

Т А В Р И Ч Е С К И Й
В Е С Т Н И К
И Н Ф О Р М А Т И К И И
М А Т Е М А Т И К И

№ 4 (29) ' 2015

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ № ФС77-61826 от 18.05.2015

T AURIDA
J OURNAL OF
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND
M ATHEMATICS

2015, No. 4

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002

The State Registration Certificate

ПИ № ФС77-61826 (18.05.2015)

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ	заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук
Т. Я. АЗИЗОВ	профессор, доктор физико-математических наук
Е. П. БЕЛАН	профессор, доктор физико-математических наук
А. М. ГУПАЛ	член-корреспондент НАНУ, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ	академик РАН, доктор физико-математических наук
А. Н. КАРАПЕТЯНЦ	доцент, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ	профессор, доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
И. Б. СИРОДЖА	профессор, доктор технических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** – ответственный редактор (раздел “Информатика”)
к. ф.-м. н., доцент **В. И. ВОЙТИЦКИЙ** – ответственный редактор (раздел “Математика”)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр. Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический Вестник Информатики и Математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр. Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора: +7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции: +7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор): vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

© V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY

EDITORIAL BOARD

Vladimir DONSKOY	Editor-in-Chief , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Nikolay KOPACHEVSKY	Vice Chief Editor , Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Thomas AZIZOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Eugene BELAN	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Anatoliy GUPAL	Corresponding member of the National Academy of Sciences of Ukraine Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Yuri ZHURAVLEV	Full member of the Russian Academy of Sciences Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexey KARAPETYANTS	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Victor KRASNOPROSHIN	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Mustafa MURATOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Olexander NAKONECHNY	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Igor ORLOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Konstantin RUDAKOV	Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Alexander SAPOJENKO	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
Igor SIRODJA	Professor, Doctor of Engineering Sciences
Valeriy CHEHOV	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences

EDITORIAL BOARD

Ayder ANAFIYEV	Managing Editor of the "Computer Science Theory" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Victor VOYTITSKY	Managing Editor of the "Mathematics" Section Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

OFFICE ADDRESS:

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vernadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief

+7 3652 602 466 — office

Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief

article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Kovalenko A. I. and Smolich V. P. <i>M/G/1</i> queue with system disasters and impatient customers when system is down	7
Андропова О. А. Случай средней интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии	17
Костинский А. С. О принципах сплайн-экстраполяции	32
Переварюха А. Ю. Метод когнитивной формализации в анализе многофакторной экологической проблемы Каспия	52
Плышевская С. П. Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче	66
Цветков Д. О. Операторный подход к задаче о малых движениях стратифицированных жидкостей	77
Шиян О. В. Динамика периодических решений нестационарного горения вдоль полосы	100
Рефераты	115
Список авторов номера	120

TABLE OF CONTENTS

Kovalenko A. I. and Smolich V. P. <i>M/G/1</i> queue with system disasters and impatient customers when system is down	7
Andronova O. A. The case of middle intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy	17
Kostinsky A. S. About principles of spline-extrapolation	32
Perevaryukha A. Yu. Graph formalization and multifactor analysis of environmental problems on example of the Caspian Sea	52
Plyshevskaya S. P. Dynamics of stationary structures in the canonical parabolic problem	66
Tsvetkov D. O. Operator approach to the problem on small movements of stratified fluids	77
Shiyan O. V. The dynamics of periodic solutions of non-stationary combustion along the strip	100
Abstracts	115
Authors	120

UDC: 519.872.1

MSC2010: 60K25

M/G/1 QUEUE WITH SYSTEM DISASTERS AND IMPATIENT CUSTOMERS WHEN SYSTEM IS DOWN

© Kovalenko A. I., Smolich V. P.

V. I. VERNADSKY CRIMEAN FEDERAL UNIVERSITY
TAURIDA ACADEMY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
4 VERNADSKOGO AVENUE, SIMFEROPOL, REPUBLIC OF CRIMEA, 295007, RUSSIAN FEDERATION
E-MAIL: *svp54@mail.ru*

M/G/1 QUEUE WITH SYSTEM DISASTERS AND IMPATIENT CUSTOMERS WHEN SYSTEM IS DOWN.

Kovalenko, A. I. and Smolich, V. P.

Abstract. A queueing system of type *M/G/1* with customers impatience is considered. The system as a whole suffers occasionally a disastrous breakdown, upon which all present customers are cleared from the system and lost. A repair process then starts immediately. The equilibrium probabilities of the system, expected number of customers in the system, proportion of customers served, rate of lost customers due to disasters and rate of abandonments due to impatience are obtained in the article.

Keywords: *queueing systems, unreliable system, impatient customers, equilibrium probabilities, rate of lost customers, queueing systems with breakdowns.*

INTRODUCTION

Consider a system operating as an *M/G/1* queue. The system as a whole suffers random disastrous failures (catastrophes) such that, when a failure occurs, all present customers are flushed out of the system and lost. The system then goes through a repair process whose duration is random. Meanwhile, while the system is down and inoperative, the stream of arrivals continues. However, the new arrivals become impatient: each customer, upon arrival, activates his own timer, with random duration T , such that if the system is still down when the timer expires, the customer abandons the system never to return. Our goal is to analyze this system and calculate quality of service measures: proportion of customers served; expected number of customers in the system; rate of customers cleared and lost due to disasters; and rate of abandonments due to impatience when the system is down.

There is a considerable literature on queues with system's breakdowns. Models with customers impatience in queues also have been studied by various authors in the past.

For references on the subject see [1, 2]. Inspired by the work of Yechiali [1], we propose, here, a new methodology for investigating the system. In the current study we extend the analysis to deal with systems where service times and repair times are arbitrary (absolutely continuous) random variables.

1. THE MODEL

Customers arrive to an $M/G/1$ -type queue according to a Poisson process with rate λ . The service times ω_1 are independent and identically distributed with common cumulative distribution function $F_1(x) := \mathbb{P}\{\omega_1 \leq x\}$, corresponding density function $f_1(x)$, reliability function $\Phi_1(x) := 1 - F_1(x)$. The system suffers disastrous breakdowns, occurring when the server is at its functioning phase, at a Poisson rate η . That is, the system life-time is exponentially distributed with mean $1/\eta$. When the system fails, all customers present are rejected and lost. Upon failure, a repair process starts immediately. The repair times ω_2 follow a general distribution $F_2(y)$, density function $f_2(y)$, reliability function $\Phi_2(y)$. Customers arriving while the system is down become impatient: each customer activates an independent “impatience timer” T , exponentially distributed with mean $1/\alpha$, such that, if the repair process has not been completed by the time T expires, the customer abandons the system never to return. We suppose that inter-arrival periods, service times, “impatience times”, server lifetimes and repair times are mutually independent.

Laplace Transform of an arbitrary function $U(x)$ will be denoted by $U^*(s)$:

$$U^*(s) =: \int_0^{\infty} U(x)e^{-sx} dx.$$

We use as well the conditional completion rates (at time x) for the service and repair times, respectively:

$$\mu(x) = -\frac{\Phi_1'(x)}{\Phi_1(x)}, \quad \gamma(y) = -\frac{\Phi_2'(y)}{\Phi_2(y)}.$$

Take notice of the relationships:

$$\Phi_1(x) := \mathbb{P}\{\omega_1 > x\} = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \exp\left(-\int_0^x \mu(t) dt\right), & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f_1(x) = \mu(x)\Phi_1(x), \quad \int_0^{\infty} \Phi_k(x) dx = E(\omega_k), \quad k = 1, 2 \quad (2)$$

$$\Phi_1^*(s) = \frac{1 - f_1^*(s)}{s} \quad (3)$$

2. INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

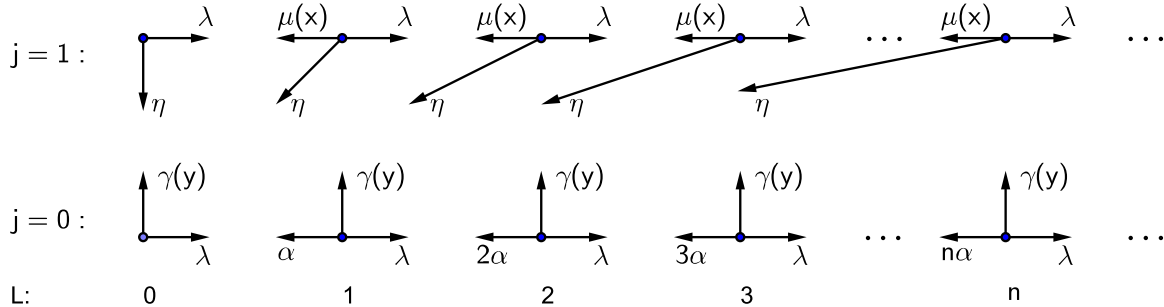


Fig. 1. Transition-rate diagram

Let $\xi(t)$ be the random process, depicting our system. Let j indicate the system’s phase: $j = 1$ denotes that the system is functioning and serving customers, while $j = 0$ indicates that the system is down, undergoing a repair process. Let k denote the number of customers in the system.

Obviously, the moments of system’s “crashes” form the regeneration points. The random variable ω , time between successive regeneration points, is the sum of repair time ω_2 and exponentially distributed system life-time, so ω has absolutely continuous distribution with finite expectation $E(\omega) = E(\omega_2) + \frac{1}{\eta}$. Therefore, we can apply fundamental theorem of renewal theory and derive the ergodicity of the process $\xi(t)$.

Define the functions:

$$\begin{aligned}
 P_{jk}(t) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (j, k)\}, \quad j = 0, 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 Q_{1k}(t, x) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (1, k), \omega_1 < x\} \\
 Q_{0k}(t, y) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (0, k), \omega_2 < y\}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 q_{1k}(t, x) &:= \frac{\partial Q_{1k}(t, x)}{\partial x}, \quad q_{0k}(t, y) := \frac{\partial Q_{0k}(t, y)}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Observe that:

$$P_{1k}(t) = Q_{1k}(t, +\infty) = \int_0^\infty q_{1k}(t, x) dx; \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

$$P_{0k}(t) = Q_{0k}(t, +\infty) = \int_0^\infty q_{0k}(t, y) dy; \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

By the method of the supplementary variable, we obtain the next integro-differential equations and boundary conditions:

$$P'_{10}(t) + (\lambda + \eta)P_{10}(t) = \int_0^{\infty} q_{11}(t, x)\mu(x) dx + \int_0^{\infty} q_{00}(t, y)\gamma(y) dy \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_{11}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q_{11}(t, x)}{\partial x} + (\mu(x) + \lambda + \eta)q_{11}(t, x) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial q_{1k}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial q_{1k}(t, x)}{\partial x} + (\mu(x) + \lambda + \eta)q_{1k}(t, x) = \lambda q_{1, k-1}(t, x), \quad (8)$$

$$k = 2, 3, \dots$$

$$q_{11}(t, 0) = \lambda P_{10}(t) + \int_0^{\infty} q_{12}(t, x)\mu(x) dx + \int_0^{\infty} q_{01}(t, y)\gamma(y) dy \quad (9)$$

$$q_{1k}(t, 0) = \int_0^{\infty} q_{1, k+1}(t, x)\mu(x) dx + \int_0^{\infty} q_{0k}(t, y)\gamma(y) dy, \quad k = 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\frac{\partial q_{00}(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial q_{00}(t, y)}{\partial y} + (\lambda + \gamma(y))q_{00}(t, y) = \alpha q_{01}(t, y) \quad (11)$$

$$\frac{\partial q_{0k}(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial q_{0k}(t, y)}{\partial y} + (\lambda + \gamma(y) + k\alpha)q_{0k}(t, y) =$$

$$= (k + 1)\alpha q_{0, k+1}(t, y) + \lambda q_{0, k-1}(t, y), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

$$q_{00}(t, 0) = \eta P_{1\bullet}(t), \quad \text{where } P_{1\bullet}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} P_{1k}(t) \quad (13)$$

$$q_{0k}(t, 0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Applying the ergodicity of process $\xi(t)$, find the limits in (6) – (14) as $t \rightarrow \infty$. Let

$$P_{jk} := \lim_{t \rightarrow \infty} P_{jk}(t), \quad g_{1k}(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} q_{1k}(t, x), \quad g_{0k}(y) := \lim_{t \rightarrow \infty} q_{0k}(t, y) \quad (15)$$

denote the system's steady-state probabilities and corresponding limiting functions. Then (4) and (5) imply

$$P_{1k} = \int_0^{\infty} g_{1k}(x) dx; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad P_{0k} = \int_0^{\infty} g_{0k}(y) dy; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Given $t \rightarrow \infty$, the equations and boundary conditions (6) – (14) transform to:

$$(\lambda + \eta)P_{10} = \int_0^\infty g_{11}(x)\mu(x) dx + \int_0^\infty g_{00}(y)\gamma(y) dy \quad (17)$$

$$g'_{11}(x) + (\mu(x) + \lambda + \eta)g_{11}(x) = 0 \quad (18)$$

$$g'_{1k}(x) + (\mu(x) + \lambda + \eta)g_{1k}(x) = \lambda g_{1,k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots \quad (19)$$

$$g_{11}(0) = \lambda P_{10} + \int_0^\infty g_{12}(x)\mu(x) dx + \int_0^\infty g_{01}(y)\gamma(y) dy \quad (20)$$

$$g_{1k}(0) = \int_0^\infty g_{1,k+1}(x)\mu(x) dx + \int_0^\infty g_{0k}(y)\gamma(y) dy, \quad k = 2, 3, \dots \quad (21)$$

$$g'_{00}(y) + (\lambda + \gamma(y))g_{00}(y) = \alpha g_{01}(y) \quad (22)$$

$$g'_{0k}(y) + (\lambda + \gamma(y) + k\alpha)g_{0k}(y) = (k + 1)\alpha g_{0,k+1}(y) + \lambda g_{0,k-1}(y), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

$$g_{00}(0) = \eta P_{1\bullet}, \quad \text{where } P_{1\bullet} := \sum_{k=0}^\infty P_{1k} \quad (24)$$

$$g_{0k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

3. GENERATING FUNCTIONS

Let

$$G_0(y, z) =: \sum_{k=0}^\infty g_{0k}(y)z^k, \quad G_1(x, z) =: \sum_{k=1}^\infty g_{1k}(x)z^k \quad (26)$$

define the Probability Generating Function (PGF) of the phase j , $j = 0, 1$.

(17)–(25) yields:

$$\frac{\partial G_1(x, z)}{\partial x} + (\mu(x) + \lambda(1 - z) + \eta)G_1(x, z) = 0 \quad (27)$$

$$G_1(0, z) = -(\lambda(1 - z) + \eta)P_{10} + \int_0^\infty G_0(y, z)\gamma(y) dy + \frac{1}{z} \int_0^\infty G_1(x, z)\mu(x) dx \quad (28)$$

$$\frac{\partial G_0(y, z)}{\partial y} - \alpha(1 - z)\frac{\partial G_0(y, z)}{\partial z} + (\lambda(1 - z) + \gamma(y))G_0(y, z) = 0 \quad (29)$$

$$G_0(0, z) = \eta P_{1\bullet} \quad (30)$$

Applying standard methods for the solution of the first-order linear partial differential equation (29) with boundary condition (30), we have:

$$\begin{aligned} G_0(y, z) &= \eta P_{1\bullet} \cdot \exp \left\{ - \int_0^y \gamma(t) dt - \frac{\lambda}{\alpha} (1-z)(1 - e^{-\alpha y}) \right\} = \\ &= \eta P_{1\bullet} \cdot \Phi_2(y) \cdot \exp \left\{ - \frac{\lambda}{\alpha} (1-z)(1 - e^{-\alpha y}) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

The solution of the equation (27) is given by:

$$\begin{aligned} G_1(x, z) &= G_1(0, z) \cdot \exp \left\{ - \int_0^x \mu(t) dt - (\lambda(1-z) + \eta)x \right\} = \\ &= G_1(0, z) \cdot \Phi_1(x) \cdot \exp(-(\lambda(1-z) + \eta)x) \end{aligned} \quad (32)$$

Calculate integrals in (28):

$$\int_0^{\infty} G_0(y, z) \gamma(y) dy = \eta P_{1\bullet} \cdot \int_0^{\infty} f_2(y) \exp \left\{ - \frac{\lambda}{\alpha} (1-z)(1 - e^{-\alpha y}) \right\} dy$$

Denote

$$A(z) := \int_0^{\infty} f_2(y) \exp \left\{ - \frac{\lambda}{\alpha} (1-z)(1 - e^{-\alpha y}) \right\} dy \quad (33)$$

Then,

$$\int_0^{\infty} G_0(y, z) \gamma(y) dy = \eta P_{1\bullet} \cdot A(z) \quad (34)$$

Observe that

$$A(1) = 1 \quad \text{and} \quad A'(1) = \frac{\lambda}{\alpha} (1 - f_2^*(\alpha)) = \lambda \Phi_2^*(\alpha) \quad (35)$$

Next,

$$\int_0^{\infty} G_1(x, z) \mu(x) dx = G_1(0, z) \int_0^{\infty} f_1(x) e^{-(\lambda(1-z)+\eta)x} dx = G_1(0, z) f_1^*(\lambda(1-z) + \eta) \quad (36)$$

Combining (34), (36) and (28), we get

$$G_1(0, z) = \frac{-(\lambda(1-z) + \eta)zP_{10} + \eta z P_{1\bullet} \cdot A(z)}{z - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)}$$

and therefore,

$$G_1(x, z) = \frac{-(\lambda(1-z) + \eta)zP_{10} + \eta z P_{1\bullet} \cdot A(z)}{z - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)} \Phi_1(x) e^{-(\lambda(1-z)+\eta)x} \quad (37)$$

To conclude the calculation of $G_0(y, z)$ and $G_1(x, z)$ we need P_{10} and $P_{1\bullet}$. To accomplish the purpose calculate the integral

$$\int_0^\infty G_0(y, 1) dy = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty g_{0k}(y) dy = \sum_{k=0}^\infty P_{0k} =: P_{0\bullet}$$

From (31) we find $G_0(y, 1) = \eta P_{1\bullet} \cdot \Phi_2(y)$. Hence

$$\int_0^\infty G_0(y, 1) dy = \eta P_{1\bullet} \cdot \int_0^\infty \Phi_2(y) dy = \eta P_{1\bullet} \cdot E(\omega_2),$$

where $E(\omega_2)$ is expected repair time. Therefore,

$$P_{0\bullet} = \eta P_{1\bullet} \cdot E(\omega_2), \tag{38}$$

and since $P_{0\bullet} + P_{1\bullet} = 1$, then

$$P_{0\bullet} = \frac{\eta E(\omega_2)}{1 + \eta E(\omega_2)}, \quad P_{1\bullet} = \frac{1}{1 + \eta E(\omega_2)} \tag{39}$$

Investigate the denominator of (37) $h(z) = z - f_1^*(\lambda(1 - z) + \eta)$. Observe that $h(0) = -f_1^*(\lambda + \eta) < 0$ and $h(1) = 1 - f_1^*(\eta) > 0$. Thus $\exists z_0 \in (0, 1)$, such that $h(z_0) = 0$. This root is unique in $(0, 1)$ since $h''(z) = -\lambda^2 f_1^{*''}(\lambda(1 - z) + \eta) < 0 \quad \forall z \in (0; 1)$. Hence the numerator of (37) must vanish at z_0 :

$$-(\lambda(1 - z_0) + \eta)z_0 P_{10} + \eta z_0 P_{1\bullet} \cdot A(z_0) = 0,$$

implying that

$$P_{10} = \frac{\eta A(z_0) P_{1\bullet}}{\lambda(1 - z_0) + \eta}. \tag{40}$$

4. QUALITY OF SERVICE MEASURES

4.1. Expected number of customers in the system. Let L_0 be the number of customers, given the system is down, and L_1 be the number of customers in the operative system. Calculate the expectations $E(L_0), E(L_1)$. So far

$$\int_0^\infty G_j(y, z) dy = \sum_{k=0}^\infty \left(\int_0^\infty g_{jk}(y) dy \right) z^k = \sum_{k=0}^\infty P_{jk} z^k, \quad j = 0, 1$$

then

$$E(L_j) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \int_0^\infty G_j(y, z) dy$$

Using (31), we have:

$$\begin{aligned} E(L_0) &= \lim_{z \rightarrow 1} \int_0^{\infty} \eta P_{1\bullet} \cdot \Phi_2(y) \cdot \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\alpha} (1-z)(1-e^{-\alpha y}) \right\} \frac{\lambda}{\alpha} (1-e^{-\alpha y}) dy = \\ &= \eta P_{1\bullet} \cdot \frac{\lambda}{\alpha} \int_0^{\infty} \Phi_2(y) (1-e^{-\alpha y}) dy = \eta P_{1\bullet} \cdot \frac{\lambda}{\alpha} (E(\omega_2) - \Phi_2^*(\alpha)) \end{aligned}$$

or (see (38))

$$E(L_0) = \frac{\lambda}{\alpha} P_{0\bullet} \cdot \left(1 - \frac{\Phi_2^*(\alpha)}{E(\omega_2)} \right) \quad (41)$$

Substituting (40) in (37), we obtain:

$$G_1(x, z) = \frac{\eta z P_{1\bullet}}{z - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)} \Phi_1(x) e^{-(\lambda(1-z) + \eta)x} \left(A(z) - A(z_0) \frac{\lambda(1-z) + \eta}{\lambda(1-z_0) + \eta} \right)$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G_1(x, z) dx &= \frac{\eta z P_{1\bullet}}{z - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)} \Phi_1^*(\lambda(1-z) + \eta) \left(A(z) - A(z_0) \frac{\lambda(1-z) + \eta}{\lambda(1-z_0) + \eta} \right) = \\ &= \eta z P_{1\bullet} \cdot \frac{1 - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)}{z - f_1^*(\lambda(1-z) + \eta)} \left(\frac{A(z)}{\lambda(1-z) + \eta} - \frac{A(z_0)}{\lambda(1-z_0) + \eta} \right) \end{aligned}$$

Some computations give:

$$E(L_1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} G_1(x, z) dx = \frac{f_1^*(\eta)}{1 - f_1^*(\eta)} (P_{10} - P_{1\bullet}) + \lambda P_{1\bullet} \left(\frac{1}{\eta} + \Phi_2^*(\alpha) \right) \quad (42)$$

Remark 1. In the partial case of exponentially distributed service (ω_1) and repair (ω_2) times

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu = \text{const}, \quad \gamma(x) = \gamma = \text{const}, \quad \text{and} \\ f_1^*(\eta) &= \frac{\mu}{\mu + \eta}, \quad \Phi_2^*(\alpha) = \frac{1}{\gamma + \alpha}, \quad E(\omega_2) = \frac{1}{\gamma}, \end{aligned}$$

(41) with (42) imply

$$E(L_0) = \frac{\lambda P_{0\bullet}}{\gamma + \alpha}, \quad E(L_1) = \frac{\mu}{\eta} (P_{10} - P_{1\bullet}) + \lambda P_{1\bullet} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\gamma + \alpha} \right),$$

which coincides with results of [1].

4.2. Proportion of customers served. The system suffers from two types of losses: (i) rejected customers due to system's disastrous failures and (ii) abandonments of impatient customers during the repair phase. When the system is in state (j, n) , $n \geq 1$, the rate of failure is η and then n customers are lost. Thus, the unit-time rate of lost customers,

R_{lost} , is given by

$$R_{\text{lost}} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta n P_{1n} = \eta E(L_1) \quad (43)$$

Similarly, the rate of abandonment due to impatience is

$$R_{\text{aband}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha n P_{0n} = \alpha E(L_0) \quad (44)$$

Finally, the expected number of customers served per unit of time is

$$R_{\text{served}} = \lambda - R_{\text{lost}} - R_{\text{aband}} \quad (45)$$

Taking into account (41),(42), we get:

$$R_{\text{served}} = \lambda - \alpha E(L_0) - \eta \frac{f_1^*(\eta)}{1 - f_1^*(\eta)} (P_{10} - P_{1\bullet}) - \lambda \eta \Phi_2^*(\alpha) P_{1\bullet} - \lambda P_{1\bullet}$$

So far as $\lambda - \alpha E(L_0) - \lambda \eta \Phi_2^*(\alpha) P_{1\bullet} - \lambda P_{1\bullet} = 0$ (see (38),(41)),

$$R_{\text{served}} = \eta \frac{f_1^*(\eta)}{1 - f_1^*(\eta)} (P_{1\bullet} - P_{10}) = \frac{f_1^*(\eta)}{\Phi_1^*(\eta)} (P_{1\bullet} - P_{10}),$$

implying that the proportion of customers served is

$$P_{\text{served}} = \frac{f_1^*(\eta)}{\lambda \Phi_1^*(\eta)} (P_{1\bullet} - P_{10}). \quad (46)$$

Again, in the case of exponentially distributed service time,

$$P_{\text{served}} = \frac{\mu}{\lambda} (P_{1\bullet} - P_{10}).$$

CONCLUSION

We analyze the model of M/G/1 que with breakdowns and impatient customers and derive various quality of service measures: expected number of customers in the system, proportion of customers served, rate of lost customers due to disasters, rate of abandonments due to impatience.

REFERENCES

1. YECHIALI, U. (2007) Queues with system disasters and impatient customers when system is down. *Queueing Syst.*. 56. p. 195–202.
2. ALTMAN, E. & YECHIALI, U. (2006) Analysis of customers' impatience in queues with server vacations. *Queueing Syst.*. 52. p. 261–279.
3. COOPER, R. B. (1981) *Introduction to Queueing Theory*. 2nd ed.. North-Holland, Amsterdam.

4. Коваленко, А. И., Марянин, Б. Д., Смолич, В. П. Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками // ТВИМ. — ТНУ, 2013. — №1. — С. 53–60.
KOVALENKO, A. I., MARYANIN, B. D. & SMOLICH, V. P (2013) Queueing system with unreliable line and impatient customers. *TVIM*. №1. p. 53–60.
5. Смолич В. П. Метод дополнительной переменной в задачах ТМО и теории надежности / А. И. Коваленко, В. П. Смолич. — Lambert Academic Publishing (Германия), 2014. — 232 с.
KOVALENKO, A. & SMOLICH, V. (2014) *The supplementary variable method applying to the problems in queueing systems and reliability*. Lambert Academic Publishing. Germany.

Статья поступила в редакцию 02.12.2015

УДК: 517.9:532

MSC2010: 35P10, 35P20

СЛУЧАЙ СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

© О. А. Андропова

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПРОСП. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: o.andronova@list.ru

THE CASE OF MIDDLE INTENSITY IN SPECTRAL PROBLEMS WITH THE INTERNAL DISSIPATION OF AN ENERGY.

Andronova O. A.

Abstract. We consider the following spectral problem:

$$\lambda^2 u - \lambda \beta K u - \Delta u = 0 \text{ (in } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (on } \Gamma), \quad K = K^* \gg 0. \quad (1)$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ is a domain with Lipschitz boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The parameter $\beta > 0$ imitates the power of the internal dissipation of an energy.

The problem (1) can be reduced to study another spectral problem seeing in sum of Hilbert spaces:

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K), \quad \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad A \gg 0. \quad (2)$$

The methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in indefinite metric spaces are used.

Here we study the case, when $\beta K := 2\beta A^\delta$, $\beta > 0$, $\delta \geq 0$. Then we have

$$\begin{pmatrix} 2\beta A^\delta & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \delta \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}(A^\delta) \cap \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \quad (3)$$

We consider here, that $0 < A^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$.

This problem contains two parameters: $\beta > 0$ и $\delta \geq 0$. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates when δ grows at different positive β and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements.

It is found out that behavior of spectrum depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The case of middle intensity of internal dissipation is studied, so case when $1/2 < \delta < 1$. The frontier case between weak and middle intensity, when $\delta = 1/2$, and the frontier case between middle and strong intensity, when $\delta = 1$, are considered.

We investigate that connection between operators $\beta K = 2\beta A^\delta$ both confirms the results got before and opens new effects in a spectral problem. The spectrum substantially depends on parameter δ , so when $1/2 \leq \delta < 1$ it locates near real semiaxis.

The detailed structure of spectrum depends on the parameter of internal dissipation β . In particular, in the frontier case $\delta = 1/2$ the spectrum structure substantially depends on β : when $0 < \beta < 1$ it is imaginary and when $\beta > 1$ — real and positive.

In the case of middle intensity of internal dissipation in all range of change δ and β the systems of eigenfunctions form basis Rissa and \mathcal{J} -orthogonal basic in some Hilbert spaces. In the frontier case $\delta = 1$ there are not imaginary spectrum, it consists of real eigenvalues.

Keywords: *Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, characteristic equation, dynamics of the eigenvalues' motion.*

ВВЕДЕНИЕ

Диссипативные системы — это механические системы, полная энергия в которых убывает, переходя в другие формы энергии. Этот процесс называется процессом диссипации (рассеяния) энергии, он происходит вследствие наличия различных сил сопротивления (трения), которые называются также диссипативными силами. Примером диссипативной системы является твердое тело, движущееся по поверхности другого при наличии трения, жидкость или газ, между частицами которых при движении действуют силы вязкости (вязкое трение).

Понятие диссипативной системы применяют в математической физике также по отношению и к немеханическим системам во всех случаях, когда энергия упорядоченного процесса переходит в энергию неупорядоченного процесса, в конечном счёте — в энергию теплового (хаотического) движения молекул. Так, система контуров, в которой происходят колебания электрического тока, затухающие из-за наличия сопротивления, будет также диссипативной системой; в этом случае электрическая энергия переходит в джоулеву теплоту.

Диссипативные системы возникают в гидродинамике при изучении явления турбулентности, в теории колебаний, биологии, радиотехнике и в других областях науки, связанных с изучением предельных режимов. Одним из направлений изучения диссипативных систем является изучение внутренних свойств системы, т. е. свойств, связанных с характером поведения решений системы. Тут можно отметить работы Левинсона Н. (1944) и Герштейна В. М. (1970). Интерес к диссипативным системам возрос в связи с интенсивной разработкой теории аттракторов (притягивающих множеств).

Серия работ посвящена изучению диссипативных эволюционных уравнений с частными производными, допускающих максимальный компактный аттрактор. Это работы Бабина А. В. и Вишика М. И. (1992), работы Ладыженской О. А. (1985), Р. Темама (1988). Для автора особую важность представляют работы проф. И. Д. Чуешова, который занимается глубоким исследованием нелинейных задач математической физики. Работы Чуешова И. Д. с соавторами и его монография (см. [4] — [5]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности, систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [4] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [5] изучаются глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией. Отметим здесь также Лагнез Дж., который в работе [1] исследовал вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [2] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе.

Настоящая работа касается исследования спектральных задач, порожденных линейными начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии, а также некоторым модельным примерам. Отметим, что этим исследованиям предшествовало детальное изучение эволюционных и спектральных проблем с поверхностной диссипацией энергии.

Результатом исследования линейной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии стала работа автора и его научного руководителя Копачевского Н. Д. [14]. В работе методами функционального анализа изучается линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии, а также ее абстрактный аналог с использованием абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Рассматриваются также спектральные проблемы, порожденные этими задачами. Далее, в работе [15] исследовались начально-краевые и спектральные задачи при различной интенсивности внутренней диссипацией энергии. Оказалось, что при некоторых дополнительных соотношениях между операторами, входящими в постановку задачи, появляются новые эффекты. Здесь, в статье, приведен такой пример спектральной задачи с внутренней диссипацией энергии. Исследование случая малой интенсивности внутренней диссипации отражено в публикациях автора. Здесь подробно разобран случай средней интенсивности внутренней диссипации. Случай сильной интенсивности будет отражен в последующих публикациях.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

В работе изучается начально-краевая задача математической физики с внутренней диссипацией энергии. Сформулируем ее: в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(t, x)$, для которой выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta K \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \quad \beta > 0, \quad (4)$$

а также граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x) \quad (\text{в } \Omega). \quad (5)$$

В основном уравнении второе слагаемое $\beta K(\partial u/\partial t)$, $\beta > 0$ появляется вследствие наличия в динамической системе внутренней диссипации энергии; при $\beta = 0$ задача (4)–(5) является гиперболической, т. е. консервативной.

Далее изучаются нормальные движения системы, т. е. такие решения однородной задачи (4)–(5) без начальных условий, для которых

$$u(t, x) = \exp(-\lambda t)u(x), \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

тогда для амплитудных элементов $u(x)$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda \beta K u - \Delta u = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (7)$$

Если специальным образом ввести гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ (см. работы [14], [15]), то задачу можно переформулировать в виде задачи для некоторого операторного пучка. Отметим, что скалярное произведение в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ задается формулой

$$(u, v)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} u \cdot \overline{v} \, d\Gamma.$$

Вводится также порождающий оператор A гильбертовой пары пространств $(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega); L_2(\Omega))$,

$$Au := -\Delta u, \quad \mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \mathcal{R}(-\Delta) = L_2(\Omega) \right\}.$$

Тогда спектральная задача (7) принимает вид

$$L_{\beta}(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda \beta K + A)u = 0, \quad (8)$$

где $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K . Далее будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого “сравнима” с $\mathcal{D}(A)$, т. е. выполнено одно из условий: $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K)$, либо $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(K)$. Отметим, что оператор A также обладает свойствами $A = A^* \gg 0$.

Спектральная задача (7) допускает обобщение в абстрактной форме. При этом вводится тройка пространств E, F, G и оператора следа γ , для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [7], [8]).

Абстрактная спектральная задача с внутренней диссипацией энергии формулируется так: требуется найти элемент $u \in F$ такой, что выполнены уравнение и граничное условие:

$$\lambda^2 u - \lambda \beta K u + Lu = 0 \text{ (в } E), \quad \partial u = 0 \text{ (в } G). \quad (9)$$

Введя здесь оператор A гильбертовой пары $(F; E)$, (снова см. [7], [8])

$$Au := Lu, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in F : \partial u = 0 \text{ (в } G), \mathcal{R}(L) = E\} \subset F, \quad (10)$$

приходим к той же задаче (8) для операторного пучка, рассматриваемой теперь в пространстве F .

Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему

$$\lambda^2 u - \lambda \beta K u + Au = 0 \text{ (в } E), \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K) \subset F. \quad (11)$$

Далее, задача (11) преобразуется с помощью некоторых специальных замен. Целью таких преобразований является получение векторно-матричной формы задачи. Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (11). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Именно, введем в (11) новый искомый элемент ζ согласно формуле $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (11) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K), \quad \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad A \gg 0, \quad (12)$$

которая рассматривается в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

В работе [15] были доказаны простейшие свойства решений такой задачи, получены утверждения о локализации и дискретности спектра. А именно, было установлено, что собственные значения задач (11), (12) расположены в правой комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси. При $\beta = 0$ спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси. При условии, что пространство F компактно вложено в E , т. е. если оператор $A^{-1} > 0$ компактен, собственные элементы $(u_j^\pm; \zeta_j^\pm)^t$ задачи (12) образуют ортонормированный базис в пространстве E^2 .

Более точные свойства спектра и системы корневых элементов зависят от интенсивности внутренней диссипации. Так, если диссипация в динамической системе достаточно мала, то спектр задачи (11) локализован в окрестности мнимой оси, а корневые элементы имеют свойства двукратной полноты и двукратной базисности по Абелю-Лидскому.

Данная статья касается вопросов средней интенсивности внутренней диссипации, поэтому остановимся на этом случае подробно. При этом области определения операторов задачи связаны соотношением:

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(K^{1/2}). \quad (13)$$

В случае средней интенсивности внутренней диссипации спектр задачи локализован в окрестности положительной полуоси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы задачи образуют полную систему либо базис Абеля-Лидского в пространстве E^2 . Случай средней интенсивности имеет еще и пограничные случаи: между слабой и средней интенсивностью и случай, когда средняя интенсивность переходит в сильную. В этих случаях для уточнения свойств спектра необходимо рассмотрение “особых” модельных примеров.

Сформулируем кратко полученные результаты по средней интенсивности в виде теорем. Подробные доказательства можно найти в публикации автора [15].

Теорема 1. Пусть выполнены условия $A^{1/2}K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, а также условие принадлежности операторов задачи различным классам компактности, а именно $K^{-1} \in \mathcal{S}_{pK}$, $(VV^*)^{-1} \in \mathcal{S}_{pV}$, где $V^{-1} := K^{1/2}A^{-1/2}$. Тогда имеют место следующие свойства.

1. Система корневых элементов задачи (12) полна в гильбертовом пространстве $E^2 = E \oplus E$.
2. Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения λ_j задачи (12), кроме, быть может, конечного их числа, лежат в секторе

$$\Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \varepsilon\}, \quad (14)$$

и имеют в качестве предельной точку $\lambda = \infty$.

Теорема 2. Если выполнено условие $A^{1/2}K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, а также условия

$$\lambda_j(K) = (c_K)^{-a} j^a [1 + o(1)], \quad \lambda_j(VV^*) = (c_V)^{-b} j^b [1 + o(1)], \quad (15)$$

то система корневых элементов задачи образует базис Абеля-Лидского порядка $\alpha > \alpha_0$,

$$\alpha_0 = b \ (a > b), \quad \alpha_0 = a \ (a \leq b), \quad (16)$$

а собственные значения λ_j имеют степенное асимптотическое поведение.

Случай большой интенсивности внутренней диссипации будет отражен в последующих публикациях автора, он требует детального изучения и осмысления. Заранее отметим, что в этом случае происходит новая перестройка спектра задачи, он имеет две положительных ветви собственных значений с предельными точками не только на бесконечности, но и в нуле. Таким образом, в динамической системе имеются не только как угодно быстро затухающие аperiодические нормальные движения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k^+ \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$) и множителям $\exp(-\lambda_k^+ t)$, но и как угодно медленно затухающие, отвечающие собственным значениям λ_k^- и множителям $\exp(-\lambda_k^- t)$, $\lambda_k^- \rightarrow +0$ ($k \rightarrow \infty$). Собственные элементы, отвечающие каждой ветке, образуют базис Рисса в пространстве E .

Рассмотрим задачу (12) при условии, что $\beta K := 2\beta A^\delta$, $\beta > 0$, $\delta \geq 0$. Тогда возникает спектральная проблема

$$\begin{pmatrix} 2\beta A^\delta & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A^\delta) \cap \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (17)$$

содержащая два параметра: $\beta > 0$ и $\delta \geq 0$. Цель дальнейших рассмотрений — проследить, как видоизменяется спектр задачи при возрастании δ и различных положительных β . При этом считаем, что $0 < A^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$.

Пусть $\{u_k(A)\}_{k=1}^\infty$ — собственные элементы оператора A , а $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ — его (конечнократные) собственные значения, $0 < \lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_k(A) \leq \dots$, $\lambda_k(A) \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$), пронумерованные с учетом их кратностей. Отметим, что при $\beta = 0$ задача (17) имеет решения

$$\lambda_k^\pm = \pm i\lambda_k^{1/2}(A), \quad z_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm u_k(A); u_k(A))^t, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

при этом собственные элементы

$$\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty \quad (19)$$

образуют ортогональный базис в пространстве E^2 .

1⁰. Рассмотрим пограничный случай между слабой и средней интенсивностью внутренней диссипации, он соответствует условию, когда

$$\delta = \frac{1}{2} \quad (20)$$

и по прежнему $\beta > 0$. Здесь

$$\mathcal{A}_{\beta,1/2} = \begin{pmatrix} I & -2i\beta I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta,1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (21)$$

и потому $\mathcal{A}_{\beta,1/2}$ не является слабым возмущением оператора

$$\mathcal{A}_0 := i \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

отвечающего случаю $\beta = 0$ в задаче (17) при $\delta = 1/2$. Поэтому свойство локализации спектра в окрестности мнимой оси, которое имело место в случае малой интенсивности внутренней диссипации, здесь не выполнено.

Собственные значения оператора $\mathcal{A}_{\beta,1/2}$ таковы:

$$\lambda_k^\pm(\beta) = \begin{cases} \lambda_k^{1/2}(A) \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \right), & \beta \geq 1, \\ \lambda_k^{1/2}(A) \left(\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2} \right), & 0 \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (23)$$

Собственные элементы, отвечающие не вещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+(\beta) = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\varepsilon u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^-(\beta) = \begin{pmatrix} -i\varepsilon u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon := \beta - i\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (24)$$

а собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_k^+(\beta) = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\tilde{\varepsilon} u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^-(\beta) = \begin{pmatrix} -i\tilde{\varepsilon} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon} := \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (25)$$

Отправляясь от формул (23) — (25), сформулируем общие свойства решений задачи на собственные значения для оператора $\mathcal{A}_{\beta,1/2}$.

а) Собственные значения $\lambda_k^\pm(\beta)$ образуют дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = \infty$. Если выполнено условие $0 < \beta < 1$, то собственные значения λ_k^\pm не вещественны, расположены на пересечении окружностей

$$|\operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{1/2}(A),$$

а также прямых

$$\operatorname{Im} \lambda = \pm \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right) \operatorname{Re} \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0. \quad (26)$$

б) Если выполнено условие $\beta > 1$, то собственные значения λ_k^\pm вещественны, положительны и образуют две ветви

$$\lambda_k^\pm = \lambda_k^{1/2}(A) \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

причем каждая из ветвей имеет предельную точку $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Собственные элементы, $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$, являются \mathcal{J} -положительными:

$$[z_k^+, z_k^+] = (\mathcal{J} z_k^+, z_k^+)_{E^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}^2 = \dots = \frac{2\sqrt{\beta^2 - 1}}{1 + \sqrt{\beta^2 - 1}} > 0. \quad (28)$$

Соответственно, собственные элементы $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, являются \mathcal{J} -отрицательными:

$$[z_k^-, z_k^-] = (\mathcal{J} z_k^-, z_k^-)_{E^2} = \tilde{\varepsilon}^2 - 1 < 0. \quad (29)$$

в) При выполнении условия $0 < \beta < 1$ собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty$, отвечающие не вещественным собственным значениям $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в пространстве E^2 . При этом

$$z_k^+(\beta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & i\varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^-(\beta) = \begin{pmatrix} i\varepsilon I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

г) При $\beta > 1$ собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty$, отвечающие (вещественным) собственным значениям $\{\lambda_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ (см. (27)), образуют \mathcal{J} -ортогональный базис в пространстве E^2 . При этом

$$E^2 = \mathcal{L}_+ [+] \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_+ := \text{span} \{z_k^+\}_{k=1}^\infty, \quad \mathcal{L}_- := \text{span} \{z_k^-\}_{k=1}^\infty. \quad (31)$$

Здесь при доказательстве используется тот факт, что собственные элементы \mathcal{J} -самосопряженного оператора, отвечающие несовпадающим собственным значениям, являются \mathcal{J} -ортогональными, а также то, что $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty$ образуют полную систему в E^2 .

2⁰. Рассмотрим случай средней интенсивности внутренней диссипации энергии. Будем теперь считать, что

$$\frac{1}{2} < \delta < 1, \quad \beta > 0. \quad (32)$$

Тогда имеет место факторизация

$$\mathcal{A}_{\beta, \delta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i(2\beta)^{-1} A^{1/2-\delta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\beta A^\delta & 0 \\ 0 & (2\beta)^{-1} A^{1-\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i(2\beta)^{-1} A^{1/2-\delta} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где $A^{1/2-\delta}$ — компактный положительный оператор, а операторы A^δ и $A^{1-\delta}$ — неограниченные положительно определенные операторы с компактными положительными обратными операторами. Поэтому для задачи на собственные значения оператора $\mathcal{A}_{\beta, \delta}$ из (33) справедливы общие утверждения теоремы 1. В частности, эта задача

имеет дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = \infty$, локализованный в окрестности положительной полуоси.

Уточним свойства спектра оператора $\mathcal{A}_{\beta,\delta}$ при условиях (32). Собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_k^\pm = \begin{cases} \beta \lambda_k^\delta(A) \left[1 \pm \sqrt{1 - \beta^{-2} \lambda_k^{1-2\delta}(A)} \right], & \beta > \lambda_k^{1/2-\delta}(A); \\ \beta \lambda_k^\delta(A) \left[1 \pm i \sqrt{\beta^{-2} \lambda_k^{1-2\delta}(A) - 1} \right], & 0 < \beta \leq \lambda_k^{1/2-\delta}(A). \end{cases} \quad (34)$$

Так как $\lambda_k(A) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то не вещественных собственных значений может быть не более конечного числа. Остальные собственные значения вещественны и разбиваются на две ветви:

$$\begin{aligned} \lambda_k^+(\beta; \delta) &= \lambda_k^\delta(A) \left[\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{1-2\delta}(A)} \right] = 2\beta \lambda_k^\delta(A) [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty), \\ \lambda_k^-(\beta; \delta) &= \lambda_k^\delta(A) \left[\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{1-2\delta}(A)} \right] = (2\beta)^{-1} \lambda_k^{1-\delta}(A) [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_k^+(\beta; \delta) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty), \quad \lambda_k^-(\beta; \delta) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty). \quad (36)$$

Соответствующие собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям $\lambda_k^\pm(\beta; \delta)$, таковы:

$$\begin{aligned} z_k^+ &= \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\tilde{\varepsilon}_k(\beta; \delta)u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \begin{pmatrix} -i\tilde{\varepsilon}_k(\beta; \delta)u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\varepsilon}_k(\beta; \delta) &:= \lambda_k^{\delta-1/2}(A) \left[\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{1-2\delta}(A)} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Асимптотическое поведение $\varepsilon_k(\beta; \delta)$ при $k \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}_k(\beta; \delta) = (2\beta)^{-1} \lambda_k^{1/2-\delta}(A) [1 + o(1)] \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (38)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} z_k^+(\beta; \delta) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & iK_+(\beta; \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \\ z_k^-(\beta; \delta) &= \begin{pmatrix} iK_+(\beta; \delta) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} K_+(\beta; \delta) &:= A^{\delta-1/2} \left(\beta I - (\beta^2 I - A^{1-2\delta})^{1/2} \right) = A^{1/2-\delta} \left(\beta I + (\beta^2 I - A^{1-2\delta})^{1/2} \right)^{-1}, \\ K_+^{-1}(\beta; \delta) &= A^{\delta-1/2} \left(\beta I + (\beta^2 I - A^{1-2\delta})^{1/2} \right)^{-1} = A^{1/2-\delta} \left(\beta I - (\beta^2 I - A^{1-2\delta})^{1/2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Из этих фактов получаем следующие выводы.

а) Собственные значения $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(\beta; \delta)$ образуют дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Все они, кроме, быть может, конечного числа незначительных комплексно сопряженных пар собственных значений, разбиваются на две серии (см. (35)). Каждая серия при $k \rightarrow \infty$ имеет предельную точку $\lambda = +\infty$.

б) Собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям λ_k^+ из (35), \mathcal{J} -положительны:

$$\begin{aligned} [z_k^+, z_k^+] &= (\mathcal{J} z_k^+, z_k^+)_{E^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_k^2 = \\ &= \frac{\sqrt{\beta - \lambda_k^{1/2-\delta}(A)} \cdot \left(\sqrt{\beta - \lambda_k^{1/2-\delta}(A)} + \sqrt{\beta + \lambda_k^{1/2-\delta}(A)} \right)}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{1-2\delta}(A)}} > 0, \end{aligned} \quad (40)$$

причем в силу (38) $[z_k^+, z_k^+] \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$). Соответственно, собственные элементы $\{z_k^-\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям λ_k^- из (35), \mathcal{J} -отрицательны:

$$[z_k^-, z_k^-] = (\mathcal{J} z_k^-, z_k^-)_{E^2} = -\tilde{\varepsilon}_k^2 + 1 < 0, \quad [z_k^-, z_k^-] \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (41)$$

в) Если выполнено условие

$$\beta^2 > \lambda_1^{1-2\delta}(A), \quad (42)$$

то все собственные значения задачи вещественны, а собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty$ образуют базис Рисса и \mathcal{J} -ортогональный базис в пространстве E^2 .

3⁰. Рассмотрим далее пограничный случай между средней и сильной интенсивностью внутренней диссипации, т. е. когда

$$\delta = 1, \quad \beta > 0. \quad (43)$$

Здесь имеет место факторизация

$$\mathcal{A}_{\beta,1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i(2\beta)^{-1}A^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\beta A & 0 \\ 0 & (2\beta)^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i(2\beta)^{-1}A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (44)$$

показывающая, что предельными точками спектра могут быть точки $\lambda = \infty$ и $\lambda = (2\beta)^{-1}$.

Действительно, собственные значения этой задачи таковы

$$\lambda_k^\pm(\beta, \delta) = \begin{cases} \lambda_k(A) \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{-1}(A)} \right], & \beta^2 \geq \lambda_k^{-1}(A), \\ \lambda_k(A) \left[\beta \pm i\sqrt{\lambda_k^{-1}(A) - \beta^2} \right], & \beta^2 < \lambda_k^{-1}(A). \end{cases} \quad (45)$$

Если выполнено условие

$$\beta^2 > \lambda_1^{-1}(A), \quad (46)$$

то все собственные значения вещественны и положительны, причем

$$\lambda_k^+(\beta) = 2\beta\lambda_k(A)[1 + o(1)], \quad \lambda_k^-(\beta; \delta) = (2\beta)^{-1}[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (47)$$

Значит, вместо двух ветвей собственных значений с предельными точками $\lambda = +\infty$, как это было выше в варианте 4⁰, здесь одна из ветвей теперь имеет своим пределом конечное число $(2\beta)^{-1} > 0$.

Собственные элементы задачи (оператора $\mathcal{A}_{\beta,1}$) таковы:

$$z_k^+ = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\tilde{\varepsilon}_k(\beta)u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \begin{pmatrix} -i\tilde{\varepsilon}_k(\beta)u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\tilde{\varepsilon}_k(\beta) := \lambda_k^{1/2}(A) \left[\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{-1}(A)} \right] = (2\beta)^{-1}\lambda_k^{-1/2}(A)[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (49)$$

Нетрудно видеть, что

$$z_k^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & iK_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \begin{pmatrix} iK_+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$K_+ := A^{1/2} \left[\beta I - (\beta^2 I - A^{-1})^{1/2} \right] = A^{-1/2} \left[\beta I + (\beta^2 I - A^{-1})^{1/2} \right]^{-1}. \quad (51)$$

Из сформулированных свойств получаем следующие выводы.

а) Собственные значения задачи образуют дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = +\infty$ и $\lambda = (2\beta)^{-1} > 0$. Невещественных собственных значений может быть не более конечного числа. Если выполнено условие (46), т. е. коэффициент диссипации β достаточно большой, не вещественные собственные значения отсутствуют.

б) Собственные элементы z_k^+ , отвечающие собственным значениям $\lambda_k^+ \subset \mathbb{R}_+$, \mathcal{J} -положительны:

$$[z_k^+, z_k^+] = (\mathcal{J} z_k^+, z_k^+)_{E^2} = 1 - (\tilde{\varepsilon}_k(\beta))^2 = 2 \frac{\sqrt{\beta - \lambda_k^{-1}(A)}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_k^{-1}(A)}} > 0. \quad (52)$$

Собственные элементы z_k^- , отвечающие собственным значениям λ_k^- , \mathcal{J} -отрицательны:

$$[z_k^-, z_k^-] = (\mathcal{J} z_k^-, z_k^-)_{E^2} = (\tilde{\varepsilon}_k(\beta))^2 - 1 < 0. \quad (53)$$

При этом

$$[z_k^+, z_k^+] \rightarrow 1, \quad [z_k^-, z_k^-] \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (54)$$

в) Если выполнено условие (46), то собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty$ образуют базис Рисса (см. (49), (50)) и \mathcal{J} – ортогональный базис в E^2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги рассмотрения простейшей спектральной задачи в случае средней интенсивности внутренней диссипации, отметим основные результаты.

1. При учете внутренней диссипации в виде $\beta K = 2\beta A^\delta$, спектр задачи существенно зависит от δ : при $0 \leq \delta < 1/2$ имеет место малая диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси (детальное исследование этого случая проведено ранее и отражено в публикациях автора); при $1/2 \leq \delta < 1$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие лишь одной предельной точки на бесконечности; и наперед скажем, что при $1 \leq \delta < \infty$ имеет место большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси.

2. В пограничном случае между слабой и сильной интенсивностью детальная структура спектра зависит от коэффициента диссипации β . В частности, при $\delta = 1/2$ структура спектра существенно зависит от β : при $0 < \beta < 1$ спектр не вещественный, а при $\beta > 1$ — вещественный и положительный. В пограничном случае между средней и сильной интенсивностью, когда параметр $\delta = 1$, при больших β не вещественные собственные значения пропадают.

3. В случае средней интенсивности внутренней диссипации во всем диапазоне изменения параметров δ и β собственные элементы задачи образуют базис Рисса и \mathcal{J} -ортогональный базис. Отметим, что при параметре $\beta = 0$ для любого значения δ собственные элементы образуют ортогональный базис.

Таким образом, на примере разобранный спектральной задачи этого пункта были как подтверждены общие выводы, полученные в работе [15], так и установлены новые факты: наличие двух ветвей собственных значений с предельной точкой $\lambda = \infty$ в случае средней диссипации, наличие базисности Рисса и \mathcal{J} -ортогональности системы собственных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. LAGNESE, J. (1983) Decay of the solution of the wave equation in a bounded region with boundary dissipation. *J. Diff. Equations*. 50. p. 163–182.
2. LASIECKA, I. & TARATU, D. (1993) Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation. *Diff. Integral Equations*. 6. p. 507–533.

3. Чебан, Д. Н. Глобальные аттракторы неавтономных динамических систем / Д. Н. Чебан. — Кишинев: Centrul poligraph, 2002. — 387 с.
CHEBAN D. (2002) *Global attractors for nonautonomous dynamic systems*. Kishinev: Centrul poligraph.
4. CHUESHOV, I. & ELLER, M. & LASIECKA, I. (2004) Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation. *Communications in Partial Differential Equations*. 29 (11–12). p. 1847–1876.
5. CHUESHOV, I. & LASIECKA, I. (2004) Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations. *J. Diff. Equations*. 198. p. 196–231.
6. CHUESHOV, I. (2006) *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*. Kharkov: Acta. <http://www.emis.de/monographs/Chueshov>
7. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский // Украинский математический вестник. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 69–97.
КОРАЧЕВСКИЙ, Н. (2004) Abstract Green's for the triple of hilbert spaces, abstract boundary value and spectral and problems. *Ukrainian mathematical Herald*. Vol. 1, № 1. p. 69–97.
8. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2004. — № 2. — С. 52–80.
КОРАЧЕВСКИЙ, Н. (2004) Abstract Green's for the triple of hilbert spaces and it's applications in Stock's problem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. № 2. p. 52-80.
9. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
ГОНБЕРГ И. (1965) *Introduction in the theory of liner selfadjoint operators*. Moscow: Nauka.
10. Копачевский, Н. Д. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
КОРАЧЕВСКИЙ, Н. and KREIN S. (1967) *Linear differential equations in Banach space*. Moscow: Nauka.
11. Крейн, С. Г. Функциональный анализ. Серия “Справочная математическая библиотека” / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
KREIN S. (1972) *Functional analysis. Series “Mathematical Reference library”*. Moscow: Nauka.
12. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.
MARKUS A. (1986) *Introduction in the spectral theory of polynomial operator bundles*. Kishinev: Shiintsa.

13. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Зуй Кан Нго. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
KOPACHEVSKY, N. and KREIN S. and Ngo Z. (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems*. Moscow: Nauka.
14. Андронова, О. А., Копачевский, Н. Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // О. А. Андронова, Н. Д. Копачевский / Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Том 29. — С. 11–28.
ANDRONOVA, O. and KOPACHEVSKY, N. (2008) About liner problems with surface dissipation of an energy. *Modern mathematics. Fundamental direction*. Vol. 29. p. 11–28.
15. Андронова, О. А. Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии / О. А. Андронова // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия “Математика. Механика. Информатика и Кибернетика”. — 2009. — Т. 22 (61). № 1. — С. 1–13.
ANDRONOVA, O. (2009) Boundary-value and spectral problems with surface and initial dissipation of an energy. *Scientific notes of Tavrida National University named after V. I. Vernadsky, series Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics*. Vol. 22(61). No. 1. p. 1–13.

Статья поступила в редакцию 05.12.2015

УДК: 519.652+550.3

MSC2010: 65D07+86-08

О ПРИНЦИПАХ СПЛАЙН-ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

© А. С. Костинский

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ИНСТИТУТ СЕЙСМОЛОГИИ И ГЕОДИНАМИКИ

ЛАБОРАТОРИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ СЕЙМИЧНОСТИ И ПРОЦЕССОВ В ОЧАГАХ

УЛ. ГАГАРИНА, 20, СИМФЕРОПОЛЬ, 295026, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *kostinsky@yahoo.com*

ABOUT PRINCIPLES OF SPLINE-EXTRAPOLATION.

Kostinsky A. S.

Abstract. Possible applications of spline mathematics is discussed for situations typical for geophysical observations when only numerical values of time series of data are known, to build a physical dynamic model is either impossible or too complicated, unreasonable mainly because of complexity of geological “scene” on which the events occur. Dipmeter survey, systematic measurements of varying level and temperature of ground water, radon concentration in wells are associated traditionally with search for possible precursors of earthquakes, forecasting of the nearest following value at the sequences of such kind does not presuppose from the outset knowledge or even existence some dynamic connection between phenomena. As a consequence, an interpolation on the set of experimental points proves not approximation, in sense of convergence to something a priori existing, as well as an extrapolation it should be treated as a designing, modeling of dependence for given sum-total of the points at plane. “Principle of maximum simplicity”, or Occam’s Razor, may mean minimal distinction of model from polygonal line joining points, then cubic splines appear as extremals for functional of the second derivative norm. Simple idea of transferring of properties of the set of the points beyond the bounds of given interval is being found as an only way: net of knots on specified segment is supplemented by a potentially predictable point, “prognostic” spline on the augmented net is built, we must ensure minimum of integral of quadratic deviation depending on ordinate of the add-on point as a parameter. The first key moment is an expansion of “prognostic” spline in terms of system of fundamental splines, a way is opened up to simple simultaneous linear equations expressing minimum condition, analytical solution can be written in explicit form. In the second place, very essential problem is end conditions for spline interpolating experimental points, as a rule, nothing is known about the values of the first and, all the more, second derivatives at the moments of regular measurement, for example, temperature of air. One can make the choice of end values of the first derivatives not depending on interpreter if it is realized as a result of complementary optimization: the main spline must “differ to the least degree” from a cubic polynomial. For uniform net and end conditions of continuity of the third derivative of “prognostic” spline structural units of the extrapolation algorithm are represented in form of sequence of expansions in terms of coordinates

of the specified points, expansion coefficients are available analytically. In wrap-up result ordinate of the forecasted point does not depend on uniform net spacing, that is very essential applying to situations of forecasting concerning regular measurements when principal is not a value of interval between measurements but its sameness.

Keywords: *interpolation, principles of extrapolation; cubic splines.*

ВВЕДЕНИЕ: О СМЫСЛЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Наша цель есть математическая схема сплайн-экстраполяции применительно к некоторой временной последовательности, предположим, что об исходных данных неизвестно ничего, кроме числовых значений. Такая ситуация обыденна в геофизике, пример — регулярные измерения химического состава, уровня и температуры грунтовых вод, концентрации радона в скважинах, наклономерные наблюдения, развернутые в районе, не исследованном с точки зрения геологии, с целью поиска предвестников ожидаемого землетрясения.

Здесь необходимы некоторые пояснения слов “неизвестно ничего”. Мысль о единственной неизвестной функции, аппроксимирующей результаты измерения, естественно, рождается “тенью”, сопутствующей многим и многим тысячам экспериментов доквантовой эры естественных наук. Физик, исследующий зависимость тока от приложенного напряжения для заданного проводника, получает экспериментальные точки, картина их распределения устойчива, демонстрирует те же самые особенности, если условия эксперимента меняются, например, проводник нагревается. Кажется очевидным обнаружить незначительное изменение измеренного тока при малом изменении напряжения, в сознании сама собой возникает полупрозрачная воображаемая линия графика, связь точек. В данном случае физическая картина того, что происходит, доступна для нас, анализ кинетики электронов в проводнике приводит к закону Ома, единственному варианту “ткани” связывающей точки. Точки ложатся вблизи прямой, и мы даже заранее знаем степень гладкости аппроксимирующей линии, но этот хрестоматийный пример даже для классической физики скорее исключение, с тех пор, как стало повседневностью понятие динамического хаоса.

В геофизических наблюдениях, как правило, нет опоры, подобной непререкаемости теорий физики времен Максвелла и Герца. Геофизическая картина Земли — это только “островки” связей между явлениями, “островки” как в пространстве, так и во времени, они могут появляться внезапно и исчезать навсегда и не сливаются в исследованный и освоенный “материк”. Как иллюстрация, измерения крипа в точке разлома рядом с очаговой областью не показывали никаких закономерных

изменений перед землетрясением с магнитудой 5,9 в центральной Калифорнии 6 августа 1979 г., но в коровых движениях перед землетрясением Тонанкай 7 декабря 1944 г. составляющая-предвестник несомненна [1]. Только физики или химии процессов здесь недостаточно для полноты динамического описания, описания как некоторой эффективной динамической системы, приемлемо сузить набор динамических переменных не удастся главным образом из-за сложности геологической “сцены”, на которой происходят события. Динамическая связь означает единственное следствие для единственной причины, однозначно определенное состояние эффективной системы для заданного набора значений управляющих параметров. Как следствие, должна наблюдаться универсальная воспроизводимость результатов в некотором диапазоне меняющихся условий, но этого не происходит из-за “полифонии” интерференции причин и следствий, среди которых невозможно выделить (и, возможно, не существует) доминанты. К тому же мыслимая эффективная система наверняка не только очень сложна, но и нелинейна, существенную роль могут играть состояния перехода к хаосу. В то же время и классическое статистическое описание, и статистическая вероятность прогнозных, наиболее практически важных, оценок кажутся некорректными из-за невозможности выделить соответствующий статистический коллектив, совокупность однотипных испытаний в одинаковых условиях. Итак, мы должны с самого начала признать существование множества, ансамбля функций ϕ , с равной эффективностью интерполирующих последовательность исходных данных, на этом этапе в ансамбле нет функций более предпочтительных с точки зрения соответствия эксперименту, ни одна не может считаться “истинной”.

Теперь, строго говоря, поиск модели, “наилучшего” варианта, есть не совсем аппроксимация. Аппроксимация в первоначальном смысле слова подразумевает некоторую сходящуюся последовательность, отражает наше стремление к определенной цели, в данном случае стремление восстановить некое “ядро” информации, скрытое в последовательности точек. Теперь перед нами скорее проблема выбора. Интерполяция-восстановление заменяется интерполяцией-конструированием, и решающую роль приобретают общие “первичные” принципы, позволяющие отсеять варианты неподходящие. В первую очередь подразумевается в определенном смысле понимаемая оптимальность, отражение всеобщности “бритвы Оккама”. Нам дано только ощущение того, что в объяснении вещи не должно быть сделано больше предположений, чем необходимо, но в применении к биологическим системам это принимается как общее свойство: если существует цель наилучшего управления биологическим объектом, то он, объект, должен быть устроен максимально просто, при условии выполнения заданной функции [2].

Фактически именно “принцип максимальной простоты” [2] в чисто математической задаче конструирования “с нуля” зависимости $y = f(x)$ по значениям ординат в узлах сетки приводит к кубическим сплайнам [3]. Действительно, пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ заданы значения $y_i, i = 0, \dots, N$, и речь идет о том, чтобы провести гладкую кривую через заданные точки (x_i, y_i) , то есть имеется в виду простая интерполяция без учета ошибок, интерполяция, повторимся, понимаемая как конструирование. Предположим для $f(x)$ простейший вариант “физически разумного” графика, непрерывную дифференцируемость, то есть класс гладкости C^1 на $[a, b]$. Стараясь обеспечить минимальное отличие модели от ломаной, мы находим множество экстремалей $S^{(N)}(f; x)$ функционала нормы второй производной

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx, \quad (1)$$

и теперь, располагая произвольными коэффициентами кубических полиномов, необходимо удовлетворить условиям интерполяции

$$S^{(N)}(f; x)|_{x=x_i} = y_i, \quad i = 0, \dots, N$$

и достичь минимума интеграла (1). Вторая производная экстремали, реализующей минимум, должна быть непрерывна [3],

$$S^{(N)}(f; x) \in C^2[a, b],$$

так возникает мысль о сшивании решений и записи [3]

$$S^{(N)}(f; x) = y_i(1-t)^2(1+2t) + y_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h_i t(1-t)^2 - m_{i+1} h_i t^2(1-t),$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad t = (x - x_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$S^{(N)}(f; x)|_{x=x_i} = y_i, \quad \left. \frac{d}{dx} S^{(N)}(f; x) \right|_{x=x_i} = m_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (3)$$

где последовательность $m_i, i = 0, \dots, N$ определяется из системы уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3 \left(\mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (4)$$

$$\mu_i = h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)^{-1}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i,$$

замкнутой, если заданы два дополнительных краевых условия. Как один из вариантов, для известных конечных значений производной

$$f'(a) = z'_a, \quad f'(b) = z'_b,$$

минимум $J(f)$ приходится искать на экстремальных таких, что

$$\left. \frac{d}{dx} S^{(N)}(f; x) \right|_{x=a} = z'_a, \quad \left. \frac{d}{dx} S^{(N)}(f; x) \right|_{x=b} = z'_b, \quad (5)$$

и система (4) имеет единственное решение.

Логика, приведенная выше, оказывается простейшей из мыслимых в ситуации, когда выбор должен осуществляться в ансамбле функций, удовлетворяющих условиям интерполяции. Представим себе определенную последовательность, ряд, каждый элемент которого есть класс сложности возможных моделей ϕ . В иерархии этих классов q -й уровень, $q \geq 2$, есть предположения $\phi \in C^{(q-1)}$, $\phi^{(q)} \in L_2[a, b]$, а вариационный принцип

$$J^{(q)}(\phi) = \int_a^b \left| \frac{d^q}{dx^q} \phi(x) \right|^2 dx = \min, \quad q \geq 2, \quad (6)$$

означает минимальное интегральное отличие функции-модели ϕ от полинома $(q-1)$ -й степени. Для произвольного q уравнения Эйлера экстремалей имеют порядок $2q$, как результат сшивания экстремалей степени $2q-1$ возникает сплайн $S^{(q,N)}$, $S^{(0,N)} \equiv S^{(N)}$, реализующий минимум только в случае дефекта 1, $S^{(q,N)} \in C^{2q-2}$. Для доказательства, аналогично книге [3], следует рассмотреть функционал (6), например, на множестве функций $f(x) \in \overline{W}_2^q[a, b] \in W_2^q[a, b]$, то есть функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $q-1$, q -ю производную из $L_2[a, b]$ и удовлетворяющих краевым условиям

$$f^{(p)}(a) = z_a^p, \quad f^{(p)}(b) = z_b^p, \quad p = 1, \dots, q-1, \quad (7)$$

а с другой стороны, сплайн степени $2q-1$ дефекта 1,

$$S \equiv S_{2q-1,1}, \quad S \in C^{2q-2}[a, b],$$

построенный по тем же условиям (7), и $q-1$ раз интегрировать по частям.

Запись $S^{(q,N)}$ формально может совпадать с записью общего эрмитового сплайна нечетной степени $2m+1 = 2q-1$, $m = 1, 2, \dots$, дефекта $m+1 = q$ и гладкости $m = q-1$ [3]. Поскольку для $S^{(q,N)}$ наивысший порядок непрерывной производной, $2(q-1)$, есть число четное, в нашей ситуации гладкость удвоена, равна $2m$, и коэффициенты такого эрмитового сплайна, то есть значения производных до порядка $q-1$ в узлах сетки, не считаются заданными, а должны определяться из условий непрерывности следующих производных и дополнительных $q-1$ краевых условий. Как вариант, для условий 1-го рода известны или считаются известными значения производных на концах промежутка (7).

1. ОБЩАЯ ЛОГИКА СПЛАЙН-ЭКСТРАПОЛЯЦИИ: ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ “ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ” ТОЧЕК

Пусть Θ есть множество, ансамбль функций ϕ с “физически разумным” графиком, $\phi \in C^1$, интерполирующих, без учета “коридора” ошибок, последовательность данных на отрезке $[a, b]$, $\Theta = \{\phi\}$, $\phi(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, N$. Сплайн $S^{(N)}(x)$ есть, несомненно, одна из точек множества Θ , в то же время это выделенная, “реперная” точка, обеспечивающая минимум функционала $J(\phi)$, $\phi \in \Theta$. Сплайн нелокален, его свойства в каждой точке зависят от последовательности в целом (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, N$, $S^{(N)}(x)$, следовательно, есть функция-характеристика распределения узловых точек. Заметим, что при такой постановке вопроса сплайн не возникает как попытка “воспроизвести” или приблизить какую-то из функций ϕ , с таким же успехом любая из функций ϕ может рассматриваться как некоторая аппроксимация $S^{(N)}(x)$.

Можно пойти еще дальше, именно — с самого начала видеть в функции $S^{(N)}(x)$ только характеристику распределения исходной последовательности точек, словно исчезает или делается невидимым “второй план” в виде вариантов интерполяции ϕ . Тогда для некоторой точки $x = x_c$, $y = y_c$ справа от $[a, b]$ кубический сплайн $S^{(N+1)}(x)$ на расширенной сетке $\delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = x_c$, с дополнительным условием интерполяции в узле $x = x_c$,

$$S^{(N+1)}(x)|_{x=x_c} = y_c,$$

есть такая же характеристика, но уже для дополненной последовательности (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, N, N+1$, $y_{N+1} = y_c$. Задача экстраполяции — в том, чтобы в максимальной степени продолжить, перенести свойства распределения “экспериментальных” точек за пределы интервала $[a, b]$, успешная в максимальной степени экстраполяция, следовательно, должна соответствовать минимальному различию характеристик $S^{(N+1)}$ и $S^{(N)}$.

“Расстояние” между $S^{(N+1)}$ и $S^{(N)}$ на измеряется, строго говоря, тремя интегралами квадратичных отклонений

$$J_e^{(k)} = \int_a^b \left| \frac{d^k}{dx^k} S^{(N+1)}(f; x) - \frac{d^k}{dx^k} S^{(N)}(f; x) \right|^2 dx, \quad k = 0, 1, 2,$$

зависящими от y_c как от параметра, для определенности договоримся рассматривать пока только $J_e^{(0)} \equiv I_e$. Общий замысел решения задачи экстраполяции в смысле поиска минимума интеграла I_e заключается в разложении сплайна $S^{(N+1)}$ по системе фундаментальных сплайнов на сетке δ (альтернатива, конечно, B -сплайны с конечным носителем [3]). Затем: пакет Maple имеет встроенную подпрограмму символического решения системы рекуррентных уравнений, ее использование применительно

к расчету сплайн-коэффициентов возможно, к сожалению, только для случая равномерной сетки. Как следствие, мы можем видеть “в буквах” решения системы с трехдиагональной матрицей для коэффициентов фундаментальных сплайнов, но с самого начала договариваясь рассматривать только ряды равноотстоящих во времени данных. Это ограничение не является принципиальным. Если в качестве приложения теории приходится иметь дело с событиями и измерениями в произвольные неравноотстоящие моменты времени, потребуется построить “рамочный” сплайн и оцифровать его с постоянным наиболее приемлемым шагом, стараясь не пропустить особенности поведения “эскизной” кривой. Итак, в качестве первого шага предстоит записать в явном виде систему линейных уравнений относительно параметров и ее аналитическое решение, краевые условия для $S^{(N+1)}$ диктуют характер разложения по базису фундаментальных сплайнов и прогнозируемые параметры в точке $x = x_c$.

2. ПОПЫТКА ПРОГНОЗА ПО ОРДИНАТЕ И ПРОИЗВОДНОЙ: НЕДООПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Наиболее простая и естественная схема прогноза возникает, если система уравнений для коэффициентов “прогностического” сплайна $S^{(N+1)}$ замыкается краевыми условиями 1-го рода

$$\left. \frac{d}{dx} S^{(N+1)}(x) \right|_{x=a} = y'_a, \quad \left. \frac{d}{dx} S^{(N+1)}(x) \right|_{x=b} = y'_c,$$

где y'_a, y'_c есть некоторые исходные параметры. Сплайн $S^{(N+1)}$ представляется в виде линейной комбинации

$$S^{(N+1)} = \sum_{i=0}^N y_i F_i(x) + y_c F_{N+1}(x) + y'_a \Phi_a(x) + y'_c \Phi_c(x), \quad (8)$$

где $F_i(x), i = 0, \dots, N, N+1$, - фундаментальные сплайны на сетке δ , удовлетворяющие условию нормализации

$$\sum_{i=0}^{N+1} F_i(x) = 1, \quad x \in [a, x_c], \quad (9)$$

условиям интерполяции вида

$$F_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, \dots, N, N+1, \quad j = 0, \dots, N, N+1 \quad (10)$$

и нулевым краевым условиям

$$\left. \frac{d}{dx} F_i(x) \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{d}{dx} F_i(x) \right|_{x=x_c} = 0.$$

Дополнительные базисные функции $\Phi_a(x)$, $\Phi_c(x)$ подчинены условиям [4]

$$\begin{aligned} \Phi_a(x_i) = \Phi_c(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N, N + 1, \\ \frac{d}{dx}\Phi_a(x)\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}\Phi_c(x)\Big|_{x=x_c} = 1, \quad \frac{d}{dx}\Phi_a(x)\Big|_{x=x_c} = \frac{d}{dx}\Phi_c(x)\Big|_{x=a} = 0, \end{aligned}$$

сплайн-конструкции $F_i(x)$, $\Phi_a(x)$, $\Phi_c(x)$ определяются только расширенной сеткой δ .

Введем обозначения варьируемых переменных

$$\zeta_1 = y_c, \quad \zeta_2 = y'_a, \quad \zeta_3 = y'_c,$$

и присвоим номера вспомогательным сплайнам, как указано в таблице.

Таблица 1

	$\sum_{i=0}^N y_i F_i(x) - S^{(N)}(x)$	$F_{N+1}(x)$	$\Phi_a(x)$	$\Phi_c(x)$
номер	0	1	2	3

Подставляя разложение (8) в выражение для I_e , можем записать I_e в виде формы переменных $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$:

$$I_e = \alpha_{0,0} + 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0,k} \zeta_k + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{m,n} \zeta_m \zeta_n, \quad (11)$$

где коэффициент $\alpha_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$ есть интеграл по отрезку $[a, b]$ от произведения сплайнов с номерами i, j . Условие минимума I_e по $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ дает систему линейных уравнений, решение записывается по правилу Крамера

$$\zeta_k = \zeta_k^{(min)} = -\frac{D_k}{D_\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$D_\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

определители D_1, D_2, D_3 получаются, как обычно, заменой столбца. Подставляя (12) в выражение (11) для I_e , получаем минимальное значение интегрального отклонения в виде отношения определителей:

$$I_e^{(min)} = \alpha_{00} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{0,k} \zeta_k = \frac{D_\delta}{D_\Delta},$$

$$D_\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{02} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{03} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Заметим, что для двух произвольных сплайнов $S^{(A)}$, $S^{(B)}$ вида (2) с коэффициентами $m_i^{(A)}$, $m_i^{(B)}$, $i = 0, \dots, N$, интерполирующих нулевые значения на сетке Δ , интеграл от произведения $S^{(A)}S^{(B)}$ по отрезку $[a, b]$ выражается суммой

$$\frac{1}{105} \sum_{i=0}^{N-1} h_i^3 \{m_i^{(A)} m_i^{(B)} + m_{i+1}^{(A)} m_{i+1}^{(B)} - \frac{3}{4}(m_i^{(A)} m_{i+1}^{(B)} + m_{i+1}^{(A)} m_i^{(B)})\},$$

эта запись служит основой аналитического вычисления в программе Maple коэффициентов α и затем определителей D_Δ и D_δ . Выясняется, однако, что не только для обычных кубических сплайнов оба этих определителя равны нулю, но попытка “раскрыть” неопределенность путем введения параметра в числителе и знаменателе (13) не меняет ситуации. Кубический нелокальный сплайн класса C^1 с единственным ненулевым в узле x_N параметром α , рациональный сплайн с произвольными параметрами p , q , отличными от нуля только на отрезке $[x_N, x_c]$ [3], сохраняют в качестве $S^{(N+1)}$ $D_\Delta = 0$. Возможно, сама конструкция кубического, даже обобщенного, сплайна оказывается слишком простой, “не вмещающей” информацию о производной за пределами отрезка $[a, b]$.

3. СГЛАЖИВАНИЕ ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ: СХЕМА ПРОГНОЗА ПО ОРДИНАТЕ

Корректный, хотя и несколько искусственный, вариант, прогноз только по ординате, возникает, если потребовать непрерывности третьей производной $S^{(N+1)}$ в узлах x_1, x_N [3]. Мы имеем одну варьируемую переменную $\zeta = y_c$, сплайн $S^{(N+1)}$ в этом случае представляется в виде линейной комбинации

$$S^{(N+1)} = \sum_{i=0}^N y_i F_i(x) + y_c F_{N+1}(x), \quad (14)$$

где $F_i(x)$, $i = 0, \dots, N, N+1$, — фундаментальные сплайны на сетке δ , удовлетворяющие условию нормализации (9), условиям интерполяции (10) и, опять-таки, условиям непрерывности третьей производной в узлах x_1, x_N .

Присвоим номера вспомогательным сплайнам, как указано в таблице.

Таблица 2

	$\sum_{i=0}^N y_i F_i(x) - S^{(N)}(x)$	$F_{N+1}(x)$
номер	0	1

Подставляя разложение (14) в выражение для I_e , записываем минимизируемую функцию переменной ζ ,

$$I_e = \alpha_{00} + 2\alpha_{01}\zeta + \alpha_{11}\zeta^2,$$

минимум по ζ

$$\min_{\zeta}(I_e) = \frac{\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}^2}{\alpha_{11}}$$

достигается в точке

$$\zeta^{(min)} = -\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{11}}$$

и всегда существует, $\alpha_{11} \neq 0$.

Обсудим краевые условия для сплайна с номером 0. В первую очередь следует договориться о выборе краевых условий для сплайна $S^{(N)}$, это вопрос существенный, если преследуется цель аналитически оценить зависимость прогнозируемой ординаты от характерного масштаба задачи, доминирующего шага “основной” сетки Δ . Пусть предпочтение отдано естественным, наиболее простым по смыслу условиям (5), где числовые значения z'_a, z'_b получаются, например, конечно-разностной аппроксимацией или как результат дополнительного “сглаживания”: $S^{(N)}$ должен в некотором смысле “наименее отличаться” от полинома второй или третьей степени [4]. Задача построения сплайна $S^{(N)}$ разрешима для любых вещественных z'_a, z'_b , так или иначе, будем пока считать z'_a, z'_b известными параметрами. Затем, без ограничения общности, можно выбрать сетку Δ равномерной с шагом h и записать $x_c - x_N = hh_c$, безразмерный множитель h_c исчисляется в долях h .

Можно утверждать, что коэффициенты $m_j^{(F_i)}$, $j = 0, \dots, N, N + 1$ каждого из фундаментальных сплайнов $F_i(x)$, $i = 0, \dots, N$ удовлетворяют системе N уравнений

$$\frac{1}{2}m_{j-1}^{(F_i)} + 2m_j^{(F_i)} + \frac{1}{2}m_{j+1}^{(F_i)} = \frac{3}{2h} \cdot (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (15)$$

для $j = N$

$$\begin{aligned} & \frac{h_c}{h_c + 1}m_{N-1}^{(F_i)} + 2m_N^{(F_i)} + \frac{1}{h_c + 1}m_{N+1}^{(F_i)} = \\ & = \frac{3}{h(h_c + 1)} \cdot \left(-\frac{\delta_{i,N}}{h_c} + h_c(\delta_{i,N} - \delta_{i,N-1}) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

а условия непрерывности 3-й производной в узлах x_1, x_N переписываются в виде [3]

$$m_0^{(F_i)} - m_2^{(F_i)} = \frac{2}{h}(2\delta_{i,1} - \delta_{i,0} - \delta_{i,2}), \quad (17)$$

$$-h_c^2 m_{N-1}^{(F_i)} + (1 - h_c^2)m_N^{(F_i)} + m_{N+1}^{(F_i)} = -\frac{2}{h} \cdot \left(\frac{\delta_{i,N}}{h_c} + h_c^2 (\delta_{i,N} - \delta_{i,N-1}) \right). \quad (18)$$

Первое из уравнений (15)

$$\frac{1}{2}m_0^{(F_i)} + 2m_1^{(F_i)} + \frac{1}{2}m_2^{(F_i)} = \frac{3}{2h}(\delta_{i,2} - \delta_{i,0})$$

совместно с (17) дает

$$m_0^{(F_i)} + 2m_1^{(F_i)} = \frac{1}{h} \left(2\delta_{i,1} - \frac{5}{2}\delta_{i,0} + \frac{1}{2}\delta_{i,2} \right), \quad (19)$$

а подставляя $m_{N+1}^{(F_i)}$ из (18) в (16), получаем

$$h_c m_{N-1}^{(F_i)} + (1 + h_c)m_N^{(F_i)} = -\frac{1}{hh_c(h_c + 1)}\delta_{i,N} + \frac{h_c(3 + 2h_c)}{h(h_c + 1)} \cdot (\delta_{i,N} - \delta_{i,N-1}). \quad (20)$$

Линейная комбинация $\sum_{i=0}^N y_i F_i(x)$, то есть для $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N-1$ функция

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N y_i \delta_{i,j} (1-t)^2 (1+2t) + \sum_{i=0}^N y_i \delta_{i,j+1} t^2 (3-2t) + \\ & + h \sum_{i=0}^N y_i m_j^{(F_i)} t (1-t)^2 - h \sum_{i=0}^N y_i m_{j+1}^{(F_i)} t^2 (1-t) = \\ & + y_j (1-t)^2 (1+2t) + y_{j+1} t^2 (3-2t) + h \sum_{i=0}^N y_i m_j^{(F_i)} t (1-t)^2 - h \sum_{i=0}^N y_i m_{j+1}^{(F_i)} t^2 (1-t) \end{aligned}$$

есть сплайн на сетке Δ со значениями интерполируемой функции y_j и коэффициентами $\sum_{i=0}^N y_i m_j^{(F_i)}$, а разность $\sum_{i=0}^N y_i F_i(x) - S^{(N)}$ есть сплайн на той же сетке с нулевыми

значениями интерполируемой функции и коэффициентами $m_j^{(0)} \equiv \sum_{i=0}^N y_i m_j^{(F_i)} - m_j^{(S^{(N)})}$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{1}{2}m_{j-1}^{(0)} + 2m_j^{(0)} + \frac{1}{2}m_{j+1}^{(0)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

и уравнениям, следующим из (19), (20),

$$m_0^{(0)} + m_0^{(S^{(N)})} + 2 \left(m_1^{(0)} + m_1^{(S^{(N)})} \right) = \frac{1}{h} \left(2y_1 - \frac{5}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_2 \right),$$

$$\begin{aligned} h_c \left(m_{N-1}^{(0)} + m_{N-1}^{(S^{(N)})} \right) + (1 + h_c) \left(m_N^{(0)} + m_N^{(S^{(N)})} \right) = \\ = -\frac{1}{hh_c(h_c + 1)} y_N + \frac{h_c(3 + 2h_c)}{h(h_c + 1)} \cdot (y_N - y_{N-1}), \end{aligned}$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} m_0^{(0)} + 2m_1^{(0)} + Z'_a = 0, \\ h_c m_{N-1}^{(0)} + (1 + h_c) \left(m_N^{(0)} + Z'_b \right) = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} Z'_a \equiv z'_a + 2m_1^{(S^{(N)})} - \frac{1}{h} \left(2y_1 - \frac{5}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_2 \right), \\ Z'_b \equiv \frac{h_c}{1 + h_c} m_{N-1}^{(S^{(N)})} + z'_b + \frac{1}{hh_c(1 + h_c)^2} y_N - \frac{h_c(3 + 2h_c)}{h(1 + h_c)^2} \cdot (y_N - y_{N-1}). \end{aligned}$$

4. НА ПУТИ К АЛГОРИТМУ, НЕЗАВИСИМОМУ ОТ ШАГА СЕТКИ: ОПТИМАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ “БАЗОВОГО” СПЛАЙНА

Обозначим через D_k , $k = 0, \dots, N$, разрывы третьей производной сплайна $S^{(N)}$ в узлах равномерной сетки Δ , $D_0, -D_N$ принимаются равными значениям третьей производной соответственно в точках x_0, x_N ,

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{6}{h^2} \left(m_1 + m_0 - 2\frac{y_1 - y_0}{h} \right), \\ D_j &= \frac{6}{h^2} \left(m_{j+1} + m_j - 2\frac{y_{j+1} - y_j}{h} \right) - \frac{6}{h^2} \left(m_j + m_{j-1} - 2\frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right), \\ &\quad j = 1, \dots, N - 1, \\ D_N &= -\frac{6}{h^2} \left(m_N + m_{N-1} - 2\frac{y_N - y_{N-1}}{h} \right), \end{aligned}$$

(для упрощения записи, пока речь идет только о сплайне $S^{(N)}$, не будем указывать на это в обозначениях коэффициентов m). Потребуем, чтобы сплайн $S^{(N)}$ доставлял минимум по переменным z'_a, z'_b сумме

$$\sum_{k=0}^N D_k^2, \tag{22}$$

иначе говоря, $S^{(N)}$ в смысле гладкости выбирается как наименее отличающийся от полинома третьей степени. Представим $S^{(N)}$ в виде [4]:

$$S^{(N)} = \sum_{i=0}^N y_i F_i(x) + z'_a F_a(x) + z'_b F_b(x), \tag{23}$$

где $F_i(x)$, $i = 0, \dots, N$, — фундаментальные сплайны на сетке Δ , удовлетворяющие условиям интерполяции

$$F_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N$$

и краевым условиям

$$F'_i(a) = F'_i(b) = 0,$$

появляются базисные функции $F_a(x)$, $F_b(x)$, подчиненные условиям

$$F_a(x_i) = F_b(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$F'_a(a) = F'_b(b) = 1, \quad F'_a(b) = F'_b(a) = 0.$$

Сплайновые конструкции $F_i(x)$, $F_a(x)$, $F_b(x)$ определяются только сеткой Δ , фундаментальные сплайны теперь нормализованы так:

$$\sum_{i=0}^N F_i(x) = 1, \quad x \in [a, b].$$

Из (23) следует выражение через разрывы базисных сплайнов

$$D_k(S^{(N)}) = \sum_{i=0}^N y_i D_k(F_i) + z'_a D_k(F_a) + z'_b D_k(F_b), \quad k = 0, \dots, N, \quad (24)$$

подставляя в (22), получаем квадратичную форму по z'_a, z'_b . Условие минимума формы дает систему линейных уравнений, из которой, в свою очередь, получаются “оптимальные” краевые значения первых производных как линейные функции ординат y_i . Решающую роль играет то, что разрывы в правой части (24) могут быть просто вычислены в аналитическом виде для равномерной сетки с шагом h , и отсюда можно начать отслеживание “движения” параметра h по алгоритму экстраполяции. Именно, если записать условную общую формулу для фундаментальных сплайнов $F_i(x)$, $i = 0, \dots, N$,

$$D_k(F_i) = \frac{\sigma}{h^3} \times \text{числитель} \times \frac{1}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N},$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1, N, \quad k = 0, \dots, N,$$

и аналогично для дополнительных базисных функций $F_a(x)$, $F_b(x)$,

$$D_k(F_a, F_b) = \frac{\sigma}{h^2} \times \text{числитель} \times \frac{1}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N}, \quad k = 0, \dots, N,$$

следующая таблица представляет первое резюме.

Таблица 3

индекс i	индекс k	множи- тель σ	числитель выражения для разрыва $D_k(F_i)$
0	0	6	$(-4 + 3\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (4 + 3\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
0	1	6	$(19 - 12\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (19 + 12\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
0	$2, \dots, N - 1$	$36\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^{N-k} + (-2 + \sqrt{3})^{N-k}$
0	N	$36\sqrt{3}$	1
1	0	6	$(19 - 12\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (19 + 12\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
1	1	96	$(-5 + 3\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (5 + 3\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
1	2	6	$(289 - 168\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (289 + 168\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
1	$3, \dots, N - 1$	$-144\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^{N-k} + (-2 + \sqrt{3})^{N-k}$
1	N	$-144\sqrt{3}$	1

Формулы для $F_i(x)$, $2 \leq i \leq N - 2$, запишем последовательно:

$$D_0(F_i) = \frac{36\sqrt{3}}{h^3} \frac{(-2 - \sqrt{3})^{-i+N} + (-2 + \sqrt{3})^{-i+N}}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N},$$

$$D_1(F_i) = \frac{6}{h^3} \left\{ -24\sqrt{3} \frac{(-2 - \sqrt{3})^{-i+N} + (-2 + \sqrt{3})^{-i+N}}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N} + \delta_{2,i} \right\},$$

$$D_k(F_i) = \frac{6}{h^3} \left\{ 6\sqrt{3} \left\{ \frac{(-2 - \sqrt{3})^{N-i-k} + (-2 + \sqrt{3})^{N-i+k}}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N} + \frac{(-2 - \sqrt{3})^{N-i+k} + (-2 + \sqrt{3})^{N-i-k}}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N} - \sum_{k_0=0}^k \left[(-2 - \sqrt{3})^{k-k_0} - (-2 + \sqrt{3})^{k-k_0} \right] \delta_{k_0,i} \right\} + \delta_{k+1,i} - 8\delta_{k,i} + \delta_{k-1,i} \right\},$$

$$k = 2, \dots, N - 1,$$

$$D_N(F_i) = \frac{36\sqrt{3}}{h^3} \frac{(-2 - \sqrt{3})^i + (-2 + \sqrt{3})^i}{(-2 - \sqrt{3})^N - (-2 + \sqrt{3})^N},$$

и удобно представить заключительное резюме снова как две таблицы:

Таблица 4

индекс i	индекс k	множи- тель σ	числитель выражения для разрыва $D_k(F_i)$
$N - 1$	0	$-144\sqrt{3}$	1
$N - 1$	$1, \dots, N - 3$	$-144\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^k + (-2 + \sqrt{3})^k$
$N - 1$	$N - 2$	6	$(289 - 168\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (289 + 168\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
$N - 1$	$N - 1$	96	$(-5 + 3\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (5 + 3\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
$N - 1$	N	6	$(19 - 12\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (19 + 12\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
N	0	$36\sqrt{3}$	1
N	$1, \dots, N - 2$	$36\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^k + (-2 + \sqrt{3})^k$
N	$N - 1$	6	$(19 - 12\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N - (19 + 12\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
N	N	6	$(-4 + 3\sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (4 + 3\sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$

Мы вычисляем коэффициенты линейного разложения

$$z'_a = \sum_{i=0}^N p_i y_i, \quad z'_b = \sum_{i=0}^N q_i y_i, \quad (25)$$

$$p_i = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=0}^N D_k(F_i) [\omega_{12} D_k(F_b) - \omega_{22} D_k(F_a)],$$

$$q_i = \frac{1}{\Omega} \sum_{k=0}^N D_k(F_i) [\omega_{12} D_k(F_a) - \omega_{11} D_k(F_b)], \quad i = 0, \dots, N,$$

упрощает ситуацию свойство $q_i = -p_{N-i}$. Элементы матрицы системы, обозначенные как ω_{ij} , зависят только от разрывов базисных функций $F_a(x)$, $F_b(x)$,

$$\omega_{11} = \sum_{k=0}^N \{D_k(F_a)\}^2, \quad \omega_{22} = \sum_{k=0}^N \{D_k(F_b)\}^2, \quad \omega_{12} = \sum_{k=0}^N D_k(F_a) D_k(F_b),$$

все это достаточно громоздкие выражения. Как промежуточный итог выделим зависимость от шага сетки,

$$\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{12} \sim 1/h^4, \quad \Omega = \text{Det}(\omega_{ij}) = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 \sim 1/h^8, \quad p_i, q_i \sim 1/h.$$

Таблица 5

	индекс k	множитель σ	числитель выражения для разрыва $D_k(F_a, F_b)$
F_a	0	6	$(-1 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (1 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$
F_a	$1, \dots, N-1$	$12\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^{N-k} + (-2 + \sqrt{3})^{N-k}$
F_a	N	$12\sqrt{3}$	1
F_b	0	$-12\sqrt{3}$	1
F_b	$1, \dots, N-1$	$-12\sqrt{3}$	$(-2 - \sqrt{3})^k + (-2 + \sqrt{3})^k$
F_b	N	-6	$(-1 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})^N + (1 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{3})^N$

Из (23) и (25) следует линейное разложение коэффициента $m_1^{(S^{(N)})}$:

$$\begin{aligned} m_1^{(S^{(N)})} &= \sum_{i=0}^N y_i m_1(F_i) + z'_a m_1(F_a) + z'_b m_1(F_b) = \\ &= \sum_{i=0}^N y_i \{m_1(F_i) + p_i m_1(F_a) + q_i m_1(F_b)\}, \end{aligned}$$

и аналогично для коэффициента $m_{N-1}^{(S^{(N)})}$:

$$m_{N-1}^{(S^{(N)})} = \sum_{i=0}^N y_i \{m_{N-1}(F_i) + p_i m_{N-1}(F_a) + q_i m_{N-1}(F_b)\},$$

это, в свою очередь, дает возможность линейного разложения по ординатам параметров Z'_a, Z'_b в соотношениях (21), замыкающих систему уравнений с трехдиагональной матрицей для первых производных сплайна с номером 0. Коэффициент α_{01} в разложении по ζ интегрального отклонения I_e есть линейная комбинация Z'_a, Z'_b ,

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \\ &= h^2 \frac{1}{1260h_c} \frac{1}{(5h_c - 3h_c\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 + 5h_c v^2 + 3v^2 h_c \sqrt{3} - v^2 \sqrt{3} - 2v^2)^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{9 + 5\sqrt{3}}{1 + h_c} \left(190N - 110N\sqrt{3} - 20Nh_c v^2 - 520Nh_c - 10Nv^2 + \right. \right. \\ & + 10Nv^2\sqrt{3} + 300Nh_c\sqrt{3} + 11 \left(5 - 3\sqrt{3} \right) (1 + h_c)(1 - v^2) \left. \right) vZ'_a + \\ & \left. + \left(132 - 77\sqrt{3} - 120Nv^2 + 132v^4 - 264v^2 + 77v^4\sqrt{3} \right) Z'_b \right\}, \\ & v = \left(-2 + \sqrt{3} \right)^N, \end{aligned}$$

коэффициент α_{11} не зависит от ординат,

$$\alpha_{11} = -h \frac{1}{1260h_c^2(1 + h_c)^2} \frac{132 - 77\sqrt{3} - 120Nv^2 + 132v^4 - 264v^2 + 77v^4\sqrt{3}}{(5h_c - 3h_c\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 + 5h_c v^2 + 3v^2 h_c \sqrt{3} - v^2 \sqrt{3} - 2v^2)^2},$$

в итоге искомая координата $\zeta^{(min)}$ точки минимума не зависит от шага сетки h .

Заметим по поводу полученного результата, что, например, регулярные метеорологические наблюдения, в сущности, не предполагают точного знания времени измерения. Не подвергается сомнению только, что промежуток времени между последовательными измерениями одинаков. В этой ситуации всегда ли допустимо предположение, что правдоподобный прогноз ближайшего следующего измерения будет зависеть от величины промежутка не явно, а только через значения ординат? Сколько-нибудь убедительного ответа на этот вопрос применительно к геофизике некоторого региона, скорее всего, не существует.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ: ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА И ПРОБЛЕМА СЕТИ

Описанный выше алгоритм исчерпывает чисто математическую сторону одного из простейших вариантов экстраполяции, но оставляет открытым вопрос, что за информацию, скрытую в распределении экспериментальных точек, мы стараемся “перенести” за пределы исходного отрезка $[a, b]$. Сколько-нибудь полный ответ, если подразумевать конкретные обстоятельства геофизических наблюдений, — за пределами данной заметки. Тем не менее, что касается практических приложений, если исходная последовательность данных с самого начала предполагает некоторую определенную, “шифрующую” функцию, аналитическое решение оказывается имеющим некоторое отношение к проблеме СЕТИ (Connection with Extraterrestrial Intelligence). Именно, пусть некто, назовем его Разум 1, имеет в своем распоряжении график некоторой, известной ему, функции и, измеряя на произвольно выбранном отрезке значения абсцисс и соответствующих ординат, составляет последовательный ряд пар чисел. Полученный ряд через расстояния, преодолимые только световым лучом,

передается Разуму 2, не знающему ничего о процессе конструирования данных и пребывающему в полнейшем неведении даже относительно того, существует ли хотя бы одна “физически разумная” функция, на график которой могли бы уложиться полученные им точки. Разум 1, в свою очередь, не знает ничего о месте получения сигнала и далеко не уверен, есть ли там разумные существа. Что, с его точки зрения, могло бы быть свидетельством в пользу этого? Ответный сигнал, содержащий последовательность абсцисс и ординат такую, что не просто укладывается на график выбранной им функции, но хотя бы приблизительно продолжает его после последнего посланного значения.

Итак, первое, в чем следует удостовериться, очевидно, это “первичный” аргумент в пользу качества алгоритма экстраполяции: если для известной зависимости $y = f(x)$ “псевдоэкспериментальные” значения $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, N$ заданы на фиксированном отрезке и число N увеличивается, прогнозируемые ординаты y_c должны приближаться к $f(x_c)$ для всех не слишком больших значений h_c . По крайней мере для равномерной сетки это действительно так, и кривые, построенные по отклонению функции, по отклонению производной, по комбинированному отклонению

$$\frac{I_e}{\min_{\zeta}(I_e)} + \frac{J_e^{(1)}}{\min_{\zeta}(J_e^{(1)})}$$

практически неразличимы (рис.1, сверху). Минимальные по $\zeta = y_c$ значения отклонений $J_e^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$, строго говоря, должны быть функциями h_c , но оказывается, что они не зависят от h_c ,

$$\begin{aligned} \min_{\zeta}(I_e) &= \\ &= -h^3 \frac{1}{3780} \frac{(60Nv - 11v^2\sqrt{3} + 11\sqrt{3})(60Nv + 11v^2\sqrt{3} - 11\sqrt{3})}{77\sqrt{3} - 132 + 120Nv^2 - 77v^4\sqrt{3} + 264v^2 - 132v^4} \{Z'_a\}^2, \\ \min_{\zeta}(J_e^{(1)}) &= -h \frac{1}{90} \times \\ &\times \frac{(-12 + 7\sqrt{3})(-3 + 3v^2 - 4\sqrt{3}Nv)(-3 + 3v^2 + 4\sqrt{3}Nv)}{(-291 + 168\sqrt{3} + 3v^4 - 56Nv^2\sqrt{3} + 96Nv^2 - 168v^2\sqrt{3} + 288v^2)} \{Z'_a\}^2, \\ v &= (-2 + \sqrt{3})^N, \end{aligned}$$

с ростом N и уменьшением шага h на фиксированном отрезке изменения минимальные значения резко падают (рис. 1, внизу).

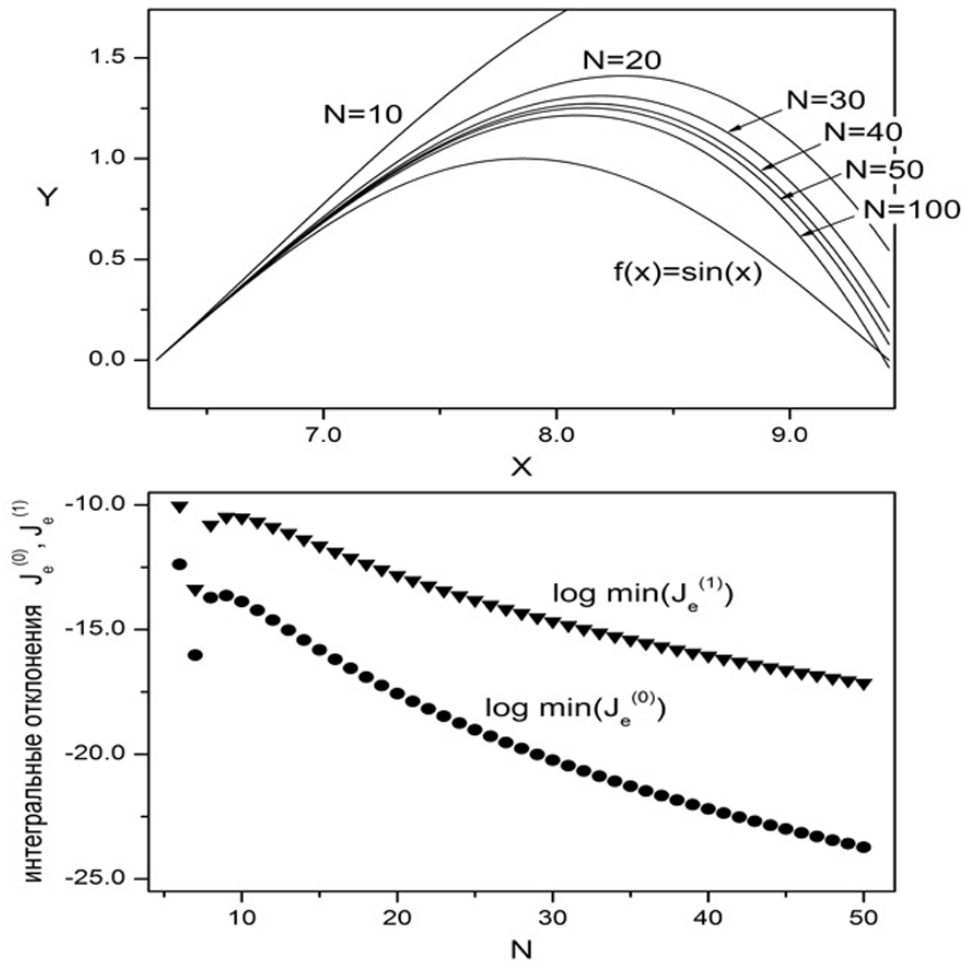


Рис. 1. На фиксированном отрезке $[0, 2\pi]$ в узлах равномерной сетки $x_i = hi, i = 0, \dots, N, h = 2\pi/N$, заданы значения ординат $y_i = \sin(x_i)$. Прогнозируется значение y_c в точке $x_c = 2\pi + hh_c$, для $N = 10, 20, \dots, 100$ при меняющемся $h_c, h_c^{min} \leq h_c \leq h_c^{max}, h_c^{min} = 0.01, h_c^{max} = \pi/h$. Кривые $y_c = y_c(x_c)$ с ростом N все точнее следуют за изгибом синуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мого, К. Предсказание землетрясений / Пер. с англ. Б. А. Борисова, под ред. Л. П. Винника. — М.: Мир, 1988. — 382 с.
MOGI, K. (1988) *Earthquake prediction*. Moscow: Mir.
2. Романовский, Ю. М., Степанова, Н. В., Чернавский, Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984. — 304 с.
ROMANOVSKY, Yu. M., STEPANOVA, N. V. and CHERNAVSKY, D. S. (1984) *Mathematical biophysics*. Moscow: Nauka.

3. Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
ZAV'YALOV, Yu. S., KVASOV, B. I. and MIROSHNICHENKO, V. L. (1980) *Methods of spline functions*. Moscow: Nauka.
4. Вершинин, В. В., Завьялов, Ю. С., Павлов, Н. Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. — Новосибирск: Наука, 1988. — 102 с.
VERSHININ, V. V., ZAV'YALOV, Yu. S. and PAVLOV, N. N. (1988) *Extremal properties of splines and the problem of smoothing*. Novosibirsk: Nauka.

Статья поступила в редакцию 14.11.2015

УДК: 519.688, 573.7

MSC2010: 57M15, 94C15

МЕТОД КОГНИТИВНОЙ ФОРМАЛИЗАЦИИ В АНАЛИЗЕ МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ КАСПИЯ¹

© А. Ю. Переварюха

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

14-линия Васильевского о., 39, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 199178, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: *madelf@pisem.net*

GRAPH FORMALIZATION AND MULTIFACTOR ANALYSIS OF ENVIRONMENTAL
PROBLEMS ON EXAMPLE OF THE CASPIAN SEA.

Perevaryukha A. Yu.

Abstract. The complex interactions between the processes of disturbed ecosystems are often difficult to predict. The classical dynamic model may include a limited number of factors, which act on the population balance just directly. In the common case of the transition to a chaotic regime of discrete models are limited in predictive capabilities. Graph scheme allows us to structure the information on the relationship between the factors in the subject field of ecology terms. To continue the previous studies, we used the expanded view of the graph model in the form of cognitive signed digraph. It was formalized information about the functioning of the biotic components of the ecosystem of the Caspian Sea when the external influences. These effects are set with four types of graph arcs to influence the situation mid 1980's. In those years, the optimal relied share $h = 3/5$ catch sturgeon spawning stock and conducted a large-scale release of hatchery fish in the amount of millions young fish. On the basis of comparison with the collapse of cod stocks in Canada is justified that the existing methods for determining the commercial forecasts optimal exploitation strategy in fact lead to the depletion of biological resources. Comparative analysis allows to discuss a real alternative measures to prevent the degradation of biological resources. As the experience of similar cases, the collapse of the Atlantic cod and Pacific herring Canada, control measuring withdrawal of fish to explore and model calculations known models are ineffective. Indicators of the real fishing mortality is systematically reduced, which acknowledged by R. Myers, and experts can not predict the imminent collapse of stocks. Conclusions of fisheries management seem paradoxical. Is promising variant a conscious rejection of the evaluation quantities the fishing stock. Conducting accounting trawl Caspian sturgeon populations filled the minds of millions of fish and the ephemeral whetted the appetites of fishers. Control over the observance of fishing rules is difficult, therefore the catches are systematically underestimated. In reports erroneous data about the actual loss of fish, in turn, affects the forecasting recovery of fish stocks.

Keywords: *Cognitive graphs, ecological processes, weakly formalized area of knowledge structural and dynamic simulation.*

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 14-07-00066.

ВВЕДЕНИЕ

Динамические модели в виде непрерывно-дискретных систем оказываются перспективным инструментом для анализа сценариев управления биоресурсами при различных критериях принятия решений об изменении стратегии эксплуатации. В предыдущей работе [1] мы рассмотрели сценарий деградации при незначительном систематическом перелове запасов крупных осетровых рыб, не имеющих во взрослом состоянии естественных врагов. Выбранный подход с использованием специального гибридного представления времени по сложности реализации существенно превосходит все ранее известные математические модели промысловой ихтиологии. Требования к навыкам программирования в вычислительной среде являются ограничением для его широкого практического применения специалистами в экологии. Очевидно, что предикативно переопределяемые системы дифференциальных уравнений не могут включить в рассмотрения все важные действующие в экосистеме факторы. Интерес в случае деградации рыбного промысла Каспия представляет завышенные ожидания прогнозов от организации масштабной интродукции молоди рыб.

Увеличение числа уравнений в системе осложнит уже достаточно трудоемкую параметрическую настройку и анализ бифуркационных диаграмм. Дополнительно нужно понимать, что природные процессы действуют в разном временном масштабе, когда мы размаривали регуляцию убыли численности в раннем онтогенезе рыб на кратких кадрах гибридного времени. Необходимы методы работы с качественной информацией, позволяющие при этом получать некоторые динамические характеристики. Многие понятия в экологии рыб выражаются в неизмеримых величинах, как оценка благоприятности условий для размножения. Даже гидрологические показатели речного стока приводятся чаще по разделению: маловодный, средневодный, многоводный. В слабоформализованных областях возрастает роль мягких вычислений на основе методов дискретной математики, как структурно-динамическое моделирование на основе когнитивных графов. Данные методы должны, прежде всего, раздвигать стереотипы, которыми оперируют при оценке влияний, обычно на основе коэффициентов корреляции. Шаблонный подход предполагает только прямые зависимости, например, увеличение площади акватории \rightarrow "улучшение нагула" и игнорирует скрытые контуры обратных связей. Вывод оригинальных гипотез на основе анализа орграфов должен служить для обоснования дальнейшего развития целенаправленных модельных сценариев.

1. СТРУКТУРНЫЕ СВЯЗИ ПРОБЛЕМЫ СОХРАНЕНИЯ ОСЕТРОВЫХ

В 1975 г. была принята стратегия максимизации ежегодного вылова (до 30 тыс. т.) за счет выпуска (≈ 90 млн. шт.) молоди осетровых как основного источника формирования запасов, способного не только компенсировать, но и превзойти потери в естественном воспроизводстве при гидростроительстве. В результате строительства рыбоводных предприятий для искусственного выращивания молоди к поставленной цели резкого увеличения масштабов выпуска удалось приблизиться. В начале XX в. уловы осетровых достигли исторического максимума порядка 40 тыс.т., но достаточно быстро и значительно снизились к 1914 г. В 1977 г. уловы осетровых вновь вышли локальному максимуму в размере 27,3 тыс. т., однако затем начали уменьшаться [2]. Далее произошло стремительное падение, которое в английской литературе называют астрономическим термином “коллапс”.

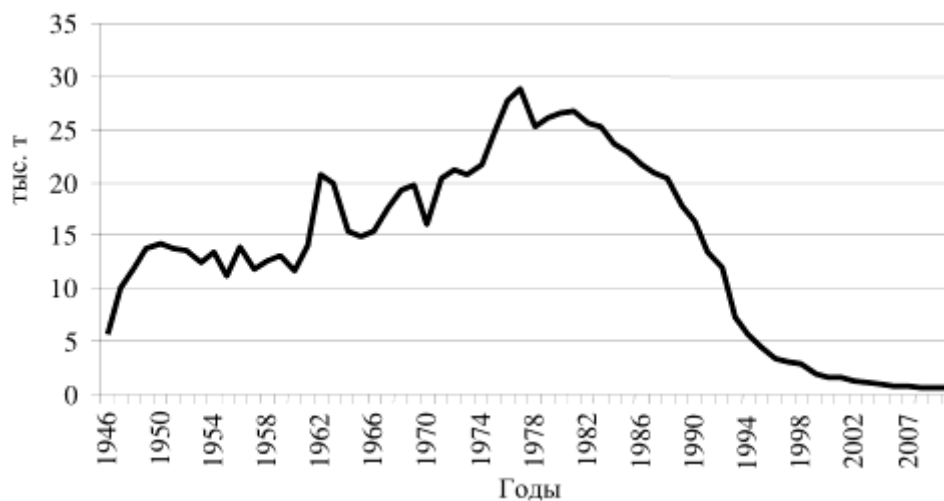


Рис. 1. Динамика коллапса трех видов осетровых Каспия.

Коллапс развивался немонотонно, первоначальное падение уловов было приостановлено, эксперты не видели близкой опасности. Для каспийской севрюги даже наблюдался незначительный рост, но скоро последовало второе еще более резкое падение. Ни одна из известных моделей воспроизводства не может показать такое временное повышение, тем более дробно-линейная $f(S) = \alpha S / (\beta + S)$ функция пополнения.

Необратимая деградация признается только в современных оценках, до самого последнего времени продолжали рассчитывать допустимые уловы для популяции белуги, несколько лет уже не встречающейся в неводных уловах. Три популяции осетровых Каспия попали в Красную книгу России только в 2010. Сейчас промышленный

лов осетровых запрещен, что является крайне запоздалым решением. Отдельные заявления о нелегальном промысле, многократно превышавшим официальный вылов, выглядят сомнительно. Когда в легальном кошельковом неводе отсутствует улов, то почему рыбы должно быть больше на браконьерских крючках. Эффективность облова створа реки неводом выше и браконьерам нужно содержать всю индустрию переработки и транспортировки.

Неоднократно проводилась переоценка реальной величины промыслового возврата от искусственного воспроизводства, и получение достоверной оценки представляет непреодолимую сложность. Подтверждено, что изначально заложенный в планах 1970-х гг. коэффициент промыслового возврата заводской молоди в размере 3 % оказался завышенным ожиданием. В 1989 г. определялись для осетра — 1,2 %, севрюги — 1 %, белуги — 0,1 %. В 1998 г. для осетра — 0,7 %, севрюги — 0,83 %, белуги — 0,07 %. Оценка динамики снижения реальной выживаемости на ранних этапах жизненного цикла рыб необходима при планировании мер по сохранению не восстанавливающихся после запрета промысла популяций [3]. Отдельную задачу представляет анализ причин невыполнения прогнозов 70-х гг. в сопоставлении с динамикой экосистемных изменений, на фоне которых определялась величина допустимого вылова.

Гидростроительство повлекло перемены в трофической цепи Нижней Волги, изменив соотношение относительного обилия автохтонных рыб в сообществе. По естественным причинам менялась гидрологическая обстановка региона. Влияние водности половодья противоречиво оценивается специалистами. При отмеченных противоречиях водность считалась ихтиологами ведущим фактором в формировании промысловых запасов и закладывалась при расчетах промысловых прогнозов. В маловодные годы коэффициент промысловой смертности севрюги h достигал 0,89, тогда как рассчитанная по методу Малкина допустимая убыль не превышает 0,2 ($h = 0,186$) [4]. Оптимальным в 1982 г. полагали изъятие $h = 3/5$ от запаса [5]. Тихоокеанская сельдь в те годы не выдерживала $h = 1/4$. В 1992 был остановлен промысел трески на Севере Канады и до сих пор не восстановлен. Малочисленность поколений за маловодные годы объясняется чрезмерной эффективностью промысла идущих на нерест рыб. Коллизии факторов часто встречаются в естествознании: в многоводные годы площадь пригодных нерестилищ больше, но и скорость течения воды увеличивается, уносящей в потоке недостаточно сформированную молодь. Выход из коллизий возможен при сравнительном сопоставлении схожих по условиям ситуаций, чем редко пользуются ихтиологи. Маловодный период Волги 1930-х гг. не привел к критическим последствиям для запасов осетровых, в 1950–60 гг. наблюдался умеренный рост уловов, что говорит о превалирующем факторе промысловой

смертности нерестовой части запаса, но не объясняет переоценку возможностей искусственного воспроизводства.

Период регрессии сменился в 1978 г. быстрым и неожиданным для климатологов повышением уровня Каспийского моря. Для бессточного озера площадью более 370 тыс. кв. км. исторически характерны колебания уровня, которые сложно предсказывать. Амплитуда за период наблюдений составляет 3,8 м. Подъем моря рассматривался экспертами как благоприятный фактор, так как прогнозировалось увеличение площади акваторий Северного Каспия, пригодных для нагула молоди рыб и улучшение трофической обстановки [6]. В прогнозах не брался в расчет ряд значимых факторов, снижавших процент особей популяции достигающей нерестовой стадии зрелости. Обратим внимание, что на фоне деградации осетровых уловы их пищевых конкурентов аналогично уменьшались, что не укладывается в выводы из системы уравнений, описывающих динамику конкурирующих за один ресурс двух ограниченных популяций.

Из исторических сведений о промысле известно, что в XIX веке 3 популяции осетровых были более многочисленны, чем в начале регулярного тралового учета в 1968 г. Особенность ареала обитания — в том, что в условиях солоноватоводного мелководья сформировалась автохтонная донная фауна, где барьер солености ограничил распространение пресноводных организмов. В период регрессии эндемичные виды моллюсков вытеснялись вселенцами. Повышение уровня сопровождалось опреснением акватории. Изменения условий сказались на ареале распространения искусственно вселенных в 60-х гг. видов моллюсков средиземноморского фаунистического комплекса, ставших важным кормовым ресурсом рыб. Эволюционно сложившаяся репродуктивная стратегия осетровых рыб, выразившаяся в существовании сезонных рас и длинных миграционных путях, позволяла поддерживать высокую биомассу рыб при относительно небольшой кормовой биомассе.

2. МЕТОД КОГНИТИВНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описание принципов функционирования процессов в экосистемах относится к области системного анализа слабоформализованных проблем. Взаимовлияние между конечным множеством факторов приходится исследовать на уровне описания качественных изменений, так как они отражаются в литературе авторами в сравнительно-оценочных формулировках. Обсуждаемая ихтиологами относительная “благоприятность условий” или “напряженность пищевых взаимоотношений” совсем неестественны для формализации в системах уравнений. Для адаптивного трансформирования оценок и рассуждений в структуры данных в областях с качественным выражением

взаимодействий развиваются методы построения и анализа орграфов с взвешенными дугами в специализированных информационных средах, названный “когнитивный подход” в теории управления [7].

Когнитивный орграф будем рассматривать как инструмент для формирования наиболее полноценных гипотез о функционировании популяционного процесса при включении определенных внешних воздействий. Применение концептуальной структуризации может изменить сложившиеся стереотипы, которыми оперируют в предметной области и способствовать развитию гибких логико-вероятностных подходов к прогнозированию риска истощения эксплуатируемых биоресурсов.

Структуризация предполагает вариативную формализацию рассматриваемой гипотезы о функционировании системы в виде знакового орграфа, вершинам которого соответствует выделенное множество факторов, а ребрам — знаки “-” и “+”.

Ребрам можно сопоставить веса, если определить универсальную шкалу взаимодействий для всей рассматриваемой ситуации $\langle -u_{max}, \dots, u_0, \dots, +u_{max} \rangle$. При построении экологической графовой модели необходимо чрезвычайно подробно изучить причинно-следственный комплекс связей. В отличие от моделей в виде уравнений, вычисляющих по фиксированным правилам соотношения величин, орграф есть наглядный результат субъективного аналитического сопоставления и обсуждения.

Для экологических задач перспективны модификации методологии применения когнитивных графов, позволяющих на качественном уровне формализовать ситуацию в виде множества концептов и направлений передачи воздействия по различным путям. Формализм взвешенных знаковых графов является расширением представления орграфа $G(Y, E)$, которое дополняется множеством параметров вершин V , где каждой вершине y_i ставится в соответствие безразмерный параметр-концепт $v_i \in V$ и функционалом преобразования дуг $F(V \times V, E)$, который определяет в соответствие дуге орграфа знак (или вес).

Функционал преобразования в общем виде определим следующим образом:

$$F(v_i, v_j, e_{ij}) = \begin{cases} +u_{ij}, & \text{если при увеличении } v_i \text{ следует возрастание } v_j; \\ -u_{ij}, & \text{если при увеличении } v_i \text{ следует уменьшение } v_j, \end{cases} \quad (1)$$

где u_{ij} может принимать значения из конечного множества B при рассмотрении только знака влияния между вершинами $B = \{-1, 1\}$.

Ф. Робертс предложил рассматривать последовательные изменения заданных изначально значений параметров соответствующих вершинам как импульсные процессы в дискретном времени [8]. Импульс $p_j(n)$ определим через изменение значения

параметра вершины v_j в момент $n > 0$:

$$p_j(n) = v_j(n) - v_j(n - 1).$$

После запуска импульсного процесса значение параметра вершины будет изменяться:

$$v_i(n + 1) = v_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^N F(v_i, v_j, e_{ij}) p_j(n). \quad (2)$$

Очевидно, что какие-то актуальные выводы и значимые гипотезы можно строить, рассматривая импульсные процессы вида (4.2) в орграфах с замкнутыми путями. Интерес представляет не абсолютное условное значение в вершинах, а сравнение их изменений $\Delta_n v_i$ относительно начального $v_i(0)$ за фиксированное число шагов.

3. КОГНИТИВНЫЙ ОРГРАФ СТРУКТУРЫ “КАСПИЙСКОЙ СИТУАЦИИ”

Оформим структуризацию обобщенных из различных и часто противоречивых источников сведений о характере и степени выраженности взаимодействия факторов, влияющих на благополучие волжских популяций осетровых рыб в форме когнитивного орграфа. Ретроспективный анализ промысловой статистики и разнообразных экспертных мнений позволил составить множество основных концептов, в том числе пригодных для запуска импульсов из вершин. Эмпирическая рекомендация для размеров графа не менее десяти, но не более пятнадцати вершин. В качестве концептов, определяющих процессы в экосистеме Каспия и влияющих на динамику запасов осетровых рыб, определим следующие 12 обсуждавшихся специалистами природных и антропогенных факторов и поставим их в соответствие вершинам когнитивного орграфа $G(Y, E, V)$:

v_1 — состояние нерестовой части стада осетровых рыб; v_2 — годовое пополнение молоди; v_3 — естественная (компенсационная) убыль поколения; v_4 — благоприятность условий полового созревания; v_5 — удельная эффективность естественного воспроизводства; v_6 — масштабы искусственного выпуска; v_7 — уровень промысловой эксплуатации рыбных биоресурсов; v_8 — биомасса доминирующего вида кормового бентоса; v_9 — обеспеченность кислородом кладок икры на нерестилище; v_{10} — трансгрессия уровня Каспийского моря; v_{11} — численность основных естественных врагов молоди; v_{12} — доступная протяженность путей нерестовой миграции.

Основной массив изучаемой ретроспективной информации за 1970–80 гг. сохранился в ежегодниках материалов отчетных сессий Центрального научно-исследовательского института осетрового хозяйства и сборниках тематических статей о перспективах осетрового хозяйства. Прежде всего, обращалось внимание на

вариативность прогнозов хозяйственного использования популяций и изменение учитываемых их составителями факторов. Сопоставлялись доступные данные по уловам двух видов осетровых; пропуску производителей на нерестилища и скату молоди волжской севрюги *Acipenser stellatus* [9], для которой сохранились основные естественные нерестилища; подсчетам численности по результатам морских траловых съемок. Оценки общей численности осетровых воспринимались только как косвенная информация из-за известных сомнений в достоверности расчетов, полученных путем экстраполяции данных с квадратов лова и во многом зависящих от определения коэффициента уловистости применявшегося трала.

В результате сопоставления данных наблюдений, анализа литературы об историческом развитии экосистемы и формализации ряда экспертных мнений удалось сформировать когнитивный орграф, включающий соответствующих концептам 12 вершин и множество направленных дуг, отражающих знак и условную *выраженность* силы влияния (рис. 1). В функционале преобразования будет задано четыре вида передачи влияния $B = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$, по два для дуги “+” (на рис. 1 — пунктирная дуга) и “-” (показана сплошной дугой).

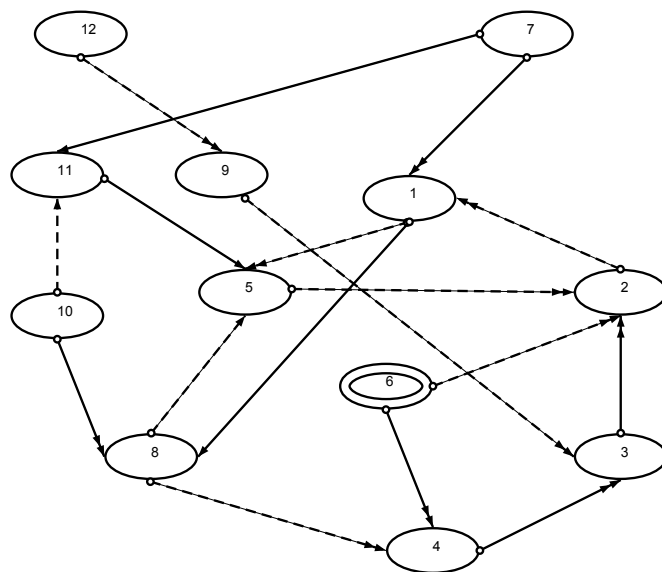


Рис. 2. Когнитивный орграф для экосистемы Каспия.

Разумно предположить, что представленное дугами качественное влияние разнится не только по своей природе как “антропогенное” или “естественное”, но и по выраженности. Имеет смысл подобно физикам охарактеризовать в экологии условно “сильное” и “слабое” взаимодействие. Негативное действие промысла и естественных сдвигов уровня моря на биоресурсы различно, потому влияние $F(v_{10}, v_{11})$ определено

как “слабое” с $u = -0.5$, на рис. 1 с одним наконечником стрелки у дуги, сильное — с двумя наконечниками. Матрица весов когнитивного орграфа для проблематики истощения биоресурсов Каспия 12×12 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & +1 & \infty & \infty & -0.5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ +1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & -1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & +1 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & +1 & \infty & -1 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ -1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & +1 & +0.5 & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & +1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -1 & \infty & 0 & +0.5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & -0.5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & +1 & \infty & \infty & 0 \end{vmatrix}$$

Вершины в графовой модели разделяются на зависимые и свободные от влияния других концептов, как величина промыслового изъятия и колебания уровня моря. Объем искусственного воспроизводства мы должны определить свободным концептом, т. к. дуга $\{v_1, v_6\}$ сделала бы импульсный процесс банальным, но масштаб выпуска неминуемо будет сокращаться из-за нехватки пригодных для рыбоводных целей производителей при малочисленности нерестовой части популяции, т. е. уже после деградации. Импульсные процессы для графа целесообразно запускать из антропогенно обусловленных свободных концептов v_6 (на рисунке выделена как стартовая сдвоенным очертанием) или v_7 . В сценарии рис. 1 мы считаем, что интенсификация промысла v_7 влияет и на осетровых, и на популяции их антагонистов v_{11} . Два контура орграфа, имеющие общую вершину, будем называть конкурирующими. Преимущества компьютерной среды позволяют реализовать сравнительный перебор сценариев расположения дуг и отбросить заведомо не согласующиеся. Программная реализация орграфа не представляет научной новизны и не потребует разработки особых алгоритмов, может строиться на основе стандартных средств объектно-ориентированного программирования. Удобна техническая реализация с использованием любой инструментальной среды, поддерживающей дискретно-событийное моделирование, как наглядных диаграмм statechart в *AnyLogic*.

На основе оценки несинхронности пульсаций значений v_4, v_2 , входящих в конкурирующие контуры орграфа, сформирована гипотеза, что присутствует еще один фактор, влияющий на скорость убыли численности поколения, — темп роста молодежи.

Должно существовать некоторое естественное ограничение, пороговое значение веса, после которого действие неблагоприятных факторов, увеличивающих смертность молоди, должно резко уменьшаться. Характер регулярного колебания значения v_3 , синхронизированного с v_6 , предсказывает, что темп роста в свою очередь должен обратно зависеть от пищевых потребностей при увеличении плотности партий молоди.

Второе значимое предположение заключается в том, что существует предел процентного приращении численности нерестового запаса, который можно получить в предположении о неограниченном возрастании объемов выпуска. Достаточно долго обсуждался выбор оптимального веса для искусственно выпускаемой молоди [10], который при минимизации затрат на выращивание обеспечивал бы желаемый промысловый возврат. Был установлен средний вес — 3 г., но выдвигаются аргументы по его наращиванию [11], потому как результаты промыслового возврата оказались скромнее ожидаемых. Навеска выпускаемой молоди является параметром, которым можно адаптировать технологию искусственного воспроизводства. Одна из задач наших дальнейших работ состоит в обосновании отказа от единой стандартной навески и выпуске разновозрастных партий при смешанном искусственно/естественном воспроизводстве. Моделируемый сценарий должен соответствовать прежнему естественному состоянию, когда в море мигрировала уже подростная молодь с верховий от “озимых” и мелкая молодь от “яровых” рыб.

Взаимосвязь скорости роста и убыли численности можно отразить системой уравнений, но только если формализовать некоторые особенности развития, связанные с метаморфозами в раннем онтогенезе рыб. Для осетровых рыб значительное время занимает период эндогенного и смешанного питания за счет относительно крупного желточного мешка. Динамику скорости роста рыб в раннем онтогенезе трудно описать каким-либо известным балансовым соотношением анаболизма и катаболизма, например уравнением Л. фон Бергаланфи. Более значимая проблема в реальном соотношении скорости роста с плотностью скопления особей. Как практически обо всех аспектах рассмотренной ситуации, по влиянию плотности на развитие приводились различно трактуемые результаты наблюдений.

Вопрос о влиянии скученности поколения $\hat{N}(t)$ на прирост молоди w оказался не однозначен по имеющимся литературным данным. В первом приближении давление конкуренции при повышении плотности оценивалось нами как обратная дробно-степенная связь: $w(t) \sim N^{-k}(t)$, $0.5 < k < 1$. Различные эксперименты говорят о непропорциональной и более того — о немонотонной связи $w(t) \iff \hat{N}(t)$ распределения навески с плотностью посадки молоди. Результаты [12] о сдвиге влево максимума весового распределения молоди при разреженной плотности казались

нелогичны, но могут объясняться из коллективных поведенческих реакций. Мы можем математически согласовать их с альтернативными данными, показавшими, что при снижении плотности посадки в прудах при высоком уровне выживаемости молодь осетровых имеет минимальные коэффициенты вариации массы. Для нарушения симметрии плотностно–размерного взаимодействия воспользуемся сложной зависимостью с двумя экстремумами $g(N)$ для давления численности молоди в водоеме на темпы ее развития (рис. 3), $g(0) = 0$. Минимум будет соответствовать оптимальным значениям скопления молоди.

$$g(N) = \frac{N}{z \exp(-bN(Pe^{-\rho N} + 1))} \quad (3)$$

Из данной зависимости можно получить отклонение, которое оказывает плотность

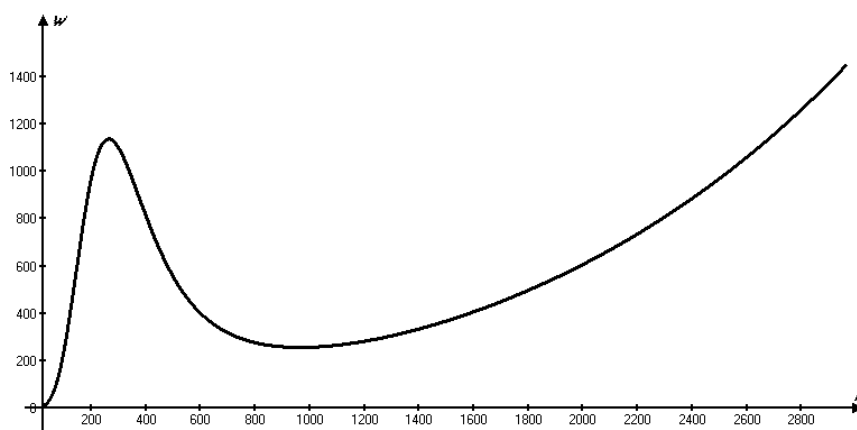


Рис. 3. Нелинейная зависимость плотности и темпов роста.

на темпы свободного роста. Обычные темпы можно задать из какого-то известного феноменологического уравнения роста гидробионтов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена когнитивная структуризация на основе знакового графа, оказавшаяся полезной при осмыслении принципов критических взаимодействий для моделировавшейся нами в предыдущей работе экологической ситуации. Получены выводы о роли завышенного ожидания оценок эффективности выпуска искусственно выращенной молоди в промысловых прогнозах. Более того, при имеющихся способах учета численности запаса и расчета реальной доли промыслового изъятия оказывается практически не реалистично говорить об оптимальном промысле, который бы изымал весь излишний прирост численности.

Сравнительный анализ позволяет обсуждать альтернативные возможные меры по недопущению деградации биоресурсов. Как показал опыт аналогичных случаев коллапса атлантической трески и тихоокеанской сельди Канады, учетные съемки промысловой разведки и модельные расчеты известными моделями оказываются малоэффективны. Показатели реальной промысловой смертности систематически занижаются, что признал Р. Майерс [13], и специалисты не могут предвидеть скорый коллапс запасов. Выводы об управлении промыслом кажутся парадоксальными, но напрашивается вариант осознанного отказа от проведения оценок величины промыслового запаса. Проведение тралового учета популяций осетровых Каспия наполнило сознание миллионами эфемерных рыб и разожгло аппетиты промысловиков. На фоне ряда масштабных остановок обильного ранее промысла даже в Норвегии и Канаде разумнее прекратить определять общие допустимые уловы ОДУ или биологически допустимые лимиты БДЛ для величины изъятия. Отечественная практика показывает, что контроль за соблюдением правил труден, потому уловы занижаются. Занижение реальной убыли в свою очередь влияет на прогнозирование восстановления запасов. В случае осетровых квоты могут выбирать только за счет икрыных самок, что нанесет большой вред воспроизводству.

Возможно реализовать более гибкий подход к управлению, чем основанная на скользких расчетах теория максимизации устойчивого вылова (Maximum sustainable yield). Продавать на аукционе ограниченное количество лицензий на промысел в ограниченное сезонное время, но со строго фиксированными характеристиками орудий лова и промысловых судов. Квоты по массе улова заранее не вводить, однако если по учетам улова будет показано годовое снижение на 0.12, то на следующий сезон лицензию не продлевать. Тогда если схема оправдывает себя, по среднесрочной статистике мы сможем более уверенно определить искомую величину оптимального неистощительного изъятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переварюха, А. Ю. Разработка вычислительных моделей воспроизводства рыб для сценарного исследования // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1. — С. 93–103.
PEREVARYUKHA, A. (2014) The development of computational models for fish reproduction in scenario investigations. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 1. p. 93–103.
2. Ходоревская, Р. П. Поведение, миграции, распределение и запасы осетровых рыб Волго-Каспийского бассейна / Р. П. Ходоревская, Г. И. Рубан, Д. С. Павлов . — М.: КМК, 2015. — 242 с.
KHODOREVSKAYA, R., RUBAN, G., PAVLOV, D. (2007) *Behavior, migration, distribution and stocks of sturgeon of the Volga-Caspian Basin*. Moscow: KMK.

3. Рубан, Г. И., Ходоревская, Р. П., Шатуновский, М. И. Динамика популяций белуги, русского осетра и севрюги в условиях запрета их коммерческого лова в Волго–Каспийском бассейне // Вопросы рыболовства. — 2015. — №. 3. — С. 269–278.
RUBAN, G., KHODOREVSKAYA, R., SHATUNOVSKII, M. (2015) The dynamics of populations of beluga, russian sturgeon and starred sturgeon in the conditions of the prohibition of commercial fishing in the Volga–Caspian basin. *Problems of Fisheries*. 3. p. 269–278.
4. Сафаралиев, И. А. Обоснование оптимальной эксплуатации популяции севрюги (*Acipenser stellatus* Pallas, 1771) в Волго–Каспийском рыбохозяйственном районе с использованием модели Бивертон–Холта // Вестник Астраханского государственного технического университета. — 2013. — №. 3. — С. 67–77.
SAFARALIEV, I. (2013) Basis for optimized exploitation of sivruga population (*Acipenser stellatus* Pallas, 1771) in Volgo-Caspian fisheries area using Beverton–Holt model. *Vestnik ASTU*. 3. p. 67–77.
5. Сливка, А. П., Павлов, А. В. Биологические основы изменения режима промысла осетровых (*Acipenseridae*) в дельте Волги // Вопросы ихтиологии. — 1982. — №. 5. — С. 738–745.
SLIVKA, A., PAVLOV, A. (1982) Biological basis of regime change fishing of sturgeon (*Acipenseridae*) in the Volga delta. *Journal of Ichthyology*. 5. p. 738–745.
6. Сапожников, В. В. Изменение экосистемы Каспийского моря за последние 70 лет // Рыбное хозяйство. — 2007. — №. 6. — С. 39–43.
SAPOZHNIKOV, V. (2007) Changing in the Caspian Sea ecosystem over the past 70 years. *Fisheries*. 6. p. 39–43.
7. Авдеева, З. К., Коврига, С. В. Когнитивный подход в управлении // Проблемы управления. — 2007. — №. 3. — С. 2–8.
AVDEEVA, Z., KOVRIGA, S. (2007) The cognitive approach in the control science. *Problems of control*. 3. p. 2–8.
8. RODERTS, F. (1976) *Discrete mathematical models, with applications to social, biological, and environmental problems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
9. Вещев, П. В., Новикова, А. С. Воспроизводство севрюги *Asipenser stellatus* в нижнем течении Волги // Вопросы ихтиологии. — 1987. — №. 5. — С. 801–806.
VESHCHEV, P., NOVIKOVA, A. (1987) Reproduction of stellate sturgeon it *Asipenser stellatus* in the lower reaches of the Volga. *Journal of Ichthyology*. 5. p. 801–806.
10. Переварюха, Т. Ю., Гераскин, П. П., Переварюха, Ю. Н., Мельник, И. В. Краткая история формирования, современное состояние и предложения по сохранению биоразнообразия осетровых рыб Каспийского моря // Естественные науки. — 2010. — №. 2. — С. 60–69.
PEREVARYUKHA, T., GERASKIN, P., PEREVARYUKHA, Yu., MELNIK, I. (2010) A brief history of the formation, the current state and proposals for the conservation of biodiversity of the Caspian Sea sturgeon fish. *The Natural sciences*. 2. p. 60–69.

11. Кокоза, А. А., Дубов, В. Е. О стандарте заводской молоди и путях повышения эффективности искусственного воспроизводства осетровых рыб // Вопросы рыболовства. — 2011. — №. 1. — С. 121–126.
KOKOZA, A. DUBOV, V. (2011) On the standard of hatchery fish and ways to improve the efficiency of artificial reproduction of sturgeon. *The Problems of Fisheries*. 1. p. 121–126.
12. RYABOVA, G., AFANASEV, K., MOSKALEICHIK, F., RUBTSOVA, G., KLIMONOV, V., VYSHKVRTSEV, D. (2006) Variation in morphometric and genetic characteristics of stellate sturgeon juveniles raised at different densities. *The Problems of Fisheries*. 2. p. 182–191.
13. MYERS, R. (1997) Why do Fish Stocks Collapse? The Example of Cod in Atlantic Canada. *Ecological Applications*. 7. p. 96–106.

Статья поступила в редакцию 05.12.2015

УДК: 517.957

MSC2010: 35R20

ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В КАНОНИЧЕСКОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

© С. П. Плышевская

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: splyshevskaya@mail.ru

**DYNAMICS OF STATIONARY STRUCTURES IN THE CANONICAL PARABOLIC
PROBLEM.**

Plyshevskaya S. P.

Abstract. This work researches the dynamics of stationary structures of equation of reaction-diffusion type with the diffusion coefficient $\mu \rightarrow 0$ in the interval $[0, \pi]$ and Neumann conditions. The stationary solution $\varphi_\infty = 0$ of this equation is unstable, and $\varphi_0 = 1$, $\widehat{\varphi}_0 = -1$ – are stable. When $(k+1)^{-2} < \mu < k^{-2}$, $k = 1, 2, \dots$, many stationary solutions contain exactly k -pairs of spatially inhomogeneous solutions φ_i , $\widehat{\varphi}_i = -\varphi_i$, $1 \leq i \leq k$. The dimension of the unstable manifolds φ_i , $\widehat{\varphi}_i$ is equal to i . The function φ_i approaches, as $\mu \rightarrow 0$, the step function with the values of $1, -1$ and the breakpoints – zeros φ_i .

By method of center manifold the theorem on the existence and stability of spatially inhomogeneous stationary solutions $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$, branching off from the zero solution with $\mu = 1$ has been proved. The analysis conducted has shown that the asymptotic expansion of the solution $\varphi_1(x, \mu)$ in the vicinity of $\mu = 1$ obtained in the theorem is an approximate solution of the problem under consideration with the sufficiently wide range of the parameter μ . The theorem assertions on the existence, shape and stability are of local as for the parameter μ nature. We should note that with sufficiently small μ function $\varphi_1(x, \mu)$ is similar to a step function with values $1, -1$ and one transition point $\frac{\pi}{2}$. The solutions $\varphi_k(x, \mu)$, $k = 2, 3, \dots$, are built being based on $\varphi_1(x, \mu)$, using the principle of similarity. In particular, the solution $\varphi_2(x, \mu)$ has been built. We should emphasize that with small μ $\varphi_2(x, \mu)$ is the solution of the type of internal transition layer with two transition points $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Using “Mathematica” package, the original solution of the parabolic problem has been built, where the approximate representation $\varphi_1(x, \mu)$ with $\mu = 0.01$ is taken as a primary function. The solution obtained retains its shape during quite a long time equal to 10^{19} . Also by means of “Mathematica” package the solution of the problem is built, where the function found by means of the principle $\varphi_2(x, \mu)$ is used with $\mu = 0.01$. The solution obtained is not changed for quite a long time $\approx 10^{27}$. Thus, these solutions generate metastable structures (slowly varying solutions).

The questions about existence of metastable structures of the initial problem are considered by the authors J. Carr and R.L. Pego, G. Fusco and J.K. Hale.

In this study it has been found that for solution of the problem of constructing the canonical structures of stationary parabolic problem with small μ application of the center manifold method leads to qualitatively and quantitatively correct results.

Keywords: *parabolic problem, the method of central manifolds, instability, internal shock layer, stationary solutions*

ВВЕДЕНИЕ

На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где μ — положительный параметр.

Уравнение (1) является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция — диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений [1].

Уравнение (1) в пространстве $\overset{0}{H}^1(0, \pi)$ (соболевское пространство функций, определённых на промежутке $(0, \pi)$, удовлетворяющих условиям (2)) порождает диссипативную динамическую систему $\{S_\mu^t : \overset{0}{H}^1(0, \pi) \rightarrow \overset{0}{H}^1(0, \pi)\}$ с глобальным аттрактором $A_\mu \subset \overset{0}{H}^1(0, \pi)$ [2, 3]. Множество стационарных решений E_μ уравнения (1), т. е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (4)$$

зависит от параметра μ .

Аттрактор A_μ имеет простую структуру:

$$A_\mu = \bigcup_{\varphi \in E_\mu} W(\varphi),$$

где $W(\varphi)$ — неустойчивое многообразие стационарного решения φ . Известно, что размерность $W(\varphi_i)$ и $W(\widehat{\varphi}_i)$ равна i . Таким образом, если $\mu < 1$, то нулевое решение неустойчиво, как и все прочие стационарные решения за исключением двух: $\varphi_0 = 1$, $\widehat{\varphi}_0 = -1$.

Итак, при $t \rightarrow \infty$ типичные решения приближаются к одному из двух устойчивых решений $\varphi_0, \widehat{\varphi}_0$. Однако время этого перехода при малых μ оказывается, как правило, предельно долгим. Последнее вызвано существованием в уравнении (1) с краевыми условиями (2) при малых μ метаустойчивых структур.

Приведем теперь основной результат работ [2, 3] в следующей форме.

Для любого фиксированного натурального n и достаточно малых μ существует n -параметрическое семейство решений задачи (1)–(2). Каждое решение этого семейства является медленно меняющейся функцией типа внутреннего переходного слоя [4, 5] с n точками перехода h_1, h_2, \dots, h_n . Переменные h_1, h_2, \dots, h_n удовлетворяют системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений, поведение которой определяется следующей системой:

$$\dot{h}_j = \sqrt{\mu} S[q(h_{j+1} - h_j) - q(h_{j+1} - h_{j-1})], \quad j = 1, \dots, n,$$

где $q(s) = K \exp(-\frac{As}{\sqrt{\mu}})$, а S, K, A — постоянные порядка 1.

Указанная система уравнений определяет движение по n -параметрическому многообразию решений — многообразию медленных движений.

Отметим, что в работе [6] рассмотрена задача о сценарии возникновения и динамики по параметру μ метаустойчивых структур уравнения (1) с краевыми условиями (2). Для решения этой задачи построен и проведён анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (1) с краевыми условиями (2) — галёркинских аппроксимаций средних размерностей. Оказалось, что в галёркинских аппроксимациях задачи (1)–(2) средних (20–30) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений задачи (1)–(2). Множество приближенных стационарных решений задачи (1)–(2) типа переходного слоя с одной и двумя точками перехода правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с одной и двумя точками перехода при увеличении t и при средних значениях параметра μ . В работе [6] установлено, что для решения этой задачи при средних значениях параметра μ применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

Данная работа посвящена построению стационарных структур канонической параболической задачи (1)–(2) при изменении положительного бифуркационного параметра μ с помощью метода центральных многообразий. Причём нас будет интересовать случай, когда $\mu \rightarrow 0$.

1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Оператор A , определённый согласно равенству

$$A\varphi(x) = -\varphi''(x),$$

с граничными условиями

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$$

порождает в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$ шкалу пространств $H_0^k(0, \pi)$, $k = 1, 2, \dots$. Ясно, что

$$\mathfrak{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \bigcap H_0^2(0, \pi), \quad \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(0, \pi),$$

A имеет компактную резольвенту и $\sigma(A)$ состоит из простых собственных значений $\{0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots\}$. Отсюда приходим к заключению, что уравнение (1)–(2) в $H_0^1(0, \pi)$ определяет динамическую систему. При этом каждая фазовая кривая ограничена в $H_0^1(0, \pi)$ и для любого решения u

$$u(\cdot, t) \rightarrow \omega(u(\cdot, 0)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где $\omega(u(\cdot, 0))$ — стационарная точка (1)–(2).

При $\mu = 0$ уравнение (1), рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение, имеет две устойчивые стационарные точки 1 и -1 и одну неустойчивую 0. Таким образом, уравнение (1) с диффузией относится к классу триггерных систем. Очевидно, что стационарные решения 1 и -1 экспоненциально устойчивы для любого $\mu > 0$. Стационарное решение 0 является при $\mu > 1$ неустойчивым с индексом неустойчивости, т. е. размерностью его неустойчивого многообразия, 1.

Переход параметра μ через 1 приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости тривиального решения. В результате от нуля ответвляются две непрерывные по μ ветви пространственно-неоднородных $\pm\varphi_1(x, \mu)$ стационарных точек с индексом неустойчивости 1.

Отметим теперь, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования: $x \rightarrow \pi - x$, $u \rightarrow -u$.

2. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Задачу (1)–(2) в пространстве $H^1(0, \pi)$ представим в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (5)$$

где

$$B = B(\mu) = \mu A - I, \quad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ g(u) = -u^3. \quad (6)$$

Оператор B , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве $L_2[0, \pi]$, имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$-\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < 1 - \mu < \delta$ уравнение (5) имеет две стационарные точки*

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (8)$$

где функция $\varphi_1(x, \mu)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + z^7 p_7(x, \mu) + r(z, x, \mu))|_{z=z(\mu)}. \quad (9)$$

Здесь

$$p_3 = -\frac{1}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (10)$$

$$p_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(-\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x + \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x \right), \quad (11)$$

$$p_7 = \frac{9}{64(7\lambda_1 - \lambda_3)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(-\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} - \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 3x + \\ + \frac{3}{64(7\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\frac{9}{5\lambda_1 - \lambda_5} + \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 5x + \\ + \frac{3}{64(7\lambda_1 - \lambda_7)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(-\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_5} \right) \cos 7x, \quad (12)$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^7)$, а $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \right) z^7 + \dots \quad (13)$$

Стационарные точки $u_1 = \varphi_1(x, \mu)$, $u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu)$ неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

Доказательство. В окрестности $u = 0$, $\mu = 1$ существует центральное многообразие [1] надстроенной системы

$$\dot{u} + B(\mu)u = g(u), \quad \dot{\mu} = 0, \quad (14)$$

представимое в виде:

$$u = z \cos x + p_3(x, \mu)z^3 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots, \quad (15)$$

где $p_3(x, \mu)$, $p_5(x, \mu)$, ... функции из пространства $H_0^1[0, \pi]$. На многообразии (15) уравнение (14) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots \quad (16)$$

Найдем коэффициенты разложений (15), (16). С этой целью подставим (15), (16) в уравнение (14):

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \cos x + 3z^2(\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots)p_3 + \\ & + 5z^4(\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots)p_5 + \dots + B(z \cos x + p_3 z^3 + p_5 z^5 + \dots) = \\ & = g(z \cos x + p_3(x)z^3 + p_5(x)z^5 + \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что коэффициент при z в левой и правой частях этого равенства совпадают. Приравняв коэффициент при z^3 , получим уравнение:

$$c_3 \cos x + (B + 3\lambda_1)p_3 = -\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x. \quad (18)$$

Из условия его разрешимости в пространстве $H_0^1[0, \pi]$ в классе гладких по параметру μ функций следует, что $c_3 = -\frac{3}{4}$. При этом его решением в указанном классе является определенная в (10) функция.

Приравняв теперь в равенстве (17) коэффициент при z^5 и используя (6), приходим к уравнению:

$$c_5 \cos x + (B + 5\lambda_1)p_5 = -3(\cos^2 x + c_3)p_3. \quad (19)$$

Из его условия разрешимости находим $c_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}$. Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (11).

Из равенств (17),(6) следует:

$$c_7 \cos x + (B + 7\lambda_1)p_7 = -3(\cos^2 x + c_3)p_5 - 3 \cos x p_3^2 - 3c_5 p_3 + \frac{3}{2}p_5. \quad (20)$$

Условие разрешимости этого уравнения приводит к равенству:

$$c_7 = -\frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \right).$$

При этом ему удовлетворяет определенная в (12) функция.

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (15), (16) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (15) допускает представление в виде степенного ряда по степеням $z, 1 - \mu$. Указанный ряд, как известно, является асимптотически сходящимся в окрестности $z = 0, \mu = 1$.

Переходим теперь к анализу уравнения (13). Его нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при $\mu > 1$. При уменьшении параметра μ и его прохождении через 1 от нуля ответвляются две непрерывные ветви неустойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения следует справедливость теоремы.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер. Однако анализ построения инвариантного многообразия (15) даёт основания для следующего утверждения. В достаточно широком диапазоне изменения параметра μ справедливо приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + z^7 p_7(x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (21)$$

Очевидно, для $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ справедливо аналогичное приближённое равенство.

В равенстве (21) $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь особых точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)^2}z^7. \quad (22)$$

□

На рис. 1 изображены графики функции $\varphi_1(x, \mu)$ при различных значениях параметра μ , на которых видно, что при достаточно малых μ функция $\varphi_1(x, \mu)$ близка к ступенчатой функции со значениями 1, -1 и одной точкой перехода [2, 3]. Следует отметить, что правая часть равенства (21) при малых μ колеблется в силу явления Гиббса.

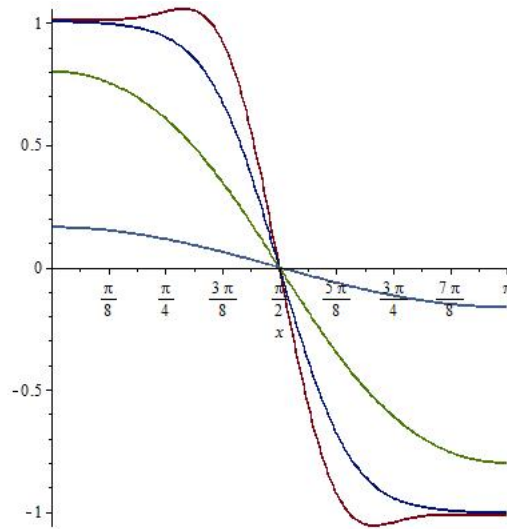


Рис. 1. Функция $\varphi_1(x, \mu)$ при $\mu = 0.98, \mu = 0.5, \mu = 0.1, \mu = 0.01$

Подчеркнём, что при малых μ $\varphi_1(x, \mu)$ является решением задачи (1)–(2) типа внутреннего переходного слоя с одной точкой перехода $\frac{\pi}{2}$.

Построим решение задачи (1)–(3) при $\mu = 0.01$. В качестве начальной функции (3) возьмём функцию $\varphi_1(x, \mu)$, удовлетворяющую приближённому равенству (21). Для построения решения воспользуемся пакетом “*Mathematica*”. Отметим

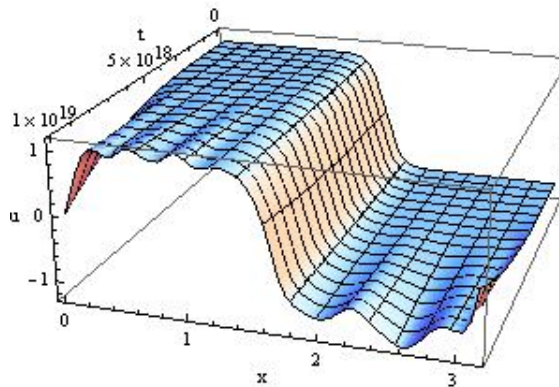


Рис. 2. Решение (1)–(3), $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu), \mu = 0.01$

теперь, что на рис. 2 решение не меняется в течение достаточно долгого времени $\approx 10^{19}$, то есть порождает метастабильные структуры.

Следуя [7], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на $\varphi_1(x, \mu)$, решения $\varphi_k(x, \mu), k = 2, 3, \dots$, краевой задачи (4). Пусть $\varphi(x, \mu)$ — отличное от нуля решение (4), определенное для всех $0 < \mu < a$. Продолжим функцию $\varphi(x, \mu)$ на

промежуток $[-\pi, 0)$ чётным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π . Тогда при любом натуральном k функция $\varphi(kx, k^2\mu)$ будет удовлетворять краевой задаче (4) для всех $0 < \mu < \frac{a}{k^2}$. Отсюда вытекает, что на промежутке $0 < \mu < \frac{1}{k^2}$ справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx, k^2\mu), \quad k = 2, 3, \dots \quad (23)$$

Переход параметра μ через 4^{-1} приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости тривиального решения. В результате от нуля ответвляются две непрерывные по μ ветви пространственно-неоднородных $\pm\varphi_2(x, \mu)$ стационарных точек с индексом неустойчивости 2.

Динамика $\varphi_2(x, \mu)$ при уменьшении μ от критического значения 4^{-1} следует из равенства (23). Подчёркнём, что при малых μ $\varphi_2(x, \mu)$ является решением задачи (1)–(2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

На рис. 3 представлен график функции $\varphi_2(x, \mu)$ при различных значениях параметра μ .

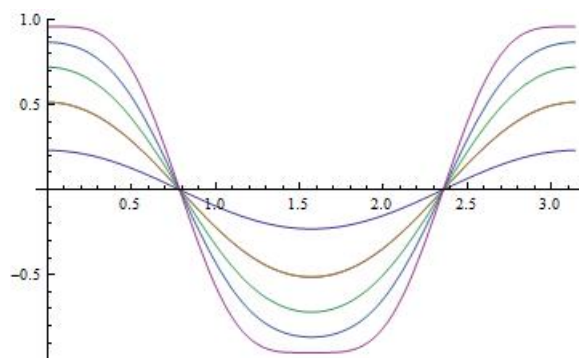


Рис. 3. Функция $\varphi_2(x, \mu)$ при $\mu = 0.24$, $\mu = 0.2$, $\mu = 0.15$, $\mu = 0.1$, $\mu = 0.01$

При малых $\mu < 0.01$ у $\varphi_2(x, \mu)$ проявляется явление Гиббса. Согласно [2, 3], при достаточно малых μ функция $\varphi_2(x, \mu)$ близка к ступенчатой функции со значениями 1, -1 и двумя точками перехода.

Построим решение задачи (1)–(3) при $\mu = 0.01$. В качестве начальной функции (3) возьмём $\varphi_2(x, \mu)$, построенную с помощью принципа подобия. Для этого снова воспользуемся пакетом “*Mathematica*”. Согласно рис. 4, решение не меняется в течение достаточно долгого времени $\approx 10^{27}$. Это значит, что оно приводит к медленно меняющимся решениям.

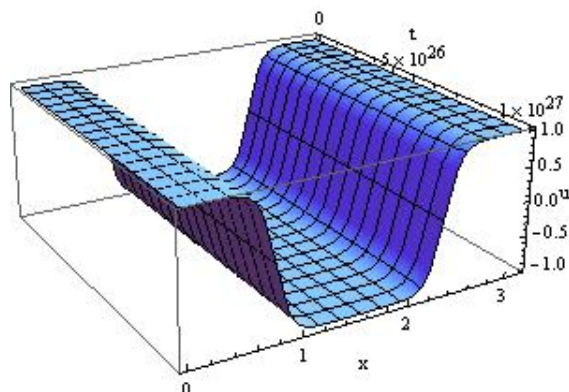


Рис. 4. Решение (1)–(3), $\varphi(x) = \varphi_2(x, \mu)$, $\mu = 0.01$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты.

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$, ответвляющихся от нулевого решения при $\mu = 1$. Проведённые численные расчёты позволяют утверждать, что полученное в теореме асимптотическое разложение (21) решения $\varphi_1(x, \mu)$ в окрестности $\mu = 1$ является приближённым решением рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра μ . Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер.

С помощью принципа подобия (23) найдено, опираясь на $\varphi_1(x, \mu)$, решение $\varphi_2(x, \mu)$, которое ответвляется от нуля при прохождении μ через значение $\frac{1}{4}$.

Решения исходной параболической задачи, где в качестве начальных функций взяты приближённые представления $\varphi_1(x, \mu)$ и $\varphi_2(x, \mu)$, при $\mu = 0.01$, полученные, используя пакет “*Mathematica*”, меняются весьма медленно в течение достаточно долгого времени. То есть они относятся к классу медленно меняющихся решений (метастабильных структур).

Таким образом, в работе установлено, что для решения задачи о построении стационарных структур рассматриваемой параболической задачи при малых μ применение метода центральных многообразий приводит к качественно и количественно правильным результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
HENRY, D. (1985) *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Moscow: Mir.
2. CARR, J. and PEGO, R. (1989) Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. XLII. p. 523–576.
3. FUSCO, G. and HALE, J. (1989) Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 1. p. 75–94.
4. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.
VASIL'eva, A. B. and BUTUZOV, V. F. (1990) *Asymptotic methods in a singular perturbation theory*. Moscow: Vyssh. Shkola.
5. Чанг, К. Нелинейные сингулярно-возмущенные краевые задачи. Теория и приложения / К. Чанг, Ф. Хауэс. — М.: Мир, 1988. — 248 с.
CHANG, K. and HOWES, F. (1988) *Nonlinear singular perturbation phenomenon*. Moscow: Mir.
6. Белан, Е. П., Плышевская, С. П. Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга-Ландау // *Динамические системы*. — 2004. — Т. 4 (32). — С. 27–42.
BELAN, E. P. and PLYSHEVSKAYA, S. P. (2014) Metastable structure of the scalar Ginzburg-Landau equation. *Dynamical systems*. Т. 4 (32). p. 27–42.
7. Мищенко, Е. Ф., Садовничий, В. А., Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 1985. — 376 с.
MISCHENKO, YE. F. and others (1985) *Processes in Nonlinear Media with Diffusion*. Moscow: Fizmatlit.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015

УДК: 517.98

MSC2010: 35P05, 47D03

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© Д. О. Цветков

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР. АКАДЕМИКА ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, 295007, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: tsvetdo@gmail.com

OPERATOR APPROACH TO THE PROBLEM ON SMALL MOVEMENTS OF STRATIFIED FLUIDS.

Tsvetkov D. O.

Abstract. Let immovable container be completely filled with system of three nonmixing heavy stratified incompressible fluids. The lower fluid (with respect to gravity) is viscous with coefficient of dynamical viscosity $\mu_1 = \text{const} > 0$, middle fluid is ideal, upper one is viscous with coefficient of dynamical viscosity $\mu_3 = \text{const} > 0$. We assume that in an equilibrium state the densities of a fluids is a function of the vertical variable x_3 , i.e., $\rho_i = \rho_i(x_3)$ ($i = \overline{1, 3}$). In this case the gravitational field with constant acceleration $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ acts on the fluids, here $g > 0$ and \vec{e}_3 is unit vector of the vertical axis Ox_3 , which is directed opposite to \vec{g} .

Let us consider the basic case of stable stratification of the fluids on densities:

$$0 < N_{i,\min}^2 \leq N_i^2(x_3) \leq N_{i,\max}^2 =: N_{0,i}^2 < \infty, \quad N_i^2(x_3) := -\frac{g\rho_i'(x_3)}{\rho_i(x_3)}, \quad (i = \overline{1, 3}).$$

The problem on small oscillations is studied on the base of approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. To this end we introduce Hilbert spaces and some their subspaces, also auxiliary boundary value problems. The initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f(t), \quad y(0) = y^0, \quad 0 \ll \mathcal{R} = \mathcal{R}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \text{Re} \mathcal{A} \geq 0,$$

in some Hilbert space \mathcal{H} . The theorem on strong solvability of initial boundary value problem is proved.

Keywords: stratification effect in viscous and ideal fluids, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

1. МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ ИЗ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

1.1. **Математическая формулировка задачи.** Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из трех несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Области Ω_1 и Ω_3 , соответственно нижняя и верхняя по отношению к действию силы тяжести, заполнены вязкими стратифицированными несжимаемыми жидкостями с коэффициентами динамической вязкости $\mu_i = \text{const} > 0$ ($i = 1, 3$). Средняя область Ω_2 заполнена идеальной стратифицированной несжимаемой жидкостью. При этом плотности жидкостей ρ_i ($i = \overline{1, 3}$) в состоянии покоя изменяются вдоль вертикальной оси.

Обозначим через \vec{n}_i ($i = \overline{1, 3}$) единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) и направленный вне Ω_i ($i = \overline{1, 3}$). Через S_i обозначим часть стенки сосуда, отвечающей области Ω_i ($i = \overline{1, 3}$). Представим $\Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \overline{S_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2 соответственно. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ_1 . Толщину слоя идеальной жидкости обозначим через b .

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_i = \rho_i(x_3)$ ($i = \overline{1, 3}$):

$$0 < N_{i,\min}^2 \leq N_i^2(x_3) \leq N_{i,\max}^2 =: N_{0,i}^2 < \infty, \quad N_i^2(x_3) := -\frac{g\rho_i'(x_3)}{\rho_i(x_3)}, \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (1)$$

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть \vec{u}_i ($i = \overline{1, 3}$) — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i = \zeta_i(t, \hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i ($i = 1, 2$) по нормали \vec{n}_i ; $p_i = p_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) — отклонение полей давлений от равновесных; $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) — отклонения полей плотности от исходных $\rho_i(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} &= \rho_i^{-1}(x_3)(-\nabla p_i + \mu_i \Delta \vec{u}_i - \tilde{\rho}_i g \vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \text{div } \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \\ \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} &= \rho_2^{-1}(x_3)(-\nabla p_2 - \tilde{\rho}_2 g \vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \text{div } \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \cdot \vec{u}_i &= 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{0} \quad (\text{на } S_i, \quad i = 1, 3), \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ \mu_1 \left(\frac{\partial (u_1)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2), \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -p_1 + 2\mu_1 \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_3} &= -p_2 - g\Delta\rho_1\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \Delta\rho_1 := \rho_1(0) - \rho_2(0), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 \left(\frac{\partial (u_3)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_3)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2), \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ -p_3 + 2\mu_3 \frac{\partial (u_3)_3}{\partial x_3} &= -p_3 + g\Delta\rho_3\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \Delta\rho_3 := \rho_2(b) - \rho_3(b), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i(0, x) &= \vec{u}_i^0(x), \quad \tilde{\rho}_i(0, x) = \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (x \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 3}), \\ \zeta_j(0, \hat{x}) &= \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma_i, \quad j = 1, 2). \end{aligned} \tag{5}$$

1.2. Об ортогональном разложении гильбертова пространства вектор-функций. Пусть задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \bar{S} \cup \Gamma$, где Γ — связное множество с $\text{mes } \Gamma > 0$. Введем пространство $H_\Gamma^1(\Omega, \rho)$ функций из $H^1(\Omega, \rho)$, имеющих средним значением по Γ нуль, с нормой

$$\|p\|_{H_\Gamma^1(\Omega, \rho)}^2 = \int_\Omega \rho^{-1} |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int_\Gamma p d\Gamma = 0. \tag{6}$$

Как и при $\rho = \text{const}$, для $H_\Gamma^1(\Omega, \rho)$ имеет место ортогональное разложение:

$$H_\Gamma^1(\Omega, \rho) = H_{h,S}^1(\Omega, \rho) \oplus H_{0,\Gamma}^1(\Omega, \rho), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} H_{h,S}^1(\Omega, \rho) &= \{ p \in H_\Gamma^1(\Omega, \rho) \mid \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ &\quad \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma p d\Gamma = 0 \}, \end{aligned}$$

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega, \rho) = \{ p \in H_\Gamma^1(\Omega, \rho) \mid p = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \},$$

причем ортогональность в (7) понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме (6).

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 и Γ_2 — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем множество

$$H_{h,S}^1(\Omega, \rho) := \{p \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho) \mid \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S), \\ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_2 = 0, \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0\}. \quad (8)$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$H_{h,S}^1(\Omega, \rho) = H_{h,S}^1(\Omega, \rho) \oplus \{\alpha \varphi_0\}, \quad (9)$$

где подпространство $\{\alpha \varphi_0\}$ — одномерно, а функция φ_0 является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \varphi_0) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho^{-1} \nabla \varphi_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \varphi_0 = \text{mes } \Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\text{mes } \Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (10)$$

Разложение (9) порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho) = \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho) \oplus \{\alpha \rho^{-1} \nabla \varphi_0\}. \quad (11)$$

1.3. Метод ортогонального проектирования. В этом пункте для исследования начально-краевой задачи (2)–(5) применен метод проектирования уравнений Эйлера и Навье–Стокса на ортогональные подпространства гильбертовых пространств $\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = \overline{1,3}$).

Для области Ω_i ($i = 1,3$) введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i) = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i), \quad \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) = \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_i) \oplus \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i),$$

где (для простоты дальнейших рассуждений Γ_2 переобозначим через Γ_3)

$$\vec{J}_0(\Omega_i, \rho_i) := \{ \vec{u}_i \mid \text{div} \vec{u}_i = 0 \text{ (в } \Omega_i), \quad \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ (на } \partial\Omega_i), \quad i = 1,3 \}, \\ \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i) := \{ \vec{v}_i \mid \vec{v}_i = \rho_i^{-1}(x_3) \nabla p_i, \quad \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ (на } S_i), \\ \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \text{ (в } \Omega_i), \quad \int_{\Gamma_i} p_i d\Gamma_i = 0, \quad i = 1,3 \},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i) := \{ \vec{w}_i \mid \vec{w}_i = \rho_i^{-1}(x_3) \nabla \varphi_i, \quad \varphi_i = 0 \text{ (на } \Gamma_i), \quad i = 1,3 \}.$$

Введем ортопроекторы P_{0,S_i} и P_{0,Γ_i} на подпространства $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1,3$) соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_i для \vec{u}_i ($i = 1,3$), считаем, что поле \vec{u}_i принадлежит пространству $\vec{J}_{0,S_i}^1(\Omega_i, \rho_i)$,

которое плотно вложено в пространство $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$). Подействуем введенными ортопроекторами P_{0,S_i} и P_{0,Γ_i} ($i = 1, 3$) на уравнения для вязких жидкостей из (2), получим:

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = -\rho_i^{-1} \nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,S_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i), \quad (12)$$

$$\vec{0} = -\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2} + P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) - P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,\Gamma_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i), \quad (13)$$

где $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,1} := P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \nabla p_i)$, $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2} := P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1} \nabla p_i)$ ($i = 1, 3$).

Из уравнений (13) при известных \vec{u}_i и $\tilde{\rho}_i$ составляющие $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2}$ ($i = 1, 3$) градиентов давлений из подпространств $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) вычисляются непосредственно. Учитывая эти тривиальные соотношения, в дальнейшем будем рассматривать для вязких жидкостей основные уравнения (12).

Для области Ω_2 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2). \quad (14)$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2)$ из (14) состоит из квазипотенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке S_2 , для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2)$ шире, чем требуется. В связи с этим воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств — см. (11), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая (11) и (14), введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \{\alpha \rho_2^{-1} \nabla \varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2), \quad (15)$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: P_0 , $P_{\widehat{h,S_2}}$, P_φ , $P_{0,\Gamma}$.

Основываясь на разложении (15), применим метод ортогонального проектирования к уравнению Эйлера из начально-краевой задачи (2). В силу условия солёности и условия непротекания на твердой стенке S_2 считаем, что

$$\vec{u}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) =: \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2, \rho_2).$$

Поле $\rho_2^{-1} \nabla p_2$ квазипотенциально, поэтому

$$\rho_2^{-1} \nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega_2, \rho_2) := \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \{\alpha \rho_2^{-1} \nabla \varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2).$$

Представим поля \vec{u}_2 и $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ в виде:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2, \quad \rho_2^{-1}\nabla p_2 = \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} + \alpha(t)\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0, \quad (16)$$

$$\text{где } \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h}, S_2}(\Omega_2, \rho_2), \\ \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h}, S_2}(\Omega_2, \rho_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0, \Gamma}(\Omega_2, \rho_2). \quad (17)$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из (2) и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (15). Получим:

$$\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = -P_0(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_0\vec{f}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = -\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h}, S_2}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{\widehat{h}, S_2}\vec{f}, \quad (19)$$

$$\alpha(t)\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0 = -P_\varphi(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_\varphi\vec{f}, \quad (20)$$

$$\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} = -P_{0, \Gamma}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{0, \Gamma}\vec{f}. \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21) показывают, что $\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2}$ могут быть найдены, если известно решение $\tilde{\rho}_2$. В то же время эти поля не входят в (18) (19). Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия:

$$\nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\varphi_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \varphi_0 = \alpha \text{ mes } \Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\alpha \text{ mes } \Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

поэтому из (20) находятся все коэффициенты α , и тем самым составляющая $\{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$. Учитывая тривиальность соотношений (20), (21), в дальнейшем будем рассматривать для идеальной жидкости уравнения (18), (19).

1.4. Формулировка задачи после отделения тривиальных соотношений.

Перейдем к окончательной формулировке задачи с учетом проведенных выше преобразований. Введем операторы γ_i — операторы нормальных следов полей, заданных в Ω_i , на границу Γ_i ($i = 1, 3$). Отметим здесь, что единичные векторы \vec{n}_i , как ранее оговаривалось, нормальны к $\partial\Omega_i$ и направлены вне Ω_i ($i = 1, 3$). Рассмотрим кинематические соотношения из (4). В силу представлений (16), (17) можем написать:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \gamma_1 \vec{u}_1 = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = -\gamma_3 \vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Теперь начально-краевая задача (2)–(5) после отделения тривиальных соотношений (13), (20), (21), формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = & -\rho_i^{-1} \nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) - \\ & - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,S_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \quad \vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i, i = 1, 3),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1} \nabla \Phi_2) = & -\rho_2^{-1} \nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1} g \tilde{\rho}_2 \vec{e}_3) + P_{\widehat{h,S_2}} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} = & -P_0(\rho_2^{-1} g \tilde{\rho}_2 \vec{e}_3) + P_0 \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\rho_2^{-1} \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } \partial \Omega_2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_2}{\partial t} + \nabla \rho_2 \cdot (\rho_2^{-1} \nabla \Phi_2) + \nabla \rho_2 \cdot \vec{v}_2 = & 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_2^{-1} \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = & -\gamma_1 \vec{u}_1 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \rho_2^{-1} \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = & -\gamma_3 \vec{u}_3 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mu_i \left(\frac{\partial (u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_i)_3}{\partial x_k} \right) = & 0 \quad (k = 1, 2, \text{ на } \Gamma_i (i = 1, 3)), \\ -P_{\Gamma_1} p_{1,1} + 2\mu_1 \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_3} = & -g \Delta \rho_1 \zeta_1 - P_{\Gamma_1} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -P_{\Gamma_3} p_{3,1} + 2\mu_3 \frac{\partial (u_3)_3}{\partial x_3} = & g \Delta \rho_3 \zeta_2 - P_{\Gamma_3} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(0, x) = P_{0,S_1} \vec{u}_1^0(x), \quad \rho_2^{-1} \nabla \Phi_2(0, x) = & P_{\widehat{h,S_2}} \vec{u}_2^0(x), \quad \vec{v}_2(0, x) = P_0 \vec{u}_2^0(x), \\ \tilde{\rho}_i(0, x) = \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (i = \overline{1,3}), \quad \zeta_j(0, \hat{x}) = & \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (26)$$

Через P_{Γ_i} обозначены ортопроекторы на $L_{2,\Gamma_i} := L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_{\Gamma_i}\}$ ($i = 1, 3$), Γ_2 переобозначено через Γ_3 .

Теорема 1. Начально-краевая задача (2)–(5), эквивалентна совокупности тривиальных соотношений (13), (20), (21) и (нетривиальной) начально-краевой задачи (22)–(26). \square

1.5. Вспомогательные краевые задачи и их операторы. Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\begin{aligned} \rho_i^{-1}(x_3)\nabla p_i - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) &= \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 3), \\ \vec{u}_i &= \vec{0} \quad (\text{на } S_i, \quad i = 1, 3), \quad -p_i + 2\mu_i\frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3), \\ \mu_i\left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k}\right) &= 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \end{aligned}$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна (см. [1], с. 116). Она имеет единственное обобщенное решение $\vec{u}_i = \mu_i^{-1}A_i^{-1}\vec{f}$ для любого вектора \vec{f} из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$), где A_i ($i = 1, 3$) — оператор задачи I. Оператор A_i есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с $\overline{\mathcal{D}(A_i)} = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, при этом оператор A_i^{-1} является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$).

Вспомогательная задача II.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_i^{-1}\nabla p_i) &= 0 \quad (\text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 3), \quad \rho_i^{-1}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i, \quad i = 1, 3), \\ \rho_i^{-1}p_i &= \tau_i \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3), \quad \int_{\Gamma_i} \tau_i d\Gamma_i = 0. \end{aligned}$$

Это аналог известной задачи Зарембы (при $\rho_i = \text{const}$, см. [1], с. 45). Она имеет единственное решение $p_i \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i, \rho_i)$ при $\tau_i \in H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ ($i = 1, 3$).

Вспомогательная задача III.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Psi_1) &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 = \eta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma} \Psi_1 d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Вспомогательная задача IV.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Psi_2) &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 = \eta_2 \quad (\text{на } \Gamma_3), \quad \int_{\Gamma} \Psi_2 d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Задачи III и IV — это задачи Неймана. Если $\eta_1 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача III имеет единственное решение $\Psi_1 \in H_{\Gamma}^1(\Omega_2, \rho_2)$, аналогично, если $\eta_2 \in H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$, то задача IV имеет единственное решение $\Psi_2 \in H_{\Gamma}^1(\Omega_2, \rho_2)$ (см. [1], с. 45).

Введем по решениям задач III и IV операторы:

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} &=: S_{1,1}\eta_1, \quad \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_1|_{\Gamma_3} =: S_{2,1}\eta_1, \\ \rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1} &=: S_{1,2}\eta_2, \quad \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_2|_{\Gamma_3} =: S_{2,2}\eta_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь следует отметить, что оператор $S_{1,1}$ — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_1} , а оператор $S_{2,2}$ — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_3} .

Вспомогательная задача V.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_1^{-1} \nabla w_{1,2}) &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \rho_1^{-1} \nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{на } S_1), \\ \rho_1^{-1}(0) \nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1 &= \eta_0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_1} w_{1,2} d\Gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Задача V — это задача Неймана. Если $\eta_0 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача имеет единственное решение $w_{1,2} \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$. Введем по решению задачи V оператор:

$$\rho_1^{-1}(0) P_{\Gamma_1} w_{1,2}|_{\Gamma_1} =: S_0 \eta_0,$$

оператор S_0 является самосопряженным, положительным и компактным в L_{2,Γ_1} .

1.6. Вывод системы операторных уравнений. Представим в (22) поле $\rho_1^{-1} \nabla p_{i,1}$ ($i = 1, 3$) в виде $\rho_1^{-1} \nabla p_{i,1} = \rho_1^{-1} \nabla \tilde{p}_{i,1} + \rho_1^{-1} \nabla \hat{p}_{i,1}$ и подберем поле $\rho_1^{-1} \nabla \tilde{p}_{i,1}$ таким образом, чтобы поле \vec{u}_i ($i = 1, 3$) являлось решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \rho_i^{-1} \nabla \tilde{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) &= -\rho_i^{-1} \nabla \hat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,S_i} \vec{f} - \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{u}_i &= 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \quad \vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i), \\ \mu_i \left(\frac{\partial (u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_i)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i), \\ -P_{\Gamma_i} \tilde{p}_{i,1} + 2\mu_i \frac{\partial (u_i)_3}{\partial x_3} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_i), \quad i = 1, 3. \end{aligned}$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что последняя краевая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u}_i = \mu_i^{-1} A_i^{-1} \left(P_{0,S_i} \vec{f} - \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} - \rho_i^{-1} \nabla \hat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) \right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$). Свойства оператора A_i описаны в предыдущем пункте. Итак, можно написать:

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \mu_i A_i \vec{u}_i + \rho_i^{-1} \nabla \hat{p}_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) = P_{0,S_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 3). \quad (28)$$

При расщеплении второго и третьего условия (25) для нормальных напряжений на границах вязкой жидкости остались условия

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_1} \hat{p}_{1,2} &= g \Delta \rho_1 \zeta_1 + P_{\Gamma_1} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ P_{\Gamma_3} \hat{p}_{3,2} &= -g \Delta \rho_3 \zeta_2 + P_{\Gamma_3} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned}$$

Учитывая принадлежность $\rho_i^{-1} \nabla \widehat{p}_{i,2} \in \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, приходим к выводу, что потенциал $P_{\Gamma_i} \widehat{p}_{i,2}$ удовлетворяет Π вспомогательной задаче при $\tau_1 = g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1}p_{2,1}$, $\tau_2 = -g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3}p_{2,1}$. Поэтому можно считать, что

$$\rho_1^{-1} \nabla \widehat{p}_{1,2} =: \rho_1^{-1}(0)G_1(g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1}p_{2,1}), \quad (29)$$

$$\rho_3^{-1} \nabla \widehat{p}_{3,2} =: \rho_3^{-1}(b)G_3(-g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3}p_{2,1}).$$

Оператор G_i ограниченно действует из пространства $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$), что будет доказано далее.

Обозначим

$$P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) =: \tilde{C}_i\tilde{\rho}_i, \quad -\nabla\rho_i \cdot \vec{u}_i =: \tilde{C}_i^*\vec{u}_i \quad (i = 1, 3) \quad (30)$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ ($i = 1, 3$) скалярных функций со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} := \int_{\Omega_i} g^2 [\rho_i(x_3)N_i^2(x_3)]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)} d\Omega_i$.

Лемма 2. Операторы $\tilde{C}_i : \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \rightarrow \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ и $\tilde{C}_i^* : \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ ($i = 1, 3$), определенные соотношениями (30), взаимно сопряжены и

$$\|\tilde{C}_i\| = \|\tilde{C}_i^*\| \leq N_{0,i}. \quad (31)$$

С учетом (29) и (30) перепишем (28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1 G_1 \zeta_1 + \rho_1^{-1}(0)G_1 P_{\Gamma_1} p_{2,1} + \tilde{C}_1 \tilde{\rho}_1 &= P_{0,S_1} \vec{f}, \\ \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + \mu_3 A_3 \vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3 G_3 \zeta_2 + \rho_3^{-1}(b)G_3 P_{\Gamma_3} p_{2,1} + \tilde{C}_3 \tilde{\rho}_3 &= P_{0,S_3} \vec{f}. \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим уравнения для идеальной жидкости из (22). Обозначим

$$\begin{aligned} P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) &=: \tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2, \quad -\nabla\rho_2 \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = \tilde{C}_{2,1}^*(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2); \\ P_0(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) &=: \tilde{C}_{2,0}\tilde{\rho}_2, \quad -\nabla\rho_2 \cdot \vec{v}_2 = \tilde{C}_{2,0}^*\vec{v}_2, \end{aligned} \quad (33)$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_2)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)} := \int_{\Omega_2} g^2 [\rho_2(x_3)N_2^2(x_3)]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)} d\Omega_2.$$

Лемма 3. Операторы, определенные соотношениями (33),

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{2,1} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) &\rightarrow \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \tilde{C}_{2,1}^* : \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_2), \\ \tilde{C}_{2,0} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) &\rightarrow \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \tilde{C}_{2,0}^* : \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_2), \end{aligned}$$

взаимно сопряжены и

$$\|\tilde{C}_{2,1}\| = \|\tilde{C}_{2,1}^*\| \leq N_{0,2}, \quad \|\tilde{C}_{2,0}\| = \|\tilde{C}_{2,0}^*\| \leq N_{0,2}. \quad (34)$$

С учетом введенных операторов уравнения для идеальной жидкости из (22) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 &= P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} + \tilde{C}_{2,0}\tilde{\rho}_2 &= P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\tilde{\rho}_2}{\partial t} - \tilde{C}_{2,1}^*(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) - \tilde{C}_{2,0}^*\vec{v}_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2). \end{aligned} \quad (35)$$

В силу принадлежности $\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ потенциал Φ_2 , с помощью решений III и IV вспомогательных задач, можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Psi_1 + \Psi_3, \quad (36)$$

при этом считаем $\eta_1 = -\gamma_1\vec{u}_1$ (на Γ_1), $\eta_2 = -\gamma_3\vec{u}_3$ (на Γ_3). Представление (36) оправдано тем, что поле $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ ($i = 1, 3$) будет в дальнейшем выражено (см. лемму (4)) с помощью ограниченного оператора через \vec{u}_i ($i = 1, 3$). Исходя из сказанного, разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) = \vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2) \dot{+} \vec{G}_3(\Omega_2, \rho_2), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2) &:= \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } S_2), \\ &\quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \int_{\Gamma} p \, d\Gamma = 0\}, \\ \vec{G}_3(\Omega_2, \rho_2) &:= \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } S_2), \\ &\quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma} p \, d\Gamma = 0\}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 4. Поля $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ ($i = 1, 3$) выражаются с помощью ограниченных операторов D_i через \vec{u}_i ($i = 1, 3$):

$$D_i\vec{u}_i := \rho_2^{-1}\nabla\Psi_i \quad (i = 1, 3). \quad (38)$$

Из первого уравнения (35) следует интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 + p_{2,1} + \Psi = F + C(t) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (39)$$

где $\tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 =: \rho_2^{-1}\nabla\Psi$ и $P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} =: \rho_2^{-1}\nabla F$. Спроектируем это уравнение на L_{2,Γ_i} ($i = 1, 3$):

$$P_{\Gamma_i}p_{2,1} = -P_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 - P_{\Gamma_i}\Psi + P_{\Gamma_i}F \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \quad (40)$$

Выразим $P_{\Gamma_i}(\Phi_2|_{\Gamma_1})$, пользуясь представлением (36) и операторами $S_{i,j}$ (см. (27)):

$$P_{\Gamma_1}(\Phi_2|_{\Gamma_1}) = P_{\Gamma_1}(\Psi_1|_{\Gamma_1}) + P_{\Gamma_1}(\Psi_3|_{\Gamma_1}) = \rho_2(0)(-S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3), \quad (41)$$

$$P_{\Gamma_3}(\Phi_2|_{\Gamma_3}) = P_{\Gamma_3}(\Psi_1|_{\Gamma_3}) + P_{\Gamma_3}(\Psi_3|_{\Gamma_3}) = \rho_2(b)(-S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3). \quad (42)$$

Подставим выражения (40), (41) и (42) в уравнение (32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0) g \Delta \rho_1 G_1 \zeta_1 + \tilde{C}_1 \tilde{\rho}_1 - \rho_1^{-1}(0) \rho_2(0) \frac{\partial}{\partial t} (-G_1 S_{1,1} \gamma_1 \vec{u}_1 - G_1 S_{1,2} \gamma_3 \vec{u}_3) - \\ - \rho_1^{-1}(0) G_1 P_{\Gamma_1} \Psi + \rho_1^{-1}(0) G_1 P_{\Gamma_1} F = P_{0,S_1} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + \mu_3 A_3 \vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b) g \Delta \rho_3 G_3 \zeta_2 + \tilde{C}_3 \tilde{\rho}_3 - \rho_3^{-1}(b) \rho_2(b) \frac{\partial}{\partial t} (-G_3 S_{2,1} \gamma_1 \vec{u}_1 - G_3 S_{2,2} \gamma_3 \vec{u}_3) - \\ - \rho_3^{-1}(b) G_3 P_{\Gamma_3} \Psi + \rho_3^{-1}(b) G_3 P_{\Gamma_3} F = P_{0,S_3} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_3). \end{aligned}$$

Лемма 5. *Классическое решение задачи (22)–(26) является решением следующей системы дифференциально-операторных уравнений:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0) \rho_2(0) (G_1 S_{1,1} \gamma_1 \vec{u}_1 + G_3 S_{1,2} \gamma_3 \vec{u}_3)) + \mu_1 A_1 \vec{u}_1 + \tilde{C}_1 \tilde{\rho}_1 + \\ + \rho_1^{-1}(0) (g \Delta \rho_1 G_1 \zeta_1 - G_1 P_{\Gamma_1} \Psi + G_1 P_{\Gamma_1} F) = P_{0,S_1} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \frac{d}{dt} (\vec{u}_3 + \rho_3^{-1}(b) \rho_2(b) (G_3 S_{2,1} \gamma_1 \vec{u}_1 + G_3 S_{2,2} \gamma_3 \vec{u}_3)) + \mu_3 A_3 \vec{u}_3 + \tilde{C}_3 \tilde{\rho}_3 + \\ + \rho_3^{-1}(b) (-g \Delta \rho_3 G_3 \zeta_2 - G_3 P_{\Gamma_3} \Psi + G_3 P_{\Gamma_3} F) = P_{0,S_3} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_3), \\ \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + \tilde{C}_{2,0} \tilde{\rho}_2 = P_0 \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_1^{-1}(0) g \Delta \rho_1 \frac{d}{dt} \zeta_1 - \rho_1^{-1}(0) g \Delta \rho_1 \gamma_1 \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \rho_3^{-1}(b) g \Delta \rho_3 \frac{d}{dt} \zeta_2 + \rho_3^{-1}(b) g \Delta \rho_3 \gamma_3 \vec{u}_3 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \\ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_1 - \tilde{C}_1^* \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_3 - \tilde{C}_3^* \vec{u}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \\ \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_2 - \tilde{C}_{2,1}^* (D_1 \vec{u}_1 + D_3 \vec{u}_3) - \tilde{C}_{2,0}^* \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \vec{u}_i(0, x) = P_{0,S_i} \vec{u}_i^0(x) \quad (i = 1, 3), \quad \vec{v}_2(0, x) = P_0 \vec{u}_2^0(x), \\ \zeta_j(0, \hat{x}) = \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{\rho}_i(0, x) = \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (i = 1, 3). \end{aligned} \quad (43)$$

Для начальных данных, в силу разложения (36), должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_i P_{0,S_i} \vec{u}_i^0(x) = -\tilde{\gamma}_i \Pi_i P_{\tilde{h}, S_2} \vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \quad (44)$$

В лемме через Π_i обозначены проекторы на подпространства $\vec{G}_i(\Omega_2, \rho_2)$ ($i = 1, 3$), а через $\tilde{\gamma}_i$ – операторы нормальных следов на границы Γ_i ($i = 1, 3$) для полей, заданных в области Ω_2 .

1.7. Приведение системы к одному дифференциально-операторному уравнению. Свойства операторных блоков. Систему (43) удобно записать в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$\tilde{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3) \oplus H_1 \oplus H_3 \oplus \tilde{H}^{(1)}$$

в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 G_1 & 0 & M_5 \\ 0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 G_3 & M_4 \\ -\rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_3 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_3 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_3 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{f}_v \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $H_i = L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_i\}$ ($i = 1, 3$), $\tilde{H}^{(1)} = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_1) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_3)$, $v = (\vec{v}_2; \tilde{\rho}_1; \tilde{\rho}_2; \tilde{\rho}_3)^t$.

Опишем структуру операторов, входящих в (45).

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 + \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)G_1S_{1,1}\gamma_1, & K_2 &= \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)G_1S_{1,2}\gamma_3, \\ K_3 &= \rho_1^{-1}(b)\rho_2(b)G_3S_{2,1}\gamma_1, & K_4 &= I_3 + \rho_1^{-1}(b)\rho_2(b)G_3S_{2,2}\gamma_3. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 = \rho_2^{-1}\nabla\Psi$, введем оператор B следующим образом $B\tilde{\rho}_2 := \Psi$, тогда

$$\begin{aligned} M_1 &= (0; -\tilde{C}_1^*; -\tilde{C}_{2,1}^*D_1; 0)^t, & M_2 &= (0; 0; -\tilde{C}_{2,1}^*D_3; -\tilde{C}_3^*)^t, \\ M_4 &= (0; 0; -\rho_1^{-1}(b)G_3P_{\Gamma_3}B; \tilde{C}_3), & M_5 &= (0; \tilde{C}_1; -\rho_1^{-1}(0)G_1P_{\Gamma_1}B; 0), \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{C}_{2,0}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & I_v &= \text{diag}(I_0; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_1)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_3)}), \end{aligned} \quad (46)$$

I_i, I_{Γ_i} ($i = 1, 3$), $I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_j)}$ ($j = \overline{1, 3}$) — единичные операторы в пространствах $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, H_i ($i = 1, 3$), $\mathfrak{L}_2(\Omega_j)$ ($j = \overline{1, 3}$) соответственно.

Правая часть в (45) имеет вид:

$$\widehat{f}_i := P_{0,S_i} \vec{f} - \rho_i^{-1} G_i P_{\Gamma_i} F \quad (i = 1, 3), \quad \widehat{f}_v := (P_0 \vec{f}; 0; 0; 0)^t.$$

Начальные условия (43) для уравнения (45) также можно записать более коротко:

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1^0; \vec{u}_3^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0; v^0)^t = \\ = (P_{0,S_1} \vec{u}_1^0(x); P_{0,S_3} \vec{u}_3^0(x); \zeta_1^0(\widehat{x}); \zeta_2^0(\widehat{x}); P_0 \vec{u}_2^0(x), \tilde{\rho}_1^0(x), \tilde{\rho}_2^0(x), \tilde{\rho}_3^0(x))^t. \end{aligned} \quad (47)$$

Итогом этого пункта является

Теорема 2. *Классическое решение задачи (22) — (26) является решением задачи Коши (45), (47) в гильбертовом пространстве \tilde{H} .*

Изучим свойства операторных блоков в задаче (45).

Лемма 6. *Оператор G_i ($i = 1, 3$) изометрически действует из пространства $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$).*

Доказательство. Обозначим через $\rho_1^{-1} \nabla \varkappa$ результат действия оператора G_1 , тогда для любого $\tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$\begin{aligned} \|G_1 \tau_1\|_{\vec{G}_1(\Omega_1, \rho_1)}^2 &= \int_{\Omega_1} \rho_1^{-1}(x_3) |\nabla \varkappa|^2 d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} \nabla \varkappa \cdot \overline{\rho_1^{-1}(x_3) \nabla \varkappa} d\Omega_1 = \\ &= - \int_{\Omega_1} \varkappa \cdot \overline{\nabla \cdot (\rho_1^{-1}(x_3) \nabla \varkappa)} d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \varkappa \cdot \overline{\rho_1^{-1}(x_3) \nabla \varkappa \cdot \vec{n}_1} dS = \\ &= \int_{\Gamma_1} \rho_1(0) \tau_1 \cdot \overline{\rho_1^{-1}(0) \nabla \varkappa \cdot \vec{n}_1} d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \rho_1(0) \tau_1 \overline{C_{0,4}^{-1} \tau_1} d\Gamma_1 = \|C_{0,4}^{-\frac{1}{2}} \tau_1\|_{H_1}^2 = \|\tau_1\|_{H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор G_1 изометрически действует из пространства $H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$. Подобное свойство аналогично доказывается для оператора G_3 . Лемма доказана. \square

Лемма 7. *Операторы γ_1 и G_1 взаимно сопряженные. При этом $\gamma_1 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \rightarrow H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, $G_1 : H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$.*

Доказательство. Возьмем функцию $p \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$, являющуюся решением задачи II при $\tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}$, и поле $\vec{v} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$. В силу условий $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (в Ω_1) и $\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$ (на S_1) получим

$$\begin{aligned}
 (\rho_1^{-1}(x_3)\nabla p, \vec{v})_{\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} &= \int_{\Omega_1} \nabla p \cdot \vec{v} \, d\Omega_1 = - \int_{\Omega_1} p \operatorname{div} \vec{v} \, d\Omega_1 + \\
 &+ \int_{\partial\Omega_1} p (\vec{v} \cdot \vec{n}_1) \, dS = \int_{\Gamma_1} p \overline{\gamma_1 \vec{v}} \, d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \rho_1(0) \tau_1 \overline{\gamma_1 \vec{v}} \, d\Gamma_1
 \end{aligned}$$

или

$$(G_1 \tau_1, \vec{v})_{\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} = (\tau_1, \gamma_1 \vec{v})_{H_1}, \quad \forall \tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \vec{v} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1). \quad (48)$$

Тождество (48) есть определение сопряженного оператора и, таким образом, $\gamma_1^* = G_1$. Тождество (48) можно распространить на $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$, так как элементы из $\vec{J}_0(\Omega_1, \rho_1)$ ортогональны элементам из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$ и так как $\vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$ (на $\partial\Omega_1$) для $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega_1, \rho_1)$. Таким образом, $\gamma_1 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \rightarrow H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, а $G_1 : H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$, и лемма доказана. \square

Аналогично может быть доказана следующая лемма.

Лемма 8. *Операторы γ_3 и G_3 — взаимно сопряженные. При этом $\gamma_3 : \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3) \rightarrow H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$, $G_3 : H_{\Gamma_3}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$.*

Введем следующее обозначение (операторы K_i ($i = \overline{1, 4}$) введены в (45))

$$K := \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Лемма 9. *Оператор K из (49) ограничен.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты K_i ($i = \overline{1, 4}$) матрицы K . Проверим, например, ограниченность оператора $K_2 = \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)G_1S_{1,2}\gamma_3$. Он действует из $\vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$ в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$. Возьмем произвольное поле $\vec{w}_3 \in \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$. В силу определения пространства $\vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$ элемент $\gamma_3 \vec{w}_3 \in H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$. С помощью вспомогательной задачи IV найдем функцию Ψ_2 при условии $\eta_2 = \gamma_3 \vec{w}_3$ (на Γ_3). Эта задача однозначно разрешима. Далее,

$$S_{1,2}\gamma_3 \vec{w}_3 = S_{1,2}\eta_2 = \rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1} \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, действие рассматриваемого оператора, с точностью до умножения на постоянную, следующее:

$$G_1S_{1,2}\gamma_3 \vec{w}_3 = G_1S_{1,2}\eta_2 = G_1P_{\Gamma_1}(\Psi_2|_{\Gamma_1}) =: \vec{u}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1).$$

Все операторы, участвующие в этих рассуждениях, ограничены, следовательно оператор K_2 ограничен. Остальные коэффициенты K_i подобного типа. Таким образом, оператор K ограничен, и лемма доказана. \square

Лемма 10. Оператор K самосопряженный в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$.

Доказательство. Используя определения операторов K_i , свойства решений III и IV вспомогательных задач, разложения для Φ_2 (см. (36)), лемму 4, сопряженность соответствующих операторов γ_k и G_k ($k = 1, 3$), непосредственно находится квадратичная форма оператора K в комплексном гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho) := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$:

$$(K\vec{u}, \vec{u})_{\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho)} = \int_{\Omega_1} \rho_1(x_3)|\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_3} \rho_3^{-1}(x_3)|\vec{u}_3|^2 d\Omega_3 + \int_{\Omega_2} \rho_2^{-1}(x_3)|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2. \quad (50)$$

Из формулы (50) видно, с учетом леммы 9, что оператор K — самосопряженный. Лемма доказана. \square

Лемма 11. Оператор K положительно определенный.

С учетом лемм 2, 3 и 4 операторы M_i ($i = \overline{1, 5}$), введенные в (46), являются ограниченными в соответствующих пространствах, при этом $-M_5^* = M_1$, $-M_4^* = M_2$.

Введем следующие обозначения:

$$y := (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \quad f := (\hat{f}_1; \hat{f}_3; 0; 0; \hat{f}_v)^t,$$

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1}g\Delta\rho_1 I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1}g\Delta\rho_3 I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1}g\Delta\rho_1 G_1 & 0 & M_5 \\ 0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1}g\Delta\rho_3 G_3 & M_4 \\ -\rho_1^{-1}g\Delta\rho_1 \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3^{-1}g\Delta\rho_3 \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_3) \oplus \mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_3) \oplus \tilde{H}^{(1)}. \quad (51)$$

Тогда задача Коши (45), (47) запишется в виде

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f, \quad y(0) = y^0. \quad (52)$$

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (2) — (5) такие функции \vec{u}_i , $\tilde{\rho}_i$, p_i ($i = \overline{1, 3}$) и ζ_j ($j = 1, 2$), для которых вектор $y(t) = (\vec{u}_1(t); \vec{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t); v(t))^t$ является сильным решением задачи Коши (52) и

выполнены тривиальные соотношения (13), (20), (21) в смысле теории обобщенных функций (теории распределений). В свою очередь сильным решением задачи Коши (52) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ для любого t из промежутка $[0, T]$, $\mathcal{A}_0 y(t) \in C([0, T]; \tilde{H})$, $y(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H})$ и для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (52). \square

Для доказательства теоремы существования сильного решения задачи Коши (52) осуществим следующие преобразования.

Произведем в уравнении (52) замену $y(t) = e^t y_1(t)$. В результате получим уравнение относительно y_1 :

$$\mathcal{R} \frac{dy_1}{dt} + (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P})y_1 = e^{-t} f, \quad (53)$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P} \gg 0$. Это возможно, так как $\mathcal{R} \gg 0$ в \tilde{H} .

Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})$ оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ из (51). На $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ является равномерно аккретивным, то есть

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}) \gg 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Кроме того, оператор $(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})^+ := (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})^*|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)}$, как нетрудно проверить, также является равномерно аккретивным на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Однако он не является замкнутым из-за того, что оператор γ_i ($i = 1, 3$) неограничен в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) и $\mathcal{D}(\gamma_i) \supset \mathcal{D}(A_i)$ ($i = 1, 3$). Таким образом, оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ не является максимальным аккретивным.

Обозначим

$$g\rho_i^{-1}\Delta\rho_i\gamma_i A_i^{-\frac{1}{2}} =: Q_i, \quad g\rho_i^{-1}\Delta\rho_i A_i^{-\frac{1}{2}} G_i =: Q_i^+ \quad (i = 1, 3).$$

Имеет место

Лемма 12. $Q_i^+ \subset Q_i^*$, $Q_i^+ = Q_i^*|_{\mathcal{D}(G_i)}$, $\overline{Q_i^+} = Q_i^*$ ($i = 1, 3$).

Доказательство. Для любого $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$ и $\zeta_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ имеем

$$\begin{aligned} (Q_1 \vec{u}_1, \zeta_1)_{H_1} &= (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1\gamma_1 A^{-\frac{1}{2}} \vec{u}_1, \zeta_1)_{H_1} = (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A^{-\frac{1}{2}} \vec{u}_1, G_1 \zeta_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} = \\ &= (\vec{u}_1, g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A^{-\frac{1}{2}} G_1 \zeta_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} = (\vec{u}_1, Q_1^+ \zeta_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Q_1^+ \subset Q_1^*$ и $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(G_1)}$. Покажем, что оператор Q_1^+ ограничен на $\mathcal{D}(G_1)$. Оператор Q_1 ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$ в H_1 . Действительно, оператор $A^{-\frac{1}{2}}$ отображает $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$ на $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$, а оператор γ_1 , согласно теореме о следах, компактен как оператор из $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$ в H_1 . Таким образом оператор

Q_1 ограничен (даже компактен). Отсюда следует, что оператор Q_1^* тоже ограничен. Тогда для любого $\zeta_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ имеет место следующее неравенство:

$$\|Q_1^+ \zeta_1\|_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} = \|Q_1^* \zeta_1\|_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)} \leq \|Q_1^*\| \cdot \|\zeta_1\|_{H_1}.$$

Следовательно, оператор Q_1^+ ограничен на $\mathcal{D}(G_1)$, а потому расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q_1^* , то есть $\overline{Q_1^+} = Q_1^*$. Соответствующие утверждения леммы для операторов с индексом $i = 3$ доказываются аналогично. \square

Оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ допускает замыкание (см. [2], с. 109) $\mathcal{A} := \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})}$. В этом случае имеет место соотношение

$$\mathcal{A} + (\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})} + (\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})} + \overline{(\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P})},$$

так как оператор $\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}$ ограничен и задан на всем пространстве. Учитывая это обстоятельство, мы будем замыкать только оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$.

Лемма 13. *Замыкание $\mathcal{A} := \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})}$ оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ есть максимальный аккретивный оператор. При этом*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \mid \mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1), \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3)\},$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}_A \mathcal{Q}_A \mathcal{T}_A,$$

где

$$\mathcal{T}_A := \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^* & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^* & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix},$$

$$F_1 := M_5^* A^{-\frac{1}{2}}, \quad F_3 := M_4^* A^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ представим в виде: $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P} = \mathcal{T}_A \mathcal{Q}_A^+ \mathcal{T}_A$,

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A^+ := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^+ & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^+ & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix}.$$

Замыкание \mathcal{A} оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ состоит в замене в среднем блоке оператора Q_i^+ на Q_i^* ($i = 1, 3$). Действительно, после такого замыкания оператор \mathcal{A} представлен в виде произведения $\mathcal{A} = T_1 T_2 T_1$ замкнутых операторов. При этом $T_1^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H})$, так как оператор $A_i^{-\frac{1}{2}}$ ограничен в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$). Далее непосредственно проверяется, что все элементы обратной матрицы T_2^{-1} являются ограниченными операторами, а значит $T_2^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ и оператор \mathcal{A} замкнут.

Найдем область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} . Прежде всего, из представления для оператора \mathcal{A} следует, что $\vec{u}_i \in \mathcal{D}(A_i^{\frac{1}{2}})$ ($i = 1, 3$). Далее, должно иметь смысл следующее выражение

$$\begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + Q_1^* \zeta_1 + F_1^* v \\ \mu_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 - Q_3^* \zeta_2 + F_2^* v \\ -Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + \varepsilon \zeta_1 \\ Q_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + \varepsilon \zeta_2 \\ -F_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 - F_2 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 + (\varepsilon I_v + M_3)v \end{pmatrix},$$

то есть $\mu_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + Q_1^* \zeta_1 + F_1^* v \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$, $\mu_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 - Q_3^* \zeta_2 + F_2^* v \in \mathcal{D}(A_3^{\frac{1}{2}})$ или

$$\mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 + A_1^{-1} M_3 v \in \mathcal{D}(A_1), \quad \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 + A_3^{-1} M_4 v \in \mathcal{D}(A_3).$$

Таким образом заключаем, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \mid \mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1), \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3) \}.$$

Заметим, например, что условие $\vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ следует из условия $\mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1)$. Действительно, так как $\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ и $A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ для любого $\zeta_1 \in H_1$, то \vec{u}_1 также принадлежит $\mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$. Лемма доказана. \square

Рассмотрим теперь уравнение с замкнутым оператором

$$\mathcal{R} \frac{dy_1}{dt} + \mathcal{A} y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}) y_1 = e^{-t} f. \tag{54}$$

Здесь оператор $\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}$ — уже максимальный аккретивный. Оператор \mathcal{R} — самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в \tilde{H} , значит, для него существует оператор \mathcal{R}^{-1} , обладающий теми же свойствами. Преобразуем (54) к виду

$$\frac{dy_1}{dt} = -\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}) y_1 + \mathcal{R}^{-1} e^{-t} f, \quad y_1(0) = y^0. \tag{55}$$

Введем в \tilde{H} эквивалентную норму по формуле

$$\langle y_1, y_1 \rangle := (\mathcal{R} y_1, y_1)_{\tilde{H}(1)} = (\mathcal{R}^{\frac{1}{2}} y_1, \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} y_1)_{\tilde{H}(1)}.$$

Эквивалентность этой нормы старой норме следует из свойств оператора \mathcal{R} .

Легко проверить, что оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})$ будет максимальным диссипативным в новом скалярном произведении и, значит, задача Коши (55) будет равномерно корректной (см. [2], с. 166). Оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})$ порождает сжимающую в новом скалярном произведении полугруппу операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-t\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}))$.

Теорема 3. *Задача Коши (55) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, выражаемое формулой $y_1(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{R}^{-1}e^{-\tau}f(\tau) d\tau$, если выполнены следующие условия: $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H})$. \square*

Таким образом, мы получили, что задача Коши

$$\mathcal{R} \frac{dy_1}{dt} + \mathcal{A}y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})y_1 = e^{-t}f, \quad y_1(0) = y^0$$

имеет единственное сильное решение, если $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H})$, в частности, если $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Если обозначить $y_1 =: (\vec{u}_{11}; \vec{u}_{31}; \zeta_{11}; \zeta_{21}; v_1)^t$, то уравнение (54) можно записать в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \frac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_2 \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_1(\mu_1\vec{u}_{11} + A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_{11}) + M_5v_1 \\ \quad + K_1\vec{u}_{11} + K_2\vec{u}_{31} = e^{-t}\hat{f}_1, \\ K_3 \frac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_4 \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_3(\mu_3\vec{u}_{31} - A_3^{-\frac{1}{2}}Q_3^*\zeta_{21}) + M_4v_1 \\ \quad + K_3\vec{u}_{11} + K_4\vec{u}_{31} = e^{-t}\hat{f}_2, \\ g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 \frac{d\zeta_{11}}{dt} - Q_1A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_{11} + \varepsilon\zeta_{11} + (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 - \varepsilon)\zeta_{11} = 0, \\ g\rho_3^{-1}(b)\Delta\rho_3 \frac{d\zeta_{21}}{dt} + Q_3A_3^{\frac{1}{2}}\vec{u}_{31} + \varepsilon\zeta_{21} + (g\rho_3^{-1}(b)\Delta\rho_3 - \varepsilon)\zeta_{21} = 0, \\ \frac{dv_1}{dt} + M_1\vec{u}_{11} + M_2\vec{u}_{31} + (\varepsilon I_v + M_3)v_1 + (1 - \varepsilon)v_1 = e^{-t}\hat{f}_3, \\ (\vec{u}_{11}; \vec{u}_{31}; \zeta_{11}; \zeta_{21}; v_1)^t(0) = (\vec{u}_{11}; \vec{u}_{31}; \zeta_{11}; \zeta_{21}; v_1)^{0t}. \end{array} \right. \quad (56)$$

Заметим, что скобки в первых двух уравнениях раскрыть пока нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать $\mathcal{D}(A_i^{\frac{1}{2}})$ и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A_i)$ ($i = 1, 3$).

Для обратного перехода от задачи (55) к задаче (53) умножим третье уравнение системы на e^t , тогда

$$g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 \frac{d}{dt}(e^t\zeta_{11}) = e^tQ_1A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_{11}.$$

Отсюда получим, что $\zeta_{11}(t)$ выражается по формуле

$$\zeta_{11}(t) = \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1} \int_0^t e^{-(t-s)} Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_{11}(s) ds + e^{-t} \zeta_1^0. \quad (58)$$

Подставляя функцию (58) в первое уравнение системы (56), получим

$$K_1 \frac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_2 \frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_1 \left(\mu_1 \vec{u}_{11} + e^{-t} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 + \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \int_0^t e^{-(t-s)} Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_{11}(s) ds \right) + K_1 \vec{u}_{11} + K_2 \vec{u}_{31} = e^{-t} \hat{f}_1, \quad (59)$$

Из теоремы 3 следует, что функция

$$\mu_1 \vec{u}_{11} + e^{-t} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 + \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \int_0^t e^{-(t-s)} Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_{11}(s) ds =: \vec{v}^1(t) \quad (60)$$

принадлежит $\mathcal{D}(A_1)$ для любого $t \in [0, T]$ и $\vec{v}^1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$. Если $\zeta_1^0 \in \mathcal{D}(G_1)$, тогда по лемме 12

$$Q_1^* \zeta_1^0 = Q_1^+ \zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} G_1 \zeta_1^0$$

и поэтому

$$A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-1} G_1 \zeta_1^0 \in \mathcal{D}(A_1).$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{K} := A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \gamma_1.$$

Введем $\mathcal{D}(A_1)$ как гильбертово пространство с нормой графика

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{D}(A_1)} := \|A_1 \vec{v}\|. \quad (61)$$

Тогда сужение $\mathfrak{K}^1 := \mathfrak{K}|_{\mathcal{D}(A_1)}$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{D}(A_1)$. Действительно, если $\vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}}) = \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$, тогда $\gamma_1 \vec{u}_{11} \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(G_1)$ и по лемме 12 имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^1 \vec{u}_{11} &= g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \gamma_1 \vec{u}_{11} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^+ \gamma_1 \vec{u}_{11} = \\ &= (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1)^2 A_1^{-1} G_1 \gamma_1 \vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1). \end{aligned}$$

Так как оператор $G_1 \gamma_1$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1) = \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$, то $\mathfrak{K}^1 : \mathcal{D}(A_1) \rightarrow \mathcal{D}(A_1)$ есть ограниченный оператор. Доказанный

факт позволяет рассмотреть соотношение (60) как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $\mathcal{D}(A_1)$ (с нормой графика (61)). Здесь функция $\vec{v}^1(t) - e^{-t}A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1^0 \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ и ядро $\mathfrak{K}^1 e^{-(t-s)}$ интегрального оператора непрерывно по t, s на $\mathcal{D}(A_1)$. Поэтому задача (60) имеет единственное решение $\vec{u}_{11} \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ и каждое слагаемое в (60) есть элемент из $C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$. Таким образом, в уравнении (59) и в первом уравнении (56) можем раскрыть скобки. Аналогичные рассуждения позволяют раскрыть скобки и во втором уравнении (56). Тем самым получим, что (53) выполнено для функции $y_1(t) = (\vec{u}_{11}; \vec{u}_{31}; \zeta_{11}; \zeta_2; v_1)^t$. Осуществляя в уравнении (53) обратную замену $y_1(t) = e^{-t}y(t)$, получим, что для задачи Коши

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f, \quad y(0) = y^0 \quad (62)$$

имеет место следующая

Теорема 4. *Задача Коши (62) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены следующие условия*

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H}). \quad \square$$

В теореме 4 содержится результат о существовании и единственности сильного решения задачи Коши (62). Переформулируем результат для задачи (2)–(5).

Теорема 5. *Начально-краевая задача (2)–(5) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены условия:*

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A_1), \quad \vec{u}_3^0 \in \mathcal{D}(A_3), \quad P_0 \vec{u}_2^0 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2), \\ & \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{\rho}_i^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \quad (i = \overline{1, 3}), \\ \text{причем} \quad & \gamma_i P_{0, S_i} \vec{u}_i^0(x) = -\tilde{\gamma}_i \Pi_i P_{h, S_2} \vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \\ 2^0 \quad & \vec{f}(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho)) \quad (\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2). \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Проведено построение, которое позволяет получить аналог известного ортогонального разложения Вейля, пространства вектор-функций, суммируемых с квадратом по области, приспособленного к исследованию данной задачи. Путем проектирования уравнений движения на соответствующие ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач

и их операторов начально-краевая задача, описывающая малые движения данной гидродинамической системы, проводится к задаче Коши. Используя известные теоремы о разрешимости, удается доказать теорему о существовании и единственности сильного решения исходной начально-краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
KOPACHEVSKY N.D., KREIN S. G., NGO ZUY CAN (1989) Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. Operator Theory: Advances and Application. Moscow.
2. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
KREIN S. G. (1967) Linear differential equations are in Banach spaces. Moscow.

Статья поступила в редакцию 20.11.2015

УДК: 517.6+530.1

MSC2010: 37L10, 35Q60

ДИНАМИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ

© О. В. Шиян

КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО

АКАДЕМИЯ БИОРЕСУРСОВ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ

ФАКУЛЬТЕТ МЕХАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА И ТЕХНОЛОГИИ ПЕРЕРАБОТКИ СЕЛЬСКОХОЗПРОДУКЦИИ

ПОС. АГРАРНОЕ, СИМФЕРОПОЛЬ, 295492, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

E-MAIL: olgshiyana@yandex.ru

**THE DYNAMICS OF PERIODIC SOLUTIONS OF NON-STATIONARY COMBUSTION
ALONG THE STRIP.**

Shiyana O. V.

Abstract. Physical objects, describes the distribution of self-oscillating system is the combustion front propagates in a homogeneous medium. Experimental studies conducted Merzhanov, Borovinskaya showed that the stationary mode of propagation of the front becomes unstable if the activation energy of the exothermic reaction exceeds a certain value. In the instability of the stationary mode combustion front, staying flat, moving in an oscillatory mode. In works of Aldushin, Zeldovich, Malomed unsteady regimes of propagation of the combustion front was effectively described the phenomenological equation for the coordinate points of the front of the report in a system where the front of the average rests. In the simplest case - a singularly perturbed parabolic equation of Van der Pole type (1). Among the most interesting of unsteady combustion modes distinguish the spin waves are found in particular in the combustion of gas-free systems. In contrast to the self-oscillating unsteady combustion, when the reaction front is flat spin modes in running the centers arise reactions pervert the front and leaving a spiral track on the surface of the burned-out cylinder. Study of spin combustion modes are devoted works of Kolesov, Rozov, Samoilenko, Belan. In this paper the phenomenological equation of propagation of nonstationary combustion regimes along the strip described by a parabolic equation of Van der Pole type with small diffusion and Neumann boundary conditions. The above equation allows analytically investigate the distribution of the curvature of the waves along the front in problems with various boundary conditions. This problem can be represented as a system of coupled ordinary and parabolic equations, and therefore according to Henry, is soluble in the phase space E . We consider the problem of existence, asymptotic form and of the stability of spatially inhomogeneous periodic solutions bifurcating from a spatially homogeneous - phase of the waves and the zero solution - standing waves. To solve this problem using methods of nonlinear mechanics, such as the method of central manifolds and Galerkin method. Shows the theorem on the existence of asymptotic stability of the form and the first self-similar cycle bifurcating from losing the stability of phase waves of the original problem in a small neighborhood of the

bifurcation parameter. Through numerical calculations and finite-dimensional approximation of the Galerkin held bifurcation analysis of self-similar regimes by removing the critical parameter in the region. The values of the bifurcation parameter in which a spatially inhomogeneous periodic solutions bifurcating from a spatially homogeneous and neutral solutions become resistant. Mechanism of finding of stability this solutions is described.

Keywords: *combustion, bifurcation, periodic solutions, orbital stability, auto-model circles, parabolic equation.*

ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные режимы распространения фронта горения могут быть эффективно описаны феноменологическим уравнением [1, 2]

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta \left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta \dot{\xi}} \right), \quad (1)$$

для координаты ξ точек фронта в системе отсчета, в которой фронт в среднем покоится. Величина ξ зависит от времени t и от координаты x , отсчитываемой вдоль фронта, в то время как сам фронт движется в направлении оси y . Точка означает дифференцирование по времени t , $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \delta \ll 1$ — инкремент неустойчивости, Δ — одномерный лапласиан.

Феноменологическое уравнение (1) учитывает два основных фактора, относящихся к нестационарным процессам распространения фронта: наличие автоколебательной неустойчивости плоского фронта, стабилизируемой нелинейными эффектами, и наличие взаимодействия тепловых слоев, примыкающих к зоне экзотермических реакций. Структура этих слоев определяется не только скоростью и температурой прилегающего участка реакционной поверхности, но и распределением температуры вдоль всего фронта реакции. Уравнение (1) позволяет аналитически исследовать распространение волн искривления вдоль фронта в задачах с различными краевыми условиями.

Исследование решений (1) на окружности радиуса R типа бегущих волн представляет интерес, поскольку эти решения соответствуют спиновым волнам горения кругового цилиндра радиуса R . В [2] установлено, что число бегущих волн (1) на окружности радиуса R неограниченно увеличивается при увеличении R и фиксированных прочих параметрах. Необходимое условие устойчивости m -ой спиновой волны было получено в [2], а критерии её устойчивости установлены в [7, 4] ($\beta = 0$), в [5] ($\beta \geq 0$).

В данной работе рассматривается задача о горении теплоизолированной полосы ширины l , т. е. уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1)–(2) в случае $\beta = 0$ рассматривалась в [3, 8]. Согласно [3, 8] задача (1)–(2) имеет решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы за исключением периодического решения $\xi_0 = \cos t + O(\delta)$ — синфазной волны.

Согласно проведенному в работах [9, 10, 11] анализу, при $\beta > 0$ периодическое решение ξ_0 теряет устойчивость и имеет место бифуркация рождения из ξ_0 двух экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных периодических по t решений. Таким образом, изучается задача возникновения пространственно неоднородных периодических режимов из пространственно однородного.

В данной работе продолжено изучение асимптотики пространственно неоднородных периодических режимов бифурцирующих из пространственно однородного, а также стоячих волн — периодических решений, бифурцирующих из нулевого решения задачи (1)–(2). Проведен численный анализ характера устойчивости указанных решений при удалении бифуркационного параметра в область надкритичности.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМА ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ РЕЖИМОВ ЗАДАЧИ (1)–(2)

Задачу (1)–(2) можно представить в виде системы спаренных “обыкновенного” и “параболического” дифференциальных уравнений, следовательно, согласно [12, 9, 10, 11], задача (1)–(2) разрешима в пространстве $E = H \times H^1$. Здесь H^s , $s \geq 0$, шкала пространств, порожденная на $[0, l]$ оператором $-\Delta$ при условии (2). Норма в H^s определяется равенством $\|u\|_S^2 = \langle -\Delta^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $H = L_2(0, l)$.

Справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. *Существует δ_0 такое, что при $0 < \delta < \delta_0$ и малых $\rho - \rho_0 > 0$ ($\rho_0 = \beta^{-1}$) задача (1), (2) имеет периодические по t пространственно неоднородные решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$, где $\omega(\delta) = 1 + O(\delta^2)$ — гладкая функция δ . Справедливо равенство:*

$$\xi_1^\pm(t, \theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\delta, \rho - \rho_0), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (3)$$

$$\alpha_k = \alpha_k(\rho) = 1 - \frac{k^2}{\rho^2} + \beta \frac{k}{\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho = 2\pi l/\lambda.$$

Решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$ экспоненциально орбитально устойчивы при малых $\delta, \rho - \rho_0$.

Указанная теорема носит локальный характер. Для доказательства теоремы в [9] использовалась методика работ [13, 5].

2. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХМОДОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ГАЛЁРКИНА ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ (1) – (2)

Согласно [9, 10, 11], для построения асимптотики приближенных периодических по t пространственно неоднородных режимов задачи (1) – (2) использовалась двухмодовая аппроксимация Галёркина для исходной задачи. В этом случае приближенные решения задачи (1), (2) были построены в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^1 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta \sigma_3(z, \bar{z}, \theta), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

где $\sigma_3(z, \bar{z}, \theta)$ ($\sigma_3(z, \bar{z}, \theta + 2\pi) = \sigma_3(z, \bar{z}, \theta)$) — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = 0, 1$, удовлетворяет уравнению:

$$\dot{z}_k = (i + \delta \alpha_k) z_k + \delta b_k(z, \bar{z}), \quad z = (z_0, z_1), \quad (5)$$

где $b_k(z, \bar{z})$ — кубическая форма по z, \bar{z} .

Подставим (4), (5) в уравнение (1) и приравняем затем коэффициенты при δ . В результате относительно $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ получим линейное неоднородное уравнение:

$$\mathcal{B} \sigma_1(z, \bar{z}, \theta) = \frac{8}{3} i \left(\sum_{k=0}^1 (z_k - \bar{z}_k) \cos k\theta \right)^3 - i M \sum_{k=0}^1 (b_k - \bar{b}_k) \cos k\theta, \quad (6)$$

где

$$M b(z, \bar{z}) = b(z, \bar{z}) + \frac{\partial b}{\partial z} z - \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} \bar{z},$$

оператор \mathcal{B} является диагональным на пространстве многочленов относительно z, \bar{z} .

При этом

$$\mathcal{B} z^\alpha \bar{z}^\beta = \left(1 - \sum_{j=0}^1 (\alpha_j - \beta_j)^2 \right) z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

где $z^\alpha = \prod_{k=0}^1 z_k^{\alpha_k}$, $\bar{z}^\beta = \prod_{k=0}^1 \bar{z}_k^{\beta_k}$.

В соответствии с методом Галёркина, из условия разрешимости (6) однозначно находятся b_k , $k = 0, 1$.

Подставив найденные b_k , в (5) и выполнив замену $z_k \mapsto \frac{1}{2}z_k \exp(it)$, $k = 0, 1$, а затем в полученной относительно z_k системе осуществив преобразование $t = \tau/\delta$, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_0(\alpha_0 - |z_0|^2 - |z_1|^2) - \frac{1}{2}\bar{z}_0 z_1^2, \\ z'_1 &= z_1(\alpha_1 - 2|z_0|^2 - \frac{3}{4}|z_1|^2) - \bar{z}_1 z_0^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь штрих — дифференцирование по τ . При этом \bar{z}_k , $k = 0, 1$ удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям. Таким образом, анализ решений задачи (1)–(2), согласно методу Галёркина конечномерных приближений, сводится к анализу характера устойчивости решений системы (7).

Отметим, что система (7) является S^1 — эквивариантной системой. Она инвариантна относительно группы вращений окружности $(z_0, z_1) \mapsto \exp(i\varphi)(z_0, z_1)$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Система (7), в сущности, — градиентная система. Действительно, после преобразования

$$z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1 \mapsto z_0, \bar{z}_0, \sqrt{2}z_1, \sqrt{2}\bar{z}_1$$

она представима в виде

$$z'_k = -\frac{\partial G(z, \bar{z}, \rho)}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 0, 1,$$

где

$$-G = \alpha_0|z_0|^2 + \alpha_1|z_1|^2 - \frac{1}{2}|z_0|^4 - \frac{3}{4}|z_1|^4 - \frac{1}{2}\bar{z}_0^2 z_1^2 - \frac{1}{2}z_0^2 \bar{z}_1^2 - 2|z_0|^2|z_1|^2. \quad (8)$$

Бифуркационный анализ системы (7) выявил следующую её динамику. Система (7) для любого значения $\alpha_1 = \alpha_1(\rho)$ имеет нулевое решение и окружность стационарных точек

$$S_{1,0}(\alpha_1) = \{\exp(i\varphi)(1, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Устойчивость окружностей стационарных точек $\{\exp(i\varphi)(z_0, z_1) \mid \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$, определяется матрицей:

$$Q_1(\rho) = \begin{pmatrix} 1 - 2|z_0|^2 - |z_1|^2 & -z_0^2 - \frac{1}{2}z_1^2 & -z_0\bar{z}_1 - \bar{z}_0z_1 & -z_0z_1 \\ -\bar{z}_0^2 - \frac{1}{2}\bar{z}_1^2 & 1 - 2|z_0|^2 - |z_1|^2 & -\bar{z}_0\bar{z}_1 & -z_0\bar{z}_1 - \bar{z}_0z_1 \\ -2z_0\bar{z}_1 - 2\bar{z}_0z_1 & -2z_0z_1 & \alpha_1 - 2|z_0|^2 - \frac{3}{2}|z_1|^2 & -z_0^2 - \frac{3}{4}z_1^2 \\ -2\bar{z}_0\bar{z}_1 & -2z_0\bar{z}_1 - 2\bar{z}_0z_1 & -\bar{z}_0^2 - \frac{3}{4}\bar{z}_1^2 & \alpha_1 - 2|z_0|^2 - \frac{3}{2}|z_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Анализируя спектр матрицы Q_1 для окружностей стационарных точек системы (7), получаем следующие результаты.

Спектр устойчивости нулевого решения равен $\{1, 1, \alpha_1, \alpha_1\}$. Таким образом, если $\alpha_1 < 0$, то нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 2. Увеличение α_1 и прохождение им значения 0 приводит к увеличению индекса неустойчивости нулевого решения на два порядка, что приводит к бифуркации окружности стационарных точек $S_{0,1}(\alpha_1)$:

$$S_{0,1}(\alpha_1) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(0, 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}} \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\},$$

которые при рождении также имеют индекс неустойчивости равным 2.

Спектр устойчивости $S_{0,1}(\alpha_1)$ равен $\left\{ 0, -2\alpha_1, 1 - 2\alpha_1, \frac{1}{3}(3 - 2\alpha_1) \right\}$. Следовательно, $S_{0,1}(\alpha_1)$ остается неустойчивой на промежутке $\left(0; \frac{3}{2} \right)$ изменения параметра α_1 . При этом индекс неустойчивости $S_{0,1}(\alpha_1)$, уменьшаясь на единицу, становится равным 1 при увеличении параметра α_1 и прохождении им значения $\frac{1}{2}$. В результате этой бифуркации от окружности стационарных точек $S_{0,1}(\alpha_1)$ ответвляются две окружности стационарных точек:

$$S_{0,2}^{\pm}(\alpha_1) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(\sqrt{\frac{2\alpha_1 - 1}{5}}, \pm 2\sqrt{\frac{3 - \alpha_1}{15}} \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

Зона их существования — промежуток $\left(\frac{1}{2}, 3 \right)$ изменения параметра α_1 . Спектр устойчивости $S_{0,2}^{\pm}(\alpha_1)$ равен $\left\{ 0, \frac{2}{15}(3 + 4\alpha_1), 10(2\alpha_1 - 1) + O((2\alpha_1 - 1)^2), -22\alpha_1 + 6 + O((2\alpha_1 - 1)^2) \right\}$. Таким образом, на всем промежутке существования $S_{0,2}^{\pm}(\alpha_1)$ остается неустойчивой с индексом неустойчивости 2.

Спектр устойчивости окружности $S_{1,0}(\alpha_1)$ равен $\{0, -2, \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3\}$. Таким образом, окружность $S_{1,0}(\alpha_1)$ — орбитально экспоненциально устойчива, если $\alpha_1 < 1$. Индекс её неустойчивости сохраняется равным 1 на промежутке $(1; 3)$ изменения параметра α_1 . При увеличении α_1 и прохождении им значения 3 индекс неустойчивости $S_{1,0}(\alpha_1(\rho, \beta))$ увеличивается на порядок.

Потеря устойчивости $S_{1,0}(\alpha_1(\rho, \beta))$ при $\alpha_1 = 1$ приводит к ветвлению двух устойчивых окружностей стационарных точек:

$$S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(\sqrt{3 - 2\alpha_1}, \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1} \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\},$$

зона их существования — промежуток $\left(1, \frac{3}{2} \right)$ изменения параметра α_1 . Действительно, спектр устойчивости $S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1)$ равен $\{0, -2, -2 + O((\alpha_1 - 1)^2), -2(\alpha_1 - 1) + O((\alpha_1 - 1)^2)\}$, т. е. на всем своем промежутке существования $S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1)$ сохраняет устойчивость.

В точке $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ окружности $S_{1,1}^\pm(\alpha_1)$ умирают на окружности $S_{0,1}(\alpha_1)$, которая при этом обретает устойчивость. Таким образом, на интервале $\alpha_1 > \frac{3}{2}$ единственным аттрактором системы (7) является окружность $S_{0,1}(\alpha_1)$.

При дальнейшем увеличении параметра α_1 и прохождении им значения $\alpha_1 = 3$ индекс неустойчивости $S_{1,0}(\alpha_1(\rho, \beta))$ увеличивается на порядок. При этом на $S_{1,0}(\alpha_1(\rho, \beta))$ умирают две окружности $S_{0,2}^\pm(\alpha_1(\rho, \beta))$ стационарных точек системы (7).

Учтем теперь, что бифуркационным параметром задачи (1)–(2) является $\rho = 2\pi l/\lambda$. Из равенства

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho}$$

следует, что $\alpha_1(\rho, \beta)$ монотонно возрастает на промежутке $(0, \frac{2}{\beta})$ и монотонно убывает на промежутке $(\frac{2}{\beta}, \infty)$, максимальное значение функции $\alpha_1(\rho, \beta) = 1 + \frac{\beta^2}{4}$. Таким образом, динамика системы (7) при возрастании ρ зависит от величины β . В частности, при $\beta < \sqrt{2}$ максимальное значение функции $\alpha_1(\rho, \beta)$ менее $\frac{3}{2}$, т. е. окружность стационарных точек $S_{1,1}^\pm(\alpha_1)$ системы (7) остается единственным аттрактором при удалении параметра ρ от бифуркационного значения $\rho_0 = \frac{1}{\beta}$.

Пусть теперь $\beta > \sqrt{2}$. Если $\rho \in (\frac{1}{\beta}, \beta - \sqrt{\beta^2 - 2})$, то тогда $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ – аттракторы в системе (7). В точке $\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2}$ окружности $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ умирают, передавая устойчивость окружности стационарных точек: $S_{0,1}(\rho, \beta)$. При $\rho = \beta + \sqrt{\beta^2 - 2}$ окружность $S_{0,1}(\rho, \beta)$ теряет устойчивость и от неё ответвляются две устойчивые окружности $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$. Таким образом, при $\rho > \beta + \sqrt{\beta^2 - 2}$ аттракторами в (7) являются $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$.

Согласно (4)–(5), замены $z_k \mapsto \frac{1}{2}z_k \exp(it)$, $k = 0, 1$, и приведенного выше бифуркационного анализа системы (7), есть основания утверждать, что имеет место следующая динамика периодических структур задачи (1)–(2).

1. Задача (1)–(2) для всех значений параметра ρ имеет нулевое решение и периодическое по t решение – синфазную волну:

$$\xi_0 = \xi_0(t, \theta, \delta) = \cos t + O(\delta). \quad (9)$$

2. При $\rho \in (0; \frac{1}{2}(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}))$ существует единственное глобально экспоненциально устойчивое периодическое по t решение (9) задачи (1)–(2).

3. Прохождение ρ через $\frac{1}{2}(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})$ приводит к увеличению на два порядка индекса неустойчивости нулевого решения и бифуркации из него неустойчивого периодического решения — стоячей волны $\xi_{0,1}$, где

$$\xi_{0,1} = \xi_{0,1}(t, \theta, \delta) = 4\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}} \cos t \cos \theta + O(\delta), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (10)$$

Её индекс неустойчивости 2.

4. Прохождение параметра ρ через значение $\rho = -\beta + \sqrt{\beta^2 + 2}$ уменьшает на порядок индекс неустойчивости стоячей волны $\xi_{0,1}$. В результате этой бифуркации от стоячей волны $\xi_{0,1}$ ответвляется пара периодических решений $\xi_{0,2}^\pm$:

$$\xi_{0,2}^\pm = \xi_{0,2}^\pm(t, \theta, \delta) = \pm \sqrt{\frac{2\alpha_1 - 1}{5}} \cos t + 4\sqrt{\frac{3 - \alpha_1}{15}} \cos t \cos \theta + O(\delta). \quad (11)$$

с индексом неустойчивости 2.

5. Синфазная волна ξ_0 экспоненциально орбитально устойчива при $\rho < \frac{1}{\beta}$. При переходе параметра ρ значения $\frac{1}{\beta}$ синфазная волна ξ_0 теряет устойчивость и от нее ответвляется пара экспоненциально орбитально устойчивых периодических по t решений $\xi_{1,1}^\pm$:

$$\xi_{1,1}^\pm = \xi_{1,1}^\pm(t, \theta, \delta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\delta). \quad (12)$$

Решения $\xi_{1,1}^\pm$ существуют на промежутке $\left(\frac{1}{\beta}; \beta - \sqrt{\beta^2 - 2}\right) \cup \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}; \infty\right)$ изменения параметра ρ и являются единственными аттракторами (1)–(2).

6. При $\rho = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2}$ решения $\xi_{1,1}^\pm$ умирают на стоячей волне $\xi_{0,1}$, которая при этом переходит в класс устойчивых периодических структур. Решение $\xi_{0,1}$ сохраняет устойчивость на интервале $\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}; \beta + \sqrt{\beta^2 - 2}\right)$ изменения параметра ρ . Прохождение параметра ρ через значение $\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}$ приводит к потере устойчивости стоячей волны $\xi_{0,1}$ и бифуркации из нее $\xi_{1,1}^\pm$.
7. Прохождение параметра ρ через значение $\frac{1}{4}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 8})$ приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости синфазной волны ξ_0 , на которой умирают 2 периодические структуры (11). В интервале $\left(\frac{1}{4}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 8}); \frac{1}{4}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 8})\right)$ изменения параметра ρ синфазная волна ξ_0 сохраняет индекс неустойчивости равным 2. При $\rho = \frac{1}{4}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 8})$ индекс неустойчивости синфазной волны ξ_0 становится 1, что приводит к бифуркации из нее периодических структур (11).

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХМОДОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ (1) – (2)

Для анализа устойчивости решений ξ_1^\pm , при углублении параметра ρ в область надкритичности, согласно [9, 11], строим приближенные решения задачи (1), (2) в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^3 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta\sigma_1(z, \bar{z}, \theta),$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Следуя описанной выше методике, приходим к S^1 -эквивариантной системе

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0(\alpha_0 - |z|^2) - \frac{1}{2}\bar{z}_0(d^2 - z_0^2) - f_0, \\ z_k' &= z_k(\alpha_k - |z|^2 - |z_0|^2 + \frac{1}{4}|z_k|^2) - \frac{1}{2}\bar{z}_k(d^2 + z_0^2 - z_k^2) - f_k, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (13)$$

где $|z|^2 = \sum_{k=0}^3 |z_k|^2$, $d^2 = \sum_{k=0}^3 z_k^2$,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{4}z_1^2\bar{z}_2 + \frac{1}{2}|z_1|^2z_2 + \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2z_3 + \bar{z}_2z_1z_3 + \bar{z}_3z_2z_1), \\ f_1 &= \frac{1}{4}z_1^2\bar{z}_3 + \frac{1}{2}|z_1|^2z_3 + \frac{1}{4}z_2^2\bar{z}_3 + \frac{1}{2}|z_2|^2z_3 + \\ &\quad + (\bar{z}_0z_1z_2 + \bar{z}_1z_0z_2 + \bar{z}_2z_0z_1) + (\bar{z}_0z_2z_3 + \bar{z}_2z_0z_3 + \bar{z}_3z_2z_0), \\ f_2 &= \frac{1}{2}z_1^2\bar{z}_0 + |z_1|^2z_0 + (\bar{z}_0z_1z_3 + \bar{z}_1z_0z_3 + \bar{z}_3z_0z_1) + \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2z_3 + \bar{z}_2z_1z_3 + \bar{z}_3z_2z_1), \\ f_3 &= \frac{1}{4}z_2^2\bar{z}_1 + \frac{1}{2}|z_2|^2z_1 + \frac{1}{4}z_1^2\bar{z}_1 + (\bar{z}_0z_1z_2 + \bar{z}_1z_0z_2 + \bar{z}_2z_0z_1) \end{aligned}$$

Как и выше, при $\rho < \frac{1}{\beta}$ единственным аттрактором в системе (13) является окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,0} = \{\exp(i\varphi)(1, 0, 0, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход ρ через $\rho_0 = \frac{1}{\beta}$ приводит к потере устойчивости окружности $\tilde{S}_{1,0}$: одна простая точка её спектра возрастая, проходит через нуль. При этом из $\tilde{S}_{1,0}$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(x_0, \pm ix_1, x_2, \pm ix_3), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = 0, 1, 2, 3$ — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned} x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 &= 0, \\ x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \frac{1}{4}x_2^2x_3 &= 0, \\ x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{2}x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 &= 0, \\ x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2) - x_0x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^3 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

такая, что $x_0 = 2 - \alpha_1 + O((1 - \alpha_1)^2)$.

Динамика стационарных точек системы (14) при значениях параметра $\beta = 1$ и $\beta = 3$ представлена на рис. 1 и 2 соответственно.

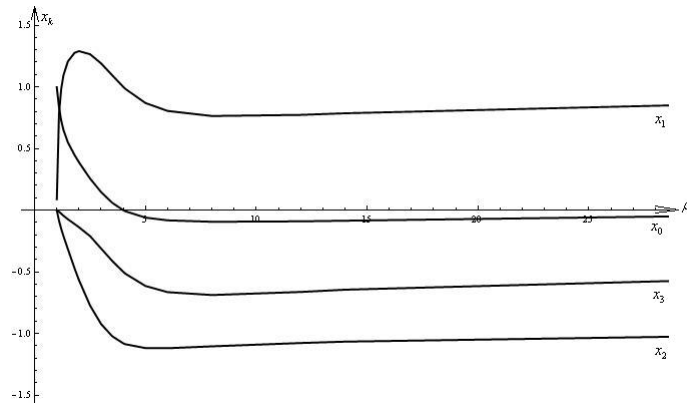


Рис. 1. Поведение стационарных точек системы (14) при $\beta = 1$.

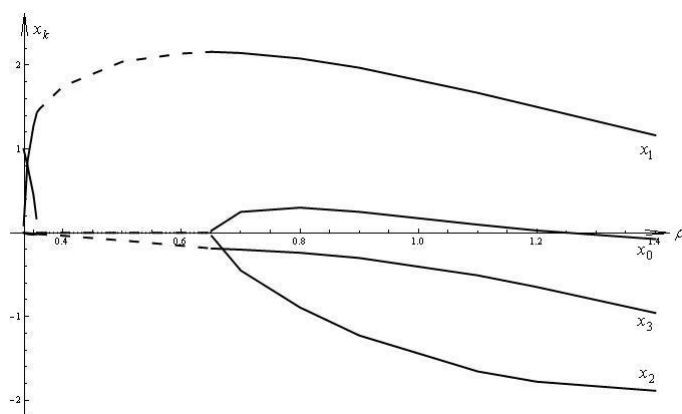


Рис. 2. Поведение стационарных точек системы (14) при $\beta = 3$.

Как видно из рис. 1, при $\rho = 5$ параметры автомодельного цикла

$$\xi_1^\pm(t, \theta, \beta, \rho) = x_0 \cos t \pm x_1 \sin t \cos \theta + x_2 \cos t \cos 2\theta \pm x_3 \sin t \cos 3\theta \quad (15)$$

стабилизируются и практически не меняются при дальнейшем увеличении параметра ρ . Стационарная точка, компоненты которой на рис. 2 изображены пунктиром, неустойчива. При $\rho = 1.4$ параметры автомодельного цикла (15), как и выше, стабилизируются и практически не меняются при дальнейшем увеличении параметра ρ .

Отметим теперь, что переход ρ через $\frac{1}{2}(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})$ приводит увеличению индекса неустойчивости нулевого решения системы (13). В результате от нуля отщепляется окружность стационарных точек $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ такая, что

$$\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta) = \{ \exp(i\varphi)(0, ix_1(\rho, \beta), 0, ix_3(\rho, \beta)), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}.$$

Здесь $(0, x_1(\rho, \beta), 0, x_3(\rho, \beta)), x_1(\rho, \beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы (14).

Окружности стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (13) при возрастании ρ качественно изменяются так же, как и окружности стационарных точек $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (7). А именно, существует такое $\tilde{\beta}$, что при $\beta \in (0, \tilde{\beta})$ окружности $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ сохраняют устойчивость на промежутке $(\frac{1}{\beta}, \infty)$ изменения параметра ρ .

Пусть теперь $\beta > \tilde{\beta}$, тогда существует такое $\tilde{\rho}_1(\beta)$, что на промежутке $(\frac{1}{\beta}, \tilde{\rho}_1(\beta))$ окружности $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ устойчивы. При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ они сливаются и умирают на окружности $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ (см. рис. 3).

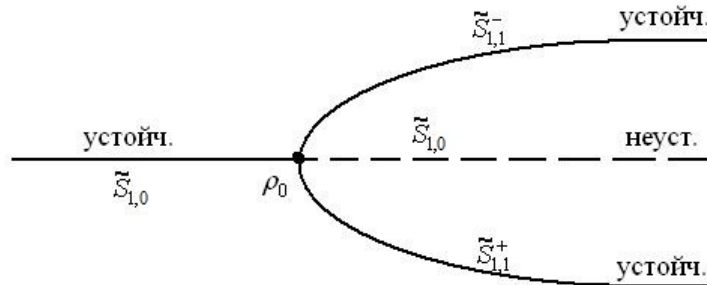


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы окружностей стационарных точек $\tilde{S}_{1,0}(\rho, \beta)$, $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$, $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$, случай $\beta < \tilde{\beta}$.

При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ обретает устойчивость и сохраняет её на промежутке $(\tilde{\rho}_1(\beta), \tilde{\rho}_2(\beta))$. При $\rho = \tilde{\rho}_2(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ теряет устойчивость и от неё ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ (см. рис. 4).

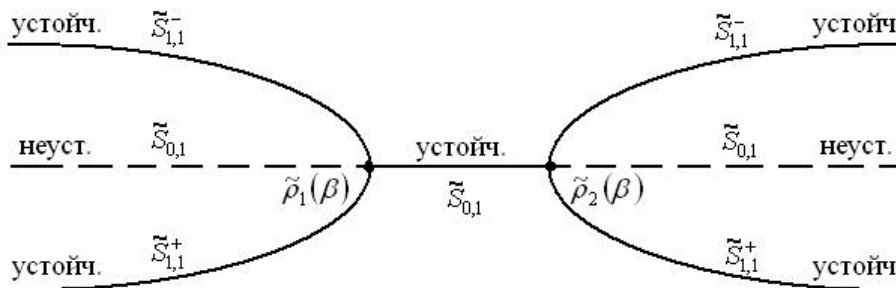


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы окружностей стационарных точек $\tilde{S}_{1,0}(\rho, \beta)$, $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$, $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$, случай $\beta > \tilde{\beta}$.

С помощью пакета “*Mathematica*” установлено, что для случая четырехмодовой аппроксимации Галёркина исходной задачи справедливо равенство $\tilde{\beta} = 1.98$. Так, если $\beta = 2$, то $\tilde{\rho}_1(2) = 0.63$, $\tilde{\rho}_2(2) = 0.74$. Если же $\beta = 3$, то $\tilde{\rho}_1(3) = 0.356$, $\tilde{\rho}_2(3) = 0.65$. Таким образом, динамике аттракторов в системе (13) отвечает динамика аттракторов в системе (7) вблизи бифуркационных значений параметра ρ .

При отходе ρ от критических значений ρ_0 , $\tilde{\rho}_1(\beta)$, $\tilde{\rho}_2(\beta)$ усиливаются отличия количественных характеристик соответствующих аттракторов в системах (13) и (7). При этом диапазон применения по параметру ρ формулы (12) является узким: усиливается влияние высших гармоник. Представление же периодических по времени t решений задачи (1)–(2) в виде (15) можно использовать на достаточно большом промежутке изменения параметра ρ .

Согласно проведенным численным расчетам, имеют место следующие приближенные равенства для автомодельных циклов задачи (1)–(2):

$$\begin{aligned} \xi_1^+(t, \theta, 1, 7) &= -0.091 \cos t + 0.777 \sin t \cos \theta - 1.112 \cos t \cos 2\theta - \\ &\quad - 0.684 \sin t \cos 3\theta, \\ \xi_1^+(t, \theta, 2, 7) &= -0.131 \cos t + 0.489 \sin t \cos \theta - 1.186 \cos t \cos 2\theta - \\ &\quad - 1.067 \sin t \cos 3\theta, \\ \xi_1^+(t, \theta, 3, 7) &= -0.116 \cos t + 0.352 \sin t \cos \theta - 1.188 \cos t \cos 2\theta - \\ &\quad - 1.334 \sin t \cos 3\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

Качественные отличия систем (13) и (7) заключаются в том, что в системе (13) при прохождении параметра ρ через критические значения имеет место бифуркация рождения неустойчивых окружностей неподвижных точек, аналогов которых в системе (7) нет. Так, при прохождении параметра ρ через значение $2\rho_0$ индекс неустойчивости окружности $\tilde{S}_{1,0}$, возрастая на порядок, становится равным 2. При этом из $\tilde{S}_{1,0}$ бифурцируют две окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,2}(\rho, \beta) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(\sqrt{3 - 2\alpha_2}, 0, \pm 2i\sqrt{\alpha_2 - 1}, 0 \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\} \tag{17}$$

с индексом неустойчивости 1.

Исследование устойчивости окружностей $\tilde{S}_{1,2}(\rho, \beta)$ приводит к эрмитовой блочно-диагональной матрице, состоящей из двух блоков. Одним блоком является матрица, собственные значения которой аналогичны спектру матрицы Q_1 , т. е. равны $\{0, -2, -2 + O((\alpha_2 - 1)^2), -2(\alpha_2 - 1) + O((\alpha_2 - 1)^2)\}$.

Другой блок — матрица, у которой при малых $\rho - 2\rho_0$ одна её простая точка спектра принадлежит положительной полуоси, остальные — отрицательной. При отходе параметра ρ от бифуркационного значения $2\rho_0$ и прохождении им значения ρ^* происходит переход указанной матрицы в класс устойчивых. Таким образом, автомодельный цикл

$$\xi_{1,2}^{\pm} = \xi_{1,2}^{\pm}(t, \theta, \delta) = \sqrt{3 - 2\alpha_2} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_2 - 1} \sin t \cos 2\theta + O(\delta) \quad (18)$$

задачи (1)–(2), бифурцирующий из неустойчивой синфазной волны $\xi_{1,0}(t, \theta, \delta)$ при прохождении параметра ρ бифуркационного значения $2\rho_0 = \frac{2}{\beta}$, приобретает устойчивость при отходе ρ от бифуркационного значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучено поведение автомодельных режимов феноменологического уравнения безгазового горения вдоль полосы — задача (1)–(2). В силу теоремы 1 при увеличении бифуркационного параметра ρ и его прохождении через значение $\rho_0 = \beta^{-1}$ из теряющего устойчивость пространственно однородного цикла $\xi_{1,0}(t, \theta, \delta)$ — синфазной волны — ответвляется пара экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных (автомодельных) циклов $\xi_{1,1}^{\pm}(t, \theta, \delta)$, переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l - x$. Их форма при малых $\rho - \rho_0$ вполне определяется двумя параметрами. Дальнейшее увеличение параметра ρ и его прохождение через значение $\rho_0 = 2/\beta$ приводит к бифуркации из уже неустойчивой синфазной волны пары пространственно неоднородных циклов $\xi_{1,2}^{\pm}(t, \theta, \delta)$, также переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l - x$.

Для анализа динамики автомодельных циклов при отходе параметра ρ от бифуркационного значения $\rho = k/\beta$ построена аппроксимация Галеркина по системе функций $\cos k\theta$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Проанализированы двух- и четырехмодовые модели исходной задачи — системы (7) и (13) соответственно. Проведенный бифуркационный анализ указанных систем даёт веские основания для следующего утверждения. Качественно исходную задачу отражает её упрощенная форма — система (7). Следует отметить, что полученные для $\beta = 0$ результаты Б. А. Маломеда [8] распространяются и на общий случай $\beta > 0$. А именно, существует такое значение параметра β , $\beta = \tilde{\beta}$ что:

- при $\beta < \tilde{\beta}$ и увеличении ρ автомодельные циклы $\xi_{1,1}^{\pm}(t, \theta, \delta)$, усложняясь по форме, сохраняют устойчивость. Следует отметить, что увеличение степени аппроксимации исходной задачи не приводит к существенным качественным изменениям. Однако при этом становятся значимыми количественные отличия

- в значениях параметров автомодельных циклов. Для четырехмодовой модели найдено $\tilde{\beta} = 1.98$, а для восьмимодовой модели — $\tilde{\beta} = 1.93$
- при $\beta > \tilde{\beta}$ автомодельные циклы существуют и устойчивы на промежутке $(\beta^{-1}, \rho_1(\beta))$ изменения параметра ρ . При $\rho = \rho_1(\beta)$ они сливаются и исчезают, передавая при этом устойчивость пространственно неоднородному циклу $\xi_{0,1}^{\pm}(t, \theta, \delta)$, инвариантному относительно преобразования $x \rightarrow l - x$. Этот цикл рождается из неустойчивого нулевого решения тогда, когда индекс неустойчивости нуля, увеличиваясь на единицу, становится равным двум. При рождении он имеет форму стоячей волны и фактически сохраняет её при возрастании бифуркационного параметра ρ . При дальнейшем увеличении ρ и прохождении его через бифуркационное значение $\rho_2(\beta)$ он теряет устойчивость, испуская при этом пару устойчивых автомодельных циклов $\xi_{1,1}^{\pm}(t, \theta, \delta)$, сохраняющих устойчивость при дальнейшем увеличении ρ . Для четырехмодовой модели при $\beta = 2$ найдено $\tilde{\rho}_1(2) = 0.633$, $\tilde{\rho}_2(2) = 0.749$, а при $\beta = 3$ — $\tilde{\rho}_1(3) = 0.355$, $\tilde{\rho}_2(3) = 0.65$. Для восьмимодовой модели при $\beta = 2$ найдено $\tilde{\rho}_1(2) = 0.6331$, $\tilde{\rho}_2(2) = 0.7445$, а при $\beta = 3$ — $\tilde{\rho}_1(3) = 0.3559$, $\tilde{\rho}_2(3) = 0.6471$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алдушин, А. П., Зельдович, Я. Б., Маломед, Б. А. К феноменологической теории спинового горения // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251. — № 5. — С. 1102–1106.
ALDUSHIN, A., ZELDOVICH, Y. & MALOMED, B. (1980) To the phenomenological theory of spin combustion. *The reports of the USSR Academy of Sciences*. 251 (5). p. 1102–1106.
2. Алдушин, А. П., Маломед, Б. А. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения // Физика горения и взрыва. — 1981. — Т. 17. — № 1. — С. 3–12.
ALDUSHIN, A. & MALOMED, B. (1981) Phenomenological description of heterogeneous nonstationary combustion waves. *Physics of combustion and explosion*. 17(1). p. 3–12.
3. Зельдович, Я. Б. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах // Известия вузов. Серия “Радиофизика”. — 1982. — Т. 15. — № 6. — С. 591–618.
ZELDOVICH, Y. (1982) Complex wave regimes in distributed dynamic systems. *Izvestiya vuzov Radiophysics series*. 15 (6). p. 591–618.
4. Мищенко, Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
MISCHENKO, E. and SADOVNICHY, V. (2005) *Autowave processes in nonlinear media with diffusion*. Moscow: Fizmatlit.
5. Самойленко, А. М., Белан, Е. П. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // Доклады РАН. — 2006. — Т. 406. — № 6. — С. 738–741.

- SAMOILENKO, A. & BELAN, E. (2006) Dynamics of traveling waves of the phenomenological equation of spin combustion. *Reports of the Russian Academy of Sciences*. 406 (6). p. 738–741.
6. Самойленко, А. М., Белан, Е. П. Вращающиеся волны феноменологического уравнения спинового горения // Доклады РАН. — 2008. — Т. 421. — № 6. — С. 749–753.
- SAMOILENKO, A. & BELAN, E. (2008) Rotating waves of the phenomenological equation of spin combustion. *The reports of the Russian Academy of Sciences*. 421 (6). p. 749–753.
7. Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х. Явление буферности в теории горения // Доклады РАН. — 2004. — Т. 396. — № 2. — С. 170–173.
- KOLESOV, A. & ROZOV, N. (2004) Buffer phenomenon in combustion theory. *The reports of the Russian Academy of Sciences*. 396(2). p. 170–173.
8. Маломед, Б. А. Распространение автоколебательных волн вдоль полосы // Изв. вузов, сер. “Радиофизика”. — 1981. — Т. 14. — № 5. — С. 571–576.
- MALOMED, B. (1981) Distribution the self-oscillating waves along the strip. *Izvestiya vuzov Radiophysics series*. 14 (5). p. 571–576.
9. Белан, Е. П., Шиян, О. В. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы // Динамические системы. — 2009. — Т. 27. — С. 3–16.
- BELAN, E. & SHIYAN, O. (2009) Self-oscillating mode of burning on the strip. *Dynamicheskije Sistemy*. 27. p. 3–16.
10. Белан, Е. П., Шиян, О. В. Устойчивые режимы горения вдоль полосы // Ученые записки ТНУ, сер. “Физ.-мат. науки”. — 2010. — Т. 62. — № 1. — С. 1–16.
- BELAN, E. & SHIYAN, O. (2010) Stability model of burning on the strip. *Scientific notes of Taurida national University Physico-mathematical science series*. 62(1). p. 1–16.
11. Шиян, О. В. Анализ автомодельных режимов горения вдоль полосы // Динамические системы. — 2011. — Т. 29. — № 1. — С. 131–144.
- SHIYAN, O. (2011) Analysis of auto-oscillation model of burning on the strip. *Dynamicheskije Sistemy*. 29. p. 131–144.
12. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
- HENRY, D. (1985) *Geometric theory of semilinear parabolic equation*. Moscow: Mir.
13. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.. — М.: Наука, 1969. — 410 с.
- BOGOLUBOV, N. and MITROPOLSKY, Y. (1969) *Asymptotic methods in the theory of nonlinear vibrations*. Moscow: Nauka.

Статья поступила в редакцию 25.11.2015

Kovalenko A. I. and Smolich V. P. 2015. *M/G/1 queue with system disasters and impatient customers when system is down. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 1, pp. 7 – 16.

MSC2010: 60K25

В статье рассматривается система типа $M/G/1$ с поломками, в которой в процессе ремонта может накапливаться очередь, но при этом заявки проявляют нетерпение. Время обслуживания и время ремонта линии — произвольные абсолютно непрерывные случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Найдены вероятностные характеристики системы в стационарном режиме.

Ключевые слова: система массового обслуживания, ненадежная линия обслуживания, нетерпеливые заявки, стационарный режим работы СМО, вероятностные характеристики СМО.

Андропова О. А. О спектральных задачах со средней интенсивностью внутренней диссипацией энергии / О. А. Андропова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 17 – 31.

УДК: 517.9:532

В статье рассмотрены спектральные задачи, порожденные начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Приведены простейшие свойства спектра данной задачи. Более тонкие свойства спектра зависят от отношения областей определения главных операторов задачи. При этом подходе возникают три различных случая: малой, средней и сильной интенсивности внутренней диссипации. В статье приведены основные результаты исследования этих проблем, из которых становится понятно, что спектр задач достаточно своеобразен. Это обосновывает рассмотрение модельных спектральных задач, связанных с исходными. Так, ранее был подробно разобран случай малой внутренней диссипации. Данная работа посвящена случаю средней интенсивности диссипации. Здесь исследуется модельная задача, которая демонстрирует структуру спектра в пограничных случаях, когда средняя диссипация близка к малой или к сильной интенсивности. Результатом исследования случая средней интенсивности внутренней диссипации является подтверждение общих результатов исследования: получены утверждения о локализации спектра, о полноте

и базисности системы корневых элементов. Но при этом выявлены новые эффекты, связанные с особенностью модельной задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, компактный самосопряжённый оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.

Костинский А. С. О принципах сплайн-экстраполяции / А. С. Костинский // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 32–51.

УДК: 519.652+550.3

Возможные приложения сплайновой математики обсуждаются в ситуации, характерной для геофизических наблюдений, когда известны только числовые значения временного ряда, построить физическую модель закономерности появления экспериментальных точек либо невозможно, либо нерационально. Простая идея сплайн-экстраполяции оказывается единственной: сетка узлов на заданном сегменте дополняется прогнозируемой точкой, строится “прогностический” сплайн на расширенной сетке, необходимо обеспечить минимум интеграла квадратичного отклонения, зависящего от ординаты добавочной точки как от параметра. Используется разложение по базису фундаментальных сплайнов, нормализованных на расширенной сетке. Проблема краевых условий для “базового” сплайна, интерполирующего экспериментальные точки, решается за счет дополнительного “сглаживания”: сплайн выбирается наименее отличающимся от полинома третьей степени. Показано, что возможна, как простейший вариант, вычислительная схема, приводящая к единственному заведомо существующему решению для ординаты прогнозируемой точки. Для равномерной сетки узлы алгоритма экстраполяции представляются в виде последовательности разложений по координатам точек, коэффициенты разложений доступны аналитически. В итоге ордината прогнозируемой точки не зависит от шага равномерной сетки, это существенно для оценки ближайшего следующего в серии регулярных наблюдений, когда принципиальна не величина интервала между измерениями, а его неизменность.

Ключевые слова: интерполяция, принципы экстраполяции, кубические сплайны.

Переварюха А. Ю. Метод когнитивной формализации в анализе многофакторной экологической проблемы Каспия / А. Ю. Переварюха // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 52 – 65.

УДК: 519.688, 573.7

Взаимодействия процессов в нарушенных экосистемах часто оказываются трудно предсказуемыми для специалистов. Классические динамические модели могут включать ограниченное число факторов, действующих на баланс популяций непосредственно. В распространенном случае перехода к хаотическому режиму дискретные модели становятся ограничены в прогностических возможностях. Структурировать информацию о взаимосвязях между факторами в терминах предметной области позволяют графовые схемы. Для продолжения наших исследований использовано расширенное представление графовой модели в форме когнитивного знакового орграфа. Формализованы сведения о функционировании биотических компонент экосистемы Каспийского моря при включении внешних воздействий с четырьмя типами дуг влияния для ситуации середины 1980 гг., когда оптимальной полагалась доля $h = 3/5$ изъятия нерестового запаса осетровых. В инициализируемом импульсном процессе реализуются направленные передачи воздействия из управляющих вершин орграфа, позволяющие выявлять конкурирующие цепи передачи влияния. На основе проявляющегося контура торможения обоснована гипотеза о быстро достижимом пределе приращенния промыслового запаса осетровых рыб, которое можно получить методами искусственной интродукции молодежи стандартных размерно-весовых показателей. На основании сравнения с коллапсом запасов трески Канады обосновано, что существовавшие методы определения промысловых прогнозов в стратегии оптимальной эксплуатации на самом деле приводят к истощению биоресурсов.

Ключевые слова: когнитивные графы, экологические процессы, слабоформализованные области знаний, структурно-динамическое моделирование

Плышевская С. П. Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче / С. П. Плышевская // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 66 – 76.

УДК: 517.957

На отрезке рассматривается каноническое параболическое уравнение с условием Неймана. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и

устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений рассматриваемого уравнения. Эти решения ответвляются от нулевого решения при потере устойчивости нуля в результате уменьшения коэффициента диффузии и прохождения его через бифуркационное значение 1. Получены приближённые представления для пространственно-неоднородных решений в достаточно широком диапазоне изменения бифуркационного параметра. Эти приближённые представления соответствуют результатам численных расчётов. Показано, что приближённые стационарные решения, взятые в качестве начальных функций исходной задачи, порождают медленно меняющиеся решения (метаустойчивые структуры).

Ключевые слова: параболическая задача, центральные многообразия, устойчивость, внутренний переходный слой, стационарные решения.

Цветков Д. О. Оператор подход к задаче о малых движениях стратифицированных жидкостей / Д. О. Цветков // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 77–99.

УДК: 517.98

Изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Шиян О. В. Динамика периодических решений нестационарного горения вдоль полосы / О. В. Шиян // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 100–114.

УДК: 517.6+530.1

Рассматривается феноменологическое уравнение распространения нестационарных режимов горения вдоль полосы описываемое параболическим уравнением Ван-дер-Полевского типа с малой диффузией и краевыми условиями Неймана.

Изучается вопрос о существовании, асимптотической форме и характере устойчивости пространственно неоднородных, периодических по t решений бифурцирующих из пространственно однородного — синфазной волны — и из нулевого решения — стоячих волн. Для решения поставленной задачи используются методы нелинейной механики, такие как метод центральных многообразий и метод Галёркина. Приведена теорема о существовании, асимптотической форме и устойчивости первого автомодельного цикла, бифурцирующего из теряющей устойчивость синфазной волны исходной задачи в малой окрестности бифуркационного параметра. Посредством численных расчетов и конечномерной аппроксимации Галёркина проведен бифуркационный анализ автомодельных режимов при удалении в область надкритичности. Найдены значения бифуркационных параметров, при которых пространственно неоднородные периодические решения, бифурцирующие из пространственно однородного и нулевого решения, приобретают устойчивость. Описан механизм обретения ими устойчивости.

Ключевые слова: бифуркация, параболические уравнения, периодические решения, устойчивость, автомодельные циклы.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Андропова Ольга
Андреевна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики и информатики факультета водных ресурсов и энергетики Академии строительства и архитектуры Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: o.andronova@list.ru

*Коваленко Александр
Ильич*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: alexandkoyal@mail.ru

*Костинский
Александр Сергеевич*

научный сотрудник Института сейсмологии и геодинамики Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: kostinsky@yahoo.com

*Переварюха Андрей
Юрьевич*

к. т. н., с. н. с. лаборатории Прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, РФ
e-mail: madelf@pisem.net

*Плышевская Светлана
Петровна*

ассистент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: splyshevskaya@mail.ru

*Смолич Владимир
Павлович*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: svp54@mail.ru

*Цветков Денис
Олегович*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: tsvetdo@gmail.com

*Шиян Ольга
Владимировна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры общетехнических дисциплин факультета механизации производства и технологии переработки сельхозпродукции Академии биоресурсов и природопользования Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, пос. Аграрное, г. Симферополь, РФ
e-mail: olgshiyana@yandex.ru

Подписано к печати 14.12.2015. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13 п. л. Тираж 50 экз. Заказ № НП/23.

Отпечатано в издательском отделе КФУ имени В. И. Вернадского
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4