ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№ 1 (26) ' 2015

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2015, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический Вестник Информатики и Математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В.И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 17 от 4 декабря 2015 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

В данном номере опубликованы работы участников ***Крымской осенней математической школы (КРОМШ)****.*

TABLE OF CONTENTS

In this volume we publish the articles of ***Crimean Autumn Mathematical School’s*** *participants.*

НИКОЛАЙ ДМИТРИЕВИЧ КОПАЧЕВСКИЙ
К 75-летию со дня рождения

© В. И. Войтицкий, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, П. А. Старков

Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
просп. акад. В.И. Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *victor.voytitsky@gmail.com*

В марте 2015 года исполнилось 75 лет известному отечественному математику, доктору физико-математических наук, профессору, лауреату Государственной премии Украины, Заслуженному деятелю науки и техники Украины, Заслуженному работнику образования Крыма, заведующему кафедрой математического анализа Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, организатору и на протяжении 26 лет бессменному руководителю Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ), нашему дорогому учителю Николаю Дмитриевичу Копачевскому.

Николай Дмитриевич родился 25 марта 1940 года в городе Симферополе. Его раннее детство пришлось на ужасный период Великой отечественной войны, а школьные годы — на тяжелый послевоенный период.

Еще в школе Николай Дмитриевич полюбил математику, которой посвятил всю свою жизнь.

По окончании школы Николай Дмитриевич поступил в Харьковский авиационный институт, который окончил с отличием в 1963 году. Математическое дарование Николая Дмитриевича проявилось уже в студенческие годы. Со второго курса он работает под руководством известного математика профессора Анатолия Дмитриевича Мышкиса (см. [1]), параллельно посещает в Харьковском государственном университете лекции выдающихся математиков В. А. Марченко, Н. И. Ахиезера, И. М. Глазмана, Б. Я. Левина и др.

Помимо учебы Николай Дмитриевич активно занимается спортом, играет в ведущих волейбольных командах Харькова, тренируется в команде мастеров высшей лиги СССР "Буревестник".

По окончании ХАИ в 1963 году, получив одним из первых в СССР новую специальность инженера-конструктора ядерных авиадвигателей, Николай Дмитриевич был принят инженером в созданный годом ранее Физико-технический институт низких температур (ФТИНТ) в отдел прикладной математики, возглавляемый А. Д. Мышкисом. Надо отметить, что на работу в свой отдел Анатолий Дмитриевич приглашал в основном отличников из авиационного института, ориентированных на решение прикладных задач.

В начале 60-ых годов, в связи с первым полетом человека в космос и началом космической эры, возник ряд прикладных задач, требовавших построения новых математических моделей. Одной из таких проблем была проблема поведения жидкого топлива в баке космической ракеты. По инициативе первого директора ФТИНТ академика Б. И. Веркина, с согласия академика С. П. Королева, к изучению данной проблематики впервые была привлечена группа молодых исследователей под руководством А. Д. Мышкиса. Перед ними стояла задача определения форм равновесия, условий устойчивости, описания тепловой конвекции, малых движений жидкости в условиях, близких к состоянию невесомости. Подобными задачами чуть позже стали заниматься и в Вычислительном центре АН СССР (г. Москва), в частности в отделе Н. Н. Моисеева, а также в отделе И. А. Луковского в Институте математики НАН Украины (г. Киев). Эти группы математиков активно и плодотворно сотрудничали, и в 1976 году по материалам работы сотрудников ФТИНТ вышла первая в мире монография по гидромеханике невесомости [2]. Вскоре эта книга была переиздана во многих странах мира, см. [3]. В 1992 году вышла вторая монография [4], отражающая современное развитие этой тематики.

Изучением проблемы малых движений и собственных колебаний в группе А. Д. Мышкиса стал заниматься Николай Дмитриевич. Вдохновленный всеобъемлющими веяниями функционального анализа, он решил привлечь к решению поставленной задачи методы теории линейных самосопряжённых операторов, действующих в гильбертовом пространстве, широко применяющиеся в квантовой механике. Несмотря на сомнения Анатолия Дмитриевича в рациональности этого подхода, этот метод полностью себя оправдал и составил материал кандидатской диссертаций Николая Дмитриевича "О малых колебаниях жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости", защищенной им в Харькове в 1966 году. В диссертации было проведено исследование идеальной жидкости, установлена теорема о разрешимости эволюционной задачи, спектральная задача сведена к исследованию линейного операторного пучка в гильбертовом пространстве, на основании свойств операторов потенциальной и кинетической энергии установлены спектральные свойства задачи, а также условия устойчивости равновесных форм жидкости, методом Ритца вычислялись вещественные собственные значений и собственные функции задачи.

Большое влияние на выбор данной методики исследований оказал известный Воронежский математик, профессор Селим Григорьевич Крейн, который на долгие годы стал старшим товарищем и вторым учителем Николая Дмитриевича. В те годы С. Г. Крейн с учениками активно занимался проблемами разрешимости аналогичных задач для вязкой жидкости. Ими было установлено, что спектральная задача для тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде сводится к исследованию нелинейного операторного пучка, позже названного пучком С. Г. Крейна. Исследования данной (несамосопряженной) задачи, отраженные в кандидатских диссертациях Н. К. Аскерова и Г. И. Лаптева, а также работы по спектральной теории операторных пучков М. Г. Крейна и Х. Лангера, убедили Николая Дмитриевича в плодотворности и перспективности методов теории линейных операторов, сформировали почву для дальнейших исследований.

Вскоре Николай Дмитриевич начал изучение поведения вязкой жидкости с учетом сил поверхностного натяжения. Уже первая статья [5], посвященная этой тематике, показала, что учёт сил поверхностного натяжения существенно меняет структуру спектра задачи, а именно, вместо двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности, остается одна с предельной точкой на бесконечности. Как известно, пучок С. Г. Крейна имеет не более конечного числа невещественных собственных значений, тот же результат был получен для вязкого самогравитирующего шара, при этом для вязкой капиллярной жидкости в произвольной области вопрос о числе невещественных собственных значений не решен до сих пор.

Позднее Николай Дмитриевич стал заниматься проблемами малых движений идеальной и вязкой жидкостей, а также систем из несмешивающихся жидкостей, с учётом действия капиллярных сил и вращения. Материалы его работ, написанных в 70-е годы, стали основой докторской диссертации "Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения", защищенной в Москве 1980 году в Вычислительном центре АН СССР по специальности 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы. Официальными оппонентами были будущие академики О. А. Ладыженская и Ф. Л. Черноусько, высоко оценившие заслуги Николая Дмитриевича. На защите также присутствовал и Селим Григорьевич Крейн.

В 1972 году Симферопольский педагогический институт был преобразован в Симферопольский государственный университет имени М. В. Фрунзе, и ему требовались доктора наук для проведения научных исследований. После защиты докторской диссертации в 1981 году Николай Дмитриевич с супругой Валентиной Георгиевной решили переехать из Харькова в родной город Симферополь. Николаю Дмитриевичу предложили должность заведующего кафедрой математического анализа, которую он занимает до настоящего времени.

В начале 80-х годов научные интересы Николая Дмитриевича были обращены на исследование стратифицированной жидкости в ограниченном сосуде. Данная проблематика возникает при изучении волновых процессов в океанах и морях (а также при изучении колебаний криогенных жидкостей и нефти), где плотность жидкости в состоянии покоя не является постоянной, а зависит от высоты по закону Вяйсяля-Брендта. Силы плавучести обусловливают наличие внутренних волн и другие интересные физические эффекты, наблюдающиеся в подобных жидкостях. Спектральные свойства гидродинамической задачи здесь также весьма интересны, а именно помимо ветви изолированных собственных значений (отвечающих поверхностным волнам) возникает отрезок непрерывного спектра, соответствующий внутренним волнам. С этой задачей к Николаю Дмитриевичу обратился Александр Николаевич Темнов (доцент МГТУ им. Н. Э. Баумана). Николай Дмитриевич согласился с ним сотрудничать и стал его научным руководителем по кандидатской диссертации, которая была успешно защищена в 1984 году в Москве, в Институте маханики АН СССР. Результаты совместных исследований были отражены в статьях, опубликованных в "Журнале вычислительной математики и математической физики". Отметим, что подобными задачами в неограниченных областях в то время также занимались А. Г. Свешников и С. А. Габов, а позже к ней подключились многие другие математики и механики, в том числе сотрудники отдела теории волн Морского гидрофизического института (г. Севастополь), руководимого профессором Л. В. Черкесовым. Данная тематика остаётся актуальной по сей день.

После защиты докторской диссертации по предложению С. Г. Крейна началась их совместная работа над монографией "Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи" [6]. Третьим соавтором в ней является математик из Вьетнама, ученик Селима Григорьевича Нго Зуй Кан. В 1981 году Нго Зуй Кан защитил докторскую диссертацию под руководством С. Г. Крейна, причём вторым научным консультантом выступал Николай Дмитриевич. Монография вышла в 1989 году и по сегодняшний день является одной из немногих книг, в которых в полной мере отражена методика применения теории линейных операторов к задачам гидродинамики, разработанная Селимом Григорьевичем и Николаем Дмитриевичем.

В 2001 году Н. Д. Копачевский реализовал давнюю мечту С.Г. Крейна, издав в многотомной серии И. Ц. Гохберга "Operator Theory: Advances and Applications" двухтомную монографию "Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics" [7, 8]. Эти книги в значительной степени развивают и продолжают идеи, заложенные в первой монографии с Селимом Григорьевичем.

С момента приезда в Симферополь Николай Дмитриевич активно работает со студентами и аспирантами. Им разработано около 10 спецкурсов, среди которых "Операторные методы математической физики", "Операторные методы линейной гидродинамики", "Спектральная теория операторных пучков", "Колебания жидкости в условиях невесомости", "Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве", "Абстрактная формула Грина", "Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве". Издано большое число методических и учебно-научных пособий. Кроме этого в течение многих лет еженедельно работают семинары для студентов, аспирантов и соискателей. Прослушав перечисленные спецкурсы, лучшие студенты — участники семинаров – попадают в ряды аспирантов Николая Дмитриевича, около половины из них стали кандидатами наук.

За годы работы с учениками Николай Дмитриевич занимался проблемами идеальной, вязкой, вязко-упругой жидкостей, баротропным газом, системами жидкостей с условиями капиллярности, релаксации, стратификации в неподвижном, вращающемся или колеблющемся сосуде с открытой поверхностью или нет. Во всех работах чётко отражена главная методика научной школы — сведение задачи в частных производных к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве в терминах линейных операторов либо операторных матриц. Используя результаты спектральной теории самосопряжённых операторов, функционального анализа, вариационных методов математической физики, спектральной теории оператор-функций, операторных-матриц, индефинитной метрики, дифференциальных уравнений в банаховом пространстве удалось доказать важные для приложений результаты о полноте и базисности собственных функций, о локализации и асимптотике собственных значений, о существовании сильных или слабых решений краевых задач.

Надо отметить, что Николай Дмитриевич одним из первых стал использовать методы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой для решения проблем гидродинамики. Более 35 лет продолжается его сотрудничество с известным специалистом в этой области профессором Азизовым Т. Я. (см., например, [9]). В 2014 году вышла их совместная монография "Приложения индефинитной метрики" [10].

Кроме прикладной тематики исследований Николай Дмитриевич занимается исследованием нелинейных оператор–функций, теорией интегродифференциальных уравнений Вольтерра, общей теорией граничных задач и задач сопряжения, абстрактной формулой Грина и её применением. В 1981 году он получил интересный результат о p-базисности системы собственных элементов, отвечающей одной из двух ветвей положительных собственных значений пучка С. Г. Крейна, см. [11]. Также Николай Дмитриевич с учениками изучали свойства полиномиальных пучков, возникающих при изучении вращающихся жидкостей, колебаний гидросистем, систем с диссипацией энергии и др. По словам Николая Дмитриевича, в области спектральной теории своими учителями он считает А. С. Маркуса и В. И. Мацаева.

С 1990 года Николай Дмитриевич Копачевский с сотрудниками факультета математики и информатики организовывает в Крыму международную математическую конференцию, которая получила название Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ) по спектральным и эволюционным задачам. Эта школа сохранила традиции и стала преемницей Воронежской зимней математической школы, организованной Селимом Григорьвичем Крейном. Основная тематика школы связана с актуальными фундаментальными проблемами общей и спектральной теории операторов, а также с их применением в исследовании обыкновенных дифференциальных, дифференциально–операторных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, в теории управления и экстремальных задачах, а также в теории игр, математической физике и механике сплошных сред. Школа получила международную известность. Постоянными ее участниками стали известные математики не только стран СНГ, но и Израиля, Германии, Польши, Англии, Франции, Японии, США, Египта и других стран. Благодаря энтузиазму и авторитету Николая Дмитриевича в прошлом году, несмотря на сложную политическую обстановку, конференция продолжила свою работу и отметила 25-летний юбилей. В течение этих лет КРОМШ, как правило, проходила в уникальном живописном уголке Крыма — урочище Батилиман, которое стало любимым место для большинства участников конференции.

В последние годы Николай Дмитриевич с учениками активно занимается исследованием колебаний гидросистемы "жидкость — баротропный газ", многокомпонентными задачами сопряжения в липшицевых областях, системами с диссипацией энергии, задачами Стефана, полными интегродифференциальными уравнениями Вольтерра, обобщениями абстрактной формулы Грина для задач сопряжения и полуторалинейных форм. Также активно изучаются различные постановки так называемых абстрактных краевых задач и задач сопряжения, формулирующихся в терминах операторов из абстрактной формулы Грина. По сути в монографиях с Крейном предлагается общая схема исследования целых классов регулярных краевых задач. Ими получена и доказана абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач, которая позволяет рассматривать абстрактные задачи сопряжения, в-частности классы эллиптических задач в многомерных областях с различными видами краевых условий и условий сопряжения, см., например, [12].

Николай Дмитриевич продолжает плодотворную научную и научно-педагогическую деятельность. В его планах – написание новых монографий и учебников по прикладному функциональному анализу и гидродинамике на основе многолетних исследований с учениками. За период более чем 50-летней насыщенной научной деятельности Николай Дмитриевич с соавторами написал более 200 научных работ, 15 учебных пособий, издал 7 монографий (полный список трудов доступен на сайте http://nikolay-d-kopachevsky.com). Под его руководством защищена 21 кандидатская диссертация, двое из его учеников стали докторами наук. Он является лауреатом государственной премии Украины 2013 года (в составе авторского коллектива) за цикл научных работ по гидромеханике "Закономерности волно–вихревых процессов в сплошной среде", лауреатом премий имени В. И. Вернадского и кавалером Ордена "За заслуги" 3-й степени.

Коллектив сотрудников кафедры математического анализа Крымского федерального университета, а также постоянные участники КРОМШ желают дорогому Николаю Дмитриевичу крепкого здоровья, долголетия и новых научных свершений.

Список литературы

1. Мышкис А.Д. Советские математики. Мои воспоминания / А.Д. Мышкис. — М.: Либроком, 2009. — 300 с.

   MYSHKIS A.D. (2009) *Soviet mathematicians. My memoirs.* Moscow.
2. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости / В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский и др.. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

   BABCKII V.G., KOPACHEVSKII N.D., MYSHKIS A.D., SLOBOZHANIN L.A., TYUPTSOV A.D. (1976) *Low-Gravity Hydromechanics.* Moscow.
3. MYSHKIS A.D., BABCKII V.G., KOPACHEVSKII N.D., SLOBOZHANIN L.A., TYUPTSOV A.D. (1987) *Low-Gravity Fluid Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio.
4. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомостии / В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, Н.Д. Копачевский и др.. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.

   BABCKII V.G., ZHUKOV M.YU., KOPACHEVSKII N.D., MYSHKIS A.D., SLOBOZHANIN L.A., TYUPTSOV A.D. (1992) *Methods of hydromechanics problem solution for zero-gravity.* Kyiv.
5. Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — Москва, 1968. — № 4. — С. 1291-1305.

   KOPACHEVSKY N.D., MYSHKIS A.D. (1968) On the proper oscillations of the fluid self-gravitating ball with viscous and capillary forces. *Jour. of calculus mathematics and math. physics.* (No 4). p. 1291–1305.
6. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан.. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

KOPACHEVSKII N.D., KREIN S.G, NGO ZUY KAN (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems.* Operator Theory: Advances and Applications . Moscow.

7. KOPACHEVSKII N.D., KREIN S.G. (2001) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid.* Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
8. KOPACHEVSKII N.D., KREIN S.G. (2003) *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids.* Operator Theory: Advances and Applications. Birkhauser Verlag, Basel.
9. AZIZOV T.YA., HARDT V., KOPACHEVSKY N.D., MENNICKEN R. (2003) On the Problem of Small Motions and Normal Oscillations of a Viscous Fluid in a Partially Filled Container. *Math. Nachr.*. Vol. 248-249. p. 3–39.
10. Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. Приложения индефинитной метрики / Т.Я. Азизов, Н.Д. Копачевский. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

    AZIZOV T.YA., KOPACHEVSKII N.D. (2014) *Indefinite metrics applications.* Simferopol.
11. Копачевский Н.Д. О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ // Функц. анализ и его прил.. — Москва, 1981. — Т.15, № 2. — С. 77–78.

    KOPACHEVSKY N.D. (1968) On the basis property of the eigen and associated functions of the selfadjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$. *Funct. anal. and its appl.*. Vol. 15 (No 4). p. 77–78.
12. Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления / Российский ун-т Дружбы Народов. — Москва, 2009. — Т.34. — С. 5–44.

    VOYTITSKY V.I., KOPACHEVSKY N.D., STARKOV P.A. (2010) Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems. *Journal of Math. Sciences (Springer).* Vol. 170 (No 2). p. 131–172.

Статья поступила в редакцию 14.07.2015

УДК: 517.518.23

MSC2010: 26A

О КЛАССАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© Г. С. Балашова

Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт"
кафедра высшей математики
ул. Красноказарменная, 17, Москва, 111250, Российская Федерация
e-mail: *balashovags@yandex.ru*

On classes of infinitely differentiable functions.

Balashova G. S.

Abstract. The paper discusses the classes of infinitely differentiable functions, the growth of derivatives are limited given the positive sequence. This sequence can behave arbitrarily, ie be a regular, but non-zero it should be the members of an infinite number. It offers a variety of regularization of these sequences, depending on the type of area in which we study classes of infinitely differentiable functions. The class of infinitely differentiable functions, which limited the growth of the derivatives obtained regularized sequence identical to the original item by item class. It is possible to establish easily verifiable algebraic conditions for imbedding Sobolev spaces of infinite order, considered in various fields, expressed in terms of the parameters space.

Key words: regularization, the sequence space, the terms of attachment.

Пусть имеется последовательность положительных чисел $\{M_n\}$, некоторые из них могут быть равны $+\infty$, но предполагается , что существует бесконечная последовательность конечных M_n. Для изучения свойств такой последовательности естественно попытаться заменить ее другой, более "регулярной" последовательностью. Известно, что большую пользу приносит регуляризация последовательности с помощью ломаной Ньютона, построенной для точек P_n с координатами (n, M_n).

В некоторых вопросах (например, в вопросе эквивалентности классов бесконечно дифференцируемых функций) приходится рассматривать регуляризованные последовательности, связанные с первоначальной более глубоко, чем последовательность, полученная с помощью ломаной Ньютона. Для этого будем рассматривать регуляризацию последовательности относительно некоторой функции $\omega(t)$. Эта функция задана при $t \geq 0$: $\omega(0) \geq 1$, непрерывна и возрастает до бесконечности.

Приведем примеры таких регуляризаций последовательностей положительных чисел $\{M_n\}$, используемых при сравнении классов бесконечно дифференцируемых функций.

Определим класс $C_{(a,b)}(M_n)$ как множество бесконечно дифференцируемых на (a,b) функций $u(x)$, для каждой из которых существует константа $K = K(u) > 0$ такая , что

$$\max_{x\in(a,b)} |u^{(n)}(x)| \le K^n M_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |u(x)| \le K(u).$$

Интервал (a,b) может быть как конечным, так и бесконечным.

Введем следующие обозначения таких классов:

1) $C_0\{M_n\}$ на открытом ограниченном интервале;

2) $C_f\{M_n\}$ на ограниченном замкнутом или полуоткрытом фиксированном интервале;

3) $C_R\{M_n\}$ на всей числовой прямой;

4) $C_{dR}\{M_n\}$ на полупрямой.

В 1) и 2) случаях используется экспоненциальная регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = e^t$.

В 3) и 4) случаях используется выпуклая регуляризация посредством логарифмов, т.е. регуляризация относительно $\omega(t) = \infty$. В результате получаются регулярные последовательности, определяющие классы, совпадающие с исходными.

Указанные регуляризации и некоторые их модификации позволили установить легко проверяемые алгебраические условия вложения пространств Соболева бесконечного порядка:

$$W^\infty_{(a,b)}\{a_n, p\} = \left\{ u(x) \in C^\infty_{(a,b)} : \quad \rho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ||u^{(n)}||_p^p < \infty \right\},$$

где $a_n \ge 0$ — числовая последовательность, $1 \le p < \infty$ — некоторое число, $||\cdot||_p$ — норма в пространстве Лебега $L_p(a,b)$.

Итак, изучим условия вложения

$$W^\infty_{(a,b)}\{a_n, p\} \subset W^\infty_{(a,b)}\{c_n, p\} \tag{1}$$

для пространств Соболева бесконечного порядка, выраженные через последовательности $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ при фиксированных $1 \le p < \infty$.

1°. Рассмотрим пространства

$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty}_{(a,b)}\{a_n, p\} = \{u(x) \in C^\infty_0, \text{ т.е. } u^{(n)}_{(a)} = u^{(n)}_{(b)} = 0, \ n = 0, 1, 2, \dots :$$

$$\rho(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ||u^{(n)}(x)||_p^p < \infty\}, \quad -\infty < a < b < \infty, \tag{2}$$

$$W^\infty_R\{a_n, p\} = \left\{ u(x) \in C^\infty, \quad \rho(u) < \infty \right\}, \quad R = (-\infty, +\infty). \tag{3}$$

Если функции пространства (2) продолжить нулем на всю числовую ось, то (2) является подпространством (3).

Для вложения (1) в произвольной области достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} c_n a_n^{-1} = K < \infty \tag{4}$$

(если $a_n = c_n = 0$, то их отношение полагаем равным нулю). Условие (4) очевидно, однако, оно слишком ограничительно, ибо требует обращения в нуль коэффициентов c_n, по крайней мере, с номерами n, для которых $a_n = 0$. Отметим, что если последовательность $\{a_n\}$ быстро убывающая, т.е. удовлетворяет условию

$$a_{n+1} \le a_n^q < 1, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

с некоторым числом $q > 1$, и последовательность $\{a_n^{-1}\}$ логарифмически выпукла, при этом последовательность $\{c_n\}$ не обязана удовлетворять условию (5), то соотношение (4) является необходимым и достаточным для вложения (1). Промежуток (a, b) может быть как конечным, в частности, окружностью, так и полубесконечным или всей прямой.

Более того, в случае ограниченной области (a, b) для компактности вложения (1) условие

$$\lim_{n\to\infty} c_n a_n^{-1} = 0 \tag{6}$$

является необходимым и достаточным.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}$ не является быстро убывающей, но для нее естественно потребовать выполнения условия нетривиальности пространства, установленного Ю.А. Дубинским [1], т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n < \infty, \tag{7}$$

где q — некоторое положительное число.

Радиус сходимости R_a ряда слева в (7) может быть как конечным, так и бесконечным. Следует рассмотреть эти случаи отдельно.

1. Пусть $R_a < \infty$, т.е.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = K < \infty, \tag{8}$$

где $M_n = a_n^{-1}$, если $a_n \neq 0$, и $M_n = \infty$, если $a_n = 0$.

Определим следующую регуляризацию этой последовательности:

$$\{M_n^d\} = \{(n^n M_n)^c n^{-n}\}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\{(n^n M_n)^c\}$ — выпуклая регуляризация посредством логарифмов (в.р.п.л.) последовательности $\{n^n M_n\}$. Возможность такой регуляризации обеспечивает условие (8). Пусть $\{n_i\}$ — последовательность основных индексов, т.е. индексов, в которых члены исходной и регуляризованной последовательностей совпадают.

Определим последовательность

$$a_n^{(1)} = \max\{a_n,\ (M_n^d)^{-1} v_n(i)\}, \quad n_i \le n \le n_{i+1}, \tag{10}$$

здесь $v_n(i)$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=n_i}^{n_{i+1}} v_n(i) \le K, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Например,

$$v_n(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1-n_i)^2}, & n_i \le n \le \dfrac{n_{i+1}+n_i}{2} \\ \dfrac{1}{(n_{i+1}+1-n)^2}, & \dfrac{n_{i+1}+n_i}{2} < n \le n_{i+1}. \end{cases}$$

Пространство с полученной последовательностью $\{a_n^{(1)} > 0\}$ эквивалентно исходному, т.е. поэлементно совпадает с исходным пространством, и условия (4) и (6) вполне применимы, если заменить в них a_n на $a_n^{(1)}$.

2. Если $R_a = \infty$, т.е. выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty, \tag{12}$$

которое обеспечивает существование в.р.п.л. последовательности $\{M_n\}$, то, полагая

$$a_n^{(1)} = \max\{a_n,\ (M_n^c)^{-1} v_n(i)\} \tag{13}$$

с выше определенной последовательностью $\{v_n(i)\}$, получаем $a_n^{(1)} > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, и пространство $W^\infty\{a_n^{(1)}, p\}$ эквивалентно исходному. В результате условия (4) и (6), если заменить в них a_n на $a_n^{(1)}$, применимы.

Замечание 1. Если выполнено условие (12) и последовательность $\{a_n^{-1}\}$ почти логарифмически выпукла, т.е.

$$\sup_i (n_{i+1} - n_i) \le K < \infty, \tag{14}$$

то достаточно положить $\{a_n^{(1)}\} = \{(M_n^c)^{-1}\}$.

Замечание 2. Множитель $v_n(i)$ в формулах (10) и (13) существенен, так при его отсутствии имеются примеры несовпадающих пространств.

Замечание 3. При изучении условий вложения для пространств периодических функций предполагаем выполненным условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{15}$$

которое, как показал Ю.А. Дубинский [1], является необходимым и достаточным для нетривиальности таких пространств. Условие (15) влечет выполнение условия (12) и потому применима регуляризация, рассмотренная выше. Причем для компактности вложения (1), помимо условия

$$\lim_{n\to\infty} c_n (a_n^{(1)})^{-1} = 0,$$

можно использовать условие

$$\sum_{n=0}^{a} c_n \sup_{\xi>0} (\xi^n a^{-1}(\xi)) < \infty, \text{ где } a(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k.$$

При изучении условий вложения пространств Соболева бесконечного порядка, заданных на полуоси R^+, существенную роль играет аналог неравенства Колмогорова — Стейпа

$$||u^{(k)}(x)||_p \leq C_{nk}||u(x)||_p^{1-\frac{k}{n}}\,||u^{(n)}(x)||_p^{\frac{k}{n}},\ 0 \leq k \leq n,\ n = 1, 2, \dots. \qquad (16)$$

Следует отметить, что нами получена [2] более точная по сравнению с ранее известными (С. Мандельбройт [3], Ю.И. Любич [4], В.И. Буренков [5]) оценка $C_{nk} = K\left(2\frac{n}{k}\right)^k$ в неравенстве (16). Естественно предполагать условие (12) выполненным, так как оно необходимо и достаточно для нетривиальности пространств $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n, p\}$ ([4]). Тогда, вычисляя $a_n^{(1)}$ по формуле (10), где последовательность $v_n(i) = 3^{-k(n,i)}$, $k(n,i) = \min(n - n_i + 1,\ n_{i+1} - n + 1)$, получим регуляризованную последовательность $a_n^{(1)} > 0$. Пространства $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n, p\}$ и $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}\{a_n^{(1)}, p\}$ поэлементно совпадают и для вложения (1) можно использовать условие (4), заменив в нем a_n на $a_n^{(1)}$.

Отметим, что и в случае пространства $\overset{o}{W}{}^{\infty}_{(R^+)}$ также справедливо замечание 1.

Список литературы

1. Julij A. Dubinskij. Sobolev Spaces of infinite Order and Differential Equations. // Teubner-Texte sur Mathematik. Band 87. Leipzing: BSB Teubner, 1986.
2. Г.С. Балашова. Теоремы продолжения и вложения для пространств Соболева бесконечного порядка. // ДАН СССР, 1991, т. 319, № 2.

   BALASHOVA G. Extension theorems and attachments for Sobolev spaces of infinite order. // DAN SSSR, 1991, t. 319, № 2.
3. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. —–М., ИЛ, 1955.

   MANDELBROJT C. Adjacent rows. Regularization sequences. Applications. — M., IL, 1955.
4. Ю.И. Любич. О неравенствах между степенями линейного оператора. // Изв. АН СССР, сер. Матем., 1960, т. 24, № 6.

   LUBICH Y. On inequalities between powers of a linear operator. // Math. AN SSSR, Ser. Mat., 1960, no. 24, № 6.
5. В.И. Буренков. О точности постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. // Труды МИАН СССР, 1980, т. 156.

   BOURENKOV V. On the accuracy of the constants in inequalities for norms of intermediate derivatives on a finite interval. // Trudy, 1980, t. 156.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015

УДК: 517.983

MSC2010: 47A06, 47A10, 34B27

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ[1]

© В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Политехническая, 77, Саратов, 410054, Российская Федерация
e-mail: *vladislavbruk@mail.ru*

On the convergence of solutions of boundary value problems for integral equations with operator measures.

Bruk V. M.

Abstract. On a segment $[a,b]$, we consider integral equations

$$y_k(t) = y_k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_k) y_k(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

where $\int_{t_0}^{t}$ stands for $\int_{[t_0,t)}$ if $t_0 < t$; for $-\int_{[t,t_0)}$ if $t_0 > t$; and for 0 if $t_0 = t$. Here $\mathbf{p}_k$ are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta \subset [a,b]$ and taking values in the set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space H; $f_k \in L_1(H;a,b)$; y_k are unknown functions. Measures $\mathbf{p}_k$ are assumed to have bounded variations on $[a,b]$. For these equations we consider the boundary conditions

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2\dots ,$$

where $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ are linear continuous mappings; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ is a space of functions continuous from the left on $[a,b]$ and taking values in H; B is a Banach space; $k = 0, 1, 2, \dots$.

We obtain sufficient conditions under which $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ uniformly with respect to $t \in [a,b]$. The main assumptions are as follows: the solution of the homogeneous equation is only for $k = 0$; $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, where $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)$ is a variation of $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ on $[a,b]$; $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$ as $n \to \infty$; the operator Γ_0 maps bijectively a set of solutions of the homogeneous boundary problem for $k = 0$ onto the space B.

Key words: integral equation, operator measure, boundary value problem, Hilbert space, linear operator, linear relation.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00378)

Введение

В данной работе на отрезке $[a,b]$ рассматриваются интегральные уравнения

$$y_0(t) = y_0(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_0)y_0(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_0(s)ds, \tag{1}$$

$$y_n(t) = y_n(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_n)y_n(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f_n(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Здесь $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ – операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H; y_k – неизвестные функции, $f_k \in L_1(H; a, b)$. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_k$ имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Для уравнений (1), (2) рассматриваются следующие граничные условия

$$\Gamma_0 y_0 = c_0, \tag{3}$$

$$\Gamma_n y_n = c_n, \quad n = 1, 2 \dots, \tag{4}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ – линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ – пространство функций, непрерывных слева на $[a,b]$ и принимающих значения в H; B – банахово пространство; $k = 0, 1, 2, \dots$.

В статье получены достаточные условия равномерной сходимости решений задач (2), (4) к решению задачи (1), (3) при следующих основных предположениях: решение однородного уравнения (1) единственно; вариация $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$; $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$ при $n \to \infty$; оператор Γ_0 осуществляет биективное отображение между решениями однородной задачи (1), (3) и пространствомB.

Пусть операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ абсолютно непрерывны, т.е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a,b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a,b)$ и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$. Тогда уравнения (1), (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась в [1], [2], [3] (см. также библиографию в этих работах). Наиболее общие результаты получены в недавней статье [3].

Кроме граничных условий (3), (4) в данной работе для уравнений (1), (2) рассматриваются также следующие граничные условия

$$(\gamma_0^{(1)} y_0, \gamma_0^{(2)} y_0) \in \theta_0, \tag{5}$$

$$(\gamma_n^{(1)} y_n, \gamma_n^{(2)} y_n) \in \theta_n, \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{6}$$

где $\gamma_k^{(1)}, \gamma_k^{(2)} : \widetilde{C} \to B_1 \times B_2$ – линейные непрерывные отображения; B_1, B_2 – банаховы пространства; $\theta_k \subset B_1 \times B_2$ – линейные отношения, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Достаточные условия равномерной сходимости решений устанавливаются в предположении, что для (5), (6) выполняются требования, которые подобны соответствующим требованиям, наложенным на (3), (4), и, кроме того, последовательность линейных отношений $\{\theta_n\}$ сходится в обобщенном смысле к θ.

1. Решение интегральных уравнений

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a, b]$ (см., например, [4, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство

$$\mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}(\Delta_n)$$

со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ (включая "обычную" меру Лебега μ, для которой $\mu[\alpha, \beta) = \beta - \alpha$), продолжаем на некоторый отрезок $[a_0, b_0] \supset (a_0, b_0) \supset [a, b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a_0, b_0] \backslash [a, b]$.

Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ обозначим

$$\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_j \|\mathbf{p}(\Delta_j)\|,$$

где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi \in [a, b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$ справедливо равенство

$$\mathbf{p}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) d\rho. \tag{7}$$

Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры. Интеграл (7) сходится в смысле обычной нормы операторов ([4, гл. 5, с. 325]). Очевидно, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}) = \rho([a,b])$

Функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$, если существует интеграл (в смысле Бохнера)

$$\int\limits_{\Delta} \Psi(t)h(t)d\rho = \int\limits_{\Delta} (d\mathbf{p})h(t). \tag{8}$$

Из (8) следует, что если измеримая по Борелю функция h ограничена, то

$$\left\| \int\limits_{\Delta} (d\mathbf{p})h(t) \right\| \leqslant \sup_{t \in \Delta} \|h(t)\| \, \rho(\Delta). \tag{9}$$

Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на (a_0,b_0). Тогда функция $y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле (здесь $t_0, t \in (a_0,b_0)$). Действительно, если $t < t_1$, то $y(t_1) - y(t) = \int\limits_{[t,t_1)} (d\mathbf{p})h(s)$. Из (8) получаем

$$\|y(t_1) - y(t)\| \leqslant \int\limits_{[t,t_1)} \|\Psi(\xi)f(\xi)\| \, d\rho.$$

Требуемое утверждение следует из равенства $\bigcap_t [t,t_1) = \varnothing$.

Пусть $[l_1,l_2] \subset [a_0,b_0]$. Рассмотрим множество функций, измеримых по Борелю, ограниченных на $[l_1,l_2]$, непрерывных слева (в сильном смысле) на $(l_1,l_2]$ и принимающих значения в H. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t \in [l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1,l_2]$.

Теорема 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a,b]$, *функция* $g \in \widetilde{C}[a_0,b_0]$ *и* $g(t_0) = 0$. *Тогда для всех* $x_0 \in H$ *существует решение уравнения*

$$y(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + g(t) \quad (a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \;\; a_0 \leqslant t \leqslant b_0), \tag{10}$$

принадлежащее пространству $\widetilde{C}[a_0,b_0]$.

Доказательство. Сначала докажем существование такого отрезка $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, что уравнение (10) имеет единственное решение в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$ $(\delta > 0)$ для любого $x_0 \in H$. (Если $t_0 = a_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0, t_0 + \delta]$, а если $t_0 = b_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0]$.)

Пусть $t \to \rho(t)$ – какая-либо непрерывная слева функция, порождающая меру ρ. Через $\rho_s(t_0)$ обозначим скачок функции $t \to \rho(t)$ в точке t_0 (возможно, что $\rho_s(t_0) = 0$). Положим $\widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 = 0$, если $t \leqslant t_0$, и $\widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 = \mathbf{p}(\{t_0\})x_0$, если $t > t_0$. Кроме того, обозначим $r(t) = \rho(t)$ при $t \leqslant t_0$ и $r(t) = \rho(t) - \rho_s(t_0)$ при $t > t_0$. Функция r непрерывна в t_0. Определим операторную меру $\mathbf{r}$ равенством

$$\mathbf{r}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) dr(\xi).$$

В этих обозначениях уравнение (10) примет вид $y = Ay + z$, где

$$(Ay)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{r}) y(s) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\xi) y(\xi) dr(\xi), \;\; z(t) = x_0 + \widetilde{r}_{t_0}(t)x_0 + g(t). \tag{11}$$

Учитывая (9), (11) и непрерывность r, получим

$$\|(Ay)(t)\| \leqslant \sup_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\| \, |r(t) - r(t_0)| < \varepsilon \sup_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\| .$$

Следовательно, $\sup\limits_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|(Ay)(t)\| \leqslant \varepsilon \sup\limits_{t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|$. Используя непрерывность r, выберем такое $\delta > 0$, при котором $\varepsilon < 1$. Тогда $\|A\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} < 1$. Поэтому оператор $E - A$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$. Функция z тогда и только тогда равна нулю при всех t, когда $x_0 = 0$ и $g = 0$. Следовательно, существует единственное решение уравнения (10) на интервале $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Это решение находится по формуле $y = (E - A)^{-1} z$.

Докажем существование решения на всем интервале $[a_0, b_0]$. Для этого достаточно установить, что решение u, определенное на интервале (c, d), можно продолжить за пределы этого интервала, если $c \neq a_0$ или $d \neq b_0$. Предположим, что $d \neq b_0$. Сохраняем обозначения из приведенного выше доказательства, заменив t_0 на t_0' и x_0 на x_0'. Положим $t_0' = d$. Фиксируем $\varepsilon < 1/4$ и берем соответствующее $\delta > 0$ так, чтобы $t_0' + \delta \leqslant b_0$. Фиксируем точку $t_1 = t_0' - \delta/8$. Тогда для всех t со свойством $|t - t_1| < \delta/2$ выполняется неравенство

$$|r(t) - r(t_1)| \leqslant |r(t) - r(t_0')| + |r(t_0') - r(t_1)| < 2\varepsilon < 1/2. \tag{12}$$

Рассмотрим оператор

$$(By)(t) = \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{r})y(s) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi)y(\xi)dr(\xi).$$

Из (12) следует, что $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}} \|(By)(t)\| \leqslant (1/2) \sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}} \|y(t)\|$. Поэтому оператор $E-B$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta/2,t_1})$. Положим $z_1 = u(t_1) - g(t_1) + g(t) + \widetilde{r}_{t_0'}(t)x_0'$, $v = (E-B)^{-1}z_1$,

$$w(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi)v(\xi)dr(\xi) + g(t). \tag{13}$$

Тогда $v(t) = w(t)$ при $t \leqslant t_0'$. Поэтому в правой части равенства (13) можно при $t \leqslant t_0'$ заменить v на w, т.е.

$$w(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi)w(\xi)dr(\xi) + g(t). \tag{14}$$

Функция u также удовлетворяет интегральному уравнению (14), так как $r(t) = \rho(t)$ при $t \leqslant t_0'$. Следовательно, функции u, w, v совпадают на интервале $(t_1-(\delta/2), t_0']$ при любом x_0'. Из (13) вытекает, что существует предел $\lim_{t\to t_0-0} w(t) = w(t_0)$. Положим $x_0' = v(t_0) = w(t_0) = u(t_0)$. Функция v определена на интервале $(t_1-(\delta/2), t_0'+(3/8)\delta)$. Таким образом, функция u продолжена за точку t_0', причем продолженная функция удовлетворяет уравнению (10). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a,b]$, *функция* $g\in\widetilde{C}[a_0,b_0]$. *Тогда существует решение уравнения*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + g(t) \quad (a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0,\ a_0 \leqslant t \leqslant b_0), \tag{15}$$

принадлежащее пространству $\widetilde{C}[a_0,b_0]$.

Доказательство. Положим $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(t_0)$. Тогда $\widetilde{g}(t_0) = 0$ и уравнение (15) примет вид (10), где $x_0 = g(t_0)$, а $g(t)$ заменено на $\widetilde{g}(t)$. □

Замечание 1. Если y – решение уравнения (10) и $g(t_0)=0$, то $y(t_0) = x_0$; если же y – решение уравнения (15), то $y(t_0) = g(t_0)$.

Замечание 2. Вообще говоря, уравнение (10) имеет не единственное решение. Например, пусть на отрезке $[0,2]$ мера $\mathbf{p}$ задана в одномерном случае производящей функцией $p(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и -1 при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int_2^t y d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $w(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и 0, если $t > 1$. Отметим что уравнение $y = \int_0^t y d\mathbf{p}$ имеет единственное решение.

В пространстве $\widetilde{C}[a_0, b_0]$ определим оператор $\mathscr{P}$ равенством

$$\mathscr{P}u = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})u(s), \quad u \in \widetilde{C}[a_0, b_0], \tag{16}$$

где $a_0 \leqslant t \leqslant b_0$, $a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0$ и точка t_0 фиксирована. Из неравенства (9) получаем $\|\mathscr{P}u\| \leqslant \mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) \sup_{t \in [a_0, b_0]} \|u(t)\|$. Отсюда следует, что оператор $\mathscr{P}$ ограничен. Из следствия 1 вытекает, что оператор $E - \mathscr{P}$ сюръективен. Кроме того, оператор $E - \mathscr{P}$ обратим тогда и только тогда, когда решение уравнения (15) (или (10)) единственно. В этом случае решения уравнений (15), (10) имеют соответственно вид $y = (E - \mathscr{P})^{-1} g$ и $y = (E - \mathscr{P})^{-1}(x_0 + g)$ (в (10) $g(t_0) = 0$).

Обозначим через W операторное решение уравнения

$$W(t)x_0 = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})W(s)x_0, \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \ a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{17}$$

где $x_0 \in H$. Функция $W(\cdot)x_0$ непрерывна слева и $W(t_0)x_0 = x_0$. Решение (17) при заданном x_0 единственно тогда и только тогда, когда решение уравнения (15) (или (10)) единственно. В этом случае

$$W(\cdot)x_0 = (E - \mathscr{P})^{-1} x_0, \quad x_0 \in H, \tag{18}$$

и через $\mathscr{W}$ обозначим оператор $x_0 \to W(\cdot)x_0$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p})y(s) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds, \quad a_0 \leqslant t_0 \leqslant b_0, \ a_0 \leqslant t \leqslant b_0, \tag{19}$$

где $x_0 \in H$, $f \in L_1(H; a, b)$. Отметим, что решение этого уравнения при заданных f, x_0 единственно тогда и только тогда, когда оператор $E - \mathscr{P}$ обратим. Определим максимальный оператор L, порожденный уравнением (19). Область определения $\mathscr{D}(L)$ оператора L состоит из функций $y \in \widetilde{C}[a_0, b_0]$, для которых существует такой элемент $x_0 \in H$ и такая функция $f \in L_1(H; a, b)$, что выполняется (19). На $\mathscr{D}(L)$ оператор L

действует согласно формуле $Ly = f$. Таким образом, $L \subset \widetilde{C}[a_0, b_0] \times L_1(H; a, b)$. Оператор L замкнут. Это следует из (19) и непрерывности оператора $\mathscr{P}$ в пространстве $\widetilde{C}[a_0, b_0]$.

Замечание 3. Из способа продолжения меры $\mathbf{p}$ и "обычной" меры Лебега μ с отрезка $[a, b]$ на $[a_0, b_0]$ следует, что оператор L не зависит от выбора $[a_0, b_0]$ в следующем смысле. Если отрезок $[a_0, b_0]$ заменить на $[a_0', b_0']$ так, что $[a, b] \subset (a_0', b_0') \subset [a_0', b_0']$, то функции y_k совпадают на общей части отрезков $[a_0, b_0]$ и $[a_0', b_0']$. Кроме того, $L_1(H, d\mu; a, b) = L_1(H, d\mu; a_0, b_0)$ (в этом равенстве учтено, что мера μ продолжена нулем вне $[a, b]$). Кроме того, оператор L не зависит от выбора точки t_0. Действительно, заменим в (19) t_0 на t_1. Тогда элемент x_0 может измениться на другой. Соответствующая функция y по-прежнему принадлежит $\mathscr{D}(L)$ и $Ly = f$.

Теорема 2. *Пусть решение уравнения* (19) *единственно. Функция* $y \in \mathscr{D}(L)$ *и* $Ly = f$ *тогда и только тогда, когда существует такой элемент* $x \in H$, *что выполняется равенство*

$$y(\cdot) = W(\cdot)x + (E - \mathscr{P})^{-1}g, \quad g(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{20}$$

Доказательство. Требуемое утверждение вытекает из того, что равенство (19) можно записать в виде

$$y = (E - \mathscr{P})^{-1}(x + g) = (E - \mathscr{P})^{-1}x + (E - \mathscr{P})^{-1}g = W(\cdot)x + (E - \mathscr{P})^{-1}g.$$

□

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 2 оператор* $\mathscr{W}$ *непрерывно и взаимно однозначно отображает* H *на* $\ker L$.

Пусть B – банахово пространство; $\Gamma : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B$ – линейное непрерывное отображение. Сужение оператора L на множество функций $y \in \mathscr{D}(L)$, удовлетворяющих условию $\Gamma y = 0$, обозначим L_Γ, а сужение оператора Γ на $\ker L$ обозначим $\widetilde{\Gamma}$. Оператор L_Γ замкнут. Далее оператор называется непрерывно обратимым, если он имеет ограниченный всюду определенный обратный.

Лемма 1. *Пусть решение уравнения* (19) *единственно и оператор* $\widetilde{\Gamma}$ *взаимно однозначно отображает* $\ker L$ *на* B. *Тогда оператор* L_Γ *непрерывно обратим.*

Доказательство. Из условия леммы сразу же следует, что оператор L_Γ обратим. В (20) обозначим $z = (E - \mathscr{P})^{-1}g$. Если $y \in \mathscr{D}(L_\Gamma)$, то $\Gamma y = \widetilde{\Gamma} W(\cdot)x + \Gamma z = 0$. Отсюда следует, что $\widetilde{\Gamma}\mathscr{W}x = -\Gamma z$. По следствию 2 оператор $\widetilde{\Gamma}\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на B. Поэтому $x = -(\widetilde{\Gamma}\mathscr{W})^{-1}\Gamma z$. Из (20) получим, что $y \in \mathscr{D}(L_\Gamma)$

тогда и только тогда, когда

$$y(\cdot)=-W(\cdot)(\widetilde{\Gamma}\mathscr{W})^{-1}\Gamma z+z(\cdot), \quad z=(E-\mathscr{P})^{-1}g, \quad g(t)=\int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{21}$$

Равенства (21) влекут сюръективность оператора L_Γ. Лемма доказана. $\square$

2. Сходимость решений граничных задач

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t)=x_{0,k}+\int_{t_0}^{t}(d\mathbf{p}_k)y_k(s)+\int_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \quad a_0\leqslant t\leqslant b_0, \ a_0\leqslant t_0\leqslant b_0, \ k=0,1,2,\ldots, \tag{22}$$

где операторные меры $\mathbf{p}_k$ имеют ограниченную вариацию, $x_{0,k}\in H$, $f_k\in L_1(H;a,b)$. Максимальные операторы L_k, порожденные уравнениями (22) определяются так же, как оператор L по уравнению (19). Операторы $\mathscr{P}_k$, W_k $(k=0,1,2,\ldots)$ определяются соответственно по формулам (16), (17), в которых мера $\mathbf{p}$ заменена на $\mathbf{p}_k$, $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}_k$, W на W_k. Через $\mathscr{W}_k$ обозначается оператор $x_0\to W_k(\cdot)x_0$ $(x_0\in H)$.

Пусть B – банахово пространство; $\Gamma_k:\widetilde{C}[a_0,b_0]\to B$ – линейные непрерывные отображения; $k=0,1,2,\ldots$. Сужение оператора L_k на множество функций $y\in\mathscr{D}(L_k)$, удовлетворяющих условию $\Gamma_k y=0$, обозначим L_{Γ_k}, а сужение оператора Γ_k на $\ker L_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 3. *Пусть решение уравнения* (22) *при* $k=0$ *единственно; оператор* $\widetilde{\Gamma}_0$ *взаимно однозначно отображает* $\ker L_0$ *на* B *и* $\|\Gamma_n-\Gamma_0\|\to 0$, $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n-\mathbf{p}_0)\to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда при достаточно больших* n *операторы* L_{Γ_n} *непрерывно обратимы и последовательность* $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ *сходится к* $L_{\Gamma_0}^{-1}$ *в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Из единственности решения (22) при $k=0$ следует, что оператор $E-\mathscr{P}_0$ непрерывно обратим. Неравенство (9) влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\mathscr{P}_n\}$ к $\mathscr{P}_0$. Поэтому при достаточно больших n операторы $E-\mathscr{P}_n$ непрерывно обратимы. Следовательно, при достаточно больших n уравнения (22) имеют единственные решения. Отсюда и из (18) вытекает, что $\|W_n(t)-W_0(t)\|\to 0$ равномерно по t. Поэтому последовательность $\{\mathscr{W}_n\}$ сходится к $\mathscr{W}_0$ при $n\to\infty$. Это влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\widetilde{\Gamma}_n\mathscr{W}_n\}$ к $\widetilde{\Gamma}_0\mathscr{W}_0$.

По следствию 2 операторы $\mathscr{W}_n$ (при достаточно больших n) непрерывно и взаимно однозначно отображают H на $\ker L_n$. Отсюда получаем, что при достаточно больших n операторы $\widetilde{\Gamma}_n$ взаимно однозначно отображают $\ker L_n$ на B. По лемме 1 операторы

L_{Γ_n} (а также L_{Γ_0}) непрерывно обратимы. Из теоремы 2, примененной к операторам L_0 и L_k (при достаточно больших k), получаем

$$y_k(\cdot) = W_k(\cdot)x_{0,k} + (E - \mathscr{P}_k)^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \tag{23}$$

где $x_{0,k} \in H$, $f_k \in L_1(H; a, b)$, $y_k \in \mathscr{D}(L_k)$, $L_k y_k = f_k$. Из (21) следует

$$y_k(\cdot) = -W_k(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_k \mathscr{W}_k)^{-1}\Gamma_k z_k + z_k(\cdot), \quad z_k = (E - \mathscr{P})^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds.$$

Отсюда получаем, что последовательность $\{L_{\Gamma_n}^{-1}\}$ сходится при $n \to \infty$ к $L_{\Gamma_0}^{-1}$ в равномерной операторной топологии. □

Следствие 3. *Пусть выполняются условия теоремы 3, $f_n \to f$ в $L_1(H; a, b)$ и в граничных условиях* (4) *$c_n \to c_0$. Тогда при достаточно больших n задача* (2), (4) *имеет единственное решение y_n и $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ равномерно по t.*

Доказательство. Если в граничных условиях (4) $c_n = 0$, то утверждение следствия вытекает непосредственно из теоремы 3. При произвольных $c_n \in B$ требуемое утверждение получается из следующего равенства

$$y_k(\cdot) = -W_k(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_k \mathscr{W}_k)^{-1}(\Gamma_k z_k - c_k) + z_k(\cdot), \quad z_k = (E - \mathscr{P}_k)^{-1}g_k, \quad g_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s)ds, \tag{24}$$

справедливого для $k = 0$ и для достаточно больших k. Равенство (24) доказывается так же, как равенство (21). □

Переходим к рассмотрению задач с граничными условиями (5), (6).

Далее будут использованы некоторые понятия из теории линейных отношений. Пусть B_1, B_2 – банаховы пространства. Линейным отношением ϑ называется любое линейное многообразие $\vartheta \subset B_1 \times B_2$. Упорядоченная пара обозначается символом $(\cdot, \cdot)$. Обратное к ϑ отношение ϑ^{-1} определяется как отношение, состоящее из таких пар (x_2, x_1), что $(x_1, x_2) \in \vartheta$. Отношение ϑ называется обратимым, если ϑ^{-1} является оператором, и непрерывно обратимым, если ϑ^{-1} – ограниченный всюду определенный оператор. Линейные операторы считаются линейными отношениями. Более подробная терминология по линейным отношениям имеется, например, в [5].

Последовательность замкнутых линейных отношений $\vartheta_n \subset B_1 \times B_2$ $(n = 1, 2, ...)$ называется сходящейся в обобщенном смысле к отношению $\vartheta_0 \subset B_1 \times B_2$ (ср. [6, гл. 4, с. 263]), если существуют такое банахово пространство B_0 и такая последовательность $\{K_m\}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ ограниченных линейных операторов $K_m : B_0 \to B_1 \times B_2$, что K_m взаимно однозначно отображает B_0 на ϑ_m и последовательность $\{K_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ сходится к K_0 в равномерной операторной топологии.

Далее нам потребуется понятие *пространства граничных значений* (ПГЗ). Пусть $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, B_1, B_2 – банаховы пространства, $T \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ – замкнутый линейный оператор, $\delta : \mathscr{D}(T) \to B_1 \times B_2$ – линейный оператор, $\delta^{(j)} = P_j\delta$, $j = 1, 2$ (P_j обозначает естественную проекцию на множество G_j в декартовом произведении $G = G_1 \times G_2$). Тройка (B_1, B_2, δ) называется ПГЗ для оператора T (см. [7] и библиографию там), если δ непрерывно отображает область определения $\mathscr{D}(T)$ (с нормой графика T) на $B_1 \times B_2$ и сужение $\delta^{(1)}$ на $\ker T$ является взаимно однозначным отображением $\ker T$ на B_1 (в [7] четверка $(B_1, B_2, \delta^{(1)}, \delta^{(2)})$ называлась ПГЗ). Через $\widehat{\mathscr{T}}$, $\widehat{\mathscr{T}_0}$ обозначим сужения T на $\ker \delta^{(1)}$ и $\ker \delta$ соответственно, $\widehat{\mathscr{T}} = T\,|_{\ker \delta^{(1)}}$, $\widehat{\mathscr{T}_0} = T\,|_{\ker \delta}$. Определим оператор $\Phi_\delta : B_1 \to B_2$ равенством $\Phi_\delta = \delta^{(2)}(\delta^{(1)}|_{\ker T})^{-1}$. Отметим, что оператор Φ_δ ограничен, а оператор $\widehat{\mathscr{T}}$ в случае, когда $\mathscr{R}(T) = \mathbf{B}_2$, непрерывно обратим. Из определения ПГЗ следует, что между операторами $\mathscr{T}$ со свойством $\widehat{\mathscr{T}_0} \subset \mathscr{T} \subset T$ и линейными отношениями $\theta \subset B_1 \times B_2$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое условием: $y \in \mathscr{D}(\mathscr{T})$ тогда и только тогда, когда $\delta y \in \theta$. В этом случае обозначаем $\mathscr{T} = T_\theta$. Оператор T_θ и отношение θ одновременно замкнуты или нет.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{R}(T) = \mathbf{B}_2$. Оператор T_θ тогда и только тогда непрерывно обратим, когда непрерывно обратимо отношение $\theta - \Phi_\delta$. Элемент $y \in \mathscr{D}(T)$ тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{D}(T_\theta)$, когда y имеет вид*

$$y = (\delta^{(1)}|_{\ker T})^{-1}(\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u + \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h, \tag{25}$$

где $u = \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h$, $h \in \mathbf{B}_2$. При этом $T_\theta y = h$.

Доказательство. Первая часть теоремы доказана в [7]. Докажем, что y принадлежит $\mathscr{D}(T_\theta)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство (25). Из (25) следует $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u$, $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta(\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u + \delta^{(2)}u$. Отсюда $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta\delta^{(1)}y + \delta^{(2)}u$. Умножая это равенство на $(\theta - \Phi_\delta)^{-1}$, получим $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}(\delta^{(2)}y - \Phi_\delta\delta^{(1)}y)$. Поэтому пара $(\delta^{(1)}y, \delta^{(2)}y) \in \theta$, т.е. $y \in \mathscr{D}(T_\theta)$.

Обратно, пусть $y \in \mathscr{D}(T_\theta)$. Это означает, что пара $(\delta^{(1)}y, \delta^{(2)}y) \in \theta$. Элемент y представим в виде $y = v + u$, где $v \in \ker T$, $u = \widehat{\mathscr{T}}^{-1}h$. Отсюда получаем $\delta^{(1)}y = \delta^{(1)}v$ и $\delta^{(2)}y = \delta^{(2)}v + \delta^{(2)}u$. Поэтому $\delta^{(2)}y = \Phi_\delta\delta^{(1)}y + \delta^{(2)}u$. Это влечет $\delta^{(1)}y = (\theta - \Phi_\delta)^{-1}\delta^{(2)}u$. Отсюда следует (25). Теорема доказана. □

В случае, когда тройка (B_1, B_2, δ_k) является ПГЗ для оператора L_k, используем обозначения, аналогичные приведенным выше, а именно $\widehat{\mathscr{L}_k} = L_k \mid_{\ker \delta_k^{(1)}}$, $\widehat{\mathscr{L}_{k,0}} = L_k \mid_{\ker \delta_k}$, $L_{k,\theta}$ – оператор, определяемый условием: $y \in \mathscr{D}(L_{k,\theta})$ тогда и только тогда, когда $\delta y \in \theta$.

Из теоремы 4 получаем

Следствие 4. *Пусть тройка (B_1, B_2, δ_k) является ПГЗ для оператора L_k и оператор L_{k,θ_k} непрерывно обратим. Тогда $\mathscr{D}(L_{k,\theta_k})$ состоит из функций вида*

$$y_k = (\delta_k^{(1)}|_{\ker L_k})^{-1}(\theta_k - \Phi_{\delta_k})^{-1}\delta_k^{(2)} u_k + \widehat{\mathscr{L}_k^{-1}} f_k, \quad u_k = \widehat{\mathscr{L}_k^{-1}} f_k, \quad f_k \in L_1(H; a, b). \tag{26}$$

Пусть $\gamma_k : \widetilde{C}[a_0, b_0] \to B_1 \times B_2$ – непрерывные линейные отображения $(k = 0, 1, 2, ...)$. Тогда сужения $\delta_k = \gamma_k|_{\mathscr{D}(L_k)}$ непрерывно отображают пространство $\mathscr{D}(L_k)$ (с нормой графика) в $B_1 \times B_2$. Относительно отображения δ_0 дополнительно предположим, что тройка (B_1, B_2, δ_0) является ПГЗ для оператора L_0, т.е. отображение $\delta_0 : \mathscr{D}(L_0) \to B_1 \times B_2$ сюръективно и сужение $\delta_0^{(1)}|_{\ker L_0} : \ker L_0 \to B_1$ является биекцией.

Теорема 5. *Пусть решение уравнения* (22) *при* $k = 0$ *единственно, тройка* (B_1, B_2, δ_0) *является ПГЗ для оператора* L_0 *и оператор* $L_{0,\theta}$ *непрерывно обратим; пусть далее* $\|\gamma_n - \gamma_0\| \to 0$, $\theta_n \to \theta_0$ *(в обобщенном смысле),* $\mathbf{V}_{[a_0,b_0]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда при достаточно больших* n *тройка* (B_1, B_2, δ_n) *является ПГЗ для оператора* L_n*, оператор* L_{n,θ_n} *непрерывно обратим и последовательность* $\{L_{n,\theta_n}^{-1}\}$ *сходится при* $n \to \infty$ *к* L_{0,θ_0}^{-1} *в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Как установлено в доказательстве теоремы 3, при достаточно больших k уравнения (22) имеют единственные решения. Теорема 2 влечет справедливость равенства (23) при $k = 0$ и при достаточно больших k.

Рассмотрим пространство $\widetilde{\mathscr{C}} = H \times L_1(H; a, b)$ и линейные операторы $U_k : \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}(L_k)$ (на $\mathscr{D}(L_k)$ норма графика), сопоставляющие каждой паре $(x, f) \in \widetilde{\mathscr{C}}$ функцию $y \in \mathscr{D}(L_k)$ по формуле (23), в которой $x_{0,k}$ заменено на x, а f_k на f. Оператор U_k непрерывно и взаимно однозначно отображает $\widetilde{\mathscr{C}}$ на $\mathscr{D}(L_k)$. В доказательстве теоремы 3 установлено, что последовательность $\{\mathscr{W}_n\}$ сходится к $\mathscr{W}_0$ при $n \to \infty$. Из сходимости $\{(E - \mathscr{P}_n)^{-1}\}$ к $(E - \mathscr{P}_0)^{-1}$ получаем, что последовательность $\{U_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к U_0 в равномерной операторной топологии. Отсюда и из сходимости $\|\gamma_n - \gamma_0\| \to 0$ вытекает, что последовательность $\{\delta_n U_n\}$ сходится к $\delta_0 U_0$ в равномерной операторной топологии. По условию теоремы, $\delta_0 : \mathscr{D}(L_0) \to B_1 \times B_2$ – сюръективное отображение. Следовательно, отображение $\delta_0 U_0$ сюръективно. Поэтому при больших n таким же отображением является $\delta_n U_n$. Таким образом, при больших n оператор δ_n отображает $\mathscr{D}(L_n)$ на $B_1 \times B_2$.

Из сходимости $\|\gamma_n-\gamma_0\|\to 0$ вытекает, что последовательность $\{\delta_n^{(1)}\mathscr{W}_n\}$ сходится в равномерной операторной топологии к $\delta_0^{(1)}\mathscr{W}_0$. Следовательно, при больших n сужение $\delta_n^{(1)}$ на $\ker L_n$ является взаимно однозначным отображением на B_1. Итак, доказано, что при достаточно больших n тройка (B_1,B_2,δ_n) является ПГЗ для оператора L_n.

При $k=0$ и при достаточно больших k выполняется $(\delta_k^{(1)}|_{\ker L_k})^{-1}=\mathscr{W}_k(\delta_k^{(1)}\mathscr{W}_k)^{-1}$. Отсюда и из следствия 2 получаем, что последовательности $\{(\delta_n^{(1)}|_{\ker L_n})^{-1}\}$, $\{\Phi_{\delta_n}\}$ сходятся в равномерной операторной топологии к $(\delta_0^{(1)}|_{\ker L_0})^{-1}$, Φ_{δ_0} соответственно.

По условию, последовательность $\{\theta_n\}$ сходится в обобщенном смысле к θ_0. Это эквивалентно тому, что $\{(\theta_n-\Phi_{\delta_n})^{-1}\}$ сходится в обобщенном смысле к $(\theta_0-\Phi_{\delta_0})^{-1}$. Поэтому при достаточно больших n отношения $\theta_n-\Phi_{\delta_n}$ и, следовательно, операторы L_{n,θ_n} непрерывно обратимы. Поэтому при достаточно больших k справедливо (26).

Докажем, что в равномерной операторной топологии последовательность $\{\widehat{\mathscr{L}_n^{-1}}\}$ сходится при $n\to\infty$ к $\widehat{\mathscr{L}_0^{-1}}$. С этой целью обозначим

$$\mathscr{Q}_k f=(E-\mathscr{P}_k)^{-1}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds,\quad f\in L_1(H;a,b).$$

Тогда последовательность $\{\mathscr{Q}_n\}$ сходится к $\mathscr{Q}_0$ в равномерной операторной топологии. Из следствия 2 вытекает существование такого линейного ограниченного оператора $G_k: L_1(H;a,b)\to H$, что $\widehat{\mathscr{L}_k^{-1}}f-\mathscr{Q}_k f=\mathscr{W}_k G_k f$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $\delta_k^{(1)}$ и учитывая, что $\delta_k^{(1)}\widehat{\mathscr{L}_k^{-1}}f=0$, получим $G_k f=(\delta_k^{(1)}\mathscr{W}_k)^{-1}\delta_k^{(1)}\mathscr{Q}_k f$. Отсюда следует, что в равномерной операторной топологии при $n\to\infty$ последовательность $\{G_k\}$ сходится к $G_0=(\delta_0^{(1)}\mathscr{W}_0)^{-1}\delta_0^{(1)}\mathscr{Q}_0$. Поэтому последовательность $\{\widehat{\mathscr{L}_n^{-1}}-\mathscr{Q}_n\}$ сходится к $\widehat{\mathscr{L}_0^{-1}}-\mathscr{Q}_0$. Из равенства $\widehat{\mathscr{L}_k^{-1}}=\mathscr{Q}_k-(\mathscr{Q}_k-\widehat{\mathscr{L}_k^{-1}})$ вытекает сходимость последовательности $\{\widehat{\mathscr{L}_n^{-1}}\}$ к $\widehat{\mathscr{L}_0^{-1}}$. Теперь из (26) получаем, что последовательность $\{L_{n,\theta_n}^{-1}\}$ сходится к L_{0,θ_0}^{-1}. Теорема доказана. □

Следствие 5. *Пусть выполняются условия теоремы 5, последовательность функций* $\{f_n\}$ *сходится к* f_0 *в* $L_1(H;a,b)$ *и* y_0 *– решение задачи* (1), (5). *Тогда при достаточно больших* n *задача* (2), (6) *имеет единственное решение и* $\|y_n(t)-y_0(t)\|\to 0$ *при* $n\to\infty$ *равномерно по* t.

Замечание 4. Граничные условия (5), (6) могут быть сведены к условиям (3), (4) при условии, что $(\theta_k-\Phi_{\delta_k})^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором. В этом случае положим $B=B_1$, $\Gamma_k y_k=\gamma_k^{(1)}y_k-(\theta_k-\Phi_{\delta_k})^{-1}(\gamma_k^{(2)}y_k-\Phi_{\delta_k}\gamma_k^{(1)}y_k)$ $(k=0,1,2,\ldots)$. Из [7] следует, что $y_k\in\mathscr{D}(L_{k,\theta_k})$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_k y_k=0$.

Список литературы

1. Левин, А. Ю. Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Монография / А. Ю. Левин. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 228 с.

   LEVIN, A. Yu. (2011) *Problems of the qualitative theory of an ordinary differential equation.* Yaroslavl: Yar. St. Univer.

2. Кигурадзе, И. Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНИТИ, 1987. — Т. 30. — С. 3–103.

   KIGURADZE, I. T. (1987) Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *VINITI, Contemporary Problems of Mathematics. Latest Achievements.* 30. p. 3–103.

3. Кодлюк, Т. И., Михайлец, В. А., Рева, Н. В. Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журнал. — Киев, 2013. — Т. 65, № 1. — С. 70–81.

   KODLYUK, T. I. & MIKHAILETS, V. A. & REVA, N. V. (2013) Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 65 (No 1). p. 77–90.

4. Березанский, Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова Думка, 1965. — 798 с.

   BEREZANSKI, Yu. M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

5. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи матем. наук. — М.: Наука, 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

   BASKAKOV, A. G. (2013) Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys.* 68 (No 1). p. 69–116.

6. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

   KATO T. (1966) *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

7. Брук, В. М. О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами // Дифференциальные уравнения. — М.: МАИК Наука/Interperiodica, 2007. — Т. 43, №1. — С. 21–27.

   BRUK, V. M (2007) On the spectrum of linear relations associated with uniformly well-posed problems. *Differential Equations.* 43 (No 1). p. 21–27.

Статья поступила в редакцию 13.07.2015

УДК: 517.983

MSC2010: 34K06, 47E05

КОРНИ ОПЕРАТОРНОГО “АЛГЕБРАИЧЕСКОГО” УРАВНЕНИЯ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Л. Ю. Кабанцова, И. Д. Коструб, Т. И. Смагина

Воронежский государственный университет
факультет прикладной математики, информатики и механики
кафедра нелинейных колебаний
394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1, Российская Федерация
e-mail: *smagin@math.vsu.ru*

Roots operator “algebraic” equation and bounded solutions of differential equation of second order in Banach space.

Kabantsova L. Y., Kostrub I. D., Smagina T. I.

Abstract. In the work the question of invertebelity of the differential operator investigated using square roots operator “algebraic” equations with specic properties. Let $End(E)$ — Banach algebra of linear bounded operators acting in a Banach space E, $C_b = C_b(\mathbb{R}, E)$ — the Banach space of continuous bounded functions $x : \mathbb{R} \to E$ with the norm $\|x\|_c = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$.

The problem of bounded solutions of differential equations

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = g, \tag{1}$$

where $B, C \in End(E)$, $g \in C_b$, and the corresponding operator $L : D(L) \subset C_b \to C_b$, acting on the rule $Lx = \ddot{x} + B\dot{x} + Cx$. Its domain of definition $D(L)$ – linear subspace of $C_b^2 = C_b^2(\mathbb{R}, E)$ of functions $x \in C_b$. Then (1) is equivalent to operator $Lx = g$. The study of equation (1) reduces to the study the first order equation over the Cartesian product $E^2 = E \times E$. In the space $C_b(\mathbb{R}, E^2)$ is entered, the operator $\mathscr{L}$ with domain of definition $D(\mathscr{L}) = C_b^1(\mathbb{R}, E^2) \subset C_b(\mathbb{R}, E^2)$, acting on the rule $\mathscr{L}y = \dot{y} - \mathscr{A}y$.

Putting in equation (1) $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$, we get the following equation the first order

$$\dot{y} = Ay + f, \tag{2}$$

where $f = (0, g)$ and the operator $A \in End(E^2)$ is determined by the operator the matrix $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}$.

Used research method of equation (1) based on studying in a Banach algebra $End(E)$ "algebraic" operator equation

$$X^2 + BX + C = 0. \tag{3}$$

Two roots Λ_1 and Λ_1 of the equation (3) are called *separated* if the operator $\Lambda_1 - \Lambda_2$ is reversible in $End(E)$.

Theorem 1. *If the equation (3) has two roots $\Lambda_1, \Lambda_2 \in End(E)$, which are separated, the operator $A \in End(E^2)$ such a diagonal operator $\Lambda \in End(E^2)$, determined by matrix $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$. This is the relation*

$$A = U^{-1}\Lambda U, \quad \textit{where} \tag{4}$$

$$U = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Theorem 2. *Let Λ_1, Λ_2 – separated by a pair of roots of the equation (3). Then for the invertibility of the operators L and $\mathscr{L}$ is necessary and sufficient that*

$$[\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)] \cap i\mathbb{R} = \varnothing. \tag{6}$$

Obtained the representation of the inverse operator in terms of the roots square operator "algebraic", equations with specific properties. An example in which the roots are expressed using the coefficients of the differential equation.

Key words: differential equations, bounded solutions, Banach space.

Введение. Основные результаты

Пусть E — комплексное банахово пространство, $End(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в E, $C_b = C_b(\mathbb{R}, E)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций $x : \mathbb{R} \to E$ с нормой $\|x\|_c = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = g, \tag{1}$$

где $B, C \in End(E)$, $g \in C_b$, и соответствующий ему оператор $L : D(L) \subset C_b \to C_b$, действующий по правилу

$$Lx = \ddot{x} + B\dot{x} + Cx.$$

Его областью определения $D(L)$ является линейное подпространство $C_b^2 = C_b^2(\mathbb{R}, E)$ функций $x \in C_b$ таких, что $x, \dot{x}, \ddot{x} \in C_b$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$Lx = g.$$

Изучение уравнения (1) можно свести к исследованию уравнения первого порядка в декартовом произведении $E^2 = E \times E$, элементами которого являются пары $y = (y_1, y_2)$, где $y_1, y_2 \in E$, с нормой $\|y\| = \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}$.

Полагая $x = y_1$, $\dot{x} = y_2$, сведём уравнение (1) к уравнению первого порядка

$$\dot{y} = Ay + f, \tag{2}$$

где $f = (0, g)$, а оператор $A \in End(E^2)$ определяется операторной матрицей

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix},$$

т. е. для $(y_1, y_2) \in E^2$ считаем $A(y_1, y_2) = (y_2, -Cy_1 - By_2)$, $(y_1, y_2) \in E^2$.

Спектром $\sigma(L)$ операторного пучка $L : \mathbb{C} \to End(E)$, где $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$, называется множество всех тех комплексных λ, для которых оператор $L(\lambda)$ не имеет обратного в $End(E)$. Множество $\varrho(L) = \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ называется *резольвентным множеством* пучка L.

Лемма 1. *Спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ (резольвентное множество $\varrho(\mathscr{A}) = \mathbb{C}\setminus\sigma(\mathscr{A})$) совпадает со спектром $\sigma(L)$ (резольвентным множеством $\varrho(L)$) операторного пучка. Резольвента $(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} : \varrho(\mathscr{A}) \to End(E)$ оператора $\mathscr{A}$ связана с $L^{-1}(\lambda)$ для $\lambda \in \varrho(L)$ следующим образом*

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda)(\lambda I + B) & L^{-1}(\lambda) \\ \lambda L^{-1}(\lambda I + B) - I & \lambda L^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 1 позволяет свести изучение спектральных свойств оператора L к изучению спектральных свойств оператора $\mathscr{L}$.

В [3] был предложен эффективный метод исследования уравнения (1), основанный на изучении "алгебраического" операторного уравнения

$$X^2 + BX + C = 0, \tag{4}$$

в банаховой алгебре $End(E)$.

Уравнение (4) может иметь, вообще говоря, бесчисленное множество корней. Два корня Λ_1 и Λ_1 назовём *разделёнными*, если оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2$ обратим (инъективен и сюръективен одновременно) в $End(E)$. Условия существования таких корней приведены, например, в [1, с. 135], [3].

Теорема 1. *Если уравнение (4) имеет два корня $\Lambda_1, \Lambda_2 \in End(E)$, которые являются разделёнными, то оператор $A \in End(E^2)$ подобен диагональному оператору $\Lambda \in End(E^2)$, задаваемому матрицей*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При этом имеет место соотношение

$$A = U^{-1}\Lambda U, \tag{5}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Как показал пример, построенный Маркусом [4], непрерывный спектр корня не всегда содержится в спектре операторного пучка L. Однако, из подобия операторов [5] для разделённых корней сразу же вытекают равенства

$$\sigma(A) = \sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2), \tag{7}$$

$$\sigma_d(A) = \sigma_d(\Lambda_1) \cup \sigma_d(\Lambda_2),\ \sigma_c(A) = \sigma_c(\Lambda_1) \cup \sigma_c(\Lambda_2),\ \sigma_r(A) = \sigma_r(\Lambda_1) \cup \sigma_r(\Lambda_2).$$

Здесь через σ_d, σ_c, σ_r обозначены дискретный, непрерывный и остаточный спектр соответствующего оператора.

В пространстве $C_b(\mathbb{R}, E^2)$ введём оператор $\mathscr{L}$ с областью определения $D(\mathscr{L}) = C_b^1(\mathbb{R}, E^2) \subset C_b(\mathbb{R}, E^2)$, действующий по правилу

$$\mathscr{L}y = \dot{y} - \mathscr{A}y.$$

Соотношение (7) позволяет сформулировать условия обратимости [1, с. 120] оператора $\mathscr{L} : D(\mathscr{L}) \to C_b(\mathbb{R}, E^2)$ в терминах корней уравнения (4).

Теорема 2. *Пусть Λ_1, Λ_2 – разделённая пара корней уравнения (4). Тогда для обратимости операторов L и $\mathscr{L}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$[\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)] \cap i\mathbb{R} = \varnothing. \tag{8}$$

1. Представление ограниченного решения с помощью обратного оператора

Далее предполагается, что уравнение (4) имеет два корня Λ_2, $\Lambda_2 \in End(E)$, которые являются разделёнными, и выполнено условие (8). В таком случае существуют [1, с. 120] обратные операторы $\left(\dfrac{d}{dt} - \Lambda_k\right)^{-1} \in End(C_b)$, $k = 1, 2$, причём

$$\left(\frac{d}{dt} - \Lambda_k\right)^{-1} f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_k(t-s) f(s)\, ds = G_k * f. \tag{9}$$

Здесь $G_k : \mathbb{R} \to End(E)$ – функция Грина в задаче об ограниченных решениях уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} - \Lambda_k\right) x = f, \quad k = 1, 2.$$

Условия (8) позволяют выписать явный вид функции Грина.

Так как спектры корней Λ_1, Λ_2 не пересекаются с мнимой осью, то они представимы в виде $\sigma(\Lambda_k) = \sigma_k^- \bigcup \sigma_k^+$, где спектральные множества σ_k^-, σ_k^+ $(k = 1, 2)$ лежат в левой и правой полуплоскостях соответственно. Отметим, что одно из этих множеств σ_k^-, или σ_k^+ может быть пустым. Тогда [1, с. 119]

$$G_k(t) = \begin{cases} -e^{\Lambda_k t} P_k^+, & t \le 0, \\ e^{\Lambda_k t} P_k^-, & t > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь через $P_k^{\pm}$ обозначены спектральные проекторы Рисса, отвечающие спектральным множествам $\sigma_k^{\pm}$, $(k = 1, 2)$. Если $\sigma_k^+ = \varnothing$, то $P_k^+ = 0$, $P_k^- = I$. Аналогично, если $\sigma_k^- = \varnothing$, то $P_k^- = 0$, $P_k^+ = I$.

Из условия (5) подобия операторов вытекает соотношение

$$\mathscr{L}^{-1} = U^{-1} \left(\frac{d}{dt} - \Lambda\right)^{-1} U. \tag{11}$$

Оператор $\left(\frac{d}{dt} - \Lambda\right)^{-1} : C_b^1(\mathbb{R}, E) \subset C_b \to C_b$ имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt} - \Lambda\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} - \Lambda_1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt} - \Lambda_2\right)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем, что для $f = (f_1, f_2)$

$$\mathscr{L}^{-1} f = U^{-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} - \Lambda_1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt} - \Lambda_2\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Из приведённых рассуждений с учётом (9) следует

Теорема 3. *Пусть Λ_1, Λ_2 – разделённая пара корней уравнения (5) и выполнено условие (8). Тогда имеет место следующее представление*

$$\mathscr{L}^{-1} f = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} [-\Lambda_2 G_1 * (f_1 + f_2) + G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)] \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} [\Lambda_1 G_1 * (f_1 + f_2) - G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)] \end{pmatrix},$$

для $f = (f_1, f_2) \in C_b \times C_b$. Для обратного оператора L^{-1} справедливо представление

$$(L^{-1}g)(t) = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} [G_2(t-s) - G_1(t-s)]g(s)\, ds. \tag{13}$$

2. Задача об ограниченных решениях неполного дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнение (1) с $B = 0$, то есть уравнение

$$\ddot{x} + Cx = g. \tag{14}$$

Здесь $g \in C_b$, $C \in End(E)$ и пусть выполнено условие

$$\sigma(C) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing. \tag{15}$$

Тогда существует оператор $\Lambda_1 \in End(E)$ такой, что $\Lambda_1^2 = -C$, а через $\Lambda_2 = -\Lambda_1$. Тогда эти операторы образуют разделённую пару корней уравнения

$$X^2 + C = 0 \tag{16}$$

и их спектры в силу (15) не пересекаются с мнимой осью.

Пусть $\sigma(\Lambda_k) = \sigma_k^- \cup \sigma_k^+$, где σ_k^-, σ_k^+ – спектральные множества оператора Λ_k, лежащие в левой и правой полуплоскостях соответственно, а через P_k^-, P_k^+ – соответствующие спектральные проекторы оператора Λ_k $(k = 1, 2)$. Ясно, что $\sigma_2^- = -\sigma_1^+$.

Из (13) и представления (10) для функции Грина следует

Теорема 4. *При выполнении условия (14) оператор $L : D(L) \subset C_b \to C_b$ обратим в $End(C_b)$ и обратный задаётся формулой*

$$(L^{-1}g)(t) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{t} -e^{-\Lambda_1(t-s)}P_1^- g(s)\, ds + \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\Lambda_1(t-s)}P_1^+ g(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\Lambda_1(t-s)}P_1^+ g(s)\, ds - \int\limits_{t}^{\infty} e^{\Lambda_1(t-s)}P_1^- g(s)\, ds\right].$$

В частности, если $\sigma_1^- = \varnothing$, то

$$(L^{-1}g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\Lambda_1(t-s)}g(s)\, ds + \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\Lambda_1(t-s)}g(s)\, ds,$$

а если $\sigma_1^+ = \varnothing$, *то*

$$(L^{-1}g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\Lambda_1(t-s)}g(s)\,ds - \int\limits_{t}^{\infty} e^{\Lambda_1(t-s)}g(s)\,ds.$$

Здесь $\Lambda_1 = (-C)^{1/2}$.

Заключение

В работе получены следующие результаты: вопросы существования и представления единственного ограниченного на всей оси решения дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве исследованы с помощью корней квадратного операторного "алгебраического"уравнения, обладающих определёнными свойствами. Получено представление функции Грина в терминах таких корней. Приведён пример, в котором корни выражены через коэффициенты дифференциального уравнения. Отметим, что условия разрешимости дифференциальных уравнений с различными коэффициентами, или, что то же, обратимости соответствующих дифференциальных и разностных операторов, можно найти, например, в [1], [2], [6].

Список литературы

1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн.. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

   DALECKI, J. AND CRANE, M. (1970) *Stability of solutions of differential equations in Banach space.* Moscow: Nauka. 534 p.

2. Перов, А.И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка : монография / А.И.Перов, И.Д.Коструб. — Воронеж: Научная книга, 2013. — 227 с.

   PEROV, A. AND KOSTRUB I. (2013) *Bounded solutions of nonlinear vector-matrix differential equations n-th order / monograph.* Voronezh : Scientific book. 227 p.

3. Крейн, М.Г. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуума / М.Г.Крейн, Г.К.Лангер. — Труды Международного симпозиума в Тбилиси "Приложение теории фукнций в механике сплошной среды". – М: Наука, 2, 1965. — с.

   KREIN, M. AND LANGER, G. (1965) *On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of the continuum.* Moscow: Nauka. .

4. Маркус, А.С. О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку / А.С. Маркус, И.В. Мереуца. — Известия АН СССР. – 1973, Сер.мат., Т. 37, №5. — 1108 – 1131 с.

   MARCUS, A. AND MEREUTA, I. (1973) *About the complete set of roots of the operator equation corresponding to the polynomial beam.* Izvestiya An SSSR. V. 37, №5. P. 1108–1131

5. Баскаков, А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 1987. — 165 с.

   BASKAKOV A. (1987) *Harmonic analysis of linear operators.* Voronezh: VSU. 165 p.

6. Баскаков, А.Г. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка / А.Г. Баскаков, А.Ю. Дуплищева. — Известия РАН. – 2015, Сер.мат., Т. 79, №2. — С. 3 – 20 с.

   BASKAKOV, A. AND DUPLISCHEVA, A. (2015) *Differential operators and operator of the matrix of second order.* Izvestiya RAN. P. 79, №2.P. 3–20

Статья поступила в редакцию 04.06.2015

УДК: 517.958:531.32 + 519.635.1
MSC2010: 35J55

ПРОЕКЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВИХРЕВЫХ 2D ТЕЧЕНИЙ В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

© В. Г. Лежнев, А. Н. Марковский

Кубанский государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук
Кафедра математических и компьютерных методов
ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Российская Федерация
e-mail: *lzhnvv@mail.ru, mark@kubsu.ru*

Projection algorithms for 2D vortex flows in complicated domains.

Lezhnev V. G., Markovsky A. N.

Abstract. Plane-parallel flows of an incompressible fluid in a bounded domain with minimum mean square vorticity are considered. The flow function is biharmonic function. Such flows include, for example, the stationary solution of 2D Stocks problem with a potential right-hand side. If the velocity on the boundary is specified, then definition of the flow is reduced to the solution of the boundary value problem of the biharmonic equation. The projection algorithm for solving boundary value problems for the biharmonic equation in complicated domains is presented. There are used systems of functions, full on the domain boundary, creating the basis of non-grid method (method of basis potentials) of the hydrodynamic boundary value problems solution. The concept of own domain vortex – attached vortex flow of Roben - is considered. It is also considered an extended formulation of the building a plane-parallel flows problem – definition of flows by the boundary values of the flow function only when it is not necessary to set speed limits (that are, generally speaking, not known, as, for example, for Venturi funnel). The desired density of vortices belongs to the subspace of harmonic functions, obtained complete system of potentials in this subspace allows to construct a convergent projection algorithms; the density of vortices must be orthogonal to its own domain vortex. Numerical flows for the funnel domain with the condition of adhesion on the boundary and in the extended formulation are represented.

Key words: plane-parallel flows, flow function, biharmonic problem, Stocks problem, Roben potential, basis potentials method.

Введение

Рассматриваются плоскопараллельные течения с минимальной среднеквадратической завихренностью. Функция тока является бигармонической функцией. К таким течениям относятся, например, решения стационарной 2D задачи Стокса с потенциальной правой частью. Рассматривается также расширенная формулировка задачи построения плоскопараллельных течений (только по граничным значениям функции тока), когда не требуется задания граничных скоростей (вообще говоря, не известных как, например, для трубки Вентури). Искомая плотность вихрей принадлежит подпространству гармонических функций, полученная полная система потенциалов в этом подпространстве позволяет строить сходящиеся проекционные алгоритмы для сложных областей; плотность вихрей должна быть ортогональна собственному вихрю области (присоединенному вихрю течения Робена). Представлены численные течения для двух постановок построения течений в области типа раструба – с заданием скорости на границе (с условием прилипания) и в расширенной постановке по граничным значениям функции тока.

1. Регулярные течения

Рассмотрим плоскопараллельные течения $\mathbf{w}(x)$, $x = (x_1, x_2)$, несжимаемой жидкости в ограниченной области Q с границей Ляпунова $S = \partial Q$. Для $\mathbf{w}(x)$ существует функция $\psi(x)$ такая, что

$$\mathbf{w}(x) = \left\{ \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1} \right\} =: \nabla_c \psi(x).$$

Произвольные граничные условия на S для соленоидального течения $\mathbf{w}(x)$ могут быть заданы в терминах функции тока,

$$\psi(x)|_S = a(x), \ \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = b(x). \tag{1}$$

Существует бесконечно много соленоидальных в Q векторных полей, совпадающих на границе с заданным векторным полем.

Будем называть *регулярным* соленоидальное поле $\mathbf{w}(x)$, если его среднеквадратичная завихренность (средняя завихренность) $\Omega(\psi)$,

$$\Omega(\psi) = \left[\iint\limits_Q |\mathrm{rot}\mathbf{w}|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\iint\limits_Q |\Delta\psi(x)|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

является минимальной [1].

Теорема 1. *Функция тока $\psi(x)$ соленоидального течения $\mathbf{w}(x)$ с заданными условиями на границе и с минимальной завихренностью $\Omega(\psi)$ является бигармонической функцией,*

$$\Delta^2\psi(x) = 0, \ x \in Q; \tag{2}$$

регулярное течение $\mathbf{w}(x)$ с заданной скоростью на границе S единственно.

Для построения течения $\mathbf{w}(x)$ достаточно решить бигармоническую задачу (2) – (1). Мы используем для этого метод базисных потенциалов [2]; в случае неоднородного уравнения можно использовать алгоритм данный в работе [5].

2. Собственный вихрь

Рассмотрим задачу Робена, играющую специальную роль в гидродинамике плоскопараллельных течений.

Потенциалом Робена $R(x)$ называется потенциал простого слоя [3]

$$R(x) = \int\limits_S \varphi^*(y)E(x-y)dS_y,$$

такой, что $R(x) \equiv R_0 = \text{const}$, $x \in Q$, где $E(x)$– фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Функция $\varphi^*(y)$ называется плотностью потенциала Робена. В [2] представлены простые проекционные алгоритмы метода базисных потенциалов решения задачи Робена.

Если $R(x)$ принять за функцию тока течения $\mathbf{w}_R(x)$,

$$\mathbf{w}_R(x) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right\} R(x) = \nabla_c R(x),$$

то коградиент $\nabla_c R(x)$ определяет векторное поле $\mathbf{w}_R(x)$, касательное к S. Потенциал Робена определяет чисто циркуляционное безвихревое обтекание контура S с нулевой скоростью на бесконечности (течение Робена).

Рассмотрим решение $u(x)$ краевой задачи

$$\Delta^2 u(x)\big|_Q = 0,\ \ u(x)|_S = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = \varphi^*(x),$$

Из интегрального равенства при $x \in Q$ [4]

$$u(x) = \iint\limits_Q \Delta u(y)E(x-y)dy + \int\limits_S \left[u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}(y)}E(x-y)\right] dS_y,$$

получаем следующее равенство на границе:

$$0 = \iint\limits_Q \Delta u(y)E(x-y)dy - \int\limits_S \varphi^*(y)E(x-y)dS_y,\ \ x \in S.$$

Последний интеграл равен потенциалу Робена, следовательно, постоянен на S, и выполняется равенство

$$\iint\limits_{Q} \Delta u(y)E(x-y)dy = R_0,\ x \in S.$$

Обозначим $g^*(y) = \Delta u(y)$, эта функция единственна с точностью до постоянного множителя и является плотностью вихрей присоединенного вихря Жуковского для течения Робена; этот вихрь будем называть *собственным вихрем* области Q (рис. 1). Далее, будем предполагать, что для рассматриваемой области Q, константа Робена отлична от нуля, то есть $R_0 \neq 0$.

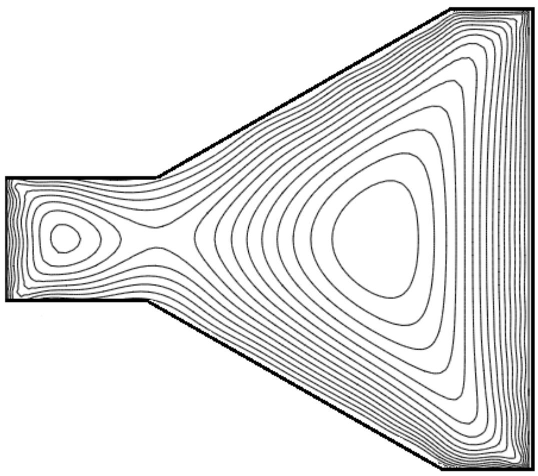


Рис. 1. Собственный вихрь раструба

3. Алгоритм бигармонической задачи

Рассмотрим два регулярных течения в области, имеющей вид раструба. Область Q (рис. 2) ограничена снизу и сверху кривыми S_1 и S_2 (линии тока), а слева и справа — вертикальными отрезками l_1, l_2 (исток и устье) и тогда $S = S_1 \cup l_1 \cup S_2 \cup l_2$.

Сначала рассмотрим в задаче определения функции тока полные граничные условия вида (1) на S, когда на всей границе задается скорость, и дело сводится к решению краевой задачи бигармонического уравнения.

Рассмотрим метод базисных потенциалов для решения задачи:

$$\Delta^2 u(x)\big|_Q = 0,\ u(x)|_S = g_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_S = g_1(x),$$

где $g_1(x) = 0$ на S, $g_0(x)$ равна (-1) и 1 соответственно на S_1 и S_2 и линейным функциям от x_2 на отрезках l_1, l_2, таким, что граничная функция $g_0(x)$ непрерывна.

Решение $u(x)$ может трактоваться как функция тока стационарного течения в области Q, где на S_1 и S_2 задано условие прилипания, а на l_1, l_2 даны скорости втекания и вытекания.

Для функции $u(x)$ справедливо следующее интегральное представление [4]:

$$\alpha u(x) = \iint\limits_Q g(y)E(x-y)dy + \int\limits_S \left[u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}(y)}E(x-y)\right] dS_y,$$

где $\alpha = 1$ при $x \in Q$, $\alpha = 0$ при $x \in Q^+ = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{Q}$.

Задача состоит в определении функции $g(y)$ из подпространства $G(Q)$ – гармонических функций; она может быть аппроксимирована следующими суммами:

$$g^N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_m \gamma_m(x),$$

где $\gamma_m(x)$ – базисная в $G(Q)$ последовательность потенциалов, построенная по базисной последовательности точек $z^m \in Q^+$.

Обозначим через $W(x)$ интеграл по S в интегральном представлении. При $x = z^k$ имеем

$$\iint\limits_Q g(y)\gamma_k(y)dy = -W(z^k),\ k = 1, 2, ...$$

Разложим функцию $g(x)$ на ортогональные слагаемые

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} c_m \gamma_m(x) + \rho_N(x)$$

и, подставив их в предыдущее равенство, для коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^{N} c_m(\gamma_m, \gamma_k) = -W(z^k),\ k = 1, 2, ..., N,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Подставив полученную аппроксимацию функции $g(x)$, получим приближенное решение, представленное на рисунке 2.

4. Расширенная постановка

Рассмотрим задачу построения течения в расширенной постановке — определение регулярного течения по граничным значениям его функции тока. Такое течение единственно. Граничные значения берутся теми же, что и в предыдущей задаче.

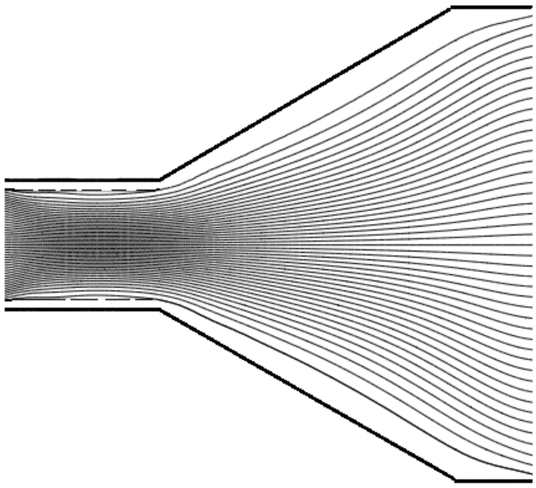


Рис. 2. Регулярное течение в раструбе с заданной скоростью на границе (с условием прилипания)

Полученное численное решение представлено на рисунке 3. Видно, что к расширяющимся стенкам раструба прилегают струи, что вполне физично [6] (известно, что нельзя задуть из воронки свечу, поставленную по ее оси).

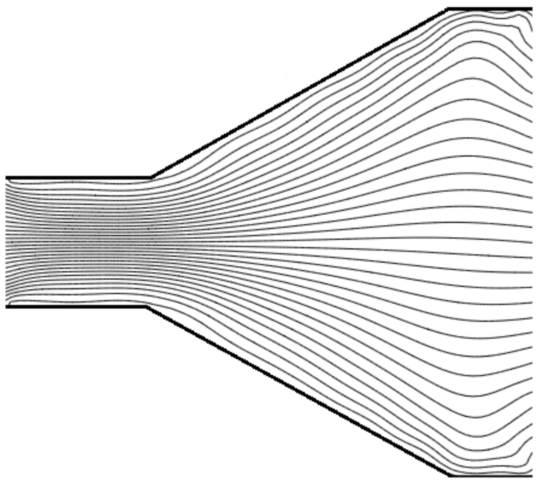


Рис. 3. Регулярное течение в раструбе с заданной функцией тока на границе

Рассматривается следующая задача: определить гармоническую функцию $g(y)$ такую, что

$$\psi(x) = \iint\limits_{Q} g(y)E(x-y)dy, \ x \in Q, \ \psi(x)|_S = f(x),$$

где $f(x)$ – заданная функция в $L_2(S)$.

Решение этой задачи единственно, что следует из леммы Новикова о разложении $L_2(Q)$ в прямую сумму [7],

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ – подпространство гармонических функций.

Изложим алгоритм решения этой задачи. Воспользуемся леммой о полноте в пространстве $L_2(S)$ системы функций [2],

$$\mu_m(x) = \iint\limits_Q \gamma_m(y) E(x-y) dy, \ x \in S.$$

Обозначим через $\psi^N(x)$ проекцию функции $\psi(x)$ на подпространство $\{\mu_m(x)\}_{m=1}^N$:

$$\psi(x) = \psi^N(x) + \rho_N(x), \ \psi^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \mu_m(x),$$

где $\rho_N \perp \{\mu_m(x)\}_{m=1}^N$. Умножая последнее равенство скалярно на $\mu_k(x)$, получим для коэффициентов систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^N c_m (\mu_m, \mu_k) = (f, \mu_k), \ k = 1, 2, ..., N,$$

с невырожденной матрицей, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(S)$.

Аппроксимация $g^N(y)$ плотности $g(y)$ представляется в виде

$$g^N(y) = \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(y), \ x \in Q.$$

Полученную аппроксимацию $g^N(y)$ плотности $g(y)$ необходимо минимизировать, исключая плотность $g^*(y)$ собственного вихря в Q. Присутствие такого вихря искажает картину течения, приводит к не физичному результату. Окончательно искомая плотность вихрей должна быть ортогональна плотности $g^*(y)$, то есть иметь вид

$$g_0^N(y) = g^N(y) + C_0 g^*(y),$$

где

$$C_0 = -\iint\limits_Q g^N(y) g^*(y) dy \left(\iint\limits_Q (g^*(y))^2 dy \right)^{-1}.$$

Функция тока теперь не может быть изменена на аддитивную константу (и в граничном условии), что эквивалентно добавлению к искомой плотности слагаемого вида $Cg^*(y)$ с соответствующим множителем C, так как это нарушит ортогональность искомой плотности и плотности собственного вихря и увеличит норму.

Заключение

Рассмотрены плоскопараллельные вихревые течения в ограниченных областях со среднеквадратичной завихренностью. Указан класс единственности таких течений. Предложенная методика построения течений опирается на интегральное представление функции тока. Рассмотрены сходящиеся алгоритмы численного расчета регулярных течений, использующие полные системы потенциалов.

Список литературы

1. Марковский, А.Н., Лежнев, В.Г. Плоские вихревые течения в каналах со сложной геометрией // Спектральные и эволюционные задачи (КРОМШ-2005). — Севастополь, Ласпи, 2005. — Т. 16. — С. 87–90.

   MARKOVSKY, A.N. and LEZHNEV, V.G. (2005) Planar vortex flow in channels with complex geometry. *Spectral and Evolution Problems (KROMSH-2005).* T. 16 (1). p. 87–90.

2. Лежнев А.В. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики / Лежнев А.В., Лежнев В.Г.. — Краснодар: КубГУ, 2009. — 111 с.

   LEZHNEV, A.V. and LEZHNEV, V.G. (2009) *Method base potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics.* Krasnodar: KubSU.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1985. — 512 с.

   VLADIMIROV, V.S. (1985) *Equations of mathematical physics.* M: Nauka.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983. — 424 с.

   MIHAILOV, V.P. (1983) *Differential equations in partial derivatives.* M: Nauka.

5. Лежнев, В.Г., Марковский, А.Н. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. ун-та. – Естест. науч. сер. — Самара, 2008. — Т. 8/1(67). — С. 127–139.

   LEZHNEV, V.G. and MARKOVSKY, A.N. (2008) Method base potentials for inhomogeneous biharmonic equation. *Vestn. of Samara St. Univ..* 8/1(67). p. 127-139.

6. Санников, Д.И. Структура затопленной прямоточной струи на выходе из сопла Вентури // Вестн. Морского гос. ун-та. – Сер. Судостроение. — Владивосток, 2006. — В. 8. — С. 97–103.

   SANNIKOV D.I. (2006) The structure is submerged direct-flow jet at the outlet of the Venturi nozzle. *Vestn. of Morskogo St. Univ..* 8. p. 97-103.

7. Новиков, П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Доклады Академии наук СССР. — 1938. — Т. XVIII, № 3. — С. 165–168.

   NOVIKOV, P.S. (1938) About the uniqueness of the solution of the inverse problem of potential. *Dokl. Akad. Nauk USSR.* T. XVIII (№ 3). p. 165–168.

Статья поступила в редакцию 16.06.2015

УДК: 517.95

MSC2010: 35A20

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© Ж.-П. Лоэак, Т. О. Капустина

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

механико-математический факультет

Ленинские горы, 1, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация

e-mail: *kapustina-tatiana@yandex.ru*

Asymptotic and numerical analysis of elliptic-parabolic equation.

Loheac J.-P., Kapustina T. O.

Abstract. This article is devoted to the boundary value problem for elliptic-parabolic equation with small parameters by the second-order derivatives. The aim of our work is to construct an effective numerical algorithm based on asymptotic approximation for the solution.

We consider the rectangle $\Omega = (0,1) \times (-1,1)$ in (x,y) plain, and denote its upper part as $\Omega_p = (0,1) \times (0,1)$, and its lower part as $\Omega_e = (0,1) \times (-1,0)$. We introduce the interface $\gamma = (0,1) \times \{0\}$ between these two domains, as well as boundary parts: $\Gamma_p = \{0\} \times (0,1) \cup \{1\} \times (0,1)$; $\Gamma_e = \{0\} \times (-1,0) \cup \{1\} \times (-1,0)$; $\Gamma_D = (0,1) \times \{-1\}$.

We consider the mixed type equation which has parabolic type in Ω_p and elliptic in Ω_e. We pose Dirichlet boundary condition on $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_p \cup \Gamma_D$ and transmission conditions on γ:

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p\,, & \text{in } \Omega_p\,, \\ Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e\,, & \text{in } \Omega_e\,, \\ u = 0\,, & \text{on } \Gamma\,, \\ u \text{ and } u_y \text{ are continuous} & \text{through } \gamma\,. \end{cases}$$

Here ε is a small positive parameter, and a_p , b_p , f_p , a_e , b_e , f_e are smooth functions depending on (x,y).

Our work consists of two parts: asymptotic analysis of the problem and creation of effective numerical algorithm based on asymptotic approximation.

In the first part, we apply modification of boundary functions method for mixed type equations, in order to obtain asymptotic representation for our solution with respect to the small parameter.

The main idea of the second part is that numerical calculation of parabolic equation is much easier and requires less operations then the elliptic one. Using again the fact that parameter ε is small, we construct approximate factorization of elliptic operator, replacing it by the product of two parabolic operators. Instead of one elliptic problem, we calculate numerically two successive parabolic problems: the first problem for inverse parabolic operator in decreasing direction, the second problem for direct parabolic operator in increasing direction. To begin numeric algorithm,

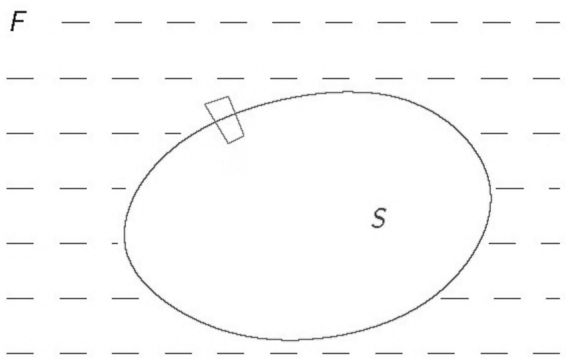
we need to calculate initial condition for the first parabolic equation. As it cannot be obtained explicitly, we use its asymptotic representation from the first part. Factorization idea allows us to gain $O(n^2)$ computer operations compared to $O(n^3)$, where n is a number of points of discretization.

The main advantage of this numerical algorithm is that the problem can be solved faster and demands less computer resources then classical numerical scheme.

Key words: mixed type equation, boundary value problem, singular perturbations, method of small parameter, operator factorization, numerical algorithm.

1. Физическая модель

Рассмотрим стационарное распределение температуры в системе, состоящей из нагретого твердого тела, помещенного в движущуюся холодную жидкость. Нас будет интересовать температура в окрестности границы между твердым телом и жидкостью.



Модель стационарного распределения температуры из книги [1] — это уравнение смешанного эллиптико–параболического типа, в котором эллиптическое уравнение описывает температуру в твердом теле, а параболическое — в жидкости. Параболическое уравнение содержит первую производную по той из пространственных координат, которая отвечает за расстояние от рассматриваемой точки до границы между твердым телом и жидкостью. При определенных условиях как эллиптическое, так и параболическое уравнение могут содержать малые параметры при старших производных. Далее, температура и тепловой поток должны быть непрерывны при переходе через границу раздела сред. Это требование ведет к условиям склейки: непрерывности решения и его нормальной производной. Таким образом, получается следующая модельная задача.

2. Постановка задачи

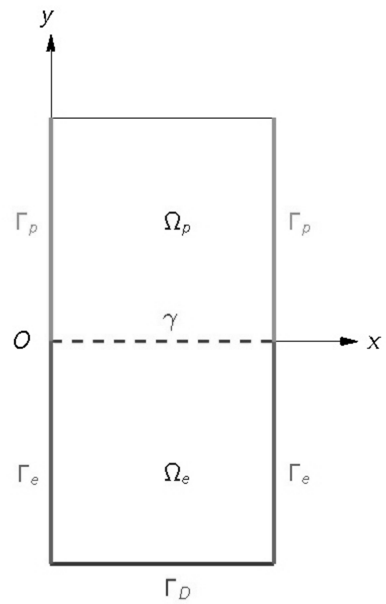
Рассмотрим прямоугольник $\Omega = (0,1) \times (-1,1)$ на плоскости (x,y). Обозначим $\Omega_p = (0,1) \times (0,1)$ верхнюю часть прямоугольника, соответствующую жидкости из нашей модели, а $\Omega_e = (0,1) \times (-1,0)$ — нижнюю часть прямоугольника, соответствующую твердому телу. Обозначим части внешней границы прямоугольника:

$\Gamma_p = \{0\} \times (0,1) \cup \{1\} \times (0,1)$;

$\Gamma_e = \{0\} \times (-1,0) \cup \{1\} \times (-1,0)$;

$\Gamma_D = (0,1) \times \{-1\}$,

а границу раздела сред $\gamma = (0,1) \times \{0\}$.



Рассмотрим уравнение смешанного типа, эллиптическое в Ω_e и параболическое в Ω_p. Искомой функцией в этом уравнении будет стационарная температура в точке (x,y). Зададим граничное условие Дирихле на части внешней границы $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_p \cup \Gamma_D$, а также условия склейки, то есть условия непрерывности решения и его нормальной производной, на линии изменения типа γ:

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p\,, & (x,y) \in \Omega_p\,, \\ Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e\,, & (x,y) \in \Omega_e\,, \\ u\big|_\Gamma = 0\,, \\ u,\ \ u_y \text{ непрерывны на } \gamma. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ε — малый положительный параметр, a_p , b_p , f_p , a_e , b_e , f_e — гладкие функции переменных (x, y). В книге [1] доказано, что при положительных коэффициентах a_p , b_p и a_e решение задачи (1) существует и единственно.

Цель работы — используя малость параметра ε, на основе асимптотических методов построить численный алгоритм, позволяющий посчитать приближенное решение быстрее и с меньшими затратами компьютерных ресурсов, чем стандартный численный метод. Мы рассмотрим два случая: положительного и отрицательного коэффициента b_e.

3. Первая дискретизация

В первом численном алгоритме вместо задачи (1) запишем две последовательные задачи.

1. Эллиптическая задача

$$\begin{cases} Lu \equiv a_e u + b_e u_y - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = f_e\,, \quad (x, y) \in \Omega_e\,, \\ u\big|_{\Gamma_e \cup \Gamma_D} = 0\,, \\ (a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx})\big|_{\gamma} = f_p\,. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь граничное условие на линии γ получается из параболического уравнения в верхней области и условий склейки.

2. Параболическая задача

$$\begin{cases} Mu \equiv a_p u + b_p u_y - \varepsilon u_{xx} = f_p\,, \quad (x, y) \in \Omega_p\,, \\ u\big|_{\Gamma_p} = 0\,, \\ u\big|_{\gamma} = u \text{ из } \ (2)\ . \end{cases} \tag{3}$$

Здесь в качестве начального условия параболического уравнения на линии γ, в силу первого условия склейки, берем значение u из эллиптической задачи (2).

Численное решение нашего уравнения смешанного типа получаем, последовательно считая задачи (2) и (3) стандартным методом конечных разностей. Если шаг сетки $h = \dfrac{1}{n}$, то число операций будет $O(n^3)$ для эллиптической задачи и $O(n^2)$ для параболической, то есть параболическая задача требует намного меньше операций, чем эллиптическая.

4. Вторая дискретизация

4.1. **Факторизация эллиптического оператора.** Для создания более эффективного численного алгоритма воспользуемся идеей из статей [2], [3], [4]: приближенное разложение эллиптического оператора на произведение двух параболических. Начнем со случая постоянных коэффициентов a_e, b_e.

Запишем разложение решения u задачи (2) в ряд Фурье по переменной x

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\sin(k\pi x)\,.$$

Применение к u эллиптического оператора L дает для каждого k коэффициент

$$\left(-\varepsilon\,\frac{d^2}{dy^2} + b_e\,\frac{d}{dy} + \big(a_e + \varepsilon(k\pi)^2\big)\right)u_k(y)\,.$$

Обозначив $\xi = k\pi$, получим обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка по переменной y с символом

$$A(\lambda) = -\varepsilon\lambda^2 + b_e\lambda + (a_e + \varepsilon\xi^2)\,.$$

Далее, разложим корни многочлена P до первого порядка по степеням ε :

$$\lambda^+ \approx -\frac{1}{b}\left(a - \varepsilon\,\frac{a^2}{b^2} - \varepsilon\xi^2\right)\,, \quad \lambda^- \approx -\frac{1}{b}\left(-\frac{b^2}{\varepsilon} - a + \varepsilon\,\frac{a^2}{b^2} + \varepsilon\xi^2\right)\,.$$

Получим следующее приближенное соотношение:

$$A(\lambda) = -\varepsilon(\lambda-\lambda^+)(\lambda-\lambda^-) + O(\varepsilon^2).$$

Теперь применим обратное преобразование Фурье и получим следующее приближенное разложение эллиптического оператора L задачи (2) на произведение параболических операторов:

$$L \approx -\frac{\varepsilon}{b_e^2}\,P^-\,P^+ \quad \text{или} \quad L \approx -\frac{\varepsilon}{b_e^2}\,P^+\,P^-\,, \tag{4}$$

где

$$P^+ = \left(a_e - \varepsilon\,\frac{a_e^2}{b_e^2}\right) + b_e\,\frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,,$$
$$P^- = \left(\frac{b_e}{\varepsilon} - a_e + \varepsilon\,\frac{a_e^2}{b_e^2}\right) + b_e\,\frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$$

Выбор между формулами (4) зависит от знака коэффициента b_e.

Если $b_e > 0$, то P^+ — это прямой параболический оператор, который мы используем в задаче для y возрастающего от -1 до 0; P^- — обратный параболический оператор, его мы используем для y убывающего от 0 до -1. Если $b_e < 0$, то P^+ и P^- надо поменять ролями.

Таким образом, мы будем строить эффективный численный алгоритм, заменив дорогую для численного счета эллиптическую задачу (2) двумя последовательными более дешевыми параболическими задачами: первая — для y убывающего от 0 до

-1; вторая — для y возрастающего от -1 до 0.

4.2. **Асимптотическое приближение.** Для того, чтобы начать численный счет, нам нужно знать начальное значение для первой параболической задачи с убывающим y. Для этого нам нужны значения $u\big|_\gamma$ и $u_y\big|_\gamma$. Так как они неизвестны, заменим их точные значения асимптотическими приближениями $\tilde{u}\big|_\gamma$ и $\tilde{u}_y\big|_\gamma$. Асимптотическое представление решения задачи (1) будем строить с помощью метода пограничных функций [5], а также воспользуемся идеями применения асимптотических методов к сингулярно возмущенным уравнениям смешанного типа из [6] и [7].

Асимптотическое представление $\tilde{u}$ решения u задачи (1) состоит из регулярной части и нескольких пограничных функций. Нулевое слагаемое регулярной части удовлетворяет вырожденному уравнению (полученному из (1) при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{cases} a_p\, u^0 + b_p\, u^0_y = f_p\,, & (x,y) \in \Omega_p\,, \\ a_e\, u^0 + b_e\, u^0_y = f_e\,, & (x,y) \in \Omega_e \end{cases}$$

с определенными дополнительными условиями, которые выбираются в зависимости от знака коэффициента b_e. Пограничные функции служат для описания внутреннего и пограничных слоев. Они обеспечивают выполнение тех из граничных условий и условий склейки, которым не удовлетворяет регулярная часть.

Главное слагаемое асимптотики на линии γ имеет вид (см. [8]):

$$\tilde{u}\big|_\gamma = u^0\big|_\gamma + q\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + z\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{5}$$

причем пограничные функции q и z удовлетворяют оценкам

$$|q| \leqslant Ce^{-\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}, \quad |z| \leqslant Ce^{-\dfrac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}},$$

то есть экспоненциально убывают при удалении от своего пограничного слоя. Все функции в этих формулах могут быть вычислены в явном виде. Нормальная производная $\tilde{u}_y\big|_\gamma$ записывается аналогичной формулой и удовлетворяет аналогичным оценкам. Тем же способом можно посчитать столько слагаемых асимптотического разложения, сколько нужно для достижения требуемой точности.

Таким образом, мы посчитали все, что нужно для начального условия численного метода.

4.3. **Дискретная задача.** Теперь дадим описание численного алгоритма, основанного на приближенной факторизации эллиптического оператора на параболические множители, и на асимптотическом представлении решения. Алгоритм состоит из трех шагов:

1. Вычисление начального значения на линии γ с помощью асимптотического приближения.
2. Приближение эллиптической части (2) с помощью двух последовательных параболических задач.
3. Численное решение параболической части (3).

Обозначим v дискретное приближение искомого решения u задачи (2)–(3). Рассмотрим два случая в зависимости от знака коэффициента b_e.

1. Случай $\mathbf{b}_e < \mathbf{0}$. В этом случае возьмем первый вариант $L \approx -\dfrac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ P^-$ разложения (4) эллиптического оператора L на произведение двух параболических операторов. Заменим уравнение $Lv = f_e$ приближенным уравнением $-\dfrac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ (P^- v) = f_e$. Обозначая $w = P^- v$, получим два параболических уравнения:

$$-\frac{\varepsilon}{b_e^2} P^+ w = f_e\,, \quad P^- v = w\,.$$

Их надо решить последовательно. Для того, чтобы начать счет, нам нужно вычислить начальное значение w на линии γ.

Шаг 1. Начальное условие на линии γ. С помощью асимптотического решения $\tilde{u}$, заданного формулой (5), получаем

$$w\big|_\gamma = \big(P^- \tilde{u}\big)\big|_\gamma\,. \tag{6}$$

Шаг 2. Две последовательные параболические задачи.

В первой задаче вычисляем промежуточную функцию w в нижней области Ω_e. Эта функция удовлетворяет обратному параболическому уравнению с оператором P^+, где переменная y убывает от 0 до -1, с заданными граничными условиями, и с начальным условием (6), найденным на шаге 1.

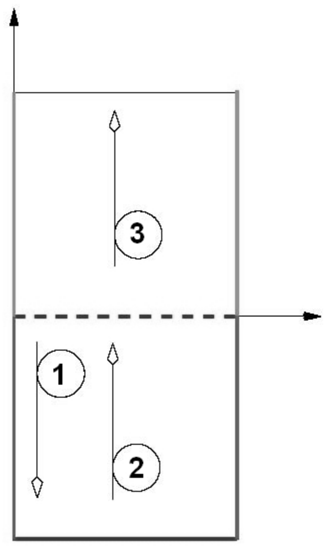
$$\begin{cases} P^+ w = -\dfrac{b_e^2}{\varepsilon} f_e\,, \quad (x,y) \in \Omega_e\,, \ y \in (0,-1)\,, \\ w\big|_{\Gamma_e} = -f_e\,, \\ w\big|_\gamma = w \text{ из (6)}. \end{cases} \tag{7}$$

Вторая задача — это вычисление функции v в нижней области Ω_e. Функция v удовлетворяет прямому параболическому уравнению с оператором P^-, где переменная y возрастает от -1 до 0, с правой частью w, уже найденной в первой параболической задаче (7), и с заданными начальным и граничными условиями.

$$\begin{cases} P^{-}v = w\,, \quad (x,y) \in \Omega_e\,,\ y \in (-1,0)\,, \\ v\big|_{\Gamma_e} = 0\,, \\ v\big|_{\Gamma_D} = 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

Шаг 3. Параболическая задача в верхней области. Нам осталось вычислить функцию v в верхней области Ω_p. Функция v удовлетворяет прямому параболическому уравнению с оператором M, где переменная y возрастает от 0 до 1, с заданными граничными условиями, и начальным условием на γ, уже найденным во второй параболической задаче (8) на шаге 2.

$$\begin{cases} Mv = f_p\,, \quad (x,y) \in \Omega_p\,,\ y \in (0,1)\,, \\ v\big|_{\Gamma_p} = 0\,, \\ v\big|_{\gamma} = v \text{ из } (8). \end{cases} \tag{9}$$



2. Случай $\mathbf{b}_e > 0$. В этом случае действуем аналогично, меняя ролями операторы P^{+} и P^{-}.

Шаг 1. Начальное условие:

$$w\big|_{\gamma} = \left(P^{+}\tilde{u}\right)\big|_{\gamma}\,. \tag{10}$$

Шаг 2. Две параболические задачи, заменяющие эллиптическую в нижней области Ω_e. Сначала решаем обратное параболическое уравнение для y убывающего от

0 до -1:

$$\begin{cases} P^- w = -\dfrac{b_e^2}{\varepsilon}\, f_e\,, \quad (x,y)\in\Omega_e\,,\ \ y\in(0,-1)\,,\\ w\big|_{\Gamma_e} = f_e\,,\\ w\big|_{\gamma} = w \ \text{ из } \ (10). \end{cases} \tag{11}$$

Затем считаем прямое параболическое уравнение для y возрастающего от -1 до 0:

$$\begin{cases} P^+ v = w\,, \quad (x,y)\in\Omega_e\,,\ \ y\in(-1,0)\,,\\ v\big|_{\Gamma_e} = 0\,,\\ v\big|_{\Gamma_D} = 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

Шаг 3. Параболическая задача в верхней области Ω_p, для y возрастающего от 0 до 1:

$$\begin{cases} Mv = f_p\,, \quad (x,y)\in\Omega_p,\ \ y\in(0,1)\,,\\ v\big|_{\Gamma_p} = 0\,,\\ v\big|_{\gamma} = v \ \text{ из } (12). \end{cases} \tag{13}$$

5. Численный эксперимент

5.1. **Поведение численного решения.** Для заданных a_e, b_e, f_e, a_p, b_p, f_p, мы посчитали на сетке с постоянным шагом u — точное решение (2)–(3), и v — решение дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9) для $b_e<0$, или дискретной задачи (10)–(11)–(12)–(13) для $b_e>0$.

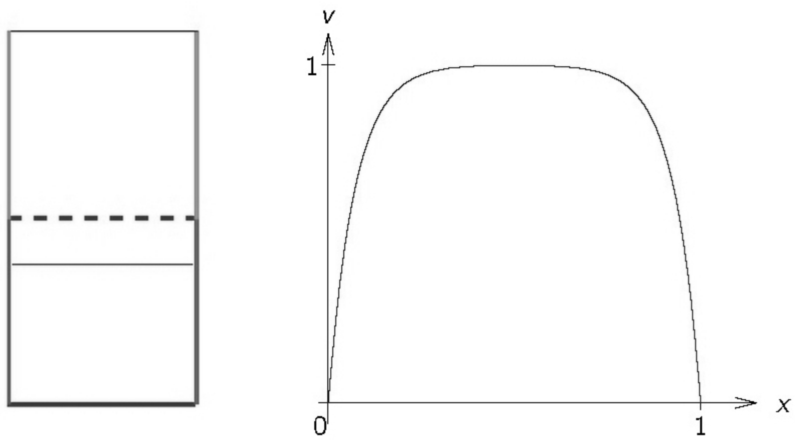


Рис. 1. График $v(x,y)$ при фиксированном отрицательном y

Мы приводим графики решения v дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9) для случая отрицательного b_e. Рисунки 1, 2 показывают горизонтальные срезы решения: $v(x,y)$

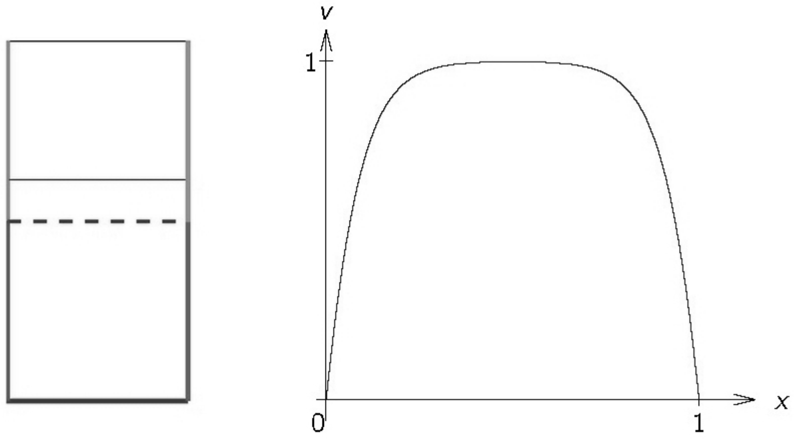
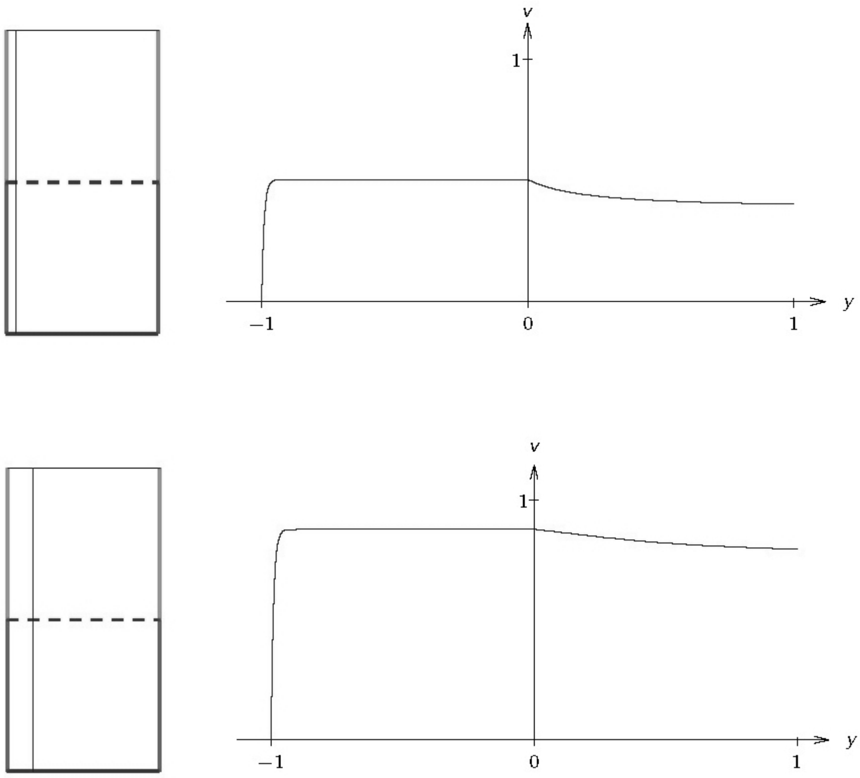
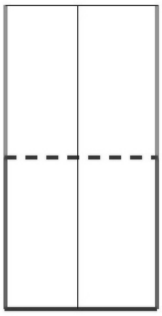


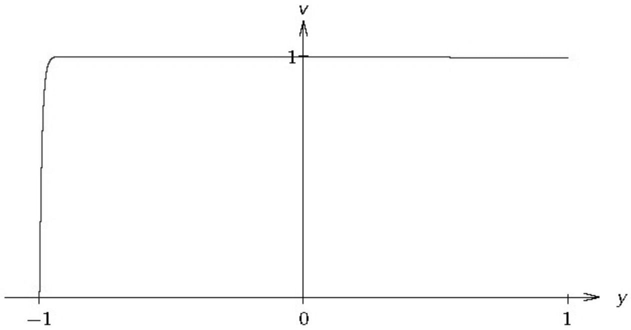
Рис. 2. График $v(x, y)$ при фиксированном положительном y

Рис. 3. Графики $v(x, y)$ при фиксированных x



при фиксированных отрицательных и положительных y. Рисунки 3 показывают вертикальные срезы решения: $v(x, y)$ при нескольких фиксированных x.





5.2. **Оценка погрешности.** Обозначим $e = u - v$ разность между u, точным решением (2)–(3), и v, решением дискретной задачи (6)–(7)–(8)–(9). Обозначим

$$\|e\|^2 = \int_\Omega |u - v|^2 \, dx \, dy \, .$$

Рисунок 4 показывает зависимость нормы погрешности от ε в случае $b_e < 0$. Норма погрешности убывает при $\varepsilon \to 0$, а для достаточно малых ε $\|e\| = O(\varepsilon^2)$.

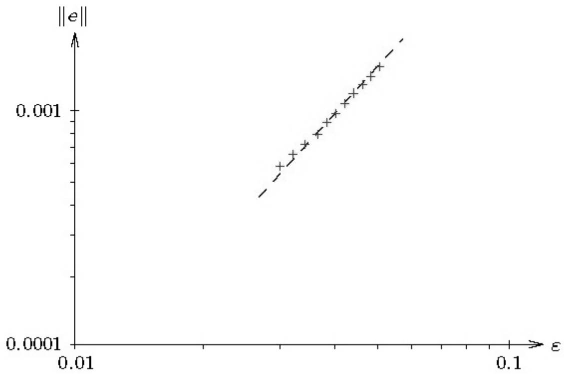


Рис. 4. Зависимость погрешности от ε

Список литературы

1. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д.Джураев. — Ташкент: Фан, 1979. — 238 с.

   DZHURAEV, T. (1979) *Boundary value problems for mixed type equations.* Tashkent: Fan.

2. LOHEAC, J.-P. & NATAF, F. & SCHATZMAN, M. (1993) Parabolic approximations of the convection-diffusion equation. *Mathematics of Computations.* 60(202). p. 515-530.

3. LOHEAC, J.-P. (2010) Some numerical applications of pseudo-differential computation. *Proceedings of International Miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications"*. Moscow: MESI. p. 132-140.

4. LOHEAC, J.-P. & KAPUSTINA, T. (2013) Asymptotic and numerical analysis of mixed type equation. *Proceedings of International Miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications"*. Moscow: MESI. p. 179-189.

5. Васильева, А.Б., Бутузов, В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б.Васильева, В.Ф.Бутузов. — М: Высшая школа, 1990. — 208 с.

   VASILIEVA, A. and BUTUZOV, V. (1990) *Asymptotic methods in singular perturbation theory.* Moscow: Vysshaya Shkola.

6. SUSHKO, V. (1999) Asymptotic representations for solutions of bisingular problems. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.* Tbilisi. 18. p. 51-151.

7. Розов Н.Х., Капустина Т.О. Одна краевая задача для эллиптико–параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37. — № 6. — С. 847-848.

   ROZOV, N. & KAPUSTINA, T. (2001) One boundary problem for elliptic–parabolic equation. *Differential Equations.* 6(37). p. 847-848.

8. Капустина, Т.О. Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Ученые записки Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — Т. 19(58). — № 2. С. 31-34.

   KAPUSTINA, T. (2006) On asymptotic solution to singularly perturbed boundary value problem for mixed type equation. *Scientific Notes of Taurida National V.I.Vernadsky University. Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics.* 2(19). p. 31-34.

Статья поступила в редакцию 10.06.2015

УДК: 517.51

MSC2010: 42A15

(0,2,3)–ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

© В. В. Новиков

Саратовский государственный технический университет
Энгельсский технологический институт (филиал)
кафедра естественных и математических наук
пл. Свободы, 17, г.Энгельс, Саратовская область, 413100, Российская Федерация
e-mail: *vvnovikov@yandex.ru*

$(0,2,3)$–**Interpolation of Continuous in Generalized Variation Functions.**

Novikov V. V.

Abstract. Let f be a real-valued 2π–periodic function defined on $[-\pi,\pi]$, and for each open interval $I=(a,b)\subset[-\pi,\pi]$ set $f(I)=f(b)-f(a)$. We let $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ denote non-decreasing sequence of real numbers such that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=+\infty.$$

Then f is said to be of Λ–bounded variation (ΛBV) on $[-\pi,\pi]$ if

$$V(\Lambda,f):=\sup\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(I_k)}{\lambda_k}<\infty, \tag{$*$}$$

where the supremum is taken over all sequences of non-overlapping open intervals $I_k\subset[-\pi,\pi]$, $k=1,2,\ldots$; if (*) holds when the supremum is taken over all sequences of open intervals $I_k\subset[-\pi,\pi]$, $k=1,2,\ldots$ for which either $I_k<I_{k+1}, k=1,2,\ldots$, or $I_k>I_{k+1}, k=1,2,\ldots$ (where $I<J$ means I lies to the left of J), then f is said to be of ordered Λ–bounded variation ($O\Lambda BV$) on $[-\pi,\pi]$.

If the $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ are bounded, we have the classical Jordan bounded variation (BV); if $\lambda_k=k$, we have harmonic (ordered harmonic) bounded variation, HBV ($OHBV$). Let $\Lambda^m:=\{\lambda_k\}_{k=m+1}^{\infty}, m=0,1,\ldots$ A function f of ΛBV ($O\Lambda BV$) is said to be continuous in Λ–variation (ordered Λ–variation), if $V(\Lambda^m,f)\to 0$, as $m\to\infty$.

The above-mentioned classes were introduced in the seventies of the last century by Waterman. To date, there are many results on the properties of functions of generalized bounded variation. For instance in 1972 Waterman shown that we can replace BV by HBV in the classic Dirichlet–Jordan theorem: the Fourier series of function $f\in BV$ converge at every point of continuity of f and the convergence is uniform on every closed interval of points of continuity of f. If one were to use ΛBV instead of HBV, where $\Lambda BV-HBV\neq\varnothing$, then the theorem would fail.

It is well known that there is a close analogy between Fourier series and Lagrange interpolation. As a result many facts of Fourier series were proved for interpolation processes. In particular interpolatory analog of Dirichlet–Jordan type theorem for HBV was proved in 1986 by Kelzon.

Denote by $L_n(f,x)$, $n=1,2,\dots$, the Lagrange interpolation polynomial based on equidistant nodes

$$x_{k,n}=\frac{2\pi k}{2n+1},\ k=-n,\dots,n,$$

and let $Q_n(f,x)$, $n=1,2,\dots$, be the $(0,2,3)$ Birkhoff (lacunary) interpolation polynomial such that

$$Q_n(f,x_{k,n})=f(x_{k,n}),\ Q_n''(f,x_{k,n})=Q_n'''(f,x_{k,n})=0,\ k=-n,\dots,n.$$

In present paper we prove a result: if f is continuous in ordered harmonic variation on $[-\pi,\pi]$, then both $\{L_n(f,x)\}$ and $\{Q_n(f,x)\}$ converges to f uniformly on $[-\pi,\pi]$.

Key words: Lagrange Interpolation, Birkhoff Interpolation, Lacunary Interpolation, Generalized Variation, Harmonic Variation.

Введение

Определение 1. Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=+\infty.$$

Говорят, что f есть функция ограниченной Λ–вариации (обозначение: $f\in\Lambda BV$), если

$$V(\Lambda,f):=\sup_{\Pi}\sum_{k}\frac{|f(t_{2k})-f(t_{2k-1})|}{\lambda_k}<+\infty,$$

где верхняя грань берется по всем системам Π непересекающихся интервалов вида

$$I_k:=(t_{2k-1},t_{2k})\subset[-\pi,\pi],\ k=1,2,\dots \tag{1}$$

Определение 2. Функция f называется функцией ограниченной упорядоченной Λ–вариации (обозначение: $f\in O\Lambda BV$), если

$$\tilde V(\Lambda,f):=\sup_{\Pi}\sum_{k}\frac{|f(t_{2k})-f(t_{2k-1})|}{\lambda_k}<+\infty,$$

причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (1) таких, что $I_k<I_{k+1},k=1,2,\dots$, или $I_k>I_{k+1},k=1,2,\dots$ (запись $I_k<I_{k+1}$ или $I_k>I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно, правее, чем I_{k+1}).

Положим $H=\{k\}_{k=1}^{\infty}$. Порожденная этой последовательностью вариация называется гармонической (или H–вариацией). Соответственно через HBV ($OHBV$) мы будем обозначать классы ограниченной гармонической (упорядоченной гармонической) вариации.

Определение 3. Обозначим $\Lambda^m := \{\lambda_k\}_{k=m+1}^{\infty}$. Функция f называется непрерывной по Λ–вариации (по упорядоченной Λ–вариации), если

$$\lim_{m\to\infty} V(\Lambda^m, f) = 0$$
$$\left(\lim_{m\to\infty} \tilde{V}(\Lambda^m, f) = 0\right).$$

Приведенные определения были предложены в 70-х гг. прошлого века Ватерманом [1]–[4]. Введенные им классы функций нашли важные применения в исследованиях самого Ватермана и ряда других авторов по сходимости и суммируемости рядов Фурье. Приведем характерный результат такого рода. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на всей числовой прямой 2π-периодических функций с равномерной нормой.

Теорема 1. [1]. *Если $f \in C_{2\pi} \cap HBV$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Если же $\Lambda BV \supseteq HBV$, причем $\Lambda BV \neq HBV$, то найдется функция $f \in C_{2\pi} \cap \Lambda BV$, ряд Фурье которой расходится по крайней мере в одной точке.*

Очевидно, что $\Lambda BV \subseteq O\Lambda BV$. В статье [3] Ватерман поставил вопрос, является ли это включение строгим? Утвердительный ответ, сначала для случая гармонической вариации, был получен в работе [5]. Позднее, также положительный ответ был дан в [6] для случая произвольной последовательности Λ. Отметим в этой связи один любопытный факт. С одной стороны, исходя из определений, можно предположить, что различие между классами ΛBV и $O\Lambda BV$ является незначительным. Косвенно это подтверждается и тем, что построенные в статьях [5] и [6] примеры довольно сложны, т.е. обнаружить различие между данными классами — технически весьма непростая задача. С другой стороны, известно (см., например, [6]), что ΛBV и $O\Lambda BV$ становятся банаховыми постранствами, если снабдить их подходящей нормой. При этом оказывается, что при всем внешнем сходстве обсуждаемых классов, ΛBV является всего лишь множеством первой категории в $O\Lambda BV$.

Вопросы сходимости ряда Фурье функций класса $O\Lambda BV$ рассматривались в заметке Ватермана [7]. Существует также ряд работ, авторы которых обобщали понятие Λ–вариации на многомерный случай применительно к изучению кратных рядов Фурье.

Хорошо известен факт, что между частичными суммами ряда Фурье и интерполяционными многочленами Лагранжа существует глубокая аналогия. В связи с этим результаты, полученные для рядов Фурье функций из классов обобщенной ограниченной вариации позже переносились на случай интерполирования. Например, в работе [8] (см. также [9]) среди прочего доказан аналог теоремы 1 для случая тригонометрического интерполирования с равноотстоящими узлами. Ряд авторов рассматривал упомянутые классы функций применительно к алгебраическому интерполированию с узлами в нулях ортогональных многочленов.

В данной работе изучается вопрос о равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, а также одного специального интерполяционного процесса Биркгофа для функций, непрерывных по упорядоченной H-вариации.

Основной результат

Обозначим через $L_n(f,x)$, $n=1,2,\ldots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f\in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n}=2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(f,x)$, $n=1,2,\ldots$, (0,2,3)–интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(f,x_{k,n})=f(x_{k,n}),\ Q_n''(f,x_{k,n})=Q_n'''(f,x_{k,n})=0,\ k=\overline{-n,n}.$$

Отметим, что вопросы существования, единственности и явного представления для интерполяции Биркгофа (иначе, лакунарной интерполяции), как правило, весьма непросты и в различных частных случаях решаются по-разному (см., например, [10]). Для полинома $Q_n(f,x)$ существование и единственность были доказаны, среди прочего, в работе [11].

Для дальнейшего нам понадобятся еще некоторые обозначения и леммы. Пусть $f\in C_{2\pi}$, $n\geq 3$, положим

$$T^*_{n,p}(f)=\sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]}{}' \left|\frac{f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)}\right|,\ p=-n-1,\ldots,n,$$

где

$$\varphi(m,n,p)=\begin{cases}p-m, & \text{если } |p-m|\leq 3\left([n/2]+1\right),\\ 2n-(p-m), & \text{если } p-m>3\left([n/2]+1\right),\\ -2n-(p-m), & \text{если } p-m<-3\left([n/2]+1\right),\end{cases}$$

$$T^*_n(f)=\max_{-n-1\leq p\leq n}T^*_{n,p}(f).$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс k является решением уравнения $\varphi(2k{+}1,\ n,\ p)=0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n}=\pi$, $x_{-n-1,n}=-\pi$.

Лемма 1 [12]. *Условие* $T_n^*(f) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *влечет равномерную на* $\mathbb{R}$ *сходимость к* f *полиномов* $\{L_n(f,x)\}$.

Лемма 2 [13]. *Пусть* $f \in C_{2\pi}$. *Тогда существует абсолютная постоянная* C *и функция* $\mu_n(x) \in C_{2\pi}$, $|\mu_n(x)| < C$, *не зависящая от* f, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - Q_n(f,x) - \mu_n(x)(f(x) - L_n(f,x))] = 0$$

равномерно на $\mathbb{R}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функция* $f \in C_{2\pi}$ *непрерывна по упорядоченной гармонической вариации, то последовательности многочленов* $\{L_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{Q_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходятся к* f *равномерно на всей числовой прямой.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $p = -n-1,...,n$, и представим $T_{n,p}^*$ в виде

$$T_{n,p}^* = \left(\sum_{k\in I} + \sum_{k\in J} + \sum_{k\in K}\right) \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)} \right| =: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где множества индексов I, J, K определяются следующим образом:

$$I := \{k : |p - 2k - 1| \le 3\,([n/2]+1)\},$$

$$J := \{k : p - 2k - 1 > 3\,([n/2]+1)\},$$

$$K := \{k : p - 2k - 1 < -3\,([n/2]+1)\}.$$

Получим оценку сверху для $T_{n,p}^*(f)$. При этом нам достаточно оценить только сумму Σ_1, поскольку остальные две оцениваются аналогично.

В силу равномерной непрерывности функции f найдется неубывающая последовательность номеров $\{m_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = +\infty$ и

$$A_n := \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \log m_n \to 0,\ n \to \infty. \tag{2}$$

Здесь $\omega(f;\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции f. Пусть $Q := \{k \in I : |p - 2k - 1| < m_n\}$, $Q_1 := I \backslash Q$ и

$$\Sigma_1 = \left(\sum_{k\in Q} + \sum_{k\in Q_1}\right) \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)} \right| =: S_1 + S_2.$$

Учитывая, что $\forall k = -[n/2],...,[n/2]$ верно неравенство

$$|f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})| \le \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

а также принимая во внимание определение функции φ и тот факт, что $\mathrm{card} Q \le m_n$, находим

$$S_1 \le CA_n. \tag{3}$$

Для суммы же S_2 очевидна оценка

$$S_2 \le C\tilde{V}(H^{m_n}, f), \tag{4}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{V}(H^{m_n}, f) = 0 \tag{5}$$

в силу непрерывности f по H-вариации и того, что $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Для сумм Σ_2 и Σ_3 ввиду сделанного выше замечания также верны оценки вида (3) и (4).

Поскольку номер $p = -n-1, ..., n,$ — произвольный, на основании (2)-(5) заключаем, что последовательность $T_n^*(f), n = 1, 2, ...$ мажорируется некоторой сходящейся к нулю последовательностью. Значит, в силу леммы 1

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - L_n(f, x)] = 0 \tag{6}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Равномерная сходимость последовательности $\{Q_n(f, x)\}$ следует теперь из (6) и леммы 2. □

Список литературы

1. WATERMAN, D. (1972) On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation. *Studia Math.* 44. p. 107-117.
2. WATERMAN, D. (1976) On summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation. *Studia Math.* 55. p. 87-95.
3. WATERMAN, D. (1978-79) Λ-bounded variation: recent results and unsolved problems. *Real Anal.* 4. p. 69-75.
4. WATERMAN, D. (1979) Fourier series of functions of Λ-bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 74. p. 119-123.
5. BELNA, C. (1980) On ordered harmonic bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 80. p. 441-444.
6. PRUS-WISNIOVSKI, F. (1990) On ordered Λ-bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 109. p. 375—383.
7. WATERMAN, D. (1980) On the note of C. L. Belna. *Proc. Amer. Math. Soc.* 80. p. 445—447.
8. Кельзон, А.А. О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286. — С. 1062–1064.

   KELZON, A. (1986) On trigonometric interpolation of functions of Λ-bounded variation. *DAN SSSR.* 286. p. 1062–1064.

9. WATERMAN, D. & XING, H. (2007) The convergence of partial sums of interpolating polynomials. *J. Math. Anal. Appl.* 333. p. 185-191.

10. LORENTZ, G., JETTER, K. and RIEMENSHCNEIDER S. (1983) *Birkhoff interpolation.* Addison–Wesley. Reading. Mass.

11. SHARMA, A. & VARMA, A. (1968) Trigonometric interpolation (0,2,3) case. *Ann. Polon. Math.* 21. p. 51-58.

12. Привалов, А.А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Матем. заметки. — 1986. — Т. 39. — С. 228-243.

    PRIVALOV, A. (1986) Uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Math. Notes.* 39 (2). p. 124-133.

13. VARMA, A. & VERTESI, P. (1987) Equiconvergence of Some Lacunary Trigonometric Interpolation Polynomials. *J. Approx. Theory.* 50. p. 185-191.

Статья поступила в редакцию 08.06.2015

УДК: 517.927.25

MSC2010: 34L10, 34B07, 47E05

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

© В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Российская Федерация
e-mail: *RykhlovVS@yandex.ru*

On completeness of the root functions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients.

Rykhlov V. S.

Abstract. This article discusses the pencil of ordinary differential operators generated on $[0,1]$ by a linear differential expression of n-th order with constant coefficients, polynomially depending on spectral parameter λ, and the two-point boundary conditions of a general form with coefficients which are polynomials of the spectral parameter λ.

It is assumed that the differential expression is homogeneous, the roots of its characteristic equation are distinct and different from zero, that is a fundamental system of solutions of the corresponding differential equation are pure exponent.

Provides definitions of m-fold completeness of the system of derived m-chains in the space of square integrable functions on the interval $[0,1]$.

The problem of finding sufficient conditions on the coefficients of the pencil, when there is an m-fold completeness of the system of the derived m-chains, is solved. A detailed history overview of the problem is given. It shows the urgency of solving this problem.

Then a characteristic polygon of the characteristic determinant of the pencil is introduce and on its basis the geometric classification of the pencils is given. Regular, almost regular, weakly and strongly irregular pencils are defined.

The method of obtaining sufficient conditions for multiple completeness of the root functions is to use a special solution of basic differential equation depending on an arbitrary parameter vector. We investigate important for the further features of this special solution, namely: Lemma of linear independence of a set of such solutions depends on linearly independent set of parameter vectors; Lemma of the characteristic polygons of special solutions when as vectors parameters are taken vectors constructed on the basis of the coefficients of the boundary conditions and the roots of the characteristic polynomial.

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K)

Sufficient conditions for multiple completeness formulated in terms of the existence of a sufficiently rich set of parameter vectors, which enables the scheme of the proof of multiple completeness, dating back to the famous work of Keldysh M.V. in 1951.

Key words: pencil of ordinary differential operators, root functions, eigen- and associated functions, multiple completeness, sufficient conditions of completeness, constant coefficients of differential expression, arbitrary location the roots of the characteristic polynomial, arbitrary two-point boundary conditions, nonregular pencil.

1. Постановка задачи и краткая история вопроса

Рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y \equiv \sum_{0\le j+s\le n} p_{js}(x)\lambda^s y^{(j)}, \qquad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначает спектральный параметр, $p_j(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{j} p_{n-j,s}(x)\lambda^s$, $j = \overline{0,n}$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{ij}(\lambda), b_{ij}(\lambda)$ есть произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2), будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}y^{(j)}(0) + b_{ij}y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

не содержащие параметра λ.

Многие проблемы современного естествознания приводят к задаче разложения функций в биортогональные ряды Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) или, кратко, корневым функциям (к.ф.) несамосопряженного пучка $L(\lambda)$.

Далее будут использоваться известные определения собственных значений (с.з.) пучка, собственных и присоединенных функций (с.п.ф) или, кратко, корневых функций (к.ф.), производных m-цепочек, построенных по системе к.ф., которые можно найти, например, в [1], [2].

Определение 1. Система Y к.ф. пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности в.-ф. $h \in L_2^m[0,1] :=$

$\underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$.

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$.

Основополагающей по этой проблеме является работа М.В. Келдыша [1] 1951 г., в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3). Эта теорема в случае аналитических коэффициентов д.в. была доказана в 1973 г. А.П. Хромовым [3] и в 1976 г., независимо, W. Eberhard'ом [4]. В 1976 г. А.А. Шкаликов [5] доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов. В 1977 г. А.П. Хромовым [6] обобщил эту теорему на случай конечномерных возмущений вольтерровых операторов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен G. Freiling'ом [7] и С.А. Тихомировым [8] в конце 80-х годов прошлого века.

В работах [9] и [10], относящихся к общему виду (1)–(2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка на некоторых лучах.

Исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, провел А.И. Вагабов в работах 1981–1987 гг. (см. [11, 12]).

Но вплоть до настоящего времени вопрос об n- и m-кратной полноте к.ф. до конца не решен даже в случае более простого пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell_0(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js} \lambda^s y^{(j)} \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\sum_{0 \le j+s \le n-1} \lambda^s (a_{ijs} y^{(j)}(0) + b_{ijs} y^{(j)}(1)) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где $p_{js}, a_{ijs}, b_{ijs} \in \mathbb{C}$.

В работах автора [13, 14, 15] был предложен метод, который позволяет исследовать вопрос о полноте к.ф. для пучка (4)–(5) самого общего вида. В частности, в этих кратких без подробных доказательств работах анонсированы достаточные условия кратной полноты к.ф. для этого пучка. Исследованы некоторые частные случаи.

Данная статья посвящена подробному изложениею этого метода и доказательству отмеченных результатов о полноте к.ф. пучка (4)–(5).

Будем считать далее, что краевые условия (5) нормированны и порядок i-го краевого условия есть $\varkappa_i$ $(0 \le \varkappa_i \le n-1)$, то есть будем рассматривать краевые условия вида

$$U_i^0(y,\lambda) \equiv U_{i0}^0(y,\lambda) + U_{i1}^0(y,\lambda) := \sum_{j+s\le\varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, i = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Суммарный порядок краевых условий (6) обозначим буквой $\varkappa$, то есть по определению $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$.

Пучок (4), (6) будем обозначать $L_0(\lambda)$.

2. Вспомогательные обозначения и определения

Рассмотрим уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Система функций $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, как известно, является фундаментальной системой решений (ф.с.р.) уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \ne 0$.

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,n}$

$$H_j(\lambda) \equiv (h_{1j}(\lambda), h_{2j}(\lambda), \ldots, h_{nj}(\lambda))^T := \left(U_1^0(y_j,\lambda), U_2^0(y_j,\lambda), \ldots, U_n^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$
$$V_j(\lambda) \equiv (v_{1j}(\lambda), v_{2j}(\lambda), \ldots, v_{nj}(\lambda))^T := \left(U_{10}^0(y_j,\lambda), U_{20}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n0}^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$
$$W_j(\lambda) \equiv (w_{1j}(\lambda), w_{2j}(\lambda), \ldots, w_{nj}(\lambda))^T := e^{-\lambda\omega_j}\left(U_{11}^0(y_j,\lambda), U_{21}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n1}^0(y_j,\lambda)\right)^T.$$

С использованием этих обозначений характеристический определитель (х.о.) пучка $L_0(\lambda)$ будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_i^0(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n = |H_1(\lambda)H_2(\lambda)\ldots H_n(\lambda)| =$$
$$= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1}W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2}W_2(\lambda), \ldots, V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n}W_n(\lambda)\right|. \quad (7)$$

Известно, что отличные от нуля с.з. пучка $L_0(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

Обозначим через Ω множество, состоящее из 0 и всевозможных сумм различных чисел ω_j, $j = \overline{1,n}$ по одному, по два и так далее до n слагаемых. Далее совпадающие точки $\omega \in \Omega$, полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω. Тогда, раскладывая определитель (7) на сумму определителей, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{\omega \in \Omega} F^{\omega}(\lambda) e^{\lambda\omega},$$

где

$$F^{\omega}(\lambda) = F_0^{\omega} + \frac{1}{\lambda} F_1^{\omega} + \dots + \frac{1}{\lambda^{\varkappa}} F_{\varkappa}^{\omega}.$$

Очевидно, если $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_k}$, то

$$F^{\omega}(\lambda) = \left| \hat{V}_1(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_1-1}(\lambda), \hat{W}_{j_1}(\lambda), \hat{V}_{j_1+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_k-1}(\lambda), \hat{W}_{j_k}(\lambda), \hat{V}_{j_k+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_n(\lambda) \right|,$$

где векторы с крышками имеют следующий вид при $j = \overline{1, n}$

$$\hat{V}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} v_{1j}(\lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} v_{nj}(\lambda) \right)^T, \ \hat{W}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} w_{1j}(\lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} w_{nj}(\lambda) \right)^T.$$

Положим $M = \operatorname{conv}\{\Omega\}$ (может случиться, что M — отрезок).

В дальнейшем будет использоваться следующее обозначение при $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$[\eta(x, \lambda)]_r = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r},$$

для функции

$$\eta(x, \lambda) = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r} + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^{r+1}} + \ldots.$$

Для $r \in \{0, 1, \dots, \varkappa\}$ через $(M_\Delta)_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω, для которых $[F^{\omega}(\lambda)]_r \not\equiv 0$. Ясно, что

$$(M_\Delta)_0 \subset (M_\Delta)_1 \subset \ldots \subset (M_\Delta)_{\varkappa} \subset M.$$

По аналогии с [10] дадим следующие определения.

Определение 2. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *регулярным*, если $(M_\Delta)_0 = M$.

Определение 3. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *почти регулярным*, если $(M_\Delta)_{\varkappa} = M$.

Определение 4. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *слабо нерегулярным* (или *нормальным* по терминологии [10]), если многоугольник $(M_\Delta)_{\varkappa}$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутреней точки к сторонам M, на которых лежат точки касания (если точка касания — вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то пучок $L_0(\lambda)$ называем *слабо нерегулярным*, когда $(M_\Delta)_{\varkappa} = M$.

Из определений следует, что регулярный и почти регулярный пучок является в то же время слабо нерегулярным.

Определение 5. Пучок $L_0(\lambda)$, который не удовлетворяет предыдущему определению, назовем *сильно нерегулярным.*

Из результатов [10] следует, что если пучок $L_0(\lambda)$ слабо нерегулярен (или, по-другому, нормален), то система его к.ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ будем кратко обозначать M_Δ и называть характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

3. Определение и свойства одного специального решения основного дифференциального уравнения

Введем в рассмотрение следующее решение уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)):=\begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda)\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -\Gamma(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \dots & H_n(\lambda)\end{vmatrix}, \tag{8}$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma(\lambda)=(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\dots,\gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром. Функции вида (8) играет важную роль при доказательстве полноты системы к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

В частности, из формулы (8) следует

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y(x,\lambda,E_i),$$

где $E_i=(\delta_{i1},\dots,\delta_{in})^T$, $i=\overline{1,n}$, — есть единичные орты. Здесь через δ_{ij} обозначен символ Кронекера. Очевидно,

$$y(x,\lambda,E_i):=\begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & \dots & U_1(y_n,\lambda)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ U_{i-1}(y_1,\lambda) & \dots & U_{i-1}(y_n,\lambda)\\ y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda)\\ U_{i+1}(y_1,\lambda) & \dots & U_{i+1}(y_n,\lambda)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ U_n(y_1,\lambda) & \dots & U_n(y_n,\lambda)\end{vmatrix},\quad i=\overline{1,n}.$$

Справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 1. *При $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda_0$ функции $y(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,n}$, линейно независимы по $x\in[0,1]$ тогда и только тогда, когда линейно-независимы в.-ф. $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$.*

Далее потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Через Ω_j обозначим подмножество тех точек из Ω, которые представляются в виде $\omega_j + \dots$, то есть содержат в качестве слагаемого число ω_j. Через Ω^j обозначим множество $\Omega \setminus \Omega_j$, то есть те точки из Ω, которые не содержат в качестве слагаемого число ω_j.

Далее будем считать, что $\Gamma(\lambda)$ есть векторы-полиномы по λ вида $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_n(\lambda))^T$, где

$$\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j\varkappa_j}\lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j,\varkappa_j-1}\lambda^{\varkappa_j-1} + \dots + \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Раскрывая определитель (8) по первой строке, получим (ради экономии места аргумент λ у векторов $V_j(\lambda)$, $W_j(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda)$ здесь и далее не пишем)

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x,\lambda)\Big|H_1(\lambda), \dots, H_{k-1}(\lambda), \Gamma(\lambda), H_{k+1}(\lambda), \dots, H_n(\lambda)\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda\omega_k x}\Big|V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1, \dots, V_{k-1} + e^{\lambda\omega_{k-1}}W_{k-1}, \Gamma, V_{k+1} + e^{\lambda\omega_{k+1}}W_{k+1}, \dots, V_n + e^{\lambda\omega_1}W_n\Big| =$$

$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega\in\Omega^k} G_k^{\omega}(\lambda) e^{\lambda(\omega_k x + \omega)}, \quad (9)$$

где $G_k^{\omega}(\lambda) = O(1)$ при $|\lambda| >> 1$.

По аналогии с $(M_\Delta)_r$ назовем х.м. порядка r $(0 \le r \le \varkappa)$ функции $y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ выпуклую оболочку тех точек $\{\omega_k x + \omega\}$, $k = \overline{1,n}$, $\omega \in \Omega^k$, для которых $[G_k^{\omega}]_r \not\equiv 0$. Обозначим этот х.м. как $\big(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\big)_r$. Многоугольник $\big(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\big)_\varkappa$ кратко обозначим как $M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}$.

Будем называть $\mathrm{conv}_{x\in[0,1]}\{M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}$ х.м. вектора $\Gamma(\lambda)$ и обозначать $M(\Gamma)$. Так как, очевидно,

$$M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} \subset \mathrm{conv}\{M_{y(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{y(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\},$$

то имеет место равенство

$$M(\Gamma) = \mathrm{conv}\{M_{y(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{y(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}. \quad (10)$$

Лемма 2. *Для фиксированного индекса j $(1 \le j \le n)$ имеет место включение $M(V_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$.*

Доказательство. Из формулы (9) следует, что

$$y(x,\lambda,V_j) =$$

$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x}\Big|\hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \dots, \hat V_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1}, \hat V_j, \hat V_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1}, \dots, \hat V_n + e^{\lambda\omega_1}\hat W_n\Big|.$$

С учетом (10) для доказательства леммы достаточно рассмотреть $y(0,\lambda,V_j)$ и $y(1,\lambda,V_j)$.

1. Рассмотрим

$$y(0,\lambda,V_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n}\Big|\hat V_1+e^{\lambda\omega_1}\hat W_1,\dots,\hat V_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1},\hat V_j,\hat V_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1},\dots,\hat V_n+e^{\lambda\omega_1}\hat W_n\Big|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $y(0,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat V_1,\dots,\hat V_{s-1},\hat V_j,\hat V_{s+1}\dots,\hat V_n|$, $s=\overline{1,n}$. Только в случае $s=j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае этот определитель формально входит слагаемым в $\Delta(\lambda)$ (здесь и далее — с точностью до множителя, являющегося степенью λ).

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat V_j,\hat W_m,\hat V_{s_1},\hat V_{s_2}\dots,\hat V_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $j\neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

1.1a) $j\neq m$;

1.1b) $j=m$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,s_1,\dots,s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемый член формально является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat V_j,\hat W_m,\hat W_k,\hat V_{s_1},\hat V_{s_2}\dots,\hat V_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одиноковых столбца). Мы имеем два возможных случая:

1.2a) $j\neq m$ и $j\neq k$;

1.2b) $j=m$ или $j=k$.

Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j,m,k,s_1,\dots,s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемый член формально является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

1.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут либо, формально, слагаемыми из $\Delta(\lambda)$, либо им будет соответствовать точки ω, входящие в Ω_j.

2. Рассмотрим теперь

$$y(1,\lambda,V_j) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s} \Big| \hat V_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat W_1, \dots, \hat V_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat W_{s-1}, \hat V_j, \hat V_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat W_{s+1}, \dots, \hat V_n + e^{\lambda\omega_1}\hat W_n \Big|.$$

Аналогично предыдущему разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $y(1,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat V_1, \dots, \hat V_{s-1}, \hat V_j, \hat V_{s+1} \dots, \hat V_n|$, $s = \overline{1,n}$. Только в случае $s = j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае этому слагаемому, формально, соответствует число $\omega \in \Omega_j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat V_j, \hat W_m, \hat V_{s_1}, \hat V_{s_2} \dots, \hat V_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $j \neq s_l$ (иначе будем иметь два одиноковых столбца), $s \neq m$, $s \neq s_l$. Возможны следующие два случая:
2.1a) $j \neq m$;
2.1b) $j = m$.
Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j, m, s_1, \dots, s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq s_l$ и $s \neq m$, то $s = j$. Таким образом, и здесь получим слагаемое, которому, формально, соответствует число $\omega \in \Omega_j$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat V_j, \hat W_m, \hat W_k, \hat V_{s_1}, \hat V_{s_2} \dots, \hat V_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $k \neq s_l$, $m \neq k$, $j \neq s_l$ (иначе будем иметь два одинаковых столбца), $s \neq m$, $s \neq k$, $s \neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:
2.2a) $j \neq m$ и $j \neq k$;
2.2b) $j = m$ или $j = k$.
Случай b) отмечен в формулировке леммы среди тех точек ω, которые входят в Ω_j. В случае a) числа $j, m, k, s_1, \dots, s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq k$, $s \neq s_l$, то $s = j$. Таким образом, и здесь мы получаем слагаемое, которому, формально, соответствует число $\omega \in \Omega_j$

2.3) $\dots$
Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать числа ω, входящие в Ω_j.

Лемма доказана.

□

Лемма 3. *Для фиксированного индекса* j *(*$1 \le j \le n$*) имеет место включение* $M(W_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$.

Доказательство. Из формиулы (9) следует, что

$$y(x,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x} \Big| \hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{k+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n \Big|.$$

С учетом (10) для доказательства леммы достаточно рассмотреть $y(0,\lambda,W_j)$ и $y(1,\lambda,W_j)$.

1. Рассмотрим

$$y(0,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} \Big| \hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n \Big|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $y(0,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} \ldots, \hat{V}_n|$, $s = \overline{1,n}$. Этому слагаемому соответствует точка $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat{W}_j, \hat{W}_m, \hat{V}_{s_1}, \hat{V}_{s_2} \ldots, \hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \ne s_l$. Мы имеем два возможных случая:

1.1a) $j \ne m$;

1.1b) $j = m$.

В случае b) получаем определитель, имеющий два одиноковых столбца, и, таким образом, это слагаемое равно нулю. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega \in \Omega^j$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat{W}_j, \hat{W}_m, \hat{W}_k, \hat{V}_{s_1}, \hat{V}_{s_2} \ldots, \hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \ne s_l$, $k \ne s_l$, $m \ne k$. Мы имеем два возможных случая:

1.2a) $j \ne m$ и $j \ne k$;

1.2b) $j = m$ или $j = k$.

В случае b) получаем слагаемое равное нулю, так как в этом определителе будут два одинаковых столбца. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать точки ω, входящие в Ω^j.

2. Рассмотрим теперь

$$y(1,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s} \left| \hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n \right|.$$

Аналогично предыдущему разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $y(1,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} \ldots, \hat{V}_n|$, $s = \overline{1,n}$. Мы имеем два возможных случая:

2.0a) $j \neq s$;

2.0b) $j = s$.

В случае b) получим слагаемое, которое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$. А в случае a) рассматриваемое слагаемое, формально, соответствует числу $\omega \in \Omega^j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat{W}_j, \hat{W}_m, \hat{V}_{s_1}, \hat{V}_{s_2} \ldots, \hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $s \neq m$, $s \neq s_l$. Мы имеем только два возможных случая:

2.1.1) $j \neq m$;

2.1.2) $j = m$.

В случае 2.1.2) получим слагаемое равное нулю, так как в определителе будут два одинаковых столбца. Случай 2.1.1) разобъем еще на два возможных случая:

2.1.1a $j = s_l$ при некотором l;

2.1.1b $j \neq s_l$.

В случае a) будем иметь $s \neq j$, $m \neq j$ и, таким образом, данному слагаемому соответствует число $\omega \in \Omega^j$. В случае b) получим, что числа $j, m, s_1, \ldots, s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq s_l$, то $s = j$ и рассматриваемое слагаемое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat{W}_j, \hat{W}_m, \hat{W}_k\hat{V}_{s_1}, \hat{V}_{s_2} \ldots, \hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $k \neq s_l$, $m \neq k$, $s \neq m$, $s \neq k$, $s \neq s_l$. Возможны только следующие два случая:

2.2.1) $j \neq m$;

2.2.2) $j = m$.

В случае 2.2.2) получим слагаемое равное нулю, так как в определителе будут два одинаковых столбца. Случай 2.2.1) разобъем еще на два возможных случая:

2.2.1a) $j = s_l$ при некотором l;

2.2.1b) $j \neq s_l$.

В случае a) будем иметь $s \neq j$, $m \neq j$, $k \neq j$ и, таким образом, данному слагаемому соответствует число $\omega \in \Omega^j$. В случае b) получим, что числа $j, m, k, s_1, \ldots, s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq k$ $s \neq s_l$, то $s = j$ и рассматриваемое слагаемое, формально, является слагаемым $\Delta(\lambda)$.

2.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут, формально, соответствовать либо слагаемым, входящим в функцию $\Delta(\lambda)$, либо числам ω, входящим в Ω^j.

Лемма доказана.

$\square$

4. Достаточные условия полноты

По-прежнему считаем, что в.-ф. $\Gamma(\lambda)$ есть полином по λ указаного выше типа. Непосредственно можно убедиться, что векторы

$$\left(\frac{\partial^k y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}{\partial\lambda^k}, \frac{\partial^k(\lambda y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}, \ldots, \frac{\partial^k(\lambda^{m-1}y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{11}$$

где $k \in \overline{0, s_\nu}$ и $\lambda_\nu \in \Lambda$, являются производными m-цепочками для к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующих с.з. λ_ν кратности $s_\nu + 1$.

Предположим, что система $Y = \{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m-кратно ($0 < m \leq n$) не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = \left(\bar{h_1}(x), \bar{h_2}(x), \ldots, \bar{h_m}(x)\right)^T \in L_2^m[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m–цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$. В частности, h ортогональна векторам (11). Из этой ортогональности следует, что с.з. λ_ν, имеющее кратность $s_\nu+1$, является нулем кратности не меньше $s_\nu + 1$ функции

$$H(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) h_m(x, \lambda)\, dx,$$

где обозначено $h_m(x, \lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x) + \ldots + \lambda^{m-1} h_m(x)$. Ясно, что функция $H(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) по λ.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \frac{H(\lambda, \Gamma(\lambda))}{\Delta(\lambda)},$$

которая формально имеет полюса в точках $\lambda \in \Lambda$, но, как это было отмечено выше, все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda = 0$ является нулем $\Delta(\lambda)$, но не является с.з. или является с.з. меньшей кратности. Такая ситуация может быть, так как используемая ф.с.р. не является таковой при $\lambda = 0$. В этом случае дополнительное предположение об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0, 1]$ конечному набору в.-ф. из $L_2^m[0, 1]$, позволяет сделать вывод о том, что $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т.

Определение 6. Будем говорить, что вектор–функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначаем $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$), если в λ-плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол меньше π и на которых функция $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ имеет не более чем степенной рост.

Если $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то используя принцип Фрагмена-Линделёфа, получим, что

$$\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ есть полином по λ. Требуя дополнительную ортогональность $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0, 1]$ некоторому конечному набору в.-ф., устанавливаем, что $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv 0$, откуда следует, что $H(\lambda, \Gamma(\lambda)) \equiv 0$.

Если имеется несколько линейно-независимых в.-ф. $\Gamma_j(\lambda) \in (\alpha)$, $j = \overline{1, r}$, то получим r тождеств

$$H(\lambda, \Gamma_j(\lambda)) \equiv 0, \quad j = \overline{1, r}, \tag{12}$$

при условии, что в.-ф. $h(x)$ ортогональна в пространстве $L_2^m[0, 1]$ некоторому конечному набору в.-ф.. Если набор тождеств (12) достаточно "богат" , то из него можно заключить, что

$$h_1(x) = h_2(x) = \ldots = h_m(x) = 0, \quad \text{п.в. } x \in [0, 1],$$

и тем самым получить противоречие с исходным предположением о том, что $h \neq 0$.

Важную роль далее играет следующая лемма (см., например, [12]).

Лемма 4. *Либо система к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$*, либо соответствующая система производных* n*-цепочек* $\tilde{y}_k$*, построенная по системе к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$*, имеет бесконечный дефект в* $L_2[0,1]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если существуют* n *линейно независимых в.-ф.* $\Gamma_1(\lambda)$*,* $\Gamma_2(\lambda)$*, …,* $\Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$*, то система к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Предположим, что система $Y = \{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = \left(\bar{h_1}(x), \ldots, \bar{h_n}(x)\right)^T \in L_2^n[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^n[0,1]$ всем производным n-цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предпложении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^n[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., получим (12) при $r = n$, то есть

$$H(\lambda, \Gamma_j(\lambda)) := \int_0^1 y(x, \lambda, \Gamma_j(\lambda)) h_n(x, \lambda)\, dx \equiv 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Но на основании Леммы 1 функции $y(x, \lambda, \Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,n}$ есть ф.с.р. уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ при $\in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$, так как по условию в.-ф. $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,n}$ линейно независимы. Таким образом, из (13) получим $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$

$$\int_0^1 y_j(x, \lambda) h_n(x, \lambda)\, dx \equiv 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\ell_0^*(z, \lambda) = \sum_{j=n}^{n} \bar{h_j}(x) \bar{\lambda}^{j-1}, \quad z(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0, \tag{15}$$

где $\ell_0^*(z, \lambda)$ есть сопряженное, по Лагранжу, д.в. к $\ell_0(y, \lambda)$.

Известно, что если $z(x, \lambda)$ есть решение задачи (15), то $\bar{z}(x, \lambda)$ есть целая функция по λ, для которой имеет место следующее представление при $\lambda \neq 0$

$$\bar{z}(x, \lambda) = \int_0^x \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_i(x, \lambda) y_i(\xi, \lambda) h_n(\xi, \lambda)\, d\xi, \tag{16}$$

где

$$\bar{z}_i(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^{n-1}}\frac{W_{ni}}{W}e^{-\lambda\omega_i x}, \quad i=\overline{1,n} \tag{17}$$

есть решения уравнения $\bar{\ell_0}^*(z,\lambda)=0$; здесь обозначено $W=\det(\omega_j^{i-1})_{i,j=1}^n$, а W_{ni} есть алгебраические дополнения к элементам (n,i) в определителе W.

Тогда для любого $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>>1$ из (16) получим

$$\bar{z}(x,\lambda) = \int_0^1 \sum_{\Re\lambda\omega_i<0} \bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi + \int_0^x \sum_{\Re\lambda\omega_i\geq 0} \bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi -$$

$$-\int_x^1 \sum_{\Re\lambda\omega_i<0} \bar{z}_i(x,\lambda)y_i(\xi,\lambda)h_n(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Отсюда с учетом тождеств (14) и формул (17) получим при $|\lambda|>>1$ оценку $\bar{z}(x,\lambda)=O(1)$. Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $\bar{z}(x,\lambda)\equiv C$. Отсюда, в силу нулевых начальных условий задачи (15), следует, что $\bar{z}(x,\lambda)\equiv 0$, а тогда из дифференциального уравнения (15) получим $h_n(x,\lambda)\equiv 0$ по λ для п.в. $x\in[0,1]$, а, следовательно,

$$h_j(x)=0 \text{ для п.в. } x\in[0,1], \quad j=\overline{1,n}.$$

Тем самым установлено, что система к.ф. рассматриваемого пучка n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Но, в силу Леммы 4 этот дефект равен нулю. Следовательно, Теорема 1 полность доказана.

□

С учетом Лемм 2 и 3 очень удобно в качестве $\Gamma_j(\lambda)$ брать векторы $V_i(\lambda)$ и $W_i(\lambda)$.

Следствие 1. *Если $V_{i_s}(\lambda)\in(\alpha)$, $s=\overline{1,k}$, $W_{j_t}(\lambda)\in(\alpha)$, $t=\overline{1,l}$, $k+l\geq n$ и*

$$\operatorname{rank}(V_{i_1}(\lambda),V_{i_2}(\lambda),\ldots,V_{i_k}(\lambda),W_{j_1}(\lambda),W_{j_2}(\lambda),\ldots,W_{j_l}(\lambda))=n,$$

то система к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Ввиду специфической структуры функции $y(x,\lambda,\Gamma(x))$, определяемой формулой (8), удалось доказать, в частности, следующую теорему.

Теорема 2. *Если существуют m пар векторов $\{V_{j_s}(\lambda),W_{j_s}(\lambda)\}$, $s=\overline{1,m}$ таких, что $V_{j_s}(\lambda)\in(\alpha)$, $W_{j_s}(\lambda)\in(\alpha)$, то имеет место m–кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ с возможным конечным дефектом.*

Доказательство. Предположим, что система $Y=\{y_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x)=\big(\bar{h}_1(x),\ldots,\bar{h}_m(x)\big)^T\in L_2^m[0,1]$,

$h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам $\tilde{y}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предпложении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., получим (12) для $\Gamma_s(\lambda) = V_{j_s}(\lambda)$ и $\Gamma_{m+s}(\lambda) = W_{j_s}(\lambda)$, $s = \overline{1,m}$, то есть при $s = \overline{1,m}$

$$H(\lambda, V_{j_s}(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda)) h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0,$$

$$H(\lambda, W_{j_s}(\lambda)) := \int\limits_0^1 y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda)) h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0.$$

Отсюда сразу следует

$$H(\lambda, V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{js}} H(\lambda, W_{j_s}(\lambda)) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_0^1 \left(y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{js}} y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda)) \right) h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad s = \overline{1,m}. \quad (18)$$

Но из (8) следует на основании свойств определителей при $s = \overline{1,m}$

$$y(x,\lambda,V_{j_s}(\lambda)) + e^{\lambda\omega_{js}} y(x,\lambda,W_{j_s}(\lambda)) =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -H_{js}(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \ldots & H_n(\lambda) \end{vmatrix} =$$
$$= y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3} \left| H_{j_s}(\lambda), H_1\lambda, \ldots, H_{j_s-1}(\lambda) H_{j_s+1}(\lambda), \ldots, H_n(\lambda) \right| =$$
$$= y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3}(-1)^{j_s-1}\Delta(\lambda) = y_{j_s}(x,\lambda)\Delta(\lambda).$$

Таким образом, из (18) получим

$$\int\limits_0^1 y_{j_s}(x,\lambda) h_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad s = \overline{1,m}. \quad (19)$$

Далее рассуждаем по схеме работы [12, с. 63–64]. Если кратко, то схема доказательства такова. Так как $y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}$, то раскладывая эти экспоненты в ряды Тейлора по λ, подставляя эти ряды в (19), получим равные нулю ряды по степеням λ. Приравнивая нулю коэффициенты рядов, получим однородные системы m-го порядка с m неизвестными, являющимися текущими последовательными моментами функций $h_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, и с отличными от нуля определителями при больших номерах коэффициентов ряда. Отсюда следует, что все достаточные большие по номеру моменты функций $h_j(x)$, $j = \overline{1,m}$ равны нулю, а, следовательно, и сами эти функци равны нулю п.в. на $[0,1]$.

Тем самым, Теорема 2 полностью доказана.

□

Имеются простые примеры пучков $L_0(\lambda)$ (см., в частности, пример из [13]), которые являются сильно нерегулярными (то есть теорема о полноте системы их к.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ из [10] здесь не работает), но, тем не менее, из сформулированных теорем вытекает кратная полнота в $L_2[0,1]$ систем их к.ф..

Список литературы

1. Келдыш, М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 1. — С. 11–14.

   KELDYSH, M.V. (1951) On eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint equations. *Dokl. AN SSSR.* 77 (1). p. 11–14.
2. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

   NAIMARK, M.A. (1969) *Linear differential operators.* Moscow: Nauka.
3. Хромов, А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1973. — 242 с.

   KHROMOV, A.P. (1973) *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators: Dr. phys. and math. sci. diss.*. Novosibirsk.
4. Eberhard, W. Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme // Math. Z.. — 1976. — Bd. 146. — H. 3. — C. 213–221.

   EBERHARD, W. (1976) To completeness of the biorthogonal systems from eigenfunctions of irregular boundary values problems. *Math. Z.*. 146 (3). p. 213–221.
5. Шкаликов, А.А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прил.. — 1976. — Т. 10. — № 4. — С. 69–80.

   SHKALIKOV, A.A. (1976) On completenes of the eigen- and associated functions of an ordinary differential operator with nonregular splitting boundary conditions. *Functional analysis and applications.* 10 (4). p. 69–80.
6. Хромов, А.П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сборник. — 1977. — Т. 102(104). — № 3. — С. 457–472.

   KHROMOV, A.P. (1977) On generating functions of Volterra operators. *Mathematics of the USSR – Sbornik.* 31 (3). p. 409–423.
7. Freiling, G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z.. — 1984. — Bd. 188. — H. 1. — C. 55–68.

FREILING, G. (1984) To completeness of the systems of the eigenfuncions and the main functions of irregular operator pencils. *Math. Z.*. 188 (1). p. 55–68.

8. Тихомиров, С.А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1987. — 126 с.

   TIKHOMIROV, S.A. (1987) *Finite-dimensional perturbations of integral Volterra operators in the space of vector-functions: Cand. phys. and math. sci. diss.*. Saratov.

9. Гасымов, М.Г., Магеррамов, А.М. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР.. — 1974. — Т. 30. — № 12. — С. 9–12.

   GASYMOV, M.G. & MAGERRAMOV A.M (1974) On fold-completeness of the system of eigen- and associated functions of a class of differential operators. *Dokl. AN Azerb. SSR.* 30 (12). p. 9–12.

10. Шкаликов, А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И.Г.Петровского. – м.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — № 9. — С. 190–229.

    SHKALIKOV, A.A. (1986) Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*. 33 (6). p. 1311–1342.

11. Вагабов, А.И. Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Москва, 1988. — 201 с.

    VAGABOV, A.I. (1988) *Expansions in Fourier series with respect to the main functions of differential operators and their applications.: Dr. phys. and math. sci. diss.*. Moscow.

12. Вагабов, А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994. — 160 с.

    VAGABOV, A.I. (1994) *Introduction to the spectral theory of differential operators.* Rostov-na-Donu: Rostov University Publishing.

13. RYKHLOV, V.S. (1996) Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators (Transactions of the international conference "Algebraic and Topological Methods in Mathematical Physics. 1–14 Sept. 1993. Katziveli. Ukraine). *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya.* 3 (3/4). p. 406–411.

14. Rykhlov, V.S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. — Simferopol: Simferopol State University, 1997. — V. 7. — C. 70–73.

15. Рыхлов, В.С. О полноте собственных функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2004). — Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2005. — Т. 15. — С. 47–54.

    RYKHLOV, V.S. (2005) On completeness of the eigenfunctions of polynomial pencils of ordinary differential operators with constant coefficients. *Spectral and evolution problems: Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2004).* 15. p. 47–54.

Статья поступила в редакцию 01.06.2015

УДК: 517.984.5

MSC2010: 35P05

ОПЕРАТОР РОТОР В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{L}_2(G)$

© Р. С. Сакс

ИМВЦ УНЦ РАН, ул.Чернышевского 112, Уфа 450077

e-mail: *romen-saks@yandex.ru*

The curl operator in the $\mathbf{L}_2(G)$ space.

Saks R. S.

Abstract.

Author studies properties of the curl and gradient of divergence operators in the $\mathbf{L}_2(G)$ space, spectral decompositions, and boundary value problems for any bounded domain G with smooth boundary Γ.

It turns out that the space $\mathbf{L}_2(G)$ has orthogonal subspaces $\mathbf{V}^0(G)$ and $\mathscr{A}_\gamma(G)$ such that the curl and gradient of divergence operators admit self-adjoint extensions.

Therefor, each of these operators has a complete system of eigenfunctions corresponding to non zero eigenvalues.

These results supplement Weil's well known theorem on a decomposition of $\mathbf{L}_2(G)$ on orthogonal subspaces $\mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{V}^0(G)$ and $\mathscr{B}_H(G)$ of finite dimension. It show that the space $\mathbf{L}_2(G)$ has a bases consisting of eigenfunctions of the curl and gradient of divergence operators.

We investigate also the solvability of the boundary value problem $\mathbf{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in G, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = g$, for $\lambda \neq 0$ and (by Fourier method) in a ball $G = B$ for all λ.

Key words: the curl and gradient of divergence operators, $\mathbf{L}_2(G)$ space, spectral decompositions, boundary value problem, the bounded domain G, smooth boundary Γ.

Введение

Автор изучает операторы ротор и градиент дивергенции в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$, их спектральные разложения и краевые задачи для них в произвольной ограниченной области G с гладкой границей Γ. Оказывается, что в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ имеются ортогональные подпространства $\mathbf{V}^0(G)$ и $\mathscr{A}_\gamma(G)$, в которых операторы ротор и градиент дивергенции имеют самосопряженные расширения,

$$\mathscr{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G) : \mathbf{n}\cdot\nabla h|_\Gamma = 0\}, \quad \mathbf{V}^0(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0\}.$$

Это означает, что существует оператор $S : \mathbf{V}^0(G) \longrightarrow \mathbf{V}^0(G)$ с областью определения $\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \mathbf{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}$, который совпадает с $\mathbf{rot}$ на подпространстве $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ и является самосопряженным.

Аналогично, существует самосопряженный оператор $N_d : \mathscr{A}_\gamma(G) \longrightarrow \mathscr{A}_\gamma(G)$, совпадающий с ∇div на подпространстве $\mathscr{A}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{A}_\gamma(G) : \nabla div\mathbf{u} \in \mathbf{A}_\gamma(G)\}$.

Следовательно, каждый из этих операторов имеет полную систему собственных функций, отвечающих ненулевым собственным значениям:

$$\mathrm{curl}\mathbf{u}_j^\pm = \pm\lambda_j \mathbf{u}_j^\pm, \quad \lambda_j \in \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \quad \nabla\mathrm{div}\mathbf{q}_l = \mu_l \mathbf{q}_l, \quad \mu_l \in M \subset \mathbb{R}_+.$$

Вектор-функции $\mathbf{a}(x) \in \mathscr{A}_\gamma(G)$ и $\mathbf{b}(x) \in \mathbf{V}^0(G)$. имеют спектральные разложения

$$\mathbf{a}(x) = \sum_{\mu_l \in M} (\mathbf{a}, \mathbf{q}_l)\mathbf{q}_l(x), \quad \|\mathbf{q}_l\| = 1,$$

$$\mathbf{b}(x) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [(\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(x) + (\mathbf{b}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(x)], \quad \|\mathbf{u}_j^\pm\| = 1.$$

Эти результаты служат дополнением к известной Теореме Г. Вейля [7] о разложении $\mathbf{L}_2(G)$ на ортогональные подпространства $\mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{V}^0(G)$ и $\mathscr{B}_H(G)$, где

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \mathrm{rot}\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\} = Ker(\mathbf{rot}) \cap \mathbf{Ker}(\nabla\mathbf{div}).$$

Любой вектор $\mathbf{f}(x)$ из $\mathbf{L}_2(G)$ может быть представлен в виде суммы трех векторов $\mathbf{a}(x) \in \mathscr{A}_\gamma(G)$, $\mathbf{b}(x) \in \mathbf{V}^0(G)$ и $\mathbf{c}(x) \in \mathscr{B}_H$: $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}(x) + \mathbf{b}(x) + \mathbf{c}(x)$.

Они показывают, что пространство $\mathbf{L}_2(G)$ имеет базис, состоящий из собственных функций ротора и градиента дивергенции.

Отметим, что $\mathscr{B}_H$ – конечномерное подпространство, его размерность -это род $\rho(\Gamma)$ границы Γ, $\rho(S) = 0$ для сферы и $\rho(\tau) = 1$ для тора τ.

В математической физике особо значимы области: тороидальная (токамак) и шар. В шаре B радиуса R собственные вектор-функции $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора (отвечающие собственным значениям $\pm\rho_{n,m}/R$) и собственные функции $\mathbf{q}_\kappa$ оператора градиент дивергенции (отвечающие собственным значениям $(\alpha_{n,m}/R)^2$) выражаются явными формулами [18]. Числа $\pm\rho_{n,m}$ и $\alpha_{n,m}$ - нули функций ψ_n и их производных ψ_n': $\psi_n(\rho_{m,n}) = 0, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0,$ где

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad \kappa = (n, m, k), \quad n \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |k| \leq n.$$

Эти формулы приведены в работе автора [18]. Профессор Г.Г.Исламов сообщил мне, что группа физиков использовала некоторые из них в новой теории протона.

Найдено необходимое и достаточное условия на функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$, при котором ее ряд Фурье сходится в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$, оно состоит в принадлежности $\mathbf{u}$ подпространству $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B) \subset \mathbf{V}^0(B)$ (см. п.2.8 и [1, 5, 19, 20]). Аналогично для $\mathbf{v} \in \mathscr{A}_\gamma(B)$.

Исследована разрешимость в подпространствах $\mathbf{L}_2(G)$ краевой задачи для системы $\mathbf{rot u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ при $\lambda \neq 0$ в G с граничным условием $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g$.

Методом Фурье *при любых* λ в шаре B исследована разрешимость краевой задачи: $\mathbf{rot u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0$.

В этой статье мы изучаем оператор ротор. Оператор градиент дивергенции будет рассмотрен в следующей работе автора. Краткое содержание этих работ опубликовано в ДАН [19, 20].

1. Ротор в ограниченной области

1.1. **Спектральная задача.** Пусть G - ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$- внешняя нормаль к Γ. В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

З а д а ч а 1. *Найти собственные значения* λ *и собственные вектор-функции* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{L}_2(G)$ *оператора ротор такие, что*

$$\mathbf{rot\,u} = \lambda\mathbf{u} \quad \textit{в} \quad G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ *- скалярное произведение векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{n}$.

К области определения $\mathscr{M}_\mathscr{R}$ оператора $\mathscr{R}$ задачи 1 отнесем все вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ класса $\mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}(\overline{G})$, удовлетворяющие граничному условию и условию $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$. Пространство основных вектор-функций $\mathscr{D}(G)$ содержится в $\mathscr{M}_\mathscr{R}$ и плотно в $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

1.2. **О приложениях.** Собственные функции задачи 1 имеют приложения: в гидродинамике, они называются полями Бельтрами [2], в небесной механике и в физике плазмы они называются бессиловыми полями (см. С. Чандрасекхар [9] и Д. Тэйлор [11], В.Козлов [4], а также [14]–[18]).

1.3. **Краевая задача.** *Даны* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$*, найти вектор-функцию* $\mathbf{u}$*, такую что*

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g. \tag{2}$$

Эта задача не эллиптична [12]. Оператор rot $+\lambda$I первого порядка не является эллиптическим, ранг его символической матрицы $\mathrm{rot}(i\xi)$ равен двум при всех $\xi \in \mathscr{R}^3 \backslash 0$ и меньше трех. На многообразии без края при $\lambda \neq 0$ он принадлежит классу Вайнберга и Грушина [10].

Оператор rot имеет левый и правый аннуляторы div и ∇:

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ и $\mathrm{rot}\nabla h = 0$. Поэтому

1) на подпространстве $\mathscr{A} = \{\mathbf{u} = \nabla\, h : \quad h \in H^1(G)\}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператор $rot\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ совпадает с алгебраическим оператором $\lambda\nabla\, h$, который отображает $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}$ при $\lambda \neq 0$.

2) В общем случае из системы уравнений (2) при $\lambda \neq 0$ вытекает, что $\lambda\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\mathbf{f}$. Следовательно, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является решением системы:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}\,\mathbf{f}. \tag{3}$$

Эта система с краевым условием (2) принадлежит классу переопределенных эллиптических краевых задач, В.А.Солонников [6], то-есть

1) Расширенная система (3) эллиптична,

2) краевое условие в (2) "накрывает" оператор системы (3).

Первое условие сводится к тому, что однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{rot}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \mathrm{div}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \forall\xi \neq 0 \tag{4}$$

с параметром $\xi \in T'(G)$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{w} = 0$.

Второе условие означает, что однородная система линейных дифференциальных уравнений:

$$\mathrm{rot}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{div}(i\tau + \mathbf{n}d/dz)\mathbf{v} = 0, \quad \forall\tau \neq 0, \tag{5}$$

на полуоси $z \geq 0$ с краевым условием: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{z=0} = 0$ и убыванием, $\mathbf{v}(y, \tau; z) \to 0$ при $z \to +\infty$, имеет только тривиальное решение.

Здесь τ и $\mathbf{n}$ касательный и нормалльный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\mathbf{n}| = 1$. Доказательство этих утверждений не сложно, учитывая соотношение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{v} + \nabla\mathrm{div}\mathbf{v}. \tag{6}$$

Действительно, из уравнений (4) вытекает уравнение $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$, которое распадается на три скалярных уравнения $|\xi|^2 w_j = 0$, где $|\xi| \neq 0$. Значит, $\mathbf{w} = 0$.
Из уравнений (5) получаем уравнение $(-|\tau|^2 + (d/dz)^2)\mathbf{v} = 0$ с параметром $|\tau| > 0$. Его убывающее решение имеет вид: $\mathbf{v} = \mathbf{w}e^{-|\tau|z}$. Оно удовлетворяет уравнениям (5), если вектор-функция $\mathbf{w}$ есть решение линейных алгебраических уравнений:

$$\omega \times \mathbf{w} = 0, \quad \omega' \cdot \mathbf{w} = 0,$$

где $\omega \equiv i\tau - |\tau|\mathbf{n}$ –вектор-столбец, а ω' – вектор-строка.

Легко убедиться, что векторное и скалярное произведения ω на ω равны нулю: $\omega \times \omega = 0, \;\; \omega' \cdot \omega = 0$. Ранг матрицы $\mathrm{rot}(i\xi)$ равен двум при $\xi \neq 0$, поэтому $\mathbf{w} = c\,\omega$, где c - постоянная, и других решений нет.

Граничное условие приводит нас к уравнению: $|\tau|c = 0$ при $|\tau| > 0$. Следовательно $c = 0$ и $\mathbf{v} = 0$.

Итак, краевая задача (2), (3) является эллиптической.

Замечание. Это доказательство не использует топологию области G. Оно справедливо как для тороидальной области $\mathscr{T}$ так и для шара B.

Мы скажем, что при $\lambda \neq 0$ задача (2) является обобщенно эллиптической.

1.4. **Оператор задачи** (2) **в пространствах Соболева.** Пусть вектор-функция $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $\mathbf{H^{s+1}}(G)$, то-есть каждая ее компонента $u_j \in H^{s+1}(G)$. Тогда компоненты rot$\mathbf{u}$ и div$\mathbf{u}$ принадлежат $H^s(G)$, а вектор-функция $\mathbf{f} := \mathrm{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{E^s}(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G) : \mathrm{div}\, \mathbf{f} \in H^s(G), \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}.\}$$

Далее $g := \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству $H^{s+1/2}(\Gamma)$.
Следовательно, при $\lambda \neq 0$ задаче соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{A}\mathbf{u} \equiv \begin{matrix} \mathrm{rot}\, \mathbf{u} + \lambda\, \mathbf{u} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma \end{matrix} : \mathbf{H^{s+1}}(\mathbf{G}) \to \begin{matrix} \mathbf{E^s}(\mathbf{G}) \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{matrix}. \tag{7}$$

Согласно теории эллиптических краевых задач в ограниченной области G с гладкой границей $\Gamma \in \mathscr{C}^{s+1}$, обобщенно эллиптический оператор (7) имеет левый параметрикс: то-есть ограниченный оператор $\mathbb{A}^L$ такой, что $\mathbb{A}^L\mathbb{A} = \mathbb{I} + \mathbb{T}$, где $\mathbb{I}$ - единичный, а $\mathbb{T}$ - вполне непрерывный операторы, и существует постоянная $C_s > 0$ такая, что выполняется оценка:

$$C_s\|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\mathrm{rot}\, \mathbf{u}\|_s + |\lambda|\|\mathrm{div}\, \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s, \tag{8}$$

где $\|\mathbf{u}\|_{s+1}$ норма $\mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^{s+1}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2}$ – норма следа нормальной компоненты $\mathbf{u}$ на Γ в $H^{s+1/2}(\Gamma)$, $s \geq 0$ (см. [6, 12], а также [14]). Линейное пространство решений однородной задачи (2) обозначим через $\mathscr{N}$. Итак, имеет место

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{A}$ в пространствах (7) имеет левый параметрикс. Его ядро $\mathscr{N}$ конечномерно и выполняется априорная оценка* (8).

Из этой теоремы и оценки следует, что при $\lambda \neq 0$

a)*число линейно независимых решений задачи 1 конечно,*

b)*любое (обобщенное) решение задачи бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

1.5. **Оператор** rot + $\lambda\mathbf{I}$ **в подпространствах** $\mathbf{L}_2(G)$**.** Как мы уже отмечали, rot$\nabla\, h = 0$ на подпространстве $\mathscr{A}$ и оператор rot$\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}$ сводится к алгебраическому оператору $\lambda\nabla\, h$.

Ортогональное дополнение $\mathscr{B}$ к подпространству $\mathscr{A}$ в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ определяется так

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \int\limits_G \mathbf{u} \cdot \nabla\, h\, d\, x = 0, \quad \text{для любой} \quad h \in H^1(G)\}. \tag{9}$$

Из этого определения для функций $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}^1(G)$ вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в G и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0$.

В пространстве $\mathscr{B}$ выделим подпространство

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathscr{B} : \int\limits_G \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\,\mathbf{x} = 0, \quad \text{для любой} \quad \mathbf{v} \in \mathscr{D}(G)\}. \tag{10}$$

Кратко оно обозначается так

$$\mathscr{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0\}. \tag{11}$$

Это пространство конечномерно. Его базис состоит из бесконечно дифференцируемых в G вектор-функций $\{\mathbf{h}_j\}$, $j = 1, ..., N$, где N есть род $\rho(\Gamma)$ границы Γ; $\rho(S) = 0$ для сферы и $\rho(\tau) = 1$ для тора τ.

Ортогональное дополнение к $\mathscr{B}_H$ в $\mathscr{B}$ обозначим как

$$\mathbf{V}^0(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^0} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2}\},$$

так что

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_H \oplus \mathbf{V}^0(G), \quad \mathbf{L}_2(G) = \mathscr{A} \oplus \mathscr{B}.$$

В случае шара, пространство $\mathscr{B}_H$ пусто и $\mathscr{B} = \mathbf{V}^0(G)$ [7].

Наконец, в $\mathbf{V}^0(G)$ выделяется подпространство

$$\mathbf{W}^1(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(G)\}. \tag{12}$$

В силу оценки (8) оно содержится $\mathbf{H}^1(G)$ и плотно в $\mathbf{V}^0(G)$, так как плотное в нем множество $\mathbf{C}_0^\infty \cap \mathbf{V}^0(G)$ содержится в $\mathbf{W}^1(G)$.

Оператору $\operatorname{rot} + \lambda\, I : \mathbf{W}^1(G) \to \mathbf{V}^0(G)$ соответствует краевая задача

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Оператор $\operatorname{rot} + \lambda\, I$ является симметрическим, так как

$$\int\limits_G (\operatorname{rot} + \lambda\, I)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int\limits_G \mathbf{u} \cdot (\operatorname{rot} + \lambda\, I)\mathbf{v}\, d\mathbf{x} \tag{14}$$

для любых функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из $\mathbf{W}^1(G)$. Это доказано в [14].

В гильбертовом пространстве $\mathbf{V}^0(G)$ И. Гига и З. Иошида определили оператор $S : \mathbf{V}^0(G) \to \mathbf{V}^0(G)$, который совпадает с $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1(G)$, и доказали, что

Оператор S является самосопряженным.

Область определения S, $\mathbf{W}^1(G)$, содержится в $\mathbf{H}^1(G)$ и плотна в $\mathbf{V}^0(G)$, а область значений совпадает с $\mathbf{V}^0(G)$. Спектр $\sigma(S)$ точечный и действительный. Оператор S имеет компактный обратный $S^{-1}:\mathbf{V}^0(G)\to\mathbf{W}^1(G)$.
Оператор S замкнут и совпадает со своим сопряженным S^*. Семейство собственных функций оператора S образует полный ортогональный базис в пространстве $\mathbf{V}^0(G)$.

Согласно теории операторов в пространстве Гильберта , спектр самосопряженного оператора S точечный, а система его собственных вектор-функций ортогональна и полна в $\mathbf{V}^0(G)$. Каждому собственному значению соответствует конечное число собственных вектор-функций.

Однородная сопряженная задача к (13) совпадает с однородной задачей (13) ($\mathbf{f}=0$). Так что $\mathscr{N}=\mathscr{N}^*$ и $dim\mathscr{N}<\infty$.

Отметим, то из соотношения

$$(rot+\lambda\, I)(rot-\lambda\, I)\mathbf{u}=-\Delta\,\mathbf{u}+\nabla\, div\,\mathbf{u}-\lambda^2\,\mathbf{u} \tag{15}$$

и определения пространства $V^0(G)$ собственные функции ротора $\mathbf{u}^{\pm}_{\lambda}\in\mathscr{C}^{\infty}(G)$, отвечающие собственным значениям $\pm\lambda\neq 0$ является также собственными функциями оператора Лапласа:

$$-\Delta\mathbf{u}=\lambda^2\mathbf{u},\quad \mathbf{u}\in V^0(G). \tag{16}$$

Нормированные собственные функции ротора $\mathbf{u}^{\pm}_j$ ($\|\mathbf{u}^{\pm}_j\|=1$ при $\lambda_j\in\Lambda\subset R$) составляют полный ортонормальный базис в пространстве $\mathbf{V}^0(G)$.

Спектральное разложение вектор-функции $\mathbf{f}\in V^0(G)$ по этому базису имеет вид:

$$S\mathbf{f}=\sum_{\lambda_j\in\Lambda}[(\mathbf{f},\mathbf{u}^+_j)\mathbf{u}^+_j+(\mathbf{f},\mathbf{u}^-_j)\mathbf{u}^-_j],\quad \mathbf{f}\in\mathbf{V}^0(G). \tag{17}$$

При суммировании такого ряда его элементы нумеруются следуя правилу $\lambda_j\leq\lambda_{j+1}$ (см. [3] или п.2.4).

Кроме того, автор доказал, что имеет место

Теорема 2. *Оператор* $\mathrm{rot}+\lambda\, I:\mathbf{W}^1(G)\to\mathbf{V}^0(G)$ *разрешим по Фредгольму. Его ядро $\mathscr{N}$ и коядро $\mathscr{N}^*$ имеют конечную размерность и $\mathscr{N}^*=\mathscr{N}$. Равенства*

$$\int_G \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,dx=0\quad \forall\mathbf{v}\in\mathscr{N} \tag{18}$$

необходимы и достаточны для разрешимости задачи (13).
Если $\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0(G)$ и $\lambda\neq\pm\lambda_j$, то решение уравнения $\mathrm{rot}\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{f}$ *представляется в*

виде ряда

$$\mathbf{u} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} [\frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)}{\lambda + \lambda_j} \mathbf{u}_j^+(x) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{u}_j^-(x)], \quad \mathbf{u} \in \mathbf{W}^1(G). \tag{19}$$

2. Построение собственных функций ротора в шаре

Результаты этого параграфа подробно изложены в работе [18]. Здесь мы напомним этапы решения задачи и приведем основные формулы.

2.1. Сведение задачи 1 в шаре к спектральной задаче Дирихле. Обозначим через $v(\mathbf{x})$ скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Автор заметил, что в шаре B функция $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению $-\Delta v(\mathbf{x}) = \lambda^2 v(\mathbf{x})$, краевому условию $v|_S = 0$, и условию $v(0) = 0$ в центре шара.

Тем самым, задача отыскания собственных функций ротора в шаре B (при ненулевых собственных значениях) приводится к задаче Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием $v(0) = 0$.

З а д а ч а 2. *Найти собственные значения μ и собственные функции $v(x)$ оператора Лапласа $-\Delta$ в шаре B такие, что*

$$-\Delta v = \mu\, v \quad \text{в} \quad B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \tag{20}$$

К области определения $\mathscr{M}_{\mathscr{L}_1}$ оператора $\mathscr{L}_1$ задачи 2 отнесем, [3], все функции $v(\mathbf{x})$ класса $\mathscr{C}^2(B) \cap \mathscr{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие условиям $v|_S = 0$, $v(0) = 0$ и $\Delta v \in L_2(B)$.

Имеет место утверждение

Любому решению $(\lambda, \mathbf{u})$ задачи 1 в шаре B при $\lambda \neq 0$ соответствует решение $(\lambda^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ задачи 2.

2.2. Собственные значения оператора определяются нулями функции $\psi_n(z)$.

$$\psi_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma\big(n+1+p+\frac{1}{2}\big)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p+\frac{1}{2}}.$$

Как показал Л. Эйлер (см. [3], §23, с. 356) функции $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ выражаются через элементарные и

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right), \tag{21}$$

Откуда видно, что нули функций $\psi_n(z)$ лежат на действительной оси и располагаются на ней симметрично относительно точки $z = 0$.

2.3. Решение спектральной задачи Дирихле-Лапласа. В сферических координатах (r, θ, φ) методом разделения переменных в [3], §26 доказано, что *собственные значения оператора задачи* $\mathscr{L}$ *в шаре* B *равны* $\lambda_{n,m}^2$*, где* $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m} R^{-1}$*,* $n \geq 0$*,* $m \in N$*, а числа* $\rho_{n,m} > 0$ *суть нули функций* $\psi_n(z)$*, соответствующие* $\lambda_{n,m}^2$ *действительные собственные функции* v_κ *имеют вид:*

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y_n^k(\theta, \varphi), \tag{22}$$

где $\kappa = (n, m, k)$*- мультииндекс,* $n \geq 0$*,* $|k| \leq n$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* c_κ*-произвольные действительные постоянные,* $0 < r \leq R$*,* $0 \leq \theta \leq \pi$*,* $0 \leq \varphi \leq 2\pi$*,* $Y_n^k(\theta, \varphi)$*- действительные сферические функции.*

Из ортогональности и полноты функций Бесселя в $L_2[(0, R); r]$ и сферических функций в $L_2(S_1)$ вытекает, что функции v_κ при различных $\kappa = (n, m, k)$ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{v_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [3]. Нормированная система образует в $L_2(B)$ ортонормированный базис.

2.4. **Эквивалентное интегральное уравнение.** С другой стороны, если $f \in C^1(B) \cap C(\overline{B})$, то краевая задача

$$-\Delta v = \mu\, v + f(x), \quad v|_S = 0, \quad v \in C^2(B) \cap C(\overline{B}), \tag{23}$$

эквивалентна [3], §29, интегральному уравнению

$$v(x) = \int\limits_B G(x, y)[\mu\, v(y) + f(y)]\, d\, y, \quad v \in C(\overline{B}), \tag{24}$$

с симметричным слабо полярным ядром

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi|x|y|^2 - yR^2|}. \tag{25}$$

Собственные значения и собственные функции оператора $\mathscr{L}$ совпадают с характеристическими числами и соответствующими собственными функциями ядра $G(x, y)$.

Согласно теории интегральных уравнений *множество собственных значений оператора* $\mathscr{L}$ *не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из* $\mathscr{M}_{\mathscr{L}} = \{v \in \mathscr{C}^2(B) \cap \mathscr{C}(\overline{B}), v|_S = 0, \Delta v \in L_2(B)\}$ *разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора* $\mathscr{L}$. Следовательно, все собственные значения $\lambda_{n,m}^2 = \rho_{n,m}^2 R^{-2}$ оператора $\mathscr{L}$ можно перенумеровать в порядке возрастания их величин

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ..., \quad \mu_l \to \infty, \quad l \to \infty, \tag{26}$$

повторяя в этом ряде μ_l столько раз, какова его кратность (число $\lambda^2_{n,m}$ повторяется $2n+1$ раз). Соответствующие собственные функции обозначим через $V_1, V_2, ...$, так что в ряде чисел (26) каждому собственному значению μ_l соответствует собственная функция $V_l(x)$,

$$\mathscr{L}V_l = \mu_l\, V_l, \quad l = 1, 2, ..., \quad V_l \in \mathscr{M}_{\mathscr{L}}, \tag{27}$$

причем собственные функции $V_l(x)$ выбираем вещественными и ортонормальными:

$$(\mathscr{L}V_l, V_m) = \mu_l\,(V_l, V_m) = \mu_l\,\delta_{lm} \tag{28}$$

Всякая функция $f(x)$ из $\mathscr{M}_{\mathscr{L}}$ разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе $\{V_l(x)\}$,

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty}(f, V_l)\,V_l(x). \tag{29}$$

Этот ряд сходится в $L_2(B)$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта ряд сходится регулярно на $\overline{B}$ (см.[3] §20.1).

Но множество $\mathscr{M}_{\mathscr{L}}$ плотно в $L_2(B)$. Откуда получаем доказательство полноты системы $\{V_l(x)\}$ в $L_2(B)$. Отметим, что $\{V_l(x)\}$–это система $\{v_\kappa(x)\}$ с выше определенным порядком нумерации элементов.

Ряд (29) (и другие аналогичные ряды) будем записывать в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(f, v_{n,m,k})\,v_{n,m,k}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\kappa,n\geq 0}(f, v_\kappa)\,v_\kappa(\mathbf{x}). \tag{30}$$

Частичные суммы $S_N(\mathbf{x})$ ряда (30) состоят из n, m и k, для которых $0 < \rho_{n,m} < N$.

2.5. **Решение спектральной задачи 2 с условием** $v_\kappa(0) = 0$**.** Так как $\psi_0(0) = 1$, то функции $\{v_\kappa\}$ при $\kappa = (0, m, 0)$ удовлетворяют этому условию тогда и только тогда, когда $c_{(0,m,0)} = 0$. Откуда следует, что

собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 2 равны $\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$. Кратность значения $\lambda^2_{n,m}$ равна $2n+1$. Собственные функции v_κ задачи, соответствующие значениям $\lambda^2_{n,m}$, имеют вид

$$v_\kappa(r,\theta,\varphi) = c_\kappa\psi_n(\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi), \quad \kappa = (n,m,k), \; m,n \in \mathbb{N}, \; |k| \leq n. \tag{31}$$

2.6. **Решения задачи 1 строятся на основе решений задачи 2.** Попутно мы доказываем [18] , что собственные значения $\pm\lambda_{n,m}$ - это корни квадратные из собственных чисел задачи 2 и что

любому решению (μ, v) задачи 2 при $\mu > 0$ соответствуют два и только два решения $(\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^+)$ и $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 такие , что $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}^+ = \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}^- = v$.

Ход рассуждений автора таков. Система $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$ из четырех действительных уравнений в сферических координатах, где $u = (u_r,\, u_\theta,\, u_\varphi)$, записывается как система двух комплексных уравнений

$$(\partial_r - i\lambda)\, rw = r^{-1}Hv, \quad \mathrm{K}w = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv), \tag{32}$$

относительно комплексной функции $w = u_\varphi + iu_\theta$ и действительной функции $v = ru_r$. Операторы H и K имеют вид:

$$\mathrm{H}v = \left(\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + i\partial_\theta\right) v \quad \mathrm{K}w = \sin^{-1}\theta\,(\partial_\theta \sin\theta + i\partial_\varphi)w. \tag{33}$$

При этом, если $-\Delta v = \lambda^2 v$, то уравнения (32) относительно w (при заданных v и λ) является совместными.

Выбрав (μ, v), - фиксированное решение задачи 2, ненулевые решения задачи 1 находим так: функция u_r определяется как дробь v/r. Положив $\underline{\lambda} = \sqrt{\mu}$ (или $\underline{\lambda} = -\sqrt{\mu}$), подставим $\underline{\lambda}$, v в уравнения (32) и решаем их. Общее решение первого уравнения в (32) имеет вид

$$\underline{w} = d(\varphi, \theta)r^{-1}e^{i\underline{\lambda}r} + r^{-1}\int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)}Hv(t, \theta, \varphi)t^{-1}\,dt, \tag{34}$$

где d есть произвольная функция от переменных φ и θ. Мы полагаем $d = 0$, так как решение ищем в классе ограниченных функций. Далее доказываем, что функция $\underline{w}$ удовлетворяет второму уравнению.

2.7. **Формулы решений задачи.** Подставив вместо $\underline{\lambda}$ конкретные выражения $\pm\lambda_{n,m}$ и v_κ из (31) в дробь v/r и в интеграл (34), а также d=0, получим явные формулы собственных функций задачи. Итак,

ненулевые собственные значения $\lambda^{\pm}_{n,m}$ *задачи 1 равны* $\pm\lambda_{n,m} = \pm(\rho_{n,m})/R$, *, где* R*–радиус шара, а числа* $\rho_{n,m}$ *– нули функций* $\psi_n(z)$*.Собственные функции* $u^{\pm}_\kappa$ *задачи 1 в сферических координатах вычисляются по формулам:*

$$\begin{gathered}u^{\pm}_\kappa = c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}\psi_n(\pm\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta, \varphi)\,\mathbf{i}_r +\\ c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}Re[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta) +\\ c^{\pm}_\kappa(\pm\lambda_{n,m}r)^{-1}Im[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)](-ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta).\end{gathered} \tag{35}$$

где числа $c^{\pm}_\kappa \in \mathbb{R}$, m,$n \in \mathbb{N}$, $|k| \le n$,$\kappa = (n, m, k)$, $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$*-репер,*

$$\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r) = \int\limits_0^r e^{\pm\, i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(\pm\lambda_{n,m}t)t^{-1}dt, \tag{36}$$

$$\mathrm{H}Y^k_n(\theta, \varphi) = \left(\sin^{-1}\theta\,\partial_\varphi + i\partial_\theta\right)Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{37}$$

Не трудно доказать, что $Im\Phi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0$.

2.8. **Сходимость ряда Фурье по собственным функциям ротора в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$.** Положим

$$\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \cap \mathbf{H}^s(B) : \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0, ..., \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}^{s-1}\mathbf{f}|_S = 0, \ \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}} = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^s}\}.$$

Теорема 3. *Для того, чтобы* $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$ *разлагалась в ряд Фурье*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa, n>0} ((\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)\mathbf{q}^+_\kappa(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa)\mathbf{q}^-_\kappa(\mathbf{x})), \quad \|\mathbf{q}^\pm_\kappa\| = 1, \tag{38}$$

по собственным вектор-функциям $\mathbf{q}^\pm_\kappa(\mathbf{x})$ *ротора в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева* $\mathbf{H}^s(B)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{f}$ *принадлежала* $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$, *то сходится ряд*

$$\sum_{\kappa, n>0} \lambda_\kappa^{2s}\,(|(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)|^2 + |(\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa|^2)), \quad \lambda_\kappa = (\rho_{n,m})/R \tag{39}$$

и существует такая положительная постоянная $C > 0$, *не зависящая от* $\mathbf{f}$, *что*

$$\sum_{\kappa, n>0} \lambda_\kappa^{2s}\,(|(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)|^2 + |(\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa|^2)) \leq C\|\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{H}^s(B)}. \tag{40}$$

Если $s \geq 2$, *то любая вектор-функция* $\mathbf{f}$ *из* $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B)$ *разлагается в в ряд Фурье, сходящийся в пространстве* $\mathbf{C}^{s-2}(\overline{B})$.

Следствие 1. *Любая вектор-функция* f *из* $\mathbf{V}^0 \cap \mathbf{C}^\infty_0(B)$ *разлагается в ряд Фурье* (38), *сходящийся в пространстве* $\mathbf{C}^\infty(\overline{B})$.

При доказательстве этих утверждений мы следовали книге В.П.Михайлова [5].

2.9. **Скалярное произведение функций $\mathbf{f}$ из $\mathscr{B}$ в базисе из собственных функций ротора.** Оно имеет вид [18]:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{\kappa, n>0} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)(\mathbf{g}, \mathbf{q}^+_\kappa) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa)(\mathbf{g}, \mathbf{q}^-_\kappa)], \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathscr{B}. \tag{41}$$

Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ принадлежат $\mathbf{V}^1_{\mathscr{R}}(B)$, то

$$(\operatorname{rot}\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, \operatorname{rot}\mathbf{g}) = \sum_{\kappa, n>0} \lambda_\kappa[(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_\kappa)(\mathbf{g}, \mathbf{q}^+_\kappa) - (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_\kappa)(\mathbf{g}, \mathbf{q}^-_\kappa)].$$

Значит, оператор **rot** является *самосопряженными* в пространстe $\mathscr{B} = \mathbf{V}^0(B)$.

3. Решение краевой задачи в шаре

3.1. **Методом Фурье решается краевая задача.** *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(B)$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{H}^1(B)$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0. \tag{42}$$

3.2. **Основные пространства.** Через $\mathbf{E}^s(B)$ (или $\mathbf{H}^s_{div}(B)$) обозначают [13] следующие подпространства в $\mathbf{L}_2(B)$:

$$\mathbf{E}^s(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(B) :\, \mathrm{div}\mathbf{v} \in H^s(B),\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}\},$$

где числа $s \geq 0$ целые. Они является полными пространствами Гильберта и

$$\mathbf{C}^\infty_0(B) \subset \mathbf{E}^s(B), \quad \mathbf{H}^{s+1}(B) \subset \mathbf{E}^s(B) \subset \mathbf{H}^s(B). \tag{43}$$

Очевидно, $\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in \mathbf{E}^s(B)$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(B)$.

Как известно [5], для функций v из пространства $H^1(B)$ определен оператор *следа* $\gamma : H^1(B) \to H^{1/2}(S)$, равный следу v на S для гладких функций из $\mathscr{C}^1(\overline{B})$: $\gamma\, v = v|_S$, причем $\|\gamma\, v\|_{L_2(S)} \leq c\|v\|_{H^1(B)}$.

Аналогично, для вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{E}^0(B)$ определен [13] оператор *следа нормальной компоненты* $\gamma_\mathbf{n} : \mathbf{E}^0(B) \to H^{-1/2}(S)$, равный сужению $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ на S для гладких функций из $\mathscr{C}^1(\overline{B})$: $\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S$.

Для $u \in \mathbf{E}^0(B)$ и $v \in H^1(B)$ верна обобщенная формула Стокса:

$$\langle\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u}, \gamma\, v\rangle = (\mathbf{u}, \nabla v) + (\mathrm{div}\mathbf{u}, v) \tag{44}$$

где $\langle\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u}, \gamma\, v\rangle$- линейный функционал над пространством $H^{1/2}(S)$; $\gamma\, v \in H^{1/2}(S)$, а $\gamma_\mathbf{n}\,\mathbf{u} \in H^{-1/2}(S)$. Имеют место непрерывные вложения:

$$H^{1/2}(S) \subset L_2(S) \subset H^{-1/2}(S) \tag{45}$$

Определим еще пространства $\mathbf{H}^l_\gamma(B)$ и $\mathbf{E}^s_\gamma(B)$:

$$\mathbf{H}^1_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad l \geq 1. \tag{46}$$

$$\mathbf{E}^s_\gamma(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{E}^s(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad s \geq 0, \tag{47}$$

и пространство $\mathbf{H}^l_{\gamma\gamma}(B)$, подпространство в $\mathbf{H}^l_\gamma(B)$:

$$\mathbf{H}^l_{\gamma\gamma}(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^l_\gamma(B) : \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{f}|_S = 0\}, \quad l \geq 1. \tag{48}$$

Приведем решение задачи 3 при различных λ.

3.3. **Решение краевой задачи** (42) **при** $\lambda \neq Spe\,(rot)$**.**

Теорема 4. *Если $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0_\gamma(B)$, то единственное решение задачи* (42) *дается суммой рядов* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, *где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{49}$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} [(\lambda + \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + \tag{50}$$
$$+ (\lambda - \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})].$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1_\gamma(B)$.
Если $\mathbf{f} \in \mathscr{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, *то* $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ *отображает* $\mathscr{A}$ *на* $\mathscr{A}$.
Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B} \perp \mathscr{A}$ *в* $\mathbf{L}_2(B)$, *то* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ *принадлежит* $\mathbf{W}^1(B) \subset \mathbf{H}^1_{\gamma\gamma}(B)$.
Если же $\mathbf{f} \in \mathscr{D}(B)$, *то ряды* (49), (56) *сходятся в любом из пространств* $\mathbf{H}^s(B)$, $s \geq 1$ *и их сумма есть классическое решение задачи класса* $C^\infty(\overline{B})$.

3.4. **Свойства операторов задачи.** Доказана следующая

Лемма 1. *Оператор* $rot + \lambda I$ *осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространств* $\mathbf{H}^1_{\gamma\gamma}(B)$ *и* $\mathbf{E}^0_\gamma(B)$, *если* λ *не принадлежит спектру ротора, то-есть* $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$.

3.5. **Решение задачи** (42) **при** $\lambda = 0$.

Теорема 5. *Если* $\lambda = 0$ *и* $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0_\gamma(B)$, *то задача* (42) *разрешима в* $\mathbf{L}_2(B)$ *тогда и только тогда, когда* $div\,\mathbf{f} = 0$. *Однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений (все пространство* $\mathscr{A}_\gamma$*):*

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \xi_{n,m,k}\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{51}$$

где $\xi_{n,m,k}$- *произвольные постоянные, такие что* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_2(B)$.

Общее решение неоднороной задачи имеет вид $\mathbf{u}_0 + G^+_0\mathbf{f} + G^-_0\mathbf{f}$, *где*

$$G^\pm_0\mathbf{f} \equiv \pm \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \lambda^{-1}_{n,m} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k})\, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x}), \quad G^\pm_0\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1_\gamma(B). \tag{52}$$

Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B} = \mathbf{V}^0(B)$ *и решение* $\mathbf{u}$ *ищется в* $\mathscr{B}$, *то* $\xi_{n,m,k} = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$, *и единственное решение задачи* $\mathbf{u} = G^+_0\mathbf{f} + G^-_0\mathbf{f}$ *принадлежит* $\mathbf{H}^1_\gamma(B)$.

Очевидно, что задача (42) разрешима по Фредгольму при $\lambda = \pm\lambda_{n,m}$.

Мы не будем приводить аналогичных формул и доказательств этих утверждений.

4. Оператор $rot + \lambda I$ в пространстве $\mathscr{B}$ при $\mathscr{B}_H \neq \varnothing$

Рассмотрим область G, у которой $\rho(\Gamma) > 0$.

Согласно п.1.5 пространство $\mathscr{B} = \mathscr{B}_H \oplus \mathbf{V}^0$ и подпространство $\mathscr{B}_H$ не пусто.

Любая функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathscr{B}$ имеет разложение:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\rho}(\mathbf{f}, \mathbf{h}_i)\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) + \sum_{\lambda_j \in \Lambda}[(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(\mathbf{x})], \quad \|h_i\| = \|u_j^{\pm}\| = 1. \qquad (53)$$

Функции $\mathbf{h}_i \in \mathscr{C}^\infty(\overline{G})$ и $\mathbf{rot}\mathbf{h}_i(\mathbf{x}) = 0$ в G. Если $\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(G)$, то

$$\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda}\lambda_j[(\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^+)\mathbf{u}_j^+(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_j^-)\mathbf{u}_j^-(\mathbf{x})]. \qquad (54)$$

4.1. **Краевая задача.** *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathscr{B}$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathscr{B}$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad G, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0. \qquad (55)$$

Теорема 6. *Если* $\lambda \neq 0, \pm\lambda_j,\ j \in \mathbf{N}$ *и* $\mathbf{f} \in \mathscr{B}$, *то единственное решение задачи* (55) *дается суммой рядов* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, *где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\sum_{n=1}^{\rho}(\mathbf{f}, \mathbf{h}_n)\,\mathbf{h}_n(\mathbf{x}), \qquad (56)$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{\lambda_j \in \Lambda}[(\lambda + \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)\,\mathbf{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)\,\mathbf{q}_j^-] \qquad (57)$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1_\gamma(G) \cap \mathscr{B}$.
Если $\mathbf{f} \in \mathscr{B}_H$, *то* $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ *отображает* $\mathscr{B}_H$ *на* $\mathscr{B}_H$.
Если $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \perp \mathscr{B}_H$ *в* $\mathscr{B}$, *то* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ *принадлежит* $\mathbf{W}^1(G) \subset \mathbf{H}^1_\gamma(G)$.
Если же $\mathbf{f} \in \mathscr{C}_0^\infty(G) \cap \mathscr{B}$, *то ряд* (57) *сходится в любом из пространств* $\mathbf{H}^s(G)$, $s \geq 1$ *и его сумма с* (56) *есть классическое решение задачи класса* $C^\infty(\overline{G}) \cap \mathscr{B}$.

Не трудно убедиться, что задача (55) разрешима по Фредгольму при $\lambda = \pm\lambda_j,\ j \in \mathbf{N}$ и при $\lambda = 0$. Равенства $(\mathbf{f}, \mathbf{h}_n) = 0$ при $n = 1, ..., \rho$ –условие разрешимости задачи при $\lambda = 0$.

Повидимому в Proposition 1 статьи [14] имеется неточность.

Список литературы

1. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 810 с.
   SOBOLEV, S.L. (1974) *Introduction to the theory of cubature formulas Linear*. Moscow: Nauka.
2. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

LADYZHENSKAYA, O.A. (1970) *Mathematical principles of the viscous noncontractible fluids dymamics.* Moscow: Nauka.

3. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

   VLADIMIROV, V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, New York.

4. Козлов, В.В. Общая теория вихрей. — Ижевск: Изд. Дом «Удмурдский университет», 1998. — 240 с.

   KOZLOV, V.V. (1998) *General Vortex Theory.* Izhevsk: Udmurd. Univ..

5. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1975. — 392 с.

   MIKHAILOV, V.P. (1978) *Partial Differential Equations.* Moscow: Mir.

6. Солонников, В.А. Переопределенные эллиптические задачи // Записки Научных Сем. ЛОМИ. — Ленинград, 1971. — Т.21. № 5. — С. 112–158.
   SOLONNIKOV, V.A. (1971) Redefined elliptical problems. *Notes of the Sci. seminar of LOMI.* vol.21 (no. 5). p. 112-158.

7. WEIL, H. (1941) The method of orthogonal projection in potetial theory. *Duke Math.* vol.7. p. 411–444.

8. Быховский, Э.Б., Смирнов, Н.В. Об ортогональном разложении пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ и операторах векторного анализа / Труды МИАН им. В.А.Стеклова LIX. Матем. вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. — М.,Л.: Изд. АН СССР, 1960. — 5-36 с..
   BYKHOVSKI, E.B., SMIRNOV, N.V. (1960) *About orthogonal decomposition of Spaces* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *and operators of the vector analysis.* Proceeding of Steclov MI LIX. Mathematical questions of the hidrodymamics and magnit hydrodymamics for a viscous incompressible fluids. Moskow, Leningrad: Academy Sci. of USSR.

9. CHANDRASEKHAR, S. (1956) On force-free magnetic fields. *Proc. Nat. Ac. Sci.* vol. 42 (no. 1). p. 1–5.

10. Вайнберг, Б.Р., Грушин, В.В. О равномерно неэллиптических задачах I // Мат. Сб.. — 1967. — Т.72 (114) № 4.. — С. 602–636.
    VAINBERG, B.R., GRUSHIN, V.V. (1967) Uniformly nonelliptic problems I. *Math.USSR-Sb.*. v.2(1). p. 111-133.

11. TAYLOR, J.B. (1967) Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Phys. Rev. Letters.* V. 33. p. 1139–1141.

12. Сакс, Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1975. — 164 с.

    SAKS, R.S. (1975) *Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Differential Equations.* Novosibirsk: Gos. Univ..

13. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ . — М.: Мир, 1981. — 408 с.

    TEMAM, R.I. (1979) *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

14. GIGA, Y., YOSHIDA, Z. (1990) Remark on spectra of operator rot. *Math. Z.*. V. 204.. p. 235-245.

15. PICARD, R. (1996) On selfadjoint realization of curl and some its applications. *Preprint : Technische Universitat Dresden: MATH-AN-02-96.* Dresden, Marz. p. .
16. Сакс, Р.С. Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве // Теоретическая и математическая физика. — 2010. — Т. 162, № 2.. — С. 196–215.
SAKS, R.S. (2010) Global solutions of the Navier-Stokes equations in uniformly rotating space. *Theor. Math.Phys.* vol.162 (no.2). p. 163–178.
17. Сакс, Р.С. Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3, № 1.. — С. 53–79.
SAKS, R.S. (2011) Cauchy Problem for the Navier-Stokes equations, Fourier method. *Ufim. Math. Zh.* vol.3 (no.1). p. 53–79.
18. Сакс, Р.С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // Уфимский математический журнал. — 2013. — Т. 5, № 2.. — С. 63–81.
SAKS, R.S. (2013) Solution of Spectal Problems for the curl and Stokes operators. *Ufim. Math. Zh.* vol.5 (no.2). p. 63–81.
19. Сакс, Р.С. Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенциии // Доклады Акад. Наук. — 2015. — Т. 462, № 3.. — С. 278–282.
SAKS, R.S. (2015) Orthogonal Subspaces of the Space $\mathbf{L}_2(G)$ and Self-Adjoint Extentions of the Curl and Gradient-of - Divergence Operators. *Doklady Math.* vol.91 (no.3). p. 313–317.
20. Сакс, Р.С. Оператор градиент дивергенции в $\mathbf{L_2(G)}$ // Доклады Акад. Наук. — 2015. — Т. 462, № 5.. — С. 61–65.
SAKS, R.S. (2015) The Gradient-of-Divergence Operator in the Space $\mathbf{L}_2(G)$. *Doklady Math.* vol.91 (no.3). p. 31–35.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015

УДК: 517.9

MSC2010: 15A24, 34B15, 34C25

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

© С. М. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет

ул. Лозановича, д. 14, кв. 31, г. Славянск, Донецкая обл., Украина, 84 112

e-mail: *chujko-slav@inbox.ru*

Generalized Green operator Noetherian linear boundary value problem for the matrix difference equation.

Chuiko S. M.

Abstract. Lyapunov matrix equations and their generalizations — linear matrix Sylvester equation widely used in the theory of stability of motion, control theory, as well as the solution of differential Riccati and Bernoulli equations, partial differential equations and signal processing. If the structure of the general solution of the homogeneous part of the Lyapunov equation is well studied, the solution of the inhomogeneous equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation is quite cumbersome.

By using the theory of generalized inverse operators, A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya establish a criterion of the solvability of the Lyapunov-type matrix equations $AX - XB = D$ and $X - AXB = D$ and investigate the structure of the set of their solutions. The article A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya based on pseudo-inverse linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the Lyapunov type equation. The article suggests the solvability conditions, as well as a scheme for constructing a particular solution of the inhomogeneous generalized equation Sylvester based on pseudo-inverse linear matrix operator corresponding to the homogeneous part of the linear matrix generalized Sylvester equation.

Using the technique of Moore-Penrose pseudo inverse matrices, we suggest an algorithm for finding a family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in general case when the linear matrix operator L, corresponding to the homogeneous part of the linear generalized matrix Sylvester equation, has no inverse. We find an expression for family of linearly independent solutions of the inhomogeneous generalized equation Sylvester and, in particular, the Lyapunov equation in terms of projectors and Moore-Penrose pseudo inverse matrices. This result is a generalization of the result article A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya to the case of linear generalized matrix Sylvester equation.

Found solvability conditions and construction of the generalized Green operator for Noetherian linear boundary value problem for the matrix difference equations. We show that the principal results in the theory of linear periodic oscillations remain valid for linear Noetherian boundary value problem for matrix difference equation. Efficiency of the proposed solvability conditions and the scheme for constructing solutions of linear Noetherian boundary value problem for matrix difference equation is illustrated by an example of a multipoint problem for difference equation.

Key words: Generalized Green operator, boundary value problem, matrix difference equation, pseudo inverse matrices.

Введение

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейного матричного разностного уравнения. Предложен оператор, который приводит линейное матричное алгебраическое уравнение к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о нахождении решений

$$Z(k)=\left(z^{(i,j)}(k)\right),\ k\in[0,N]\subset\mathbb{N},\ i=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \alpha,\ j=1,\ 2,\ \dots\ ,\ \beta$$

линейной нетеровой ($\alpha\neq\beta\neq\lambda\neq\mu$) краевой задачи

$$Z(k+1)=AZ(k)+Z(k)B+F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot)=\mathscr{A}. \tag{1}$$

Компоненты $Z^{(i,j)}(k),\ F^{(i,j)}(k):[0,N]\to\mathbb{R}^1$ матриц $Z(k)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и $F(k)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ предполагаем ограниченными на отрезке $[0,N]$ функциями. Здесь $A\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$, $B\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ и $\mathbb{A}\in\mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$ — постоянные матрицы; $\mathscr{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathscr{L}Z(\cdot):\ \left\{Z(k):[0,N]\to\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\right\}\to\mathbb{R}^{\lambda\times\mu}.$$

Конструктивные условия разрешимости и структура решения общей нетеровой краевой задачи были получены в монографии [29]. Условия разрешимости, а также конструкция оператора Грина нетеровой краевой задачи (1) для традиционного ($\beta=\mu=1$) разностного уравнения были получены в статье [2], как обобщение классических результатов для систем разностных уравнений [3, 4]. В свою очередь, условия разрешимости и структура периодического решения систем матричного дифференциального уравнения были получены в статье [27] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [28]. Общее решение полуоднородной задачи Коши

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k), \ Z(0) = \Theta \tag{2}$$

представимо в виде

$$Z(k) = W(k, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](k),$$

где

$$W(k, \Theta) := \sum_{j=0}^{k} C_k^{k-j} A^{k-j} \Theta B^j$$

— общее решение однородной части матричного разностного уравнения (1) и

$$K\Big[\Phi(s)\Big](k) := \sum_{j=0}^{k-1} W\Big[j, F(k-1-j)\Big]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Теорема 1. *Общее решение линейной полуоднородной задачи Коши (2)*

$$Z(k) = W(k, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](k), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши (2).

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить общее решение в матричное разностное уравнение (1). □

Подставляя общее решение задачи Коши (2) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{L}W(\cdot, \Theta) = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot) \tag{3}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$ — базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и $c_j, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$ — константы, определяющие разложение матрицы

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j, \ c_j \in \mathbb{R}^1, \ j = 1, 2, \ ... \ \alpha \cdot \beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при этом

$$\mathscr{L}W(\cdot, \Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \mathscr{L}W\Big[\cdot, \Xi^{(j)}\Big] c_j.$$

Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathscr{L}W\Big[\cdot, \Xi^{(j)}\Big]c_j = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)$$

относительно $\alpha \cdot \beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2,\ ...\ \alpha \cdot \beta$. Определим оператор [17, 16]

$$\mathscr{M}[\mathscr{B}]:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathscr{B}$, а также обратный оператор

$$\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{M}[\mathscr{B}]\Big\}:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Заметим, что оператор $\mathscr{M}[A]$, как и обратный оператор $\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}]$, могут быть представлены в явном виде. Определим матрицы

$$\Upsilon_1 := (\ 1\ ) \in \mathbb{R}^{1\times 1},\ \Upsilon_2 := (\ 1\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{4\times 1},\ \Upsilon_3 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{9\times 1},$$

$$\Upsilon_4 := (\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )^* \in \mathbb{R}^{16\times 1},\ ...\ .$$

Вектор Υ_m состоит из $m-1$ цепочки вида

$$(\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ )^* \in \mathbb{R}^{(m-1)\times 1}$$

и заканчивается единицей:

$$\Upsilon_m := \Big(\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ ...\ 1\ 0\ 0\ ...\ 0\ 1\ \Big)^* \in \mathbb{R}^{m^2\times 1}.$$

В новых обозначениях оператор $\mathscr{M}[A]$ представим в явном виде:

$$\mathscr{M}[A] = \Big(I_n \otimes A\Big) \cdot \Upsilon_n \in \mathbb{R}^{m\cdot n}.$$

Определим также матрицы

$$\Big[E_n^m\Big]_j := \Big[E_1^m\Big]_j \otimes I_n \in \mathbb{R}^{n\times m\cdot n},\ \Big[E_1^m\Big]_j := \Big\{\delta_{ij}\Big\}_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{1\times m};$$

здесь δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1,\ j = i, \\ 0,\ j \neq i \end{cases},\ i = 1,\ 2,\ ...\ m.$$

Таким образом, обратный оператор $\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}]$ представим в явном виде:

$$\mathscr{M}^{-1}[\mathscr{B}] = \sum_{k=1}^{n} \left[E_n^m\right]_k \cdot \mathscr{B} \cdot \left[E_1^m\right]_k.$$

В новых приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{Q}c = \mathscr{M}\left[\mathscr{A}\right] - \mathscr{M}\left\{\mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$; здесь

$$\mathscr{Q} := \left[\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(1)}\right]\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(2)}\right]\ ...\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}\right]\ \right],$$

где

$$\mathscr{Q} \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times\alpha\cdot\beta},\ \mathscr{Q}^{(j)} := \mathscr{L}W\left[\cdot, \Xi^{(j)}\right] \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu},\ j = 1, 2,\ ...\ \alpha\cdot\beta.$$

Как известно [29, 17, 16], последнее уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q}^*)$; матрица $P_{\mathscr{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathscr{Q}^*}$.

2. Условия разрешимости

При условии (4) и только при нем общее решение уравнения (3)

$$c = \mathscr{Q}^{+}\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\} + P_{\mathscr{Q}_r}c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение нетеровой краевой задачи (1)

$$Z(k, \Theta_r) = W(k, \Theta_r) + G\left[F(s); \mathscr{A}\right](k),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\left[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\right];$$

здесь

$$\Theta = \mathscr{M}^{-1}\left\{\mathscr{Q}^{+}\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\}\right\} + \mathscr{M}^{-1}\left[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\right],$$

$P_{\mathscr{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q})$; матрица $P_{\mathscr{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$,

$$G\left[F(s); \mathscr{A}\right](k) := W\left\{k, \mathscr{M}^{-1}\left\{\mathscr{Q}^{+}\mathscr{M}\left[\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right]\right\}\right\} + K\left[F(s)\right](k)$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1), $\mathscr{Q}^+$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [9]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При условии (4) и только при нем общее решение линейной нетеровой краевой задачи (1)*

$$Z(k,\Theta_r) = W(k,\Theta_r) + G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи (1).

При условии $P_{\mathscr{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место критический случай, при этом задача (1) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$, для которых выполнено условие (4). При условии $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1) имеет место некритический случай, при этом задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$.

Утверждение доказанной теоремы 2 является обобщением соответствующих утверждений [2] на случай матричной краевой задачи (1).

Пример 1. *Условия теоремы 2 выполнены для матричной трехточечной разностной краевой задачи*

$$Z(k+1) = AZ(k) + Z(k)B + F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot) = \mathscr{A}, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix},\ \mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также

$$\mathscr{L}Z(\cdot) := \sum_{i=1}^{3} M_i Z(\tau_i) N_i,\ M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (5) определяют матрицы

$$W(0,\Theta) := \Theta := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(1,\Theta) := \begin{pmatrix} c_{11}+c_{12}+c_{21} & c_{12}+c_{22} & c_{11}+2c_{13}+c_{23} \\ c_{21}+c_{22} & c_{22} & c_{21}+2c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta) := \begin{pmatrix} c_{11}+2(c_{12}+c_{21}+c_{22}) & c_{12}+2c_{22} & 3c_{11}+c_{12}+4c_{13}+2c_{21}+4c_{23} \\ c_{21}+2c_{22} & c_{22} & 3c_{21}+c_{22}+4c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(3,\Theta) :=$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}+3(c_{12}+c_{21}+2c_{22}) & c_{12}+3c_{22} & 7c_{11}+4c_{12}+8c_{13}+9c_{21}+3c_{22}+12c_{23} \\ c_{21}+3c_{22} & c_{22} & 7c_{21}+4c_{22}+8c_{23} \end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta) :=$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}+4(c_{12}+c_{21}+3c_{22}) & c_{12}+4c_{22} & 15c_{11}+11c_{12}+4(4c_{13}+7c_{21}+4c_{22}+8c_{23}) \\ c_{21}+4c_{22} & c_{22} & 15c_{21}+11c_{22}+16c_{23} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ и $c_j,\ j = 1,2,\ \dots\ 6$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Поскольку

$$P_{\mathscr{Q}^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

постольку для краевой задачи (5) имеет место критический случай. Общее решение

$$W(k,\Theta_r),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r} c_r\Big],\ c_r \in \mathbb{R}^4$$

однородной части задачи (5) определяет матрица

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 37 & 14 & 21 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и ее ортопроектор

$$P_{\mathscr{Q}} = \begin{pmatrix} \frac{741\ 273}{819\ 892} & -\frac{34\ 744}{204\ 973} & -\frac{28\ 595}{819\ 892} & \frac{8\ 715}{819\ 892} & -\frac{22\ 500}{204\ 973} & -\frac{173\ 119}{819\ 892} \\ -\frac{34\ 744}{204\ 973} & \frac{139\ 590}{204\ 973} & -\frac{20\ 873}{204\ 973} & -\frac{22\ 992}{204\ 973} & -\frac{37\ 740}{204\ 973} & -\frac{74\ 371}{204\ 973} \\ -\frac{28\ 595}{819\ 892} & -\frac{20873}{204\ 973} & \frac{741\ 069}{819\ 892} & -\frac{219\ 837}{819\ 892} & -\frac{3\ 960}{204\ 973} & -\frac{45\ 227}{819\ 892} \\ \frac{8715}{819\ 892} & -\frac{22\ 992}{204\ 973} & -\frac{219\ 837}{819\ 892} & \frac{92\ 089}{819\ 892} & \frac{16\ 260}{204\ 973} & \frac{77\ 007}{819\ 892} \\ -\frac{22\ 500}{204\ 973} & -\frac{37\ 740}{204\ 973} & -\frac{3\ 960}{204\ 973} & \frac{16\ 260}{204\ 973} & \frac{178\ 173}{204\ 973} & -\frac{50\ 640}{204\ 973} \\ -\frac{173\ 119}{819\ 892} & -\frac{74\ 371}{204\ 973} & -\frac{45\ 227}{819\ 892} & \frac{77\ 007}{819\ 892} & -\frac{50\ 640}{204\ 973} & \frac{434\ 085}{819\ 892} \end{pmatrix};$$

матрица

$$P_{\mathscr{Q}_r} = \begin{pmatrix} \frac{741273}{819892} & -\frac{34744}{204973} & -\frac{28595}{819892} & \frac{8715}{819892} \\ -\frac{34744}{204973} & \frac{139590}{204973} & -\frac{20873}{204973} & -\frac{22992}{204973} \\ -\frac{28595}{819892} & -\frac{20873}{204973} & \frac{741069}{819892} & -\frac{219837}{819892} \\ \frac{8715}{819892} & -\frac{22992}{204973} & -\frac{219837}{819892} & \frac{92089}{819892} \\ -\frac{22500}{204973} & -\frac{37740}{204973} & -\frac{3960}{204973} & \frac{16260}{204973} \\ -\frac{173119}{819892} & -\frac{74371}{204973} & -\frac{45227}{819892} & \frac{77007}{819892} \end{pmatrix}$$

составлена из $r = 4$ линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (5) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0) = 0,\ K\Big[\Phi(s)\Big](1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 37 \\ 4 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Условие (4) в случае неоднородной задачи (5) выполнено, поэтому общее решение

$$Z(k,\Theta_r)=W(k,\Theta_r)+G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k)],\ c_r\in\mathbb{R}^4$$

неоднородной задачи (5) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k):=W\Big\{k,\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\Big[\mathscr{A}-\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\}+K\Big[F(s)\Big](k)$$

краевой задачи (5); здесь

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0)=-\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix}29\,982 & 49\,551 & 24\,780\\ 71\,607 & 122\,634 & 56\,001\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](1)=\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix}-151\,140 & -172\,185 & 69\,430\\ 10\,732 & -122\,634 & 183\,609\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](2)=\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix}-107\,620 & -294\,819 & 9\,084\\ 93\,071 & -122\,634 & -151513\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](3)=\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix}100\,578 & -417\,453 & -35\,992\\ 175\,410 & -122\,634 & 199\,991\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](4)=\frac{1}{204\,973}\begin{pmatrix}473\,454 & -540\,087 & 433\,558\\ 257\,749 & -122\,634 & 1\,190\,311\end{pmatrix}.$$

В некритическом случае, при условии $P_{\mathscr{Q}^*}=0$, задача (1) разрешима для любых неоднородностей $F(k)$ и $\mathscr{A}$.

Следствие 1. *В некритическом случае, при условии $P_{\mathscr{Q}^*}=0$, общее решение линейной нетеровой краевой задачи (1)*

$$Z(k,\Theta_r)=W(k,\Theta_r)+G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k),\ \Theta_r:=\mathscr{M}^{-1}\Big[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\Big],\ c_r\in\mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (1).

Пример 2. *Условия следствия выполнены для периодической краевой задачи*

$$Z(k+1)=AZ(k)+Z(k)B+F(k),\ \mathscr{L}Z(\cdot)=Z(0)-Z(4)=0, \qquad (6)$$

где

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B:=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ F(k):=\begin{pmatrix}k & 1\\ 1 & k\end{pmatrix},\ k\in\Big\{\ 0,\ 1,\ \dots\ 4\ \Big\}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (6) определяют матрицы

$$W(0,\Theta):=\Theta:=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix},\ W(1,\Theta):=\begin{pmatrix} 2c_{11}+c_{12}+c_{21} & 2c_{12}+c_{22}\\ 2c_{21}+c_{22} & 2c_{22}\end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta):=\begin{pmatrix} 4(c_{11}+c_{12}+c_{21})+2c_{22} & 4(c_{12}+c_{22})\\ 4(c_{21}+c_{22}) & 4c_{22}\end{pmatrix},$$

$$W(3,\Theta):=\begin{pmatrix} 4(2c_{11}+3(c_{12}+c_{21}+c_{22})) & 8c_{12}+12c_{22}\\ 8c_{21}+12c_{22} & 8c_{22}\end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta):=\begin{pmatrix} 16(c_{11}+2(c_{12}+c_{21})+3c_{22}) & 16(c_{12}+2c_{22})\\ 16(c_{21}+2c_{22}) & 16c_{22}\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \Xi^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j,\ j=1,2,\ \dots 4$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Поскольку

$$\mathscr{Q}=\begin{pmatrix} -15 & -32 & -32 & -48\\ 0 & -15 & 0 & -32\\ 0 & 0 & -15 & -32\\ 0 & 0 & 0 & -15\end{pmatrix},$$

постольку $P_{\mathscr{Q}^*}=0$, следовательно для краевой задачи (6) имеет место некритический случай. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0)=\Theta$ для системы (6) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0)=0,\ K\Big[\Phi(s)\Big](1)=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](2)=\begin{pmatrix} 3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3)=\begin{pmatrix} 14 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](4)=\begin{pmatrix} 47 & 21\\ 21 & 11\end{pmatrix}.$$

Единственное ($P_{\mathscr{Q}}=0$) решение неоднородной задачи (6) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](k):=K\Big[F(s)\Big](k)-W\Big\{k,\mathscr{M}^{-1}\Big\{\mathscr{Q}^{-1}M\Big[\mathscr{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\}$$

краевой задачи (6); здесь

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0)=\begin{pmatrix} -\frac{5023}{3375} & \frac{37}{225} \\ \frac{37}{225} & -\frac{11}{15}\end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](1)=\begin{pmatrix} -\frac{8936}{3375} & \frac{134}{225} \\ \frac{134}{225} & -\frac{22}{15}\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](2)=\begin{pmatrix} -\frac{10477}{3375} & \frac{163}{225} \\ \frac{163}{225} & -\frac{29}{15}\end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](3)=\begin{pmatrix} -\frac{9314}{3375} & \frac{116}{225} \\ \frac{116}{225} & -\frac{28}{15}\end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](4)=G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0)=\begin{pmatrix} -\frac{5023}{3375} & \frac{37}{225} \\ \frac{37}{225} & -\frac{11}{15}\end{pmatrix}.$$

Утверждение доказанных теорем и следствия 1 является обобщением соответствующих утверждений [2] на случай матричной краевой задачи (1).

Пример 3. *Условия следствия выполнены для неоднородной периодической задачи для уравнения Трибоначчи* [10]

$$y(k+3)=y(k+2)+y(k+1)+y(k)+f(k),\ y(0)-y(4)=0. \tag{7}$$

Уравнение (7) приводится к виду (1) посредством матриц

$$A:=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ F(k):=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(k)\end{pmatrix},\ Z(k):=\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2)\end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной части матричного разностного уравнения (7) определяют матрицы

$$W(0,\Theta):=\Theta:=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3\end{pmatrix},\ W(1,\Theta):=\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_1+c_2+c_3\end{pmatrix},$$

$$W(2,\Theta):=\begin{pmatrix} c_3 \\ c_1+c_2+c_3 \\ c_1+2c_2+2c_3\end{pmatrix},\ W(3,\Theta):=\begin{pmatrix} c_1+c_2+c_3 \\ c_1+2c_2+2c_3 \\ 2c_1+3c_2+4c_3\end{pmatrix},$$

$$W(4,\Theta):=\begin{pmatrix} c_1+2c_2+2c_3 \\ 2c_1+3c_2+4c_3 \\ 4c_1+6c_2+7c_3\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},\ \Xi^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\ \Xi^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

— естественный базис [9] пространства $\mathbb{R}^{3\times 1}$ и $c_j,\ j = 1, 2,\ 3$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам базиса пространства $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Поскольку

$$\mathscr{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -4 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

постольку $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$, следовательно для краевой задачи (7) имеет место некритический случай. Частное решение полуоднородной задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для системы (7) представляет обобщенный оператор Грина задачи Коши

$$K\Big[\Phi(s)\Big](0) = 0,\ K\Big[\Phi(s)\Big](1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[\Phi(s)\Big](3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\ K\Big[\Phi(s)\Big](4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Единственное ($P_{\mathscr{Q}} = 0$) решение неоднородной задачи (7) определяет определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](0) = G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](2) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ G\Big[F(s);\mathscr{A}\Big](3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейного матричного разностного уравнения, обобщающие соответствующие результаты А.А. Бойчука [2] на случай матричной краевой задачи (1). Предложен оператор $\mathscr{M}$ [17, 16], который приводит линейное матричное алгебраическое уравнение к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей. Предложена формула построения частного решения уравнения, обобщающее известные матричные уравнения Ляпунова и Сильвестра, которые широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [27].

Список литературы

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Utrecht; Boston. VSP.

2. Бойчук, А.А. Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. — № 6, 1997. — Т. 49. — С. 832 — 835.

   BOICHUK, A. (1997) Boundary-value problems for systems of difference equations. *Ukrainian Math. Zhurn.* 49 (№ 6). p. 930-934.

3. Мартынюк, Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. — Киев: Наук. думка, 1972. — 246 с.

   MARTYNYUK, D.I. (1972) *Lectures on the qualitative theory of difference equations.* Kiev. Naukova Dumka.

4. Шарковский, А.Н., Майстренко, Ю.Л., Романенко, Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.

   SHARKOVSKII, A.N., MAISTRENKO, Yu.L., ROMANENKO, E.Yu. (1986) *Difference Equations and Their Applications.* Kiev. Naukova Dumka.

5. BOICHUK, A., KRIVOSHEYA, S. (2001) A Critical Periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations. *Differential Equations.* № 4 (37). p. 464-471.

6. BOICHUK, A., KRIVOSHEYA, S. (1998) Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal.* № 8 (50). p. 1162-1169.

7. Чуйко, С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика / С.М. Чуйко. — 2014, Т. 19, Вып. 1 (21). — С. 49 — 57.

   CHUIKO, S. (2014) On the solution of the matrix Sylvester equation. *Visn. Odesskogo Univ. Ser. Mat. Mech..* № 1 (21) (19). p. 49-57.

8. Чуйко, С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Веснтик Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика / С.М. Чуйко. — 2014, № 1120. — С. 85 – 94.

   CHUIKO, S. (2014) On the solution of the matrix Lyapunov equation. *Visn. Kharkovskogo Univ. Ser. Mat. Mech..* № 1120. p. 85-94.

9. Воеводин, В.В., Кузнецов, Ю.А. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М: Наука, 1984. — 318 с.

   VOEVODIN, V.V., KUZNETSOV, Yu.A. (1984) *Matritsy i vychisleniya (Matrices and Calculations).* Moscow. Nauka.

10. IRMAK, N., MURAT, A. (2013) Tribonacci numbers with indices in arithmetic progression and their sums. *Miskolc Mathematical Notes.* 14 (№ 1). p. 125-133.

Статья поступила в редакцию 25.05.2015

УДК: 517.9

MSC2010: 34B15

МАТРИЧНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

© С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев

Донбасский государственный педагогический университет
кафедра математики
ул. Г. Батюка, 19, Славянск, Донецкая обл., 84116, Украина
e-mail: *chujko-slav@inbox.ru*

Matrix boundary value problem in the case of parametric resonance.

Chuiko S. M., Nesmelova (Starkova) O. V., Sysoev D. V.

Abstract.

The study of nonlinear Noetherian matrix boundary value problems for ordinary differential equations is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations in mechanics, biology, electrical engineering, theory of management, theory of motion stability, particularly in problems associated with different cases of the parametric resonance. Research papers of Yu.A Mitropolskii, A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk, A.A. Boichuk, M.I. Ronto, I.G. Malkin, P.A. Proskuryakov, V.A. Yakubovich, V.M. Starzhinsky, D.I. Martynyuk, E.A. Grebenikov, Y.A. Ryabov and other scientists are dedicated to various aspects of the theory of boundary value problems. Research papers of such foreign scientists as G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, S. Schwabik, O. Veivoda, D. Wexler, and others are also dedicated to the theory of boundary value problems.

These methods are used in the analysis of boundary value problems for various classes of systems: boundary value problems for systems of ordinary differential equations, matrix, boundary value problems for systems of ordinary differential equations, autonomous differential systems, for operator equations in functional spaces.

In recent years, considerable attention is paid to the research of boundary value problems, which linear part is not reversible operator, and, in particular, in the case where the number of boundary conditions does not coincide with the dimensionality of solution. Note that in scientific literature this class of boundary value problems has been called Noetherian.

The aim of this article is to obtain solvability conditions and solution constructions of Noetherian weakly nonlinear matrix boundary value problems for systems of ordinary differential equations in the case of parametric resonance, in this case they use original techniques for solving generalized matrix equations of Sylvester with usage of projectors and pseudo inverse (by Moore-Penrose) matrixes and the operator, which leads to a linear algebraic matrix equation of Sylvester to traditional linear algebra system with a rectangular matrix. A generalized method of Green's operator built for traditional Noetherian boundary value problems for systems of

ordinary differential equations in the works of A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk are also used. As opposed to researches of periodic boundary value problems in the case of parametric resonance of V.A. Yakubovich and V. M. Starzhinsky, this article is devoted to the investigation of more general Noetherian matrix boundary value problems for systems of ordinary differential equations.

Obtained solvability conditions and a scheme for constructing solutions of nonlinear Noetherian matrix boundary value problems for systems of differential equations in the case of parametric resonance generalize similar results, which are presented in papers of A.A. Boichuk and S.A. Krivosheya for periodic matrix boundary value problems for Riccati equation in the absence thereof parametric resonance. In addition, received solvability conditions and a scheme of constructing solutions stipulate the inhomogeneity dependence of the linear part of the matrix boundary value problem, and hence the solutions of the equation for generating constants from a small parameter too.

Obtained results are illustrated by the example of a matrix periodic boundary value problem for Riccati equation in the case of parametric resonance.

Key words: matrix boundary value problem, matrix differential equations, generalized Green's operator, parametric excitation, Riccati equation.

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [27]

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a;b], \ Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0;\varepsilon_0], \ Z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon) + \varepsilon\ \Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathscr{A}, \ \mathscr{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}. \tag{2}$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_0'(t,\varepsilon) = AZ_0(t,\varepsilon) + Z_0(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon), \ \mathscr{L}Z_0(\cdot,\varepsilon) = \mathscr{A}. \tag{3}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — постоянные матрицы. Нелинейный матричный оператор

$$\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon): \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

предполагаем дифференцируемым в смысле Фреше [9, с. 636] по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Нелинейность $\Phi(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $F(t, \varepsilon)$ считаем непрерывными по t на отрезке $[a, b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathscr{L}Z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathscr{L}Z(\cdot, \varepsilon): \ \mathbb{C}^1[a; b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) были приведены в монографии [1]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной дифференциальной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [27] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [28]. Таким образом, задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (1), подчиненного краевому условию (2), является обобщением периодической задачи для матричного уравнения Риккати [27], нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3, 29], а также задачи Коши для матричного уравнения Бернулли [7, 8].

Как известно [1, с. 211], общее решение

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \ Z(a) = \Theta$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \ U(a) = I_\alpha, \ V'(t) = BV(t), \ V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ задачи Коши [27]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \ Z(a) = \Theta \tag{4}$$

имеет вид

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](t), \ \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

где

$$K\left[F(s)\right](t) := \int\limits_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\, ds$$

— оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (4). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (4) в краевое условие (2), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathscr{L}Z(\cdot,\Theta) = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot) \tag{5}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [5] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и c_j — константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathscr{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j,\ \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}c_j,\ c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)$$

относительно констант $c_j \in \mathbb{R}^1$. Определим оператор $\mathscr{M}[\mathscr{B}]\ :\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathscr{B}$, а также обратный оператор

$$\mathscr{M}^{-1}\left\{\mathscr{M}[\mathscr{B}]\right\}:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению [16, 17]

$$\mathscr{Q}\cdot c = \mathscr{M}\left[\mathscr{A}\right] - \mathscr{M}\left\{\mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\} \tag{6}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, равносильному уравнению (5); здесь

$$\mathscr{Q} := \left[\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(1)}\right]\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(2)}\right]\ \dots\ \mathscr{M}\left[\mathscr{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}\right]\ \right],\ \mathscr{Q}^{(j)} := \mathscr{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}.$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [17, 16, 29]

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{7}$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q}^*)$; матрица $P_{\mathscr{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathscr{Q}^*}$ матрицы $\mathscr{Q} \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. При условии (7) и только при нем общее решение уравнения (6)

$$c = \mathscr{Q}^+\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\} + P_{\mathscr{Q}_r}c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение [16, 17] матричного уравнения (5)

$$\Theta = \mathscr{M}^{-1}\left\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\left\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right\}\right\} + \mathscr{M}^{-1}\left[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\right],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2)

$$Z(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r) + G\left[F(s);\mathscr{A}\right](t),\ \Theta_r := \mathscr{M}^{-1}\left[P_{\mathscr{Q}_r}c_r\right].$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathscr{Q})$; матрица $P_{\mathscr{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$,

$$G\left[F(s);\mathscr{A}\right](t) := W\left\{t, \mathscr{M}^{-1}\left\{\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\left[\mathscr{A} - \mathscr{L}K\left[F(s)\right](\cdot)\right]\right\}\right\} + K\left[F(s)\right](t)$$

— обобщенный оператор Грина [19] матричной краевой задачи (2), (4), $\mathscr{Q}^+$ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [5, 29]. Обозначим индексы

$$\left\{j_1,\ j_2,\ \dots\ j_r\right\} \subseteq \left\{1,\ 2,\ \dots\ m\cdot n\right\}$$

линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathscr{Q}}$, при этом

$$W(t,\Theta_r) := \sum_{k=1}^{r} U(t)\cdot \Xi^{(j_k)}V(t)\cdot c_{j_k},\ \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2). При условии $P_{\mathscr{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом задача (3) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A}$, для которых выполнено условие (7). В свою очередь, при условии $P_{\mathscr{Q}^*} = 0$ для краевой задачи (3) имеет место некритический случай, при этом задача (3) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A}$. Условие разрешимости (7) является обобщением соответствующих условий [2, 3, 11, 29] на случай матричной краевой задачи (3) и может быть использовано в теории краевых задач [29], а также в теории управления [10].

Условия разрешимости

Предположим, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом условие (7) выполнено и задача (1), (2) в малой окрестности решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

порождающей задачи (3) имеет решение

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),\ \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t,\varepsilon):\ X(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b],\ X(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\ X(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной матричной краевой задачи

$$X'(t,\varepsilon) = AX(t,\varepsilon) + X(t,\varepsilon)B + \varepsilon\,\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon),\ \mathscr{L}X(\cdot,\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{9}$$

В силу непрерывности по Z и по μ нелинейной функцию $\Phi(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$ приходим к следующему уравнению

$$\mathscr{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующих утверждений [22, 23, 24].

Лемма. *Предположим, что для краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости:*

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

задача (1), (2) *имеет решение*

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ *существует непрерывная собственная функция*

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),\ \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathscr{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (10)$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [29], а также периодическими краевыми задачами [6], уравнение (10) будем называть уравнением для порождающих констант матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Корни уравнения для порождающих порождающих констант (10), в данном случае — матрицы $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а также собственные функции $\mu_0(\varepsilon)$ определяют порождающее решение $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Если же уравнение (10) не имеет корней

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,\ \Theta_0(\varepsilon),\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

то исходная матричная краевая задача (1), (2) в случае параметрического резонанса не имеет искомых решений. Фиксируя одно из решений $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, уравнения для порождающих порождающих констант (10), а также собственную функцию $\mu_0(\varepsilon)$, приходим к задаче об отыскании решения матричной краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$; в этой окрестности имеет место разложение [9, с. 636]

$$\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] = \Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] +$$

$$+D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big] + A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon) + R\Big[Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon\Big],$$

при этом в малой окрестности порождающего решения $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, уравнения для порождающих порождающих констант (10), а также собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$,

$$A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big] := \frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\alpha\times\beta)$ – матрица и $R(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ — остаток этого разложения. Дифференциал

$$D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big] \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

представляет собой линейный по $X(t,\varepsilon)$ оператор. С учетом последнего разложения, а также равенства (10), необходимое и достаточное условие (9) существования решения

$$X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon)$$

нелинейной матричной краевой задачи (8) является уравнением

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}M\Bigg\{\mathscr{L}K\Bigg\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(s,\varepsilon)\Big]+$$

$$+A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)+R\Big[Z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}=0$$

относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$ и скалярной функции $\zeta(\varepsilon)$. Здесь $W(t,\Theta_r(\varepsilon))$ — общее решение однородной части краевой задачи (8) и

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon);\ 0\Big](t)$$

— частное решение неоднородной матричной краевой задачи (8). Обозначим $\xi_j(\varepsilon)$ скалярные функции, определяющие разложение матрицы

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon),\ \xi_j(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],\ j=1,2,\ \dots\ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix}\xi(\varepsilon)\\ \zeta(\varepsilon)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+\alpha\beta},\ \xi(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\beta}$$

и матрицу

$$\mathscr{B}_0(\varepsilon) := \left[\ \mathscr{B}_0^{(1)}(\varepsilon) \ \mathscr{B}_0^{(2)}(\varepsilon) \ ... \ \mathscr{B}_0^{(\alpha\beta)}(\varepsilon) \ \mathscr{B}_0^{(1+\alpha\beta)}(\varepsilon) \ \right] \in \mathbb{R}^{d\times(1+\alpha\beta)},$$

где

$$\mathscr{B}_0^{(j)}(\varepsilon) := P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\ U(s)\cdot\Xi^{(j)}\cdot V(s)\Big]\Big\}(\cdot)\in\mathbb{R}^d,$$

$$\mathscr{B}_0^{(1+\alpha\beta)}(\varepsilon) := P_{\mathscr{Q}_d^*}M\Big\{\mathscr{L}K\Big\{A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\},\ j=1,2,\ ...\ \alpha\beta.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие (9) разрешимости нелинейной матричной краевой задачи (8) преобразуется к виду

$$\mathscr{B}_0(\varepsilon)\cdot\check{c}(\varepsilon) = -P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}. \quad (11)$$

Уравнение (11) разрешимо относительно вектора $\check{c}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{1+\alpha\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathscr{B}_0^*}P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0.$$

В частности, уравнение (11) разрешимо при условии

$$P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon)P_{\mathscr{Q}_d^*}=0,\ \mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]; \quad (12)$$

в этом случае уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\};$$

здесь $P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{d\times d}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathscr{B}_0^*}(\varepsilon):\ \mathbb{R}^{d\times d}\to\mathbb{N}(\mathscr{B}_0^*(\varepsilon)).$$

Таким образом, при условии (11) по меньшей мере одно решение нелинейной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая операторная система

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\ X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\ G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon;\ 0\Big](t),$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),\ \Theta_r(\varepsilon) = \mathscr{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}(\varepsilon)\Big],\ \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}(\varepsilon),$$

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) +$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}; \qquad (13)$$

здесь

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times(1+\alpha\beta)},\ \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(1+\alpha\beta)}$$

— постоянные матрицы. Для нахождения приближенного решения операторной системы (2) применим метод последовательных приближений [9]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для традиционных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [20, 23, 24, 25, 26].

Теорема. *Предположим, что для порождающей матричной краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом условие выполнено разрешимости:*

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{A} - \mathscr{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Предположим также, что уравнение (10) *имеет корни*

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,\ \Theta_0(\varepsilon),\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

тогда при условии (11) *в малой окрестности решения порождающей задачи* (3)

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathscr{A}\Big](t)$$

и в достаточно малой окрестности начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ *собственной функции* $\mu(\varepsilon)$ *по меньшей мере одно решение матричной краевой задачи* (1), (2)

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon)$$

и непрерывную собственную функцию $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ определяет операторная система (2); для нахождения этого решения применима итерационная схема

$$Z_{k+1}(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t,\varepsilon),\ X_{k+1}(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon)) + X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\ G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon);\ 0\Big](t),$$

$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon),\ \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathscr{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}_{k+1}(\varepsilon)\Big],\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathscr{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\Big\{\mathscr{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) +$$

$$+\mathscr{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},\ k = 0,\ 1,\ 2\ \dots\ . \qquad (14)$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [6, 29], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого последней системой аналогично [15, 18].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Риккати

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t) + \varepsilon\ \Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon),\ \mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (15)$$

где

$$\Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) := \mu S_1 Z(t,\varepsilon) S_2 + S_3 Z(t,\varepsilon) S_4 Z^*(t,\varepsilon) S_5,$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_4 := S_1,\ S_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ 0 & \sin 2t \end{pmatrix},\ \mathscr{L}Z(\cdot,\varepsilon) := Z(0,\varepsilon) - Z(2\pi,\varepsilon).$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B,\ Z(0) = \Theta$$

имеет вид

$$W(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t),\ \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix},\ V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j,\ j = 1, 2,\ \dots 4$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Общее решение однородной матричной задачи (15) определяет матрица $\mathscr{Q} = 0$ и ее ортопроекторы $P_{\mathscr{Q}} = P_{\mathscr{Q}^*} = I_4$. Таким образом, для матричной краевой задачи (15) имеет место критический случай. Поскольку для 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) условие (7) выполнено, постольку порождающая 2π-периодическая задача для матричного дифференциального уравнения (15) разрешима для данных неоднородностей $F(t)$ и $\mathscr{A} = 0$. Общее решение порождающей 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](t),\ \Theta_r = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s); \mathscr{A}\Big](t) = K\Big[F(s)\Big](t),$$

где

$$\mathscr{M}K\Big[F(s)\Big](t) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2(-25\cos t + 37\cos 2t - 12\cos 3t - 6\sin 2t + 9\sin 3t) \\ -25\cos t + 46\cos 2t - 21\cos 3t + 25\sin t - 8\sin 2t - 3\sin 3t \\ -25\cos t + 28\cos 2t - 3\cos 3t + 25\sin t - 44\sin 2t + 21\sin 3t \\ 12\cos 2t - 12\cos 3t + 25\sin t - 26\sin 2t + 9\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Уравнение (10) для порождающих констант 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) имеет действительный корень

$$\mu = 1,\ \xi = \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{23}{15} & \frac{14}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^*,$$

которому соответствует матрица полного ранга

$$\mathscr{B}_0 = -120\,\pi \begin{pmatrix} 34 & -158 & 38 & 300 & 0 \\ 15 & -34 & 68 & -38 & 0 \\ 3 & -208 & 14 & 214 & 0 \\ -41 & -3 & 61 & -14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае 2π-периодической задачи для уравнения (15) выполнены условия теоремы, следовательно 2π-периодическая задача (15) в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t) = \begin{pmatrix} 37\cos 2t - 6\sin 2t & 2(7\cos 2t - 11\sin 2t) \\ -4\sin 2t + 23\cos 2t & 6\cos 2t - 13\sin 2t \end{pmatrix}$$

разрешима, причем $\mu(0) = 1$. Итерационная схема (14) определяет первое приближение от порождающего решения $X_1^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$\mathscr{M} X_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \left\{ X_{1,i}^{(1)}(t,\varepsilon) \right\}_{i=1}^{4},$$

для которого

$$X_{1,1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -31\ 500 + 24\ 192\cos t - 10\ 080\cos 2t - 14\ 640\cos 3t +$$

$$+32\ 028\cos 4t + 41\ 776\sin t - 21\ 210\sin 2t + 15\ 360\sin 3t + 5\ 021\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,2}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -10\ 500 + 32\ 984\cos t - 13\ 020\cos 2t - 15\ 000\cos 3t +$$

$$+5\ 536\cos 4t + 8\ 792\sin t - 29\ 190\sin 2t + 360\sin 3t + 12\ 127\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ -10\ 500 + 16\ 492\cos t - 12\ 180\cos 2t + 180\cos 3t +$$

$$+6\ 008\cos 4t + 4\ 396\sin t - 2\ 310\sin 2t + 7\ 500\sin 3t - 5\ 569\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,4}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{47\ 250}\Big\{ 2\ 611\cos t - 2\ 730\cos 2t - 915\cos 3t +$$

$$+1\ 034\cos 4t - 1\ 512\sin t - 1\ 260\sin 2t\sin 2t + 960\sin 3t + 288\sin 4t\Big\}.$$

Для оценки точности найденного порождающего и первого приближения к 2π-периодическому решению уравнения типа Риккати (2) определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \Bigg|\Bigg| \Bigg|\Bigg| \mathscr{M}\Big[Z_1'(t,\varepsilon) - AZ_1(t,\varepsilon) - Z_1(t,\varepsilon)B - F(t) -$$
$$-\varepsilon\ \Phi(Z_k(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon)\Big] \Bigg|\Bigg|_{\mathbb{R}^4} \Bigg|\Bigg|_{L^2[0;2\pi]},\ k = 0,\ 1\ .$$

В частности, при $\varepsilon = 0,1$ имеем:

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,318\ 171,\ \ \Delta_1(0,1) \approx 0,030\ 770.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0318\ 171,\ \ \Delta_1(0,01) \approx 0,00307\ 697.$$

Заметим, что матрица $\mathscr{B}_0$, ключевая при исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть найдена непосредственно из уравнения для порождающих констант (10). Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathscr{Q}_d^*} \mathscr{M}\Big\{ \mathscr{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial(\xi,\zeta)} P_{\mathscr{Q}_d^*} \mathscr{M}\Bigg\{ \mathscr{L}K\Big\{ D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), W(s, \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon)) + X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$
$$+ A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)\Big\}(\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0 \\ \zeta(\varepsilon)=0}} = \mathscr{B}_0.$$

Предложенная в статье схема исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогично [29, 32] может быть перенесена на матричные краевые задачи с запаздыванием, а также — аналогично [18, 29, 30, 31] на автономные матричные краевые задачи. И, наконец, аналогично [21, 29] предложенная схема исследовании матричных краевых задач может быть перенесена на матричные краевые задачи со слабонелинейным функционалом в краевом условии.

Список литературы

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р.Беллман. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

BELLMAN, R. (1969) *Introduction to matrix analysis.* Moscow: Nauka.

2. Бойчук, А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А.Бойчук. — К.: Наук. думка, 1990. — 96 с.

   BOICHUK, A.A. (1990) *Constructive methods of analysis of the boundary value problems.* Kiev: Naukova dumka.

3. Бойчук, А.А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1988. — №. 7. — С. 3–6.

   BOICHUK, A.A. (1988) The Green's function of the linear inhomogeneous boundary value problem. *Reports of the Academy of Sciences of Ukrainian SSR. Ser. A.* 7. p. 3-6.

4. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.

   BOLOTIN, V.V. (1956) *Dynamic stability of elastic systems.* Moscow: Gostehizdat.

5. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 318 с.

   VOEVODIN, V.V. and KUZNETZOV Yu.A. (1984) *Matrix and computing.* Moscow: Nauka.

6. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А.Гребеников, Ю.А.Рябов. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

   GREBENIKOV, E.A. and RYABOV, Yu.A. (1979) *Constructive Methods in the Analysis of Nonlinear Systems.* Moscow: Nauka.

7. Деревенский, В.П. Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Математика. — 2008. — №. 2. — С. 14–23.

   DEREVENSKII, V.P. (2008) Matrix Bernoulli equations. I. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* Volume 52 (Issue 2). p. 12-21.

8. Деревенский, В.П. Матричные уравнения Бернулли. II // Известия вузов. Математика. — 2008. — №. 7. — С. 3–10.

   DEREVENSKII, V.P. (2008) Matrix Bernoulli equations. I. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* Volume 52 (Issue 7). p. 1-7.

9. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

   KANTOROVICH, L.V. and AKILOV, G.P. (1977) *Functional analysis.* Moscow: Nauka.

10. Коробов, В.И., Бебия, М.О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, управляемых по первому приближению // Доповіді НАН України. — 2014. — №. 2. — С. 20–25.

    KOROBOV, V.I. & BEBIYA, M.O. (2014) Stabilization of some class of nonlinear systems that are uncontrollable in the first approximation. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukrainian.* 2. p. 20-25.

11. Лаптинский, В.Н., Маковецкий, И.И. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41. — № 7. — С. 994–996.

LAPTINSKY, V.N. & MAKOVETSKY, I.I. (2005) On the Constructive Analysis of a Two-Point Boundary Value Problem for a Nonlinear Lyapunov Equation. *Differential Equations*. Volume 41 (Issue 7). p. 1045-1048.

12. Люлько, Н.А. Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осциляторов / Н.А. Люлько. — Новосибирск, 2012. — 33 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281)

LULKO, N.A. (2012) *Basic and combinational resonance in a nonlinear system of two oscillators.* Novosibirsk. Preprint.

13. Мандельштам, Л.И., Папалекси, Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. — 1934. — №. 3. — С. 5–29.

MANDELSHTAM, L.I. & PAPALEXY, N.D. (1934) About the parametric excitation of electric oscillations. *Technical Physics*. 3. p. 5-29.

14. Силин, В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму / В.П.Силин. — М.: Наука, 1973. — 287 с.

SILIN, V.P. (1973) *A parametric effects of high power radiation to the plasma.* Moscow: Nauka.

15. Чуйко, А.С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — Т. 8. — № 7. — С. 278–288.

CHUIKO, A.S. (2005) Domain of Convergence of an Iteration Procedure for a Weakly Nonlinear Boundary-Value Problem. *Nonlinear Oscillations*. Volume 8 (Issue 2). p. 278-288.

16. Чуйко, С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — 2014. — №. 1120. — С. 85–94.

CHUIKO, S.M. (2014) About the solution of Lyapunov matrix equations. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: mathematics, applied mathematics and mechanics*. 1120. p. 85-94.

17. Чуйко, С.М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014. — Т. 19. — Вып. 1 (21). — С. 49–57.

CHUIKO, S.M. (2014) About the solution of Silvestr equation. *Bulletin of Odessa National University. Series: mathematics and mechanics*. Volume 19 (Issue 1(21)). p. 49-57.

18. Чуйко, С.М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9. — № 3. — С. 416–432.

CHUIKO, S.M. (2006) Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem. *Nonlinear Oscillations*. Volume 9 (Issue 3). p. 405-422.

19. Чуйко, С.М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32). — № 1–2. — С. 101–107.

    CHUIKO, S.M. (2014) The Green's operator for the linear Noetherian boundary value problem for the matrix differential equation. *Dynamic systems* . Volume 4(32) (Issue 1-2). p. 101-107.

20. Чуйко, С.М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014. — Т. 17. — № 1. — С. 137–148.

    CHUIKO, S.M. (2015) Nonlinear Noetherian Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance. *Journal of Mathematical Sciences*. Volume 205 (Issue 6). p. 859-870.

21. Чуйко, С.М. Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доповіді НАН України. — 2007. — № 2. — С. 26–30.

    CHUIKO, S.M. (2007) Noetherian boundary value problem in special critical case. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukrainian*. 2. p. 26-30.

22. Чуйко, С.М., Кулиш, П.В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — Т. 24. — С. 243–252.

    CHUIKO, S.M. & KULISH, P.V. (2012) Linear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance. *Works of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*. 24. p. 243-252.

23. Чуйко, С.М., Кулиш, П.В. Слабонелинейная периодическая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. — Т. 27. — С. 240–249.

    CHUIKO, S.M. & KULISH, P.V. (2013) Seminonlinear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance. *Works of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*. 27. p. 240-249.

24. Чуйко, С.М., Старкова, О.В., Кулиш, П.В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса // Комп. исследов. и модел. — 2014. — Т. 6. — № 1. — С. 27–43.

    CHUIKO, S.M. & STARKOVA, O.V.& KULISH, P.V. (2014) Periodic boudary value problem in the case of parametric resonance for Hill equation. *Computer research and modeling*. Volume 6 (Issue 1). p. 27-43.

25. Шмидт, Г. Параметрические колебания / Г. Шмидт. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

    SHMIDT, G. (1978) *Parametric oscillations*. Moscow: Mir.

26. Якубович, В.А. Параметрический резонанс в линейных системах / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1987. — 328 с.

    YAKUBOVICH, A.A. and STARZHINSKII, V.M. (1987) *Parametric resonance in linear systems*. Moscow: Nauka.

27. BOICHUK, A.A. & KRIVOSHEYA, S.A. (2001) A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential Equation*. Volume 37 (Issue 4). p. 464–471.

28. BOICHUK, A.A. & KRIVOSHEYA, S.A. (1998) Criterion of the solvability of matrix equation of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal*. Volume 50 (Issue 8). p. 1162–1169.

29. BOICHUK, A.A. and SAMOILENKO, A.M. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht; Boston: VSP. XIV + 317 p.

30. BOICHUK, A.A. & CHUIKO, S.M. (1992) Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases. *Differential equation*. 10. p. 1353–1358.

31. CHUIKO, S.M. & BOICHUK, I.A. (2009) An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*. Volume 12 (Issue 3). p. 405–416.

32. CHUIKO, S.M. & CHUIKO, A.S. (2012) On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*. Volume 14 (Issue 3). p. 445–460.

Статья поступила в редакцию 24.05.2015

Балашова Г. С. О классах бесконечно дифференцируемых функций / Г. С. Балашова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 15–19.

В работе рассматриваются различные регуляризации последовательностей положительных чисел, которые позволяют установить легко проверяемые алгебраические условия вложения пространств Соболева бесконечного порядка.

Ключевые слова: регуляризация, пространство последовательностей, условия вложения.

Брук В. М. О сходимости решений граничных задач для интегральных уравнений / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 20–33.

Получены достаточные условия равномерной сходимости решений граничных задач для интегральных уравнений с операторными мерами, значениями которых являются линейные ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: интегральное уравнение, операторная мера, граничная задача, гильбертово пространство, линейный оператор, линейное отношение.

Кабанцова Л. Ю., Коструб И. Д, Смагина Т. И. Ограниченные решения дифференциального уравнения / Л. Ю. Кабанцова, И. Д. Коструб, Т. И. Смагина // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 34–41.

В работе вопрос обратимости дифференциального оператора исследуется с помощью корней квадратного операторного "алгебраического" уравнения, обладающих определёнными свойствами. Получено представление обратного оператора в терминах таких корней. Приведён пример, в котором корни выражены через коэффициенты дифференциального уравнения

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, ограниченные решения, банахово пространство.

Капустина Т. О., Лоэак Ж.-П. Асимптотическое и численное исследование эллиптико-параболического уравнения / Ж.-П. Лоэак, Т. О. Капустина // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 50–61.

В статье рассматривается краевая задача для эллиптико-параболического уравнения с малыми параметрами при старших производных. Работа состоит из двух частей: асимптотическое исследование задачи и создание численного алгоритма. Используется метод пограничных функций и приближенное разложение эллиптического оператора на произведение двух параболических. Цель работы - на основе асимптотического приближения решения разработать эффективный численный метод.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, краевые задачи, сингулярные возмущения, методы малого параметра, факторизация оператора, численные методы.

Лежнев В. Г., Марковский А. .Н. Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях / В. Г. Лежнев, А. Н. Марковский // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 42–49.

Рассматриваются плоскопараллельные течения с минимальной среднеквадратической завихренностью. К таким течениям относятся, например, решения стационарной 2D задачи Стокса с потенциальной правой частью, также рассматривается задача построения плоскопараллельных течений только по граничным значениям функции тока. Искомая плотность вихрей принадлежит подпространству гармонических функций, полученная полная система потенциалов в этом подпространстве позволяет строить сходящиеся проекционные алгоритмы для сложных областей. Представлены численные течения для двух постановок в области типа раструба.

Ключевые слова: плоскопараллельное течение, функция тока, бигармоническая задача, задача Стокса, потенциал Робена, метод базисных потенциалов.

Новиков В. В. (0,2,3)–интерполяция функций, непрерывных по обобщенной вариации / В. В. Новиков // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 62–68.

В статье изучается сходимость одного интерполяционного процесса Биркгофа на классе Ватермана функций, непрерывных по обобщенной вариации. Показано, что если функция $f \in C_{2\pi}$ непрерывна по упорядоченной гармонической вариации на $[-\pi, \pi]$, то ее (0,2,3)–интерполяционные тригонометрические полиномы с равноотстоящими узлами равномерно сходятся к f на $\mathbb{R}$. Аналогичное утверждение справедливо и для классической интерполяции Лагранжа.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, интерполяция Биркгофа, лакунарная интерполяция, обобщенная вариация, гармоническая вариация.

Рыхлов В. С. О кратной полноте корневых функций полиномиальных пучков / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 69–86.

Рассматривается задача об m-кратной полноте $(0 < m \leq n)$ *собственных и присоединенных или, по-другому, корневых функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов в пространстве $L_2[0,1]$, порожденных дифференциальными выражениями n-го порядка с постоянными коэффициентами, полиномиально зависящими от спектрального параметра, и произвольными двухточечными краевыми условиями, коэффициенты которых есть также полиномы от спектрального параметра. Дается краткая история вопроса. Формулируются и доказываются достаточные условия n-кратной полноты системы корневых функций в пространстве $L_2[0,1]$.*

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов,корневые функции, собственные и присоединенные функции, кратная полнота, достаточные условия полноты, постоянные коэффициенты дифференциального выражения, произвольное расположение корней характеристического многочлена, произвольные двухточечные краевые условия, нерегулярный пучок.

Сакс Р. С. Оператор ротор в пространстве $L_2(G)$ / Р. С. Сакс // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 87–103.

Изучаются операторы ротор и градиент дивергенции в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$, их спектральные разложения и краевые задачи для них в произвольной ограниченной области G с гладкой границей Γ. Найдено необходимое и достаточное *условия на функцию* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}^0(B)$, *при котором ее ряд Фурье сходится в норме пространства Соболева* $\mathbf{H}^s(B)$, *оно состоит в принадлежности* $\mathbf{u}$ *подпространству* $\mathbf{V}^s_{\mathscr{R}}(B) \subset \mathbf{V}^0(B)$. *Исследована разрешимость в подпространствах* $\mathbf{L}_2(G)$ *краевой задачи для системы* $\mathbf{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ *при* $\lambda \neq 0$ *в* G *с граничным условием* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g$. *Методом Фурье при любых* λ *в шаре* B *исследована разрешимость краевой задачи:* $\mathbf{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0$. *В этой статье мы изучаем оператор ротор. Оператор градиент дивергенции будет рассмотрен в следующей работе автора. Краткое содержание этих работ опубликовано в ДАН в 2015 г.*

Ключевые слова: операторы ротор и градиент дивергенции, пространство $\mathbf{L}_2(G)$, спектральные разложения, краевые задачи, ограниченная область с гладкой границей.

Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностного уравнения / С. М. Чуйко // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 104–116.

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для линейного матричного разностного уравнения. Предложен оператор, который приводит линейное матричное алгебраическое уравнение к традиционной линейной алгебраической системе с прямоугольной матрицей.

Ключевые слова: Обобщенный оператор Грина, краевая задача, матричное дифференциальное уравнение, псевдо обратные матрицы

Чуйко С. М., Несмелова (Старкова) О. В., Сысоев Д. В. Матричная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса / С. М. Чуйко, О. В. Несмелова (Старкова), Д. В. Сысоев // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 1 (26). — С. 117–134.

Целью данной статьи является получение условий разрешимости и схемы построения решений слабонелинейных нетеровых матричных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. В отличие от исследований периодических краевых задач в случае параметрического резонанса В.А. Якубовича и В.М. Старжинского данная статья *посвящена изучению более общих нетеровых матричных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные условия разрешимости и схема построения решений нелинейных нетеровых матричных краевых задач для систем дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса обобщают аналогичные результаты, приведенные в работах О.А. Бойчука и С.А. Кривошеи для периодических матричных краевых задач для дифференциального уравнения Риккати в отсутствие параметрического резонанса. Полученные результаты проиллюстрированы на примере матричной периодической краевой задачи для дифференциального уравнения Риккати в случае параметрического резонанса.*

Ключевые слова: матричная нетерова краевая задача, матричные дифференциальные уравнения, обобщенный оператор Грина, параметрический резонанс, уравнение Риккати

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Войтицкий Виктор Иванович — к.ф-м.н, доцент кафедры математического анализа Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Муратов Мустафа Абдурешитович — д.ф-м.н, профессор кафедры математического анализа Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: mustafa_muratov@mail.ru

Пашкова Юлия Сергеевна — к.ф-м.н, доцент кафедры математического анализа Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: j_pashkova@mail.ru

Старков Павел Александрович — к.ф-м.н, доцент кафедры математического анализа Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: PavelStarkov@list.ru

Балашова Галина Сергеевна — д.ф-м.н, профессор кафедры высшей математики НИУ МЭИ, г. Москва, РФ
e-mail: balashovags@yandex.ru

Брук Владислав Моисеевич — д.ф-м.н, профессор кафедры математики и моделирования Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, РФ
e-mail: vladislavbruk@mail.ru

Кабанцова Лариса Юрьевна — преподаватель кафедры нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, РФ
e-mail: dlju@yandex.ru

Коструб Ирина Дмитриевна — к.ф-м.н, доцент кафедры нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, РФ
e-mail: ikostrub@yandex.ru

Смагина Тамара Ивановна — к.ф-м.н, доцент кафедры нелинейных колебаний факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, РФ
e-mail: smagin@math.vsu.ru

Капустина Татьяна Олеговна — к.ф-м.н, доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, г. Москва, РФ
e-mail: kapustina-tatiana@yandex.ru

Лоэак Жан-Пьер — д.ф-м.н, Ecole Centrale de Lyon, г. Лион, Франция

Лежнев Виктор Григорьевич — профессор, д.ф-м.н, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета, г. Краснодар, РФ
e-mail: lzhnvv@mail.ru

Марковский Алексей Николаевич — к.ф-м.н, доцент кафедры математических и компьютерных методов факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета, г. Краснодар, РФ
e-mail: mark@kubsu.ru

Новиков Владимир Васильевич — к.ф-м.н, доцент кафедры естественных и математических наук Энгельсского технологического института (филиала) Саратовского государственноготехнического университета, г. Энгельс, РФ
e-mail: vvnovikov@yandex.ru

Рыхлов Виктор Сергеевич	к.ф-м.н, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, РФ *e-mail: RykhlovVS@yandex.ru*
Сакс Ромэн Семенович	д.ф-м.н, профессор, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики ИМВЦ УНЦ РАН, г. Уфа, РФ *e-mail: romen-saks@yandex.ru*
Чуйко Сергей Михайлович	д.ф-м.н, профессор, заведующий кафедрой математики Донбасского государственного педагогического университета, г. Славянск, Донецкая обл., Украина *e-mail: chuiko-slav@inbox.ru*
Несмелова (Старкова) Ольга Владимировна	к.ф-м.н, доцент кафедры математики Донбасского государственного педагогического университета, г. Славянск, Донецкая обл., Украина *e-mail: chuiko-slav@inbox.ru*
Сысоев Денис Витальевич	к.ф-м.н, аспирант кафедры математики Донбасского государственного педагогического университета, г. Славянск, Донецкая обл., Украина *e-mail: chuiko-slav@inbox.ru*

Подписано к печати 04.12.2015. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 15 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского
просп. Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007