponding multiplicity of the considered pencils, built by the root functions of the considered pencils, are constructed.

The method of investigating of multiple completeness of the root functions is to use a special solution of the basic differential equation depending on an arbitrary parameter vector. An important role is played by lemma on the characteristic polygons of the special solutions when as vector-parameters are taken vectors constructed on the basis of the coefficients of the boundary conditions and the roots of the characteristic polynomial.

Keywords: *pencil of ordinary differential operators, pencil of the third order, nonregular pencil, root functions, eigen- and associated functions, multiple completeness, constant coefficients of differential expression, not semisplitting boundary conditions, two-point boundary conditions*

Введение

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный пучок $L_0(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением (здесь и далее обозначения взяты из статьи [1])

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js}\in\mathbb{C}, \quad p_{n0}\neq 0 \tag{1}$$

и нормированными двухточечными краевыми условиями

$$U_i^0(y,\lambda) \equiv U_{i0}^0(y,\lambda) + U_{i1}^0(y,\lambda) := \sum_{j+s\le\varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр, a_{ijs}, $b_{ijs}\in\mathbb{C}$, $0\le\varkappa_i\le n-1$.

Суммарный порядок краевых условий (2) обозначим буквой $\varkappa$, то есть по определению $\varkappa = \varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_n$.

Далее будут использоваться известные определения собственных значений (с. з.) пучка, собственных и присоединенных функций (с. п. ф) или, кратко, корневых функций (к. ф.), производных m-цепочек ($1\le m\le n$), построенных по системе к. ф., которые можно найти, например, в [2, 3, 4].

Предположим, что множество всех с. з. пучка $L(\lambda)$ счетно. Обозначим это множество $\Lambda := \{\lambda_k\}$. Пусть $Y := \{y_k\}$ есть множество всех к. ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующих множеству Λ. Обозначим $\Lambda_0 := \Lambda\cup\{0\}$.

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L_0(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы к. ф. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $1 \le m \le n$.

Определение 1. Определенную на некотором множестве $D \supset \Lambda$ достаточно гладкую по λ функцию $g(x,\lambda)$, $x \in [0,1]$ назовем *порождающей* для системы к. ф. пучка $L_0(\lambda)$, если функции

$$\left.\frac{\partial^k g(x,\lambda)}{\partial \lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad k = \overline{0, s_\nu}, \quad \lambda_\nu \in \Lambda$$

являются к. ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующими с. з. λ_ν кратности $s_\nu + 1$.

В [1] был подробно описан новый подход к исследованию кратной полноты к. ф. сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов с не полураспадающимися краевыми условиями. Там же была изложена краткая история вопроса. Основную роль в этом новом подходе играют порождающие функции специального вида.

В настоящей статье рассматриваются три конкретных сильно нерегулярных пучка третьего порядка с не полураспадающимися краевыми условиями на предмет исследования кратной полноты их к. ф. в пространстве $L_2[0,1]$ на основе теории, изложенной в [1]. Следует отметить, что, несмотря на схожесть этих трех пучков, кратность полноты у них совершенно различна.

Рассмотрим уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Система функций $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, как известно, является фундаментальной системой решений (ф.с.р.) уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \ne 0$.

Как и в [1], введем следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned}
&H_j(\lambda) := \left(U_1^0(y_j,\lambda), \dots, U_n^0(y_j,\lambda)\right)^T, \\
&V_j(\lambda) \equiv (v_{1j}(\lambda), \dots, v_{nj}(\lambda))^T := \left(U_{10}^0(y_j,\lambda), \dots, U_{n0}^0(y_j,\lambda)\right)^T, \\
&\hat{V}_j(\lambda) = (\lambda^{-\varkappa_1} v_{1j}(\lambda), \dots, \lambda^{-\varkappa_n} v_{nj}(\lambda))^T, \\
&W_j(\lambda) \equiv (w_{1j}(\lambda), \dots, w_{nj}(\lambda))^T := e^{-\lambda\omega_j}\left(U_{11}^0(y_j,\lambda), \dots, U_{n1}^0(y_j,\lambda)\right)^T, \\
&\hat{W}_j(\lambda) = (\lambda^{-\varkappa_1} w_{1j}(\lambda), \dots, \lambda^{-\varkappa_n} w_{nj}(\lambda))^T.
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 1.

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов третьего порядка $L_0^1(\lambda)$ вида:

$$y''' - \lambda y'' + \lambda^2 y' - \lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) + y(1) = y'(0) + iy'(1) = y''(0) - y''(1) = 0.$$

Здесь $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{i\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \\ W_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Для характеристического определителя пучка $L_0^1(\lambda)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &:= \det\big(U_i^0(y_j)\big)_{ij=1}^3 = \big|H_1(\lambda), H_2(\lambda), H_3(\lambda)\big| = \\ &= \lambda^3\big|\hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \hat V_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat W_2, \hat V_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat W_3\big| = \lambda^3\big(\Delta_0 + e^{\lambda\omega_1}\Delta_1 + e^{\lambda\omega_2}\Delta_2 + e^{\lambda\omega_3}\Delta_3 + \\ &\quad + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}\Delta_{12} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}\Delta_{13} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}\Delta_{12} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\Delta_{123}\big), \end{aligned} \tag{4}$$

где на основании (3)

$$\begin{aligned} &\Delta_0 = |\hat V_1 \hat V_2 \hat V_3| = -4i, && \Delta_1 = |\hat W_1 \hat V_2 \hat V_3| = 0, \\ &\Delta_2 = |\hat V_1 \hat W_2 \hat V_3| = 0, && \Delta_3 = |\hat V_1 \hat V_2 \hat W_3| = 4, \\ &\Delta_{12} = |\hat W_1 \hat W_2 \hat V_3| = 0, && \Delta_{13} = |\hat W_1 \hat V_2 \hat W_3| = 0, \\ &\Delta_{23} = |\hat V_1 \hat W_2 \hat W_3| = 4i, && \Delta_{123} = |\hat W_1 \hat W_2 \hat W_3| = -4. \end{aligned} \tag{5}$$

С учетом этих значений из (3) получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3\big(-4i - 4e^{\lambda} + 4e^{i\lambda} + 4ie^{(1+i)\lambda}\big) =: \lambda^3\tilde\Delta^1(\lambda).$$

В левой части рис. 1 изображены характеристический многоугольник M_Δ и многоугольник M для данного примера. Эти многоугольники были введены в [1]. Чтобы не загромождать рисунки, пишем на них «i» вместо «ω_i», «ij» вместо «$\omega_i + \omega_j$», ...

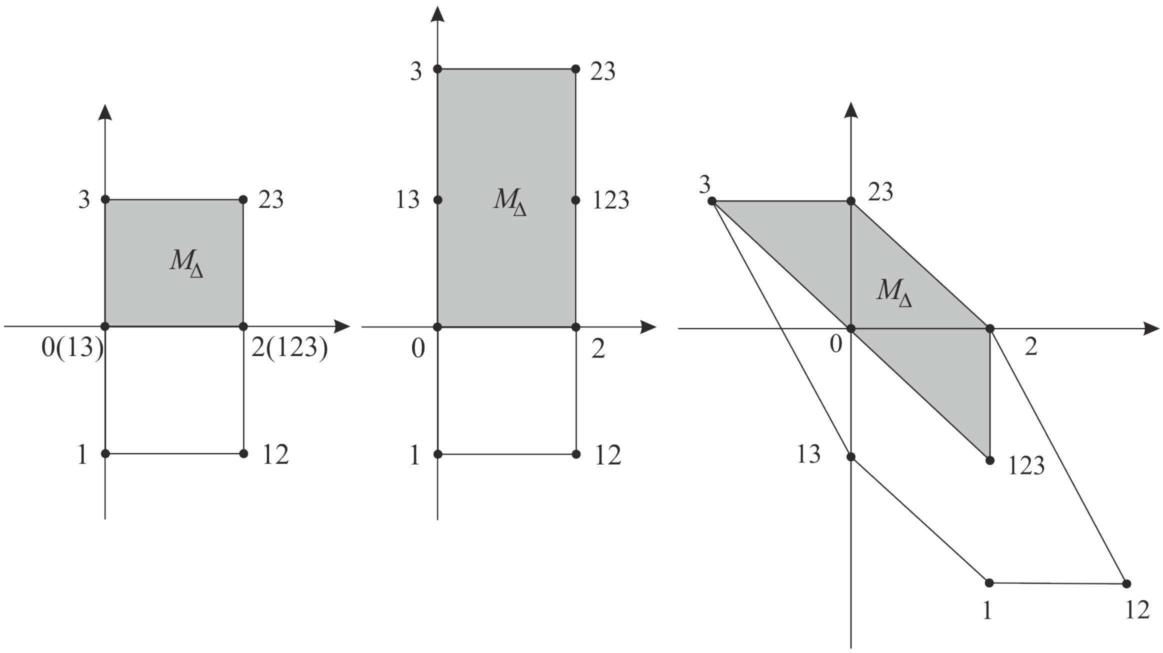

Рис. 1. Многоугольники M_Δ и M, соответственно, в примерах 1–3.

Следовательно, рассматриваемый пучок является сильно нерегулярным [1] или не нормальным [4]. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому к этому пучку не применимы теоремы о кратной полноте к. ф. из [4, 5, 6].

На основании лемм 2 и 3 из [1] нетрудно установить, что

$$V_1 \notin (\alpha), \quad V_2 \in (\alpha), \quad V_3 \in (\alpha), \quad W_1 \in (\alpha), \quad W_2 \in (\alpha), \quad W_3 \notin (\alpha),$$

где условие (α) определено в [1].

В следствии того, что

$$\operatorname{rank}(V_2, V_3, W_1, W_2) = 2 < 3 = n,$$

то воспользоваться следствием 1 из [1] о 3-кратной полноте к. ф. для рассматриваемого в этом примере пучка $L_0^1(\lambda)$ нельзя. Но так как имеется пара с одинаковым индексами $\{V_2, W_2\} \in (\alpha)$, то по теореме 2 из [1] можно заключить, что система к. ф. данного пучка 1-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Ввиду того, что $\operatorname{rank}(V_2, W_2) = 2$, то в соответствии с определением функций $y(x,\lambda;\Gamma(\lambda))$ и леммой 1 [1] имеем две линейно-независимые порождающие функции $y(x,\lambda;V_2(\lambda))$ и $y(x,\lambda;W_2(\lambda))$, для которых $V_2 \in (\alpha)$ и $W_2 \in (\alpha)$. Покажем, что других порождающих функций $y(x,\lambda;\Gamma(\lambda))$ с $\Gamma \in (\alpha)$, линейно-независимых от $y(x,\lambda;V_2(\lambda))$ и $y(x,\lambda;W_2(\lambda))$, нет.

Так как $\mathrm{rank}(V_2, W_2, W_3) = 3$, то можно искать вектор-параметр Γ со свойством $\Gamma \in (\alpha)$ в виде

$$\Gamma(\lambda) = c_1 V_2(\lambda) + c_2 W_2(\lambda) + c_3 W_3(\lambda), \tag{6}$$

где c_1, c_2, c_3 — пока неизвестные числа.

Запишем функцию $y(x, \lambda; \Gamma(\lambda))$ подробнее, воспользовавшись соответствующей формулой из [1]:

$$y(x,\lambda;\Gamma(\lambda)) = \lambda^3 \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) \\ -\hat\Gamma & \hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1 & \hat V_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat W_2 & \hat V_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat W_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3\Big(y_1(x,\lambda)\big|\hat\Gamma, \hat V_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat W_2, \hat V_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat W_3\big| + y_2(x,\lambda)\big|\hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \hat\Gamma, \hat V_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat W_3\big| +$$

$$+ y_3(x,\lambda)\big|\hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \hat V_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat W_2, \hat\Gamma\big|\Big) = \lambda^3\Big(y_1(x,\lambda)\Big(\big|\hat\Gamma\hat V_2\hat V_3\big| + e^{\lambda\omega_2}\big|\hat\Gamma\hat W_2\hat V_3\big| +$$

$$+ e^{\lambda\omega_3}\big|\hat\Gamma\hat V_2\hat W_3\big| + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}\big|\hat\Gamma\hat W_2\hat W_3\big|\Big) + y_2(x,\lambda)\Big(\big|\hat V_1\hat\Gamma\hat V_3\big| + e^{\lambda\omega_1}\big|\hat W_1\hat\Gamma\hat V_3\big| +$$

$$+ e^{\lambda\omega_3}\big|\hat V_1\hat\Gamma\hat W_3\big| + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}\big|\hat W_1\hat\Gamma\hat W_3\big|\Big) + y_3(x,\lambda)\Big(\big|\hat V_1\hat V_2\hat\Gamma\big| + e^{\lambda\omega_1}\big|\hat W_1\hat V_2\hat\Gamma\big| +$$

$$+ e^{\lambda\omega_2}\big|\hat V_1\hat W_2\hat\Gamma\big| + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}\big|\hat W_1\hat W_2\hat\Gamma\big|\Big)\Big). \tag{7}$$

Чтобы выполнялось условие $\Gamma \in (\alpha)$, нужно потребовать выполнения условий

$$\big|\hat\Gamma\hat W_2\hat V_3\big| = \big|\hat W_1\hat\Gamma\hat V_3\big| = \big|\hat W_1\hat W_2\hat\Gamma\big| = 0 \tag{8}$$

или

$$\big|\hat\Gamma\hat V_2\hat V_3\big| = \big|\hat W_1\hat\Gamma\hat V_3\big| = \big|\hat W_1\hat V_2\hat\Gamma\big| = 0. \tag{9}$$

Пусть выполняются условия (8). С учетом (6) эти условия можно записать в виде следующей алгебраической системы относительно неизвестных c_1, c_2, c_3:

$$\begin{cases} c_1\big|\hat V_2\hat W_2\hat V_3\big| + c_2\big|\hat W_2\hat W_2\hat V_3\big| + c_3\big|\hat W_3\hat W_2\hat V_3\big| & = 0, \\ c_1\big|\hat W_1\hat V_2\hat V_3\big| + c_2\big|\hat W_1\hat W_2\hat V_3\big| + c_3\big|\hat W_1\hat W_3\hat V_3\big| & = 0, \\ c_1\big|\hat W_1\hat W_2\hat V_2\big| + c_2\big|\hat W_1\hat W_2\hat W_2\big| + c_3\big|\hat W_1\hat W_2\hat W_3\big| & = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Учитывая, что в данном примере $\hat V_2 = \hat W_1$, $\hat V_3 = \hat W_2$ и выполняются соотношения (5), получим эквивалентное последней системе уравнение

$$c_3\big|\hat W_1\hat W_2\hat W_3\big| = 0.$$

А так как $\big|\hat W_1\hat W_2\hat W_3\big| \neq 0$, то в качестве решения системы (10) будем иметь: $c_3 = 0$, а c_1, c_2 — произвольные комплексные числа.

Таким образом, никаких других порождающих функций $y(x, \lambda; \Gamma(\lambda))$ с $\Gamma \in (\alpha)$ помимо $y(x, \lambda; V_2(\lambda))$ и $y(x, \lambda; W_2(\lambda))$ у рассматриваемого пучка нет.

Покажем, что система к. ф. данного пучка двухкратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект. Пусть вектор=функция (в.-ф.) $h(x) = (\bar{h}_1(x), \bar{h}_2(x))^T \in L_2^2[0,1]$ ортогональна всем 2-производным цепочкам, построенным по системе к. ф. пучка $L_0^1(\lambda)$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные рассуждениям [1, с. 81], получим:

$$\int_0^1 y(x,\lambda;V_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \qquad \int_0^1 y(x,\lambda;W_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \tag{11}$$

где $h_2(x,\lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x)$, при возможном дополнительном предположении ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^2[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.

Используя (7), легко найдем

$$y(x,\lambda;V_2(\lambda)) = \lambda^3\Big(-4e^{(1+i)\lambda}y_1(x,\lambda) + \big(4e^{i\lambda} - 4i\big)y_2(x,\lambda) + 4ie^{\lambda}y_3(x,\lambda)\Big), \tag{12}$$

$$y(x,\lambda;W_2(\lambda)) = \lambda^3\Big(4e^{i\lambda}y_1(x,\lambda) + \big(4ie^{i\lambda} - 4\big)y_2(x,\lambda) - 4iy_3(x,\lambda)\Big). \tag{13}$$

Обозначив $Y_j^2(\lambda) = \int_0^1 y_j(x,\lambda)h_2(x,\lambda)\,dx$, $j = \overline{1,3}$, из (11)–(13) получим

$$-4e^{(1+i)\lambda}Y_1^2(\lambda) + \big(4e^{i\lambda} - 4i\big)Y_2^2(\lambda) + 4ie^{\lambda}Y_3^2(\lambda) \equiv 0, \tag{14}$$

$$4e^{i\lambda}Y_1^2(\lambda) + \big(4ie^{i\lambda} - 4\big)Y_2^2(\lambda) - 4iY_3^2(\lambda) \equiv 0. \tag{15}$$

Умножая (15) на e^{λ} и складывая с (14), получим

$$\tilde{\Delta}^1(\lambda)Y_2^2(\lambda) \equiv 0.$$

А учитывая, что $\tilde{\Delta}^1(\lambda) = 0$ только при $\lambda \in \Lambda_0$, окончательно получим

$$Y_2^2(\lambda) \equiv 0. \tag{16}$$

Из (16) и (15) тогда найдем

$$e^{i\lambda}Y_1^2(\lambda) - iY_3^2(\lambda) \equiv 0. \tag{17}$$

При $\lambda = 0$ из (16) получим

$$\int_0^1 h_1(x)\,dx = 0. \tag{18}$$

С учетом этого (16) можно представить, интегрируя один раз по частям, в виде

$$\int_0^1 e^{i\lambda x}\left(\int_0^x h_1(t)\,dt - h_2(x)\right)dx \equiv 0.$$

Отсюда получим

$$h_2(x) = \int\limits_0^x h_1(t)\,dt \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1]. \tag{19}$$

Интегрируя по частям в (17) и используя (19) и (18), найдем

$$\int\limits_0^1 e^{i\lambda x}\big(h_1(x) + h_1(1-x)\big)\,dx \equiv 0,$$

что дает

$$h_1(x) = -h_1(1-x)\,dx \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1]. \tag{20}$$

Следовательно, условия (19)–(20) дают линейное многообразие всех функций $h(x)$, ортогональных всем 2-производным цепочкам, соответствующим к. ф. пучка $L_0^1(\lambda)$ и, возможно, некоторому фиксированному конечному множеству в.-ф. из $L_2^2[0,1]$. Очевидно, это линейное многообразие имеет бесконечную размерность.

Таким образом, установлено, что к. ф. пучка $L_0^1(\lambda)$ однократно полны в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом и двукратно не полны с бесконечным дефектом. Впервые этот пример был исследован несколько другим методом с таким же результатом в [7].

Пример 2

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов третьего порядка $L_0^2(\lambda)$ вида:

$$y''' - (1+i)\lambda y'' + (2+i)\lambda^2 y' - 2\lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) - 5y(1) = y'(0) - (2+6i)y'(1) = y''(0) + 10y''(1) = 0.$$

Здесь $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{2i\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix},$$
$$W_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6+2i \\ -10 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2-6i \\ 10 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 12-4i \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Для характеристического определителя пучка $L_0^2(\lambda)$ справедливо представление (аналогично (4))

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3\big(- (3+9i) + (6+18i)e^{\lambda} - (69+27i)e^{2i\lambda} - (120-90i)e^{i\lambda} + \\ + (30+540i)e^{(1+2i)\lambda} + (2400-1800i)e^{(1+i)\lambda}\big) =: \lambda^3\tilde{\Delta}^2(\lambda).$$

В средней части рис. 1 изображены M_Δ и M для данного примера.

Следовательно, рассматриваемый пучок $L_0^2(\lambda)$ является сильно нерегулярным. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому, как и в примере 1, к этому пучку не применимы теоремы о кратной полноте к. ф. из [4, 5, 6].

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, на основании лемм 2 и 3 из [1] нетрудно установить, что

$$V_1 \notin (\alpha), \quad V_2 \in (\alpha), \quad V_3 \in (\alpha), \quad W_1 \in (\alpha), \quad W_2 \in (\alpha), \quad W_3 \notin (\alpha).$$

В следствии того, что

$$\operatorname{rank}(V_2, V_3, W_1, W_2) = 2 < 3 = n,$$

то воспользоваться следствием 1 из [1] о 3-кратной полноте к. ф. для рассматриваемого в этом примере пучка $L_0^2(\lambda)$ нельзя. Но так как имеется пара с одинаковым индексами $\{V_2, W_2\} \in (\alpha)$, то по теореме 2 из [1] можно заключить, что система к. ф. данного пучка 1-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Ввиду того, что $\operatorname{rank}(V_2, W_2) = 2$, то в соответствии определением функций $y(x,\lambda;\Gamma(\lambda))$ и леммой 1 [1] получим две линейно-независимые порождающие функции $y(x,\lambda;V_2(\lambda))$ и $y(x,\lambda;W_2(\lambda))$, для которых $V_2 \in (\alpha)$ и $W_2 \in (\alpha)$. Аналогично тому, как это было сделано в примере 1, можно показать, что других порождающих функций $y(x,\lambda;\Gamma(\lambda))$ с $\Gamma \in (\alpha)$, линейно-независимых от $y(x,\lambda;V_2(\lambda))$ и $y(x,\lambda;W_2(\lambda))$, нет.

Покажем, что система к. ф. данного пучка 2-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Пусть $h(x) = (\bar{h}_1(x), \bar{h}_2(x))^T \in L_2^2[0,1]$ ортогональна всем 2-производным цепочкам, построенным по системе к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные рассуждениям [1, с. 81], получим:

$$\int\limits_0^1 y(x,\lambda;V_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad \int\limits_0^1 y(x,\lambda;W_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \tag{21}$$

где, как и перед этим, $h_2(x,\lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x)$, при возможном дополнительном предположении ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^2[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.

Используя (7), легко найдем

$$y(x,\lambda;V_2(\lambda)) = \lambda^3\Big((-360+270i)e^{(1+2i)\lambda}y_1(x,\lambda)- \\ -\big((3+9i)+(69+27i)e^{2i\lambda}+(120-90i)e^{i\lambda}\big)y_2(x,\lambda)-(9+27i)e^{\lambda}y_3(x,\lambda)\Big), \quad (22)$$

$$y(x,\lambda;W_2(\lambda)) = \lambda^3\Big((360-270i)e^{2i\lambda}y_1(x,\lambda)+ \\ +\big((6+18i)+(30+540i)e^{2i\lambda}+(2400-1800i)e^{i\lambda}\big)y_2(x,\lambda)+(9+27i)y_3(x,\lambda)\Big). \quad (23)$$

Используя уже введенные обозначения, из (21)–(23) получим

$$(-360+270i)e^{(1+2i)\lambda}Y_1^2(\lambda)-\big((3+9i)+(69+27i)e^{2i\lambda}+(120-90i)e^{i\lambda}\big)Y_2^2(\lambda)- \\ -(9+27i)e^{\lambda}Y_3^2(\lambda)\equiv 0, \quad (24)$$

$$(360-270i)e^{2i\lambda}Y_1^2(\lambda)+\big((6+18i)+(30+540i)e^{2i\lambda}+(2400-1800i)e^{i\lambda}\big)Y_2^2(\lambda)+ \\ +(9+27i)Y_3^2(\lambda)\equiv 0. \quad (25)$$

Умножая (25) на e^{λ} и складывая с (24), получим

$$\tilde{\Delta}^2(\lambda)Y_2^2(\lambda)\equiv 0.$$

А учитывая, что $\tilde{\Delta}^2(\lambda)=0$ только при $\lambda\in\Lambda_0$, окончательно получим

$$Y_2^2(\lambda)\equiv 0. \quad (26)$$

Из (26) и (25) тогда найдем

$$(360-270i)e^{2i\lambda}Y_1^2(\lambda)+(9+27i)Y_3^2(\lambda)\equiv 0$$

или

$$-(5+15i)e^{2i\lambda}Y_1^2(\lambda)+Y_3^2(\lambda)\equiv 0. \quad (27)$$

При $\lambda=0$ из (26) получим

$$\int_0^1 h_1(x)\,dx = 0. \quad (28)$$

С учетом этого (26) можно представить, интегрируя один раз по частям, в виде

$$\int_0^1 e^{i\lambda x}\Big(\int_0^x h_1(t)\,dt - h_2(x)\Big)\,dx\equiv 0.$$

Отсюда получим

$$h_2(x) = \int\limits_0^x h_1(t)\,dt \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1]. \tag{29}$$

Интегрируя по частям в (27) и используя (29) и (28), найдем

$$\int\limits_0^2 e^{i\lambda x} F(x)\,dx \equiv 0, \tag{30}$$

где

$$F(x) := \begin{cases} \frac{2+i}{4} h_1\left(\frac{x}{2}\right), & x \in [0,1], \\ \frac{2+i}{4} h_1\left(\frac{x}{2}\right) - (20+10i)h_1(2-x), & x \in [1,2]. \end{cases} \tag{31}$$

Из (30) следует, что

$$F(x) = 0 \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,2]$$

или

$$h_1(x) = 0, \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \tag{32}$$

$$h_1(x) - 40h_1(2-2x), \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]. \tag{33}$$

Из (33) получим

$$h_1(x) = \frac{1}{40} h_1\Big(\frac{2-x}{2}\Big) \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1],$$

что дает

$$\|h_1\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{40}\left(\int\limits_0^1 \left|h_1\left(\frac{2-x}{2}\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{40}\left(2\int\limits_{1/2}^1 |h_1(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{2}}{40}\|h_1\|_{L_2[0,1]}.$$

Следовательно, $\|h_1\|_{L_2[0,1]} = 0$, то есть $h_1(x) = 0$ п. в. $x \in [0,1]$. Таким образом, соотношение (32) выполняется автоматически и из (29) получаем $h_2(x) = 0$ при $x \in [0,1]$.

Таким образом, установлено, что к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$ двукратно полны в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Покажем, что трехкратной полноты к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ нет и имеет место бесконечный дефект.

Пусть в.-ф. $h(x) = (\bar{h}_1(x), \bar{h}_2(x), \bar{h}_3(x))^T \in L_2^3[0,1]$ ортогональна всем 3-производным цепочкам, построенным по системе к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$, и, возможно, некоторому вполне конкретному конечному множеству в.-ф. из $L_2^3[0,1]$. Повторяя предыдущие рассуждения, найдем аналогично

$$Y_2^3(\lambda) \equiv 0. \tag{34}$$

$$-(5+15i)e^{2i\lambda}Y_1^3(\lambda) + Y_3^3(\lambda) \equiv 0, \tag{35}$$

где

$$Y_j^3(\lambda) := \int\limits_0^1 e^{\omega_j \lambda x} h_3(x,\lambda)\,dx,\ \ j = \overline{1,3}, \quad h_3(x,\lambda) = h_1(x) + \lambda h_2(x) + \lambda^2 h_3(x).$$

При $\lambda = 0$ из (34) получим

$$\int\limits_0^1 h_1(x)\,dx = 0. \tag{36}$$

Далее, из (34) получим, учитывая (36),

$$0 \equiv Y_2^3(\lambda) = \lambda \int\limits_0^1 e^{\lambda x} \left(-\int\limits_0^x h_1(t)\,dt + h_2(x) \right) dx + \lambda^2 \int\limits_0^1 e^{\lambda x} h_3(x)\,dx. \tag{37}$$

Сократив предварительно на λ и положив $\lambda = 0$, получим

$$\int\limits_0^1 \left(h_2(x) - \int\limits_0^x h_1(t)\,dt \right) dx = 0. \tag{38}$$

Учитывая это соотношение, из (37) найдем, интегрируя по частям,

$$\lambda^2 \int\limits_0^1 e^{\lambda x} \left(h_3(x) - \int\limits_0^x h_2(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^t h_1(\tau)\,d\tau\,dt \right) dx \equiv 0.$$

Следовательно,

$$h_3(x) = \int\limits_0^x h_2(t)\,dt - \int\limits_0^x \int\limits_0^t h_1(\tau)\,d\tau\,dt. \tag{39}$$

Учитывая это соотношение в (35) и проделывая соответствующие преобразования, получим

$$\int\limits_0^2 e^{i\lambda x} H(x)\,dx \equiv 0, \tag{40}$$

где

$$H(x) := \begin{cases} -\frac{5i}{4}\tilde{h}_1\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2+i}{4}h_2\left(\frac{x}{2}\right), & \text{п. в.} \quad x \in [0,1], \\ -\frac{5i}{4}\tilde{h}_1\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2+i}{4}h_2\left(\frac{x}{2}\right) + \\ +(30-10i)\tilde{h}_1(2-x) - (20+10i)h_2(2-x), & \text{п. в.} \quad x \in [1,2]. \end{cases}$$

Здесь обозначено $\tilde{h}_1(x) = \int_0^x h_1(t)\,dt$.

Из (40) следует, что

$$H(x) = 0 \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,2]$$

или

$$\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1-2i}{5}h_2(x) = 0, \text{ п. в. } x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \tag{41}$$

$$\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1-2i}{5}h_2(x) + 8(1+3i)\tilde{h}_1(2-2x) + 8(1-2i)h_2(2-2x) = 0, \text{ п. в. } x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]. \tag{42}$$

Очевидно, при условиях (36) и (38) эти соотношения эквивалентны ортогональности в.-ф. h 3-производным цепочкам, построенным по к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$.

Покажем, что уравнение (41)–(42) при условиях (36) и (38) имеет бесчисленное множество линейно-независимых решений.

Перепишем (42) в виде

$$h_2(2-2x) = \tfrac{1}{40}h_2(x) + (1-i)\tilde{h}_1(2-2x) - \tfrac{1+2i}{40}\tilde{h}_1(x) \text{ п. в. } x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].$$

Сделав замену $2 - 2x = x_1$, получим

$$h_2(x) = \tfrac{1}{40}h_2(1-\tfrac{x}{2}) + K(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1], \tag{43}$$

где обозначено

$$K(x) = (1-i)\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1+2i}{40}\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}), \quad x \in [0,1]. \tag{44}$$

Введем оператор $A \in L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x) := \tfrac{1}{40}f(1-\tfrac{x}{2}), \quad x \in [0,1]. \tag{45}$$

Очевидно,

$$\|A\| \leq \tfrac{\sqrt{2}}{40} < 1$$

и, следовательно, существует ограниченный обратный оператор

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots. \tag{46}$$

Таким образом, с использованием оператора A уравнение (43) можно записать в виде

$$h_2(x) = (Ah_2)(x) + K(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1], \tag{47}$$

откуда с учетом (46) получим

$$h_2(x) = ((E-A)^{-1}K)(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in [0,1]. \tag{48}$$

Перепишем (41) в виде

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) = h_2(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]. \tag{49}$$

Учитывая здесь (48), получим

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) = ((E-A)^{-1}K)(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

или

$$(1+2i)((E-A)\tilde{h}_1)(x) = K(x) \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

С учетом (44) отсюда найдем

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) - (1+2i)\tfrac{1}{40}\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}) = (1-i)\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1+2i}{40}\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}) \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

или

$$\tilde{h}_1(x) = 0, \quad \text{п. в.} \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Итак, задаем произвольную функцию $\tilde{h}_1 \in W_2^1[0,1]$ такую, что

$$\tilde{h}_1(x) = 0, \ \text{п. в.} \ x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad \tilde{h}_1(1) = 0, \quad \int\limits_{1/2}^{1} \tilde{h}_1(x)\,dx = 0. \tag{50}$$

Ясно, что это бесконечномерное семейство функций.

Далее, определим $K(x)$ по формуле (44). Тогда можно определить $h_2(x)$ по формуле (48) или

$$((E-A)h_2)(x) = K(x), \quad x \in [0,1].$$

Отсюда, используя (45) и (44), получим

$$\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1-2x}{5}h_2(x) + 8(1+3i)\tilde{h}_1(2-2x) + 8(1-2i)h_2(2-2x) = 0, \ \text{п. в.} \ x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],$$

то есть (42) выполняется.

Из (50) получим

$$3i\tilde{h}_1(x) = \left(\tfrac{1+2i}{40} - \tfrac{1+2i}{40}\right)\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

или

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1+2i}{40}\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}) = (1-i)\tilde{h}_1(x) - \tfrac{1+2i}{40}\tilde{h}_1(1-\tfrac{x}{2}), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

или

$$(1+2i)((E-A)\tilde{h}_1)(x) = K(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

или

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) = ((E-A)^{-1}K)(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

или

$$(1+2i)\tilde{h}_1(x) = h_2(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

или

$$\tilde{h}_1(x) = \tfrac{1-2i}{5} h_2(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

а это значит, что и (41) также выполняется.

Далее, (36) выполняется в силу выбора $\tilde{h}_1(x)$ с условием (50).

Проверим выполнение условия (38). Это условие можно записать в виде:

$$\int_0^1 h_2(x)\,dx = \int_0^1 \tilde{h}_1(x)\,dx = 0. \tag{51}$$

Пусть $\tilde{h}_1$ и h_2 есть построенные решения уравнения (41)–(42), которое является теперь тождеством. При этом выполняются предположения (50).

Из (41) сразу следует, что

$$h_2(x) = 0, \quad x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Таким образом, с учетом (50) и (51), требуется проверить выполнения условия

$$\int_{1/2}^1 h_2(x)\,dx = 0. \tag{52}$$

Интегрируя тождество (42) по x от $1/2$ до 1, получим

$$\int_{1/2}^1 h_2(x)\,dx = \tfrac{19-22i}{19} \int_{1/2}^1 \tilde{h}_1(x)\,dx = 0,$$

то есть (52) выполняется.

Построим теперь функции

$$h_1(x) = \tilde{h}_1'(x), \quad h_3 = \int_0^x h_2(t)\,dt - \int_0^x \tilde{h}_1(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

и в.-ф. $h = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3)^T$. Ясно, что $h \in L_2^3[0,1]$.

Из проведенных рассуждений видно, что бесконечномерное множество построенных в.-ф. ортогонально 3-производным цепочкам, соответствующим к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$. Это показывает, что система к. ф. пучка $L_0^2(\lambda)$ 3-кратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект.

Пример 3

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов третьего порядка $L_0^3(\lambda)$ вида:

$$y''' - (1-i)\lambda y'' + (1+2i)\lambda^2 y' - (1+3i)\lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) + 5y(1) = y'(0) + (1+2i)y'(1) = y''(0) - (3+i)y''(1) + (6-3i)\lambda y'(1) = 0.$$

Здесь $\omega_1 = 1-2i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = i-1$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{(1-2i)\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{(i-1)\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ -3-4i \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \\ -2i \end{pmatrix},$$
$$W_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \\ 3-4i \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \\ -5+15i \end{pmatrix}.$$

Для характеристического определителя пучка $L_0^3(\lambda)$ справедливо представление (аналогично (4))

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3\big((14-2i) + (48+6i)e^{\lambda} - (2-16i)e^{(i-1)\lambda} - (172+54i)e^{i\lambda} - \\ - (10+570i)e^{(1-i)\lambda}\big).$$

В правой части Рис. 1 изображены M_Δ и M для данного примера.

Следовательно, рассматриваемый пучок $L_0^3(\lambda)$ является сильно нерегулярным. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому к этому пучку не применимы теоремы о кратной полноте к. ф. из [4], [5], [6].

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущих примерах, на основании лемм 2 и 3 из [1] нетрудно установить, что

$$V_1 \notin (\alpha), \quad V_2 \in (\alpha), \quad V_3 \in (\alpha), \quad W_1 \in (\alpha), \quad W_2 \in (\alpha), \quad W_3 \in (\alpha).$$

Так как

$$\operatorname{rank}(V_2, V_3, W_1, W_2, W_3) = 3 = n,$$

то, воспользовавшись следствием 1 из [1], получим, что система к. ф. пучка $L_0^3(\lambda)$ 3-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Список литературы

1. Рыхлов, В. С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — Т. 26 — № 1. — С. 289–294.

   RYKHLOV, V. (2015) On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics* . 26 (1). p. 289–294.

2. Келдыш, М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 1. — С. 11–14.

   KELDYSH, M. (1951) On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. AN SSSR.* 77 (1). p. 11–14.

3. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

   NAIMARK, M. (1969) *Linear differential operators.* Moscow: Nauka.

4. Шкаликов, А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — № 9. — С. 190–229.

   SHKALIKOV, A. (1986) Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.* 33 (6). p. 1311–1342.

5. Вагабов, А. И. Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Москва, 1988. — 201 с.

   VAGABOV, A. (1988) *Expansions in Fourier series with respect to the main functions of differential operators and their applications.: Dr. phys. and math. sci. diss.* Moscow.

6. Вагабов, А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994. — 160 с.

   VAGABOV, A. (1994) *Introduction to the spectral theory of differential operators.* Rostov-na-Donu: Rostov University Publishing.

7. RYKHLOV, V. (1996) Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators. *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya.* 3 (3/4). p. 406–411.

УДК: 517.9

MSC2010: 33E20

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ЧЕТНОГО J–МНОГОЧЛЕНА ШЛЕМИЛЬХА

© Е. Л. Санина

Воронежский государственный университет
факультет прикладной математики, информатики и механики
Университетская площадь, 1, Воронеж, 394000, Российская Федерация
e-mail: *sanina08@mail.ru*

The inequality of Bernstein for even j - polynomial of Schlomilch.

Sanina E. L.

Abstract.

The role of the Bernstein inequality in various problems of approximation theory in problems of differential equations well known books from MS Nikolsky [1], NI Bari [2] (p. 895), Sigmund [3] (p. 41), and others. Bernstein inequality in the simplest case, it follows from the Riesz interpolation

$$T'_n(t) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\ T_n(t+\theta_k)\,,\ \ \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

for trigonometric polynomials

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\ \sin\ kt + b_k\ \cos\ kt)\,.$$

and has the form

$$\|T'_n(t)\|_{C[-\pi,\pi]} \leq n\|T_n(t)\|_{C[\pi,\pi]}.$$

j-polynomials Schlomilch introduced in [4]. Properties of the even and odd j-polynomials are described in [5]. The need to study this kind of polynomials associated with many problems of the theory of functions of weighted spaces, singular differential equations [6].

Classic series Schlomilch have the form

$$\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\frac{J_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu} + b_m\frac{H_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}\right),$$

where J_ν — Bessel function of the first kind, and H_ν — Struve function. How $\frac{J_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}$ — even and $\frac{H_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}$ — odd.

Among the Fourier-Bessel series, Dini series Schlomilch series most resemble trigonometric Fourier series, as the series Schlomlich generated by trigonometric series using integrals Schlomilch or Sonin. Therefore, the properties Schlomilch series can be explored using the

properties of trigonometric series. In [7] noted that the application for the full series Schlomilch (with even and odd components), there are physical limitations of the use of Struve functions.

General view even j-polynomials Schlomilch n has the form

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \; j_\nu(mx)\,.$$

Received interpolation formula for B-derivative j-polynomials Schlomlich, which is a consequence of the Riesz interpolation formula for trigonometric polynomials:

$$B_\nu\,(S_n)(x) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k,\,m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos\frac{\Theta_{k-m}}{2} - \cos\frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2}\; \Pi_x^\nu T_n(x+\Theta_{k+m})\,,$$

where $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\,\frac{d}{dx}$ — singular differential operator of Bessel, $\nu > -\frac{1}{2}$.

On the basis of this formula is an analogue of the Bernstein inequality, where the role of the derivative of the Bessel operator executes and performs the role of a trigonometric polynomial of even j-polynomial Schlomlich:

$$|B_\nu^k\, S_n(x)| \le n^{2k} \sup_{x\in[0,\pi]} |S_n(x)| \le n^{2k}\, M, \quad x\in[0,\pi],\; k\in N.$$

This is the main result of this work. Using this inequality will allow to explore the direct and inverse theorems approximation theory, embedding theorem in weighted classes Nikolsky functions Besov, Sobolev-Kipriyanova.

Keywords: *Bessel operator, Poisson operator interpolation formula, j-polynomial Schlomilch, Bernstein's inequality*

Введение

Роль неравенства Бернштейна в различных проблемах теории приближения функций, в задачах дифференциальных уравнений хорошо известна из книг М. С. Никольского [1], Н. И. Бари [2, с. 895], А. Зигмунда [3, с. 41] и др. Неравенство Бернштейна в простейшем случае вытекает из интерполяционной формулы Рисса

$$T\,'_n(t) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\;T_n(t+\theta_k)\,,\;\; \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

для тригонометрических многочленов

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,\sin\,kt + b_k\,\cos\,kt)$$

и имеет вид

$$\|T\,'_n(t)\|_{C[-\pi,\pi]} \le n\|T_n(t)\|_{C[\pi,\pi]}. \tag{1}$$

j-многочлены Шлемильха введены в работе [4]. Свойства таких четных и нечетных j-многочленов описаны в [5]. Необходимость исследования такого рода многочленов связана с многочисленными проблемами теории функций весовых пространств, сингулярных дифференциальных уравнений (см. например монографию [6]).

1. Ряды и многочлены Шлемильха

Классическим рядом Шлемильха называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\frac{J_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}+b_m\frac{H_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}\right),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода, а H_ν — функция Струве. Как известно, функция $\frac{J_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}$ — четная, а функция $\frac{H_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}$ — нечетная.

Среди рядов Фурье—Бесселя, Дини ряды Шлемильха наиболее напоминают тригонометрические ряды Фурье, поскольку ряды Шлемильха порождены тригонометрическими рядами применением интегралов Шлемильха или Сонина. Поэтому свойства рядов Шлемильха можно изучить с использованием свойств тригонометрических рядов. В [7, с. 693] отмечено, что для применения полных рядов Шлемильха (с четной и нечетной составляющими) существуют ограничения физического характера из-за использования функций Струве.

Обобщенные ряды Шлемильха рассматриваются на отрезке $[-\pi,\pi]$, четные ряды Шлемильха — на отрезке $[0,\pi]$. Если потребовать четность от функции, представленной обобщенным рядом Шлемильха, то ее разложение (разумеется по четным функциям) можно записать следующим образом

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\,J_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a'_m\,j_\nu(mx),$$

где мы воспользовались следующей формулой связи j-функций Бесселя j_ν и функций Бесселя первого рода J_ν (см. [8])

$$j_\nu(x)=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\;J_\nu(x).$$

Поэтому общий вид четных j-многочленов Шлемильха порядка n имеет вид

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}a_m\;j_\nu(mx)\,.$$

2. Интерполяционная формула для B-производной от четного j-многочлена Шлемильха

Оператор Пуассона действует по формуле

$$\Pi_x^\nu f(x,t) = C(\nu) \int\limits_0^\pi f(x\cos\alpha, t)\ \sin^{2\nu}\alpha\ d\alpha, \quad C(\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Учитывая, что нормирующая константа в операторе Пуассона подобрана так, чтобы $\Pi^p(1)$=1, можем записать представление j-многочлена Шлемильха в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m j_\nu(mx) = \Pi^\nu \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(mx)\right) = \Pi^\nu(T_n(x))\,.$$

Тригонометрический многочлен $T_n(x)$ условимся называть *сопровождающим* j-многочлен Шлемильха.

В работе [9], как следствие интерполяционной формулы Рисса для тригонометрических многочленов, получены следующие интерполяционные формулы для B-производной j-многочленов Шлемильха.

Теорема 1. *Пусть* $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ j_\nu(kx)$ *— четный j-многочлен Шлемильха порядка n и T_n – сопровождающий тригонометрический многочлен. Тогда для B-производной многочлена S_n имеет место следующая интерполяционная формула*

$$B_\nu\,(S_n)(x) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k,\,m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos\frac{\Theta_{k-m}}{2} - \cos\frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2}\ \Pi_x^\nu T_n(x+\Theta_{k+m})\,, \tag{1}$$

где B_ν — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\nu > -\frac{1}{2}$, а

$$\Theta_{k-m} = \frac{\pi(k-m)}{n}\,, \quad \Theta_{k+m} = \frac{\pi(k+m-1)}{n}\,, \quad k,m = 1,2,\ldots,2n\,.$$

Эта же формула может быть представлена в виде четного j-многочлена Шлемильха:

$$\mathscr{B}_\nu\,(S_n)(x){=}\frac{1}{4n^2} \sum_{k,\,m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos\frac{\Theta_{k-m}}{2}{-}\cos\frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2} \left(\frac{a_0}{2}{+}\sum_{s=1}^{n} a'_s\, j_\nu(sx)\right)\,,$$

где $a'_s = a_s\ \cos(\Theta_{k+m}) = a_s\ \cos\left(\frac{s\pi}{n}(k+m-1)\right)$.

Если сопровождающий многочлен задан в виде $\sum\limits_{s=-n}^{n} c_s\, e^{isx}$, то соответствующая интерполяционная формула определяется равенством

$$B_\nu\,(S_n)(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k,\,m=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos\frac{\Theta_{k-m}}{2}-\cos\frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2}\sum_{s=-n}^{n} c'_s\; j_\nu(sx)\,,$$

где

$$c'_l = c_s\; e^{is(\Theta_{k+m})} = c_s\, e^{is\pi\,\frac{k+m-1}{n}}\,.$$

2. Неравенство Бернштейна для B-производной от четного j-многочлена Шлемильха

Основной результат этой работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть S_n — четный j-многочлен Шлемильха порядка n и $T_n(x)$ — его сопровождающий многочлен (т.е. $S_n(x)$=$\Pi^p\, T_n(x)$), для которого на отрезке $[0,\pi]$ выполняется неравенство*

$$|T_n(t)| \leq M. \tag{1}$$

Тогда

$$|S_n(x)| \leq M. \tag{2}$$

Для произвольного натурального числа k

$$|B^k_\nu\, S_n(x)| \leq n^{2k}\sup_{x\in[0,\pi]}|S_n(x)| \leq n^{2k}\, M, \quad x\in[0,\pi], \tag{3}$$

где B_ν — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $\nu > -\frac{1}{2}$.

Доказательство. Неравенство (4) непосредственно вытекает из неравенства (3) ввиду того, что $S_n(t) = \Pi^\nu T_n(t)$, при этом оператор Пуассона Π^ν ограниченный, а его нормирующая константа подобрана так, чтобы $\Pi^\nu(1) = 1$.

Сопровождающий тригонометрический многочлен T_n является бесконечно дифференцируемой функцией, ограниченной не только на $[0,\pi]$, но, ввиду его четности, и на $[-\pi,\pi]$, той же константой. Функция T_n — 2π-периодическая, поэтому свойство (3) распространяется на любой отрезок длинны 2π с той же константой M. Следовательно выполняется неравенство

$$|T_n(x+\Theta_{k+m})| \leq M, \qquad \forall x\in R_1, \tag{4}$$

где $\Theta_{k+m} = \frac{\pi(k+m-1)}{n}$, $\;k, m = 1, 2, ..., 2n$.

Неравенство (5) будет очевидно, если будет доказано следующее неравенство:

$$| \, B_\nu(S_n)(x) \, | \leq n^2 \sup_{x \in [0,\pi]} |T_n(x)|. \tag{5}$$

Для доказательства (7) воспользуемся интерполяционной формулой (2). Имеем

$$|B_\nu \, (S_n)(x)| \leq \frac{1}{4n^2} \sum_{k,\, m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos \frac{\Theta_{k-m}}{2} - \cos \frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2} \; \Pi_x^\nu \, |T_n(x + \Theta_{k+m})| \, .$$

Далее применим оценку (6) и учтем ограниченность оператора Пуассона, в результате чего получим

$$|B_\nu \, (S_n)(x)| \leq M \frac{1}{4n^2} \sum_{k,\, m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\left(\cos \frac{\Theta_{k-m}}{2} - \cos \frac{\Theta_{k+m}}{2}\right)^2} =$$

$$= M \frac{1}{16n^2} \sum_{k,\, m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\sin^2 \left(\frac{\frac{\Theta_{k-m}}{2} + \frac{\Theta_{k+m}}{2}}{2}\right) \sin^2 \left(\frac{\frac{\Theta_{k-m}}{2} - \frac{\Theta_{k+m}}{2}}{2}\right)},$$

поскольку

$$\frac{\Theta_{k-m} + \Theta_{k+m}}{2} = \frac{2\Theta_k}{2} = \Theta_k, \quad \frac{\Theta_{k-m} - \Theta_{k+m}}{2} = -\frac{2\Theta_m}{2} = -\Theta_m,$$

то

$$|B_\nu \, (S_n)(x)| \leq M \frac{1}{16n^2} \sum_{k,\, m=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+m}}{\sin^2 \left(\frac{\Theta_k}{2}\right) \; \sin^2 \left(\frac{\Theta_m}{2}\right)} =$$

$$= M \frac{1}{16n^2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2 \frac{\Theta_k}{2}} \; \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{\sin^2 \frac{\Theta_m}{2}}. \tag{6}$$

Если в классической интерполяционной формуле для тригонометрических многочленов положить $T_n(x) = \sin(nx)$, то

$$\frac{d}{dx} \sin(nx) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta_k}{2}} \; sin(n(x + \theta_k)),$$

$$n \cos(nx) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta_k}{2}} \; sin(n(x + \theta_k)),$$

далее, при $x = 0$ получим

$$n = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta_k}{2}} \; \sin(n \, \theta_k)).$$

Так как

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\,\pi\,,$$

то

$$\sin(n\,\theta_k) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \mp 1 \text{ (соответственно при четном и нечетном k).}$$

Следовательно получим равенство

$$n = \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\Theta_k}{2}}. \tag{7}$$

Применив формулу (9) к неравенству (8), получим

$$|B_\nu\,(S_n)(x)| \le n^2\,M = n^2 \sup_{x\in[0,\pi]} |T_n(x)|\,,$$

из чего следует неравенство (5).

Доказательство закончено. □

Заключение

Основным результатом работы является неравенство (5). Использование этого неравенства позволит исследовать прямые и обратные теоремы теории приближения, теоремы вложения в весовых классах функций Никольского, Бесова, Соболева—Киприянова.

Список литературы

1. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский — М.: Наука, 1977. — 436 с.

   NIKOLSKIY, S. (1977) *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* Moscow: Nauka.

2. Бари Н. И. Тригонометрические ряды / Н. И. Бари — М.: ГИФМЛ, 1961. — 936 с.

   BARI, N. (1961) *Trigonometric series.* Moscow: GIFML.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд — М.: Мир, 1966. — Т. 2. — 538 с.

   Sigmund, A. (1966) *Trigonometric series.* Moscow: Nauka.

4. Ляхов Л. Н. Многочлены Шлемильха, интерполяционная формула Рисса для B-производной и неравенство Бернштейна для B-производной Вейля-Маршо / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Доклады РАН. — М. :Наука, 2007. — Т. 417. — № 5. — С. 592–596.

   LYAHOV, L. & SANINA, E. (2007) Schlomilch polynomials, interpolation Riesz formula for B-derivative and the Bernstein inequality for the derivative B-Weyl Marsh. *Mathematical Problems of Cybernetics.* 417 (5). p. 592–596.

5. Ляхов Л. Н. О рядах Шлемильха / Л. Н. Ляхов // Научные ведомости БелГу. Серия: Математика. Физика. — 2013 г. — № 12 (155) — Вып. 31. — С. 62–73.

   LYAHOV, L. (2013) On series Schlomilch. *Scientific statements Belge. Series: Mathematics. Physics.* 12 (155), issue 31. p. 62–73.

6. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов – М.: Наука, 1997. — 204 с.

   KIPRIYANOV, I. (1997) *Singular elliptic boundary value problems.* Moscow: Nauka.

7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций / Г. Н. Ватсон — М.: ИЛ, 1947. — Ч. 1. — 798 с.

   VATSON, G. (1947) *Singular elliptic boundary value problems.* Moscow: IL.

8. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан — УМН., 1951. — Т. 6. — № 2. — С. 102–143.

   LEVITAN, B. (1951) *Expansion in Fourier series and integrals Feature Bessel.* UMN.

9. Lyahov L. N. Inverpolation Formulas for Integral Operations of Weighted Plane Wave Type / L. N. Lyahov, E. L. Sanina // Journal of mathematical sciences. Volume 216, Number 2. July 14, 2016. — P. 107–112.

Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V. 2016. Zero sets of solutions of the hyperbolic Darboux equation. ***Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*****, 1, pp. 7 – 17.**

MSC2010: 44A35, 44A12

Рассматривается гиперболический аналог обобщенного уравнения Дарбу. Исследуется структура нулевых множеств его решений для случая, когда решения являются радиальными функциями по одной из переменных. Показано, что если решение обращается в нуль в некотором кольце, то оно обязано быть равно нулю в некотором другом кольце, содержащем первое.

Ключевые слова: *уравнение Дарбу, гиперболическая плоскость, нулевые множества, теоремы единственности, трансмутационные отображения.*

Газиев Э. Л., Копачевский Н. Д. Малые движения и собственные колебания системы “жидкость-баротропный газ” / Э. Л. Газиев, Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 2 (31). — С. 18 – 55.

УДК: 517.984:517.958

Рассматривается проблема малых движений и собственных колебаний идеальной несжимаемой жидкости и баротропного газа в контейнере, находящемся в условиях, близких к невесомости. С использованием операторного подхода изучены свойства операторов потенциальной и кинетической энергии системы, доказаны теоремы о свойствах спектра и системы собственных функций задачи, получены достаточные условия неустойчивости системы. Доказаны теоремы о сильной разрешимости исходной начально-краевой проблемы. Изучена задача о собственных колебаниях системы в случае, когда сосуд является цилиндрическим и имеет произвольное поперечное сечение. Установлено наличие гравитационно-капиллярных и акустических волн в системе.

Ключевые слова: *идеальная жидкость, несжимаемая жидкость, баротропный газ, малая гравитация, равновесие, собственные колебания, собственное значение, операторный подход, гильбертово пространство, начально-краевая задача, спектральная задача, разрешимость, сильное решение, неустойчивость.*

Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для правильного симплекса / Н. С. Иванисенко // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 2 (31). — С. 56 – 67.

УДК: 517.935.7

В данной работе изучаются вопросы, связанные с локальным вариантом проблемы Помпейю. Исследуемое множество является правильным симплексом с длиной ребра равной $\sqrt{2}$ в четырехмерном пространстве. Получены результаты, аналогичные формулам Стокса, которые позволяют выразить интеграл от некоторого оператора, действующего на заданную функцию, через значения интеграла по подмножествам границы симплекса меньшей размерности (граням и объемным телам (тетраэдрам)). Также уточнены для рассматриваемого множества, имеющиеся оценки радиуса Помпейю.

Ключевые слова: *локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, правильный симплекс, локально интегрируемые функции, четырехмерное пространство.*

Копачевский Н. Д., Ситшаева З. З. Задачи статики, устойчивости и колебаний жидкости в сосуде с отверстиями в днище / Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 2 (31). — С. 68 – 86.

УДК: 517.984:517.958

Рассматриваются задачи статики, устойчивости, собственных колебаний и малых движений идеальной несжимаемой жидкости, расположенной в сосуде с донными отверстиями в условиях, близких к невесомости с учетом капиллярных сил. Изучаются случаи прямоугольного канала (плоская задача) и цилиндрического контейнера (осесимметричная задача). Рассмотрены случаи как горизонтальной, так и криволинейной верхней части свободной поверхности. Проблемы изучаются с использованием методов линейных операторов, действующих в гильбертовых пространствах, а также вариационного и операторного подходов. В задаче статики получены краевые задачи для системы дифференциальных уравнений второго порядка с дополнительным интегральным условием и предложен алгоритм их численного решения. В проблеме устойчивости равновесного состояния гидросистемы доказываются утверждения о статической устойчивости равновесного состояния, основанные на знаке минимального собственного значения ассоциированной спектральной проблемы. С использованием операторного подхода задача об устойчивости приводится к задаче

на собственные значения в некотором гильбертовом пространстве; изучаются свойства ее операторных матриц. Доказывается, что эта задача имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений, с предельной точкой на $+\infty$ и определяется граница области устойчивости гидросистемы. В проблеме собственных колебаний с использованием вспомогательных краевых задач исследуется соответствующая спектральная проблема; доказывается теорема о свойствах спектра задачи, а также ее следствие о динамической устойчивости и неустойчивости гидросистемы. Доказывается, что если исходные данные начально-краевой задачи о малых движениях системы удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то существует единственное сильное решение этой проблемы, а также ассоциированной с ней задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения в соответствующем гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *идеальная несжимаемая жидкость, малая гравитация, состояние равновесия, колебания, операторный подход, гильбертово пространство, начально-краевая задача, спектральная задача, разрешимость, сильное решение, неустойчивость.*

Рыхлов В. С. Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 2 (31). — С. 87 – 103.

УДК: 517.927.25

Рассматриваются три конкретных примера сильно нерегулярных полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с двухточечными не полураспадающимися краевыми условиями. На основе общих теорем о кратной полноте корневых функций, полученных автором ранее, исследуется кратная полнота корневых функций этих пучков в пространстве $L_2[0,1]$. Установлено, что, несмотря на похожий вид пучков из этих примеров, кратность полноты корневых функций у них совершенно разная: однократная, двукратная и трехкратная. Причем, установленная кратность точная. Построены соответствующие множества вектор-функций ортогональных производным цепочкам соответствующей кратности, построенным по корневым функциям рассматриваемых пучков.

Ключевые слова: *пучок обыкновенных дифференциальных операторов, пучок третьего порядка, нерегулярный пучок, корневые функции, собственные и присоединенные функции, кратная полнота, постоянные коэффициенты дифференциального выражения, не полураспадающиеся краевые условия, двухточечные краевые условия.*

Санина Е. Л. Неравенство Бернштейна для четного j–многочлена Шлемильха / Е. Л. Санина // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 2 (31). — С. 104 – 111.

УДК: 517.9

На основе интерполяционной формулы для четного j-многочлена Шлемильха доказан аналог неравенства Бернштейна, где роль производной играет оператор Бесселя $B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}$, а роль тригонометрического многочлена выполняет четный j-многочлен Шлемильха.

Ключевые слова: *оператор Бесселя, оператор Пуассона, интерполяционная формула, j-многочлен Шлемильха, неравенство Бернштейна.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Волчков Валерий Владимирович — д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета, г. Донецк, Украина
e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Волчков Виталий Владимирович — д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета, г. Донецк, Украина
e-mail: volna936@gmail.com

Газиев Эскендер Линурович — к. ф.-м. н., преподаватель кафедры математики Крымского инженерно-педагогического университета, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: Gilmor2004@gmail.com

Иванисенко Наталья Сергеевна — аспирантка факультета математики и информационных технологий Донецкого национального университета, г. Донецк, Украина
e-mail: Ivanisenko.n.s@gmail.com

Копачевский Николай Дмитриевич — д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
e-mail: kopachevsky@list.ru

Рыхлов Виктор Сергеевич — к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация
e-mail: RykhlovVS@yandex.ru

Санина Елизавета Львовна	к. ф.-м. н., доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация *e-mail: sanina08@mail.ru*
Ситшаева Зера Зекерьяевна	к. ф.-м. н., доцент кафедры математики Крымского инженерно-педагогического университета, г. Симферополь, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация *e-mail: szz2008@mail.ru*

Подписано к печати 30.11.2016. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12,5 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/45. Свободная цена.
Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4